

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SAMY IBRAHIM

INTERPRETAÇÕES ALGÉBRICAS E COMBINATÓRIA DOS NÚMEROS  
TRIANGULARES

CURITIBA

2022

SAMY IBRAHIM

INTERPRETAÇÕES ALGÉBRICAS E COMBINATÓRIA DOS NÚMEROS  
TRIANGULARES

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática .

Orientador: Luiz Antonio Ribeiro de Santana

CURITIBA

2022



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - 31075010001P2

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **SAMY IBRAHIM** intitulada: **INTERPRETAÇÕES ALGÉBRICAS E COMBINATÓRIA DOS NÚMEROS TRIANGULARES**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 29 de Abril de 2022.

Assinatura Eletrônica

29/04/2022 22:05:59.0

LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

30/04/2022 20:39:04.0

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

30/04/2022 12:57:50.0

CRISTIAN SCHMIDT

Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

---

CAMPUS CENTRO POLITECNICO - CURITIBA - Paraná - Brasil

CEP 81531-980 - Tel: (41) 3361-3041 - E-mail: aldemirsp@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.

Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 179973

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://www.prppg.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp>  
e insira o código 179973

*A cada um que creu em mim com o coração.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus amigos que toparam encarar comigo o desafio do PROFMAT, doando-se para que este sonho se tornasse realidade.

Aos amigos que fiz durante o curso que me desafiaram e que me fizeram mergulhar no mundo da curiosidade e da sabedoria.

À minha família.

Ao meu professor orientador, Luiz Antônio, pela paciência e servindo-me como inspiração na arte de educar.

Aos excelentes professores que tive nesta trilha, em especial ao professor Carlão, qual eu tive o imenso prazer de conhecer antes de se aposentar e uma grande inveja boa do seu conhecimento.

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O presente trabalho trata-se de um detalhamento a respeito dos números triangulares abordando algumas propriedades bastante curiosas e bem conectadas com sequências, recorrências, números binomiais, triângulo de Pascal, triangulares de Mersenne e alguns números triangulares curiosos. Está apresentado também algumas interpretações do triângulo de Pascal.

**Palavras-chaves:** Triângulo de Pascal, Números triangulares, Recorrências, Sequências, triangulares de Mersenne.

## ABSTRACT

The present work is about a detail about the triangular numbers approaching some very curious properties and well connected with sequences, recurrences, binomial numbers, Pascal's triangle, Mersenne's triangles and some curious triangular numbers. Some interpretations of the Pascal triangle are also presented.

**Key-words:** Pascal's Triangle, Triangular Numbers, Recurrence, Sequences, Mersenne's Triangular.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| FIGURA 1 – ESTRELAS E BARRAS . . . . .                      | 21 |
| FIGURA 2 – OS SEIS PRIMEIROS NÚMEROS TRIANGULARES . . . . . | 35 |
| FIGURA 3 – OS SEIS PRIMEIROS NÚMEROS TRIANGULARES . . . . . | 35 |



## SUMÁRIO

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>1</b>  | <b>INTRODUÇÃO</b>  | <b>9</b>  |
| <b>2</b>  | <b>RESULTADOS PRELIMINARES</b>                           | <b>10</b> |
| 2.1       | Fatorial   | 10        |
| 2.2       | Número binomial  | 10        |
| 2.2.1     | Identidade de Stifel no triângulo de Pascal              | 11        |
| 2.2.2     | Teorema Binomial   | 12        |
| 2.3       | Triângulo de Pascal                                      | 13        |
| 2.3.1     | Identidades combinatórias                                | 16        |
| <b>3</b>  | <b>TEOREMA DAS “ESTRELAS E BARRAS”</b>                   | <b>21</b> |
| <b>4</b>  | <b>NÚMEROS DE MERSENNE</b>                               | <b>23</b> |
| 4.1       | Pequeno teorema de Fermat                                | 24        |
| <b>5</b>  | <b>NÚMEROS TRIANGULARES</b>                              | <b>25</b> |
| 5.0.1     | Algumas propriedades dos números triangulares            | 29        |
| 5.0.1.1   | Números triangulares módulo um inteiro                   | 29        |
| 5.0.1.1.1 | Aritmética modular                                       | 29        |
| 5.0.1.2   | Números triangulares e quadrados perfeitos               | 34        |
| 5.0.2     | Algumas identidades dos números triangulares             | 35        |
| 5.0.2.1   | Relação entre números triangulares                       | 41        |
| 5.0.3     | O número da besta  | 44        |
| 5.0.4     | Aparição dos números triangulares no triângulo de Pascal | 44        |
| 5.0.5     | Números triangulares de Mersenne                         | 45        |
| <b>6</b>  | <b>TODO NÚMERO PERFEITO É TRIANGULAR</b>                 | <b>47</b> |
|           | <b>REFERÊNCIAS</b>                                       | <b>53</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre os números triangulares, o triângulo de Pascal, as relações existentes entre eles, problemas com aplicações e algumas curiosidades.

O objetivo deste trabalho é expandir o conhecimento do leitor a respeito de conteúdos abordados no ensino básico, mas que não recebem a devida atenção.

Primeiramente, há uma apresentação dos resultados preliminares que contribuem para melhor compreensão do que é o triângulo de Pascal, números de Mersenne e os números triangulares.

Aqui, exploramos algumas propriedades dos números triangulares que são pouco abordadas e fazemos o link com sequências e relacionamos com a teoria de números. Algumas das propriedades são curiosidades a respeito de números "místicos" ou com algum significado como a associação do número 666 com o "mau".

Após isto, há a apresentação e demonstração de algumas propriedades que são usadas nas conexões entre o triângulo de Pascal e os números triangulares de modo a aplicar alguns deles em problemas que estão aqui abordados.

Tentamos dar significado ao conteúdo combinatório que, com frequência, é apresentado de forma mecânica no ensino médio. Dentro do novo Ensino Médio pode-se explorar este tema dentro de itinerários quais dependem da escolha dos alunos.

Por fim, apresentamos uma série de interpretações algébricas e combinatórias dos números triangulares e de alguns números binomiais do triângulo de Pascal, sendo este o objetivo deste registro.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES

### 2.1 FATORIAL

**Definição 1** Definimos o fatorial de um número natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , e representamos por  $n!$  o produto  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Por convenção, para os casos  $n = 1$  e  $n = 0$  temos  $1! = 1$  e  $0! = 1$  (MORGADO, 2015).

### 2.2 NÚMERO BINOMIAL

**Definição 2** Sejam  $n$  e  $p$  inteiros não negativos. É definido número binomial como

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!},$$

onde  $0 \leq p \leq n$  e  $C_{n,p}$  é o número de conjuntos que podem ser escolhidos com  $p$  elementos dentre  $n$  que estão disponíveis para escolha.

Desta definição podemos observar que

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{n-n} = 1.$$

Além disso decorre que

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

uma vez que se  $p = n$  já verificamos a validade. Segue, então, que

$$\begin{aligned} C_{n,p} &= \binom{n}{p} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{n-p}. \end{aligned}$$

Da consequência acima, fica claro que, numa mesma linha do triângulo de Pascal, existem 2 números binomiais que resultam no mesmo valor. Estes são chamados de *binomiais complementares*.

### 2.2.1 Identidade de Stifel no triângulo de Pascal

A relação de recorrência

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad (2.1)$$

é chamada de identidade de Stifel e pode ser verificada algebricamente já que

$$\binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!(p-1)!}$$

e

$$\binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{((n-1)-p)!p!}.$$

Prova:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(p-1))!(p-1)!} \\ &\quad + \frac{(n-1)!}{((n-1)-p)!p!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{((n-p)-1)!p!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot p + (n-1)!(n-p)}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Essa demonstração também pode ser feita através de argumentos combinatórios. Considere, então, um conjunto  $\mathcal{A}$ , com  $n$  elementos. O total de subconjuntos com  $p$  elementos é o número binomial  $\binom{n}{p}$ . Destes subconjuntos com  $p$  elementos, há uma certa quantidade de subconjuntos que possuem um determinado elemento, enquanto os demais não o terão, ou seja, são subconjuntos de  $p$  elementos em que o elemento em questão não pertencerá a eles. Podemos fazer a separação destes conjuntos em dois casos:

1. O elemento conhecido pertence ao subconjunto de  $\mathcal{A}$ . Logo existem  $\binom{n-1}{p-1}$  subconjuntos, pois afinal selecionando o elemento dado, faremos a escolha de  $p-1$  outros elementos dentre  $n-1$  possíveis;
2. O elemento conhecido não pertence ao subconjunto de  $\mathcal{A}$ . Neste caso não poderemos mais considerar o elemento dado como elemento de  $\mathcal{A}$ , mas a quantidade de escolhas de elementos para a construção dos subconjuntos de  $\mathcal{A}$  ainda deve ser  $p$ . Daí segue que a quantidade de subconjuntos nas atuais condições é  $\binom{n-1}{p}$ . Como não há um terceiro caso então o total de subconjuntos com  $p$  elementos, dado o conjunto  $\mathcal{A}$  é:  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ , como queríamos demonstrar.

### 2.2.2 Teorema Binomial

Considerando um número natural  $n$ , o binômio de Newton corresponde à expansão da  $n$ -ésima potência de um binômio. Para provarmos a validade da equação utilizaremos a relação de Stifel (2.1) e os princípios aditivo e multiplicativo enunciados, respectivamente, a seguir:

Sejam  $A$  e  $B$  eventos mutuamente exclusivos. Então a execução da tarefa  $A$  ou  $B$  poderá ser dada de  $n(A) + n(B)$  formas diferentes, em que  $n(A)$  é a quantidade de maneiras de executar a tarefa  $A$  e  $n(B)$  é a quantidade de maneiras de executar a tarefa  $B$ .

Duas tarefas  $A$  e  $B$  podem ocorrer nessa ordem de  $n(A) \cdot n(B)$  maneiras distintas.

