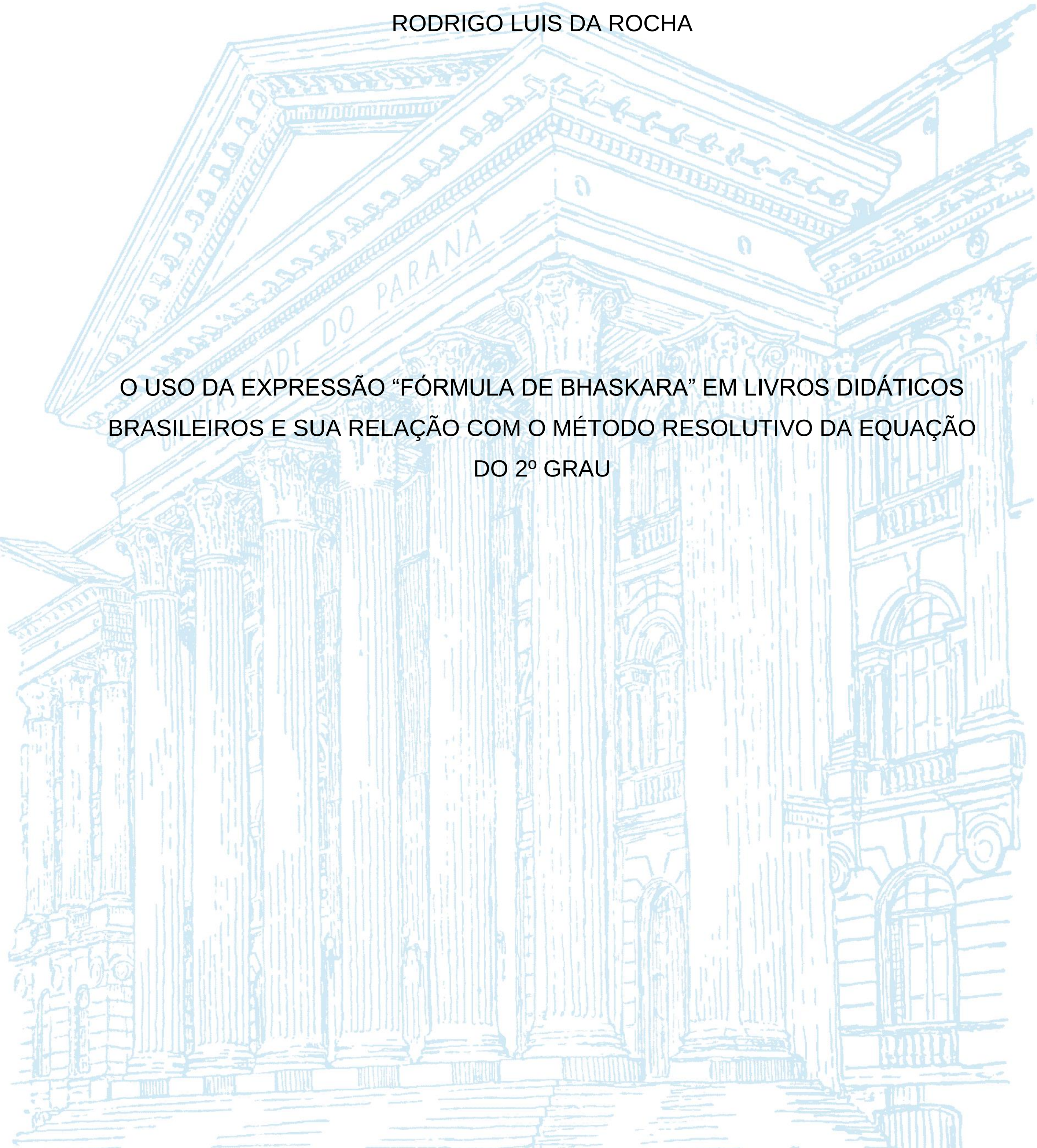
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RODRIGO LUIS DA ROCHA



O USO DA EXPRESSÃO “FÓRMULA DE BHASKARA” EM LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS E SUA RELAÇÃO COM O MÉTODO RESOLUTIVO DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

CURITIBA

2023

RODRIGO LUIS DA ROCHA

O USO DA EXPRESSÃO “FÓRMULA DE BHASKARA” EM LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS E SUA RELAÇÃO COM O MÉTODO RESOLUTIVO DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho.

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Rocha, Rodrigo Luis da.
O uso da expressão "Fórmula de Bhaskara" em Livros didáticos brasileiros e sua relação com o método resolutivo da equação do 2º grau. / Rodrigo Luis da Rocha. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho.

1. Matemática. 2. Fórmulas matemáticas. 3. Livros didáticos. 4. Escolas – Estudo e ensino. I. Carvalho, Alexandre Luis Trovon de. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

Bibliotecário: Nilson Carlos Vieira Junior CRB-9/1797

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **RODRIGO LUIS DA ROCHA** intitulada: **O uso da expressão "fórmula de Bháskara" em livros didáticos brasileiros e sua relação com o método resolutivo da equação do 2o Grau.**, sob orientação do Prof. Dr. ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Fevereiro de 2023.

ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Presidente da Banca Examinadora

CARLOS ROBERTO VIANNA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Alexander Dutra

ALEXANDER DOS SANTOS DUTRA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE AVEIRO)

AGRADECIMENTOS

A conclusão desta pesquisa e do Mestrado Profissional em Matemática só foi possível graças à participação e o esforço de várias pessoas que estiveram comigo durante todo o processo. Algumas de maneira mais direta auxiliando durante as disciplinas e a elaboração desta dissertação, outros, de maneira tão importante quanto, dando auxílio motivacional e contribuindo em tarefas que poderiam tomar o precioso tempo durante o curso.

Agradeço ao colega de Colégio Militar e amigo Paulo Cesar Tavares de Souza, o PC, pelo incentivo para que eu me inscrevesse no processo de seleção e pelo auxílio nos estudos durante as disciplinas do curso.

Aos colegas Diego M. Desanti e Eduardo G. Guedes pelo empréstimo dos materiais de estudo, espetacularmente elaborados por estes dois grandes professores. Agradeço também a todos os colegas de turma, com que os quais dividimos dúvidas, compartilhamos conhecimentos e construímos um grupo no qual todos cresceram ao longo do curso.

Agradeço a todos os professores do curso pelas aulas ministradas e pelo empenho em participar do PROFMAT. Em especial, ao professor Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana, que sempre demonstrou todo o esforço na coordenação do curso e ao professor Dr. Carlos Henrique dos Santos, que lecionou várias disciplinas para a nossa turma, e em todas elas, nos brindou com seu vasto conhecimento e sua alegria em lecionar.

Faço um agradecimento especial ao professor Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho, orientador deste trabalho. Sua contribuição foi imprescindível para que chegássemos a estes resultados. Além de seu conhecimento sobre o assunto, sua participação efetiva na busca pelas obras, e nas discussões sobre qual caminho seguir foram fundamentais para a realização desta pesquisa.

Agradeço também à minha esposa, Bruna Negri Biesczad, que sempre incentivou minha participação no curso e nos momentos necessários teve as palavras de ânimo e afeto para que eu prosseguisse na caminhada.

Finalizo esta seção agradecendo a todos que de uma forma ou outra contribuíram para a realização deste curso. Com certeza, esta vitória é fruto de pequenas batalhas que contaram com várias colaborações para que fossem vencidas.

RESUMO

Esta dissertação traz uma análise da forma de abordagem da solução da equação do 2º grau, e como esta expressão relaciona-se ao matemático hindu Bhaskara, nos manuais escolares brasileiros. Foram pesquisados manuais escolares desde 1853. Como resultado, fez-se um compilado dos sete principais métodos de resolução presentes nesses textos. Percebeu-se também que a referência a Bhaskara nunca deixou de ser utilizada. Foi elaborada uma linha do tempo, na qual se observa que até a década de 60 os autores atribuíam a Bhaskara o desenvolvimento do método resolutivo, mudando a forma de se referir a ele, com o passar das décadas. Levantou-se a hipótese de que a expressão tivesse origem na Espanha, e de que Bhaskara realmente teve participação direta no desenvolvimento do método indiano de resolução de equações quadráticas. Observou-se também que a grafia do nome próprio Bhaskara também aparece de diversas maneiras (Bhaskara, Bháskara, Báskara, Báscara) assim como ocorre uma confusão entre os termos indiano e hindu, ao se atribuir a origem deste matemático. Por fim, este trabalho apresenta uma contribuição para o estudo sobre a forma como o método atribuído a Bhaskara é utilizado e referenciado nos manuais escolares brasileiros, servindo de ponto de partida para pesquisas futuras.

Palavras-chave: Equação do 2º grau, Fórmula de Bhaskara, Livros Didáticos de Matemática.

ABSTRACT

This dissertation presents an analysis of the approach given to the solution of the 2nd degree equation in textbooks, and how this expression is related to the Hindu mathematician Bhaskara. Brazilian school manuals have been examined since 1853. As a result, a compilation of the seven main methods of resolution present in these texts was prepared. It was also noticed that the reference to Bhaskara was never put away. A timeline was drawn up, in which it was noticed that until the 1960s, the authors attributed to Bhaskara the development of the solving method, changing the form to mention it over the decades.The hypothesis was raised that the expression originated in Spain, and that Bhaskara did have a direct role in the development of the Indian method of solving quadratic equations. It was also observed that the spelling of the proper name Bhaskara also appears in several ways (Bhaskara, Bháskara, Báskara, Báscara) as well as a confusion between the terms Indian and Hindu when the origin of this mathematician is referred to. Finally, this work presents a contribution to the study on how the method attributed to Bhaskara is used and referenced in Brazilian school manuals, serving as a starting point for future research.

Keywords: 2nd degree equation, Bhaskara formula, Mathematics textbooks.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo das equações do 2° grau normalmente ocorre no atual 9° ano do Ensino Fundamental (antigo quarto ano ginasial). Por ser um conhecimento bastante requisitado nas séries seguintes e em outras disciplinas, como Física e Química do Ensino Médio, sua abordagem costuma ser detalhada e com tempo considerável para a absorção dos principais conceitos. De um modo geral, os livros didáticos trazem uma boa abordagem matemática, apresentando exemplos de aplicações e métodos otimizados para encontrar as raízes da equação.

A apresentação destes métodos para obtenção das raízes varia conforme o autor do livro didático e da coleção, mas normalmente recai em uma demonstração algébrica finalizada na expressão literal, a qual chamaremos neste trabalho de **fórmula resolutiva**, que permite o cálculo das raízes. Após uma análise prévia dos livros didáticos atuais, resolvemos investigar qual a razão do termo aparecer nesses manuais escolares, contendo a afirmação de o método ser de Bhaskara. Isso nos dirigiu a um levantamento e análise da referência ao termo em livros didáticos, numa tentativa de localizar sua origem e desenvolvimento ao longo da história do ensino brasileiro. Entretanto, uma breve busca em artigos científicos remeteu ao fato de que aparentemente a alusão a Bhaskara foi descontinuada em determinado período (décadas de 50 e 60) e retornou posteriormente, estando presente nos livros atuais. Além disso, vários livros atuais afirmam que a expressão Fórmula de Bhaskara é uma homenagem ao matemático hindu, mas não teria sido ele o seu desenvolvedor. Este eventual deslize histórico dos livros didáticos chamou a atenção e deu origem ao tema deste trabalho.

Desta forma, esta pesquisa procurou levantar e avaliar manuais escolares brasileiros de matemática (que abordam equações do 2° grau), verificando como os métodos para obtenção das raízes são chamados e quais modificações ocorreram ao longo do último século. Para delimitar historicamente foi definido que a busca pelos livros seria feita de modo a analisar com mais atenção livros antigos e compará-los com os atuais. Nesse processo localizamos a citação que acreditamos ser a mais antiga, o que envolveu uma análise de livros didáticos e manuais escolares que remontou os dois últimos séculos. Ressalta-se que não é objetivo deste trabalho comparar os métodos de obtenção de raízes, nem comparar os livros didáticos, mas sim verificar em que sentido a referência a Bhaskara, na fórmula resolutiva, foi sendo utilizada ao longo do último século.

2 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

De acordo com o livro *A matemática do Ensino Médio* (Lima, 2001), os problemas envolvendo equações do 2° grau estão entre os mais antigos da matemática. A solução das equações quadráticas teve um desenvolvimento que contou com a colaboração de inúmeras pessoas, que a trataram de diferentes modos, com o argumento matemático que lhe era pertinente em seu momento histórico.

Segundo o autor, textos cuneiformes escritos pelos babilônicos há quase quatro mil anos já apresentavam situações como a obtenção dos valores de dois números, sendo conhecidos sua soma *s* e seu produto *p*. Nesta situação, sendo *x* um dos números, o outro número é descrito por *s – x.* Assim, o produto é dado por:

$$p = x(s - x) = sx - x^2, \quad \text{logo} \quad x^2 - sx + p = 0,$$

que é uma equação do 2° grau.

No mesmo livro, Elon Lages Lima afirma ainda que a obtenção das raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ é um conhecimento milenar. Até o final do século 16 não era utilizada uma fórmula para obtenção das raízes, devido ao fato de não se representar os coeficientes de uma equação por letras. O início desta representação foi feito por François Viète, matemático francês que viveu entre 1540 e 1603. Antes disso, utilizava-se uma sequência de procedimentos, de forma retórica (Berriman, 1956).

No mesmo artigo, Berriman analisa o processo de solução da equação $x^2 + x = \frac{3}{4}$, como aparece no tablete BM 13 901[1]:

> Tome metade de 1, que é $\frac{1}{2}$, e multiplique $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$, que é $\frac{1}{4}$. Some isso a $\frac{3}{4}$ para obter 1. Este é o quadrado de 1. Agora subtraia $\frac{1}{2}$ de 1. O resultado é $\frac{1}{2}$.

[1] Aqui não estamos considerando a notação em base 60, tal como aparece nesse tablete, que se encontra exposto no Museu Britânico.

Nesses problemas, os valores da soma e do produto são números positivos. Desse modo, os babilônicos não tinham problemas com soluções negativas fornecidas por estas regras.

Na notação atual, definimos uma equação do 2° grau, como uma expressão do tipo $ax^2+bx+c=0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e com $a \neq 0$. Encontrar as raízes desta equação significa encontrar os valores de x que tornam a igualdade verdadeira. A obtenção destes valores pode ser feita de algumas formas (graficamente, regra da soma e produto, entre outras), porém a forma mais difundida é a aplicação da fórmula resolutiva $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Esta expressão é apresentada em vários livros didáticos sob o nome de Fórmula de Bhaskara. Vários autores afirmaram que a expressão *Fórmula de Bhaskara* (algumas vezes grafada como Bháskara) é utilizada apenas no Brasil.

Vailati (2007), diz que “[...] somente no Brasil em 1960, a fórmula geral para a solução das equações do 2º grau está ligada ao matemático hindu Bháskara II”. Segundo este autor, a atribuição do nome à fórmula se deve a uma homenagem feita pelos matemáticos devido às contribuições de Bhaskara.

Autores como Garbi (1997) e Fragoso (1999), consideram não somente Báskara, mas também o matemático Sridhara no desenvolvimento do método de solução das equações quadráticas, conforme descrito em Guedes (2019).

Trovon (2012) afirma que equações quadráticas eram resolvidas desde os tempos babilônicos e sua solução registrada de maneira retórica. Segundo este autor, Bhaskara pode ter utilizado um método semelhante, seguindo os passos de seu predecessor Brahmagupta, que em 628 dC já apresenta uma solução retórica bastante completa. Trovon ainda sugere que o costume de chamar a expressão de Fórmula de Bhaskara tenha iniciado na década de 50 e chama a atenção ao fato de que nem mesmo na Índia, terra natal de Bhaskara, a fórmula ou qualquer método de solução para equações quadráticas, carregue o nome desse matemático.

Dessa forma, considerando que constantemente é afirmado que a fórmula resolutiva utilizada atualmente não foi desenvolvida por Bhaskara e também a frequência da aparição da expressão nos manuais escolares, surgiu a motivação de investigar como os livros didáticos brasileiros, ao longo do tempo, trataram o método de solução, especificamente ao se referirem a Bhaskara.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DO MÉTODO DE RESOLUÇÃO APRESENTADO POR BHASKARA

Conforme já mencionado, a solução das equações quadráticas teve um desenvolvimento que contou com a colaboração de inúmeros atores, em diversas culturas. Eves (2004) afirma que no tempo do matemático Brahmagupta (que viveu em 628 dC), os indianos aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática, com soluções reais, tem duas raízes formais. Segundo este autor, eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método de completar de quadrados.

Os procedimentos utilizados por Bhaskara para resolver o que hoje conhecemos como equação do 2° grau foram citados em seus escritos, como por exemplo no *Bija Ganita*, onde regras e algoritmos orientam a resolução de problemas envolvendo quantidades desconhecidas. As regras são expressas em versos, ilustradas por exemplos e contêm um comentário do próprio autor para explicá-las (ROQUE, 2012). Esta autora apresenta uma tradução em linguagem atual do método atualmente conhecido como “completar o quadrado” extraído do *Bija Ganita*:

> *De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Esse grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?*
>
> *Para resolvê-lo é preciso escrever uma equação, aqui feita na notação atual. Bhaskara afirma que, pela pergunta, há indício que metade do enxame é um número que tem raiz, logo, $2x^2$ é a indicação para o enxame todo. Reunindo a quantidade desconhecida x, $\frac{8}{9}$ do todo e mais duas unidades tem-se todo o enxame ficando a equação assim, $x+\frac{16}{9}x^2+2=2x^2$. O procedimento diz que se deve multiplicar os dois membros por um fator conveniente (9) somando o que é necessário, donde obtém-se $9x+16x^2+18=18x^2$ e em seguida $2x^2-9x=18$. O passo seguinte produz o que hoje é conhecido como trinômio quadrado perfeito segundo a regra “é por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar.” Portanto, da última igualdade sai*

> $16x^2 - 36x = 144$ *e em seguida* $16x^2 - 72x + 81 = 225$*; como os dois membros são quadrados, deve-se extrair raízes e igualá-las para chegar à igualdade* $4x - 9 = 15$*, de onde se conclui que o valor da quantidade desconhecida é 6; o número de abelhas,* $2x^2$*, é então 72.*

Na tradução para outra língua, a forma retórica é perdida, não obedecendo à métrica e a versificação do texto original.

Roque (2012) indica ainda que há um método geral para resolução de equações quadráticas, expresso no texto retórico. Não é nosso objetivo aqui uma discussão do método proposto por Bhaskara para solução das equações quadráticas. Como referência a este tema, citamos o trabalho de Guedes (2019)[2], que discute o que Bhaskara apresenta no *Bija-Ganita* quanto à solução das equações quadráticas.

---

[2] Para mais detalhes veja: GUEDES, E. G. **A equação quadrática e as contribuições de Bháskara.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2019.

4 A PESQUISA ENVOLVENDO LIVROS DIDÁTICOS

A pesquisa envolvendo livros didáticos é uma área bastante ampla e que pode trazer impactos em diversos aspectos diretamente relacionados ao ensino. O guia de livros didáticos do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) menciona que:

> *É preciso observar, no entanto, que as possíveis funções que um livro didático pode exercer não se tornam realidade, caso não se leve em conta o contexto em que ele é utilizado. Noutras palavras, as funções acima referidas são histórica e socialmente situadas e, assim, sujeitas a limitações e contradições. Por isso, tanto na escolha quanto no uso do livro, o professor em o papel indispensável de observar a adequação desse instrumento didático à sua prática pedagógica e ao seu aluno. (BRASIL, 2007, p.12)*

Esta passagem do documento oficial remete ao fato de que o livro didático é um material de extrema importância na prática escolar, e por isso é importante que se atente para alguns aspectos relacionados à qualidade do material (figuras, exercícios) e à correta apresentação dos conteúdos e nomenclaturas. Na prática educativa, o livro didático acaba servindo como referência ao professor, que o utiliza como guia para a elaboração e planejamento de suas atividades.

Sendo assim, a pesquisa envolvendo manuais escolares apresenta-se importante na medida em que compara aspectos específicos de obras de diversos autores, servindo como instrumento de análise e orientação, ou exemplo, na elaboração de novas coleções.

Também é importante para o entendimento do contexto e que certos costumes escolares se instalaram, alguns deles induzindo a equívocos históricos ou conceituais, acabando por se perpetuar por várias gerações, criando uma narrativa inconsciente de que uma dada informação seja verdadeira.

4.1 DIFICULDADES NA PESQUISA ENVOLVENDO LIVROS DIDÁTICOS E MANUAIS ESCOLARES

As pesquisas relacionadas a livros didáticos costumam trazer dificuldades inerentes à localização e catalogação das obras de interesse. Valente (2008) já menciona que uma das dificuldades encontradas neste campo de pesquisa, se relaciona com obras não datadas, ou datas imprecisas, reimpressões e outros fatores que dificultam a correta localização temporal da obra.

Durante o desenvolvimento desta pesquisa surgiram dificuldades, normais dentro desta área de investigação, mas que julgamos devem ser mencionadas com o objetivo de alertar e orientar novas pesquisas sobre o tema, que se coloquem.

A primeira dificuldade encontrada foi o levantamento das obras de interesse. Embora existam vários grupos de pesquisa que já listaram as principais obras de cada período, as diversas mudanças de nomenclatura e de contagem dos anos letivos (quarto ano do ginásio se tornou 8ª série e atualmente é o 9º ano) dificulta a localização do tema dentro das coleções didáticas.

Outra dificuldade observada é a localização de exemplares (físicos ou digitalizados) das obras, principalmente as mais antigas. Foram visitados os acervos das bibliotecas da UFPR (Centro Politécnico e Reitoria) e da Biblioteca Pública do Paraná. As bibliotecas e acervos da cidade de Curitiba não possuíam uma variedade de obras significativa para nossa pesquisa. Com o objetivo de encontrar alguns títulos necessários ao estudo, empreendemos duas visitas à cidade de São Paulo para consulta às bibliotecas Monteiro Lobato[3] e à Biblioteca do Livro Didático[4], da Faculdade de Educação da USP. Mesmo nas bibliotecas que possuem acervos de livros didáticos, muitas das obras estão em mal estado de conservação (encapados, com falta de páginas) o que dificulta a utilização.

Além disso, o acesso aos livros antigos deve ser agendado previamente. Embora mereça reconhecimento a imensa boa vontade apresentada pelos

---

[3] Biblioteca Monteiro Lobato. Rua Gen. Jardim 485, Vila Buarque, São Paulo, SP.

[4] Biblioteca do Livro Didático. Faculdade de Educação – USP. Avenida da Universidade 308, Cidade Universitária, São Paulo, SP.

servidores das bibliotecas. Devido ao seu número reduzido, os horários de atendimento costumam ser restritos, ensejando o retorno ao acervo em outro momento para finalização da consulta.

Durante a consulta às obras, constatamos a pertinência da observação de Valente: muitos livros didáticos antigos não possuíam detalhes catalográficos. Várias obras não possuíam data nem bibliografia.

Como estratégia para enfrentar estas dificuldades, foi realizada uma pesquisa na Internet em busca de obras de interesse que estivessem digitalizadas e com acesso disponível ou então à venda em sites de livros usados.

Algumas obras puderam ser consultadas desta maneira, entretanto, devido ao tamanho do arquivo digitalizado (formato imagem) muitas vezes a obra não está integralmente digitalizada, o que é outro fator que causa dificuldade. Entretanto, é importante destacar que a oferta de obras digitalizadas disponíveis em sites de grupos de pesquisa mostra-se uma iniciativa valiosa nesta área de pesquisa.

Apesar das dificuldades apontadas quanto ao levantamento de livros didáticos e manuais escolares, cremos ter reunido um número suficiente de obras físicas e digitais, que nos permitiram o desenvolver a investigação proposta.

5 LEVANTAMENTO DOS DADOS PARA ANÁLISE

O levantamento dos dados para essa pesquisa contemplou quatro etapas distintas. Inicialmente foi realizada uma pesquisa com o objetivo de identificar obras (livros didáticos) relevantes em cada década, de modo a direcionar a busca por estes exemplares. Esta pesquisa foi realizada por meio de artigos e consulta a sites de grupos de pesquisa[5] que trabalham com análise de livros didáticos.

Em seguida foi realizada uma pesquisa nos acervos de bibliotecas ligadas às Universidades e em acervos de livros didáticos disponíveis para visitação. O objetivo foi identificar à quais obras o acesso seria possível.

Na etapa seguinte foram realizadas visitas aos acervos e a busca pelas obras de interesse. Foram visitadas as bibliotecas da UFPR (Centro Politécnico e Reitoria), biblioteca central da UTFPR (na cidade de Curitiba), a Biblioteca Monteiro Lobato e Biblioteca da Faculdade de Educação da USP – FEUSP estas últimas na cidade de São Paulo.

