
Caracterização e localização dos pontos notáveis
do triângulo

Elvis Donizeti Neves

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Caracterização e localização dos pontos notáveis do triângulo

Elvis Donizeti Neves

Orientador: Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Abril de 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N499c Neves, Elvis Donizeti
 Caracterização e Localização dos Pontos Notáveis
 do Triângulo / Elvis Donizeti Neves; orientador
 Hermano de Souza Ribeiro. -- São Carlos, 2013.
 71 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
 em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
 Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
 Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

 1. Triângulos. 2. Sistema Cartesiano. 3. Números
 Complexos. 4. Pontos Notáveis do Triângulo. I.
 Ribeiro, Hermano de Souza, orient. II. Título.

Dedico esta dissertação à minha amada esposa, à minha irmã, minha mãe e aos meus sogros, com amor, carinho e gratidão por todo o apoio.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, por me sustentar em todo o tempo e me capacitar.

- À minha amada esposa Cecília, por me alavancar nos momentos mais difíceis, por exigir sempre o meu melhor e por me mostrar como tirar grandes lições dos momentos difíceis que por vezes assolam nossas vidas.

- À minha querida irmã Letícia, que sempre me acompanhou e apoiou todas as minhas iniciativas.

- À minha mãe Luiza e aos meus sogros Marta e Militão, pelo auxílio emocional e incentivo.

- Ao Prof.^o Dr. Hermano de Souza Ribeiro, por compartilhar comigo sua magnífica experiência e conhecimento, pela orientação e confiança, pelo constante apoio, e, sobretudo, pela sua amizade.

- Ao pessoal do mestrado, turma de 2011.

- E a todos os meus amigos que colaboraram para a realização deste trabalho.

“A matemática é o alfabeto pelo qual Deus escreveu o universo.”

Galileo Galilei (1564–1642) – tradução própria

RESUMO

NEVES, E. D. **Caracterização e localização dos pontos notáveis do triângulo**. 2013. 71f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013

O ensino de Matemática é, de modo geral, orientado pelos processos contidos nos livros didáticos. Sendo assim, a organização dos conceitos matemáticos nesses livros deveria ser capaz de permitir ao leitor interpretar a Matemática em sua essência, admitindo o estabelecimento de relações entre os conteúdos. No entanto, o que geralmente se observa nos materiais é um aglomerado de definições e conceitos desconexos que conduzem o leitor a dificuldades de aprendizado na área. Por essa razão, a presente dissertação teve o objetivo principal de localizar, além de caracterizar, os pontos notáveis do triângulo: o centróide ou baricentro (G), o ortocentro (H), o circuncentro (O), o centro (N) da circunferência de nove pontos, os três ex-centros das circunferências ex-inscritas, as projeções ortogonais dos vértices sobre os lados opostos e os pontos de tangência da circunferência inscrita e ex-inscrita. Quatro abordagens são apresentadas em busca de tal objetivo: a-) apresentar a geometria do triângulo segundo técnicas de percepção visual; b-) caracterizar alguns pontos notáveis do triângulo, como pontos de máximo ou de mínimo de funções com as demonstrações utilizando desigualdade de Cauchy-Schwarz e entre média aritmética e geométrica; c-) utilizar um sistema cartesiano adequado para o cálculo das abscissas e ordenadas do centróide (G), do ortocentro (H) e do circuncentro (O) de um triângulo; d-) utilizar os números complexos para a completa localização de todos os pontos notáveis do triângulo além de apresentar a equação da reta de Euler, o incentro (I) e os três ex-centros I_A , I_B e I_C localizados em fórmulas simples. A dissertação finaliza com o Teorema de Feuerbach, apresentado com uma prova elementar, mostrando que a circunferência de nove pontos e a circunferência inscrita são tangentes internamente e que a circunferência dos nove pontos é tangente exteriormente a cada uma das três ex-circunferências e o Teorema de Napoleão, no qual os baricentros de triângulos equiláteros, construídos a partir dos lados de um triângulo qualquer, formam um outro triângulo equilátero. Comparando as várias abordagens da dissertação, a conclusão é a de que a compreensão dos números complexos paradoxalmente simplifica a resolução de problemas de geometria plana e a solução de equações polinomiais. Assim, acredita-se que uma maior exploração desse conteúdo no ensino da Matemática poderia tornar o aprendizado mais atraente e simplificado.

Palavras-chave: triângulos, sistema cartesiano, números complexos, pontos notáveis do triângulo.

ABSTRACT

NEVES, E. D. **Characterization and location of the notable points of the triangle.** 2013. 71f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013

The teaching of Mathematics is generally guided by the procedures contained in the textbooks. Thus, the organization of the mathematical concepts in these books should be able to allow the reader to interpret the Mathematics in its essence, admitting the establishment of relationships between the contents. However, what is observed in the materials is a conglomeration of disparate definitions and concepts that lead the reader to learning difficulties in the area. For this reason, this work aimed to locate and characterize the notable points of the triangle: the centroid or barycenter (G), the orthocenter (H), the circumcenter (O), the center (N) of circumference of nine points, three former centers of the ex-inscribed circles, orthogonal projections of the vertices on the opposite sides and the points of tangency of the inscribed and the ex-inscribed circumference. Four approaches are presented to achieve these goals: a-) to introduce the geometry of the triangle using visual perception techniques, b-) to characterize some notable points of the triangle, as points of maximum or minimum of functions with the demonstrations using the Cauchy-Schwarz inequality and between the arithmetic and geometric mean;-c) to use a suitable Cartesian system for calculating the abscissas and ordinates of the centroid (G), of orthocenter (H) and of the circumcenter (O) of a triangle;-d) to use complex numbers for the complete location of all notable points of the triangle, beyond depicting the Euler equation of the line, the incenter (I) and the three former centers I_A , I_B and I_C located in simple formulas. The work is concluded with the Feuerbach's Theorem, presented with an elementary proof, showing that the nine-point circle and the incircle is tangent internally and that the circumference of the nine points is externally tangent to each of the three ex-inscribed circles and the Napoleon's Theorem, in which the barycenters of equilateral triangles, constructed from the sides of any triangle, form another equilateral triangle. Comparing the approaches detached hitherto, the conclusion is that the understanding of complex numbers paradoxically simplifies troubleshooting of plane geometry and the solution of polynomial equations. Thus, it is believed that further exploration of this content in mathematics education could make learning more attractive and simplified.

Keywords: triangles, Cartesian system, complex numbers, notable points of the triangle.

SUMÁRIO

Introdução	13
1 Demonstrações Sucintas das Fórmulas da Geometria do Triângulo	19
2 Os Pontos Notáveis De Um Triângulo	29
2.1 Caracterização do Incentro (I) do Triângulo ABC como ponto de máximo	30
2.2 Caracterização do Incentro (I) do Triângulo ABC como ponto de mínimo	32
2.3 Caracterização do Centróide (G) do Triângulo ABC como ponto de máximo	33
3 Coordenadas Cartesianas Dos Pontos Notáveis De Um Triângulo	37
3.1 Cálculo das Distâncias entre os Pontos Colineares – Ortocentro, Circuncentro e Centróide	43
4 Os Pontos Notáveis De Um Triângulo Como Números Complexos	47
4.1 <i>Condição de Alinhamento de Três Pontos (A, B, C) no Plano Complexo com Coordenadas $A(X_a, Y_a)$, $B(X_b, Y_b)$ e $C(X_c, Y_c)$</i>	48
4.2 Equação da Reta Mediatriz dos Números Complexos Distintos A e B	50
4.3 Equação do Feixe de Retas Perpendiculares no Plano Complexo a Uma Reta Dada r	50
4.4 O Teorema da Circunferência de Nove Pontos	53
4.5 Equação da Reta Determinada por dois Números Complexos Distintos A e B	57
4.6 Equações no Plano Complexo das Retas Notáveis do Triângulo Determinado Por Três Números Complexos Distintos e Não Colineares A, B e C	58
4.7 Equações das Três Bissetrizes Internas e das Três Bissetrizes Externas do Triângulo Determinado Por Três Números Complexos Não Colineares Distintos A^2 , B^2 e C^2	60
4.8 Teorema de Feuerbach	64
4.9 Teorema de Napoleão	67
5 Conclusões	69
6 Referências	71

1 Introdução

No âmbito escolar atual, o ensino de Matemática para alunos do Ensino Fundamental e Médio é considerado, de modo geral, bastante problemático, uma vez que resultados insatisfatórios têm sido registrados pelo sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP¹) e pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB²) nos últimos anos. Isso ocorre em grande parte devido à organização dos conteúdos nos livros didáticos e materiais apostilados, que muitas vezes propiciam aos alunos um caminho errôneo de interpretação da Matemática por não apresentarem relações entre os conteúdos. Desenvolvidos para facilitar o ensino de Matemática, estes materiais acabam por fragmentá-la, tornando-a um aglomerado de definições desconexas.

Preocupada com o ensino da Matemática no Estado de São Paulo, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo lançou uma Proposta Curricular reformulada³, cuja divisão dos conteúdos pode ser visualizada nas Tabelas 1 e 2, para o ensino fundamental – Ciclo II e para o Ensino Médio, respectivamente. Embora tal divisão seja bem abrangente, um dos conteúdos, a saber, a Geometria, poderia ser mais bem explorada e relacionada com outras áreas do conhecimento. Pesquisas sobre o aprendizado de Geometria constatam que essa é uma área da Matemática que apresenta resultados consideravelmente insatisfatórios, uma vez que é menos explorada do que outras áreas da matemática, tal como a Álgebra, não somente nas séries iniciais da Educação básica, mas também no Ensino fundamental – Ciclo II e no Ensino Médio. Além disso, como pode ser verificado nas Tabelas 1 e 2, a Geometria, é muitas vezes, abordada sem integração com outros conteúdos matemáticos, dificultando o estabelecimento de relações entre eles⁴⁻⁶.

Porém, isto tem mudado com a implantação do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD).

Tabela 1. Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Fundamental (Ciclo II), segundo a Proposta Curricular para o Estado de São Paulo³.

	5ª SÉRIE	6ª SÉRIE	7ª SÉRIE	8ª SÉRIE
1º B I M E S T R E	Números naturais <ul style="list-style-type: none"> • Múltiplos e divisores. • Números primos. • Operações básicas (+, -, x, ÷) • Introdução às potências. Frações <ul style="list-style-type: none"> • Representação. • Comparação e ordenação. • Operações. 	Sistemas de numeração <ul style="list-style-type: none"> • Sistemas de numeração na Antiguidade. • Sistema posicional decimal. Números negativos <ul style="list-style-type: none"> • Representação. • Operações. Números racionais <ul style="list-style-type: none"> • Representação fracionária e decimal. • Operações com decimais e frações (complementos). 	Números racionais <ul style="list-style-type: none"> • Transformação de decimais finitos em frações. • Dízimas periódicas e fração geratriz. Potenciação <ul style="list-style-type: none"> • Propriedades para expoentes inteiros. • Problemas de contagem. 	Números reais <ul style="list-style-type: none"> • Conjuntos numéricos. • Números irracionais. • Potenciação e radiciação em \mathbb{R}. • Notação científica.
2º B I M E S T R E	Números decimais <ul style="list-style-type: none"> • Representação. • Transformação em fração decimal. • Operações. Sistemas de medida <ul style="list-style-type: none"> • Medidas de comprimento, massa e capacidade. • Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade. 	Geometria <ul style="list-style-type: none"> • Ângulos. • Polígonos. • Circunferência. • Simetrias. • Construções geométricas. • Poliedros. 	Expressões algébricas <ul style="list-style-type: none"> • Equivalências e transformações. • Produtos notáveis. • Fatoração algébrica. 	Álgebra <ul style="list-style-type: none"> • Equações do 2º grau: resolução e problemas. Funções <ul style="list-style-type: none"> • Noções básicas sobre função. • A ideia de variação. • Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º B I M E S T R E	Formas geométricas <ul style="list-style-type: none"> • Formas planas. • Formas espaciais. Perímetro e área <ul style="list-style-type: none"> • Unidades de medida. • Perímetro de uma figura plana. • Cálculo de área por composição e decomposição. • Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas. 	Proporcionalidade <ul style="list-style-type: none"> • Variação de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. • Conceito de razão. • Porcentagem. • Razões constantes na geometria: π. • Construção de gráficos de setores. • Problemas envolvendo probabilidade. 	Equações <ul style="list-style-type: none"> • Resolução de equações de 1º grau. • Sistemas de equações e resolução de problemas. • Inequações do 1º grau. Gráficos <ul style="list-style-type: none"> • Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano. 	Proporcionalidade na geometria <ul style="list-style-type: none"> • O conceito de semelhança. • Semelhança de triângulos. • Razões trigonométricas.
4º B I M E	Estatística <ul style="list-style-type: none"> • Leitura e construção de gráficos e tabelas. • Média aritmética. • Problemas de contagem. 	Álgebra <ul style="list-style-type: none"> • Uso de letras para representar um valor desconhecido. • Conceito de equação. • Resolução de 	Geometria <ul style="list-style-type: none"> • Teorema de Tales. • Teorema de Pitágoras. • Área de polígonos. • Volume do prisma. 	Corpos redondos <ul style="list-style-type: none"> • O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo.

