



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL PROFMAT



Tiago Wesley de Jesus Machado

**MATEMÁTICA NA ASTRONOMIA: UTILIZAÇÃO DA
PARALAXE HELIOCÊNTRICA NO ENSINO DE
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

Sinop - MT

2023

Tiago Wesley de Jesus Machado

**MATEMÁTICA NA ASTRONOMIA: UTILIZAÇÃO DA
PARALAXE HELIOCÊNTRICA NO ENSINO DE
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – UNEMAT, Campus Universitário de Sinop-MT, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dr. Silvio Cesar Garcia Granja
Orientador

Sinop - MT

2023

Walter Clayton de Oliveira CRB 1/2049

M149m MACHADO, Tiago Wesley de Jesus.
Matemática na Astronomia: Utilização da Paralaxe Heliocêntrica no Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo / Tiago Wesley de Jesus Machado – Sinop, 2023.
157 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso
(Dissertação/Mestrado) - Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2023.

Orientador: Silvio Cesar Garcia Granja

1. Teoria da Resposta ao Item. 2. Ensino de Trigonometria.
3. Visor de Paralaxe. I. Tiago Wesley de Jesus Machado.
II. Matemática na Astronomia: Utilização da Paralaxe Heliocêntrica no Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo: .

CDU 514



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT
UNEMAT - SINOP



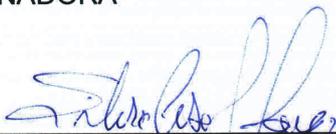
TIAGO WESLEY DE JESUS MACHADO

**MATEMÁTICA NA ASTRONOMIA: UTILIZAÇÃO DA PARALAXE HELIOCÊNTRICA
NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO**

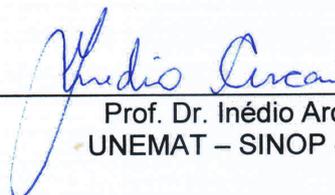
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – ProfMat da Universidade do Estado de Mato Grosso/UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Cesar Garcia Granja
Aprovado em 03/04/2023

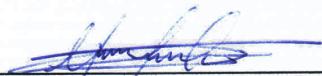
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Silvio Cesar Garcia Granja
UNEMAT – SINOP - MT



Prof. Dr. Inédio Arcari
UNEMAT – SINOP - MT



Prof. Dr. Mauro André Dresch
UFMT – SINOP - MT

Sinop/MT
2023



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT/UNEMAT/Sinop/MT
Av. dos Ingás, 3001, CEP: 78.550-000, Sinop, MT
Tel/PABX: (66) 3511 2100. www.unemat.br – Email:
profmat@unemat.br

UNEMAT
Universidade do Estado de Mato Grosso
Carlos Alberto Reyes Maldonado

Dedico este trabalho à minha esposa, Camila Fernanda, por sempre me apoiar e incentivar a continuar meus estudos e a minha filha, Clara Liz, para que sempre lute pelos seus sonhos mesmo quando as pessoas próximas tentarem desanimá-la.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, pois Ele sempre me guiou e mostrou o caminho para meu desenvolvimento. Caso não estivesse nos planos Dele, eu não teria conseguido.

Agradeço imensamente à minha família, em especial aos meus pais e a minha irmã, que me apoiaram em todas as minhas escolhas e me motivaram quando eu quis desistir, sempre com palavras positivas e mostrando que eu sou capaz.

Aos meus grandes e inestimáveis amigos Carla Dayse e Ricardo Cordeiro pelo apoio nesta e em outras caminhadas, sempre juntos a mim fazendo com que eu analisasse todas as possibilidades para tomar as melhores decisões.