Durante a pesquisa nos acervos, as obras foram fotografadas e, posteriormente, analisados os capítulos que tratavam da apresentação da fórmula resolutiva da equação do 2° grau.

Após as visitas aos acervos foi realizada uma busca por obras atuais. Esta busca foi feita por meio da solicitação a colegas professores de matemática e a setores de escolas que guardam obras do PNLD. Também foi realizada uma pesquisa na internet em busca das obras digitalizadas. Algumas foram encontradas desta maneira e utilizadas no trabalho.

Após a localização das obras, foi realizada uma análise dos capítulos relacionados às equações do 2º grau e elaborada a descrição de cada uma das obras que continha algum tipo de menção a Bhaskara, nos parâmetros estabelecidos para análise.

---

[5] Em particular, destacamos o repositório do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática - GHEMAT, da UFSC. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769. Acessado em 20/05/2017.

5.1 SOBRE AS OBRAS ENCONTRADAS

Foram analisados aproximadamente 90 títulos, distribuídos temporalmente desde 1856[6] até os dias atuais. Como o objetivo era analisar as referências a Bhaskara nos livros didáticos, focamos a atenção em 29 obras que, de alguma maneira, relacionam a fórmula resolutiva da equação do 2º grau a ele. A seguir temos uma listagem seguindo a ordem temporal aproximada, respeitando as obras de um mesmo autor.

- André Perez Y Marin. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA. Escolas Profissionaes do Lyceo Salesiano Sagrado Coração de Jesus, 1909.
- André Perez Y Marin. LIÇÕES DE ÁLGEBRA. Escolas Profissionaes do Lyceo Salesiano Sagrado Coração de Jesus, 1918, 1ª Ed.
- André Perez Y Marin. ELEMENTOS DE ÁLGEBRA. Escolas Profissionaes do Lyceo Salesiano Sagrado Coração de Jesus, 1921, 4ª Ed.
- André Perez Y Marin ELEMENTOS DE ÁLGEBRA. Escolas Profissionaes do Lyceo Salesiano Sagrado Coração de Jesus, 1930, 7ª Ed.
- Jácomo Stavale. TERCEIRO ANO DE MATEMÁTICA. Cia Editora Nacional, 1935, 2ª Ed.
- Jácomo Stavale. TERCEIRO ANO DE MATEMÁTICA. Cia Editora Nacional, 1942, 9ª Ed.
- Jácomo Stavale. ELEMENTOS DE MATEMÁTICA. Cia Editora Nacional, 1944, 5ª Ed.
- Jácomo Stavale. ELEMENTOS DE MATEMÁTICA. Cia Editora Nacional, 1955, 18ª Ed.
- Nicanor Lemgruber e Roberto Peixoto. MATEMÁTICA CURSO GINASIAL - 4A SÉRIE. Editora Minerva LTDA, 1945.

---

[6] O livro mais antigo analisado foi: OTONI, C., B. **ELEMENTOS DE ÁLGEBRA**. Rio de Janeiro: Livraria clássica de Alves e Cia, 1856. Este livro não apresenta menção ao matemático Bhaskara por este motivo não consta na lista apresentada. A imagem da capa dessa obra se encontra na página 73 do Anexo 1.

- Nicanor Lemgruber e Roberto Peixoto. MATEMÁTICA CURSO GINASIAL – 4A SÉRIE. Editora Minerva LTDA, 1948, 2ª Ed.
- Lauro Pastor de Almeida. CURSO DE MATEMÁTICA – CICLO GINASIAL 4ª SÉRIE. Editora Conquista, 1955.
- Benedito Castrucci e Geraldo dos Santos Lima Filho. CURSO DE MATEMÁTICA – 4ª SÉRIE. Editora FTD, 1960.
- Nelson Baccaro, CURSO DE ÁLGEBRA. Ed. Sesil, 1961.
- Nelson Baccaro, CURSO DE ÁLGEBRA. Ed. Ática, 1974, 5ª Ed.
- Nelson Baccaro, CURSO DE ÁLGEBRA. Ed. Ática, 1971, 6ª Ed.
- Nelson Baccaro, CURSO DE ÁLGEBRA. Ed. Ática, 1976, 7ª Ed.
- Nelson Baccaro, MATEMÁTICA. Ed. Ática, 1980.
- Jacy Lamego, MATEMÁTICA PRÁTICA E MODERNA. Ed. do Brasil, 1976.
- Scipione di Pierro Neto, Magda Teresinha Angelo, Edson do Carmo, Lilia Maria Facio. MATEMÁTICA 8ª SÉRIE DO 1º GRAU. Editora saraiva, 1979.
- Vicente Paulo Kosien e Luiz Herminio Marcarini. MATEMÁTICA 8ª SÉRIE DO 1º GRAU. Editora saraiva, 1981.
- José Jakuvic e Marcelo Lellis. MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA. Ed. Scipione, 1995.
- Scipione Di Pierro Neto. MATEMÁTICA SCIPIONE. Ed. Scipione, 1996.
- Scipione Di Pierro Neto. MATEMÁTICA PARA A ESCOLA MODERNA (VOL. 4). Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1997.
- José Jakuvic e Marcelo Lellis. MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA. Ed. Scipione, 1995.
- Marília Centurion, José Jakuvic e Marcelo Lellis. MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA. Ed. Leya, 2002.
- Denise Favareto. MATEMÁTICA EM CENA. Ed. Escala educacional, 2008.
- Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. MATEMÁTICA E REALIDADE. Ed. Atual, 2009.
- Eduardo Chavante. MATEMÁTICA. Ed. SM, 2015.

- Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro. VONTADE DE SABER. Ed. FTD, 2015.

Obtivemos então 29 obras, que foram fruto de nossa análise, exposta nos capítulos a seguir, estabelecendo, dentre outros fatos, tanto uma cronologia como cobertura temporal.

Seria possível acrescentar outras obras recentes (pós 2010) elevando o número de livros didáticos analisados. Por opção, foi dado maior atenção às obras de décadas anteriores, entendendo-se que um maior número de obras atuais não teria uma contribuição significativa no resultado final do trabalho.

5.2 TIPOS DE DEMONSTRAÇÕES ENCONTRADAS

Durante a análise dos capítulos dos livros didáticos que abordam equações do 2° grau, percebeu-se que a apresentação da forma de obtenção das raízes da equação completa possui pouca variação entre as obras. Algumas obras (mais recentes) não apresentam a demonstração para obtenção da expressão final. As obras que apresentam demonstrações, ou algum tipo de encaminhamento formal, a fazem de sete maneiras, sempre muito semelhantes entre si.

Desta forma, para facilitar a apresentação neste trabalho e tornar mais rápida a leitura das fichas das obras, os caminhos para obtenção da fórmula resolutiva foram nominados e serão referenciados nas fichas das obras. A nomenclatura foi escolhida de acordo com sua apresentação nas obras analisadas: Método 01 (atribuído a Bhaskara); Método 02 (dos árabes); Método 03 (substituição de variáveis); Método 04 (Viète); Método 05 (soma e produto); Método 06 (Octacílio de Novaes) e Método 07 (Lauro Pastor).

Embora alguns caminhos não possam ser classificados formalmente como uma demonstração ou um método, optou-se por uniformizar a nomenclatura com o objetivo de facilitar o entendimento das fichas das obras.

5.2.1 Método 01 (método atribuído a Bhaskara)

Esse é o método que aparece no trabalho original do Bhaskara. Segundo ele, um método atribuído a Sridhara. De acordo com o trabalho de Guedes (2019)[7] o método dado pela regra creditada a Sridhara permite um modelo geral para resolver equações do 2º grau. Apesar desse recurso, nos exemplos do *Bija-Ganita* Bhaskara resolve as equações buscando eliminar o termo médio, sendo essa a preocupação principal da regra. Em alguns livros didáticos, a demonstração apresentada segue exatamente este método, entretanto nem todos o atribuem a Bhaskara.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c \qquad \text{(multiplica ambos os termos por 4a)}$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \qquad \text{(adiciona } b^2 \text{ em ambos os lados)}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{-4ac + b^2}$$

Por fim, isolando então a incógnita x nessa igualdade obtemos a expressão conhecida

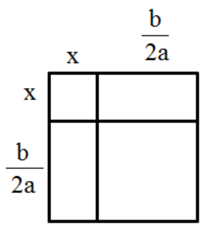
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a}.$$

[7] Para mais detalhes sobre esse ponto específico, veja: GUEDES, E. G. **A equação quadrática e as contribuições de Bháskara.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2019.

5.2.2 Método 02 (método dos árabes)

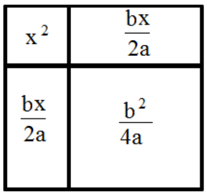
Ainda de acordo com Guedes (2019), tomando por base a tradução de Karpinski (1915), é provável que o método árabe para resolver equação do 2° grau tenha sua origem com al-Khwarizmi, um matemático que viveu por volta de 825 d.C. e teve sua produção ligada à Casa do Saber[8], importante centro de estudos situado na atual cidade de Bagdá. Por mais que esse método seja costumeiramente apresentado de forma algébrica, ele é, na verdade, fruto de uma construção geométrica para o completamento de quadrados.

Na notação atual, concomitantemente com uma abordagem geométrica, podemos fazer a seguinte demonstração com o objetivo de obter a expressão da fórmula resolutiva. Partimos de uma equação completa do 2° grau, na forma $ax^2+bx+c=0$, com $a \neq 0$. Dividindo todos os temos por a, obtêm-se a equação $\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$, que simplificada fica na forma $x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$. Fazendo um rearranjo dos termos obtêm-se $x^2+\frac{bx}{2a}+\frac{bx}{2a}+\frac{c}{a}=0$. Esta equação está relacionada com a figura de um quadrado de lado $x+\frac{b}{2a}$, com as seguintes características:

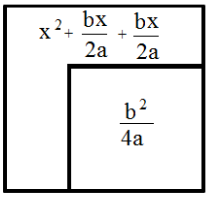


Calculando-se as áreas internas da figura, obtêm-se os seguintes valores:

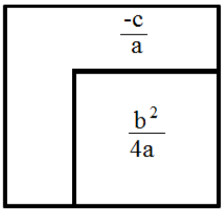
[8] A Casa da Sabedoria, ou Casa do saber, foi uma biblioteca e centro de traduções estabelecido em Bagdá, no Iraque. Foi uma instituição considerada o maior centro intelectual durante a Idade de Ouro do Islã. Vários dos mestres muçulmanos mais eruditos fizeram parte deste centro educacional. De acordo com Rashed (1996) eles realizavam as traduções de livros do persa para o árabe, além de preservar os livros existentes. Baseados em textos persas, indianos e gregos, os estudiosos acumularam uma grande coleção de saber mundial, e desenvolveram sobre essas bases as suas próprias descobertas.



Reorganizando a figura, têm-se:



Partindo de $x^2+\frac{bx}{2a}+\frac{bx}{2a}+\frac{c}{a}=0$, verifica-se que $x^2+\frac{bx}{2a}+\frac{bx}{2a}=-\frac{c}{a}$. Fazendo esta substituição na figura resulta em:



Desta forma, a área total é dada por $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a}$.

Como a figura é um quadrado de lado $x+\frac{b}{2a}$, a área também pode ser escrita por $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Assim, igualando as duas expressões da área deste quadrado, têm-se $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a}$. Supondo $\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a}$ positivo, e extraindo a raiz quadrada têm-se: $\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a}}$. Portanto, $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

Segue disso que $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e, finalmente,

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ou então} \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Trata-se, conforme afirma Guedes (2019), de um método que toma por base um processo puramente geométrico. Nesse contexto, soluções negativas tornam-se problemáticas.

5.2.3 Método 03 (substituição de variáveis)

Este método utiliza a substituição de variáveis. É apresentado em algumas obras didáticas, fornecendo também uma expressão para a solução das equações quadráticas.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c \text{ (dividimos por a)}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

Escrevendo essa expressão como um quadrado perfeito, da forma $(x+y)^2$, temos

$$x^2 + \frac{bx}{a} + y^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Nesse caso, $2y = \frac{b}{a}$, $y = \frac{b}{2a}$, $y^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ e, portanto, podemos escrever a expressão como

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$$

5.2.4. Método 04 (Viète)

Conforme Carvalho (2001), François Viète (1540-1603) se diferencia de seus predecessores por apresentar “uma proposta sistemática para o uso de letras na teoria das equações”. Com base nessa ideia, Viète propõe a resolução de uma equação geral do 2º grau fazendo uso de substituição de variáveis, permitindo essa estratégia transformar a equação inicial em uma equação incompleta.

Dada a equação $ax^2+bx+c=0$, escrevendo $x=u+x'$ temos

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a(u+x')^2+b(u+x')+c=0$$

$$a(u^2+2ux+x'^2)+b(u+x')+c=0$$

$$au^2+2aux'+ax'^2+bu+bx'+c=0$$

$$au^2+(2ax'+b)u+ax'^2+bx'+c=0$$

Fazendo $2ax'+b=0$ teremos

$$x'=\frac{-b}{2a}$$

Substituindo x' na equação anterior:

$$au^2+a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=0$$

$$au^2+\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=0$$

$$au^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$$u^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

De onde deduzimos:

$$u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Retornando na substituição inicial, encontramos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5.2.5 Método 05 (soma e produto)

Outro método que utiliza a manipulação algébrica por meio de substituição de variáveis. Aparece na obra de Algacyr Munhoz Mader[9] e na de José Augusto Correa[10], datada de 1886, que é uma das obras mais antigas verificada neste trabalho.

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx = -c$ (dividindo por a)

$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ (escrevendo $\frac{b}{a} = p$ e $\frac{c}{a} = q$)

$x^2 + px + q = 0$ (adicionando $\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}$ à expressão)

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 - \left[\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right]^2 = 0$$

---

[9] MAEDER, A., M. **Álgebra Elementar. 2ª Parte**. 2ª edição. Curitiba: João Haupt, 1931.

[10] CORREA, J., A. **Resumo de Álgebra**. São Luís: 1886. (Página 74 do Anexo 1).

$$\left[x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]\left[x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right]=0$$

$$x` = -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$$

$$x`` = -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$$

Reunindo as expressões obtêm-se:

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

5.2.6 Método 06 (Octacílio de Novaes)

Este método aparece em uma publicação de 1925, chamada *A Escola Normal* (página 75 do Anexo 1). A publicação é composta por 18 artigos, sendo um deles denominado *Álgebra* de autoria de Lacerda Coutinho, no qual é utilizado o *Processo de Octacilio de Novaes*. Algacyr Munhoz Mader também apresenta este método na sua 1ª edição de sua obra “Álgebra Elementar” (LONGEN, 2007) referenciando-o a Octacílio de Novaes[11]. Na 3ª edição de seu livro, este método é indicado no índice como *método brasileiro*.

O Artigo de Lacerda Coutinho apresenta a resolução de determinada equação quadrática por meio do processo a seguir:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c$$

$$x(ax+b)=-c$$

---

[11] Na página 72 do Anexo 1 temos uma foto da 3ª edição dessa obra.

Fazendo $ax + b = z$ temos:

$$xz = -c$$

Como

$$ax - z = -b$$

Temos

$$\begin{aligned}(ax+z)^2 &= a^2x^2 + 2axz + z^2 \\ &= (a^2x^2 - 2axz + z^2) + 4axz \\ &= (ax - z)^2 + 4axz\end{aligned}$$

Substituindo $ax - z$ e xz por seus valores, teremos:

$$(ax+z)^2 = b^2 - 4ac$$

$$ax + z = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5.2.7 Método 07 (Lauro Pastor)

Este método aparece no livro Curso de Matemática Ciclo Ginasial (Quarta Série) de Lauro Pastor de Almeida, professor do Colégio Pedro II (Rio de Janeiro), datado de 1955. O próprio autor denomina de método de Lauro Pastor.

Na expressão $ax^2 + bx + c = 0$, fazendo $x' = m + n$ e $x'' = m - n$, temos

$$a(m+n)^2 + b(m+n)x + c = 0$$
$$a(m-n)^2 + b(m-n)x + c = 0$$

$$am^2 + 2amn + an^2 + bm + bn + c = 0$$
$$am^2 - 2amn + an^2 + bm - bn + c = 0$$

Somando as equações membro a membro:

$$2am^2 + 2an^2 + 2bm + 2c = 0$$
$$am^2 + an^2 + bm + c = 0$$

Subtraindo as equações membro a membro:

$$am^2 + 2amn + an^2 + bm + bn + c = 0$$
$$am^2 - 2amn + an^2 + bm - bn + c = 0$$
$$4amn + 2bn = 0$$
$$2am + b = 0$$
$$m = -\frac{b}{2a}$$

Substituindo este valor em $am^2 + an^2 + bm + c = 0$

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + an^2 + ba\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c = 0$$
$$b^2 + 4a^2n^2 - 2b^2 + 4ac = 0$$
$$4a^2n^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Resolvendo esta equação: $4^2n^2 = b^2 - 4ac$

$$n^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$n^2 = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo os valores de m e n:

$$x' = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

A seguir apresentamos os resumos dos livros analisados, em que apareceu alguma referência a Bhaskara. Neles estão apresentadas as principais informações sobre a obra e observações gerais sobre a obra e o tratamento dado às equações completas do 2° grau.

O ano de publicação se refere a edição que foi analisada. Chamou-se de período de vigência ao intervalo de tempo entre a publicação da primeira e da última edição encontrada (pode ocorrer de existirem edições que não foram encontradas, mas aparentemente este fato não influenciou no resultado final da pesquisa). Nesta análise será mantida a grafia do nome Bhaskara conforme apresentado no texto original das obras analisadas.

TÍTULO DO LIVRO: ELEMENTOS DE ÁLGEBRA
AUTOR: ANDRÉ PEREZ Y MARIN
ANO DE PUBLICAÇÃO: 1909
PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1909 (1ª edição) a 1930 (7ª edição).
OBSERVAÇÕES GERAIS: É a obra mais antiga encontrada que faz algum tipo de referência a Bhaskara, e, portanto, acreditamos ser a primeira referência ao termo em língua portuguesa. Para a solução da equação completa, apresenta a dedução da expressão por dois métodos distintos. Inicialmente é apresentada a obtenção da fórmula resolutiva por meio do método atribuído a Bhaskara, inclusive fazendo referência ao matemático em uma nota de rodapé. Dois pontos chamam a atenção nesta obra: a referência escrita como matemático *índio* (da Índia) e a nomenclatura de “método” para o processo de obtenção da expressão. Devido à sua importância para este trabalho, esta obra será analisada com mais detalhes no capítulo 8.

Na sequência, o texto apresenta outro procedimento (árabes) atribuído em nota de rodapé aos árabes. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra nas páginas 51 e 52 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: TERCEIRO ANO DE MATEMÁTICA
AUTOR: JÁCOMO STAVALE

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1935

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1932 (1ª edição) a 1942 (9ª edição).

OBSERVAÇÕES GERAIS: Trata sobre equações do segundo grau no capítulo 04. Na página 10 apresenta a sequência de procedimentos que devem ser realizados até a obtenção da fórmula resolutiva, por meio do método atribuído a Bhaskara. Antes de apresentar o método, o autor afirma que este método é devido a Bhaskara, matemático hindu do século XII. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 53 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: ELEMENTOS DE MATEMÁTICA – 4ª SÉRIE GINASIAL

AUTOR: JÁCOMO STAVALE

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1943

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1943 (1ª edição) a 1955 (18ª edição).

OBSERVAÇÕES GERAIS: Utiliza o mesmo texto da obra anterior, novamente afirmando que este método é devido a Bhaskara, matemático hindu do século XII. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 54 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA CURSO GINASIAL – 4ª SÉRIE

AUTOR: NICANOR LEMGRUBER E ROBERTO PEIXOTO

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1945

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1945 até 1954

FAZ REFERÊNCIA À BHÁSKARA: SIM.

OBSERVAÇÕES GERAIS: Apresenta o caso geral, obtendo a solução por meio do método que atribui a Bhaskara. As primeiras edições foram da Editora Minerva. As demais edições foram publicadas pela editora Francisco Aves do Rio de Janeiro. Veremos mais adiante a relação desses autores com outros autores que foram referências em sua época, mostrando a cumplicidade no conhecimento do termo. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 55 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: CURSO DE MATEMÁTICA – CICLO GINASIAL 4ª SÉRIE

AUTOR: LAURO PASTOR DE ALMEIDA

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1955

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1955 (1ª edição) até (não encontrado)

OBSERVAÇÕES GERAIS: Apresenta o caso geral, obtendo a solução por meio do método atribuído a Bhaskara. Afirma no texto que o método é devido a Báscara (grafia do texto), sendo um método clássico. Apresenta também o método Lauro Pastor que segundo o texto, foi criado por ele. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 56 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: CURSO DE MATEMÁTICA – 4ª SÉRIE

AUTOR: BENEDITO CASTRUCCI E GERALDO DOS SANTOS LIMA FILHO

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1960

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1960 (1ª edição) até 1962 (2ª edição)

OBSERVAÇÕES GERAIS: Apresenta o caso geral, obtendo a solução pelo método 01 (atribuído a Bhaskara). Afirma que o método é devido a Bascara (grafia do texto), apresentando ao final do capítulo uma curta biografia sobre este matemático. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 57 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: CURSO DE ÁLGEBRA.

AUTOR: NELSON BACCARO

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1961

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1961 (1ª edição) até 1976 (7ª edição)

OBSERVAÇÕES GERAIS: Na edição de 1961 apresenta o método 01 (atribuído a Bhaskara) em um capítulo chamado “Método de Bhaskara”. Nas demais obras apresenta de maneira direta uma equação completa do 2º grau e na sequência a fórmula resolutiva. Ao lado da fórmula resolutiva existe um retângulo no qual está escrito “Fórmula de Báscara”, não apresentando nenhum tipo de demonstração. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 58 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA PRÁTICA E MODERNA

AUTOR: JACY LAMEGO

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1976

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1976 (1ª edição) até (não encontrado)

OBSERVAÇÕES GERAIS: Apresenta de maneira direta uma equação completa do 2º grau e na sequência a fórmula resolutiva, para a qual menciona ser conhecida como Fórmula de Báscara. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 59 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA 8ª SÉRIE DO 1º GRAU

AUTOR: SCIPIONE DI PIERRO NETO, MAGDA TERESINHA ANGELO, EDSON DO CARMO, LILIA MARIA FACIO.

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1979

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1979 (1ª edição) até 1981

OBSERVAÇÕES GERAIS: Apresenta o caso geral, obtendo a solução pelo método 01 (atribuído a Bhaskara). Na obra, o método é chamado de "Processo de Báscara", fazendo referência ao matemático hindú do século XII. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 60 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA 8ª SÉRIE DO 1º GRAU

AUTOR: VICENTE PAULO KOSIEN E LUIZ HERMINIO MARCARINI

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1981

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1981 (1ª edição) até (não encontrado)

OBSERVAÇÕES GERAIS: o livro apresenta o método de completamento de quadrados sobre a expressão geral, obtendo a fórmula resolutiva pelo método atribuído a Bhaskara. Chama a solução de “fórmula de Báscara” afirmando ter sido por ele deduzida no século XII. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 61 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA

AUTOR: JOSÉ JAKUVIC E MARCELO LELLIS

ANO DE PUBLICAÇÃO: 1995

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1994 até os dias de hoje

OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro traz como título de um capítulo “A fórmula de Bhaskara”. No texto explicativo está escrito que esse método foi apresentado no livro do matemático hindu com este nome. A dedução da fórmula resolutiva é apresentada por meio do método 1 (atribuído a Bhaskara). A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 62 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA SCIPIONE
AUTOR: SCIPIONE DI PIERRO NETO
ANO DE PUBLICAÇÃO: 1996
PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1996 até (não encontrado)
OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro apresenta um tópico intitulado Resolução de equações completas. O tópico inicia com uma resolução por completamento de quadrados. Em seguida é apresentada o método 01 (atribuído a Bhaskara), finalizado na fórmula resolutiva. Na sequência o texto afirma que a fórmula geral para resolução de equações do 2º grau é conhecida como fórmula de Bhaskara. Cabe ressaltar que não se utiliza a expressão método de Bháskara e sim fórmula de Bháskara. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 63 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA
AUTOR: LUIZ MARCIO IMENES E MARCELO LELLIS
ANO DE PUBLICAÇÃO: 1998
PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1998 até os dias de hoje
OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro traz como título de um capítulo “A fórmula de Bhaskara”. No texto explicativo está escrito que esse método foi apresentado no livro do matemático hindu com este nome. A dedução da fórmula resolutiva é apresentada por meio do método 1 (atribuído a Bhaskara). A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra nas páginas 64 e 65 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA
AUTOR: JOSÉ JAKUVIC E MARÍLIA CENTURIÓN
ANO DE PUBLICAÇÃO: 2002
PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 2002 até os dias atuais

OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro traz um capítulo com o título “A fórmula de Bhaskara”. No texto explicativo é mencionado que a expressão não foi por ele formulada, mas leva o nome em sua homenagem, já que ele era um grande astrônomo hindu. No tópico seguinte é apresentada a dedução da fórmula resolutiva por meio do método 1 (atribuído a Bhaskara). A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 66 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA EM CENA
AUTOR: DENISE FAVARETO
ANO DE PUBLICAÇÃO: 2008
PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 2008 até os dias de hoje
OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro apresenta como título de um tópico Equação do 2° grau completa. O texto menciona que para a resolução de equações completas é possível empregar um processo atribuído ao matemático hindu Bháskara, que viveu no século XII. O tópico seguinte apresenta como título: Fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara), e apresenta diretamente a expressão para obtenção das raízes. No tópico seguinte é apresentada uma demonstração por meio do método 1 (atribuído a Bhaskara). A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 67 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: MATEMÁTICA E REALIDADE
AUTOR: GELSON IEZZI, OSVALDO DOLCE e ANTONIO MACHADO
ANO DE PUBLICAÇÃO: 2009
PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 1991 até os dias atuais
OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro apresenta um tópico intitulado a fórmula de Bhaskara. Neste tópico não é feita referência histórica à situação. Apenas é apresentada o método a ele atribuído. Na sequência são apresentados exemplos resolvidos de utilização da expressão para obtenção das raízes. Cabe ressaltar que não se utiliza a expressão método de Bháskara e sim fórmula de Bháskara. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 68 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA

AUTOR: EDUARDO CHAVANTE

ANO DE PUBLICAÇÃO: 2015

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 2015 (1ª edição) até os dias de hoje.

OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro apresenta um tópico intitulado Completar quadrados no qual explica com o auxílio de figuras a obtenção das raízes da equação do 2° grau por meio do método de completar quadrados. No início da explicação faz-se uma breve menção sobre registros históricos deste método pelo matemático árabe Mahammed ibu-Musa al-Khowarizmi. Na sequência é apresentada a demonstração bem detalhada do método 1 (atribuído a Bhaskara) para a obtenção da fórmula resolutiva. O texto explicativo menciona que no Brasil esta fórmula passou a ser conhecida como fórmula de Bháskara, mas enfatiza que em sua época a representação utilizada era diferente. No texto também é feito referência ao francês François Viète como percursor do uso de letras para representar os coeficientes. A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 69 do Anexo 1.

TÍTULO DO LIVRO: VONTADE DE SABER

AUTOR: JOAMIR SOUZA e PATRICIA MORENO PATARO

ANO DE PUBLICAÇÃO: 2015

PERÍODO DE VIGÊNCIA DA OBRA: 2009 (1ª edição) até os dias de hoje.

OBSERVAÇÕES GERAIS: O livro apresenta três formas de resolver as equações completas do 2° grau (fatoração, completar quadrado e fórmula resolutiva). No tópico de fórmula resolutiva é apresentada primeiramente a expressão e na sequência a demonstração. O texto afirma que, no Brasil, esta fórmula é conhecida como fórmula de Bhaskara em virtude de suas contribuições ao estudo das equações do 2° grau. No tópico da fórmula resolutiva é feita a demonstração do tipo 3 (substituição de variáveis). A cópia das páginas de interesse desta obra se encontra na página 70 do Anexo 1.

7 ANÁLISES E HIPÓTESES

7.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O entendimento e análise de obras didáticas necessitam da compreensão do contexto histórico vivido no momento de sua escrita. De acordo com o site do grupo de pesquisa da história da educação matemática no Brasil (GHEMAT[12]), o estudo histórico das disciplinas escolares, permite compreender que elas nascem, transformam-se, passam por períodos de estabilidade e podem até virem a desaparecer.

Embora não seja objetivo deste trabalho realizar uma análise histórica das obras, considerou-se interessante situar os livros didáticos analisados dentro das principais Reformas Educacionais pelas quais a educação brasileira passou nas últimas décadas.

Assim, para facilitar a localização histórica das obras analisadas, apresenta-se na sequência um resumo dos principais eventos que influenciaram de alguma maneira o ensino da matemática e a produção de obras didáticas.

1890 – Reforma Benjamim Constant
1901 – Reforma Epitácio Pessoa
1911 – Reforma Rivadávia Correa
1915 – Reforma Carlos Maximiliano
1925 – Reforma Rocha Vaz
1931 – Reforma Francisco Campos
1942 – Reforma Gustavo Capanema
1951 - Reforma Simões Filho
1961 – Publicação da primeira LDB (Educação Básica)
1963 – Publicação primeiro livro didático baseado no Movimento da Matemática Moderna.
1996 – Aprovada a atual LDB

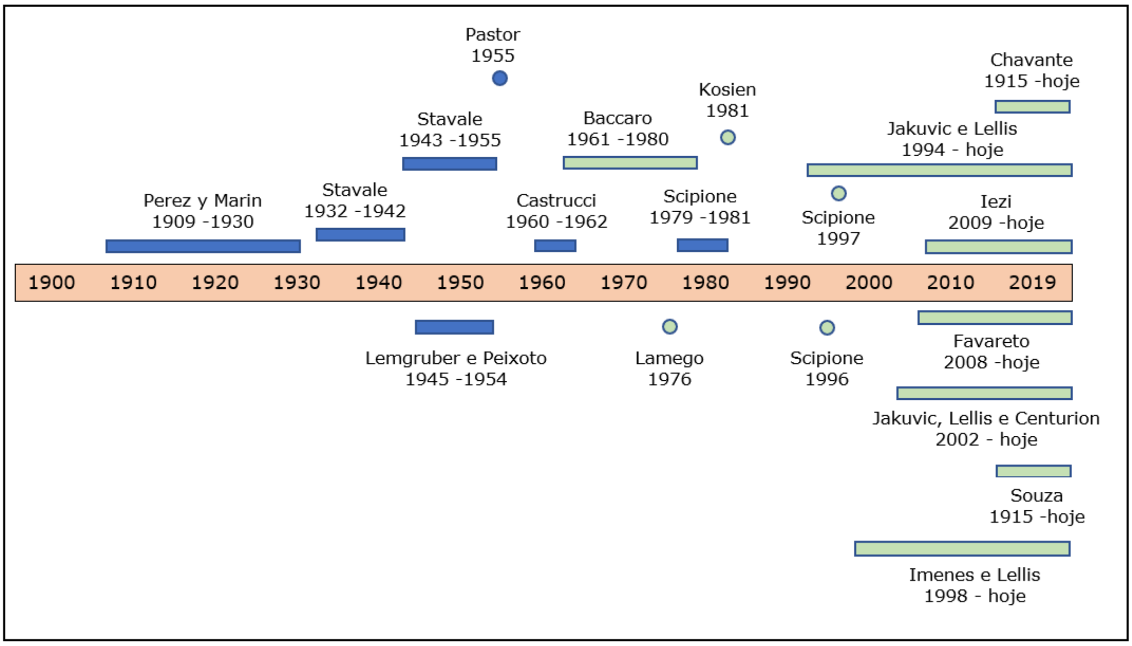
---

[12] Acesso ao site do grupo por meio do endereço eletrônico http://www.ghemat.com.br

Após a análise das obras selecionadas, percebeu-se que após a primeira menção a Bhaskara, realizada por Perez y Marin em 1909, o termo sempre foi utilizado por algum autor relevante. Considerando que um livro didático é utilizado por vários anos, e muitas vezes possui várias edições, foi elaborada uma linha do tempo com os livros que utilizam a expressão ou fazem menção a Bhaskara.

Nesta linha do tempo as barras indicam o período de vigência da obra. Quando esta informação não foi obtida, utilizou-se um círculo na data da edição encontrada. A cor da barra/círculo está relacionada com a forma da citação. As figuras azuis são citações com a expressão **método** de Bhaskara (ou equivalente) e as verdes são citações como **fórmula** de Bhaskara.

FIGURA 1 – Linha do tempo com as referências a Bhaskara.



FONTE: O autor (2020)

Percebe-se pela análise da linha do tempo que a referência a Bhaskara sempre esteve presente nas obras didáticas brasileiras. Praticamente em todo o período compreendido entre 1909 (primeira aparição) e os dias atuais existiu algum livro didático vigente que fazia menção ao matemático indiano.

Uma hipótese para este fato é a aparente integração entre os autores. Considerando o período pós Perez y Marin até a década de 60, não são muitos os autores que tiveram suas obras publicadas e com uso relevante pelas escolas. A grande maioria dos autores (com exceção de Algacyr Munhoz Maeder, no Paraná) estava ligada às escolas paulistas e ao Colégio Pedro II no Rio de Janeiro. Certamente os autores conheciam as obras publicadas nos outros estados, o que leva a se acreditar na hipótese que todos os autores conheciam a referência a Bhaskara, sendo uma opção utilizá-la na obra ou não. Esta hipótese é corroborada pelo fato de que em sua Tese (página 71 do Anexo 1) para o concurso de catedrático do Externato do Gymnasio Paranaense, Algacyr Munhoz Maeder faz referência em uma nota de rodapé ao livro de Perez y Marin. Este fato indica que o autor paranaense teve acesso ao texto de Perez y Marin, e, portanto, conhecia a referência a Bháskara[13].

Outro fato relevante é perceber que na obra de Nicanor Lemgruber e Roberto Peixoto[14] aparece o termo método de Bháskara. Estes autores tinham estreita relação com os professores do Colégio Pedro II[15], como o Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza, indicando que esses, provavelmente, conheciam a nomenclatura "método de Bháskara" mas não a utilizaram em suas obras por opção.

Percebe-se assim que a referência ao matemático indiano não se configurou como um fato regionalizado, uma vez que os principais autores da época tinham acesso à expressão. Aparentemente a utilização ou não da referência foi uma questão de opção do autor.

---

[13] Para maiores informações sobre a obra de Algacyr Munhos Maeder ver: LONGEN, A. **Livros Didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da Educação Matemática.** Tese de Doutorado em Educação. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007.

[14] LEMGRUBER, N., PEIXOTO, R. **Matemática Curso Ginasial. 4ª Série.** Rio de Janeiro: Minerva, 1945**.**

[15] Informação constante na capa do livro de 1945, apresentada na página 55 do Anexo 1 deste trabalho.

7.2 A UTILIZAÇÃO DO TERMO NAS OBRAS DIDÁTICAS

Um ponto interessante a ser analisado, é a forma como Bhaskara é mencionado ao longo das décadas nas obras didáticas brasileiras. Perez y Marin cita que o método foi desenvolvido pelo matemático índio Bhaskara. Esse autor credita a Bhaskara o desenvolvimento do método resolutivo, e utiliza a expressão *matemático índio*.

Esta expressão é a forma como os indianos são chamadas na Espanha, sua terra natal. Por um longo período a citação se mantém uniforme, creditando a Bhaskara o desenvolvimento do método, com algumas pequenas confusões entre o termo indiano (nascido no país Índia) com hindu (pertencente à religião hinduísta). Muitos livros tratam Bhaskara como hindu, o que parece não ser a intenção, uma vez que se estava fazendo referência à região de nascimento. Importante perceber que os autores mais antigos, que atribuem a Bhaskara o desenvolvimento da expressão, sempre o fazem por meio da demonstração 01:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$ (multiplicamos ambos os termos por 4*a*)

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$ (adicionamos b^2 à ambos os lados)

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$$

$$2ax + b = \sqrt{-4ac + b^2}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{-4ac + b^2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$$

É de se levantar a hipótese de que em algum momento esta demonstração específica (método 1) foi atribuída a Bhaskara e, desta maneira, disseminada. Reaparece aqui o questionamento sobre o papel de Bhaskara na obtenção deste procedimento específico. Como já dissemos antes, este não é o objetivo desta pesquisa. Este método resolutivo é analisado por Guedes (2019), no contexto das obras de Bhaskara.

Conforme pode ser visto na linha do tempo, abaixo, nos livros publicados após a década de 60 a forma como Bhaskara é mencionado sofre algumas alterações. Muitas das citações deixam de utilizar a expressão “método de Bhaskara” e passam a chamar “fórmula de Bhaskara”. Esta mudança na denominação pode parecer irrelevante, porém é bastante significativa. O método de Bhaskara traz intrinsecamente a ideia um processo algébrico específico para obtenção da expressão resolutiva. O termo fórmula, por outro lado, utiliza uma ideia menos refinada. Existem várias formas de se obter aquela expressão, e, aparentemente, a contribuição de Bhaskara está relacionada com um processo algébrico específico.

Neste ponto surge a hipótese de que o movimento da Matemática Moderna contribuiu para esta mudança, uma vez que a alteração da nomenclatura ocorre no mesmo período deste movimento.

Algumas publicações após a década de 90, como “Vontade de saber” (Souza e Pataro, 2015), afirmam que o nome da fórmula é uma homenagem a Bhaskara pelos seus trabalhos, sem afirmar que o desenvolvimento da expressão foi dele. Outros autores, como “Matemática na medida certa” (Centurion e Jakuvic, 2002), afirmam explicitamente que a fórmula não foi desenvolvida por Bhaskara, mas leva seu nome como homenagem às contribuições deste importante astrônomo hindu.

Outra questão que apareceu na pesquisa está relacionada com a grafia do nome Bhaskara. Em alguns textos aparece grafado com acento agudo (Bháskara), em outras sem o acento (Bhaskara) e em outras sem a letra H (Báskara), ou ainda na forma Báscara, com a letra C. Por ser um nome de origem indiana, e também, por esta discussão não ser o propósito deste trabalho, optou-se por utilizar neste trabalho a grafia sem o acento e com H (Bhaskara).

7.3 PEREZ Y MARIN E A REFERÊNCIA A BHASKARA

Uma vez que a primeira referência a Bhaskara, que encontramos nos textos brasileiros, se deve à Perez y Marin, foram levantadas algumas hipóteses sobre a origem desta citação. Conforme mencionado, na nota de rodapé deste autor, Bhaskara é indicado como um matemático índio. Esta expressão chamou a atenção pelo fato de ser a forma pela qual refere-se aos indianos na Espanha.

A tese de Adriana de Bortoli (2016) apresenta um ótimo resumo sobre a vida e carreira deste docente e autor. Segundo a tese, Perez y Marin nasceu em 1858, na Espanha. Ele iniciou sua carreira como professor ainda na Espanha em 1876. Em 1893 chegou ao Brasil e passou a lecionar matemática, atividade que exerceu na região de São Paulo por 35 anos.

O fato de o autor ser espanhol e ter atuado como professor naquele país, aliado ao uso de uma expressão tipicamente espanhola para se referir a Bhaskara, faz com que levantemos as seguintes hipóteses:

Teria Perez y Marin emprestado de outro autor espanhol a referência a Bhaskara para o método resolutivo da equação do 2º grau?

Teria Perez y Marin cunhado a referência a Bhaskara para o método resolutivo da equação do 2º grau?

Para abordar a primeira hipótese, foi realizado um levantamento dos principais autores de livros de matemática espanhóis da época em que Perez y Marin frequentou a escola na Espanha. O artigo de Romero e Maz (2007) traz esta relação. Segundo este artigo os principais textos espanhóis de matemática nos séculos XVIII e XIX eram os seguintes:

Elementos de matemática, de Pedro Ulloa;
Compendio matemático, de Vicente Tosca;
Liciones de matemática, de Thomas Cerda;
Principios de arismetica, de Benito Bails;
Elementos de álgebra y geometria, de Juan Justo Garcia;
Tratado elemental de matemáticas, de José Mariano Vallejo;
Tratado de álgebra elemental, de J. Cortázar
Curso completo de matemáticas puras, de J. Odriozola

Todos estes livros estão digitalizados e disponíveis na Internet, sendo possível a sua consulta. Após a análise dos mesmos, não foi encontrada referência a Bhaskara em qualquer das obras. O fato de não ter sido encontrada a referência “original” não descarta a hipótese levantada, outrossim abre um novo caminho de investigação para um trabalho futuro.

Desta maneira, como não foi encontrada a referência na qual Perez y Marin pudesse ter buscado esse conhecimento, acredita-se ser possível dizer que Perez y Marin tenha cunhado o termo “Método de Bhaskara” no ensino de matemática brasileiro.

Realizou-se também uma consulta (informal, sem aplicação de método científico apropriado) para verificar se os estudantes espanhóis atuais conhecem esta expressão. Uma professora brasileira que mora atualmente em Madri perguntou aos seus alunos (de várias faixas etárias) como era conhecida a expressão: $x = \frac{-b \pm \sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$. Segundo ela, todos foram unânimes em responder “*equacione de segundo grado*”. Ela questionou se conheciam a expressão “Fórmula de Bhaskara”. A resposta de todos foi negativa.

Apesar não se ter encontrada a origem da expressão na Espanha, não é verdade que esta expressão seja utilizada apenas no Brasil. Durante a realização deste trabalho foram encontradas citações a Bhaskara em artigos de outros países. O texto espanhol *Resumenes de matemática I con notas históricas*, de Antonio Cipriano Santiago Zaragoza e Maria José Santiago Puertas chama explicitamente a fórmula resolutiva de Fórmula de Bháskara (página 76 do anexo 1).

O artigo venezuelano *Deducción Geométrica de La Ecuación Cuadrática Y Su Aplicación Didactica en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática*, de Barreto *et al*. (2009) também faz referência à Bhaskara ao tratar a fórmula resolutiva. A atribuição da expressão de solução das equações quadráticas a Bhaskara também aparece no artigo do colombiano José Alexander Vargas Mejía: *Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela* (Mejía, 2013).

As menções à Bhaskara, presentes em textos de língua espanhola, principalmente de um período mais recente, parecem indicar uma nova influência. As referências a Bhaskara, originárias dos manuais escolares brasileiros, passam agora a integrar textos de língua espanhola.

8 CONCLUSÃO

O presente trabalho se propôs a verificar como se dava a utilização da expressão Método/Fórmula de Bhaskara nos livros didáticos brasileiros. Após uma longa pesquisa e análise de manuais escolares e livros didáticos percebeu-se que, ao contrário do que muitos artigos afirmam, a referência a Bhaskara nunca deixou de aparecer nos manuais escolares. Esta expressão se manteve presente desde 1909 com Perez y Marin, primeira referência que encontramos, até os livros atuais.

Também se pode inferir que os livros que não utilizaram a expressão o fizeram por opção, uma vez que os autores muito provavelmente tinham conhecimento do termo, visto que possuíam ligações entre si (autores que utilizavam e que não utilizavam).

Os fatos pesquisados levantaram a hipótese de que a atribuição a Bhaskara pode ter sido trazida da Espanha por Perez y Marin. Esta hipótese não pôde ser confirmada, mas é reforçada pelo aparecimento de artigos em língua espanhola referenciando Bhaskara.

Desta maneira, entende-se que os principais resultados deste trabalho são corrigir a informação de que a expressão teria desparecido por alguns períodos, e perceber que a forma da referência mudou bastante com o passar das décadas. Se nas primeiras referências Bhaskara recebia o crédito pelo desenvolvimento do método, com o passar das décadas recebeu “apenas” o nome da expressão final e, por fim, a nomenclatura se tornou uma homenagem por serviços prestados à matemática, sem relação direta com a resolução da equação quadrática.

Além disso, levantam-se algumas hipóteses que podem abrir novas oportunidades de pesquisa, seja para confirmar a origem espanhola da expressão ou mesmo para verificar se em algum momento os trabalhos de Bhaskara fazem alusão ao método 1.

Finalmente, com essa pesquisa esperamos trazer mais informações sobre os manuais escolares brasileiros, ao longo dos últimos 100 anos, os métodos de resolução da equação quadrática, e a associação que fazem à Bhaskara.

9 REFERÊNCIAS

BARRETO, J. *et al*. **Deducción Geométrica de La Ecuación Cuadrática Y Su Aplicación Didactica en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática**. Premisa, 43 (2009), pp. 33 – 47. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/23029/1/Barreto2009Deduccion.pdf>. Acesso em 05/03/2023.

BERRIMAN, A. **The Babylonian Quadratic Equation**. The Mathematical Gazette, Vol. 40, No. 333 (Oct., 1956), pp. 185 – 192.

BORTOLI, A. **Uma análise dos livros de André Perez Y Marin: um momento da história da matemática escolar brasileira no início do século XX.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2016.

CARVALHO, F.; BARONE, J.; MIORIM, M. A.; MUNSIGNATTI Jr, M.; BEGIATO, R. G. **Por que Bhaskara?** História e Educação Matemática, v. 2, n. 2, jun./dez. 2001, jan./dez. 2002, p. 123-171.

CORREA, J. A. **Resumo de álgebra.** São Luís: 1886.

COUTINHO, L. Álgebra. **A Escola Normal.** Rio de Janeiro, n. 1, p. 531 – 532, jan. 1925.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.Título original*: Introduction to the History of Mathematics*.

FRAGOSO, W. **Uma abordagem histórica da equação do 2º grau.** Revista do professor de matemática**,** n. 43, dez. 2000.

GARBI, G. **O Romance das equações algébricas.** 2ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

BARRETO, J. *et al*. **Deducción Geométrica de La Ecuación Cuadrática Y Su Aplicación Didactica en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática**. Instituto Universitario de Tecnología "Antonio José de Sucre". San Felipe, 2009. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/23029/1/Barreto2009Deduccion.pdf>. Acesso em 05/03/2023.

GUEDES, E. **Equação quadrática e as contribuições de Bhaskara.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2019.

KARPINSKI, L. **Contributions to the history of science**. Part I. Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of Al - Khowarizmi. The Macmillan Company. New York-USA, 1915. Disponível em:

<https://www.wilbourhall.org/pdfs/MBP/robertofchesters00khuw.pdf>. Acesso em 05 ago. 2018.

LIMA, E., CARVALHO, P., WAGNER, E., MORGADO, A. **A matemática do ensino médio**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

LONGEN, A. **Livros Didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da Educação Matemática.** Tese de Doutorado em Educação. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007.

MAEDER, A. **Álgebra Elementar, 2ª Parte**. 2ª Ed. Curitiba: João Haupt, 1931.

MEJÍA J. A. V. **Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela.** 177fl. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Exatas e Naturais. Medelin: Universidade Nacional da Colômbia, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/unal/21021/1/98556475.2014.pdf>. Acesso em 05/03/2023.

RASHED, R. **Encyclopedia of the History of Arabic Science**. Vol. 2 Mathematics and the physical sciences. Routledge, 1996.

ROMERO, L., MAZ, A. Libros de textos de matemáticas em España durante os siglos XVIII e XIX. Em Guzmán, M. (Ed.), **Humanidades y ciencias: aspectos disciplinares y didácticos** (pp. 297-308). Granada: Atrio, 2007.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar Editora, 2012.

TROVON, A. **A equação quadrática**. Curitiba: Departamento de Matemática da UFPR, 2012. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~trovon/cursos/2012_Topicos_de_Historia/A_Equacao_Quadratica.pdf >. Acesso em 05/03/2023.

VAILATI, J. **Equações algébricas – Intrigas e desafios intelectuais.** Laranjeiras do Sul: UNICENTRO, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-2.pdf>. Acesso em 30 set. 2018.

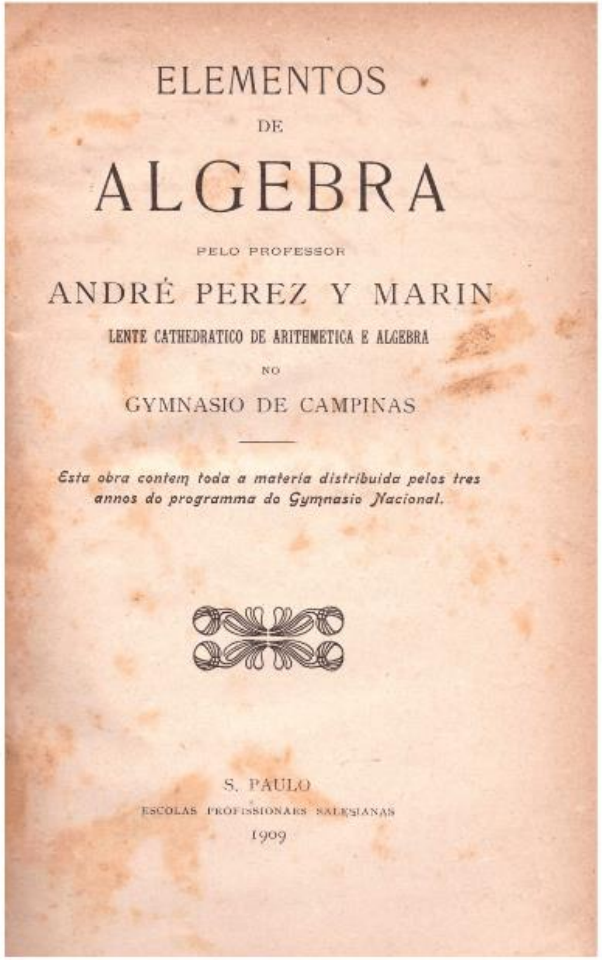
VALENTE, W. R. **Livro didático e educação matemática:** uma história inseparável. In: ZETETIKÉ. Vol. 16, n. 30. jul/dez, 2008.