S T R E		equações. • Equações e problemas.		• Volume e área do cilindro. Probabilidade • Problemas de contagem e introdução à probabilidade.
----------------------------	--	--------------------------------------	--	---

Tabela 2. Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Fundamental, segundo a Proposta Curricular para o Estado de São Paulo³.

	1ª Série	2ª Série	3ª Série
1º B I M E S T R E	Números e sequências • Conjuntos numéricos. • Regularidades numéricas: sequências. • Progressões aritméticas e progressões geométricas.	Trigonometria • Fenômenos periódicos. • Funções trigonométricas. • Equações e inequações. • Adição de arcos.	Geometria analítica • Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos. • Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares. • Ponto e reta: distância. • Circunferência: equação. • Reta e circunferência: posições relativas. • Cônicas: noções e aplicações.
2º B I M E S T R E	Funções • Relação entre duas grandezas. • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado. • Função de 1º grau. • Função de 2º grau.	Matrizes, determinantes e sistemas lineares • Matrizes: significado como tabelas, características e operações. • A noção de determinante de uma matriz quadrada. • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento.	Equações algébricas e números complexos • Equações polinomiais. • Números complexos: operações e representação geométrica. • Propriedades das raízes de uma equação polinomial. • Relações de Girard.
3º B I M E S T R E	Funções exponencial e logarítmica • Crescimento exponencial. • Função exponencial: equações e inequações. • Logaritmos: definição e propriedades. • Função logarítmica: equações e inequações.	Análise combinatória e probabilidade • Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo. • Probabilidade simples. • Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações. • Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos. • Probabilidade condicional. • Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.	Estudo das funções • Qualidades das funções. • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomial. • Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação. • Composição: translações e reflexões. • Inversão.
4º B I M	Geometria-Trigonometria • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição	Geometria métrica espacial • Elementos de geometria de posição. • Poliedros, prismas e pirâmides.	Estatística • Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos. • Medidas de tendência central: média, mediana e moda.

E S T R E	e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos cossenos.	• Cilindros, cones e esferas.	• Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão. • Elementos de amostragem.
-----------------------	---	-------------------------------	---

Por essa razão, na presente dissertação, procurei reunir em um volume único demonstrações de teoremas associados aos pontos notáveis de um triângulo no plano cartesiano e também no plano dos complexos. O plano cartesiano é vastamente utilizado em diferentes áreas da Matemática e por isso começo introduzindo, no Capítulo 1, alguns resultados clássicos da geometria do triângulo segundo técnicas de percepção visual; para completude, um elenco de fórmulas são mostradas. Em seguida, no Capítulo 2, caracterizo alguns pontos notáveis do triângulo, como pontos de máximo ou de mínimo de funções com as demonstrações utilizando desigualdade de Cauchy-Schwarz e entre média aritmética e geométrica. No Capítulo 3, utilizo um sistema cartesiano adequado para o cálculo das abscissas e ordenadas do centróide (G), do ortocentro (H) e do circuncentro (O) de um triângulo. No Capítulo 4, utilizo os números complexos para a completa localização de todos os pontos notáveis do triângulo além de apresentar a equação da reta de Euler, o incentro (I) e os três ex-centros I_A , I_B e I_C (de difícil localização no capítulo anterior), que são agora localizados em fórmulas simples. Finalizo o trabalho com os Teoremas de Feuerbach e de Napoleão, apresentando-o com uma prova elementar, mostrando que a circunferência de nove pontos e a circunferência inscrita são tangentes internamente e que a circunferência dos nove pontos é tangente exteriormente a cada uma das três circunferências ex-inscritas. Para maiores informações referentes aos desenvolvimentos matemáticos apresentados aqui, segure-se consultar as referências [7] a [11].

A geometria com os números complexos, embora estudada, fica geralmente restrita a apenas um tópico apresentado no segundo bimestre da proposta curricular da 3ª série do Ensino Médio (ver Tabela 2). A aplicação dos números complexos pode ser vista em geometria, de modo que seu ensino pode ser simplificado se essa aplicação for mais bem explorada com os alunos, uma vez que a contextualização da matemática é fator decisivo na sua aprendizagem.

Vale ressaltar que uma das vantagens em se utilizar os números complexos é que as fórmulas dos pontos encontrados são mais simples em relação aos pontos encontrados no sistema cartesiano. A simplicidade dos números complexos tornam as demonstrações mais claras e rápidas.

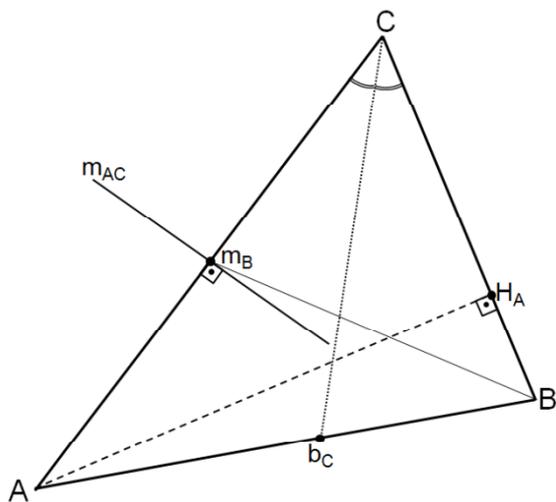
É possível utilizar as ferramentas da geometria analítica e das variáveis complexas para facilitar o entendimento do estudo de geometria plana, particularmente o estudo de triângulos?

CAPÍTULO 1

1 Demonstrações sucintas das fórmulas da geometria do triângulo

Neste capítulo apresentaremos os pré-requisitos que serão utilizados nos capítulos seguintes e alguns resultados relacionados com a geometria do triângulo.

Neste trabalho serão adotadas as seguintes notações:



(ABC) – área do triângulo ΔABC

H_X – altura referente ao vértice X

m_{XY} – mediatriz do lado XY

m_X – mediana relativa ao vértice X

b_X – bissetriz interna do vértice X

x – medida do lado oposto ao vértice X

p – semi perímetro do triângulo

\hat{X} – ângulo interno do vértice X

Figura 1. Alguns elementos de um triângulo.

LEI DOS COSSENOS

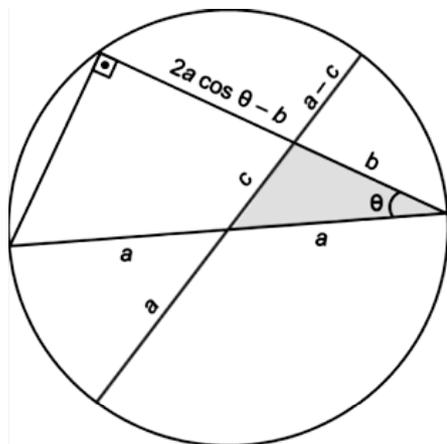


Figura 2. Triângulo inscrito na circunferência.

Utilizando a potência de ponto, temos

$$(2a \cos \theta - b)b = (a - c)(a + c)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

LEI DOS SENOS

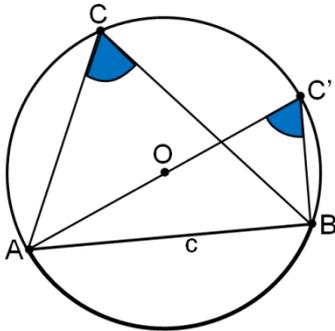


Figura 4. Triângulo ΔABC e triângulo retângulo $\Delta ABC'$.

$$\text{sen } C' = \frac{c}{2R}, \text{ como } C \equiv C'$$

$$2R = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Analogamente,

$$2R = \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

LEI DAS TANGENTES

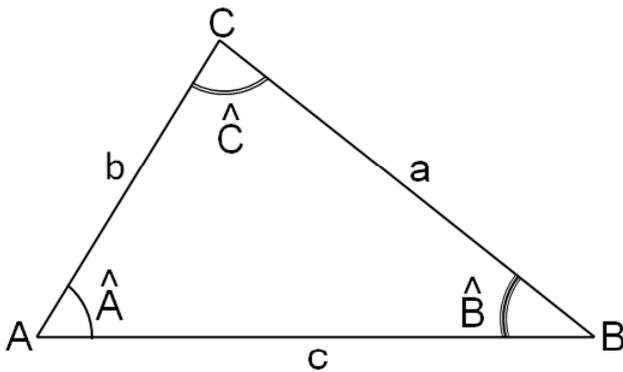


Figura 5. Triângulo ΔABC , com ângulos internos.

Usando a lei dos senos,

$$\frac{a + b}{\text{sen } \hat{A} + \text{sen } \hat{B}} = \frac{a - b}{\text{sen } \hat{A} - \text{sen } \hat{B}}$$

Pelas Relações de Prostaferese,

obtemos,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tg}\left(\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)}$$

TEOREMA DE STEWART

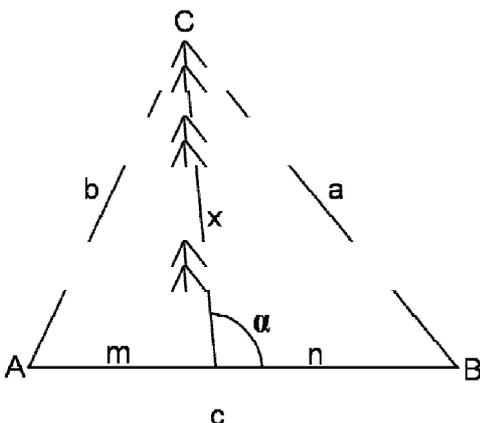


Figura 6. Triângulo ΔABC com ceviana.

Utilizando a lei dos cossenos:

$$b^2 = m^2 + x^2 + 2mx \cdot \text{cos } \alpha \quad (I)$$

$$a^2 = n^2 + x^2 - 2nx \cdot \text{cos } \alpha \quad (II)$$

multiplicando (I) por n, (II) por m e somando

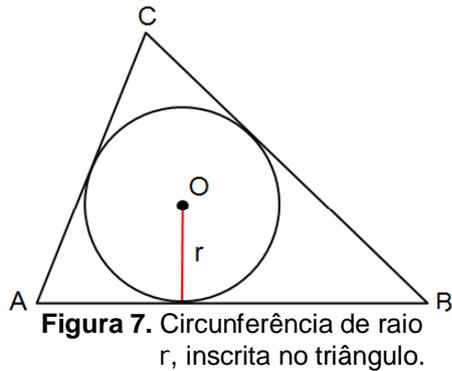
obtem-se,

$$b^2n + a^2m - x^2c = mnc$$

ÁREAS DE TRIÂNGULOS

1º caso - Circunferência de raio r inscrita no triângulo ΔABC

Construindo os triângulos, ΔAOB , ΔBOC e ΔCOA , suas respectivas áreas são:

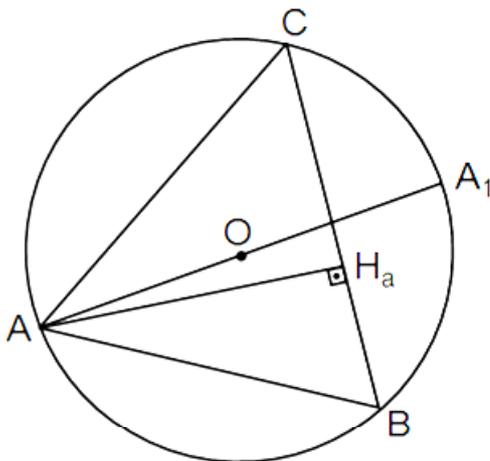


$$\frac{c \cdot r}{2}; \frac{a \cdot r}{2} \text{ e } \frac{b \cdot r}{2}$$

assim,

$$(ABC) = p \cdot r$$

2º caso - Circunferência de raio R circunscrita ao triângulo ΔABC .



$\Delta ABH_a \sim \Delta AA_1C$, caso (AA), então

$$\frac{AB}{AA_1} = \frac{AH_a}{AC}$$

$$AH_a = h_a = \frac{AC \cdot AB}{AA_1} = \frac{BC}{2R}$$

$$(ABC) = \frac{1}{2} ah_a = \frac{abc}{4R}$$

Figura 8. Triângulo ΔABC inscrito na circunferência de diâmetro AA_1

3º caso - Dois lados e o ângulo interno entre eles.

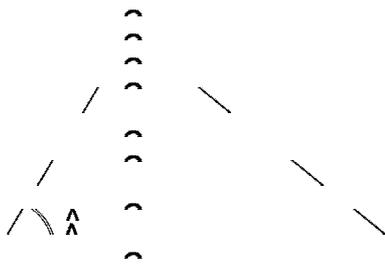


Figura 9. Triângulo ΔABC

A altura do ΔABC em relação ao lado \overline{AB} é:

$$b \operatorname{sen} \hat{A}, \text{ assim,}$$

$$(ABC) = \frac{1}{2} cb \operatorname{sen} \hat{A}$$

4º caso – Em função dos três ângulos internos e um lado do triângulo.