Ao corpo docente do programa e com muito carinho e gratidão aos professores Rogério dos Reis Gonçalves, que nunca mediu esforços para nos ensinar e nos desafiar, mesmo aos domingos, para nos preparar para o Exame Nacional de Qualificação e sempre nos motivou a continuar; Inédio Arcari, pelas palavras de incentivo na disciplina de Geometria (MA13) onde eu mais precisei e pensei em desistir, não pela complexidade da disciplina, mas pelo momento no qual eu estava passando; Raul Abreu de Assis, pelos ensinamentos de Modelagem Matemática (MA37) que nortearam parte deste trabalho e de Geometria Analítica (MA23), ensinamentos estes que mudaram minha forma de ver a Matemática; Miguel Tadayuki Koga não só pelos ensinamentos da disciplina de Aritmética (MA14), mas também por compreender os momentos que nossa turma, e o mundo, estava passando e conseguir adaptar o programa de forma que todos pudessem ter acesso aos conceitos ensinados; Emivan Ferreira da Silva que foi essencial na disciplina de Números e Funções Reais (MA11), o que me possibilitou grande êxito no Exame Nacional de Qualificação; e por último e muito importante o Silvio Cesar Garcia Granja, professor que hoje posso chamar de amigo, que além de ser meu orientador, sempre me acompanhou na preparação para a defesa desta dissertação, mostrando os caminhos sólidos para um conhecimento eficaz.

Aos meus colegas de mestrado, sempre solícitos a ajudar uns aos outros. Estivemos sempre juntos, mesmo aqueles que moravam distante. Foram aulas, grupos de estudo, rodízios, chopp, desesperos, ansiedades. Sentimos tudo isso juntos, momentos que ficarão guardados eternamente.

Nunca esquecerei da CAPES, pois sem a bolsa da qual recebi durante estes 2 anos eu não conseguiria ter a tranquilidade e o tempo necessário para meus estudos. A resistência de todos os funcionários da Educação Superior, pesquisadores e estudantes, principalmente nos últimos meses de 2022, também precisa ser mencionada. Aos colegas do grupo do Facebook *Bolsistas da CAPES* meu muito obrigado por todos os auxílios e pelas risadas mesmo em momentos que era para estarmos chorando, foram fortes as emoções a cada pagamento. Mesmo no fim do meu Mestrado, sinto-me vitorioso por nossa luta, pois agora foi concedido o tão merecido reajuste a todas as bolsas de pós-graduação e pesquisa.

Aos meus coordenadores da Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Moraes Ramos” no ano de 2022, Glésia Gomes e João Guilherme, por todo o apoio que me deram nesta caminhada e por terem me oportunizado a conclusão de diversas etapas do Mestrado.

Aos meus alunos, que compartilharam dias estressantes junto comigo. Em particular as turmas do 2º ano A, 2º ano B e 2º ano C do ensino médio do ano de 2022 da Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Moraes Ramos”, que além de contribuir e participar da minha pesquisa, são excelentes alunos.

Ao Mestre pelo PROFMAT da Universidade Federal de Goiás Davi Lessa de Oliveira por ter ajudado, e muito, na preparação e disponibilização das planilhas eletrônicas para cálculo da proficiência dos estudantes utilizando a TRI.

À minha filha, Clara Liz, que sempre se silenciou quando eu estava a estudar, proporcionando, a mim, uma maior qualidade nos meus estudos, que, mesmo não tendo noção da complexidade do que eu estava a desenvolver (pois tem somente 8 anos de idade), às vezes vinha até mim me abraçava, via o que eu estava fazendo e falava “isso é muito fácil”, misturando em mim um misto de risos pela inocência dela e de motivação.

À minha esposa, Camila Fernanda, que presenciou momentos de muito estresse e angústia, e me apoiou quando eu quase desisti de tudo isso, sempre me motivando e proporcionando momentos para que eu pudesse estudar. Que, lá no Exame Nacional de Acesso, fez com que eu fosse fazer a prova, falando que eu tinha plenas condições de passar. Obrigada, meu amor!

“O grande matemático não é um tipo de calculadora, de computador. É antes uma espécie de poeta.”