ZARAGOZA, A. C. S., PUERTAS, M. J. S. **Resumenes de matemática I con notas históricas**. Madrid: Vision Libros, 2011.

ANEXO 1 – Obras Analisadas

André Perez Y Marin. **ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.**

Escolas Profissionaes do Lyceo Salesiano Sagrado Coração de Jesus, 1909.



ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

PELO PROFESSOR

ANDRÉ PEREZ Y MARIN

LENTE CATHEDRATICO DE ARITHMETICA E ALGEBRA

NO

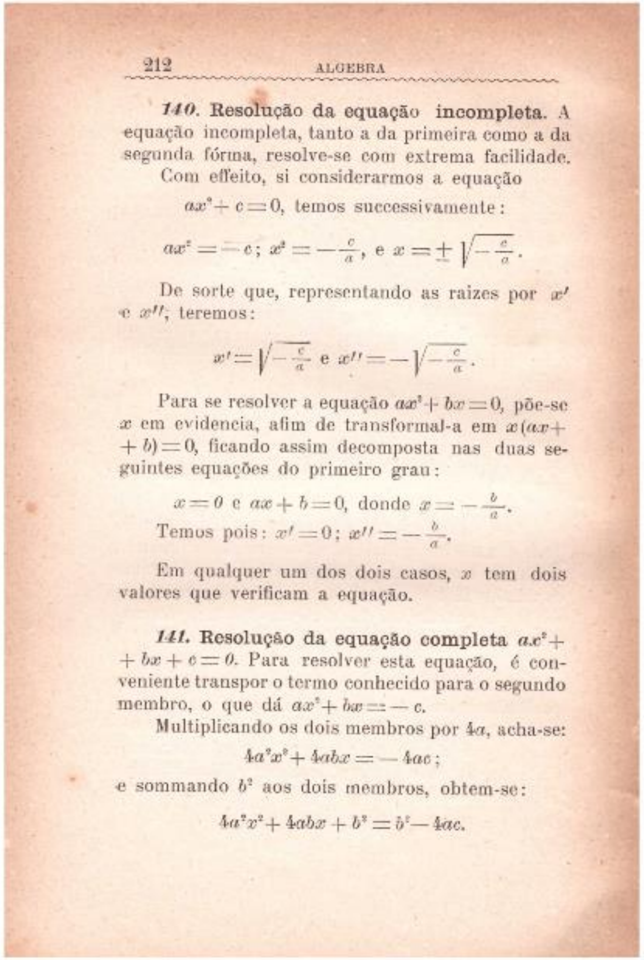
GYMNASIO DE CAMPINAS

Esta obra contem toda a materia distribuida pelos tres annos do programma do Gymnasio Nacional.

S. PAULO

ESCOLAS PROFISSIONAES SALESIANAS

1909



212 ALGEBRA

***140*. Resolução da equação incompleta.** A equação incompleta, tanto a da primeira como a da segunda fórma, resolve-se com extrema facilidade.

Com effeito, si considerarmos a equação

$ax^2 + c = 0$, temos successivamente:

$$ax^2 = -c;\ x^2 = -\frac{c}{a},\ \text{e}\ x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

De sorte que, representando as raizes por x' e x'', teremos:

$$x' = \sqrt{-\frac{c}{a}}\ \text{e}\ x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Para se resolver a equação $ax^2 + bx = 0$, põe-se x em evidencia, afim de transformal-a em $x(ax + b) = 0$, ficando assim decomposta nas duas seguintes equações do primeiro grau:

$$x = 0\ \text{e}\ ax + b = 0,\ \text{donde}\ x = -\frac{b}{a}.$$

Temos pois: $x' = 0$; $x'' = -\frac{b}{a}$.

Em qualquer um dos dois casos, x tem dois valores que verificam a equação.

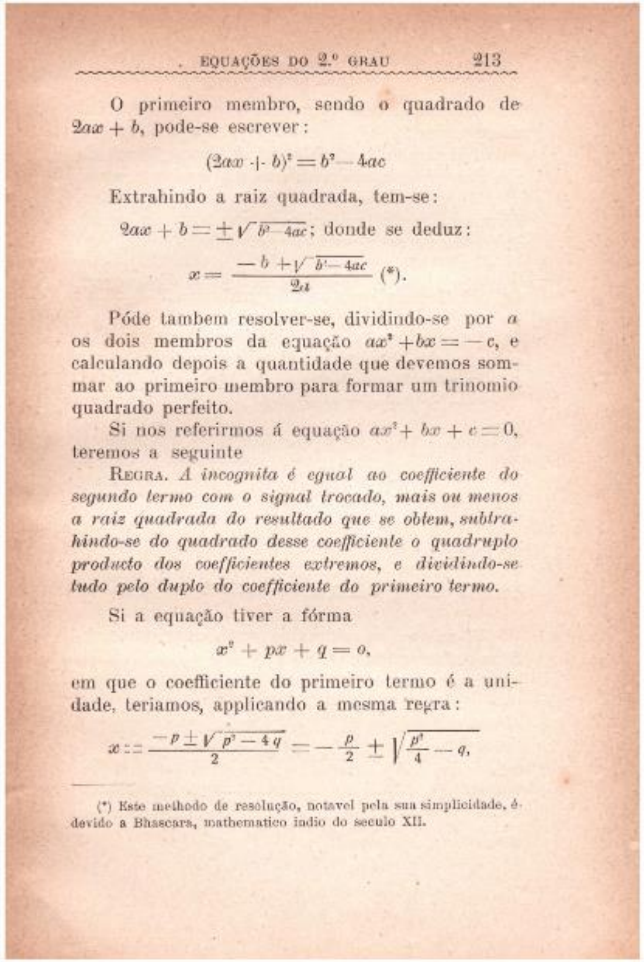
***141*. Resolução da equação completa $ax^2 + bx + c = 0$.** Para resolver esta equação, é conveniente transpor o termo conhecido para o segundo membro, o que dá $ax^2 + bx = -c$.

Multiplicando os dois membros por $4a$, acha-se:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac;$$

e sommando b^2 aos dois membros, obtem-se:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$



EQUAÇÕES DO 2.º GRAU 213

O primeiro membro, sendo o quadrado de $2ax + b$, pode-se escrever:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extrahindo a raiz quadrada, tem-se:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac};\ \text{donde se deduz:}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ (*).$$

Póde tambem resolver-se, dividindo-se por a os dois membros da equação $ax^2 + bx = -c$, e calculando depois a quantidade que devemos sommar ao primeiro membro para formar um trinomio quadrado perfeito.

Si nos referirmos á equação $ax^2 + bx + c = 0$, teremos a seguinte

REGRA. *A incognita é egual ao coefficiente do segundo termo com o signal trocado, mais ou menos a raiz quadrada do resultado que se obtem, subtrahindo-se do quadrado desse coefficiente o quadruplo producto dos coefficientes extremos, e dividindo-se tudo pelo duplo do coefficiente do primeiro termo.*

Si a equação tiver a fórma

$$x^2 + px + q = o,$$

em que o coefficiente do primeiro termo é a unidade, teriamos, applicando a mesma regra:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

(*) Este methodo de resolução, notavel pela sua simplicidade, é devido a Bhascara, mathematico indio do seculo XII.

André Perez Y Marin. **ELEMENTOS DE ÁLGEBRA., 7ª Ed.**

Escolas Profissionaes do Lyceo Salesiano Sagrado Coração de Jesus, 1930.

ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

Contendo toda a materia dos programmas dos Gymnasios e do Collegio Pedro II

PELO PROFESSOR

ANDRÉ PÉREZ Y MARIN

(Lente Cathedratico de Arithmetica e Algebra e de Mecanica e Astronomia do Gymnasio do Estado em Campinas — 1901-1928)

Obra approvada pelo Governo do Estado de S. Paulo e pelo Conselho Superior de Instrucção Publica do Estado de Minas, para uso dos Estabelecimentos de ensino secundario

7.ª EDIÇÃO

Revista e melhorada

S. Paulo

Escolas Profissionaes do Lyceu Coração de Jesus

— 1930 —

As raizes são: $x' = 0$, $x'' = \frac{7}{5}$.

3.º Resolver a equação $3ax^2 - 27a^3b^2 = 0$.

$$3ax^2 = 27a^3b^2;\ x^2 = \frac{27a^3b^2}{3a} = 9a^2b^2;\ \text{donde}$$

$$x = \pm\sqrt{9a^2b^2} = \pm\ 3ab.$$

As raizes são: $x' = 3ab$; $x'' = -3ab$.

180. Resolução da equação completa

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

1.º METHODO. Para resolver esta equação, é conveniente transpor o termo conhecido para o segundo membro, o que dá

$$ax^2 + bx = -c.$$

Multiplicando os dois membros por $4a$, acha-se:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac;$$

e sommando-se b^2 aos dois membros, obtem-se:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

O primeiro membro, sendo o quadrado de $2ax + b$, póde-se escrever:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Extrahindo a raiz quadrada, tem-se:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac};$$

donde se deduz:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.\ (*)$$

2.º METHODO. Póde tambem resolver-se, dividindo-se por a os dois membros da equação $ax^2 + bx = -c$, e calculando depois a quantidade que devemos sommar ao primeiro membro para formar um trinomio quadrado perfeito.

Assim, dividindo os dois membros por a, vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.\ (1)$$

(*) Este methodo de resolução, notavel pela sua simplicidade, é devido a Bhascara, mathematico indio do seculo XII.

Jácomo Stavale. **TERCEIRO ANO DE MATEMÁTICA.** 2ª Ed

Cia Editora Nacional, 1935.

BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Serie II LIVROS DIDÁTICOS *Vol. XXI*

Jacomo Stávale

Professor de Matemática no Instituto Caetano de Campos, Colégio de Santo Agostinho, (*des Oiseaux*), Liceu Nacional Rio Branco, Ginásio de S. Bento, Colégio Nossa Senhora de Sião e Colégio Madre Cabrini.

Terceiro Ano de Matemática

PARA O TERCEIRO ANO DOS CURSOS GINASIAIS SERIADOS E DOS CURSOS FUNDAMENTAIS DAS ESCOLAS NORMAIS

900 exercícios

A Matemática é uma escada altíssima, cujos degraus, embora pequeninos, devem ser subidos vagarosamente, e de um em um.

SEGUNDA EDIÇÃO

13 milheiros

1935

Companhia Editora Nacional, rua Guaramos, 26-28-30, São Paulo.

E' esta a fórmula resolutiva das equações completas do segundo grau a uma incógnita. Com efeito, na equação A, *os coeficientes* **a, b** *e* **c** *representam números quaisquer ;* logo, se tivermos de resolver a equação $3x^2+10x+3=0$, não será necessário proceder como ficou indicado no §84.

Comparemos as duas equações.

$$\left.\begin{aligned} ax^2+\ bx+c &= 0 \\ 3x^2+10x+3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a=3, \quad b=10, \quad c=3$$

E, tomando a fórmula,

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6} \quad \therefore \quad x=\frac{-10\pm 8}{6} \quad \therefore$$

$$x' = \frac{-10+8}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3} \qquad\qquad \text{R.} \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3} \\[2ex] x''=-3 \end{cases}$$

$$x'' = \frac{-10-8}{6}=\frac{-18}{6}=-3$$

O método que adotámos para deduzir a fórmula resolutiva da equação completa do segundo grau a uma incógnita, é devido a Bhascara, matemático indú do século XII. Para melhor memorizá-lo, podemos proceder como segue :

A equação dada é . . . . $ax^2+bx+c=0$

Multiplicando por $4a$ . . . . $4a^2x^2+4abx+4ac=0$

Passando $4ac$ para o segundo membro . . . . $4a^2x^2+4abx=-4ac$

Somando b^2 a ambos os membros . . . . $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros . . . . $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

Passando b para o segundo membro . . . . $2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

E, dividindo ambos os membros da equação por $2a$......

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se resolvêssemos a equação $ax^2-bx+c=0$, chegaríamos à fórmula

$$x = \frac{+b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Partindo da equação $ax^2+bx-c=0$, a fórmula resultante seria

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

Finalmente, resolvendo a equação $ax^2-bx-c=0$, obteríamos a fórmula

$$x = \frac{+b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

Observação. Os estudantes devem deduzir estas três fórmulas.

Podemos pois estabelecer as duas regrinhas práticas seguintes:

Primeira. *O sinal de* **b** *na fórmula, é sempre contrário ao sinal de* **b** *na equação.*

Segunda. *O sinal de* **4ac** *na fórmula, é sempre contrário ao sinal de* **c** *na equação.*

Devido ao duplo sinal que precede o radical $\sqrt{b^2-4ac}$, a fórmula A pode ser desdobrada em duas, a saber :

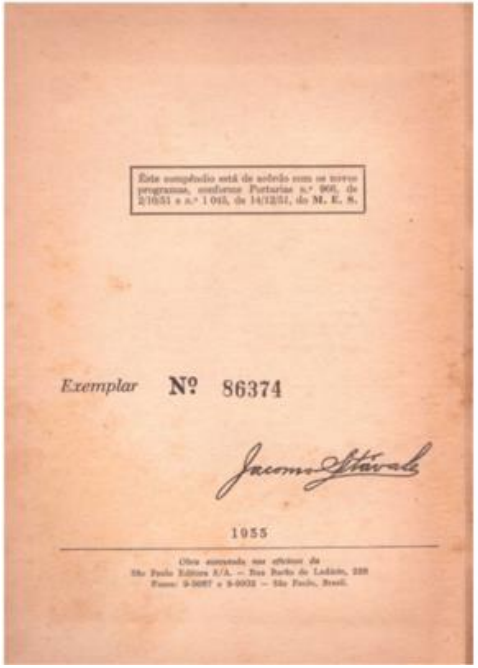
$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad\qquad x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E, observando que as operações necessárias para calcular x' e x'' são todas operações de resultado único, podemos concluir que, aplicando a fórmula A a uma equação completa do segundo grau, acharemos invariàvelmente *um valor e sòmente um*, para x', assim como, *um valor e sòmente um*, para x''. Logo,

A equação completa do segundo grau a uma incógnita tem sempre duas raízes, e sòmente duas.

Jácomo Stavale. **ELEMENTOS DE MATEMÁTICA.** 18ª Ed

Cia Editora Nacional, 1955.



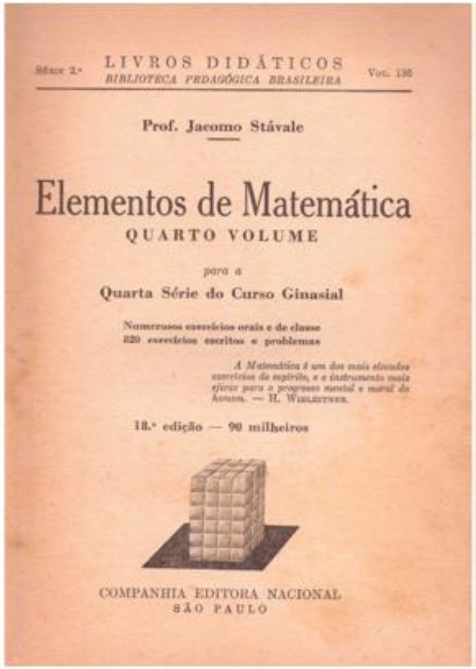
Êste compêndio está de acôrdo com os novos programas, conforme Portarias n.º 966, de 2/10/51 e n.º 1 045, de 14/12/51, do **M. E. S.**

Exemplar **Nº** 86374

Jacomo Stávale

1955

Obra executada nas oficinas da São Paulo Editora S/A. — Rua Barão de Ladário, 226 Fones: 9-5087 e 9-0032 — São Paulo, Brasil.



Série 2.ª LIVROS DIDÁTICOS *BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA* Vol. 136

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

QUARTO VOLUME

para a

Quarta Série do Curso Ginasial

Numerosos exercícios orais e de classe
820 exercícios escritos e problemas

A Matemática é um dos mais elevados exercícios do espírito, e o instrumento mais eficaz para o progresso mental e moral do homem. — H. Wieleitner.

18.ª edição — 90 milheiros

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

10 *Elementos de Matemática — Quarto Volume*

E, tomando a fórmula A,

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} \therefore x = \frac{-10 \pm 8}{6} \therefore$$

$$x' = \frac{-10+8}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \qquad \text{R.} \begin{cases} x' = -\frac{1}{3} \\ x'' = -3 \end{cases}$$

$$x'' = \frac{-10-8}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

O método que adotámos para deduzir a fórmula resolutiva da equação completa do segundo grau com uma incógnita, é devido a Bhaskara, matemático indú do século XII. (1114-1185) Para melhor memorizá-lo, podemos proceder como segue:

A equação dada é .... $ax^2 + bx + c = 0$
Multiplicando por $4a$ .... $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
Passando $4ac$ para o segundo membro $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
Somando b^2 a ambos os membros .. $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros .... $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
Passando b para o segundo membro $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
Donde .... $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Os estudantes deverão verificar que:

Da equação $ax^2 - bx + c = 0$ resulta $x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Da equação $ax^2 + bx - c = 0$ resulta $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Da equação $ax^2 - bx - c = 0$ resulta $x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Podemos pois estabelecer as duas regrinhas práticas seguintes:

Primeira. *O sinal de* **b** *na fórmula é sempre contrário ao sinal de* **b** *na equação.*

Segunda. *O sinal de* **4ac** *na fórmula é sempre contrário ao sinal de* **c** *na equação.*

Equações do Segundo Grau 11

Devido ao duplo sinal que precede o radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$, a fórmula A pode ser desdobrada em duas, a saber:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E observando que as operações necessárias para calcular x' e x'' são tôdas operações de resultado único, podemos concluir que, aplicando a fórmula A a uma equação completa do segundo grau, com uma incógnita, acharemos invariavelmente um *valor e sòmente um*, para x', assim como um *valor e sòmente um*, para x''. Logo,

A equação completa do segundo grau com uma incógnita não pode ter mais de duas raízes.

Exercícios em classe

I. Resolver a equação $\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} = 1$.

É uma equação fracionária, cuja resolução se reduz à de uma equação do segundo grau. Com efeito:

Eliminando os denominadores......... $9x - 18 = x^2$
Transpondo......................... $-x^2 + 9x - 18 = 0$
Multiplicando por *menos* 1........... $x^2 - 9x + 18 = 0$

$$x = \frac{+9 \pm \sqrt{81-72}}{2} \therefore x = \frac{+9 \pm \sqrt{9}}{2} \therefore x = \frac{+9 \pm 3}{2}$$

$$x' = 6 \qquad x'' = 3$$

II. Resolver a equação fracionária $\frac{9-x}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{3(x-1)}{2}$.

O m.m.c. dos denominadores é $2(x-2)$. Eliminando-os, teremos:

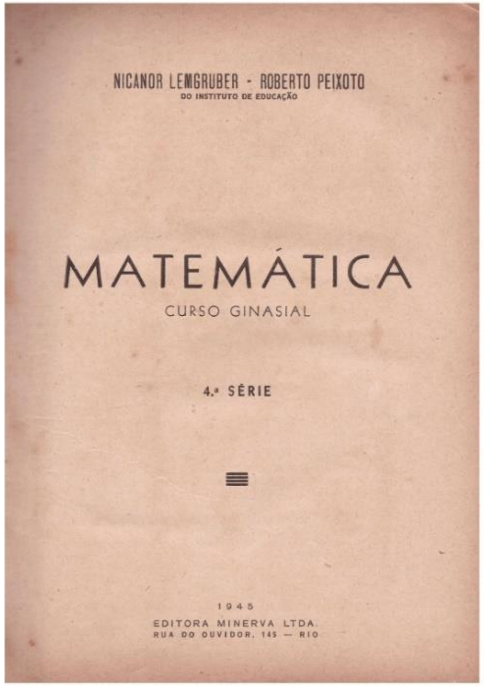
$$\begin{aligned} (9-x)(x-2) + 8 &= 3(x-1)(x-2) \\ -x^2 + 11x - 18 + 8 &= 3x^2 - 9x + 6 \\ -x^2 - 3x^2 + 11x + 9x - 18 + 8 - 6 &= 0 \\ -4x^2 + 20x - 16 &= 0 \\ 4x^2 - 20x + 16 &= 0 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \therefore x = \frac{+5 \pm \sqrt{9}}{2} \therefore x = \frac{+5 \pm 3}{2}$$

$$x' = 4 \qquad x'' = 1$$

Nicanor Lemgruber e Roberto Peixoto. **MATEMÁTICA CURSO GINASIAL – 4ª SÉRIE.**

Editora Minerva LTDA, 1945.



NICANOR LEMGRUBER - ROBERTO PEIXOTO

DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA

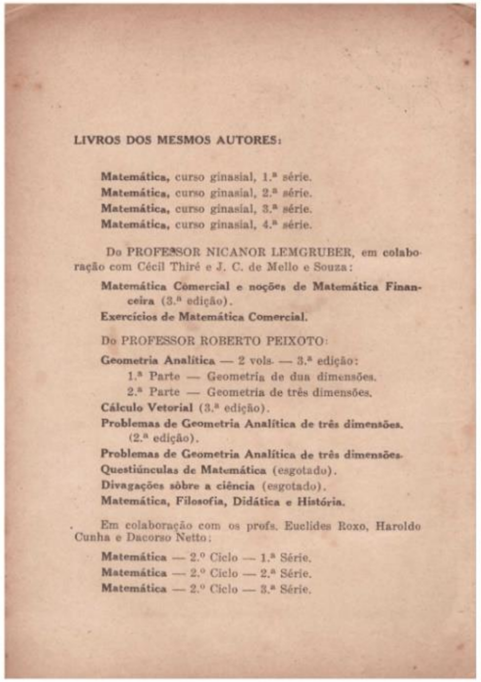
CURSO GINASIAL

4.ª SÉRIE

1945

EDITORA MINERVA LTDA.

RUA DO OUVIDOR, 145 — RIO



LIVROS DOS MESMOS AUTORES:

Matemática, curso ginasial, 1.ª série.
Matemática, curso ginasial, 2.ª série.
Matemática, curso ginasial, 3.ª série.
Matemática, curso ginasial, 4.ª série.

Do PROFESSOR NICANOR LEMGRUBER, em colaboração com Cécil Thiré e J. C. de Mello e Souza:

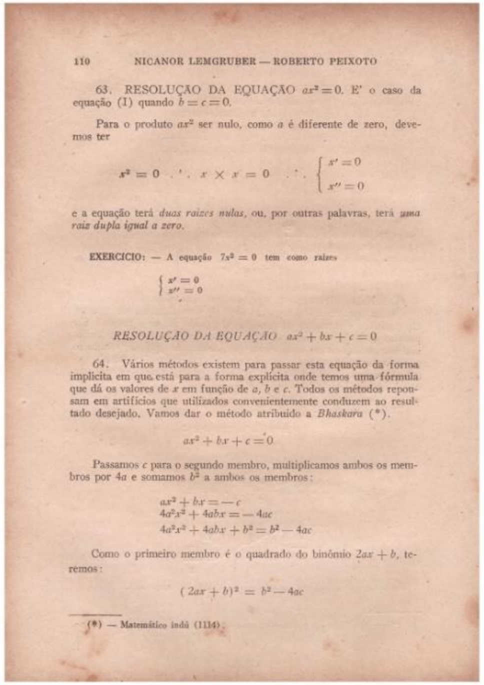
Matemática Comercial e noções de Matemática Financeira (3.ª edição).
Exercícios de Matemática Comercial.

Do PROFESSOR ROBERTO PEIXOTO:

Geometria Analítica — 2 vols. — 3.ª edição:
1.ª Parte — Geometria de dua dimensões.
2.ª Parte — Geometria de três dimensões.
Cálculo Vetorial (3.ª edição).
Problemas de Geometria Analítica de três dimensões. (2.ª edição).
Problemas de Geometria Analítica de três dimensões.
Questiúnculas de Matemática (esgotado).
Divagações sôbre a ciência (esgotado).
Matemática, Filosofia, Didática e História.

Em colaboração com os profs. Euclides Roxo, Haroldo Cunha e Dacorso Netto:

Matemática — 2.º Ciclo — 1.ª Série.
Matemática — 2.º Ciclo — 2.ª Série.
Matemática — 2.º Ciclo — 3.ª Série.



110 NICANOR LEMGRUBER — ROBERTO PEIXOTO

63. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $ax^2 = 0$. E' o caso da equação (I) quando $b = c = 0$.