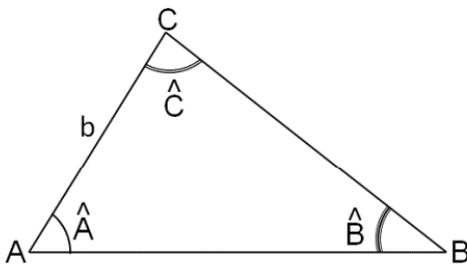


Figura 10. Triângulo ΔABC , com destaque nos ângulos internos

Pela lei dos senos, temos

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

assim:

$$(ABC) = \frac{b^2(\text{sen}\hat{A}\cdot\text{sen}\hat{C})}{2\cdot\text{sen}\hat{B}}$$

5º caso – Em função dos lados – FÓRMULA DE HERON

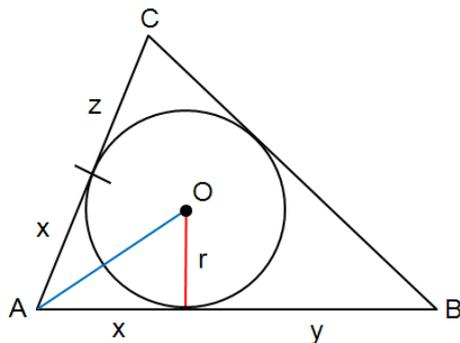


Figura 11. Circunferência inscrita ao triângulo ΔABC .

$$(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Prova:

$$\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} \text{ e } \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$h_c = b \text{sen}\hat{A} = 2b \text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2rx}{r^2 + x^2} \cdot b = \frac{2(x+z)}{r^2 + x^2} \cdot rx$$

$$(ABC) = rp = \frac{1}{2}(x+y)(x+z) \cdot \left(\frac{2rx}{r^2 + x^2}\right)$$

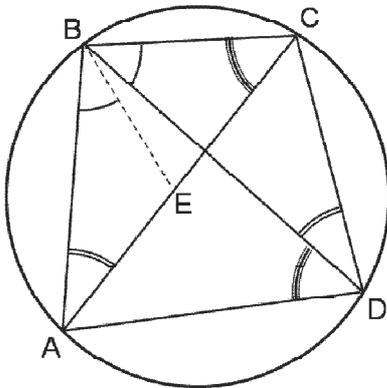
$$p(r^2 + x^2) = x(x+y)(x+z) = x[x(x+y+z) + yz] = x(xs + yz)$$

$$pr^2 + ox^2 = px^2 + xyz$$

$$pr^2 = xyz$$

$$(ABC) = pr = \sqrt{p(pr^2)} = \sqrt{p(xyz)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

TEOREMA DE PTOLOMEU



Quadrilátero ABCD inscrito na circunferência.

Sobre a diagonal AC marca-se um ponto E, de tal forma que $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$.

O teorema é:

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Figura 12. Circunferência circunscrita ao quadrilátero ABCD.

Prova:

$$\triangle ABE \sim \triangle DBC \Rightarrow AE \cdot BD = AB \cdot CD \quad (I)$$

$$\triangle BCE \sim \triangle BDA \Rightarrow CE \cdot BD = AD \cdot BC \quad (II)$$

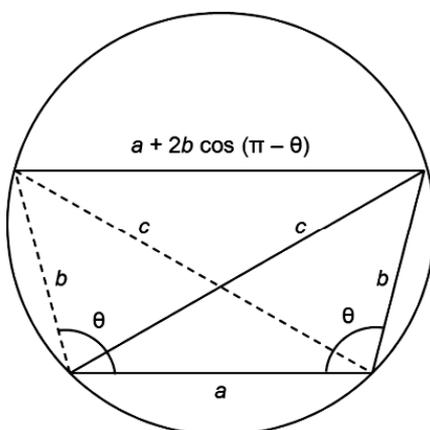
Somando I e II obtemos:

$$BD(AE + CE) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

como $AE + CE = AC$, chega-se a:

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Uma outra maneira de demonstrar da Lei dos Cossenos, é utilizando o Teorema de Ptolomeu:



$$c \cdot c = b \cdot b + (a + 2b \cos(\pi - \theta)) \cdot a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Figura 13. Trapézio isósceles inscrito na circunferência

EQUAÇÃO DE MOLLWEIDE

As duas equações abaixo relacionam os três lados e os três ângulos internos de um triângulo qualquer, sendo conhecidas como Equações de Mollweide.

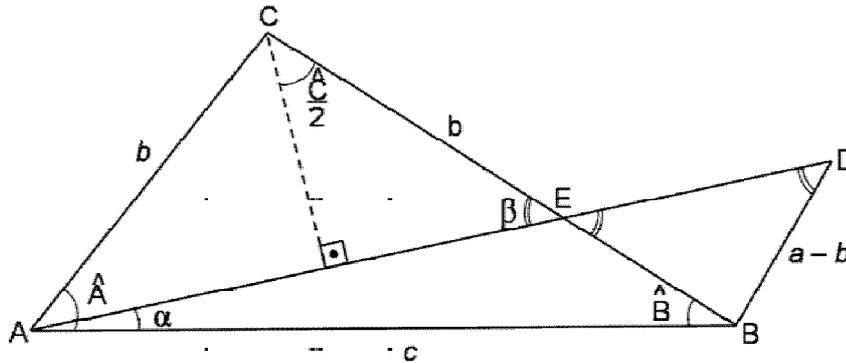


Figura 14. O triângulo ΔABC é o triângulo de “partida” para a demonstração.

A partir do ΔABC construímos um triângulo isósceles ΔACE de base AE . Pelo vértice A , construímos o segmento AD , passando por E , e BD igual a BE , assim:

$$\beta = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \text{ e } \alpha = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}$$

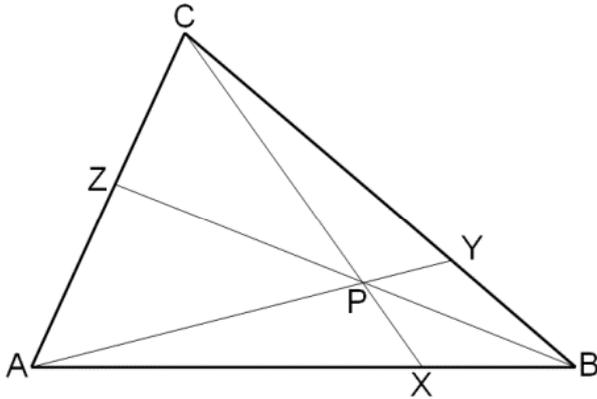
Aplicando a Lei dos senos no triângulo ΔABD , chega-se:

$$(a - b) \cdot \cos\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = c \cdot \sin\left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right)$$

$$(a + b) \cdot \sin\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = c \cdot \cos\left(\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}\right)$$

TEOREMA DE CEVA

Para que três cevianas quaisquer sejam concorrentes a um ponto P é necessário e suficiente que,



$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{XA} \cdot \frac{AZ}{ZA} = 1$$

A demonstração é facilmente verificada usando razões entre as áreas dos triângulos adotando o ponto P como um dos vértices do triângulo. Exemplo:

Figura 15. Ponto P , encontro das cevianas.

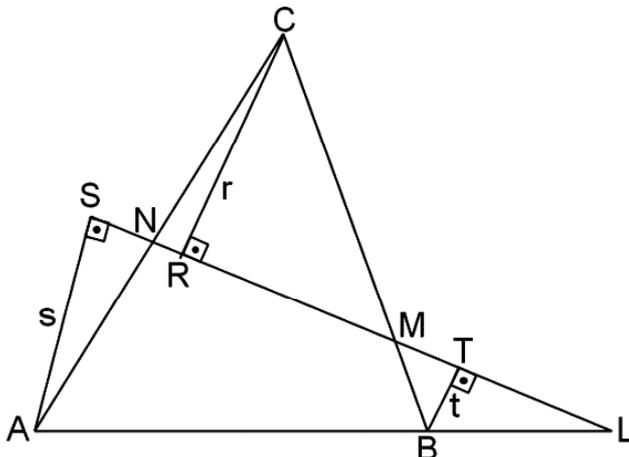
$$\frac{BY}{YC} = \frac{\Delta BPY}{\Delta CPY} = \frac{\Delta BAY - \Delta BPY}{\Delta CA Y - \Delta CPY} = \frac{\Delta APX}{\Delta ACP}$$

De modo análogo as outras razões são encontradas, e chega-se a,

$$\frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{XA} \cdot \frac{AZ}{ZA} = 1$$

TEOREMA DE MENELAU

Se N , M e L são pontos das retas suportes dos lados do triângulo ΔABC e esses pontos são colineares, então é válida a igualdade:



$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$$

Figura 16. Pontos N , M e L são colineares, Pertencem às retas suporte dos lados do triângulo ΔABC

Prova: Os pontos S, R e T são colineares e pertencem à reta que contém os pontos N, M e L. Esses pontos foram determinados pela intersecção da reta perpendicular à reta que contém os pontos M, N e L e que passa pelos vértices do triângulo ΔABC . Usando semelhança de triângulos obtemos:

$$\Delta CRN \sim \Delta ASN \Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{CN}{AN} \quad (I)$$

$$\Delta ASL \sim \Delta BTL \Rightarrow \frac{s}{t} = \frac{AL}{BL} \quad (II)$$

$$\Delta BTM \sim \Delta CRM \Rightarrow \frac{t}{r} = \frac{BM}{CM} \quad (III)$$

Multiplicando I, II e III, obtemos:

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{t} \cdot \frac{t}{r} = \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{CM}$$

$$\frac{CN}{AN} \cdot \frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{CM} = 1$$

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

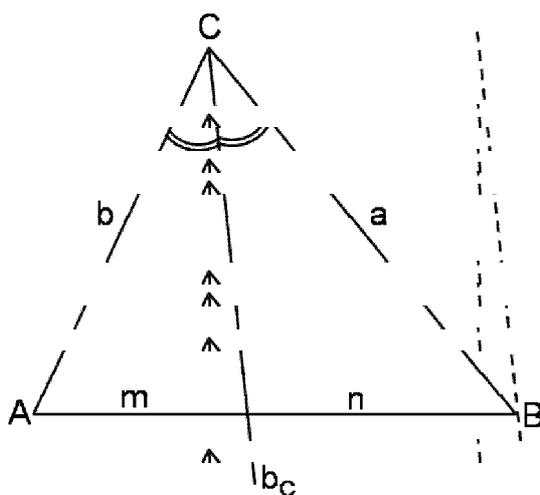


Figura 17. Bissetriz interna de um triângulo

- pelo vértice B do triângulo traça-se uma reta paralela a b_c ;

- constrói-se um triângulo isósceles de lados a , utilizando os vértices B, C e a reta paralela construída anteriormente;

- por fim, utilizando as relações de ângulo de retas paralelas cortadas por uma transversal aplicamos o Teorema de

Tales,

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$$

TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

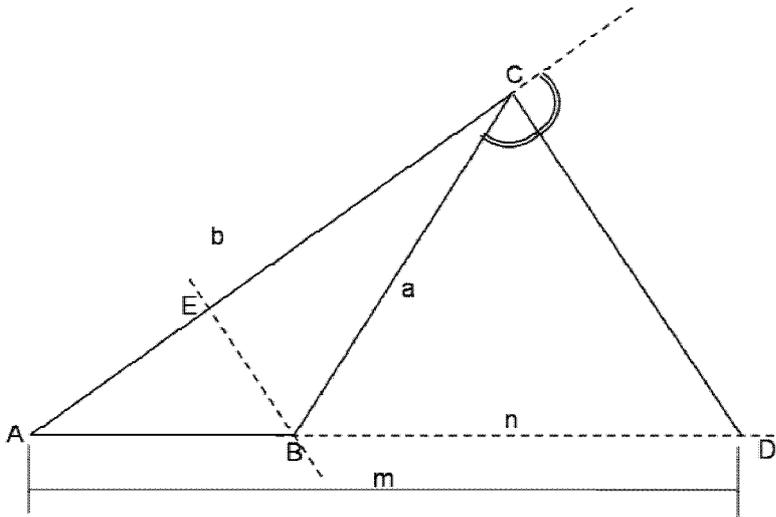


Figura 18. CD é a bissetriz externa do triângulo ΔABC

- a partir do ΔABC , determina-se a bissetriz externo do ângulo \hat{C} ;
- passando por B constrói-se uma paralela a CD;
- por fim, usando as relações angulares das retas paralelas cortadas por uma transversal obtemos que ΔBEC é isósceles e pelo teorema de Tales, obtemos:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{a}$$

CAPÍTULO 2

2 Os Pontos Notáveis de um Triângulo

O objetivo deste capítulo é o de mostrar que os pontos notáveis de um triângulo têm a propriedade de serem pontos de máximo e mínimo de uma dada função entre todos os pontos interiores de uma região triangular. As funções apresentadas nesse capítulo foram retiradas da referência [12].

Para estas demonstrações de máximos e mínimos, não serão utilizadas as ferramentas do cálculo e sim a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que diz:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

Essa desigualdade é válida para qualquer x e y com n elementos.