Vejamos a aplicação destes princípios aplicados às seguintes expansões:

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a) \\ &= xx + xa + ax + aa \\ &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

Assim, pode-se fazer uma opção de escolha de dois fatores  $x$ , duas opções de escolha de um fator  $x$  e um fator  $y$  e uma opção de escolha de dois fatores  $y$ .

$$\begin{aligned}(x + a)^3 &= (x + a)(x + a)(x + a) \\ &= xxx + xxa + xax + axx + aax + xaa + axa + aaa \\ &= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3\end{aligned}$$

Assim, pode-se fazer uma opção de escolha de três fatores  $x$ , três opções de escolha de dois fatores  $x$  e um fator  $a$ , três opções de escolha de um fator  $x$  e dois fatores  $a$  e uma opção de escolha de três fatores  $a$ .

$$\begin{aligned}(x + a)^4 &= (x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \\ &= xxxx + xxxa + xxax + xaxx + axxx + xxaa + xaxa + axxa + \\ &+ axax + xaax + aaxx + aaaa + aaxa + axaa + xaaa + aaaa \\ &= x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4\end{aligned}$$

Assim, pode-se fazer uma opção de escolha de quatro fatores  $x$ , quatro opções de escolha de três fatores  $x$  e um fator  $a$ , seis opções de escolha de dois fatores  $x$  e dois fatores  $a$ , quatro opções de escolha de um fator  $x$  e três fatores  $a$  e uma opção de escolha de quatro fatores  $a$ .

Seguindo a mesma linha de raciocínio e expandindo para  $(x + a)^n$  podemos escrever:

$$(x + a)^n = \underbrace{(x + a)(x + a) \dots (x + a)}_{n \text{ fatores.}}$$

$$\begin{aligned} (x + a)^n &= \binom{n}{n} \underbrace{xx \dots x}_{n \text{ fatores}} \binom{n}{0} + \binom{n}{n-1} \underbrace{xx \dots x}_{n-1 \text{ fatores}} a \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{1} x \underbrace{aa \dots a}_{n-1 \text{ fatores}} \binom{n}{n-1} + \\ &\quad + \binom{n}{0} \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ fatores}} \binom{n}{n} \end{aligned}$$

**Teorema 1** *Sejam  $x$  e  $y$  quaisquer números reais, e  $n$  um inteiro não negativo. Então*

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r. \quad (2.3)$$

*Prova:* É conhecido que  $(x + y)^n = (x + y)(x + y) \dots (x + y)$ . Todos os termos da expansão são da forma

$$Cx^{n-r}y^r,$$

onde a constante  $C$  é o numero de ocorrências da parcela  $x^{n-r}y^r$  na expansão, e  $0 \leq r \leq n$ . Um  $x$  em  $x^{n-r}$  pode ser escolhido de qualquer dos  $n - r$  fatores no lado direito, e um  $y$  em  $y^r$  de qualquer dos  $r$  fatores restantes. Logo os  $n - r$   $x$ 's podem ser escolhidos de  $\binom{n}{n-r}$  diferentes maneiras e os  $r$   $y$ 's de  $\binom{n}{r}$  formas. Então, pelo princípio multiplicativo,  $C = \binom{n}{n-r} \binom{n}{r} = \binom{n}{r}$ .

### 2.3 TRIÂNGULO DE PASCAL

Os números binomiais  $\binom{n}{r}$  podem ser dispostos triangularmente, construindo o triângulo de Pascal. Abaixo segue uma representação de uma parte do triângulo. Vale destacar que ele continua infinitamente.







pares e nas diagonais ímpares será igual a soma da  $n$ -ésima diagonal do triângulo de Pascal. As diagonais pares são:

$$C_{n-2}^0, C_{n-3}^1, C_{n-4}^2, \dots$$

e as diagonais ímpares são:

$$C_{n-3}^0, C_{n-4}^1, C_{n-5}^2, \dots$$

Nós podemos efetuar a soma desses números da seguinte forma:

$$C_{n-2}^0 + (C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1) + (C_{n-4}^2 + C_{n-4}^1) + \dots$$

No entanto, para os coeficientes binomiais do triângulo de Pascal,

$$C_{n-2}^0 = C_{n-1}^0 = 1$$

e

$$\begin{aligned} C_k^1 + C_k^{i+1} &= \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i} + \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)(k-i)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i \cdot (i+1)} \\ &= \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i} \left(1 + \frac{k-i}{i+1}\right) \\ &= \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i} \cdot \frac{i+1+k-i}{i+1} \\ &= \frac{(k+1)k(k-1)\dots(k-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i \cdot (i+1)} \end{aligned}$$

Portanto, chegamos à expressão

$$C_{n-2}^0, C_{n-3}^1, C_{n-4}^2, \dots = C_{n-3}^0, C_{n-4}^1, C_{n-5}^2, \dots$$

para representar a soma dos termos do  $n$ -ésima diagonal crescente do triângulo de Pascal. Assim, como sabemos, as duas primeiras diagonais são 1, e agora vemos que a soma de todos os números na diagonal  $(n-1)$  mais a soma de todos os números na  $(n-2)$  diagonal é igual à soma dos elementos da  $n$ -ésima diagonal, e provamos que a soma dos termos no  $n$  a diagonal é sempre equivalente ao  $n$ -ésimo número de Fibonacci.

### 2.3.1 Identidades combinatórias

Algumas vezes nos deparamos com a necessidade de modificar a forma como um número é escrito. Para isso existem algumas identidades na matemática e nos números binomiais não é diferente. Abaixo exibiremos e demonstraremos algumas identidades combinatórias. Considere  $k, n, r \in \mathbb{Z}_+$ , onde  $0 \leq r \leq k \leq n$ .

1.

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{(n-r)! \cdot r(r-1)!} \\
 &= \frac{n}{r} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!(r-1)!} \\
 &= \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1}.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

2.

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{n-r} \binom{n-1}{r}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{(n-r)((n-r)-1)! \cdot r!} \\
 &= \frac{n}{n-r} \cdot \frac{(n-1)!}{((n-r)-1)! \cdot r!} \\
 &= \frac{n}{n-r} \binom{n-1}{r}.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

3. Lei da sucessão de Cardano

$$\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r} \binom{n}{r-1}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{r} &= \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \\
 &= \frac{(n-r+1)n!}{(n-r+1)(n-r)! \cdot r(r-1)!} \\
 &= \frac{(n-r+1)n!}{(n-r+1)! \cdot r(r-1)!} \\
 &= \frac{(n-r+1)n!}{(n-(r-1))! \cdot r(r-1)!} \\
 &= \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{n!}{(n-(r-1))! \cdot (r-1)!} \\
 &= \frac{n-r+1}{r} \binom{n}{r-1}.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

## 4. Identidade de Newton

$$\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$$

Prova:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{r} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-r)!r!} \\ \binom{n}{k} \binom{k}{r} &= \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!} \\ \binom{n}{k} \binom{k}{r} &= \frac{n!(n-r)!}{(n-r)!(n-k)!(k-r)!r!} \\ \binom{n}{k} \binom{k}{r} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-k)!(k-r)!} \\ \binom{n}{k} \binom{k}{r} &= \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

## 5.

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = (n-1)^2$$

Prova:

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} &= \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)-2)!2!} \\ &= \frac{n!}{(n-2)(n-3)!2!} + \frac{(n-1)!}{(n-3)!2!} \\ &= \frac{n!}{(n-2)(n-3)!2!} + \frac{(n-2)(n-1)!}{(n-2)(n-3)!2!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)! + (n-2)(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-2)(n-3)!2!} \\ &= \frac{n(n-1) + (n-2)(n-1)}{2!} \\ &= \frac{(n-1)(n-2+n)}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2(n-1)(n-1)}{2 \cdot 1} \\ &= (n-1)^2. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

6. Considere  $m \in \mathbb{Z}_+^*$ , então

$$\frac{1}{n} \binom{mn}{m} = \binom{mn-1}{m-1}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \cdot \binom{mn}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(mn)!}{(mn-m)!m!} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(mn)(mn-1)!}{(mn-m)!m(m-1)!} \\
 &= \frac{(mn-1)!}{(mn-m)!(m-1)!} \\
 &= \frac{(mn-1)!}{(mn-1-(m-1))!(m-1)!} \\
 &= \binom{mn-1}{m-1}.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

7.

$$n \binom{n}{r} = (r+1) \binom{n}{r+1} + r \binom{n}{r}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
 n \cdot \binom{n}{r} &= \frac{n \cdot n!}{(n-r)!r!} \\
 &= \frac{(n-r+r)n!}{(n-r)!r!} \\
 &= \frac{(n-r)n!}{(n-r)(n-r-1)!r!} + \frac{rn!}{(n-r)!r!} \\
 &= \frac{n!}{(n-(r+1))!r!} + r \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
 &= (r+1) \cdot \frac{n!}{(n-(r+1))!(r+1)r!} + r \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
 &= (r+1) \cdot \frac{n!}{(n-(r+1))!(r+1)!} + r \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
 &= (r+1) \binom{n}{r+1} + r \binom{n}{r}.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Em uma interessante propriedade do triângulo de Pascal cada número binomial é a soma dos números binomiais à sua esquerda e à direita na linha anterior. Isso segue em virtude da identidade de Stifel.

**Corolário 1** A soma dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal é dada por

$$\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} = 2^k$$

Prova:

Pelo Binômio de Newton(2.3) sabemos que

$$(x + a)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k-r} a^r$$

Fazendo  $x = 1$  e  $a = 1$ , temos

$$(1 + 1)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} 1^{k-r} 1^r = 2^k$$

Consequentemente a soma dos números da  $k$ -ésima linha é  $2^k$  de modo que a linha inicial é a linha zero. Portanto, a soma cumulativa dos números nas linhas de 0 a  $n - 1$  é igual a

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 = M_n \quad (2.6)$$

o  $n$ -ésimo número de Mersenne. Os coeficientes binomiais

$$\binom{2n}{n}$$

que aparecem no meio do triângulo, são os coeficientes binomiais centrais. Eles são obtidos através da função geradora

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n. \quad (2.7)$$

### 3 TEOREMA DAS “ESTRELAS E BARRAS”

Imagine o seguinte problema: Sejam dadas uma quantidade de  $k$  variáveis,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  e um número  $n$  natural. De quantas maneiras diferentes nós podemos escrever  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = n$ , onde  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  são números inteiros não-negativos?

Se considerarmos  $k = 3$  e  $n = 2$ , existem 6 soluções que são:

$$2 + 0 + 0,$$

$$0 + 2 + 0,$$

$$0 + 0 + 2,$$

$$0 + 1 + 1,$$

$$1 + 1 + 0,$$

$$1 + 0 + 1.$$

Uma maneira diferente de visualizar o problema é apresentar a solução através de estrelas e barras.