(Mário Schenberg)

RESUMO

Este trabalho utiliza a Astronomia como agente motivador no ensino de Matemática, mais especificamente no ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo para estudantes do Ensino Médio, bem como utiliza um instrumento de avaliação para quantificar o grau de aprendizagem dos estudantes. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica nos documentos educacionais oficiais do Ministério da Educação e da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso a fim de conhecer o que se espera dos estudantes do ensino médio ao aprender Trigonometria no Triângulo Retângulo. Foi feito, também, um levantamento do desenvolvimento da Trigonometria no decorrer da história, passando por povos antigos e chegando aos dias de hoje. A aplicação deste trabalho ocorreu com as três turmas do 2º ano do Ensino Médio de 2022 da Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Moraes Ramos”, onde a proposta foi apresentada aos estudantes e, após a aceitação dos mesmos em participar, foram realizadas, inicialmente, três pré-testes auxiliados pela Teoria da Resposta ao Item, sendo um de Unidades de Medidas, outro de Astronomia e outro de Trigonometria no Triângulo Retângulo a fim de diagnosticar a proficiência que estes estudantes já traziam. Foi construída uma sequência didática com o objetivo de oferecer as mesmas condições os estudantes no que tange aos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento das atividades, sendo que o material foi disponibilizado por meio de um Ambiente Virtual de Aprendizagem. Como forma de transformar o aprendizado matemático, que é abstrato, em algo tangível, os estudantes construíram um Visor de Paralaxe rudimentar, o qual utilizaram para medir distâncias curtas de forma indireta dentro do pátio da escola, fazendo um relatório no qual demonstraram como chegaram a tal distância. Após essa experiência de medição indireta, foram passados para os estudantes dados de algumas estrelas para que eles pudessem calcular a distância entre essas estrelas e a Terra utilizando o método da Paralaxe Heliocêntrica, produzindo um relatório final com os cálculos utilizados. Terminada a intervenção, os estudantes foram submetidos a um pós-teste de Trigonometria no Triângulo Retângulo a fim de servir de comparativo com o pré-teste inicial e melhor analisar a eficácia da sequência didática aplicada. Como forma de mensurar a opinião dos estudantes em relação à sequência didática, foi aplicado um questionário de satisfação onde eles responderam à perguntas objetivas e discursivas em relação à abordagem. Esta aplicação proporcionou aos estudantes uma forma diferenciada na aprendizagem da Trigonometria no Triângulo Retângulo, refletindo diretamente nos índices de aprendizagem nos quais podem ser observados na comparação entre o pré-teste e o pós-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo. Como contribuição para o Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo foi desenvolvido um manual para construção e utilização de um Visor de Paralaxe para medições indiretas de distâncias. Por fim, todos os materiais necessários para o desenvolvimento deste trabalho, tais como as questões das avaliações, se encontram nos anexos e apêndices.

Palavras Chaves: Teoria da Resposta ao Item. Ensino de Trigonometria. Visor de Paralaxe.

ABSTRACT

This work uses Astronomy as a motivating agent in the teaching of Mathematics, more specifically in the teaching of Trigonometry in the Rectangle Triangle for High School students, as well as using an evaluation instrument to quantify the degree of students' learning. A bibliographical research was carried out in the official educational documents of the Ministry of Education and the State Department of Education of Mato Grosso in order to know what is expected of high school students when learning Trigonometry in the Rectangle Triangle. A survey of the development of Trigonometry throughout history was also carried out, passing through ancient peoples and reaching the present day. The application of this work took place with the three classes of the 2nd year of High School of 2022 at the Escola Estadual Militar Tiradentes "Sd PM Adriana Moraes Ramos", where the proposal was presented to the students and, after their acceptance to participate, Initially, three pre-tests aided by the IRT were carried out, one on Measurement Units, another on Astronomy and another on Trigonometry in the Right Triangle in order to diagnose the proficiency that these students already had. A didactic sequence was built with the aim of leveling students with regard to the necessary prerequisites for the development of activities, and the material was made available through a Virtual Learning Environment. As a way of transforming mathematical learning, which is abstract, into something tangible, the students built a rudimentary Parallax Display, which they used to indirectly measure short distances inside the school yard, making a report in which they demonstrated how they arrived at such a distance. After this indirect measurement experience, data from some stars were given to the students so that they could calculate the distance between these stars and the Earth using the Heliocentric Parallax method, producing a final report with the calculations used. After the intervention, the students were submitted to a post-test of Trigonometry in the Rectangle Triangle in order to serve as a comparison with the initial pre-test and to better analyze the effectiveness of the didactic sequence applied. As a way of measuring the students' opinion regarding the didactic sequence, a satisfaction questionnaire was applied in which they answered objective and discursive questions regarding the approach. This application provided students with a different way of learning Trigonometry in the Right Triangle, reflecting directly on the learning rates which can be observed in the comparison between the pre-test and the post-test on Trigonometry in the Right Triangle. As a contribution to the Teaching of Trigonometry in the Right Triangle, a manual was developed for the construction and use of a Parallax Display for indirect measurements of distances. Finally, all the materials necessary for the development of this work, such as the evaluation questions, can be found in the annexes and appendices.