Demonstração:

Qualquer que seja o real λ , toma-se $(x - \lambda y)$ e tem:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \lambda y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k)^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^n x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n (y_k)^2$$

Independente do valor de λ , o valor sempre será positivo ou igual a zero quando, pois

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \lambda y_k)^2$$

é não negativo

$$\sum_{k=1}^n (x_k)^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^n x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^n (y_k)^2 \geq 0$$

Isso implica que o discriminante seja negativo ou nulo

$$\Delta = \left(2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n (y_k)^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n (x_k)^2 \right) \leq 0$$

Significando que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

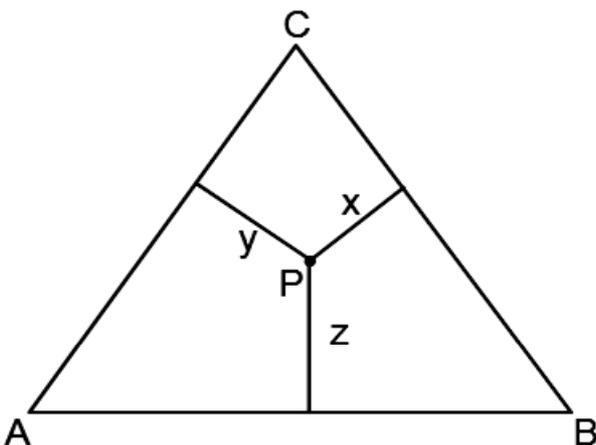
2.1 Caracterização do Incentro (I) do Triângulo ABC como Ponto de Máximo

O incentro (I) do triângulo ABC é definido como o ponto de intersecção das três bissetrizes internas.

O incentro (I) tem a propriedade de ser o ponto cuja soma das três raízes quadradas das três distâncias às arestas de um triângulo equilátero é a máxima da função

$$f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

em que x , y e z são as distâncias de um ponto interno P do triângulo equilátero aos seus lados, pois:



$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Figura 19. Distâncias do ponto P aos lados do triângulo equilátero.

E a validade da igualdade nessa desigualdade acontece no caso de triângulos equiláteros e no caso de P ser o incentro do triângulo.

De fato, pela Desigualdade de Cauchy – Schwarz:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{ax} \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{by} \sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{cz} \sqrt{\frac{1}{c}} \leq \sqrt{ax + by + cz} \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

e a validade da igualdade nesta desigualdade acontece quando,

$$\sqrt{ax} = \sqrt{by} = \sqrt{cz}$$

$$ax + by + cz = 2(ABC) = \frac{abc}{2R}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{abc}{2R}} \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt{2R}} \sqrt{ab + ac + bc}$$

$$ab + ac + bc \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

com igualdade válida no caso $\frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a}{b}$ ou $a = b = c$.

Portanto,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

e a igualdade é válida quando e somente quando $a = b = c$ ou $a^2x = b^2y = c^2z$ ou $x = y = z$

O valor máximo da função $f(x,y,z)$ ocorre no incentro (I) do triângulo equilátero e é igual a $\frac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{2R}}$.

2.2 Caracterização do Incentro (I) do Triângulo ABC como ponto de mínimo

Utilizando um triângulo qualquer, o incentro (I) tem a propriedade de ser o ponto cuja raiz da soma do quociente entre o lado e a sua respectiva distância ao ponto P é a mínima da função

$$g(x, y, z) = \sqrt{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}}$$

em que x, y e z são as distâncias de um ponto P interno do triângulo aos seus três lados,

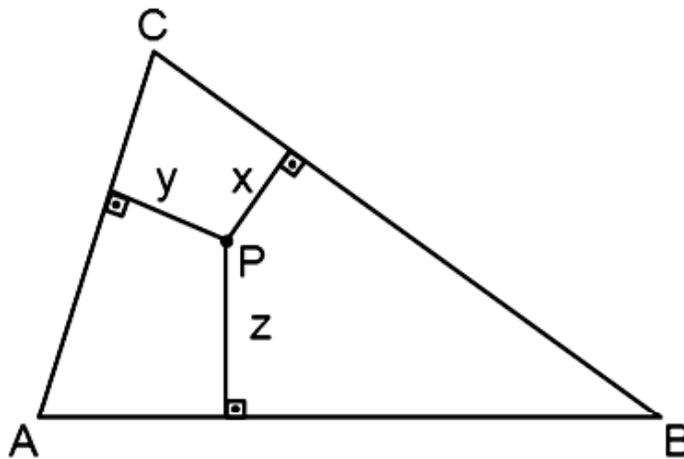


Figura 20. Distâncias do ponto P aos lados do triângulo.

pois a validade da igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$a + b + c = \sqrt{ax} \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by} \sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz} \sqrt{\frac{c}{z}} \leq \sqrt{ax + by + cz} \sqrt{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}}$$

$$\sqrt{ax + by + cz} \sqrt{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}} \leq \sqrt{2(ABC)} \sqrt{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}}$$

acontece quando e somente quando,

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}} \quad \text{ou} \quad x = y = z$$

O valor mínimo da função $g(x, y, z)$

$$\sqrt{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}}$$

ocorre no incentro (I) do triângulo e é igual a:

$$\frac{a + b + c}{\sqrt{2(ABC)}}$$

2.3 Caracterização do Centróide (G) do Triângulo ABC como Ponto de Máximo

O centróide (G) do triângulo ΔABC , é definido como o ponto de intersecção das três medianas do triângulo.

A mediana (m_a) é o segmento de reta cujos extremos são o vértice A e o ponto médio M_a do lado.

O centróide (G) tem a propriedade de ser o ponto de máximo do produto das três distâncias de um ponto interno às arestas do triângulo da função simétrica

$$f(x, y, z) = xyz$$

em que x, y e z indicam distâncias de um ponto interno do triângulo aos lados BC , AC e AB do triângulo respectivamente, isto é, entre todos os pontos internos do triângulo, o centróide tem a propriedade de maximizar o produto de suas três distâncias aos lados do triângulo.

De fato,

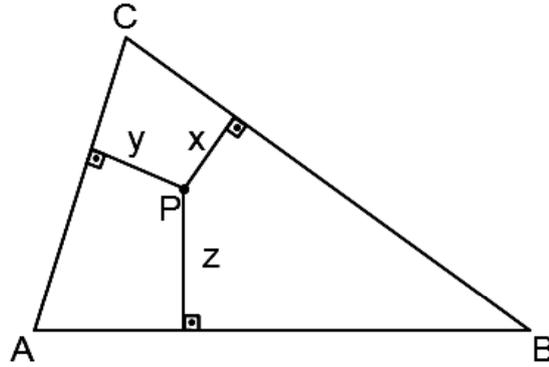


Figura 21 – Ponto P interno ao triângulo

a desigualdade entre médias aritmética e geométrica nos diz que

$$\sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \leq \frac{ax + by + cz}{3} = \frac{2(ABC)}{3}$$

ou

$$xyz \leq \frac{8(ABC)^3}{27 abc}$$

A igualdade ocorre quando e somente quando

$$ax = by = cz$$

ou equivalentemente que o ponto de máximo de $f(x, y, z)$ é o centróide (G) do

triângulo e o valor máximo é $\frac{8(ABC)^3}{27 abc}$, de fato,

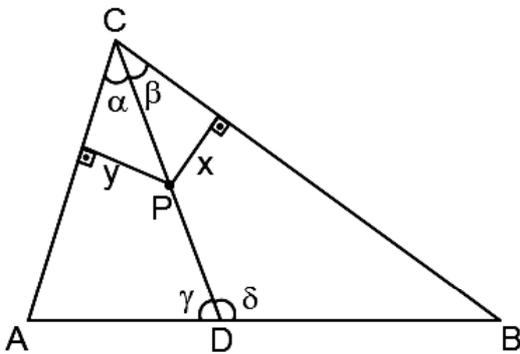


Figura 22 – Relação entre os ângulos da mediana de um triângulo e o ponto P.

$$\frac{\text{sen } \gamma}{b} = \frac{\text{sen } \beta}{AD} = \frac{\text{sen } A}{CD}$$

$$\frac{\text{sen } \delta}{a} = \frac{\text{sen } \alpha}{BD} = \frac{\text{sen } B}{CD}$$

$$b \text{ sen } \beta = AD \text{ sen } \gamma$$

$$a \text{ sen } \alpha = BD \text{ sen } \delta$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{b \text{ sen } \beta}{a \text{ sen } \alpha} = \frac{by/CP}{ax/CP} = \frac{by}{ax}$$

$$\frac{AD}{BD} = 1 = \frac{by}{ax}$$

como $AD = BD$, D pertence à mediana m_a do triângulo e analogamente pertence as outras duas medianas e, portanto, é a intersecção das três medianas.

Assim, o centróide (G) do triângulo ΔABC tem a propriedade de que as suas distâncias x_G , y_G e z_G aos lados do triângulo são inversamente proporcionais às medidas a , b e c dos lados:

$$ax_G = by_G = cz_G$$

CAPÍTULO 3

3 Coordenadas Cartesianas dos Pontos Notáveis de um Triângulo

Nesse capítulo, determinaremos as coordenadas dos pontos notáveis com o triângulo em posição especial, ou seja, um dos vértices se encontra na origem do plano cartesiano e um dos lados está contido no eixo das abscissas e o outro vértice possui coordenadas positivas. Para a determinação das coordenadas dos pontos notáveis do triângulo em qualquer posição será necessário fazer a translação das coordenadas, de modo que esse caso não será abordado no presente trabalho.

Consideraremos um sistema cartesiano de coordenadas cuja origem é um dos vértices do triângulo (no caso da figura o vértice A), cujo eixo das abscissas é a reta suporte de um dos lados do triângulo (no caso da figura o lado AB), de modo que o vértice B tenha abscissa positiva e de modo que o vértice C tenha ordenada positiva:

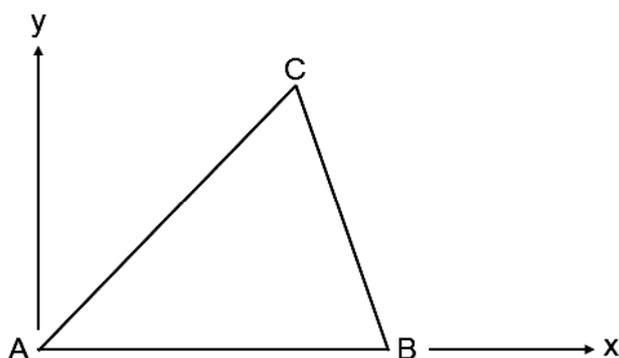


Figura 23 – Posição especial do triângulo no plano cartesiano.

AS COORDENADAS CARTESIANAS DO ORTOCENTRO (H)

O ortocentro (H) é definido como ponto de intersecção das três alturas do triângulo.

$$x_H = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad e \quad y_H = \frac{2(ABC)}{c} + \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{4(ABC)}$$

Prova: Cálculo das coordenadas cartesianas do ortocentro (O).

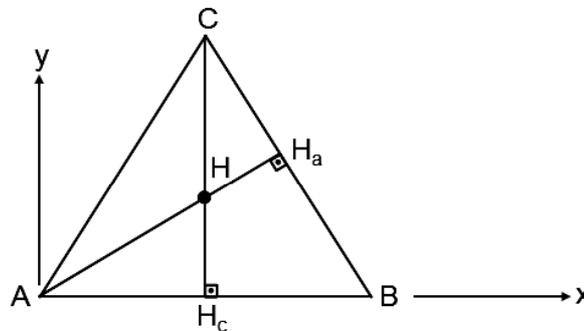


Figura 24. Ponto H encontro das alturas

Pela lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \left(\frac{AH_c}{b} \right) \quad \rightarrow \quad AH_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} = a^2 + c^2 - 2ac \left(\frac{AH_a}{c} \right) \quad \rightarrow \quad AH_a = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AH_a \quad \rightarrow \quad AH_a = \frac{2(ABC)}{a}$$

Em relação aos triângulos semelhantes – $\Delta ABH_a \sim \Delta AHH_c$

$$\frac{BH_a}{AH_a} = \frac{HH_c}{AH_c}$$

$$HH_c = \frac{AH_c \cdot BH_a}{AH_a}$$

$$HH_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{a}{2(ABC)}$$

$$HH_c = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 - b^4 + a^2c^2 + c^4 - b^2c^2 - a^4 - a^2c^2 + a^2b^2}{8c(ABC)}$$

$$HH_c = \frac{2a^2b^2 - a^4 - b^4 + c^4}{8c(ABC)} = \frac{16(ABC)^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 2c^4}{8c(ABC)}$$

$$HH_c = \frac{2(ABC)}{c} + \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{4(ABC)}$$

Portanto, as coordenadas do ORTOCENTRO (H) são

$$x_H = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$y_H = \frac{2(ABC)}{c} + \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{4(ABC)}$$

Como mostrado no capítulo 1, é possível com a fórmula de Heron calcular a área de um triângulo apenas com as medidas dos lados. Abaixo, mostramos uma outra maneira de calcular a área do triângulo em função de seus lados:

$$\begin{aligned} 16(ABC)^2 &= \{[(b+c) + a] \cdot [(b+c) - a] \cdot [a - (b-c)] \cdot [a + (b-c)]\} \\ &= [(b+c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b-c)^2] \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

AS COORDENADAS CARTESIANAS DO CENTRÓIDE (G)

$$x_G = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c} \quad e \quad y_G = \frac{2(ABC)}{3c}$$

Retomando o assunto tratado no Capítulo 2, o centróide (G) também é ponto de mínimo da função distância de um ponto interno aos três vértices do triângulo. Seja um triângulo ABC , com o vértice A na origem e o lado AB sobre o eixo das abscissas. Designamos por (d,e) as coordenadas do vértice C .