FIGURA 1 – ESTRELAS E BARRAS



FONTE: O autor

Com esta visualização, temos uma boa ideia da solução. Se tivermos  $k$  partições e  $n$  estrelas para serem distribuídas entre estes espaços podemos imaginar

que temos  $n + k - 1$  espaços livres. Como no exemplo acima que  $k = 3$  e  $n = 2$ , temos um total de  $2 + 3 - 1 = 4$  espaços livres. Então, se temos  $n + k - 1$  espaços em branco, quantos deles serão estrelas?  $n$  dos espaços em branco precisam ser estrelas. E quantos espaços em branco precisam ser barras? Se temos  $k$  partições, então precisamos apenas de  $k - 1$  barras para criar partições  $k$ . Logo, haverá  $k - 1$  barras. Assim, o problema se resume a quais espaços em branco se tornam estrelas e quais espaços em branco se tornam barras. Se tivermos espaços em branco  $n + k - 1$ , quantas maneiras existem para selecionar  $n$  deles para se tornarem estrelas?

$$\binom{n + k - 1}{n}$$

ou

$$\binom{n + k - 1}{k - 1}$$

Para o nosso exemplo, vale

$$\binom{4}{2} = 6.$$

A partir disto, podemos enunciar os seguintes resultados:

**Teorema 3** *Para qualquer par de inteiros positivos  $n$  e  $k$ , o número de  $k$ -tuplas de inteiros não negativos cuja soma é  $n$  é igual ao coeficiente binomial*

$$\binom{n + k - 1}{n}$$

ou

$$\binom{n + k - 1}{k - 1}.$$

Ou podemos reformular o teorema das "estrelas e barras" como teorema da "bola e urna":

**Teorema 4** *Se temos  $k$  contêineres distinguíveis e  $n$  bolas indistinguíveis, podemos distribuí-los de*

$$\binom{n + k - 1}{n}$$

*maneiras.*

Os teoremas acima enunciados são equivalentes.

## 4 NÚMEROS DE MERSENNE

**Definição 3** Um número de Mersenne é um número na forma  $M(n) = 2^n - 1$ . Chamamos  $M(n)$  de  $n$ -ésimo número de Mersenne. Se  $M(n)$  é primo, então dizemos que é um primo de Mersenne.

**Lema 1** Para qualquer número real  $x$  e qualquer inteiro  $k$ , vale a identidade  $x^k - 1 = (x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)$ .

Prova: Para esta prova usaremos a indução matemática em  $k$ . Assim, é fácil verificar que para  $k = 1$  a proposição é válida, afinal

$$x^1 - 1 = (x - 1) \cdot (x^{1-1}).$$

Supomos, agora, que a igualdade seja válida para  $k - 1$ . Teremos então

$$x^{k-1} - 1 = (x - 1)(x^{k-2} + x^{k-3} + \dots + x + 1).$$

Observe que

$$x^k - 1 = (x^k - x^{k-1} + x^{k-1} - 1) = x^{k-1}(x - 1) + (x^{k-1} - 1).$$

Aplicando a hipótese de indução temos

$$x^{k-1}(x - 1) + (x - 1)(x^{k-2} + x^{k-3} + \dots + x + 1) = (x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)$$

como queríamos demonstrar.

Disto faremos a seguinte generalização:

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Utilizaremos o princípio da indução matemática. Podemos fazer a verificação para  $k = 1$  facilmente, pois

$$a^1 - b^1 = (a - b)(a^{1-1} + b^{1-1}) = (a - b).$$

Supondo válido para  $k = n$

$$a(a^n) - b(b^n) = a(a^n) - b(a^n) + b(a^n) - b(b^n) = (a - b)(a^n) + b(a^n - b^n).$$

Como  $a - b | a - b$  (lê-se  $a - b$  divide  $a - b$ ) e, por hipótese,  $a - b | a^n - b^n$ , conclui-se que  $a - b | a^{n+1} - b^{n+1}$ . Portanto  $a - b | a^n - b^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .



#### 4.1 PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

**Teorema 5** *Seja  $p$  um número primo diferente de 2. Então,  $p|(2^{p-1} - 1)$ .*

Prova: Considere  $2^p = (1 + 1)^p$ . Pela expansão do binômio de Newton temos

$$\binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \dots + \binom{p}{p-1} + \binom{p}{p} = 1 + \binom{p}{1} + \dots + \binom{p}{p-1} + 1 = 2 + \binom{p}{1} + \dots + \binom{p}{p-1}.$$

Como  $p$  é um número primo cada parcela da soma

$$\binom{p}{1} + \dots + \binom{p}{p-1}$$

é múltiplo de  $p$ . Então  $p|(2^p - 2) = 2(2^{p-1} - 1)$  e como  $MDC(p, 2) = 1$  então  $p|(2^{p-1} - 1)$  como queríamos demonstrar.

**Lema 2** *Sejam  $p, k \in \mathbb{Z}$ . Se  $p$  é primo com  $k < p$  e  $k > 0$ , então*

$$\binom{p}{k}$$

*é sempre múltiplo de  $p$ .*

É do nosso conhecimento que

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{(p-k)!k!}.$$

Como  $p$  é primo ele não é divisível por nenhum número menor que ele. Portanto o número  $\binom{p}{k}$  é múltiplo de  $p$ .

## 5 NÚMEROS TRIANGULARES

Em vários momentos da nossa vida estamos próximos dos números triangulares. Quando organizamos os pinos de boliche para um novo lançamento ou arrumamos a disposição das bolas de sinuca para a primeira tacada do jogo estamos utilizando uma quantidade triangular de objetos.

Na Copa do Mundo de futebol, são 32 as equipes na competição da FIFA que são divididas em 8 grupos de 4 times cada. Na fase de qualificação, os times de cada grupo jogam uma única vez com todos os demais. Por exemplo, o Grupo E na copa do mundo FIFA 2018 teve o Brasil, Suíça, Sérvia e Costa Rica. Quantas partidas foram disputadas no Grupo E durante a fase do grupos? E se o formato da copa do mundo for alterado para que cada grupo tenha 7 times? Quantas partidas terão que serem jogadas dentro de cada grupo na fase de grupos? Vamos analisar os jogos do Brasil:

Brasil x Suíça

Brasil x Sérvia

Brasil x Costa Rica

Repare que os 3 jogos do Brasil já estão listados. E para cada jogo foi necessário acrescentar um adversário. O que implica em:

Suíça x Sérvia

Suíça x Costa Rica

Costa Rica x Sérvia

É possível perceber que o número de jogos é equivalente ao número triangular  $T_3 = 6$ . Da mesma forma, se houvesse 7 equipes em um grupo, o número de jogos seria  $T_6 = 21$ .

O trabalho de Kiara é configurar uma rede de alta velocidade de 20 computadores no escritório. Cada um desses computadores devem estar conectados diretamente a todos os outros computadores da rede. Quantos cabos Kiara vai precisar? O primeiro computador precisará ser conectado a 19 outros computadores. Feito isso, o segundo computador precisará ser conectado a outros 18 computadores uma vez que já está conectado ao primeiro. Depois disso, o terceiro computador precisará ser conectado a 17 outros computadores e assim por diante. O número total de cabos necessários será

$$19 + 18 + 17 + \dots + 1 = \frac{20 \cdot 19}{2} = T_{19} = 190$$

Os números triangulares são obtidos pela sequência da soma de  $n$  números naturais numa progressão aritmética de razão 1 em que o primeiro termo da sequência é a unidade.

O curioso é que, se estes números estiverem representando quantidades de um determinado objeto, os elementos desta sequência podem ser dispostos no formato de um triângulo equilátero.

Veja esta pequena lista dos primeiros números triangulares:

$$\begin{aligned}
 &1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, \\
 &78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, \\
 &210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, \\
 &406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, \\
 &666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, \\
 &990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

e continua. Como o  $n$ -ésimo número triangular é a soma dos  $n$  primeiros números naturais numa progressão aritmética de razão 1 e 1º termo igual a 1, temos uma definição explícita para encontrar este número:  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Disto, é possível observar que  $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{n-1}$  que pertence ao triângulo de Pascal (2.4). Eles aparecem na 3ª diagonal independentemente do sentido tomado. Então, é possível obter algumas interpretações combinatórias para os números triangulares.

É possível, também, encontrar uma fórmula recursiva para os números triangulares, pois para se conseguir um número triangular basta que se some o número natural consecutivo do último usado na construção do número triangular dado.

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 0; \\
 T_{n+1} &= T_n + (n + 1), \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ ou } n = 0.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Aproveitando a lista (5.1) somaremos cinco números triangulares consecutivos a partir do primeiro número triangular pré-escolhido e observaremos um comportamento padrão. Veja:

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + 6 + 10 + 15 &= 35 = 5 \cdot 7 = 5(6 + 1) = 5(T_3 + 1), \\
 3 + 6 + 10 + 15 + 21 &= 55 = 5 \cdot 11 = 5(10 + 1) = 5(T_4 + 1), \\
 55 + 66 + 78 + 91 + 105 &= 395 = 5 \cdot 79 = 5(78 + 1) = 5(T_{12} + 1)
 \end{aligned}$$

ou

$$120 + 136 + 153 + 171 + 190 = 770 = 5 \cdot 154 = 5(153 + 1) = 5(T_{17} + 1).$$

Percebamos que estas somas correspondem ao quántuplo do sucessor natural do número triangular que ocupa a posição do meio na sequência de cinco números triangulares consecutivos.

**Lema 3** A soma de cinco números triangulares consecutivos é  $5(T_n + 1)$ .

Prova: Sejam  $T_{n-2}$ ,  $T_{n-1}$ ,  $T_n$ ,  $T_{n+1}$  e  $T_{n+2}$  cinco números triangulares consecutivos, tais que

$$\begin{aligned} T_{n-2} &= \binom{n-1}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ T_{n-1} &= \binom{n}{2} = \frac{(n-1)n}{2} \\ T_n &= \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ T_{n+1} &= \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ T_{n+2} &= \binom{n+3}{2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}. \end{aligned}$$

Efetuada a soma, temos

$$\begin{aligned} T_{n-2} + T_{n-1} + T_n + T_{n+1} + T_{n+2} &= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \\ &\quad + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} \\ &= \frac{2(n-1)^2}{2} + \frac{2(n+1)^2}{2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} \\ &= n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 + \frac{n^2 + 5n + 6}{2} \\ &= \frac{2(2n^2 + 2) + n^2 + 5n + 6}{2} \\ &= \frac{5n^2 + 5n + 10}{2} \\ &= \frac{5n(n+1)}{2} + \frac{10}{2} \\ &= 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 5 \\ &= 5 \cdot T_n + 5 \\ &= 5(T_n + 1). \end{aligned}$$

Os números triangulares nos proporcionam observar também que a diferença entre dois consecutivos deles corresponde ao índice do maior entre eles. Nos exemplos a seguir teremos mais clareza deste fato:

$$T_2 - T_1 = 3 - 1 = 2,$$

$$T_3 - T_2 = 6 - 3 = 3,$$

$$T_4 - T_3 = 10 - 6 = 4,$$

$$T_5 - T_4 = 15 - 10 = 5$$

ou

$$T_6 - T_5 = 21 - 15 = 6.$$

**Lema 4** Se  $T_{n-1}$  e  $T_n$  são dois números triangulares consecutivos a diferença, em módulo, é  $n$ .

Prova: Segue, sem perda de generalidade, que

$$\begin{aligned} |T_n - T_{n-1}| &= \left| \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \right| \\ &= \left| \frac{n(n+1 - n + 1)}{2} \right| \\ &= \left| \frac{2n}{2} \right| \\ &= |n| = n. \end{aligned}$$

Ainda usando a lista (5.1), escolhendo dois números consecutivos desta lista e somando os quadrados de cada um deles conseguimos ter uma nova e grata surpresa. Veja:

$$T_2 + T_1 = 3^2 + 1^2 = 10 = T_4 = T_2^2$$

ou

$$T_5 + T_4 = 15^2 + 10^2 = 325 = T_{25} = T_5^2.$$

A partir daí enunciaremos mais um lema.