Key-words: Item Response Theory. Teaching Trigonometry. Display of Parallax.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de aplicação da Trigonometria no Triângulo Retângulo em um livro didático do Ensino Médio.	25
Figura 2 – Papiro de Rhind, documento egípcio datado de 1 650 a.C. que se encontra no Museu Britânico.	34
Figura 3 – Representação egípcia da razão entre afastamento horizontal e elevação vertical (seqt).	34
Figura 4 – Tabela de Plimpton 322, tabela de argila babilônica datada de 1 800 a.C. que se encontra no Museu Arqueológico de Istambu.	35
Figura 5 – Os Elementos de Euclides - primeira edição em língua inglesa, de 1570. . .	36
Figura 6 – Esfera marcada com três circunferências máximas.	37
Figura 7 – Tábuas Afonsinas, artefato histórico do século XIII.	38
Figura 8 – Leonhard Euler, matemático suíço que viveu no século XVIII e foi responsável por grandes avanços na Matemática.	40
Figura 9 – Dois triângulos semelhantes.	41
Figura 10 – Prova do caso de semelhança LLL.	41
Figura 11 – Relações Métricas num Triângulo Retângulo.	43
Figura 12 – Triângulo Retângulo e seus elementos.	43
Figura 13 – Triângulo Retângulo para demonstração das Razões Trigonométricas. . . .	44
Figura 14 – Exemplo de proporcionalidade no Triângulo Retângulo.	46
Figura 15 – Deslocamento aparente dos objetos vistos de ângulos distintos com medição indireta por meio da Paralaxe.	46
Figura 16 – Ângulo paralático p quando a base tem valor D à uma distância d	47
Figura 17 – Paralaxe geocêntrica: quando se é utilizado o raio da Terra como linha de base para calcular distâncias celestes.	48
Figura 18 – Paralaxe heliocêntrica: quando a Terra se move em sua órbita em torno do Sol, uma estrela mais próxima parece se deslocar em relação às estrelas mais distantes.	49
Figura 19 – Medida da velocidade da luz em 1675, notando que quando a Terra está mais distante da Júpiter, em T_4 , na sua órbita em torno do Sol, leva mais tempo para a luz chegar à Terra e, portanto, para ocorrer o eclipse de Io por Júpiter.	51
Figura 20 – Paralaxe p de 1 segundo de arco corresponde a uma separação de 1 unidade astronômica à uma distância de 1 parsec.	52
Figura 21 – Exemplo de uma Curva Característica do Item – CCI	58
Figura 22 – Simulação do valor máximo e mínimo de um item segundo os parâmetros do $a = 0,01$, $b = 0,01$ e $c = 0,0002$	61
Figura 23 – CCIs de 4 itens utilizado como exemplo para cálculo de proficiência com base na TRI.	62