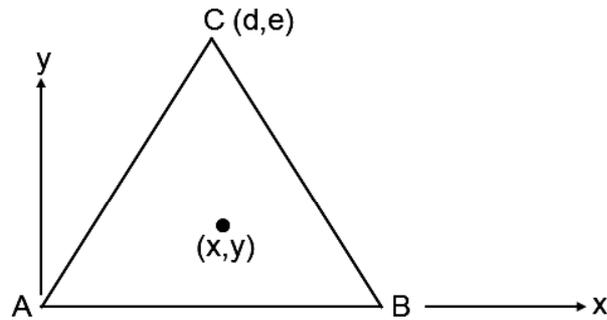


Figura 26 – Triângulo construído no plano cartesiano em posição especial

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + (x-d)^2 + (y-e)^2$$

Desenvolvendo a equação e completando quadrados,obtém-se,

$$f(x,y) = 3\left(x - \frac{c+d}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{e}{3}\right)^2 + c^2 + d^2 + e^2 - \frac{(c+d)^2}{3} - \frac{e^2}{3}$$

Como $c^2 + d^2 + e^2 - \frac{(c+d)^2}{3} - \frac{e^2}{3}$ é constante, verifica-se para que a função seja mínima quando,

$$x = \frac{c+d}{3} \quad e \quad y = \frac{e}{3}$$

AS COORDENADAS CARTESIANAS DO CIRCUNCENTRO (O)

$$x_o = \frac{c}{2} \quad e \quad y_o = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8(ABC)}$$

Passamos agora ao cálculo das coordenadas cartesianas do circuncentro (O)

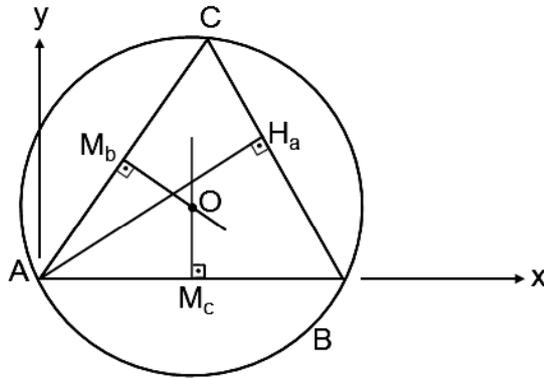


Figura 27. Ponto O , encontro das mediatrizes

$$AH_a = \frac{2(ABC)}{a}$$

Pela lei dos cossenos,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \hat{C} = a^2 + b^2 - 2aCH_a$$

$$CH_a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

em relação aos triângulos semelhantes – $\Delta ACH_a \sim \Delta AOM_c$

$$\frac{AC}{AO} = \frac{AH_a}{AM_c} = \frac{CH_a}{OM_c}$$

$$OM_c = \frac{AM_c \cdot CH_a}{AH_a} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8(ABC)}$$

portanto as coordenadas cartesianas do CIRCUNCENTRO são:

$$x_o = \frac{c}{2}$$

$$y_o = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8(ABC)}$$

3.1 Cálculo das Distâncias entre os Pontos Colineares – Ortocentro, Circuncentro e Centróide

DISTÂNCIA DE ORTOCENTRO (H) A CENTROIDE (G)

$$HG^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2}{9c^2} + \frac{16(ABC)^2}{9c^2} - \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{3} + \frac{a^2b^2c^2}{4(ABC)^2}$$

Prova:

$$\begin{aligned} HG^2 &= \left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} - \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c} \right]^2 + \left[\frac{2(ABC)}{c} + \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{4(ABC)} - \frac{2(ABC)}{3c} \right]^2 \\ HG^2 &= \left(\frac{b^2 - a^2}{3c} \right)^2 + \left[\frac{4(ABC)}{3c} + \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{4(ABC)} \right]^2 \\ &= \frac{(b^2 - a^2)^2}{9c^2} + \frac{16(ABC)^2}{9c^2} - \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{3} + \frac{a^2b^2c^2}{4(ABC)^2} \end{aligned}$$

DISTÂNCIA DE ORTOCENTRO A CIRCUNCENTRO

$$OH^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16(ABC)^2}{4c^2} - \frac{6a^2 + 6b^2 + 3c^2}{4} + \frac{9a^2b^2c^2}{16(ABC)^2}$$

Prova:

$$\begin{aligned} OH^2 &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} - \frac{c}{2} \right)^2 + \left[\frac{2(ABC)}{c} + \frac{c(c^2 - a^2 - b^2)}{4(ABC)} - \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8(ABC)} \right]^2 \\ OH^2 &= \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16(ABC)^2}{4c^2} - \frac{6a^2 + 6b^2 + 3c^2}{4} + \frac{9a^2b^2c^2}{16(ABC)^2} \end{aligned}$$

DISTÂNCIA DE CENTRÓIDE A CIRCUNCENTRO

$$OG^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16(ABC)^2}{36c^2} - \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16(ABC)^2}$$

Prova:

$$OG^2 = \left(\frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c} - \frac{c}{2} \right)^2 + \left[\frac{2(ABC)}{3c} - \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8(ABC)} \right]^2$$

$$OG^2 = \frac{(b^2 - a^2)^2 + 16(ABC)^2}{36c^2} - \frac{2a^2 + 2b^2 + c^2}{12} + \frac{a^2b^2c^2}{16(ABC)^2}$$

Leonard Euler (1707 – 1783), matemático suíço, um dos mais brilhantes da história, descobriu que o ortocentro, o centróide e o circuncentro de um triângulo qualquer são colineares. A reta que contém esses pontos é, por isso, designada *reta de Euler*. O ortocentro, o baricentro e o circuncentro estão alinhados e sempre apresentam a mesma proporção. Essa reta ainda contém o centro da circunferência dos nove pontos, dentre outros pontos.

É válido notar que tendo as coordenadas, é possível verificar a colinearidade entre os pontos G, O e H, que é a reta de Euler, e sua proporção. Então:

$$GH^2 = 4OG^2$$

$$OH^2 = 9OG^2$$

$$d = OG$$

$$GH = 2OG$$

$$OH = 3OG$$

$$OH = 3OG = 2OG + OG = GH + OG$$

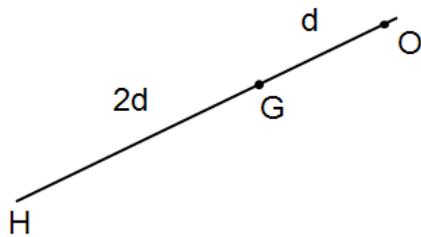


Figura 28. Reta de Euler é a reta determinada pelos pontos colineares G , H e O

Para finalizar este capítulo, vamos apresentar as coordenadas dos pontos sobre os lados do triângulo que estão relacionados com os pontos notáveis. Duas observações que se fazem necessárias são:

- a coordenada do ponto C é (d,e) ; e
- para a determinação das coordenadas das intersecções das bissetrizes com os respectivos lados opostos, a utilização das medidas dos lados do triângulo, a e b , foram necessárias para facilitar a compreensão.

Seja o triângulo ΔABC , na posição especial.

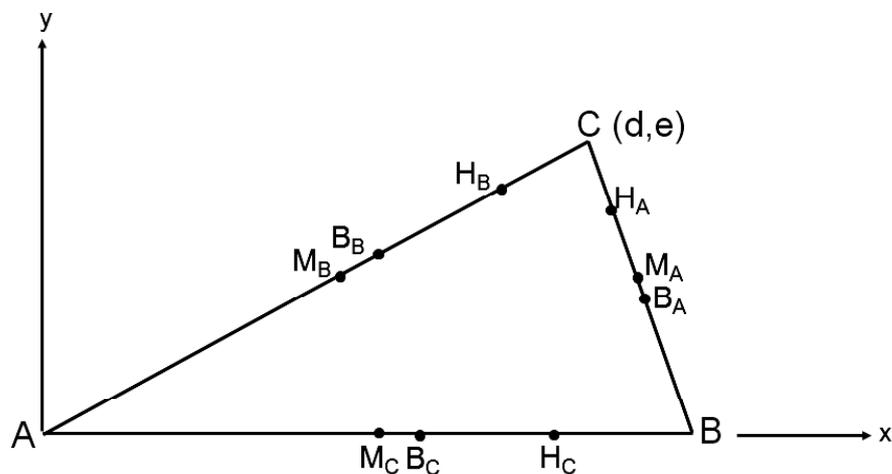


Figura 29. Pontos $H_A, H_B, H_C, M_A, M_B, M_C, B_A, B_B$ e B_C

As coordenadas das intersecções das medianas e dos lados opostos (M_A, M_B e M_C), são as as coordenadas mais simples de se obter. Para isso, basta calcular o ponto médio de cada lado do triângulo.

As coordenadas cartesianas dos pontos médios dos lados são,

$$M_A = \left(\frac{c+d}{2}, \frac{e}{2} \right)$$

$$M_B = \left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2} \right)$$

$$M_C = \left(\frac{c}{2}, 0 \right)$$

Para determinar as coordenadas cartesianas dos pontos de intersecção da bissetriz do ângulo interno e o lado oposto (B_A, B_B e B_C), é necessária a utilização do Teorema das Bissetrizes Internas e uma semelhança de triângulo, nessa última, usando sempre triângulos retângulos formados pelo vértice C e o lado sobre o eixo da abscissa, e triângulos com o vértice na intersecção da bissetriz e o lado oposto e o lado sobre o eixo da abscissa.

As coordenadas são:

$$B_A = \left(\frac{c(b+d)}{b+c}, \frac{ce}{b+c} \right)$$

$$B_B = \left(\frac{cd}{a+c}, \frac{ce}{a+c} \right)$$

$$B_C = \left(\frac{bc}{a+b}, 0 \right)$$

E para determinar as coordenadas dos “pés” destas alturas (H_A, H_B e H_C), utiliza-se o Teorema de Pitágoras nos dois triângulos retângulos obtidos pela altura e faz-se a determinação resolvendo o sistema de incógnitas.

As coordenadas cartesianas dos “pés da altura”, são:

$$H_A = \left(\frac{e^2c}{e^2 + (c-d)^2}, \frac{ce(c-d)}{e^2 + (c-d)^2} \right)$$

$$H_B = \left(\frac{cd^2}{d^2 + e^2}, \frac{cde}{d^2 + e^2} \right)$$

$$H_C = (d, 0)$$

CAPÍTULO 4

4 Os Pontos Notáveis de um Triângulo como Números Complexos

Neste capítulo, para as demonstrações com números complexos, usaremos o plano de Argand-Gauss, onde as letras maiúsculas A, B, \dots , correspondem a números complexos ou pontos do plano, sendo cada ponto (x, y) identificado como $x + iy$. A “posição especial” que será adotada como referência é a de que o circuncentro (O) do triângulo ΔABC coincide com a origem do plano complexo de Argand-Gauss. Assim A, B e C são números complexos, cujos módulos são todos iguais ao raio (R) da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC :

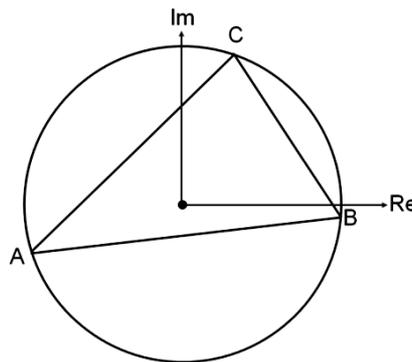


Figura 30. Triângulo no plano de Argand – Gauss.

O centróide (G) do triângulo ΔABC é o número complexo,

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

Prova: Sabe-se que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$, e M é o ponto médio do lado BC , logo:

$$G - A = 2(M - G)$$

$$G - A = 2\left(\frac{B + C}{2}\right) - 2G$$

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

Pode parecer que os números complexos não foram utilizados nas equações acima, no entanto, vale lembrar que a soma e a multiplicação de um número complexo por um número real funciona como vetores. A inovação no plano dos complexos em relação ao plano cartesiano é a possibilidade do produto entre complexos.

Para determinar a localização do Ortocentro (O), do Circuncentro (C) e do Centro da Circunferência dos Nove Pontos (N), primeiro será necessário definir a condição de alinhamento de três pontos, bem como a equação de retas paralelas e perpendiculares.