**Lema 5** Sejam  $(T_n)^2$  e  $(T_{n-1})^2$  os quadrados de quaisquer dois números triangulares consecutivos. Então  $(T_n)^2 + (T_{n-1})^2 = T_{n^2}$ .

$$\begin{aligned} (T_n)^2 + (T_{n-1})^2 &= \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^2 \\ &= \frac{n^2[(n+1)^2 + (n-1)^2]}{4} \\ &= \frac{2n^4 + 2n^2}{4} \\ &= \frac{n^4 + n^2}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{2} = T_{n^2}. \end{aligned}$$

## 5.0.1 Algumas propriedades dos números triangulares

### 5.0.1.1 Números triangulares módulo um inteiro

A ideia é observar o padrão dos restos da divisão de um número triangular por um inteiro  $k$  com os primeiros números triangulares listados acima (5.1).

#### 5.0.1.1.1 Aritmética modular

Sejam  $a$  e  $b$  números inteiros e  $m$  um inteiro positivo de modo que  $m$  divida a diferença entre  $a$  e  $b$ . Então dizemos que  $a$  é congruente com  $b$  módulo  $m$ . Ou seja  $a \equiv b \pmod{m}$ .

**Definição 4** O conjunto  $\tau_m$  de números triangulares  $\pmod{m}$  é da forma  $\tau_m \equiv \{T_n \pmod{m}\}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Observando a congruência módulo 2, sabemos que os possíveis resultados são 0s e 1s.

$$T_1 = 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$T_2 = 3 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$T_3 = 6 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$T_4 = 10 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$T_5 = 15 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$T_6 = 21 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$T_7 = 28 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$T_8 = 36 \equiv 0 \pmod{2}$$

É possível observar que os restos de 0s e 1s aparecem consecutivamente em pares.

Observando a congruência módulo 3, sabemos que os possíveis resultados são 0s, 1s e 2.

$$T_1 = 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$T_2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_3 = 6 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_4 = 10 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$T_5 = 15 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_6 = 21 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_7 = 28 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$T_8 = 36 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_9 = 45 \equiv 0 \pmod{3}$$

É possível observar que os restos de 0s e 1s aparecem repetidamente 100 consecutivamente num período de 3 números triangulares consecutivos quaisquer.

Observando a congruência módulo 4, sabemos que os possíveis resultados são 0s, 1s, 2 e 3.

$$T_1 = 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$T_2 = 3 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$T_3 = 6 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$T_4 = 10 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$T_5 = 15 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$T_6 = 21 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$T_7 = 28 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$T_8 = 36 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$T_9 = 45 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$T_{10} = 55 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$T_{11} = 66 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$T_{12} = 78 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$T_{13} = 91 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$T_{14} = 105 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$T_{15} = 120 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$T_{16} = 136 \equiv 0 \pmod{4}$$

É possível observar que os restos retem-se a cada 8 passos.

Fazendo a mesma observação módulo 5, temos:

$$T_1 = 1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$T_2 = 3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$T_3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$T_4 = 10 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$T_5 = 15 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$T_6 = 21 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$T_7 = 28 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$T_8 = 36 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$T_9 = 45 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$T_{10} = 55 \equiv 0 \pmod{5}$$

É possível observar que os restos repetem-se periodicamente a cada 5 passos.

Aplicando congruência módulo 6, temos:

$$T_1 = 1 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$T_2 = 3 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_3 = 6 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$T_4 = 10 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$T_5 = 15 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_6 = 21 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_7 = 28 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$T_8 = 36 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$T_9 = 45 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_{10} = 55 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$T_{11} = 66 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$T_{12} = 78 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$T_{13} = 91 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$T_{14} = 105 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_{15} = 120 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$T_{16} = 136 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$T_{17} = 153 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_{18} = 171 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_{19} = 190 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$T_{20} = 210 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$T_{21} = 231 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$T_{22} = 253 \equiv 1 \pmod{6}$$



$$T_{23} = 276 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$T_{24} = 300 \equiv 0 \pmod{6}$$

É possível observar que os restos repetem-se periodicamente a cada 12 passos.

Após algumas observações somos induzidos a pensar que os  $T_n$ -resíduos  $(\text{mod } k)$  se repetem a cada  $k$  passagens se  $k$  é ímpar ou a cada  $2k$  passagens se  $k$  é par.

**Teorema 6** *A sequência de números triangulares  $T_n \pmod{m}$  é periódica de ciclo  $2m$ . Ou seja, os últimos  $m$  elementos são a sequência reversa dos primeiros  $m$  elementos.*

Prova:

1. O ciclo de período  $2m$  Seja  $\Delta \equiv T_{2m+j} - T_j$ , portanto

$$\Delta = \frac{(2m+j)(2m+j+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2}.$$

Efetuada a expansão e depois a simplificação chegamos a

$$\Delta = 2m^2 + 2mj + m = m \cdot (2m + 2j + 1),$$

e com isso observamos que  $\Delta \equiv 0 \pmod{m}$ . Portanto  $T_{2m+j}$  e  $T_j$  deixam o mesmo resto  $(\text{mod } m)$ .

2. A simetria a sequência reversa.

Seja, agora,  $\Delta \equiv T_{m+j} - T_{m-j-1}$ , portanto

$$\Delta = \frac{(m+j)(m+j+1)}{2} - \frac{(m-j-1)(m-j)}{2}.$$

Após a expansão e a simplificação, temos

$$\Delta = 2m + 2mj = 2m \cdot (1 + j).$$

Aplicando congruência módulo  $m$  tem-se que  $\Delta \equiv 0 \pmod{m}$ . Como queríamos que fosse.

Para exemplificar, considere  $m = 3$  e  $j = 2$  e daí o ciclo é  $2 \cdot 3 = 6$ .

$$T_0 = 0 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_1 = 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$T_2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_3 = 6 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_4 = 10 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$T_5 = 15 \equiv 0 \pmod{3}$$

Podemos observar neste exemplo o período com 6 elementos e a simetria citada.

Precisamos fazer algumas intervenções para o teorema (6). Pode-se iniciar o ciclo em qualquer ponto quebrando assim a simetria e então a sequência não iria mais começar e terminar com zero. O fato é que as declarações sobre simetria permanecem verdadeiras quando o ciclo é iniciado com o primeiro membro sendo  $T_0 = 0$ .

Existem algumas situações em que também é natural iniciar o ciclo com o primeiro elemento sendo  $T_1 = 1$ . Nessas situações, o ciclo termina com dois zeros consecutivos.

Com isso, enunciaremos a seguir 2 teoremas que validarão a observação que fizemos anteriormente.

**Teorema 7** *Para valores ímpares de  $m$ , os números triangulares  $\pmod{m}$  tem ciclo de período  $m$ .*

Prova: Para usarmos o teorema (6) definimos a diferença  $\Delta \equiv T_{m+j} - T_j$ . Agora pode-se tirar vantagem do fato de que 2 tem um inverso quando  $m$  é ímpar. Como tal, pode-se considerar

$$2\Delta = (m+j)(m+j+1) - j(j+1).$$

Expandindo o produto e fazendo as devidas simplificações, temos

$$2\Delta = m^2 + 2mj + m.$$

Aplicando congruência módulo  $m$ , chegamos a

$$2\Delta \equiv 0 \pmod{m}$$

e isto implica que

$$\Delta \equiv 0 \pmod{m}$$

uma vez que 2 possui 1 inverso e assim temos a prova do teorema. No mesmo exemplo acima é possível verificar que o período de repetição pode ser escrito com 3 dígitos ao invés de 6.

$$T_0 = 0 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_1 = 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$T_2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_3 = 6 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$T_4 = 10 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$T_5 = 15 \equiv 0 \pmod{3}$$

**Teorema 8** Para valores pares de  $m$ , os números triangulares  $\pmod{m}$  tem ciclo de período  $2m$ .

Prova: Seguimos com a diferença  $\Delta \equiv T_{m+j} - T_j$ . De outra maneira, temos

$$\Delta = \frac{(m+j)(m+j+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2}.$$

Fazendo os devidos cálculos chegamos

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{m^2}{2} + mj + \frac{m}{2} \\ &= m \cdot \left( \frac{m}{2} + j \right) + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta \equiv \frac{m}{2} \pmod{m}$$

Dessa forma fica listado apenas metade do período restando então a outra metade uma vez que o conjunto dos possíveis restos módulo  $m$  formam o conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ .

A natureza cíclica de período  $2m$  dos números triangulares  $\pmod{m}$  forma um conjunto natural de classes de equivalência. Uma determinada classe de equivalência é denotada por  $\tau_k = \{T_{n+mj} \pmod{m} \mid j \in \mathbb{N}\}$ .