Figura 24 – Página Inicial do Ambiente Virtual de Aprendizagem à Esquerda e Página Principal do Curso “Astronomia na Matemática” à Direita.	72
Figura 25 – Ripas para construção do Visor de Paralaxe: a esquerda uma ripa com demarcação da Madeira e à direita a graduação.	75
Figura 26 – União das ripas para a construção do Visor de Paralaxe.	75
Figura 27 – Fixação dos pregos no Visor de Paralaxe.	76
Figura 28 – Visor de Paralaxe finalizado.	76
Figura 29 – Dispersão da proficiência do pré-teste sobre unidades de medidas.	83
Figura 30 – Nível de proficiência dos estudantes em unidades de medidas.	83
Figura 31 – Dispersão da proficiência do pré-teste sobre Astronomia.	84
Figura 32 – Nível de proficiência dos estudantes em Astronomia.	85
Figura 33 – Dispersão da proficiência do pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo.	85
Figura 34 – Nível de proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo.	86
Figura 35 – Estudantes lendo do manual de instruções para montagem do Visor de Paralaxe.	87
Figura 36 – Medição e marcação das ripas para montagem do Visor de Paralaxe.	88
Figura 37 – Estudantes fixando as ripas do Visor de Paralaxe à esquerda e Visores de Paralaxe montados à direita.	88
Figura 38 – Estudante realizando medição indireta com o Visor de Paralaxe.	89
Figura 39 – Esquema feito pelo grupo 3 antes do cálculo da distância da estrela Sírius.	93
Figura 40 – Nível de proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo no pós-teste.	95
Figura 41 – Comparativo do nível de proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo pré-teste e pós-teste.	95
Figura 42 – Autoanálise dos estudantes do nível de proficiência em Trigonometria no Triângulo Retângulo antes e depois da intervenção.	96
Figura 43 – Autoanálise dos estudantes em relação à utilização do AVA.	97
Figura 44 – Autoanálise dos estudantes em relação à contribuição da sequência de atividades na compreensão da proposta.	97
Figura 45 – Autoanálise dos estudantes em relação à contribuição da Astronomia na motivação em aprender os conceitos de Trigonometria.	98
Figura 46 – Capa do e-book à esquerda e imagem de inícios dos capítulos do e-book à direita.	100
Figura 47 – Exemplo de Imagens Explicativas no Produto Educacional.	101
Figura 48 – Planilha para lançar os acertos dos estudantes.	157
Figura 49 – Planilha para lançar os parâmetros de avaliação.	157

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuição dos valores atribuídos aos parâmetros a , b e c nos itens dos testes aplicados.	67
Tabela 2 – Dados das estrelas para que os grupos calculem a distância destas à Terra. .	71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- AVA - Ambiente Virtual de Aprendizagem;
- BNCC - Base Nacional Comum Curricular;
- CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
- ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio;
- FGV - Fundação Getúlio Vargas;
- PE - Produto Educacional;
- PM - Polícia Militar;
- PNLD - Programa Nacional do Livro Didático;
- PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional;
- SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica;
- SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo;
- Sd - Soldado;
- SEDUC - Secretaria de Estado de Educação;
- SI - Sistema Internacional de Unidades;
- TRI - Teoria da Resposta ao Item;
- UNEMAT - Universidade do Estado de Mato Grosso;

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	QUESTÃO INICIAL	27
1.2	PROBLEMATIZAÇÃO	27
1.3	OBJETIVOS	28
1.3.1	Objetivo Geral	28
1.3.2	Objetivos Específicos	29
2	REFERENCIAL TEÓRICO	31
2.1	O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO BRASIL	31
2.2	RELATO HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA	33
2.2.1	Desenvolvimento da Trigonometria na antiguidade	33
2.2.2	Histórico do Desenvolvimento Ocidental da Trigonometria	37
2.3	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: CASOS LLL, LAL E AA	40
2.3.1	Relações Métricas no Triângulo Retângulo	42
2.4	TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	43
2.4.1	Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	43
2.4.2	Consequências das Razões Trigonométricas	45
2.5	PARALAXE	46
2.5.1	Paralaxe geocêntrica e heliocêntrica	48
2.6	DISTÂNCIAS ANGULARES E ASTRONÔMICAS	49
2.6.1	Unidade Astronômica	49
2.6.2	Ano-Luz	50
2.6.3	Parsec	52
2.7	AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	53
2.7.1	Pré-teste e pós-teste	54
2.8	A TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM	55
2.8.1	Modelos dicotômicos aplicados às populações	57
2.9	PROFICIÊNCIA	59
2.9.1	Determinando a escala de proficiência	60
2.9.2	Determinando a proficiência para vários itens	61
2.10	PRODUTO EDUCACIONAL	63
3	METODOLOGIA	65
3.1	DELIMITAÇÃO DO TEMA	65
3.2	MATERIAIS E RECURSOS	65
3.3	PÚBLICO ALVO PARA A APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE AULA	66
3.4	MODELO DE ANÁLISE	66
3.4.1	Proficiência	66