4.1 Condição de Alinhamento de Três Pontos (A, B e C) no Plano Complexo com Coordenadas $A(X_a, Y_a)$, $B(X_b, Y_b)$ e $C(X_c, Y_c)$

Para que os pontos A, B e C estejam alinhados é necessário e suficiente que $(B - A) = \alpha(C - B)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, os vetores \overline{AB} e \overline{BC} são paralelos, com isso $\frac{(B - A)}{(C - B)}$ é real e assim:

$$\frac{B - A}{C - B} = \frac{\overline{B} - \overline{A}}{\overline{C} - \overline{B}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} A & \overline{A} & 1 \\ B & \overline{B} & 1 \\ C & \overline{C} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Equação da reta determinada por dois números complexos distintos (A e B)

Dados dois pontos A e B, a equação da reta que passa por esses pontos satisfaz:

$$\frac{Z - A}{B - A} = \frac{\overline{Z} - \overline{A}}{\overline{B} - \overline{A}}$$

$$\begin{vmatrix} Z & \overline{Z} & 1 \\ A & \overline{A} & 1 \\ B & \overline{B} & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_z & y_z & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A equação fica:

$$\frac{Z}{(A-B)} - \frac{\bar{Z}}{(\bar{A}-\bar{B})} = \frac{A}{A-B} - \frac{\bar{A}}{\bar{A}-\bar{B}}$$

que é equivalente a

$$Z(\bar{A}-\bar{B}) - \bar{Z}(A-B) = A(\bar{A}-\bar{B}) - \bar{A}(A-B) \quad (1)$$

Pensando no caso particular em que $|A| = |B| = 1$, e $\bar{A} = \frac{1}{A}$ e $\bar{B} = \frac{1}{B}$. Teremos:

$$Z + AB\bar{Z} = A + B \quad (2)$$

Reta paralela a \overleftrightarrow{AB} e passando por C:

$$\frac{Z}{(A-B)} - \frac{\bar{Z}}{(\bar{A}-\bar{B})} = \frac{C}{A-B} - \frac{\bar{C}}{\bar{A}-\bar{B}}$$

que é equivalente a

$$Z(\bar{A}-\bar{B}) - \bar{Z}(A-B) = C(\bar{A}-\bar{B}) - \bar{C}(A-B) \quad (3)$$

Reta Ortogonal

Dados A e B, a equação da reta s ortogonal a B e passando por A é tal que se $Z \in s$, então $\frac{Z-A}{B}$ é um imaginário puro e assim $\frac{Z-A}{B} + \frac{\bar{Z}-\bar{A}}{\bar{B}} = 0$, ou seja,

$$\frac{Z}{A-B} + \frac{\bar{Z}}{\bar{A}-\bar{B}} = \frac{Z_0}{A-B} + \frac{\bar{Z}_0}{\bar{A}-\bar{B}}$$

$$u = \frac{A+B/2}{|A+B|/2} = \frac{A+B}{|A+B|}$$

$$\frac{Z}{u} + \frac{\bar{Z}}{\bar{u}} = \frac{Z_0}{u} + \frac{\bar{Z}_0}{\bar{u}} \quad (4)$$

Para três pontos dados A, B e C, a equação da reta perpendicular à reta \overleftrightarrow{AB} e passando por C é:

$$\frac{Z}{A-B} + \frac{\bar{Z}}{\bar{A}-\bar{B}} = \frac{C}{A-B} + \frac{\bar{C}}{\bar{A}-\bar{B}}$$

que é equivalente a

$$Z(\bar{A}-\bar{B}) + \bar{Z}(A-B) = C(\bar{A}-\bar{B}) + \bar{C}(A-B) \quad (5)$$

4.2 Equação da Reta Mediatriz dos Números Complexos Distintos A e B

A mediatriz é a reta perpendicular à reta \overleftrightarrow{AB} , passando por $\frac{A+B}{2}$, utilizando (5) encontra-se a equação da mediatriz.

$$z(\bar{A} - \bar{B}) + \bar{z}(A - B) = \left(\frac{A+B}{2}\right)(\bar{A} - \bar{B}) + \left(\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}\right)(A - B)$$

Simplificando

$$z(\bar{A} - \bar{B}) + \bar{z}(A - B) = |A|^2 - |B|^2 \quad (6)$$

Para obter a equação da reta mediatriz, basta calcular o determinante da matriz 3x3, dos pontos A e B com o ponto Z, com Z sendo o ponto médio de \overleftrightarrow{AB} . Reorganizando a equação (6), obtém-se:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ A & \bar{B} & 1 \\ B & \bar{A} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4.3 Equação do Feixe de Retas Perpendiculares no Plano Complexo a Uma Reta Dada r.

Com o resultado dessa equação, podemos determinar as coordenadas do ortocentro e ainda auxiliar na demonstração da circunferência dos nove pontos.

Lembrando que $(Z_2 - Z_1) \perp (Z_3 - Z_1) \Leftrightarrow \frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1}$, for imaginário puro.

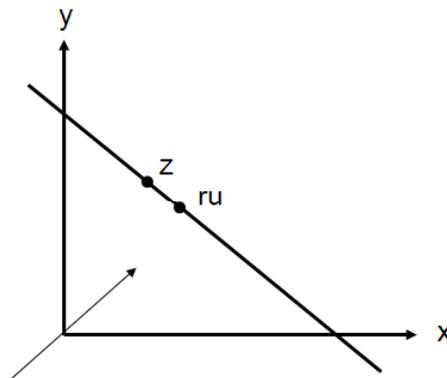


Figura 30

Seja $u \in \mathbb{C}$, com $|u| = 1$ e u é perpendicular a reta r dada.

s é a distância da origem até a reta;

Usando a equação (4), temos:

$$\frac{z}{iu} + \frac{\bar{z}}{-iu} = 2s, \text{ para algum } s \in \mathbb{R}.$$

multiplicando a equação por i , obtemos:

$$\frac{z}{u} - \frac{\bar{z}}{u} = 2is, \text{ para algum } s \in \mathbb{R}.$$

Após a determinação das equações das retas, é possível determinar o ortocentro o circuncentro e o centro da circunferência dos nove pontos.

ORTOCENTRO

O ortocentro (H) do triângulo ΔABC , na posição especial, é o número complexo

$$H = A + B + C$$

Prova: De acordo com a equação (5), a altura relativa ao vértice A , é dada por:

$$Z(\bar{B} - \bar{C}) + \bar{Z}(B - C) = A(\bar{B} - \bar{A}) + \bar{A}(B - C) \quad (a)$$

De modo análogo obtemos as outras equações das alturas.

$$Z(\bar{A} - \bar{C}) + \bar{Z}(A - C) = B(\bar{A} - \bar{C}) + \bar{B}(A - C) \quad (b)$$

$$Z(\bar{A} - \bar{B}) + \bar{Z}(A - B) = C + \bar{C}(A - B) \quad (c)$$

As três equações encontradas são combinações lineares umas das outras, então o ponto de intersecção entre duas pertence à outra equação.

Isolando \bar{Z} em (c) e (a), obteremos respectivamente:

$$\bar{Z} = \frac{1}{C} - \frac{C}{AB} + \frac{Z}{AB} \quad (d)$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{A} - \frac{A}{BC} + \frac{Z}{BC} \quad (e)$$

Igualando (d) e (e), chega-se a:

$$Z = A + B + C$$

Como Z , neste caso, representa o encontro das alturas, Z é o ortocentro do triângulo.

CIRCUNCENTRO

O circuncentro (O) de um triângulo ΔABC qualquer, é o número complexo,

$$O = \frac{|A|^2(B - C) + |B|^2(C - A) + |C|^2(A - B)}{\bar{A}(B - C) + \bar{B}(C - A) + \bar{C}(A - B)}$$

Para determinar as coordenadas complexas do circuncentro usaremos a equação (6). As mediatrizes dos lados AB, CA e BC , são respectivamente:

$$Z(\bar{A} - \bar{B}) + \bar{Z}(A - B) = |A|^2 - |B|^2 \quad (f)$$

$$Z(\bar{C} - \bar{A}) + \bar{Z}(C - A) = |C|^2 - |A|^2 \quad (g)$$

$$Z(\bar{B} - \bar{C}) + \bar{Z}(B - C) = |B|^2 - |C|^2 \quad (h)$$

Somando duas das equações obtemos a terceira, de modo que podemos concluir que a intersecção entre duas equações está na terceira equação da mediatriz. Para determinar as coordenadas, basta isolar \bar{Z} em uma equação e substituir numa das outras equações acima. Assim, isolando \bar{Z} da equação (h),

$$\bar{Z} = \frac{|B|^2 - |C|^2 - (\bar{B} - \bar{C})Z}{B - A}$$

e substituindo na equação (g), temos:

$$(\bar{C} - \bar{A})Z + (C - A) \left(\frac{|B|^2 - |C|^2 - (\bar{B} - \bar{C})Z}{B - A} \right) = |C|^2 - |A|^2 \Rightarrow$$

$$(B - A)(\bar{C} - \bar{A})Z + (C - A)(|B|^2 - |C|^2) - (C - A)(\bar{B} - \bar{C})Z = (B - A)(|C|^2 - |A|^2) \Rightarrow$$

$$Z = \frac{|A|^2(B - C) + |B|^2(C - A) + |C|^2(A - B)}{\bar{A}(B - C) + \bar{B}(C - A) + \bar{C}(A - B)} \quad (7)$$

Como Z representa o encontro das mediatrizes, então Z é o circuncentro do triângulo. Por simetria, é possível verificar que a equação encontrada para Z também satisfaz a equação (f).

4.4 O Teorema da Circunferência dos Nove Pontos

Antes de determinar as coordenadas complexas da circunferência dos nove pontos, será demonstrado esse teorema.

A circunferência dos nove pontos é creditada a Karl W. Feuerbach (1800 – 1834), sendo também conhecida como círculo de Feuerbach. No entanto, outros creditam a sua descoberta a Euler, que já conhecia algumas de suas propriedades, e outros creditam a Poncelet (1788 – 1867), que publicou a circunferência um ano antes de Feuerbach. Porém, foi Feuerbach quem descobriu que essa circunferência passava por seis pontos e descobriu também que essa circunferência era tangente exterior a circunferências exinscritas; (esse Teorema está descrito no final do capítulo, juntamente com outras propriedades).

O centro (N) dos nove pontos desta circunferência fica no meio da reta de Euler, entre o ortocentro e o circuncentro, sendo o ponto médio de HO .

A circunferência dos nove pontos, em um triângulo ABC , passa pelos seguintes pontos:

- as três projeções ortogonais dos três vértices do triângulo aos lados opostos (D, E e F);
- os três pontos médios dos três lados do triângulo (J, K e L);
- os pontos médios dos três segmentos cujos extremos são o ortocentro e um dos três vértices (M, P e Q);

Estes pontos estão sobre a mesma circunferência, cujo centro N é o ponto médio do segmento cujos extremos são o ortocentro (H) e o circuncentro (O), e cujo raio é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

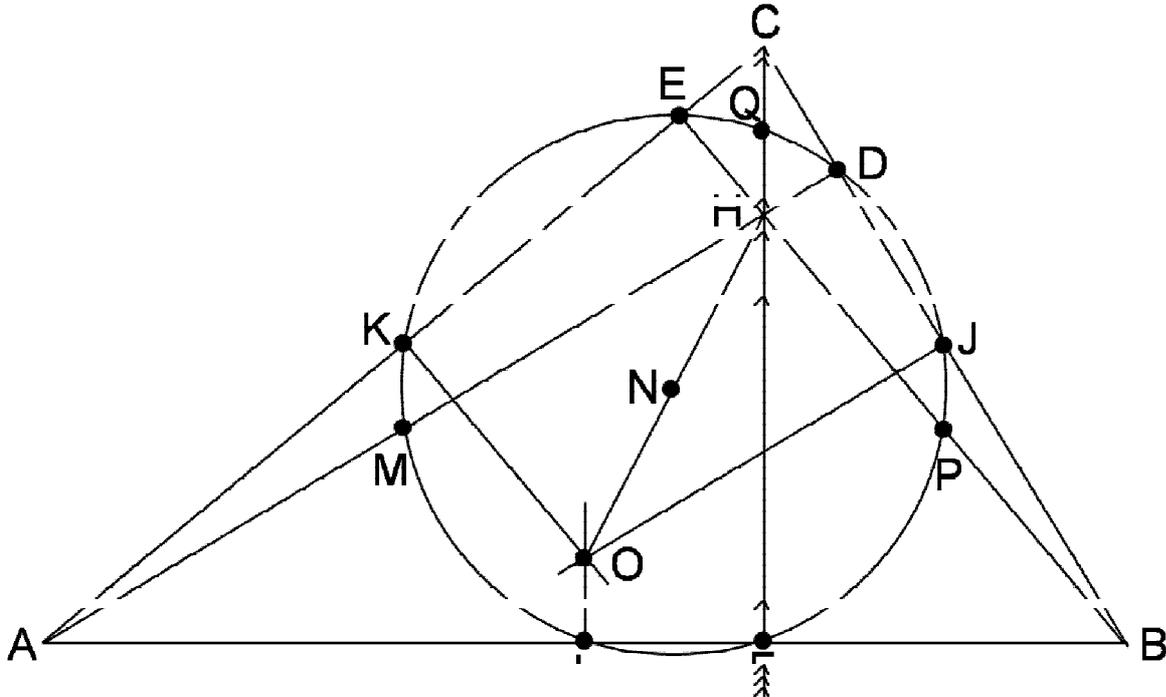


Figura 31. Circunferência dos nove pontos.

Prova:

- Existe uma única circunferência que passa pelos pontos J, K e L, pois por três pontos distintos e não colineares existe uma única circunferência passando por eles.
- O segmento KJ é base média de AB; ($AB = 2KJ$)
- L é ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo ΔBDA , logo $AB = 2LD$;
- Concluimos que $KJ = LD$ e que o trapézio DKLJ é isósceles, pois suas diagonais possuem a mesma medida; todo trapézio isósceles é inscrito, assim a circunferência que contém os pontos J, K e L

também contém o ponto D; de modo análogo podemos provar que a circunferência passa também pelos pontos E e F.