Para o produto ax^2 ser nulo, como a é diferente de zero, devemos ter

$$x^2 = 0 \therefore x \times x = 0 \therefore \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 0 \end{cases}$$

e a equação terá *duas raízes nulas*, ou, por outras palavras, terá *uma raiz dupla igual a zero.*

EXERCICIO: — A equação $7x^2 = 0$ tem como raízes

$$\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $ax^2 + bx + c = 0$

64. Vários métodos existem para passar esta equação da forma implícita em que está para a forma explícita onde temos uma fórmula que dá os valores de x em função de a, b e c. Todos os métodos repousam em artifícios que utilizados convenientemente conduzem ao resultado desejado. Vamos dar o método atribuido a *Bhaskara* (*).

$$ax^2 + bx + c = 0$$

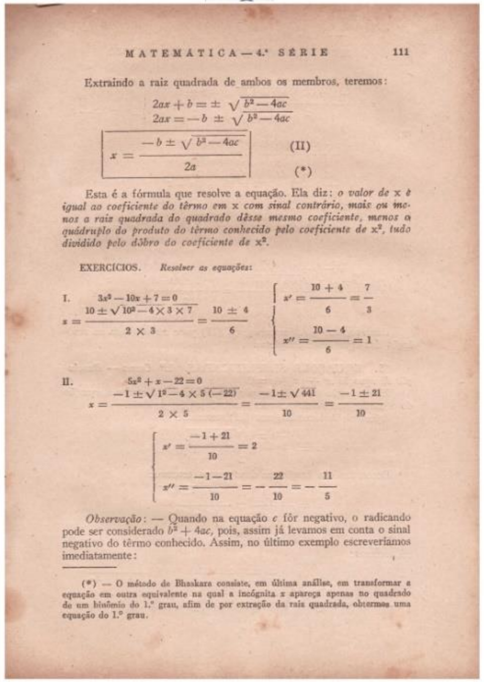
Passamos c para o segundo membro, multiplicamos ambos os membros por $4a$ e somamos b^2 a ambos os membros:

$$ax^2 + bx = -c$$
$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Como o primeiro membro é o quadrado do binômio $2ax + b$, teremos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

(*) — Matemático indú (1114).



MATEMATICA — 4.ª SÉRIE 111

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, teremos:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{(II)} \quad (*)$$

Esta é a fórmula que resolve a equação. Ela diz: *o valor de x é igual ao coeficiente do têrmo em x com sinal contrário, mais ou menos a raiz quadrada do quadrado dêsse mesmo coeficiente, menos o quádruplo do produto do têrmo conhecido pelo coeficiente de x^2, tudo dividido pelo dôbro do coeficiente de x^2.*

EXERCÍCIOS. *Resolver as equações:*

I. $3x^2 - 10x + 7 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{10 \pm 4}{6} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{10 + 4}{6} = \dfrac{7}{3} \\ x'' = \dfrac{10 - 4}{6} = 1 \end{cases}$$

II. $5x^2 + x - 22 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 5\,(-22)}}{2 \times 5} = \frac{-1 \pm \sqrt{441}}{10} = \frac{-1 \pm 21}{10}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-1 + 21}{10} = 2 \\ x'' = \dfrac{-1 - 21}{10} = -\dfrac{22}{10} = -\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

Observação: — Quando na equação c fôr negativo, o radicando pode ser considerado $b^2 + 4ac$, pois, assim já levamos em conta o sinal negativo do têrmo conhecido. Assim, no último exemplo escreveríamos imediatamente:

(*) — O método de Bhaskara consiste, em última análise, em transformar a equação em outra equivalente na qual a incógnita x apareça apenas no quadrado de um binômio do 1.º grau, afim de por extração da raiz quadrada, obtermos uma equação do 1.º grau.

Lauro Pastor de Almeida. **CURSO DE MATEMÁTICA – CICLO GINASIAL 4ª SÉRIE.**

Editora Conquista,1955.

LAURO PASTOR ALMEIDA

Docente do Colégio Pedro II e professor de Ensino Técnico (Curso Técnico) da Prefeitura do Distrito Federal, lotado no Instituto de Educação, do Colégio Brasil-América, do Curso de Seleção e Aperfeiçoamento da Caixa Econômica do Rio de Janeiro, Assistente de Análise Superior da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da U.D.F. (ex-Faculdade de Filosofia do Instituto La-Fayette), Livre docente de Matemática Superior — Cálculo e Geometria Analítica — da Escola Nacional de Agronomia da Universidade Rural. Bacharel, licenciado e doutor em Matemática.

CURSO DE MATEMÁTICA

CICLO GINASIAL

QUARTA SÉRIE

1955

CONQUISTA

AV. 28 DE SETEMBRO, 174 – RIO DE JANEIRO

Resolução. Procedendo de modo análogo ao anterior, teremos:

$$3x^2 + 75 = 0\,;$$
$$\therefore \quad 3x^2 = -75\,;$$
$$\therefore \quad x^2 = -25\,;$$
$$\therefore \quad x = \pm\sqrt{-25}\,.$$

Como os números negativos não têm raiz quadrada, então a equação dada, também, não tem raízes. (Ver C.M.C.G. — 2.ª:57,2.º).

5. Resolver a equação: $4x^2 = 0$.

Resolução. Tendo em vista o que foi dito em (8, c), concluimos que ambas as raízes da equação dada são nulas, isto é: $x' = 0$ e $x'' = 0$.

10. *Resolução da equação completa*. Para resolver a equação completa do segundo grau com uma incógnita há diversos métodos. Apresentaremos apenas dois: O método de Báscara, que é um dos métodos clássicos e o método de nossa autoria, já publicado em nosso livro: Álgebra — Licença Ginasial (Edições Miniatura — 1.951) págs. 133 e 134.

a) Método de Báscara.[4] Seja a equação completa do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0\,. \tag{14}$$

Passando *c* para o segundo membro e multiplicando por 4a, a fim de tornar o primeiro têrmo um quadrado, temos:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac\,.$$

Somando b^2 a ambos os membros, para que o primeiro membro seja um quadrado, vem:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac\,;$$
$$\therefore \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac\,;$$
$$\therefore \quad 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}\,.$$

[4] Bhaskara Akkharya (1.114 — ?) grande matemático indu.

Finalmente, resolvendo esta equação do primeiro grau, vem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{15}$$

Esta é a *fórmula de resolução* das equações do segundo grau.

b) *Método de Lauro Pastor*. Retomemos a equação (14):

$$ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Sendo x' e x'' as duas raizes da equação, suponhamos que existam dois números *m* e *n*, tais que:

$$x' = m + n\,; \tag{16}$$
$$x'' = m - n\,. \tag{17}$$

Substituindo êstes valores na equação (14), vem sucessivamente:

$$a(m + n)^2 + b(m + n) + c = 0\,;$$
$$a(m - n)^2 + b(m - n) + c = 0\,;$$

ou:

$$am^2 + 2amn + an^2 + bm + bn + c = 0\,; \tag{18}$$
$$am^2 - 2amn + an^2 + bm - bn + c = 0\,. \tag{19}$$

Somando estas equações membro a membro, vem:

$$2am^2 + 2an^2 + 2bm + 2c = 0$$

ou:

$$am^2 + an^2 + bm + c = 0\,. \tag{20}$$

Subtraindo a equação (19) da (18), vem:

$$4amn + 2bn = 0\,,$$

ou:

$$2am + b = 0\,.$$

Resolvendo esta equação do primeiro grau em *m*, vem:

$$m = -\frac{b}{2a}\,. \tag{21}$$

Substituindo êste valor de *m* em (20), vem:

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + an^2 + b \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0\,;$$
$$\therefore \quad \frac{ab^2}{4a^2} + an^2 - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$
$$\therefore \quad b^2 + 4a^2n^2 - 2b^2 + 4ac = 0\,;$$
$$\therefore \quad 4a^2n^2 - b^2 + 4ac = 0\,.$$

Resolvendo esta equação incompleta do segundo grau vem, então:

$$4a^2n^2 = b^2 - 4ac\,;$$
$$\therefore \quad n^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,;$$
$$\therefore \quad n = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \tag{22}$$

Substituindo os valores de *m* e *n* em (16) e (17), vem.

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,;$$
$$x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Reunindo êstes valores, temos, finalmente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que é a fórmula (15) já encontrada.

11. *Observações*. *1.ª* — Se a equação não estiver sob a forma (14) antes de aplicar a fórmula, é preciso escrevê-la sob a forma geral. Para isto, devemos efetuar as operações indicadas, eliminar os denominadores, transpor todos os têrmos para o primeiro membro da equação, reduzir os têrmos semelhantes e ordenar em relação à incógnita.

Benedito Castrucci e Geraldo dos Santos Lima Filho. **CURSO DE MATEMÁTICA – 4ª SÉRIE**.

Editora FTD, 1960.

DR. BENEDITO CASTRUCCI
Doutor em Ciências Matemáticas. Prof. Catedrático de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de S. Paulo. Ex-Prof. do Colégio Paulistano. Ex-Prof. da Escola Politécnica da U. S. P. Ex-Prof. da Faculdade de Filosofia "Sedes Sapientiae" da Pontifícia Universidade Católica.

DR. GERALDO DOS SANTOS LIMA FILHO
Doutor em Ciências Matemáticas. Prof. do Colégio Paulistano. Assistente de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da U. S. P., Ex-prof. do Colégio Estadual "Franklin D. Roosevelt" de S. Paulo.

MATEMÁTICA

PARA

QUARTA SÉRIE GINASIAL

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
EDITÔRA PAULO DE AZEVEDO LTDA.
166, Rua do Ouvidor — Rio de Janeiro
SÃO PAULO | BELO HORIZONTE
292, Rua Líbero Badaró | Rua Rio de Janeiro, 655
1960

28) $x_1 = 0$; $x_2 = 9$. 29) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{4}{5}$. 30) $x_1 = -3$; $x_2 = 0$.

31) $x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 32) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{16}{3}$.

33) $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 34) $x_1 = -\frac{132}{5}$; $x_2 = 0$.

35) $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$. 36) $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

37) $x_1 = -\sqrt{7}$; $x_2 = \sqrt{7}$. 38) $x_1 = 0$ não satisfaz à equação;

$x_2 = \frac{16}{5}$ é a única raiz aceitável.

39) $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; 40) $x_1 = 0$; $x_2 = 6$.

---

3. *Resolução da equação completa do segundo grau; estabelecimento da fórmula resolutiva; fórmulas simplificadas.*

Resolvamos, agora, a equação completa

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ , com } a \neq 0 \text{ , } b \neq 0 \text{ , } c \neq 0 \text{ .} \qquad (1)$$

Usaremos o processo de Báscara (*), matemático hindu do século XII.

Para isto, multipliquemos a equação tôda por $4a$, o que transformará o primeiro têrmo de (1) em quadrado perfeito, e evitará o aparecimento de denominadores no decorrer do cálculo.

Obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \text{ .} \qquad (2)$$

Transpondo o têrmo $4ac$, de (2), achamos:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \text{ .} \qquad (3)$$

Adicionemos b^2 a ambos os membros de (3):

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \text{ .} \qquad (4)$$

(*) Biografia no fim do § 1.º.

O primeiro membro de (4) é o quadrado de $2ax + b$, donde podemos escrever:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \text{ .} \qquad (5)$$

Sendo o primeiro membro um quadrado perfeito, a (5) *sòmente terá sentido se o segundo membro fôr positivo ou nulo*, ou seja, se

$$b^2 - 4ac \geqslant 0 \text{ .} \qquad (6)$$

Como a (5) é eqüivalente à (1), segue-se que sòmente poderemos encontrar sentido em (1) se a condição (6) fôr verificada.

A expressão

$$b^2 - 4ac$$

é chamada *discriminante* da equação dada, e é usualmente representada pela letra grega maiúscula $\triangle$ (delta):

$$\triangle = b^2 - 4ac \text{ .}$$

Suponhamos verificada a condição (6).

Então, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros de (5), obtemos

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \text{ ,} \qquad (7)$$

donde, por transposição de b, vem

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ .} \qquad (8)$$

Dividindo ambos os membros desta última expressão por $2a$, encontramos os valores de x que são raizes de (1):

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (9)$$

ou

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}} \text{ , com } \triangle = b^2 - 4ac \text{ .} \qquad (10)$$

(9) e (10) dão duas maneiras de escrever-se a fórmula resolutiva da equação (1).

BÁSCARA

Báscara foi matemático e astrônomo hindu, nascido em 1114. Foi denominado Atcharya, que significa "o Sábio".

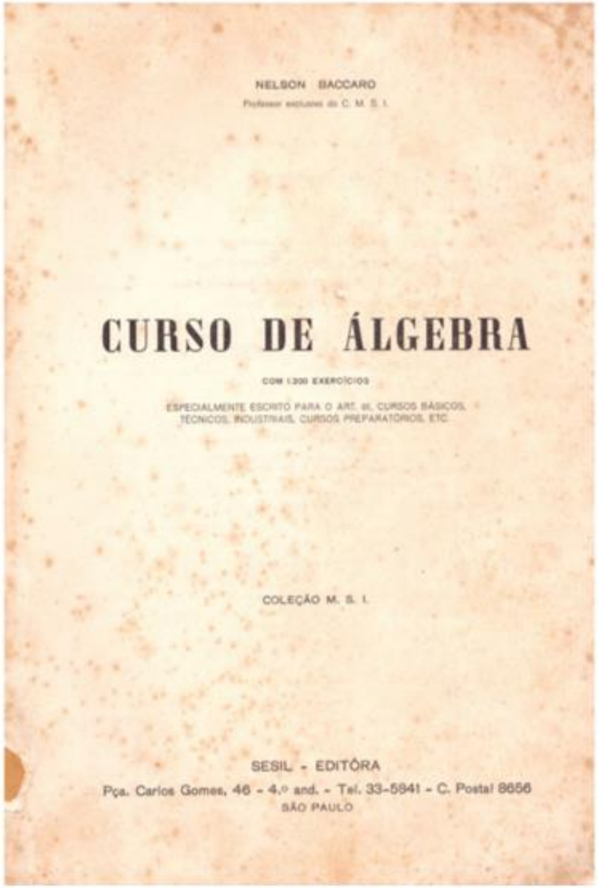
Escreveu uma Astronomia e Matemática em versos, o "Siddhantashiromani" (coroamento dos sistemas), na qual se encontram as regras usuais da aritmética, progressões, equações simultâneas e do segundo grau, algumas fórmulas de trigonometria, além de observações sôbre condições do tempo, preços de escravos, juros, etc.

Parece que Báscara tinha conhecimento dos escritos árabes sôbre Matemática.

O seu trabalho era conhecido na Europa no século XII. No mesmo eram usados os algarismos arábicos e havia ainda uma exposição metódica do sistema decimal.

Nelson Baccaro, **CURSO DE ÁLGEBRA**.

Ed Sesil, 1961.



NELSON BACCARO

Professor exclusivo do C. M. S. I.

CURSO DE ÁLGEBRA

COM 1.300 EXERCÍCIOS

ESPECIALMENTE ESCRITO PARA O ART. 91, CURSOS BÁSICOS, TÉCNICOS, INDUSTRIAIS, CURSOS PREPARATÓRIOS, ETC.

COLEÇÃO M. S. I.

SESIL - EDITÔRA

Pça. Carlos Gomes, 46 - 4.º and. - Tel. 33-5841 - C. Postal 8656

SÃO PAULO

PREFACIO

Aqui está um livro que procura, antes de qualquer outra coisa, ser eminentemente prático.

Resultou êle das exigências vivas e imperiosas da realidade escolar e com sua feitura não tivemos outro escopo que o de facilitar, através de uma explanação bem objetiva, o estudo e rápida compreensão do mundo dos números.

Dedicamo-lo tanto aos alunos do "curriculum" ginasial como aos estudantes do Artigo 91, e principalmente a êstes, tendo em vista, além de suas naturais dificuldades e a própria extensão do programa, a ausência por longo tempo, quiçá da maioria, dos bancos escolares.

Nada havia sido feito, até agora, entre nós, nesse sentido e, assim procuramos vir ao encontro de suas necessidades, mercê de nossas observações no decorrer de alguns anos do ensino da matemática.

Desejamos, enfim, que êste compêndio seja como certas criaturas raras que às vêzes temos a felicidade de encontrar na vida: modestas, singelas, pouco palradoras - mas cheias de conhecimentos úteis, informativas e capazes de nos tirar de dificuldades nos momentos precisos.

São Paulo, outubro de 1961

O Autor

202 *Curso de Álgebra — Nelson Baccaro*

c) RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO COMPLETA

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Esta equação pode ser resolvida por meio de vários métodos. Vejamos apenas o método de Bhaskara, ou indiano, ou indú.

Método de Bhaskara

Consiste em transformar $ax^2 + bx + c = 0$ numa outra equação equivalente, cujo primeiro membro seja um trinômio quadrado perfeito.

Resolução - $ax^2 + bx + c = 0$

ou

$$ax^2 + bx = -c$$

a) Multiplicam-se ambos os membros por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

b) Soma-se b^2 a cada membro:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Fatorando o 1.º membro, que é um trinômio quadrado perfeito, vem:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Observação: O binômio $b^2 - 4ac$ chama-se *discriminante* e tem um valor particular para cada equação do 2.º grau; pode ser positivo, negativo ou nulo. Consideremo-lo positivo, isto é, $b^2 - 4ac > 0$. Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos:

$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{b^2-4ac}$$

$$2ax + b = \mp\sqrt{b^2-4ac}$$

$$2ax = -b \mp \sqrt{b^2-4ac}$$

$$\boxed{x = \frac{- \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (N)$$

Donde, as raizes são as seguintes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Exercícios resolvidos

1.º exemplo: Resolver a equação:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{4} = (x+3)(x+1)$$

Jacy Lamego, **MATEMÁTICA PRÁTICA E MODERNA**.

Ed do Brasil, 1976.

JACY LAMEGO

COLEÇÃO "GUIAS CURRICULARES"

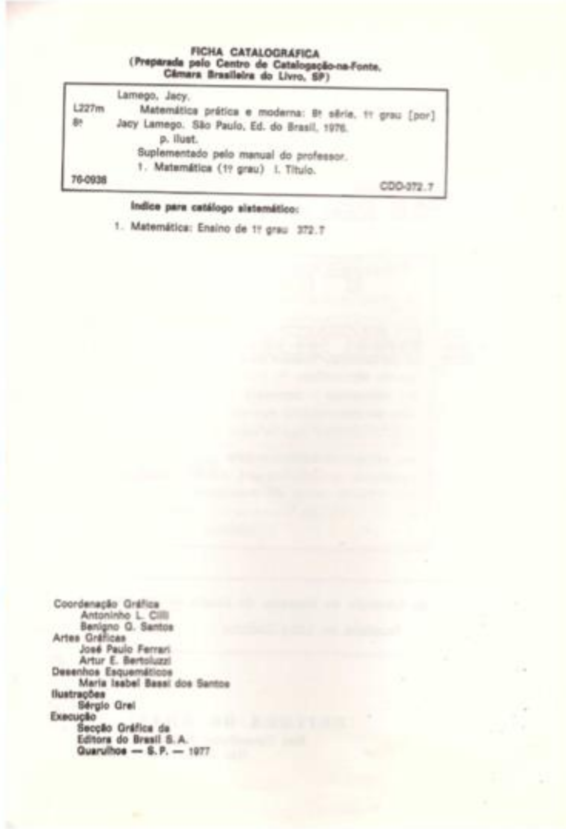
MATEMÁTICA PRÁTICA E MODERNA

PRIMEIRO GRAU

8ª SÉRIE

Secretaria da Educação do Governo do Estado de São Paulo
Programa do Livro Didático

EDITORA DO BRASIL S/A
Rua Conselheiro Nébias, 887
São Paulo

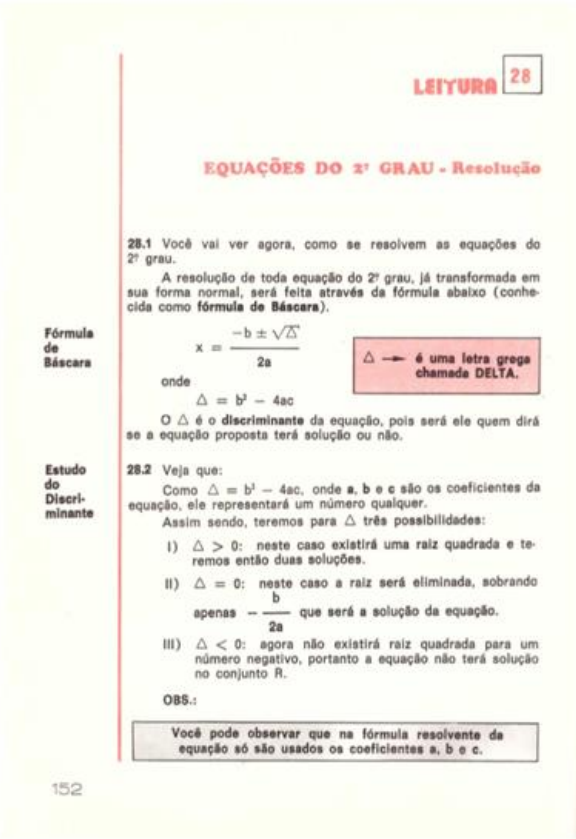


FICHA CATALOGRÁFICA
(Preparada pelo Centro de Catalogação-na-Fonte,
Câmara Brasileira do Livro, SP)

L227m 8ª
Lamego, Jacy.
Matemática prática e moderna: 8ª série, 1º grau [por] Jacy Lamego. São Paulo, Ed. do Brasil, 1976.
p. ilust.
Suplementado pelo manual do professor.
1. Matemática (1º grau) I. Título.
76-0936 CDD-372.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino de 1º grau 372.7

Coordenação Gráfica
Antoninho L. Cilli
Benigno G. Santos
Artes Gráficas
José Paulo Ferrari
Artur E. Bertoluzzi
Desenhos Esquemáticos
Maria Isabel Bassi dos Santos
Ilustrações
Sérgio Grei
Execução
Secção Gráfica da
Editora do Brasil S. A.
Guarulhos — S. P. — 1977



LEITURA 28

EQUAÇÕES DO 2º GRAU - Resolução

28.1 Você vai ver agora, como se resolvem as equações do 2º grau.

A resolução de toda equação do 2º grau, já transformada em sua forma normal, será feita através da fórmula abaixo (conhecida como **fórmula de Báscara**).

Fórmula de Báscara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Δ → é uma letra grega chamada DELTA.

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

O Δ é o **discriminante** da equação, pois será ele quem dirá se a equação proposta terá solução ou não.

Estudo do Discriminante

28.2 Veja que:

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, onde **a**, **b** e **c** são os coeficientes da equação, ele representará um número qualquer.

Assim sendo, teremos para Δ três possibilidades:

I) $\Delta > 0$: neste caso existirá uma raiz quadrada e teremos então duas soluções.

II) $\Delta = 0$: neste caso a raiz será eliminada, sobrando apenas $-\frac{b}{2a}$ que será a solução da equação.

III) $\Delta < 0$: agora não existirá raiz quadrada para um número negativo, portanto a equação não terá solução no conjunto R.

OBS.:

Você pode observar que na fórmula resolvente da equação só são usados os coeficientes a, b e c.

152

Scipione di Pierro Neto, Magda Teresinha Angelo, Edson do Carmo, Lilia Maria Facio. **MATEMÁTICA 8ª SÉRIE DO 1º GRAU**. Editora Saraiva, 1979.

i) $4x^2 - 9 = 0$
j) $36x^2 - 1 = 0$
l) $-3x^2 = 0$
m) $2x^2 + 50 = 0$
n) $10x^2 + 2x = 0$
o) $-x^2 + 8x = 0$
p) $-x^2 - 1 = 0$
q) $9x^2 - 16x = 0$

Série II

a) $x(x+3) = 5x$
b) $2x^2 + 5x - 12 = 3(x-4)$
c) $\frac{x^2}{2} - 5x + 1 = (x-1)^2$
d) $x^2 = \frac{81}{4}$
e) $4x^2 - \frac{9}{25} = 0$
f) $\frac{16}{25}x^2 + 5 = 0$
g) $\frac{5}{4}x^2 - \frac{2}{5}x = 0$
h) $0,04x = x^2$
i) $2x^2 - 10x = 3x - 3x^2$
j) $\frac{x(x+1)}{3} = \frac{x(x-1)}{2}$
l) $(x-7)(x+7) = 51$
m) $(2x-1)^2 + (1-3x)^2 = 2$
n) $(x+1)(1-x) = \frac{3-x}{3}$
o) $(y-1)^2 + (y+1)^2 = 52$
p) $(4y-3)^2 - (3y-4)^2 = 56$

3. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO COMPLETA DO 2º GRAU

Vamos determinar o conjunto verdade da equação completa do 2.º grau $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Para isso, usaremos o **processo de Báscara** (matemático hindu do século XII), que consiste em transformar a equação dada noutra equivalente, de modo que o primeiro membro da sentença seja um quadrado perfeito.