3.4.2	Intervalos Qualitativos de Proficiência	68
3.4.3	Como foi planejado, executado e analisado o Pré-teste	69
3.4.4	Como foi planejada, organizada e executada a sequência didática	70
3.4.5	Como foi planejado e executado o pós-teste	72
3.4.6	Materiais no Ambiente Virtual de Aprendizagem	72
3.4.7	Análise da aprendizagem e da motivação dos estudantes no desenvolvimento do trabalho	73
3.4.8	Construção do Visor de Paralaxe	74
3.5	O PRODUTO EDUCACIONAL	76
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	79
4.1	OBSERVAÇÕES ACERCA DO MATERIAL DIDÁTICO UTILIZADO NA ESCOLA	79
4.1.1	Observações acerca do Livro <i>Trilhas da Matemática</i>	80
4.1.2	Observações acerca do Material Estruturado Didático do Estado de Mato Grosso	80
4.2	DISCUSSÃO DAS APLICAÇÕES DOS PRÉ-TESTES	82
4.2.1	Pré-teste sobre Unidades de Medidas	82
4.2.2	Pré-teste sobre Astronomia	84
4.2.3	Pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo	85
4.3	APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	86
4.3.1	Construção do Visor de Paralaxe	87
4.3.2	Medição Indireta Utilizando o Visor de Paralaxe	88
4.3.3	Medição da Distância entre Estrelas e a Terra Utilizando a Paralaxe Heliocêntrica	92
4.4	PÓS-TESTE SOBRE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	94
4.5	ANÁLISE DOS DEPOIMENTOS DOS ESTUDANTES SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	96
4.5.1	Compreensão dos Conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo	96
4.5.2	Avaliação dos temas propostos	96
4.6	O PRODUTO EDUCACIONAL	100
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	103
6	PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	107
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL DE UNIDADES DE MEDIDAS	113
	APÊNDICE B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL DE ASTRONOMIA	115

APÊNDICE C – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO . . .	119
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO PARA OPINIÃO DOS ESTUDANTES SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA .	125
APÊNDICE E – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO À CONSTRUÇÃO DO VISOR DE PARALAXE	127
APÊNDICE F – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO AOS CÁLCULOS DE DISTÂNCIAS COM O VISOR DE PARALAXE	137
APÊNDICE G – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO AOS CÁLCULOS DE DISTÂNCIAS ASTRONÔMICAS	143
APÊNDICE H – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO À MOTIVAÇÃO GERADA PELA ASTRONOMIA . . .	149
ANEXO A – IMAGENS DA PLANILHA PREPARADA COM A TRI PARA O CÁLCULO DA PROFICIÊNCIA	157