- Provamos até aqui que existe uma circunferência única que passa pelos pontos J, K, L, D, E e F, falta provar que também passa pelos pontos M, P e Q.
- Agora considerando o triângulo ΔBHC , os pontos D, E e F são também os “pés da altura” desse triângulo, assim QP é base média de BC, logo $BC = 2QP$;
- Observando o triângulo retângulo ΔBEC , J é o ponto médio da hipotenusa, assim $BC = 2EJ$; se observarmos o triângulo retângulo ΔBFC , da mesma forma como observado anteriormente, temos $BC = 2FJ$;
- Conclui-se que $QP = EJ = FJ$, assim os trapézios EPJQ e QJPF são isósceles e assim a circunferência que passa pelos pontos D, E e F também passa pelos pontos M, P e Q.

Assim obtemos os nove pontos da circunferência.

Para determinar o centro da circunferência dos nove pontos, basta tomar o quadrilátero KJPM, que é um retângulo, pois KJ e MP são paralelos ao lado AB e bases médias dos triângulo ΔABC e ΔAHB respectivamente; da mesma forma KM e JP são paralelos à altura CF e bases médias dos triângulos ΔACH e ΔBCH , respectivamente. Além disso, os lados KJ e MP são perpendiculares aos lados KM e JP, uma vez que AB é perpendicular à CF. Como os ponto K e P estão diametralmente opostos, a intersecção das diagonais desse retângulo é o centro da circunferência, sendo esse ponto o ponto N. O raio da circunferência dos nove pontos é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Para determinarmos as coordenadas do centro da circunferência dos nove pontos, vale lembrar que as distâncias entre o número complexo N e os nove pontos são constantes e iguais a $\frac{R}{2}$, em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

O centro da circunferência dos nove pontos (N) do triângulo ΔABC , na posição especial é o número complexo,

$$N = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

Para a verificação desta coordenada, basta lembrar que N é equidistante de O e H , como O foi fixado na origem do plano, o valor de N é o ponto médio de O e H .

Uma outra maneira de demonstrar as coordenadas do centro, é considerar o triângulo formado pelos pontos médios do ΔABC , no qual a circunferência dos nove pontos circunscribe esse triângulo, de modo que, utilizando a equação (7), temos:

$$Z = \frac{\left|\frac{A+B}{2}\right|^2 \left(\frac{B+C}{2} - \frac{A+C}{2}\right) + \left|\frac{B+C}{2}\right|^2 \left(\frac{A+C}{2} - \frac{A+B}{2}\right) + \left|\frac{A+C}{2}\right|^2 \left(\frac{A+B}{2} - \frac{B+C}{2}\right)}{\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} \left(\frac{B+C}{2} - \frac{A+C}{2}\right) + \frac{\bar{B} + \bar{C}}{2} \left(\frac{A+C}{2} - \frac{A+B}{2}\right) + \frac{\bar{B} + \bar{C}}{2} \left(\frac{A+B}{2} - \frac{B+C}{2}\right)}$$

Resolvendo chega-se a:

$$Z = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

TEOREMA 4.4.1: A circunferência de nove pontos do triângulo ΔABC é a circunferência dos nove pontos dos três triângulos: ΔHBC , ΔHCA e ΔHAB .

Tomando o triângulo ΔHAB :

- D , E e F são os “pés” das alturas dos lados BH , AH e AB ;
- Os pontos médios desse triângulo são P , M e L , respectivamente, dos lados BH , AH e AB ;

- Por fim, os pontos K, J e Q são os pontos médios do segmento que tem as extremidades no ortocentro, neste caso o ponto C, e os vértices do triângulo.

Pela construção verifica-se que a circunferência passa por esses pontos. Para os outros triângulos a verificação é da mesma maneira.

4.5 Equação da reta determinada por dois números complexos distintos A e B.

Para os casos abaixo iremos considerar que os complexos possuem mesmo módulo.

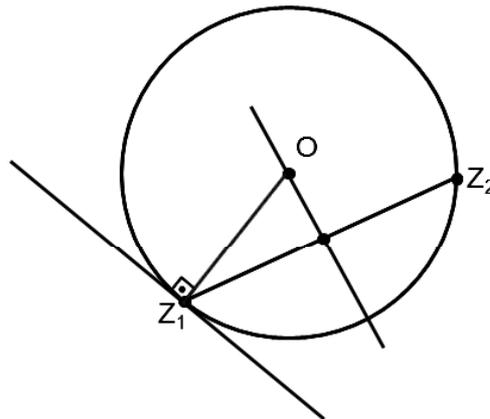


Figura 32. Retas no plano complexo, sendo (O) origem do plano.

Equação da reta determinada por Z_1 e Z_2

Conhecendo os dois complexos, usamos a equação (1) e obtemos:

$$Z + \frac{Z_1 Z_2 \bar{Z}}{R^2} = Z_1 + Z_2 \quad (8)$$

Observa-se que a equação obtida é uma generalização da equação (2).

Equação da reta mediatriz determinada pelos pontos Z_1 e Z_2 .

Essa reta passa pela origem e utilizando a equação (6) escrevemos:

$$Z(\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2) + \bar{Z}(Z_1 - Z_2) = |Z_1|^2 - |Z_2|^2$$

Como os complexos possuem mesmo módulo, chega-se a:

$$Z - \frac{Z_1 Z_2 \bar{Z}}{R^2} = 0 \quad (9)$$

Equação da reta tangente passando por Z_1 .

Usando a equação (8) e considerando que $Z_1 = Z_2$, chegamos a,

$$Z + \frac{Z_1^2}{R^2} = 2Z_1 \quad (10)$$

4.6 Equações no plano complexo das retas notáveis do triângulo determinado por três números complexos distintos e não colineares A, B e C

Para os casos abaixo, o circuncentro do triângulo está na origem do plano complexo.

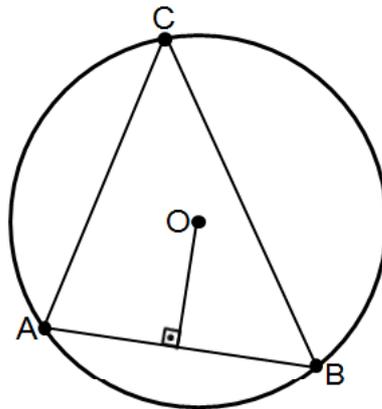


Figura 33. Triângulo ΔABC , que distam R do ponto (O).

Equações das três mediatrizes do triângulo ΔABC :

Para a determinação destas equações foi utilizada a equação (9):

$$z - \frac{BCz}{R^2} = 0$$

$$z - \frac{ABz}{R^2} = 0$$

$$z - \frac{ACz}{R^2} = 0$$

Vale lembrar que as coordenadas do circuncentro são verificadas nas três equações acima.

Equações das três retas suportes das medianas do triângulo ABC :

Como visto anteriormente, conhecendo dois complexos, podemos determinar a equação da reta utilizando a matriz, assim:

Reta passando pelo complexo A :

$$z - \frac{(2A - B - C)\bar{z}}{2\bar{A} - \bar{B} - \bar{C}} = \frac{\bar{A}(B + C) - A(\bar{B} + \bar{C})}{2\bar{A} - \bar{B} - \bar{C}}$$

De forma análoga obtemos as outras duas equações:

Reta passando pelo complexo B :

$$z - \frac{(2B - A - C)\bar{z}}{2\bar{B} - \bar{A} - \bar{C}} = \frac{\bar{B}(A + C) - B(\bar{A} + \bar{C})}{2\bar{B} - \bar{A} - \bar{C}}$$

Reta passando pelo complexo C :

$$z - \frac{(2C - A - B)\bar{z}}{2\bar{C} - \bar{A} - \bar{B}} = \frac{\bar{C}(A + B) - C(\bar{A} + \bar{B})}{2\bar{C} - \bar{A} - \bar{B}}$$

As coordenadas do centróide satisfazem as três equações acima.

Equação das três retas suportes das alturas do triângulo ABC

Conhecendo um ponto e sabendo que ela é perpendicular a uma reta dada obtemos as seguintes equações, utilizando (5),

Reta passando por A e perpendicular a \overleftrightarrow{BC} :

$$z - \frac{BC\bar{z}}{R^2} = A - \frac{BC\bar{A}}{R^2}$$

Reta passando por B e perpendicular a \overleftrightarrow{AC} :

$$z - \frac{AC\bar{z}}{R^2} = B - \frac{AC\bar{B}}{R^2}$$

Reta passando por C e perpendicular a \overleftrightarrow{AB} :

$$z - \frac{AB\bar{z}}{R^2} = C - \frac{AB\bar{C}}{R^2}$$

As coordenadas do ortocentro satisfazem as três equações acima.

4.7 Equações das três bissetrizes internas e das três bissetrizes externas do triângulo determinado por três números complexos não colineares distintos A^2, B^2 e C^2

Para evitar o uso excessivo de raízes, os vértices do triângulo serão os complexos A^2, B^2 e C^2 .

Considere o triângulo esquematizado na Figura 32, formado pelos complexos A^2, B^2 e C^2 , e a circunferência circunscrita ao triângulo $A^2B^2C^2$, de raio R^2 . Para as demonstrações adotamos como convenção dos valores, $-AC$ (o valor médio do arco $\widehat{A^2C^2}$) quando não tiver o complexo B^2 no arco, $+AC$ quando tiver com o complexo B^2 no arco. Isso vale para os outros valores médios.

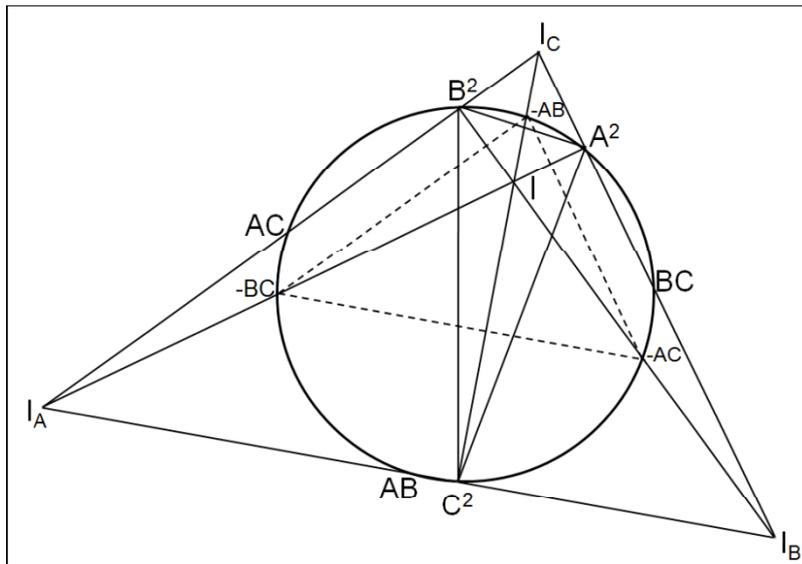


Figura 34. I_a, I_b e I_c são os exincentros do triângulo $A^2B^2C^2$.

As equações das bissetrizes internas:

A circunferência dos nove pontos do triângulo I_A, I_B e I_C circunscribe o triângulo A^2, B^2 e C^2 , assim a bissetriz interna do vértice A^2 , corta o ponto médio do arco $\widehat{B^2C^2}$, que não contém A^2 , esse ponto foi convencionado como $-BC$. Assim, com esses dois pontos podemos escrever a equação da reta usando (8):

$$Z - \frac{A^2BC\bar{Z}}{R^4} = A^2 - BC \quad (11)$$

Da mesma forma, escrevemos as outras equações:

$$Z - \frac{B^2 AC \bar{Z}}{R^4} = B^2 - AC \quad (12)$$

$$Z - \frac{C^2 AB \bar{Z}}{R^4} = C^2 - AB \quad (13)$$

Os valores utilizados nas equações acima foram todos os convencionados com o sinal (-).

As equações das bissetrizes externas:

Da mesma forma que as equações das bissetrizes internas foram determinadas, as equações das bissetrizes externas serão determinadas. Nos casos abaixo, todos os valores médios dos arcos serão os convencionados (+). Com o auxílio da equação (8), obtemos:

$$Z + \frac{A^2 BC \bar{Z}}{R^4} = A^2 + BC \quad (14)$$

$$Z + \frac{B^2 AC \bar{Z}}{R^4} = B^2 + AC \quad (15)$$

$$Z + \frac{C^2 AB \bar{Z}}{R^4} = C^2 + AB \quad (16)$$

Essas equações também poderiam ser obtidas utilizando a equação (5), pois a bissetriz interna é ortogonal à bissetriz externa.

INCENTRO (I)

O incentro (I) do triângulo $\Delta A^2 B^2 C^2$ é

$$I = -(AB + AC + BC)$$

Resolvendo o sistema de duas das equações (11), (12) e (13), obteremos as coordenadas do incentro (I) do triângulo $\Delta A^2 B^2 C^2$ pois o incentro é a intersecção das

três bissetrizes internas. Escolhendo (11) e (12), e isolando $\frac{\bar{Z}}{R^4}$, temos

respectivamente:

$$-\frac{\bar{Z}}{R^4} = \frac{A^2 - BC - Z}{A^2BC}$$
$$-\frac{\bar{Z}}{R^4} = \frac{B^2 - AC - Z}{B^2AC}$$

igualando,

$$\frac{A^2 - BC - Z}{A^2BC} = \frac{B^2 - AC - Z}{B^2AC}$$
$$Z(A - B) = AB^2 + CB^2 - BA^2 - CA^2$$

E fatorando de forma conveniente e isolando Z, temos,

$$Z = -AB - AC - BC$$

EXCENTROS

O ponto de intersecção entre as duas bissetrizes externas e a bissetriz interna do terceiro ângulo é chamado **excentro**. Esse ponto é o centro da circunferência que tangencia um lado do triângulo e as retas suportes dos outros dois lados, sendo essas circunferências chamadas de ex-circunferências.