Seja a equação em $\mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- transportando-se **c** para o segundo membro, temos:

$$ax^2 + bx = -c$$

- multiplicando-se ambos os membros por $\mathbf{4a \neq 0}$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

- adicionando-se $\mathbf{b^2}$ aos membros da equação:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Vicente Paulo Kosien e Luiz Herminio Marcarini. **MATEMÁTICA 8ª SÉRIE DO 1º GRAU**.

Editora Saraiva, 1981.

3.2. Resolução de equações completas

Para calcular o conjunto verdade de uma equação completa do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$, usamos a fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

, chamada **fórmula de Báscara**

Essa fórmula é assim chamada porque foi deduzida por Báscara, matemático natural da Índia, que viveu no século XII.

Vamos deduzir essa fórmula:

Seja a forma geral:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Passamos c para o segundo membro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividimos todos os termos por **a**:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Simplificando, temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Adicionamos $\frac{b^2}{4a^2}$ a cada membro:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

O primeiro membro, $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, é igual a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Então, temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Reduzindo o segundo membro ao mesmo denominador, fica:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

E $\quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Isolamos o **x**:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

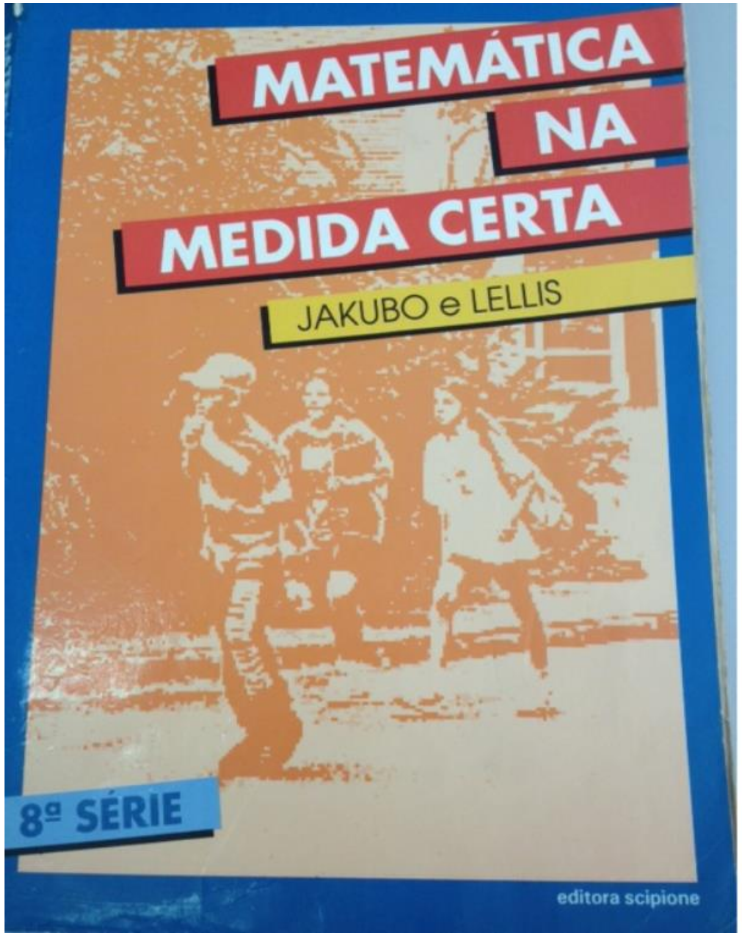
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

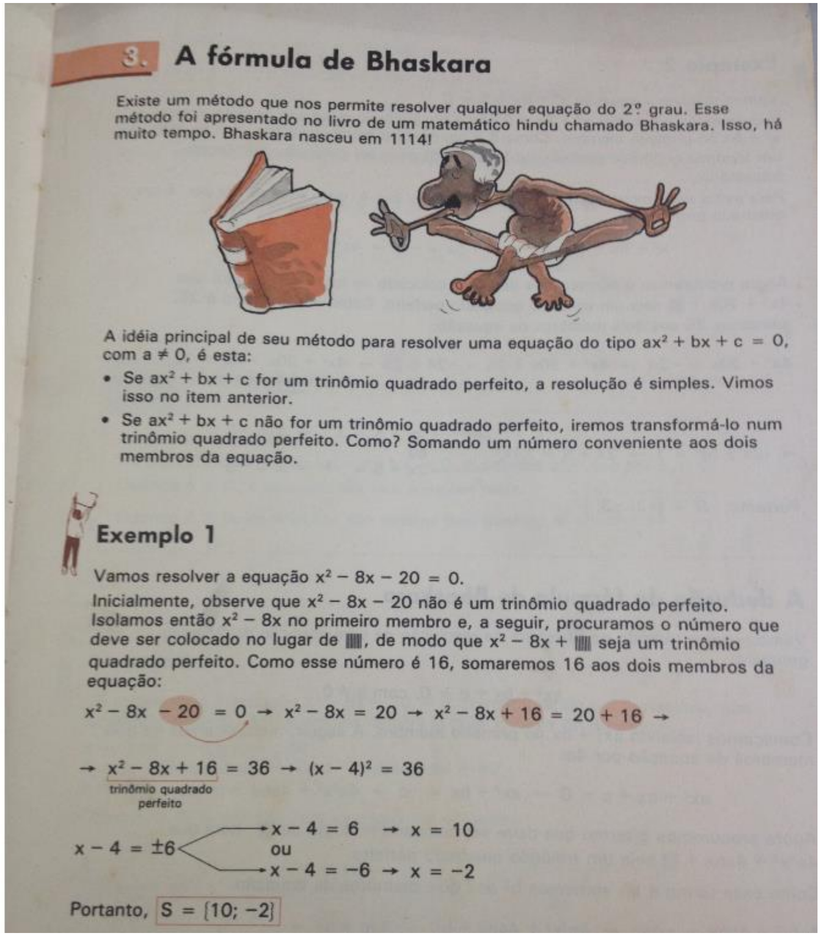
que é a fórmula resolutiva.

39

José Jakuvic e Marcelo Lellis. MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA.

Editora Scipione, 1995.





3. A fórmula de Bhaskara

Existe um método que nos permite resolver qualquer equação do 2º grau. Esse método foi apresentado no livro de um matemático hindu chamado Bhaskara. Isso, há muito tempo. Bhaskara nasceu em 1114!

A idéia principal de seu método para resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é esta:

- Se $ax^2 + bx + c$ for um trinômio quadrado perfeito, a resolução é simples. Vimos isso no item anterior.
- Se $ax^2 + bx + c$ não for um trinômio quadrado perfeito, iremos transformá-lo num trinômio quadrado perfeito. Como? Somando um número conveniente aos dois membros da equação.

Exemplo 1

Vamos resolver a equação $x^2 - 8x - 20 = 0$.

Inicialmente, observe que $x^2 - 8x - 20$ não é um trinômio quadrado perfeito. Isolamos então $x^2 - 8x$ no primeiro membro e, a seguir, procuramos o número que deve ser colocado no lugar de ▥, de modo que $x^2 - 8x +$ ▥ seja um trinômio quadrado perfeito. Como esse número é 16, somaremos 16 aos dois membros da equação:

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow x^2 - 8x = 20 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = 20 + 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{x^2 - 8x + 16}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = 36 \rightarrow (x - 4)^2 = 36$$

$$x - 4 = \pm 6 \begin{cases} \rightarrow x - 4 = 6 \rightarrow x = 10 \\ \text{ou} \\ \rightarrow x - 4 = -6 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Portanto, $\boxed{S = \{10; -2\}}$

Scipione de Pierro Netto**, Matemática Scipione 8ª série**

Editora Scipione, 1996.

editora scipione

DIRETORIA
Luiz Esteves Sallum
Maurício Fernandes Dias
Vicente Paz Fernandez
Patrícia Fernandes Dias
José Gallafassi Filho
Joaquim Nascimento

GERÊNCIA EDITORIAL
Aurelio Gonçalves Filho

RESPONSABILIDADE EDITORIAL
Mizue Jyo

ASSESSORIA DIDÁTICA
Elizabeth Soares

PROJETO DIDÁTICO-VISUAL
Valdemar Vello

COLABORAÇÃO
Sílvia Rosane de Jesus Gonçalves
Maria Aparecida Bento Santana
Miriam Pessutto Pinto

REVISÃO
chefia - Sâmia Rios
assistência - Miriam de Carvalho Abões
preparação - Eloiza Helena Rodrigues
revisão - Regina C. Barroso, Ornella Miguellone, Aline De Maria e Elaine Silveira Raya

GERÊNCIA DE PRODUÇÃO
Gil Naddaf

ARTE
chefia - Antonio Tadeu Damiani
coordenação geral - Sergio Yutaka Suwaki
coordenação de arte - Edson Haruo Toyota e Eber Alexandre de Souza
assistência - Ivan R. Bordin, Hernani R. Alves e Zeferino F. Neves
capa e miolo - Ulhôa Cintra Comunicação Visual
ilustrações - Margarethe Aquemi S. Itai

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
José Antonio Ferraz

COMPOSIÇÃO E ARTE-FINAL
Diarte Editora e Comercial de Livros
coordenação geral - Nelson S. Urata
coordenação de arte-final - Silvio Vivian
coord. de composição - Armando F. Tomiyoshi
composição - Nelson T. Dehira
arte-final - João Passos, Marta de Souza e Airton Quaresma

Prol - Editora Gráfica Ltda.

Editora Scipione Ltda.
MATRIZ
Praça Carlos Gomes, 46
01501-040 São Paulo SP
DIVULGAÇÃO
Rua Fagundes, 121
01508-030 São Paulo SP
Tel. (011) 239 1700

Caixa Postal 65131

1996

ISBN 85-262-2448-4

EDITORA AFILIADA

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e acompanhe as etapas para a obtenção da fórmula geral.
Isolamos **c** no 2º membro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividimos por **a** os dois membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos o trinômio quadrado perfeito, adicionando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ chama-se **discriminante** da equação do 2º grau, e é representada pela letra grega maiúscula Δ (delta).
Podemos então escrever a fórmula obtida assim:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Δ
DISCRIMINANTE
$b^2 - 4ac$

Essa é a fórmula geral para a resolução de equações do 2º grau, também conhecida como **fórmula de Bhaskara** (pronuncia-se "Báscara").
Vamos resolver algumas equações completas do 2º grau, utilizando a fórmula geral.

Exemplo 1

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

Como $a = 3$, $b = -5$ e $c = 2$, o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ é:

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2$$
$$\Delta = 25 - 24$$
$$\Delta = 1$$
$$\sqrt{\Delta} = 1$$

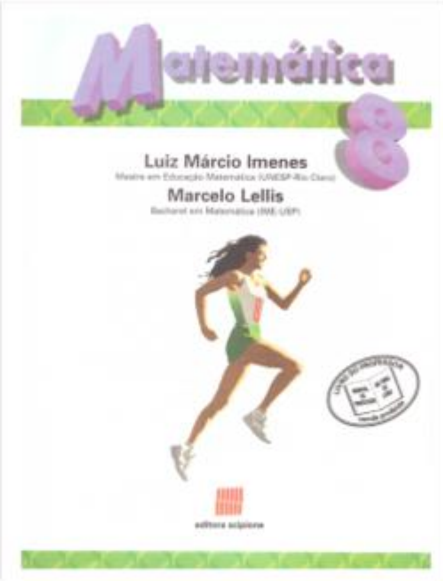
Aplicando a fórmula, temos:

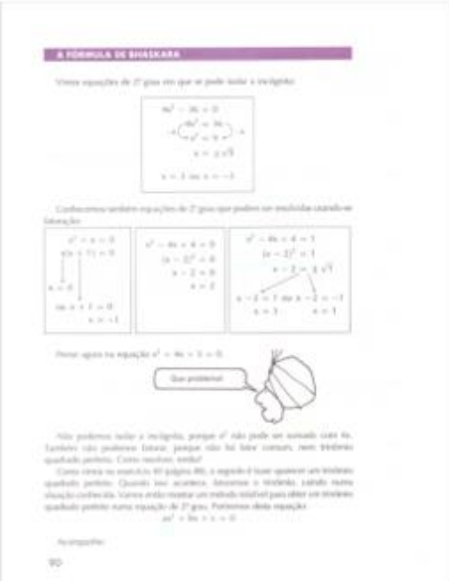
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \begin{cases} x' = \frac{5+1}{6} \Rightarrow x' = 1 \\ x'' = \frac{5-1}{6} \Rightarrow x'' = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Luiz Marcio Imenes, Marcelo Lellis**, Matemática**

Editora Scipione, 1998.





Luiz Marcio Imenes, Marcelo Lellis**, Matemática.**

Editora Moderna, 2010.


Luiz Márcio Imenes

Marcelo Lellis

MATEMÁTICA

Imenes & Lellis

9º ano

1ª edição

Moderna


Moderna


Capítulo 6

Equações e sistemas de equações de 2º grau

Para começar bem

A fórmula de Bhaskara

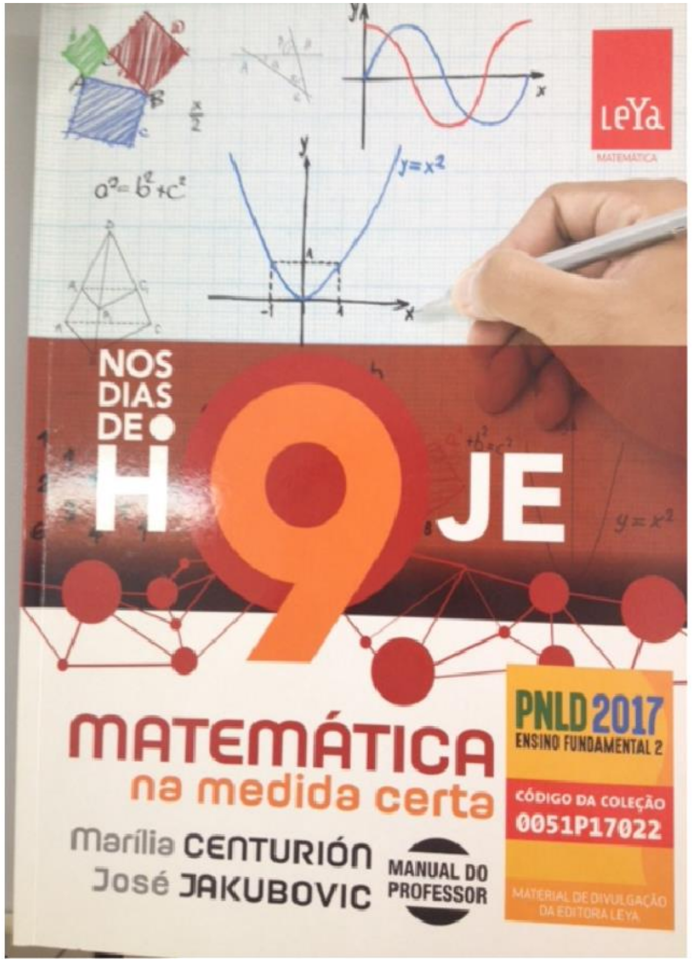
118

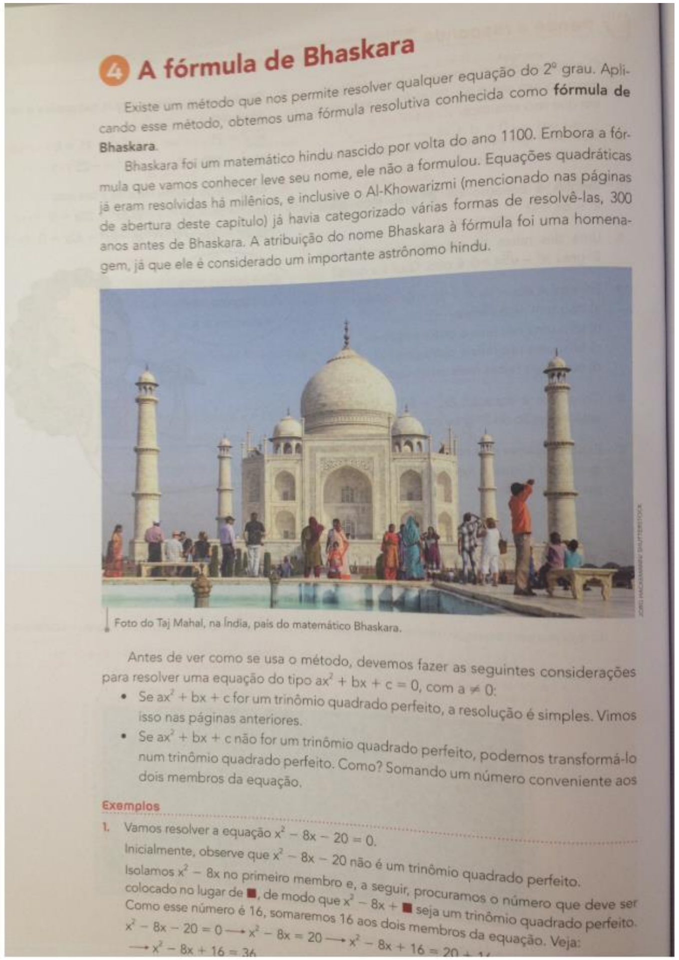

Exemplo 1

119

Marília Centurion, José Jakuvic. **MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA,**

Editora Leya, 2002.





4 A fórmula de Bhaskara

Existe um método que nos permite resolver qualquer equação do 2º grau. Aplicando esse método, obtemos uma fórmula resolutiva conhecida como **fórmula de Bhaskara**.

Bhaskara foi um matemático hindu nascido por volta do ano 1100. Embora a fórmula que vamos conhecer leve seu nome, ele não a formulou. Equações quadráticas já eram resolvidas há milênios, e inclusive o Al-Khowarizmi (mencionado nas páginas de abertura deste capítulo) já havia categorizado várias formas de resolvê-las, 300 anos antes de Bhaskara. A atribuição do nome Bhaskara à fórmula foi uma homenagem, já que ele é considerado um importante astrônomo hindu.

Foto do Taj Mahal, na Índia, país do matemático Bhaskara.

Antes de ver como se usa o método, devemos fazer as seguintes considerações para resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$:

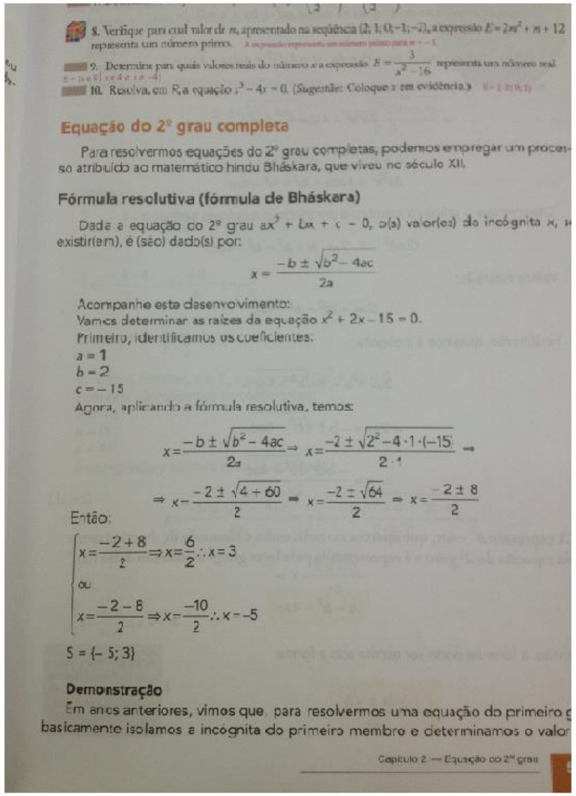
- Se $ax^2 + bx + c$ for um trinômio quadrado perfeito, a resolução é simples. Vimos isso nas páginas anteriores.
- Se $ax^2 + bx + c$ não for um trinômio quadrado perfeito, podemos transformá-lo num trinômio quadrado perfeito. Como? Somando um número conveniente aos dois membros da equação.

Exemplos

1. Vamos resolver a equação $x^2 - 8x - 20 = 0$.
   Inicialmente, observe que $x^2 - 8x - 20$ não é um trinômio quadrado perfeito.
   Isolamos $x^2 - 8x$ no primeiro membro e, a seguir, procuramos o número que deve ser colocado no lugar de ■, de modo que $x^2 - 8x + ■$ seja um trinômio quadrado perfeito.
   Como esse número é 16, somaremos 16 aos dois membros da equação. Veja:
   $x^2 - 8x - 20 = 0 \longrightarrow x^2 - 8x = 20 \longrightarrow x^2 - 8x + 16 = 20 + 1$[illegible]
   $\longrightarrow x^2 - 8x + 16 = 36$

Denise Favareto**. MATEMÁTICA EM CENA**.

Ed. Escala educacional, 2008.



8. Verifique para qual valor de m, apresentado na sequência (2; 1; 0; −1; −2), a expressão $E = 2m^2 + m + 12$ representa um número primo.

9. Determine para quais valores reais do número x a expressão $E = \frac{3}{x^2 - 16}$ representa um número real.

10. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^3 - 4x = 0$. (Sugestão: Coloque x em evidência.)

Equação do 2º grau completa

Para resolvermos equações do 2º grau completas, podemos empregar um processo atribuído ao matemático hindu Bháskara, que viveu no século XII.

Fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara)

Dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, o(s) valor(es) da incógnita x, se existir(em), é (são) dado(s) por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Acompanhe este desenvolvimento:
Vamos determinar as raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$.
Primeiro, identificamos os coeficientes:
$a = 1$
$b = 2$
$c = -15$
Agora, aplicando a fórmula resolutiva, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

Então:

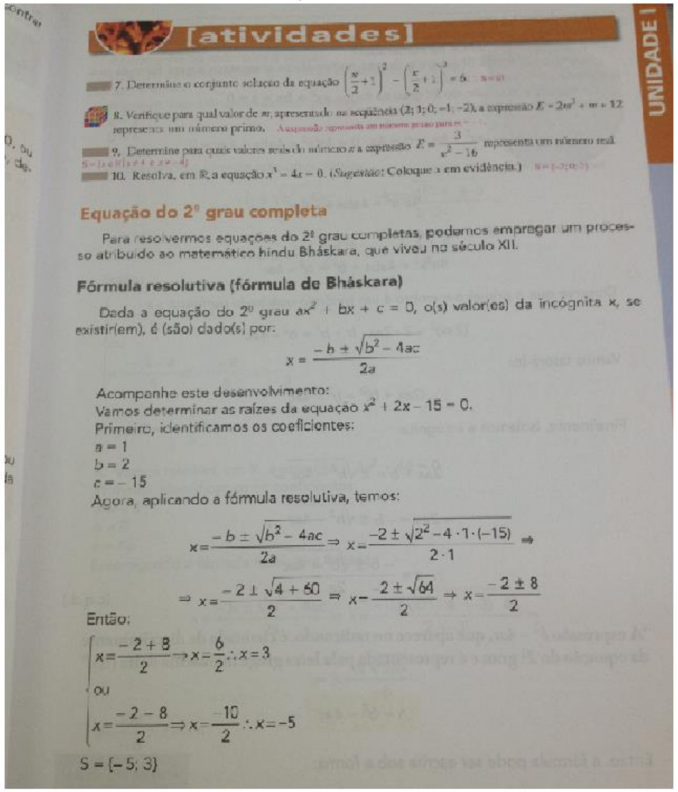
$$\begin{cases} x = \frac{-2+8}{2} \Rightarrow x = \frac{6}{2} \therefore x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-2-8}{2} \Rightarrow x = \frac{-10}{2} \therefore x = -5 \end{cases}$$

$S = \{-5; 3\}$

Demonstração

Em anos anteriores, vimos que, para resolvermos uma equação do primeiro grau, basicamente isolamos a incógnita do primeiro membro e determinamos o valor

Capítulo 2 — Equação do 2º grau



[atividades]

UNIDADE I

7. Determine o conjunto solução da equação $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = 6$.

8. Verifique para qual valor de m, apresentado na sequência (2; 1; 0; −1; −2), a expressão $E = 2m^2 + m + 12$ representa um número primo.

9. Determine para quais valores reais do número x a expressão $E = \frac{3}{x^2 - 16}$ representa um número real.

10. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^3 - 4x = 0$. (Sugestão: Coloque x em evidência.)

Equação do 2º grau completa

Para resolvermos equações do 2º grau completas, podemos empregar um processo atribuído ao matemático hindu Bháskara, que viveu no século XII.

Fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara)

Dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, o(s) valor(es) da incógnita x, se existir(em), é (são) dado(s) por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Acompanhe este desenvolvimento:
Vamos determinar as raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$.
Primeiro, identificamos os coeficientes:
$a = 1$
$b = 2$
$c = -15$
Agora, aplicando a fórmula resolutiva, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

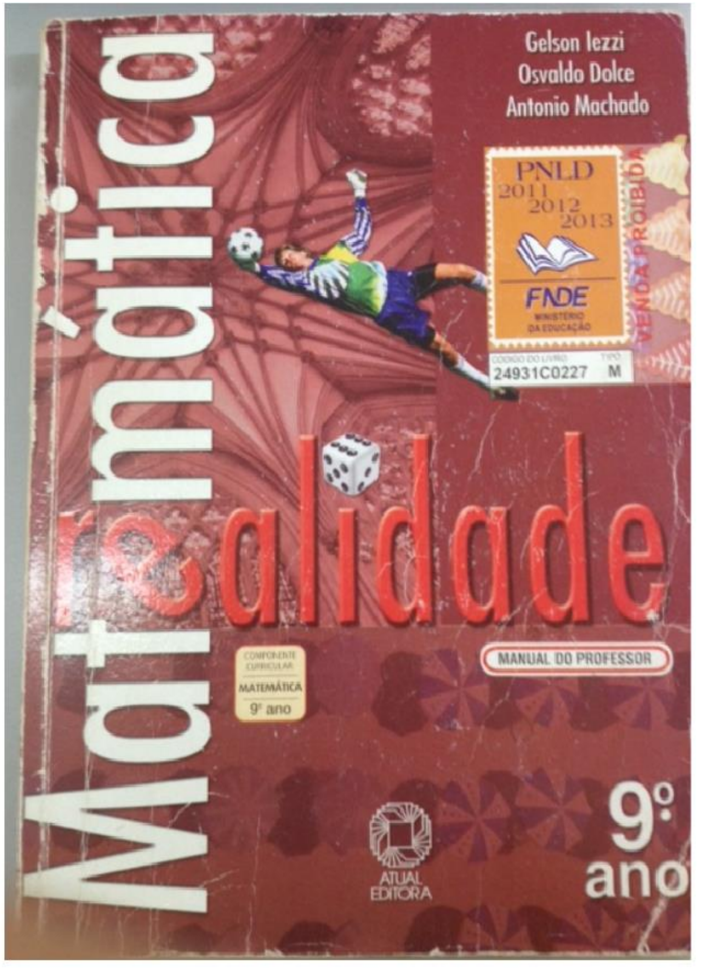
Então:

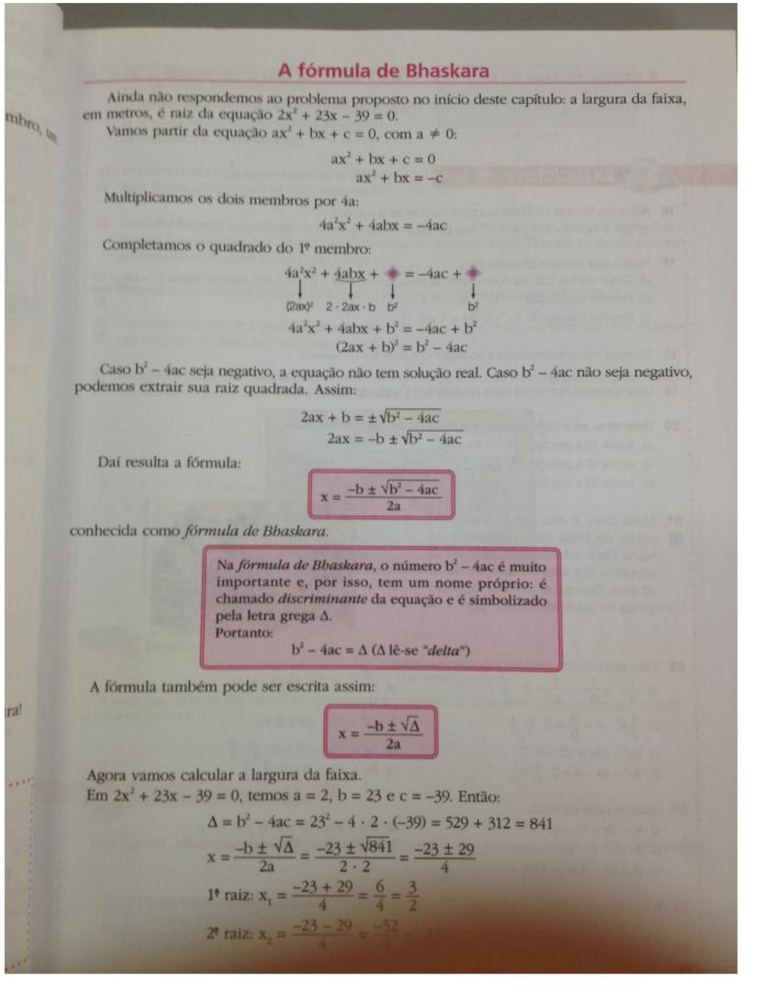
$$\begin{cases} x = \frac{-2+8}{2} \Rightarrow x = \frac{6}{2} \therefore x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-2-8}{2} \Rightarrow x = \frac{-10}{2} \therefore x = -5 \end{cases}$$

$S = \{-5; 3\}$

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. **MATEMÁTICA E REALIDADE.**

Editora Atual, 2009.





A fórmula de Bhaskara

Ainda não respondemos ao problema proposto no início deste capítulo: a largura da faixa, em metros, é raiz da equação $2x^2 + 23x - 39 = 0$.

Vamos partir da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos os dois membros por 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Completamos o quadrado do 1º membro:

$$\underbrace{4a^2x^2}_{(2ax)^2} + \underbrace{4abx}_{2 \cdot 2ax \cdot b} + \underbrace{◆}_{b^2} = -4ac + \underbrace{◆}_{b^2}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Caso $b^2 - 4ac$ seja negativo, a equação não tem solução real. Caso $b^2 - 4ac$ não seja negativo, podemos extrair sua raiz quadrada. Assim:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Daí resulta a fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

conhecida como *fórmula de Bhaskara*.

> Na *fórmula de Bhaskara*, o número $b^2 - 4ac$ é muito importante e, por isso, tem um nome próprio: é chamado *discriminante* da equação e é simbolizado pela letra grega Δ.
> Portanto:
> $b^2 - 4ac = \Delta$ (Δ lê-se "*delta*")

A fórmula também pode ser escrita assim:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Agora vamos calcular a largura da faixa.
Em $2x^2 + 23x - 39 = 0$, temos $a = 2$, $b = 23$ e $c = -39$. Então:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 23^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-39) = 529 + 312 = 841$$

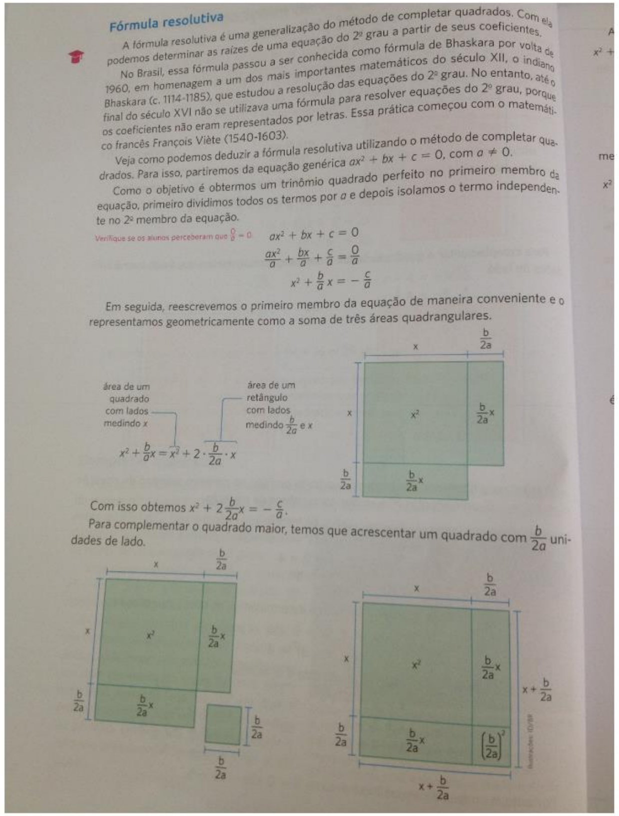
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-23 \pm \sqrt{841}}{2 \cdot 2} = \frac{-23 \pm 29}{4}$$

1ª raiz: $x_1 = \frac{-23 + 29}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2ª raiz: $x_2 = \frac{-23 - 29}{4} = -52$ [illegible]

Eduardo Chavante. **MATEMÁTICA.**

Editora SM, 2015.



Fórmula resolutiva

A fórmula resolutiva é uma generalização do método de completar quadrados. Com ela podemos determinar as raízes de uma equação do 2º grau a partir de seus coeficientes.

No Brasil, essa fórmula passou a ser conhecida como fórmula de Bhaskara por volta de 1960, em homenagem a um dos mais importantes matemáticos do século XII, o indiano Bhaskara (c. 1114-1185), que estudou a resolução das equações do 2º grau. No entanto, até o final do século XVI não se utilizava uma fórmula para resolver equações do 2º grau, porque os coeficientes não eram representados por letras. Essa prática começou com o matemático francês François Viète (1540-1603).

Veja como podemos deduzir a fórmula resolutiva utilizando o método de completar quadrados. Para isso, partiremos da equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Como o objetivo é obtermos um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação, primeiro dividimos todos os termos por a e depois isolamos o termo independente no 2º membro da equação.

Verifique se os alunos perceberam que $\frac{0}{a} = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Em seguida, reescrevemos o primeiro membro da equação de maneira conveniente e o representamos geometricamente como a soma de três áreas quadrangulares.

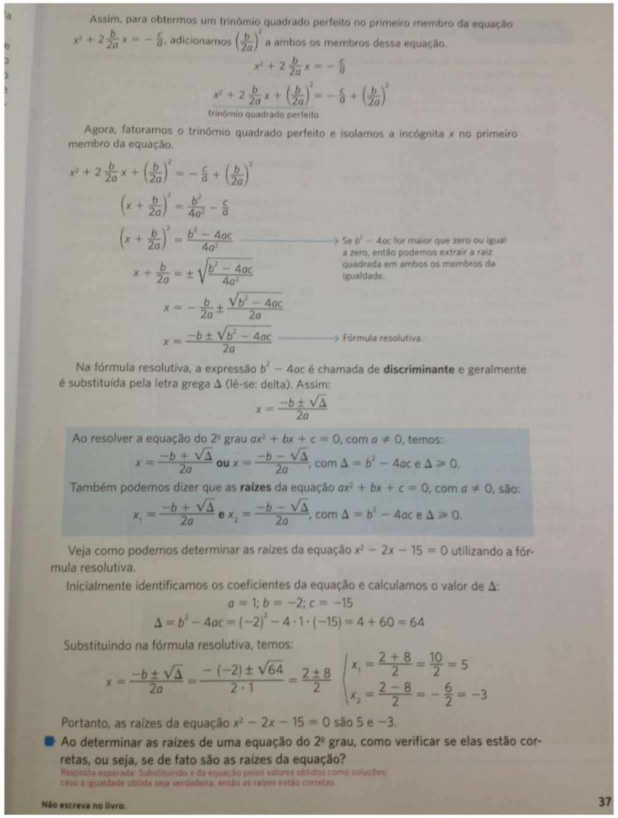
área de um quadrado com lados medindo x

área de um retângulo com lados medindo $\frac{b}{2a}$ e x

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$$

Com isso obtemos $x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$.

Para complementar o quadrado maior, temos que acrescentar um quadrado com $\frac{b}{2a}$ unidades de lado.



Assim, para obtermos um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação $x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$, adicionamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros dessa equação.

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$
$$\underbrace{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e isolamos a incógnita x no primeiro membro da equação.

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \longrightarrow$$

Se $b^2 - 4ac$ for maior que zero ou igual a zero, então podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow \text{Fórmula resolutiva.}$$

Na fórmula resolutiva, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de **discriminante** e geralmente é substituída pela letra grega Δ (lê-se: delta). Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ao resolver a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac \text{ e } \Delta \geqslant 0.$$

Também podemos dizer que as **raízes** da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac \text{ e } \Delta \geqslant 0.$$

Veja como podemos determinar as raízes da equação $x^2 - 2x - 15 = 0$ utilizando a fórmula resolutiva.

Inicialmente identificamos os coeficientes da equação e calculamos o valor de Δ:

$$a = 1;\ b = -2;\ c = -15$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$$

Substituindo na fórmula resolutiva, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{2-8}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação $x^2 - 2x - 15 = 0$ são 5 e −3.

Ao determinar as raízes de uma equação do 2º grau, como verificar se elas estão corretas, ou seja, se de fato são as raízes da equação?

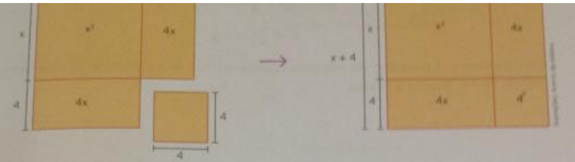
Resposta esperada: Substituindo x da equação pelos valores obtidos como soluções; caso a igualdade obtida seja verdadeira, então as raízes estão corretas.

Não escreva no livro.

37

Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro. **VONTADE DE SABER**.

Editora FTD, 2015.



Dessa maneira, para obter um trinômio quadrado perfeito no 1º membro da equação, acrescentamos 4^2 aos dois membros:

$$\overbrace{x^2 + 8x + 4^2}^{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -7 + 4^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

- Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e resolvemos a equação:

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$
$$(x + 4)^2 = 9$$

Como há dois números cujo quadrado é igual a 9, temos:

$$x + 4 = +\sqrt{9} \qquad x + 4 = -\sqrt{9}$$
$$x + 4 = 3 \qquad x + 4 = -3$$
$$x + 4 - 4 = 3 - 4 \qquad x + 4 - 4 = -3 - 4$$
$$x = -1 \qquad x = -7$$

Portanto, as raizes da equação são -1 e -7.

Fórmula resolutiva

Outra maneira de resolver uma equação do 2º grau é por meio da **fórmula resolutiva**, que consiste na generalização do método de completar quadrados.

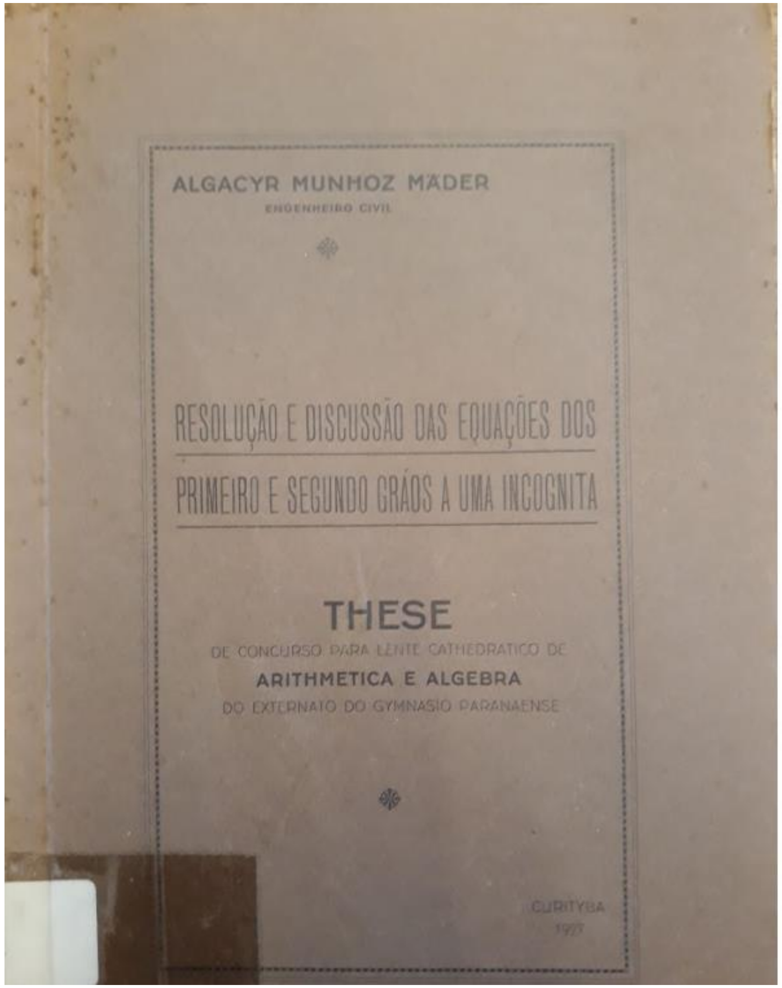
No Brasil, a fórmula resolutiva também é conhecida como **fórmula de Bhaskara**. Esse nome é dado em homenagem ao matemático hindu Bhaskara (1114-1185), em virtude de suas contribuições ao estudo da resolução de equações do 2º grau.

Utilizando essa fórmula, é possivel obter as raizes de uma equação do 2º grau por seus coeficientes.

fórmula resolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

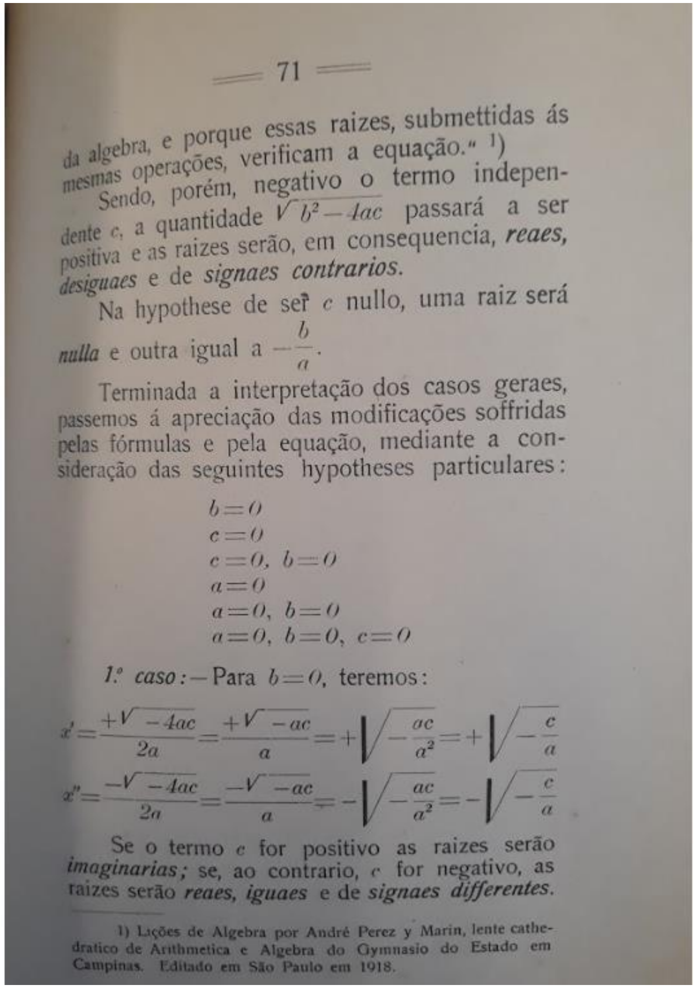
Tese de Algacyr Munhoz Mader, 1929.


ALGACYR MUNHOZ MÄDER
ENGENHEIRO CIVIL

RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DAS EQUAÇÕES DOS PRIMEIRO E SEGUNDO GRÁOS A UMA INCOGNITA

THESE
DE CONCURSO PARA LENTE CATHEDRATICO DE
ARITHMETICA E ALGEBRA
DO EXTERNATO DO GYMNASIO PARANAENSE

CURITYBA


— 71 —

da algebra, e porque essas raizes, submettidas ás mesmas operações, verificam a equação." 1)

Sendo, porém, negativo o termo independente c, a quantidade $\sqrt{b^2-4ac}$ passará a ser positiva e as raizes serão, em consequencia, ***reaes, desiguaes*** e de ***signaes contrarios***.

Na hypothese de ser c nullo, uma raiz será ***nulla*** e outra igual a $-\frac{b}{a}$.

Terminada a interpretação dos casos geraes, passemos á apreciação das modificações soffridas pelas fórmulas e pela equação, mediante a consideração das seguintes hypotheses particulares:

$$b=0$$
$$c=0$$
$$c=0, \; b=0$$
$$a=0$$
$$a=0, \; b=0$$
$$a=0, \; b=0, \; c=0$$

1.º caso: — Para $b=0$, teremos:

$$x'=\frac{+\sqrt{-4ac}}{2a}=\frac{+\sqrt{-ac}}{a}=+\sqrt{-\frac{ac}{a^2}}=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x''=\frac{-\sqrt{-4ac}}{2a}=\frac{-\sqrt{-ac}}{a}=-\sqrt{-\frac{ac}{a^2}}=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

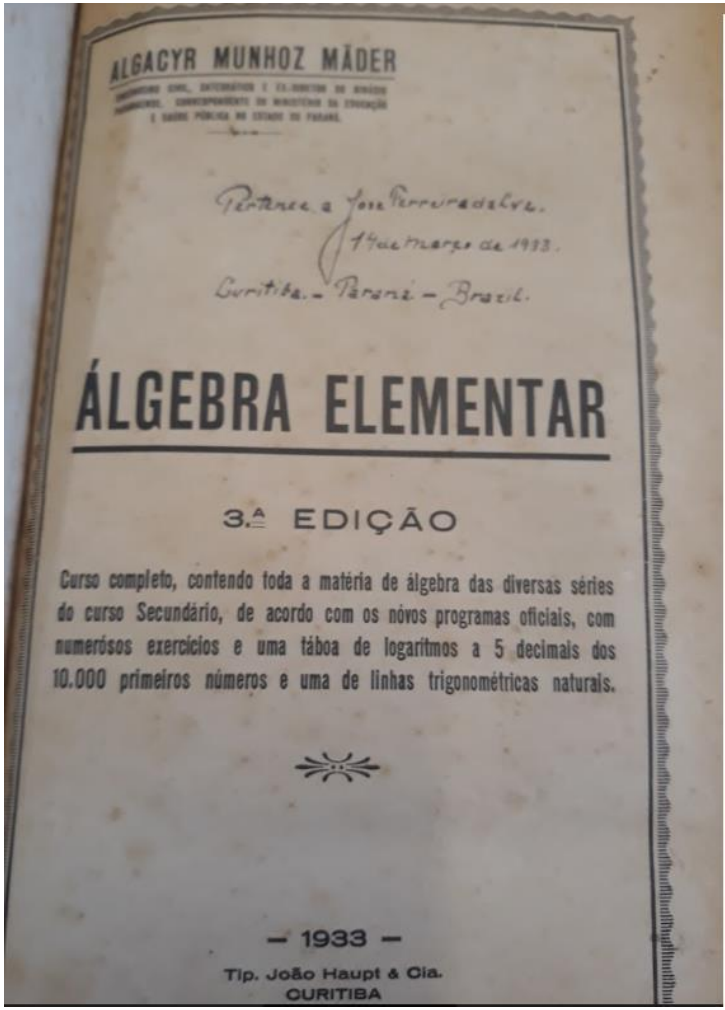
Se o termo c for positivo as raizes serão ***imaginarias***; se, ao contrario, c for negativo, as raizes serão ***reaes, iguaes*** e de ***signaes differentes***.

1) Lições de Algebra por André Perez y Marin, lente cathedratico de Arithmetica e Algebra do Gymnasio do Estado em Campinas. Editado em São Paulo em 1918.

-

Algacyr Munhoz Mader, **Álgebra Elementar 3ª Ed**.

Tipografia João Haupt, 1933.



ALGACYR MUNHOZ MÄDER

Pertence a José Ferreira da Silva.
14 de março de 1933.
Curitiba – Paraná – Brazil.

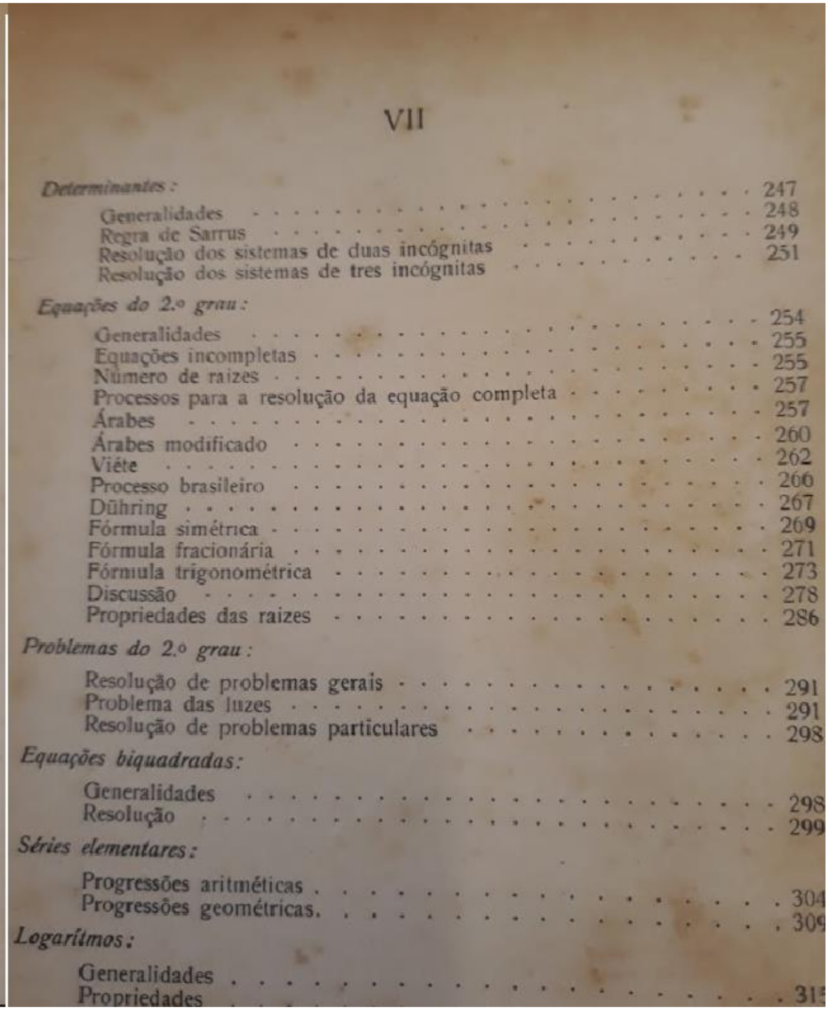
ÁLGEBRA ELEMENTAR

3.ª EDIÇÃO

Curso completo, contendo toda a matéria de álgebra das diversas séries do curso Secundário, de acordo com os nóvos programas oficiais, com numerósos exercicios e uma táboa de logaritmos a 5 decimais dos 10.000 primeiros números e uma de linhas trigonométricas naturais.