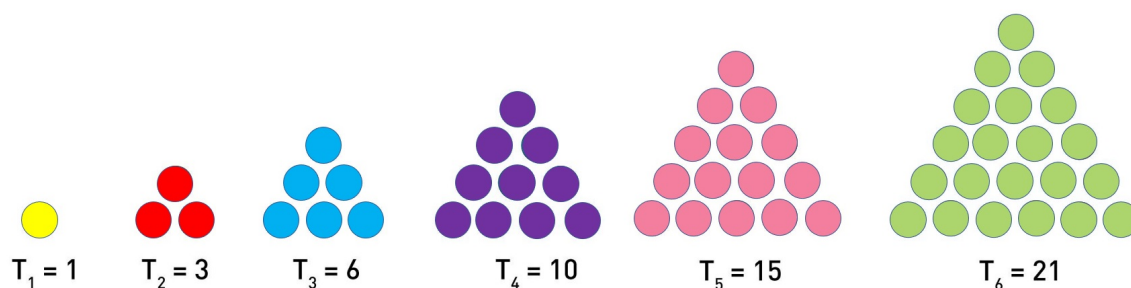
### 5.0.1.2 Números triangulares e quadrados perfeitos

Um fato muito curioso e conhecido desde a Grécia antiga é que a soma de dois números triangulares consecutivos é sempre um número quadrado perfeito. Podemos fazer a verificação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_n + T_{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + (n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n + (n+2))}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2n+2)}{2} \\ &= \frac{2(n+1)(n+1)}{2} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

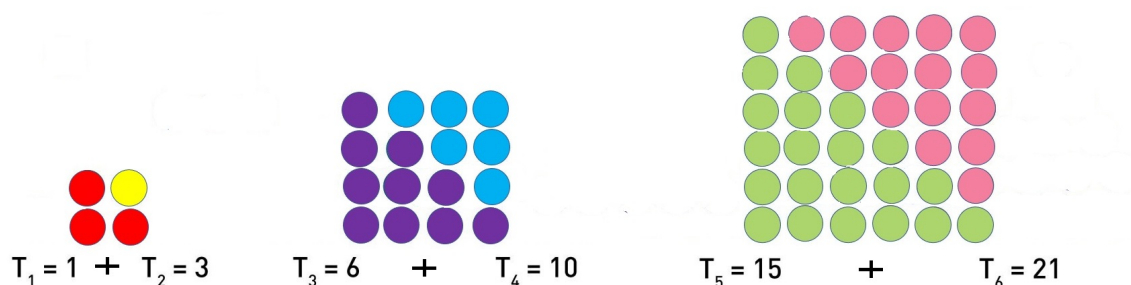
ou pelo item 5 das identidades combinatórias temos uma interpretação binomial imediata. Podemos fazer também uma observação geométrica:

FIGURA 2 – OS SEIS PRIMEIROS NÚMEROS TRIANGULARES



FONTE: O autor

FIGURA 3 – OS SEIS PRIMEIROS NÚMEROS TRIANGULARES



FONTE: O autor

Os gregos também haviam percebido que  $8 \cdot T_n + 1$  é um quadrado perfeito. A prova pode ser feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 8 \cdot T_n + 1 &= 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 \\
 &= \frac{8n^2 + 8n + 2}{2} \\
 &= \frac{2(4n^2 + 4n + 1)}{2} \\
 &= (2n + 1)^2
 \end{aligned}$$

### 5.0.2 Algumas identidades dos números triangulares

Segue uma interpretação combinatória para os números triangulares:  $T_n$  é o número de pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $1 \leq x \leq y \leq n$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$ .

1.  $T_{m+n} = T_n + T_m + m \cdot n.$

$$\begin{aligned}
 T_m + T_n + m \cdot n &= \binom{n+1}{2} + \binom{m+1}{2} + mn \\
 &= \frac{(n+1)!}{[(n+1)-2]!2!} + \frac{(m+1)!}{[(m+1)-2]!2!} + mn \\
 &= \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + \frac{(m+1)!}{(m-1)!2!} + mn \\
 &= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(m+1)m}{2} + mn \\
 &= \frac{n^2 + n + m^2 + m + 2mn}{2} \\
 &= \frac{(n^2 + 2nm + m^2) + (m+n)}{2} \\
 &= \frac{(m+n)^2 + (m+n)}{2} \\
 &= \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} = T_{m+n},
 \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

2.  $T_{mn} = T_n T_m + T_{n-1} T_{m-1}.$

$$\begin{aligned}
 T_{mn} &= \binom{n+1}{2} \binom{m+1}{2} + \binom{n}{2} \binom{m}{2} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!2!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot \frac{m!}{(m-2)!2!} \\
 &= \frac{(n+1)n}{2} \cdot \frac{(m+1)m}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(m+1)mn + (n-1)(m-1)mn}{4} \\
 &= \frac{mn}{4} \cdot [(n+1)(m+1) + (n-1)(m-1)] \\
 &= \frac{mn}{4} \cdot [mn + mn + n - n + m - m + 1 + 1] \\
 &= \frac{mn}{4} \cdot [2mn + 2] \\
 &= 2 \cdot \frac{mn}{4} \cdot [mn + 1] \\
 &= \frac{mn}{2} \cdot [mn + 1] = T_{mn}
 \end{aligned}$$

3.  $T_{n^2} = (T_n)^2 + (T_{n-1})^2.$

Este item é uma consequência direta do anterior. Basta fazer  $n = m$ :

$$\begin{aligned}
 T_{nn} &= T_n T_n + T_{n-1} T_{n-1} \\
 &= (T_n)^2 + (T_{n-1})^2,
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Ora, mas quanto vale  $T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1}$ ? Para responder a esta pergunta voltaremos aos conceitos binomiais:

Imagine que vamos distribuir  $n$  canetas indistinguíveis para  $k$  pessoas distinguíveis. Está é uma aplicação direta do teorema (3). Daí, existem

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

maneiras de fazer isso. Em paralelo, podemos primeiro dar  $0 \leq i \leq n$  canetas para a pessoa de maior idade do grupo, de modo que estamos dando  $n-i$  canetas para  $k-1$  pessoas e novamente com o teorema (3), temos

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{i=0}^n \binom{n+k-2-i}{k-2},$$

que simplifica o resultado desejado.

Podemos fazer uma prova algébrica aplicando a relação de Stifel (2.1):

Observe que

$$\begin{aligned} \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{r+a}{r} &= \binom{r+1}{r+1} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{r+a}{r} \\ &= \binom{r+2}{r+1} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{r+a}{r} \\ &\vdots \\ &= \binom{r+a}{r+1} + \binom{r+a}{r} = \binom{r+a+1}{r+1} \end{aligned}$$

que é um resultado equivalente ao anterior.

Aplicando estes conceitos para  $T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1}$  chegamos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} T_n &= T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-1} \\ &= \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \\ &= \binom{n+1}{3} - \binom{n}{2} \\ &= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \end{aligned}$$

Um outro exemplo de aplicação dessa propriedade segue como solução para o problema a seguir:

(2015 - AIME 1 Problem 12 ) Considere todos os subconjuntos de 1000 elementos do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 2015\}$ . De cada subconjunto, escolha o menor elemento. A média aritmética de todos esses menores elementos é  $\frac{p}{q}$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros positivos primos entre si. Determine o valor de  $p + q$ .

Solução: Seja  $M$  a média desejada. Então, como os  $\binom{2015}{1000}$  subconjuntos têm 1000 elementos e  $\binom{2015-i}{999}$  é a quantidade de subconjuntos que tem  $i$  como menor elemento,

$$\begin{aligned} \binom{2015}{1000} M &= 1 \cdot \binom{2014}{999} + 2 \cdot \binom{2013}{999} + \dots + 1016 \cdot \binom{999}{999} \\ &= \binom{2014}{999} + \binom{2013}{999} + \dots + \binom{999}{999} \\ &\quad + \binom{2013}{999} + \dots + \binom{999}{999} \\ &\quad \dots \\ &\quad + \binom{999}{999} \\ &= \binom{2015}{1000} + \binom{2014}{1000} + \dots + \binom{1000}{1000} \\ &= \binom{2016}{1001} \end{aligned}$$

usando a definição do coeficiente binomial e a identidade  $n! = n \cdot (n - 1)!$ , deduzimos que  $M = \frac{2016}{1001} = \frac{288}{143}$ . A resposta é 431.

Ainda podemos ter um outro problema:

(2016 AMC 10A Problems/Problem 20) Para algum valor particular de  $N$ , quando  $(a + b + c + d + 1)^N$  é expandido e termos semelhantes são reduzidos, a expressão resultante contém exatamente os 1001 termos que incluem todas as quatro variáveis  $a, b, c$  e  $d$ , cada um com alguma potência positiva. O que é  $N$ ?

(A)9    (B)14    (C)16    (D)17    (E)19

Vamos analisar os casos para  $0 \leq N \leq 5$  na tentativa de identificar algum padrão. Não usaremos valores acima de 5 para que o trabalho não se torne maçante. Veja:

$$(a + b + c + d + 1)^0 = 1$$

$$(a + b + c + d + 1)^1 = a + b + c + d + 1$$

$$(a + b + c + d + 1)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2a + b^2 + 2bc + 2bd + 2b + c^2 + 2cd + 2c + d^2 + 2d + 1$$