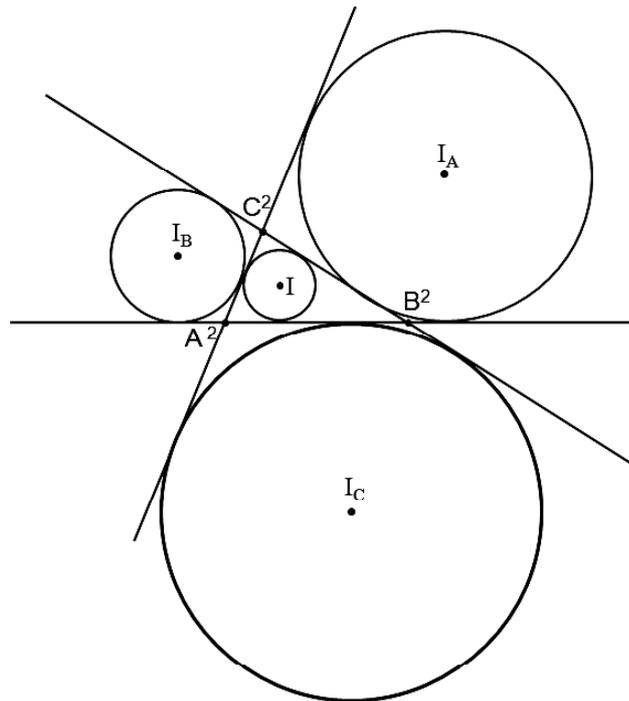


Figura 35. Ex circunferências do triângulo $\Delta A^2 B^2 C^2$.

O incentro do triângulo $\Delta A^2 B^2 C^2$ é o ortocentro do triângulo de vértices $-BC$, $-AC$ e $-AB$ pois o ortocentro é dado por $-(AB + AC + BC)$, e como vimos anteriormente, o ortocentro é determinado pela soma dos vértices.

Para determinarmos os complexos que representam os excentros do triângulo $\Delta A^2 B^2 C^2$, basta resolver as equações (13), (14) e (15), duas a duas. Como exemplo, toma-se (13) e (14) e isolando $\frac{\bar{Z}}{R^4}$, temos respectivamente:

$$\frac{\bar{Z}}{R^4} = \frac{A^2 + BC - Z}{A^2 BC}$$

$$\frac{\bar{Z}}{R^4} = \frac{B^2 + AC - Z}{B^2 AC}$$

igualando

$$\frac{A^2 + BC - Z}{A^2 BC} = \frac{B^2 + AC - Z}{B^2 AC}$$

$$Z(A - B) = AB^2 - CB^2 - BA^2 + CA^2$$

e fatorando de forma conveniente e isolando Z , temos,

$$Z = -AB + AC + BC$$

Esse é o complexo do I_C :

$$I_C = -AB + AC + BC$$

Da mesma maneira se obtém os outros complexos dos excentro do triângulo $A^2B^2C^2$, que são:

$$I_A = -BC + AB + AC$$

$$I_B = -AC + AB + BC$$

4.8 Teorema de Feuerbach

No ano de 1822, Feuerbach comprovou que a circunferência dos nove pontos tangencia internamente a circunferência inscrita e externamente as três excircunferências de um triângulo qualquer. A intersecção da circunferência inscrita e a circunferência dos nove pontos é chamada de ponto de Feuerbach.

Os complexos A^2 , B^2 e C^2 , distintos e não colineares, serão os vértices do triângulo, chamaremos de R^2 o módulo desses complexos, vale ressaltar que utilizaremos o triângulo na posição especial, ou seja, o circuncentro é a origem do plano complexo.

Iniciamos mostrando que as circunferências inscrita e a dos nove pontos são tangentes interiores (Figura 36).

Prova: Basta calcular a distância entre o incentro (I) e o centro (N) da circunferência dos nove pontos.

$$d = |N - I|$$

$$d = \left| \frac{A^2 + B^2 + C^2}{2} + AB + AC + BC \right|$$

$$d = \frac{1}{2} |(A + B + C)^2|$$

$$d = \frac{1}{2} S_1 \bar{S}_1$$

$$d = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{S_1 S_2}{S_3}$$

em que

$$S_1 = A + B + C$$

$$S_2 = AB + AC + BC$$

$$S_3 = ABC$$

e o raio r da circunferência inscrita,

$$\frac{1}{2} \left(B^2 + C^2 - S_2 + \frac{BCS_1}{A} \right)$$

é o número complexo da intersecção da reta determinada por B^2C^2 cuja equação é:

$$Z + \frac{B^2C^2\bar{Z}}{R^4} = B^2 + C^2$$

com a reta perpendicular à reta B^2C^2 pelo incentro (I), cuja a equação é:

$$Z - \frac{B^2C^2\bar{Z}}{R^4} = -S_2 + \frac{BC}{A} S_1$$

$$\text{Portanto, } r = \left| \frac{1}{2} \left(B^2 + C^2 - S_2 + \frac{BCS_1}{a} \right) + S_2 \right| = \frac{1}{2} |S_1 S_2 - S_3|$$

o que mostra que $d = \frac{R^2}{2} - r$, e as circunferências são tangentes interiormente.

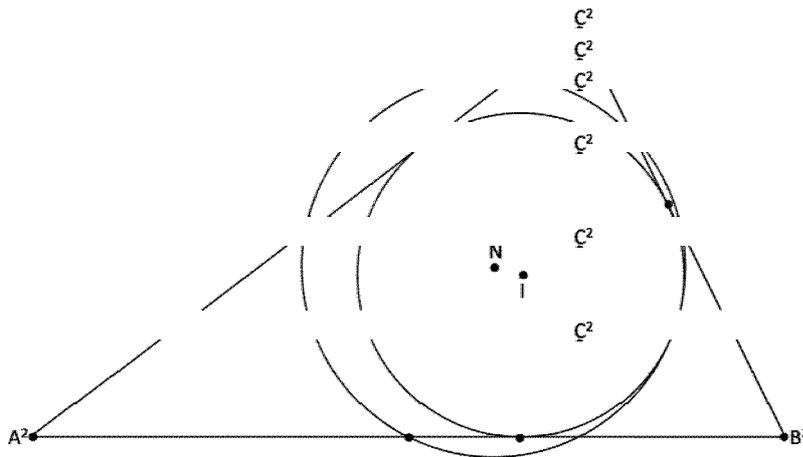


Figura 36. Tangência interna entre as circunferências inscrita e A dos nove pontos.

Para demonstrar que as ex-circunferências são tangentes exteriores à circunferência dos nove pontos, basta calcular a distância entre os centros e calcular os raios das ex-circunferências, da mesma forma que no caso da tangente interna.

TEOREMA 4.8.1 – A condição necessária e suficiente para que três números complexos Z_1 , Z_2 e Z_3 distintos e não colineares sejam vértices de um triângulo equilátero é:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$$

Corolário 4.8.1 – Números complexos distintos unitários e não colineares, cuja soma é nula, são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário.

Corolário 4.8.2 – Caso as três raízes complexas da equação do terceiro grau com coeficientes complexos,

$$z^3 - 3pz^2 + 3qz - r = 0$$

sejam números complexos distintos e não colineares, então o número complexo p é o centróide do triângulo e a condição necessária e suficiente para o triângulo determinado pelas raízes ser equilátero é que $p^2 = q$.

4. 9 Teorema de Napoleão

O teorema de Napoleão diz: *se triângulos equiláteros são construídos sobre os lados de um triângulo, então os centróides dos três triângulos equiláteros formam um triângulo equilátero; analogamente, conclui-se que os centros dos triângulos equiláteros desenhados internamente aos lados de qualquer triângulo também definem um triângulo equilátero.*

Esse teorema é atribuído ao imperador da França Napoleão Bonaparte (1769 – 1821), que foi um talentoso estudante de matemática e mantinha contato com grandes matemáticos da sua época. No entanto, há quem duvide que seja ele o autor do teorema que leva o seu nome.

Quando triângulos equiláteros são construídos externamente aos lados de um triângulo ABC , os centróides dos três triângulos equiláteros são vértices de um triângulo equilátero.

O baricentro do triângulo ABC é $\frac{1}{3}(A + B + C)$ e então os três números complexos são:

$$X = \frac{1}{3}[A + C + (A - W^2(C - A))] = \frac{1}{3}[(2 + W^2)A + (1 - W^2)C]$$

$$Y = \frac{1}{3}[A + B + (A - W(B - A))] = \frac{1}{3}[(2 + W)A + (1 - W)B]$$

$$Z = \frac{1}{3}[B + C + (B - W(C - B))] = \frac{1}{3}[(2 + W)B + (1 - W)C]$$

Em que $w^2 + w + 1 = 0$, são os baricentros dos três triangulares e como

$$z - x = -w^2(y - x)$$

então o triângulo XYZ é um triângulo equilátero.

5 CONCLUSÕES

Nesta dissertação, fizemos um breve passeio pela geometria. No primeiro capítulo demonstramos alguns teoremas clássicos, utilizando a própria geometria como ferramenta. No capítulo dois, realizamos uma abordagem algébrica, utilizando algumas funções específicas e verificamos que os pontos notáveis são pontos de máximo ou de mínimo. No capítulo três, entramos na época de René Descartes (1596 – 1650), também conhecido como Renatus Cartesius (seu nome em latim) que sugeriu a fusão da álgebra com a geometria, introduzindo as coordenadas, que hoje levam o seu nome (Sistema Cartesiano) e capturam toda a geometria clássica, transformando-a em números e equações, dando assim à Matemática outra dinâmica, permitindo estudos mais gerais em relação à geometria clássica. Por fim, no capítulo quatro, introduzimos as variáveis complexas, o plano de Argand-Gauss, Jean Robert Argand (1786 – 1822) matemático amador suíço, que teve seu trabalho citado, no entanto, o seu nome nunca apareceu no livro, após algum tempo recebeu o reconhecimento pelo seu trabalho, já Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), conhecido como “o príncipe da matemática”, foi o primeiro matemático a dar uma interpretação geométrica aos números complexos, e teve importantes participações em diversas áreas da matemática. Os números complexos estão relacionados com o plano cartesiano, porém, com a introdução de uma nova ferramenta, pois no caso do plano cartesiano, não é possível fazer a divisão entre vetores, com esse plano complexo, é possível fazer a divisão entre números complexos.

Comparando as várias abordagens, podemos afirmar que com a compreensão dos números complexos, paradoxalmente simplifica-se a resolução de problemas de geometria plana e a solução de equações polinomiais.

O domínio da ferramenta dos números complexos é fundamental para a interligação dos vários conteúdos do currículo de matemática do Ensino Médio.

Com o advento dos números complexos, podemos algebrizar vetores, de maneira que esta algebrização auxilia diversos campos da Matemática, bem como os das outras ciências.

Vale lembrar que, pretendo aplicar essas relações e mostrar os resultados principalmente a dos números complexos em cursos e mini cursos para os “meus” alunos do Ensino Médio.

7 REFERÊNCIAS

1. SÃO PAULO. Secretaria do Estado da Educação. **Saresp 2011**. Disponível em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2011/Pdf/Relat%C3%B3rio_Pedag%C3%B3gico_LP_Mat_3%C2%BA%20EF_2011.pdf> Acesso em 13 de novembro de 2012.
2. ÍNDICE DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO BÁSICA (IDEB). Disponível em <<http://ideb.inep.gov.br/Site/>>. Acesso em: 25 de novembro de 2012.
3. SÃO PAULO (Estado). Secretária da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática**: ensino fundamental – ciclo II e ensino médio. Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo : SEE, 2008.
4. HIRATSUKA, P.I. **O lúdico na superação de dificuldades no ensino de geometria**. Educação em Revista, Marília, 2006v.7, n.1/2, p. 55-66.
5. MORASCO JUNIOR, O.C.; GAMA, R.P. **Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP)**: ações e repercussões no ensino de matemática. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.
6. SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P.; OLIVEIRA, I. **Grandes temas matemáticos**. Em: _____. A Matemática na Educação Básica. Lisboa: Ministério da Educação Básica, 1999. p. 41- 91.
7. COXETER, H. S. M.; GREITZER, S.L. **Geometry revised**. Yale University, 1967, 193 p.
8. _____. **Introduction to Geometry**, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1969, 469 p..
9. DODGE, C.W. **Euclidean geometry and transformations**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Phillipines, 1972, 295 p.
10. NELSEN, R.B. **Proofs without words**. The mathematical association of America (Incorporated), 1993, 128 p.
11. HAHN, L. **Complex Numbers and Geometry**. Washington: The Mathematical Association of America, 1994.
12. LARSON, L.C. **Problem-Solving Through Problems**. Springer-Verlag New York Inc, 1983, 333 p.