— 1933 —

Tip. João Haupt & Cia.
CURITIBA



VII

C.B. Otoni, **ELEMENTOS DE ÁLGEBRA**.

Livraria clássica de Alves e Cia, 1856

ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

COMPILADOS

Por C. B. Otoni

COMPENDIO

ADOPTADO PELOS ESTABELECIMENTOS DE INSTRUCÇÃO SUPERIOR E SECUNDARIA, NO RIO DE JANEIRO

SEGUNDA EDIÇÃO

COM ADDITAMENTOS E NUMEROSAS CORRECÇÕES.

RIO DE JANEIRO

Á VENDA EM CASA DE

EDUARDO & HENRIQUE LAEMMERT

RUA DA QUITANDA, 77

1856

Ambos estes valores satisfazem ao problema que tem duas soluções. Com effeito, sendo a compra por 60 doblas, a perda ou 60 por cento de 60 doblas é 36; e o preço da venda 24.

Sendo 40 doblas, os 40 por cento desta quantia importão em 16 doblas, perda que deduzida de 40 dá 24 para preço da venda.

§ 3.° DISCUSSÃO GERAL DA EQUAÇÃO E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRÁO.

113. Quando as quantidades conhecidas, nos problemas do segundo gráo, em vez de serem numeros particulares, como até aqui, fôrem representadas por letras ou symbolos genericos, os resultados obtidos representaráõ, como nos do primeiro gráo, *formulas geraes*, proprias a resolver todos os problemas semelhantes, uma vez dados em numeros os valores das letras. Interpretar estes resultados, segundo as diversas circumstancias em que se acharem os dados, é o objecto da *discussão dos problemas do segundo gráo.*

Antes porém de entrar nesta discussão, será conveniente, fazer sobresahir alguns *factos analyticos*, que se encerrão nas expressões do n.° 98, e são aliás casos particulares da *theoria geral da composição das equações* que será tratada em outra parte deste curso. Consideremos a equação preparada do 2.° gráo na fórma $x^2+px-q=0$, e representemos os dous valores de x por x' e x'' para melhor distingui-los: assim

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

Eis os factos de que fallámos.

1.° E' facil verificar que a multiplicação dos dous binomios $x-x'$, $x-x''$ reproduz o 1.° membro da equação primitiva. Com effeito

$$(x-x')(x-x'')=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}\right)$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(q+\frac{p^2}{4}\right)=x^2+px-q.$$

Assim *o 1.° membro de toda a equação preparada do 2.° gráo se decompõe em dous factores do 1.° gráo em* x, *da fórma* x—x', x—x'', *sendo* x', x'' *os valores de* x.

Estes valores se chamão raizes da equação.

Em geral, dá-se o nome *raiz de uma equação a toda a expressão numerica ou algebrica, real ou imaginaria, que substituida por* x *torna a equação identica.*

Toda a equação do 2.° gráo tem duas raizes.

2.° Sommando as raizes, obtem-se

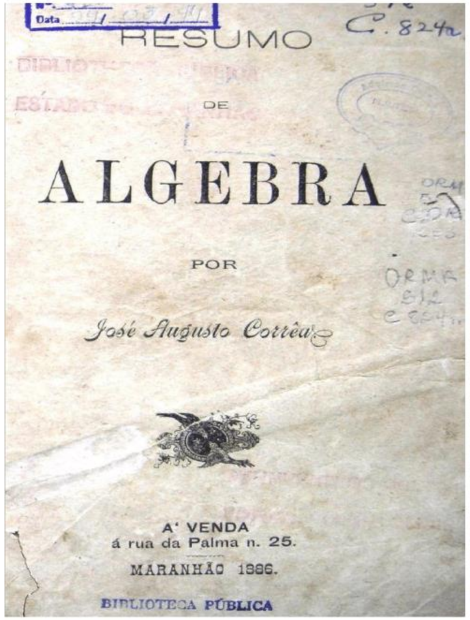
$$x'+x''=-p$$

O coefficiente do 2.° termo da equação, com signal contrario é a somma algebrica das raizes.

3.° Multiplicando-as,

$$x'.x''=\frac{p^2}{4}-q-\frac{p^2}{4}=-q$$

José Augusto Correa, **Resumo de Álgebra**, 1886.



RESUMO

DE

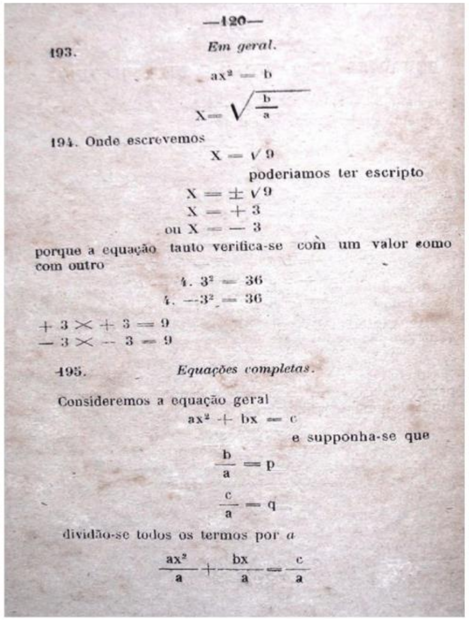
ALGEBRA

POR

José Augusto Corrêa

A' VENDA
á rua da Palma n. 25.

MARANHÃO 1886.



—120—

193. *Em geral.*

$$ax^2 = b$$

$$X = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

194. Onde escrevemos

$$X = \sqrt{9}$$

poderiamos ter escripto

$$X = \pm\sqrt{9}$$

$$X = +3$$

$$\text{ou } X = -3$$

porque a equação tanto verifica-se com um valor como com outro

$$4.\ 3^2 = 36$$

$$4.\ -3^2 = 36$$

$$+3 \times +3 = 9$$

$$-3 \times -3 = 9$$

195. *Equações completas.*

Consideremos a equação geral

$$ax^2 + bx = c$$

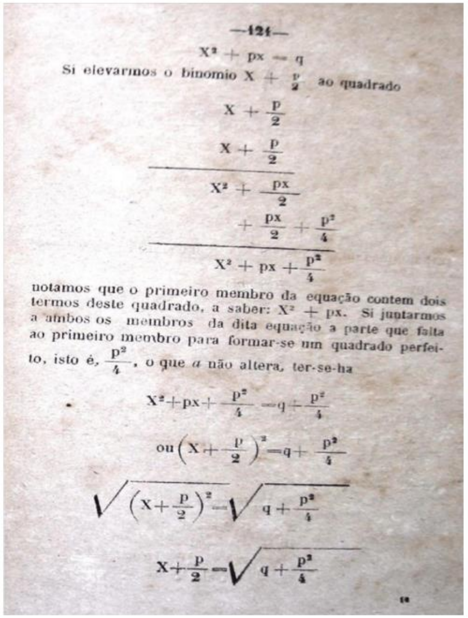
e supponha-se que

$$\frac{b}{a} = p$$

$$\frac{c}{a} = q$$

dividão-se todos os termos por *a*

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$$



—121—

$$X^2 + px = q$$

Si elevarmos o binomio $X + \frac{p}{2}$ ao quadrado

$$X + \frac{p}{2}$$

$$X + \frac{p}{2}$$

$$X^2 + \frac{px}{2}$$

$$+ \frac{px}{2} + \frac{p^2}{4}$$

$$X^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

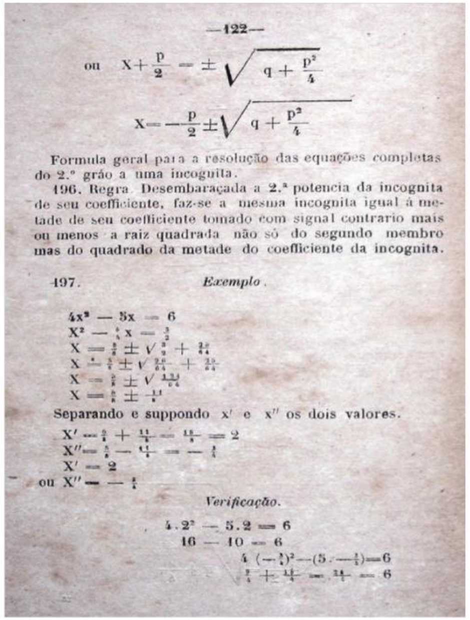
notamos que o primeiro membro da equação contem dois termos deste quadrado, a saber: $X^2 + px$. Si juntarmos a ambos os membros da dita equação a parte que falta ao primeiro membro para formar-se um quadrado perfeito, isto é, $\frac{p^2}{4}$, o que *a* não altera, ter-se-ha

$$X^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

$$\text{ou} \left(X + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4}$$

$$\sqrt{\left(X + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

$$X + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$



—122—

$$\text{ou} \quad X + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

$$X = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

Formula geral para a resolução das equações completas do 2.º grão a uma incognita.

196. Regra. Desembaraçada a 2.ª potencia da incognita de seu coefficiente, faz-se a mesma incognita igual á metade de seu coefficiente tomado com signal contrario mais ou menos a raiz quadrada não só do segundo membro mas do quadrado da metade do coefficiente da incognita.

197. *Exemplo.*

$$4x^2 - 5x = 6$$

$$X^2 - \tfrac{5}{4}x = \tfrac{3}{2}$$

$$X = \tfrac{5}{8} \pm \sqrt{\tfrac{3}{2} + \tfrac{25}{64}}$$

$$X = \tfrac{5}{8} \pm \sqrt{\tfrac{96}{64} + \tfrac{25}{64}}$$

$$X = \tfrac{5}{8} \pm \sqrt{\tfrac{121}{64}}$$

$$X = \tfrac{5}{8} \pm \tfrac{11}{8}$$

Separando e suppondo x' e x'' os dois valores.

$$X' = \tfrac{5}{8} + \tfrac{11}{8} = \tfrac{16}{8} = 2$$

$$X'' = \tfrac{5}{8} - \tfrac{11}{8} = -\tfrac{3}{4}$$

$$X' = 2$$

$$\text{ou } X'' = -\tfrac{3}{4}$$

Verificação.

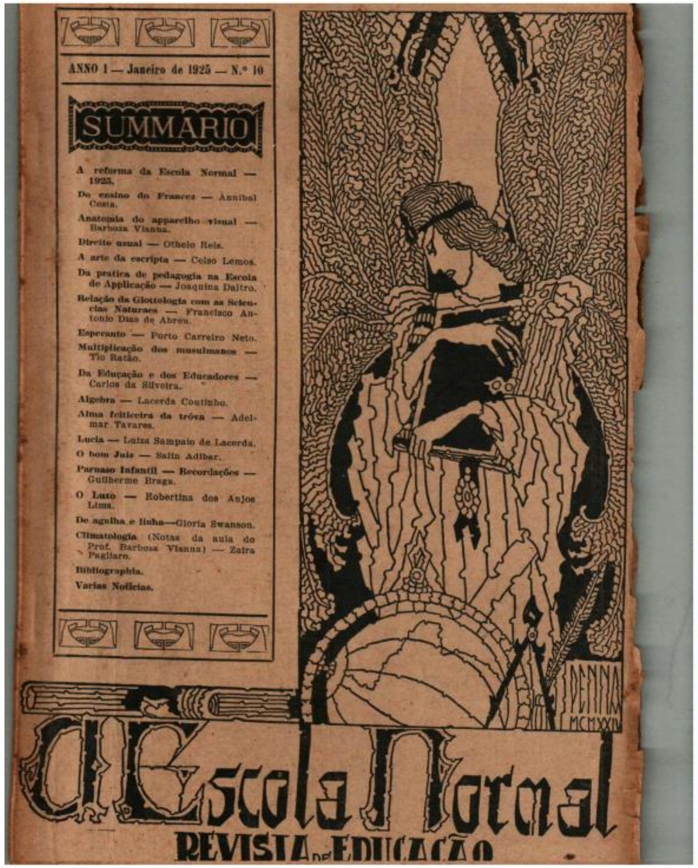
$$4.2^2 - 5.2 = 6$$

$$16 - 10 = 6$$

$$4\left(-\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(5 \cdot -\tfrac{3}{4}\right) = 6$$

$$\tfrac{9}{4} + \tfrac{15}{4} = \tfrac{24}{4} = 6$$

Revista Escola Normal, 1925.



ANNO 1 — Janeiro de 1925 — N.º 10

SUMMARIO

A Escola Normal

REVISTA DE EDUCAÇÃO

ALGEBRA

Lacerda Coutinho
Docente de Algebra

Applicação do processo de Octacilio de Novaes na resolução da equação do 2.º grão:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{3x}{4} = \frac{81}{20}$$

ou

$$4x^2 + 15x = 81$$

Pondo x em evidencia

$$(4x + 15)x = 81 \ldots\ldots (1)$$

fazendo

$$4x + 15 = y \ldots\ldots (2)$$

e substituindo em (1)

$$xy = 81 \ldots\ldots (3)$$

Da egualdade (2) tira-se

$$4x - y = -15 \ldots\ldots (4)$$

Tomando a expressão $4x + y$ e elevando ao quadrado

$$(4x + y)^2\ 16x^2 + 8xy + y^2$$

Sommando a ambos os membros a quantidade $8xy$ tem-se

$$(4x + y)^2 + 8xy = 16x^2 + 8xy + y^2 + 8xy$$

ou

$$(4x + y)^2 = 16x^2 + 8xy + y^2 + 8xy - 8xy$$

ou

$$(4x + y)^2 = 16x^2 - 8xy + y^2 + 16xy$$

por ser

$$16x^2 - 8xy + y^2 = (4x - y)^2$$

tem-se

$$(4x + y)^2 = (4x - y)^2 + 16xy$$

por ser (4) e (3)

$$4x - y = -15 \text{ e } xy = 81$$

tem-se

$$(4x + y)^2 = (-15)^2 + 16 \times 81$$

ou

$$(4x + y)^2 = 225 + 1296$$

ou

$$(4x + y)^2 = 1521$$

Extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros.

$$4x + y = \pm\sqrt{1521}$$

Substituindo y (2) por $4x + 15$ tem-se

$$4x + 4x + 15 = \pm 39$$

ou

$$8xz - 15 \pm 39$$

Dahi

$$x = \frac{-15 \pm 39}{8}$$

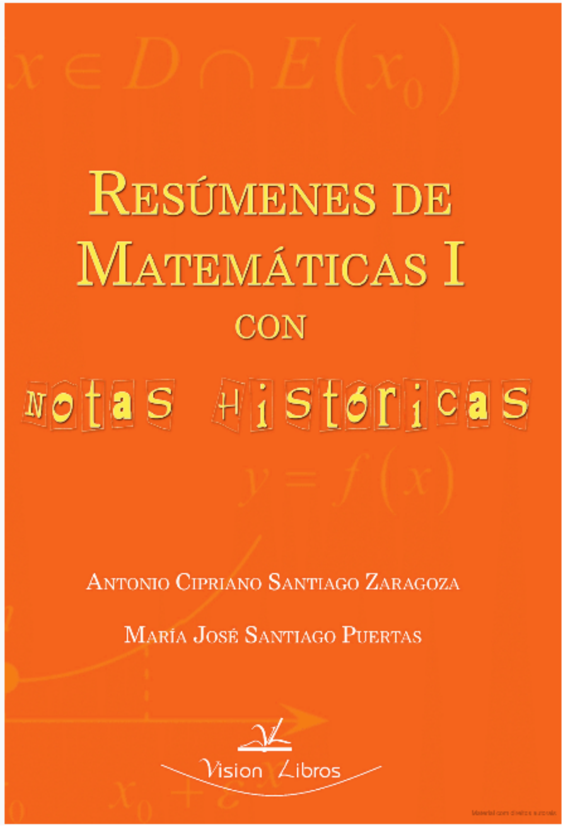
e portanto

$$x' = \frac{-15 + 39}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

e

$$x'' = \frac{-15 - 39}{8} = \frac{-54}{8} = -\frac{27}{4}$$

Zaragoza A C. S e Puertas M. J. S., **Resumenes de matemática I con notas históricas**, 2011



Para resolver la ecuación $x^2 - 10x = -9$, el matemático indio **Brahmagupta** (ca. 628 d.C.) propuso también su propio procedimiento.

El matemático árabe **Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi** (s. IX) utilizó la siguiente estrategia para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$. Debes tomar la mitad del número de las raíces, que es 5, y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número, que es 8, y le restas la mitad de las raíces, 5, y obtienes 3, que es el valor buscado.

La fórmula, tal y como la vamos a ver, parece ser obra del matemático hindú **Bhaskara** (1114-1185). Bhaskara escribe su famoso "Siddhanta Siroman" en el año 1150. Este libro se divide en 4 partes, Lilavati (aritmética), Vijaganita (álgebra), Goladhyaya (globo celestial), y Grahaganita (matemáticas de los planetas). La mayor parte del trabajo de Bhaskara en el Lilavati y Bijaganita procede de matemáticos anteriores, pero los sobrepasa sobre todo en la resolución de ecuaciones. Es aquí, donde aparece la fórmula general que permite resolver una ecuación de segundo grado.

1. IGUALDADES Y ECUACIONES

Las expresiones compuestas de dos miembros enlazados por el signo = se llaman **igualdades**, y ponen de manifiesto la equivalencia entre distintos conceptos, descubriendo con ellas aspectos nuevos de una misma realidad.

Las igualdades en las que en sus miembros aparecen expresiones algebraicas que sólo se satisfacen para un conjunto de valores reales se llaman **ecuaciones**.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$ax + b = 0$$

(también llamadas lineales), donde x es la variable o incógnita y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

Método general de resolución

1.- **Quitar los paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva (es decir, el número o expresión algebraica que está fuera del paréntesis, multiplica a todos los sumandos que hay dentro del paréntesis)

2.- **Eliminar los denominadores**. Para ello se reducen todas las fracciones a común denominador (calculando el m.c.m.), y una vez que todas las fracciones tienen igual denominador, se quita éste, teniendo cuidado con los signos que hay delante de las fracciones.

Es posible que haya que volver a **quitar paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva como antes.

3.- **Agrupar.** Llevamos a uno de los dos miembros todos los términos que tienen "x" y al otro todos los números (cuando un término cambia de miembro, también cambia de signo).

4.- **Operar.** Realizamos las operaciones.

5.- **Despejar.** El coeficiente de "x" pasa dividiendo (con el signo que tenga) al otro miembro de la ecuación.

3. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(también llamadas cuadráticas), donde x es la incógnita y $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

Recuerda que cualquier ecuación de segundo grado (completa o incompleta) se puede transformar en una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ [1], cuyas soluciones vienen dadas por la fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ANEXO 2 – RELAÇÃO DE LIVROS PESQUISADOS QUE NÃO APRESENTAVAM MENÇÃO A BHASKARA

Edições até 1920:

JOSÉ AUGUSTO CORREA, **Resumo de Álgebra.** 1886.

JOSÉ AUGUSTO DA CUNHA, **Elementos de Álgebra**, 8ª Ed. São Paulo, 1902

ANTONIO TRAJANO, **Álgebra Elementar**, 5ª Ed., Rio de Janeiro: Cia Thypográfica do Brasil, 1905.

SEBASTIÃO FRANCISCO ALVES, **Álgebra Elementar.** Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1914.

JOÃO BORGES, GOMES CARDIM, **Elementos de Álgebra.** Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1914.

JORGE WENTWHORT, DAVID EUGENIO SMITH, **Elementos de Álgebra.** Boston: Gynn Company, 1917.

Edições entre 1921 e 1940:

S. L., **Álgebra Elementar Theorica e Prática.** Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1928.

EUCLIDES ROXO, CÉCIL THIRÉ, MELLO E SOUZA, **Curso de Matemática.** Livraria Francisco Alves, 1934.

ALGACYR MUNHOZ MADER, **Lições de Matemática**, 2ª Ed.. São Paulo: Cia Melhoramentos,1940.

Edições entre 1941 e 1960:

EUCLIDES ROXO, HAROLDO LISBOA DA CUNHA, ROBERTO PEIXOTO, CESAR DACORSO NETO, **Matemática 2º Ciclo.** Livraria Francisco Alves, 1943.

ALMEIDA, CASTANHO, FARAH, CASTRUCCI, **Matemática.** São Paulo: Ed. do Brasil, 1944.

LÉO BONFIM, **Matemática.** São Paulo: Ed. Clássico Científica, 1950.

CARLOS GALANTE, OSWALDO MARCONDES DOS SANTOS, **Matemática 4ª Série.** São Paulo: Ed. do Brasil, 1954.

TROTTA, J. **Matemática de aluno para aluno – 4ª série.** Nova Friburgo, 1955

IRMÃOS MARISTAS, **Matemática 4ª Série.** São Paulo: Ed. FTD, 1957.

Edições entre 1961 e 1980:

SCIPIONE DI PIERRO NETO, **Matemática Moderna.** São Paulo: Inst. Brasileiro de Edições Pedagógicas, 19??.

ARY QUINTELA, **Matemática 4ª Série,** 56ª Ed. São Paulo: Cia Editora Nacional, 1965.

CECIL THIRÉ, **Manual de Matemática.** Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1965.

HERNANI TORNEL VON-SOHSTEN, **Matemática 10.** Rio de Janeiro: Ed. Tornel, 1968.

AGRÍCOLA BETHLEM, **Matemática Moderna**, Rio de Janeiro: Distribuidora Record, 1969.

ANTONIO MARMO DE OLIVEIRA, **Matemática Moderna.** Ed. Irradiante, 1970.

ARY QUINTELA, **Matemática 4ª Série.** São Paulo: Cia Editora Nacional, 1971.

OMAR CATUNDA, **Ensino Atualizado de Matemática.** São Paulo: Edart, 1971.

HENRIQUE MORANDI, **Matemática Método Moderno**, Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1971.

SCIPIONE DI PIERRO NETO, **Matemática da Escola Renovada.** São Paulo: Ed Saraiva, 1972.

SCIPIONE, MUNHOZ, NANO, IKIEZAKI, VIEIRA. **Trabalho Dirigido no Ensino de Matemática.** São Paulo: Ed Saraiva, 1972. LUIZ DE OLIVEIRA XAVIER, **Novíssima Enciclopédia Ilustrada do Ensino de Primeiro Grau.** São Paulo: Ed. Formar, 1973.

MIGUEL ASSIS NAME, **Matemática Ensino Moderno.** São Paulo: Ed. do Brasil, 1974.

SCIPIONE DI PIERRO NETO, CÉLIA CONTIN GOÉS, **Matemática da Escola Renovada.** São Paulo: Ed Saraiva, 1974.

SYLVIO ANDRAUS, UDMIR P. SANTOS, **Matemática 1º Grau.** São Paulo: Ed Atual, 1977.

DOMÊNICO, LAGO, ENS, **Matemática Moderna**. São Paulo: Inst. Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1980.

BENEDITO CASTRUCCI, RONALDO G. PERETI, JOSÉ R. GIOVANNI, **Pelos Caminhos da Matemática.** São Paulo: Ed. FTD, 1980.

Edições entre 1981 e 2012:

ANTONIO JOSÉ LOPES, **Matemática Atual.** São Paulo: Ed. Atual, 1994.

BENIGNO BARRETO FILHO, **Matemática aula por aula.** São Paulo: FTD, 2002.

ALCEU S. MAZIERO, PAULO ANTONIO F. MACHADO. **Descobrindo e Aplicando a Matemática**. Belo Horizonte: Ed. Dimensão, 2012.

ÁLVARO ANDRINI, MARIA JOSÉ VASCNCELOS, **Praticando Matemática.** São Paulo: Ed. do Brasil, 2012.