$$\begin{aligned}
(a + b + c + d + 1)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3a^2 + 3ab^2 + 6abc + 6abd + 6ab \\
&\quad + 3ac^2 + 6acd + 6ac + 3ad^2 + 6ad + 3a + b^3 + 3b^2c + 3b^2d \\
&\quad + 3b^2 + 3bc^2 + 6bcd + 6bc + 3bd^2 + 6bd + 3b + c^3 + 3c^2d \\
&\quad + 3c^2 + 3cd^2 + 6cd + 3c + d^3 + 3d^2 + 3d + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a + b + c + d + 1)^4 &= a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 4a^3 + 6a^2b^2 + 12a^2bc \\
&\quad + 12a^2bd + 12a^2b + 6a^2c^2 + 12a^2cd + 12a^2c \\
&\quad + 6a^2d^2 + 12a^2d + 6a^2 + 4ab^3 + 12ab^2c + 12ab^2d \\
&\quad + 12ab^2 + 12abc^2 + 24abcd + 24abc + 12abd^2 \\
&\quad + 24abd + 12ab + 4ac^3 + 12ac^2d + 12ac^2 + 12acd^2 \\
&\quad + 24acd + 12ac + 4ad^3 + 12ad^2 + 12ad + 4a + b^4 \\
&\quad + 4b^3c + 4b^3d + 4b^3 + 6b^2c^2 + 12b^2cd + 12b^2c \\
&\quad + 6b^2d^2 + 12b^2d + 6b^2 + 4bc^3 + 12bc^2d + 12bc^2 \\
&\quad + 12bcd^2 + 24bcd + 12bc + 4bd^3 + 12bd^2 + 12bd + 4b \\
&\quad + c^4 + 4c^3d + 4c^3 + 6c^2d^2 + 12c^2d + 6c^2 + 4cd^3 + 12cd^2 \\
&\quad + 12cd + 4c + d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d + 1
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(a + b + c + d + 1)^5 = & a^5 + 5ba^4 + 5ca^4 + 5da^4 + 5a^4 + 10b^2a^3 + 10c^2a^3 + 10d^2a^3 \\
& + 20ba^3 + 20bca^3 + 20ca^3 + 20bda^3 + 20cda^3 + 20da^3 + 10a^3 \\
& + 10b^3a^2 + 10c^3a^2 + 10d^3a^2 + 30b^2a^2 + 30bc^2a^2 + 30c^2a^2 \\
& + 30bd^2a^2 + 30cd^2a^2 + 30d^2a^2 + 30ba^2 + 30b^2ca^2 + 60bca^2 \\
& + 30ca^2 + 30b^2da^2 + 30c^2da^2 + 60bda^2 + 60**bcda**^2 + 60cda^2 \\
& + 30da^2 + 10a^2 + 5b^4a + 5c^4a + 5d^4a + 20b^3a + 20bc^3a + 20c^3a \\
& + 20bd^3a + 20cd^3a + 20d^3a + 30b^2a + 30b^2c^2a + 60bc^2a + 30c^2a \\
& + 30b^2d^2a + 30c^2d^2a + 60bd^2a + 60**bcd**^2a + 60cd^2a + 30d^2a \\
& + 20ba + 20b^3ca + 60b^2ca + 60bca + 20ca + 20b^3da + 20c^3da \\
& + 60b^2da + 60**bc**^2da + 60c^2da + 60bda + 60**b**^2cda + 120**bcda** \\
& + 60cda + 20da + 5a + b^5 + c^5 + d^5 + 5b^4 + 5bc^4 + 5c^4 + 5bd^4 \\
& + 5cd^4 + 5d^4 + 10b^3 + 10b^2c^3 + 20bc^3 + 10c^3 + 10b^2d^3 + 10c^2d^3 \\
& + 20bd^3 + 20bcd^3 + 20cd^3 + 10d^3 + 10b^2 + 10b^3c^2 + 30b^2c^2 \\
& + 30bc^2 + 10c^2 + 10b^3d^2 + 10c^3d^2 + 30b^2d^2 + 30bc^2d^2 + 30c^2d^2 \\
& + 30bd^2 + 30b^2cd^2 + 60bcd^2 + 30cd^2 + 10d^2 + 5b + 5b^4c + 20b^3c \\
& + 30b^2c + 20bc + 5c + 5b^4d + 5c^4d + 20b^3d + 20bc^3d + 20c^3d \\
& + 30b^2d + 30b^2c^2d + 60bc^2d + 30c^2d + 20bd + 20b^3cd + 60b^2cd \\
& + 60bcd + 20cd + 5d + 1
\end{aligned}$$

Repare que para os 4 primeiros valores considerados de  $N$  não há nenhum termo que atenda a condição do exercício. A primeira vez em que há a aparição de termos como o solicitado ocorre para  $N = 4$ . Neste caso é o termo de parte literal  $abcd$ . Ou seja, apenas  $\binom{4-1}{3} = 1 = \binom{4}{4}$  termo algébrico contém as 4 incógnitas do nosso exercício.

Para  $N = 5$  existem os casos  $bcda^2, bcd^2a, bc^2da, b^2cda$  e  $bcda$ . Neste momento observamos  $\binom{5-1}{3} + \binom{5-2}{3} = 4 + 1 = 5 = \binom{5}{4}$ .

Deixaremos a cargo do leitor o desenvolvimento da expressão para  $N = 6$  onde as partes literais dos termos algébricos encontrados que satisfazem a condição do exercício são  $bcda, b^2cda, bc^2da, bcd^2a, bcda^2, b^3cda, bc^3da, bcd^3a, bcda^3, bcd^2a^2, bc^2da^2, b^2cda^2, bc^2d^2a, b^2cd^2a$  e  $b^2c^2da$ . Perceba que a quantidade de termos é equivalente a  $\binom{6-1}{3} + \binom{6-2}{3} + \binom{6-3}{3} = 10 + 4 + 1 = 15 = \binom{6}{4}$ .

Perceba que os termos algébricos que satisfazem a condição do exercício tem grau 4, 5, 6, ... até no máximo  $N$ . Assim, há a necessidade de distribuir os expoentes de modo que o grau do termo algébrico se mantenha dentro desse conjunto.

Aplicando a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal, o número de termos que têm todos os termos  $a, b, c, d$  elevados a uma potência positiva é  $\binom{N-1}{3} + \binom{N-2}{3} + \cdots + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = \binom{N}{4}$ . Agora queremos encontrar alguns  $N$  assim  $\binom{N}{4} = 1001$ . Como mencionado acima, depois de perceber isso  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ , e algumas tentativas e erros, descobrimos que  $\binom{14}{4} = 1001$ , dando-nos a nossa resposta de  $N = 14$ .

### 5.0.2.1 Relação entre números triangulares

Consideremos os pares de números triangulares 10 e 91, 28 e 253 e 91 e 820. Aparentemente não há qualquer tipo de relação entre estes números triangulares, mas se observarmos com mais atenção temos que  $91 = 9 \cdot 10 + 1$ ,  $253 = 9 \cdot 28 + 1$  e  $820 = 9 \cdot 91 + 1$ . Ao que tudo indica  $9T_n + 1$  é um número triangular quando  $T_n$  o é. Enunciaremos a seguinte proposição:

**Proposição 1** *Seja  $T_n$  um número triangular qualquer. Então o número  $9T_n + 1$  é, também, um número triangular.*

Prova:

$$\begin{aligned} 9T_n + 1 &= 9 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} \\ &= \frac{9n^2 + 6n + 1 + 3n + 1}{2} \\ &= \frac{(3n+1)^2 + (3n+1)}{2} \\ &= \frac{(3n+1)[(3n+1)+1]}{2} = T_{3n+1}. \end{aligned}$$

Ainda há mais uma relação envolvendo o consecutivo produto de um número triangular por uma constante inteira positiva e retornando outro número triangular. De maneira análoga a anterior é possível fazer a verificação da seguinte proposição:

**Proposição 2** *Seja  $T_n$  um número triangular qualquer. Então o número  $25T_n + 3$  é, também, um número triangular.*

A ideia é buscar pares de inteiros  $(r, s)$  que consigam satisfazer a seguinte condição: Se  $T_n$  é um número triangular, então o número  $rT_n + s$  também é.

**Teorema 9** *O par de inteiros  $(r, s)$  que satisfazem a propriedade " $T_n$  implica que  $rT_n + s$  é um número triangular" são aqueles para os quais  $r$  é um quadrado ímpar e  $s = \frac{r-1}{8}$ .*

Prova: Sejam  $r, s, k \in \mathbb{Z}$ , onde  $r = (2k-1)^2$ ,  $s = \frac{r-1}{8}$  e  $T_n$  um número triangular qualquer. Segue que

$$\begin{aligned}
 rT_n + s &= (2k-1)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(2k-1)^2 - 1}{8} \\
 &= \frac{(4k^2 - 4k + 1)(n^2 + n)}{2} + \frac{4k^2 - 4k}{8} \\
 &= \frac{4k^2n^2 + 4k^2n - 4kn^2 - 4kn + n^2 + n}{2} + \frac{k^2 - k}{2} \\
 &= \frac{4k^2n^2 + 4k^2n + k^2 - 4kn^2 - 2kn + n^2 - 2kn - k + n}{2} \\
 &= \frac{(2kn + k - n)^2 - (2kn + k - n)}{2} \\
 &= \frac{[(2kn + k - n) - 1](2kn + k - n)}{2}.
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Também podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 10** *Um número triangular  $T_n$  é par se e somente se  $n = 4k + 3$  ou  $4k$  qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}^+$ .*

Prova: Seja  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Na divisão por 4 temos que  $n = 4k$ ,  $n = 4k + 1$ ,  $n = 4k + 2$  ou  $n = 4k + 3$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Deste modo segue que

$$T_{4k} = \frac{4k(4k+1)}{2} = 2k(4k+1),$$

e portanto é par;

$$T_{4k+1} = \frac{(4k+2)(4k+1)}{2} = (4k+1)(2k+1) = 8k^2 + 6k + 1,$$

e portanto é ímpar;

$$T_{4k+2} = \frac{(4k+2)(4k+3)}{2} = (4k+3)(2k+1) = 8k^2 + 10k + 1,$$

e portanto é ímpar, e

$$T_{4k+3} = \frac{(4k+3)(4k+4)}{2} = 2(k+1)(4k+3),$$

que é par.

Uma outra abordagem interessante que podemos ter observando a lista (5.1) é que todo número triangular par nunca termina em 2 ou em 4. Isto significa que

**Teorema 11** *Seja  $T_n$  um número triangular par, então  $T_n \not\equiv 2 \pmod{10}$  e  $T_n \not\equiv 4 \pmod{10}$ .*

Prova: Suponha que  $T_n$  é um número triangular par. Então  $n = 4k + 3$  ou  $n = 4k$ .

- $n = 4k + 3$

$$T_{4k+3} = \sum_{i=1}^{4k+3} i = \frac{(4k+3)(4k+4)}{2} = (2k+2)(4k+3)$$

Seja

$$\begin{aligned} A(10) &= a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0 \\ &= (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_{10} \\ &= \sum_{i=0}^m a_i 10^i \end{aligned}$$

a expansão decimal do fator  $2k + 2$ , ou seja,  $\sum_{i=0}^m a_i 10^i = (2k + 2)$  do número triangular par  $T_n$  onde o dígito das unidades  $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Seja

$$\begin{aligned} B(10) &= b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \dots + b_1 10 + b_0 \\ &= (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_{10} \\ &= \sum_{i=0}^m b_i 10^i \end{aligned}$$

a expansão decimal do fator  $(4k+3)$ , ou seja,  $\sum_{i=0}^m b_i 10^i = (4k + 3)$  do número triangular par  $T_n$  onde o dígito das unidades  $b_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Agora, considere

$$\begin{aligned} T_n = T_{4k+3} &= (2k+2)(4k+3) = (2k+2)(2(2k)+3) = A(10) \cdot B(10) \\ &= \left( \sum_{i=0}^m a_i 10^i \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^m b_i 10^i \right) \\ &= C(10) = (c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0)_{10} \end{aligned}$$

O termo constante é  $c_0 = a_0 b_0$ . Vamos considerar todas as opções para o dígito  $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$  de  $2k + 2 = A(10)$  para determinar os dígitos de  $b_0$  de  $B(10) = 4k + 3$  e  $c_0$  de  $C(10)$ .

1.  $a_0 = 0 \implies c_0 = 0$  para qualquer  $b_0$ ;
2.  $a_0 = 2 \implies k = 0, b_0 = 4(0) + 3 = 3$  e  $c_0 = 6$ ;
3.  $a_0 = 4 \implies k = 1, b_0 = 4(1) + 3 = 7$  e  $c_0 = 8$ ;
4.  $a_0 = 6 \implies k = 2, b_0 = 4(2) + 3 = 10 + 1$  e  $c_0 = 6$  e
5.  $a_0 = 8 \implies k = 3, b_0 = 4(3) + 3 = 10 + 5$  e  $c_0 = 0$ .

- $n = 4k$

$$T_{4k} = \sum_{i=1}^{4k} i = \frac{(4k)(4k+1)}{2} = (2k)(4k+1)$$

Seja

$$\begin{aligned} A(10) &= a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0 \\ &= (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_{10} \\ &= \sum_{i=0}^m a_i 10^i \end{aligned}$$

a expansão decimal do fator  $2k$ , ou seja,  $\sum_{i=0}^m a_i 10^i = (2k)$  do número triangular par  $T_n$  onde o dígito das unidades  $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Seja

$$\begin{aligned} B(10) &= b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \dots + b_1 10 + b_0 \\ &= (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_{10} \\ &= \sum_{i=0}^m b_i 10^i \end{aligned}$$

a expansão decimal do fator  $4k + 1$ , ou seja,  $\sum_{i=0}^m b_i 10^i = (4k + 1)$  do número triangular par  $T_n$  onde o dígito das unidades  $b_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Agora, considere

$$\begin{aligned} T_n = T_{4k} &= (2k)(4k + 1) = (2k)(2(2k) + 1) = A(10) \cdot B(10) \\ &= \left( \sum_{i=0}^m a_i 10^i \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^m b_i 10^i \right) \\ &= C(10) = (c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0)_{10} \end{aligned}$$

O termo constante é  $c_0 = a_0 b_0$ . Vamos considerar todas as opções para o dígito  $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$  de  $2k = A(10)$  para determinar os dígitos de  $b_0$  de  $B(10) = 4k + 1$  e  $c_0$  de  $C(10)$ .

1.  $a_0 = 0 \implies c_0 = 0$  para qualquer  $b_0$ ;
2.  $a_0 = 2 \implies k = 1, b_0 = 4(1) + 1 = 5$  e  $c_0 = 10 + 0$ ;
3.  $a_0 = 4 \implies k = 2, b_0 = 4(2) + 1 = 9$  e  $c_0 = 3 \cdot 10 + 6$ ;
4.  $a_0 = 6 \implies k = 3, b_0 = 4(3) + 1 = 10 + 3$  e  $c_0 = 10 + 8$  e
5.  $a_0 = 8 \implies k = 4, b_0 = 4(4) + 1 = 10 + 7$  e  $c_0 = 5 \cdot 10 + 6$ .

### 5.0.3 O número da besta

Curiosamente, encontraremos o 36º número triangular fazendo  $n = 36$ . Veja:

$$T_{36} = \frac{36(36 + 1)}{2} = 18 \cdot 17 = 666$$

### 5.0.4 Aparição dos números triangulares no triângulo de Pascal

É possível reparar que a forma recursiva de um número triangular é equivalente ao número binomial  $T_n = \binom{n+1}{2}$ . Sendo assim, é possível localizar os números triangulares no triângulo de Pascal (2.4).

### 5.0.5 Números triangulares de Mersenne

O livro "Os segredos matemáticos dos Simpsons - Simon Singh" traz em uma das suas histórias um painel que exhibe algumas opções para a quantidade de pessoas presentes num determinado local. Estes números são:

1. 8191.
2. 8128.
3. 8208.

O primeiro é um número primo conhecido como primo de Mersenne. Como citado no livro de Simon Singh "O nome desse conjunto de números é uma homenagem a Marin Mersenne, que entrou para a Ordem dos Mínimos em Paris em 1611."

Entende-se por primos de Mersenne todo número primo que puder ser escrito da forma  $2^p - 1$  de modo que  $p$  é primo. Veja que  $2^{13} - 1 = 8191$  atendendo assim a condição dada. A questão aqui é: existe algum número de Mersenne (ver o capítulo 4) que também é triangular? A resposta é fácil de se conseguir considerando que:

- $2^1 - 1 = 1$ .
- $2^2 - 1 = 3$ .
- $2^4 - 1 = 15$ .
- $2^{12} - 1 = 4095$ .

A pergunta imediata que segue é: são apenas estes números de Mersenne que são triangulares? Vejamos:

$$\begin{aligned}
 M_p &= T_k \\
 2^n - 1 &= \frac{k(k+1)}{2} \\
 8 \cdot (2^n - 1) &= 8 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \\
 2^{n+3} - 8 &= 4 \cdot k(k+1) \\
 2^{n+3} - 8 &= 4k^2 + 4k \\
 2^{n+3} - 7 &= 4k^2 + 4k + 1 \\
 2^{n+3} - 7 &= (2k+1)^2
 \end{aligned}$$

Neste momento faremos um parenteses para abordar a equação de *Ramanujan-Nagel*. A equação mencionada é  $2^m - 7 = x^2$ . Por agora, faremos uso do *teorema de*

*Ramanujan-Nagel* sem a demonstração que poderá ser encontrada em <http://www.math.tifr.res.in/~saradha/saradharev.pdf>. Isso porque a demonstração envolveria muitos outros conteúdos que não estão e nem são temas da abordagem desta obra. Este teorema nos diz que as únicas soluções para a equação de Ramanujan-Nagel para  $x, m, \in \mathbb{Z}$  são os pares ordenados  $(m, x)$  seguintes:

- $(\pm 1, 3)$
- $(\pm 3, 4)$
- $(\pm 5, 5)$
- $(\pm 11, 7)$
- $(\pm 81, 15)$

Daí seguimos com  $2^{n+3} - 7 = (2k + 1)^2$  de modo que  $x = 2k + 1$  e  $m = n + 3$  ou  $n = m - 3$ . Então

- $n = 3 - 3 = 0$
- $n = 4 - 3 = 1$
- $n = 5 - 3 = 2$
- $n = 7 - 3 = 4$
- $n = 15 - 3 = 12$

Com isso, os números são

- $2^1 - 1 = 1.$
- $2^2 - 1 = 3.$
- $2^4 - 1 = 15.$
- $2^{12} - 1 = 4095.$

como queríamos mostrar.

Do que foi apresentado é possível enunciar um teorema.

**Teorema 12** *A quantidade de números de Mersenne os quais também são triangulares é finito.*

## 6 TODO NÚMERO PERFEITO É TRIANGULAR

Observe que durante este estudo alguns números triangulares nos são curiosos. Segue uma lista de 4 deles:  $6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$ ,  $28 = \frac{7 \cdot 8}{2}$ ,  $496 = \frac{31 \cdot 32}{2}$ ,  $8128 = \frac{127 \cdot 128}{2}$ .

O que há de comum entre estes 4 números triangulares? Vejamos o conjunto dos divisores de cada um deles:

- $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$
- $D(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$
- $D(496) = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496\}$
- $D(8128) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128\}$

Caso somemos todos os divisores excluindo-se ao próprio número temos:

- $6 = 1 + 2 + 3$
- $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
- $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$
- $8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$

Os números que gozam dessa característica são chamados de números perfeitos.

**Definição 5** *Seja  $n \in \mathbb{N}^*$  tal que a soma de todos os elementos do conjunto de divisores de  $n$  é  $2n$ . Então  $n$  é um número perfeito.*

Ora, veja que alguns números triangulares são perfeitos. Mas será que todos os números triangulares são perfeitos? Esta pergunta é facilmente respondida pelo número 10 que nos serve de contra exemplo, pois  $10 \neq 1 + 2 + 5 = 8$ . E a recíproca é verdadeira? Todo número perfeito é triangular?

### Teorema 13

1. (Euclides) *Se  $k \geq 2$  é tal que  $p = 2^k - 1$  é primo, então  $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$  é um número perfeito par.*
2. Euler *Todo número perfeito **par** é obtido através do item 1.*



Prova: Seja  $S(n)$  a soma de todos os divisores de  $n$  e  $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ , onde  $(2^k - 1)$  é um primo de Mersenne. Assim,  $p \leq 1$  e  $n$  é par. Como  $(2^k - 1)$  é ímpar, tem-se que  $(2^{k-1}, 2^k - 1) = 1$ . Daí

$$\begin{aligned}
 S(n) &= S(2^{k-1}(2^k - 1)) \\
 &= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} + 2^{k-1} + \\
 &\quad + (2^k - 1) + 2 \cdot (2^k - 1) + 2^2 \cdot 2^{k-1} + 2^3 \cdot (2^k - 1) + \dots + \\
 &\quad + 2^{k-2} \cdot (2^k - 1) + 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) \\
 &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} + 2^{k-1}) + (2^k - 1)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} + 2^{k-1}) \\
 &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} + 2^{k-1})((2^k - 1) + 1) \\
 &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-2} + 2^{k-1})2^k \\
 &= (2^k - 1)2^k \\
 &= 2(2^k - 1)2^{k-1} = 2n.
 \end{aligned}$$

Sendo assim,  $n$  é um número perfeito, provando 1.

Seja  $n$  um número perfeito par. Podemos descrevê-lo por  $n = 2^{k-1}m$  com  $k \leq 2$  e  $m$  ímpar. Como  $n$  é perfeito, segue que

$$2^k m = 2n = S(n) = S(2^{k-1})S(m) = (2^k - 1)S(m).$$

Como consequência observamos que  $(2^k - 1) | 2^k m$  e que  $(2^k - 1) | m$  uma vez que  $(2^k - 1, 2^k) = 1$ . Assim,  $\exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $(2^k - 1)M = m$ . Observe que  $M \neq m$  afinal  $k \geq 2$ . Daí segue  $2^k(2^k - 1)M = 2^k m = (2^k - 1)S(m)$ . Então

$$2^k M = S(m) \geq m + M = 2^k M.$$

Daí é fato que  $S(m) = m + M$ . Assim,  $M$  e  $m$  são os únicos divisores de  $m$ . Em particular,  $M = 1$  e  $m = 2^k - 1$  é primo. Portanto,  $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$  em que  $(2^k - 1)$  é primo.

Há uma outra forma de chegarmos ao resultado quisto:

**Teorema 14** Se  $A = \{2^{n-1} \cdot (2^n - 1) \mid n \in \mathbb{N}, \text{ e } 2^n - 1 \text{ é primo}\}$  e  $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é perfeito}\}$ , então  $A \subseteq P$ .

Prova: Suponha que  $A$  e  $P$  sejam como indicado. Para mostrar  $A \subseteq P$ , devemos mostrar que  $p \in A$  implica  $p \in P$ . Assim, suponha que  $p \in A$ . Por definição de  $A$ , isso significa  $p = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$  para algum  $n \in \mathbb{N}$  para o qual  $2^n - 1$  é primo. Queremos mostrar que  $p \in P$ , ou seja, que  $p$  é perfeito. Assim, precisamos mostrar que a soma dos divisores positivos de  $p$  somam  $2p$ . Notar que desde  $2^n - 1$  é primo, qualquer divisor de  $p = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$  deve ter a forma  $2^k$  ou  $2^k(2^n - 1)$  para  $0 \leq k \leq n - 1$ . Assim, os divisores positivos de  $p$  são os seguintes:

TABELA 1 – Tabela de números perfeitos

| $n$ | $2^{n-1}$ | $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1$             | $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ |
|-----|-----------|--|---------------------------|
| 1   | 1         | $1 = 1$                                      | 1                         |
| 2   | 2         | $1 + 2 = 3$                                  | <b>6</b>                  |
| 3   | 4         | $1 + 2 + 4 = 7$                              | <b>28</b>                 |
| 4   | 8         | $1 + 2 + 4 + 8 = 15$                         | 120                       |
| 5   | 16        | $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$                    | <b>496</b>                |
| 6   | 32        | $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$               | 2016                      |
| 7   | 64        | $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$         | <b>8 128</b>              |
| 8   | 128       | $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 64 + 128 = 255$     | 32640                     |
| 9   | 256       | $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 128 + 256 = 511$    | 130516                    |
| 10  | 512       | $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 256 + 512 = 1023$   | 523776                    |
| 11  | 1024      | $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 512 + 1024 = 2047$  | 2096128                   |
| 12  | 2048      | $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1024 + 2048 = 4095$ | 8386560                   |
| 13  | 4096      | $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048 + 4096 = 8191$ | <b>33 550 336</b>         |

TABELA 2 – Divisores de  $p$ 

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad \dots \quad 2^{n-2} \quad 2^{n-1}$$

$$2^0(2^n - 1) \quad 2^1(2^n - 1) \quad 2^2(2^n - 1) \quad \dots \quad 2^{n-2}(2^n - 1) \quad 2^{n-1}(2^n - 1)$$

Observe que esta lista teve início com  $2^0 = 1$  e finaliza em  $2^{n-1}(2^n - 1) = p$ . Se somarmos todos esses divisores obtemos o seguinte.

$$\begin{aligned}
 p + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k(2^n - 1) &= p + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + (2^n - 1) \sum_{k=0}^{n-2} 2^k \\
 &= p + (2^n - 1) + (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \\
 &= p + (2^n - 1)[(1 + (2^{n-1} - 1))] \\
 &= p + 2^{n-1}(2^n - 1) \\
 &= p + p \\
 &= 2p
 \end{aligned}$$

Isso nos mostra que  $p$  é perfeito e, portanto,  $A \subseteq P$ . Pela demonstração também sabemos que  $p$  é par.

**Teorema 15** Se  $A = \{2^{n-1}(2^n - 1) \mid n \in \mathbb{N}, \text{ e } 2^n - 1 \text{ é primo}\}$ , e  $E = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é perfeito e par}\}$ , então  $A = E$ .

Prova:

Para mostrar que  $A = E$  é necessário mostrar que  $A \subseteq E$  e  $E \subseteq A$ . Se considerarmos  $p \in A$  imediatamente  $p$  é par e perfeito por conta da demonstração imediatamente anterior. Logo  $A \subseteq E$ .

Agora, queremos mostrar que  $E \subseteq A$ . Seja  $p \in E$ , ou seja,  $p$  é perfeito e cuja forma fatorada em primos é  $p = 2^k 3^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3} \dots$ , onde  $n_1, n_2, n_3, \dots$ , são naturais, mas não necessariamente são diferentes de zero enquanto, necessariamente,  $k > 0$ , afinal  $p$  é par. Segue  $p = 2^k q$  para algum inteiro positivo  $k$  e um inteiro ímpar  $q$ . Agora precisamos mostrar que  $p \in A$  ou seja, precisamos mostrar que  $p$  é da forma  $2^{n-1}(2^n - 1)$ . Para obter a forma  $p = 2^k q$ , vamos considerar  $n = k + 1$ , então agora temos  $p = 2^{n-1} q$ . Listando os divisores positivos de  $q$  como  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$ , onde  $d_1 = 1$  e  $d_m = q$ :

TABELA 3 – Divisores de  $q$ 

|               |               |               |          |               |
|---------------|---------------|---------------|----------|---------------|
| $2^0 d_1$     | $2^0 d_2$     | $2^0 d_3$     | $\dots$  | $2^0 d_m$     |
| $2^1 d_1$     | $2^1 d_2$     | $2^1 d_3$     | $\dots$  | $2^1 d_m$     |
| $2^2 d_1$     | $2^2 d_2$     | $2^2 d_3$     | $\dots$  | $2^2 d_m$     |
| $2^3 d_1$     | $2^3 d_2$     | $2^3 d_3$     | $\dots$  | $2^3 d_m$     |
| $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$ | $\vdots$      |
| $2^{n-1} d_1$ | $2^{n-1} d_2$ | $2^{n-1} d_3$ | $\dots$  | $2^{n-1} d_m$ |

Como  $p$  é perfeito, esses divisores somam  $2p$ . Pela equação  $p = 2^{n-1} q$ , sua soma é  $2p = 2(2^{n-1} q) = 2^n q$ . Somando os divisores coluna por coluna, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_2 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_3 + \dots + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_m &= 2^n q \\ (2^n - 1)d_1 + (2^n - 1)d_2 + (2^n - 1)d_3 + \dots + (2^n - 1)d_m &= 2^n q \\ d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_m &= \frac{2^n q}{2^n - 1} \end{aligned}$$

de modo que

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_m = \frac{(2^n - 1 + 1)q}{2^n - 1} = \frac{(2^n - 1)q + q}{2^n - 1} = q + \frac{q}{2^n - 1}.$$

Assim,  $\frac{q}{2^n - 1}$  é um inteiro e tanto  $q$  quanto  $\frac{q}{2^n - 1}$  são divisores de  $q$ . Como sua soma é igual à soma de todos os divisores de  $q$ , segue que  $q$  tem apenas dois divisores positivos,  $q$  e  $\frac{q}{2^n - 1}$ . Como um dos seus divisores é 1, este deve ser  $\frac{q}{2^n - 1}$  o que implica que  $q = 2^n - 1$ . Como sabemos, um número que possui apenas 2 divisores distintos é primo, então  $q = 2^n - 1$  é primo. Segue que  $p = 2^{n-1}(2^n - 1)$ , onde  $2^n - 1$  é primo. Daí, por definição,  $p \in A$ , como queríamos, afinal  $E \subseteq A$ . Como  $E \subseteq A$  e  $A \subseteq E$ , então  $A = E$ .

Até hoje não se conhecem números perfeitos ímpares. Portanto, até agora, podemos dizer que todos os números perfeitos conhecidos são triangulares.

## CONCLUSÃO

Neste capítulo, faremos algumas apresentações curiosas e deixaremos a cargo do leitor, como desafio e até sugestão de novos trabalhos, algumas relações.

- A soma dos quadrados dos inversos de todos os números triangulares converge para  $4 \cdot \frac{\pi^2 - 9}{3}$

$$1^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{15^2} + \dots = 4 \cdot \frac{\pi^2 - 9}{3}$$

- A soma dos cubos dos inversos de todos os números triangulares converge para  $8 \cdot (10 - \pi^2)$

$$1^3 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{15^3} + \dots = 8 \cdot (10 - \pi^2)$$

- A soma dos inversos dos números triangulares com sinais alternados é  $4 \cdot \log 2 - 2$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots = 4 \cdot \log 2 - 2$$

- A soma dos inversos dos quadrados dos números triangulares com sinais alternados é  $12 - 16 \cdot \log 2$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{15^2} - \dots = 12 - 16 \cdot \log 2$$

Como se pode observar são diversas as ligações que os números triangulares fazem com outros segmentos da matemática tornando-o altamente explorável e rico.

Para a realização deste produto foram abordados tópicos de álgebra, geometria, e combinatória com auxílio de alguns materiais estrangeiros. Percebe-se também, que, embora o tema seja promissor, ele é bem pouco explorado no Brasil e por isso ficaram as sugestões acima para novos trabalhos.

Apesar disso, existem conclusões a serem feitas ainda no mundo matemático que limitam algumas linhas de pensamento, como observamos na relação dos números triangulares com os números perfeitos.

Por outro lado, em outras linhas como os números de Mersenne é possível observar algumas características muito peculiares como a existência de apenas um número de Mersenne que também é perfeito.

O trabalho também nos desperta algumas inquietações na aritmética modular quando vimos que há ciclos de resíduos nos sugerindo relações com a trigonometria que não foram explorados aqui.

Assim, o tema abordado pelo trabalho desperta cada vez mais curiosidade e como uma caixa de chocolate nos faz querer explorar mais linhas e mais afundo os números triangulares.

Outro exemplo de tema não abordado neste trabalho que poderia ser explorado é: existem triângulos retângulos cujos lados são números triangulares? Quantos?

Dessa maneira e deixando alguns desafios encerra-se este trabalho de modo muito gratificante. Esperamos que leitor que tenha tido uma boa experiência com esta produção.

Obrigado!

## REFERÊNCIAS

- KOSHY, Thomas. Fibonacci, Lucas, and Pell Numbers, and Pascal's Triangle. **Applied Probability Trust**, p. 125–132, 2011.
- KOSHY, Thomas. **Pell and Pell – Lucas Numbers with Applications**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2014.
- LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. [S.l.]: SBM, 2016. v. 2.
- MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta**. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2015. Citado 1 vez na página 10.
- REKA, Dr. P. Some properties of Triangular Numbers. **The International journal of analytical and experimental modal analysis**, p. 840–844, 2019.
- REKA, Dr. P. Some properties of Triangular Numbers. **The International journal of analytical and experimental modal analysis**, p. 840–844, 2019.
- SANTOS, Wagner Ferreira. **Matemática Discreta**. Única. [S.l.]: CESAD, 2010. v. 5.
- SHAILESH A. SHIRALI, Anuradha S. Garge e. Triangular Numbers. **Resonance – Journal of Science Education**, p. 672–675, 2012.