1 INTRODUÇÃO

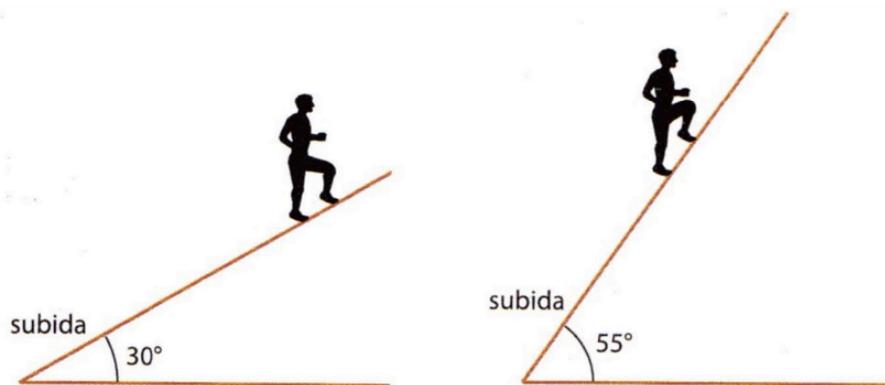
O ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo faz parte do currículo do estudante na educação básica. São inúmeras aplicações deste conteúdo na engenharia em geral nas ciências, das quais o docente pode encontrar diversos exemplos dos quais podem servir de motivação para aprender seus principais conceitos (LINDEGGER, 2000).

Na prática diária em sala de aula, o docente se depara com uma certa desmotivação dos estudantes no ensino de diversos conteúdos matemáticos, o que cria certo bloqueio no aprendizado e na fixação de conceitos importantes, dos quais podem ser utilizados em outros componentes curriculares, como é o caso da Física e da Química (OLIVEIRA, 2006).

No ensino de Trigonometria são apresentados diversos conceitos importantes na resolução de problemas diários de várias áreas do conhecimento, mas, segundo Oliveira (2006), os estudantes não conseguem vislumbrar uma aplicação motivadora que os instigue a aprender este conteúdo.

Noções elementares do triângulo retângulo aplicadas em diversos cálculos de distâncias são apresentadas, como forma de contextualização, atreladas à distâncias em figuras de margens de rios, altura de árvores e edifícios, dentre outros exemplos nos quais os estudantes não veem uma aplicação na qual os motive, mesmo que indiretamente, a querer aprender, e mais ainda, aprofundar no conhecimento ensinado, o que nos mostra que estas contextualizações não são suficientes. Assim podemos observar o que traz Dante (2008, p. 87) ao utilizar como exemplo a subida de uma pessoa em duas rampas de inclinação diferentes, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1 – Exemplo de aplicação da Trigonometria no Triângulo Retângulo em um livro didático do Ensino Médio.



Fonte: (DANTE, 2008).

Em sala de aula, a contextualização pode ser utilizada não somente como uma aplicação no cotidiano do estudante pois, em uma turma regular, o contexto social é bastante diversificado

devido à condição e interesse de cada um. A contextualização, ao ser utilizada, precisa buscar a atenção da maior quantidade de estudantes presentes em sala de aula, fazendo com que eles estejam mais motivados a aprender (BRASIL, 2018).

Como aplicação dos conceitos da Trigonometria no Triângulo Retângulo, o professor tem a opção de instigar a curiosidade do estudante em áreas onde estes conceitos são utilizados, como é o caso da Astronomia. A curiosidade sobre o universo paira sobre a humanidade desde as primeiras civilizações, quando o homem olhou para o céu à noite e indagou sobre os pontos brilhantes, iniciando uma caminhada na busca do desconhecido (TYSON, 2017).

Conforme dito por Schwarza (2020), com a diferenciação dos corpos celestes¹ após a observação feita por Galileu Galilei por meio de uma luneta, foi oportunizado à humanidade um avanço tecnológico para que pudessemos alcançar o espaço sideral tal como hoje conhecemos.

O ser humano começou a querer desbravar o cosmos, a fim de fazer observações cada vez mais próximas destes corpos celestes, melhorando a resolução das imagens para que pudessemos ver mais detalhes de atmosferas, superfícies e demais características, fazendo com que o estudo da Astronomia fosse aprofundado e, em paralelo, imagens do que antes era desconhecido pôde chegar a toda a humanidade e fazer com que diversas outras perguntas pudessem ser feitas (SCHWARZA, 2020).

Com isso, a motivação para o desenvolvimento deste trabalho vem da busca de uma maneira na qual podemos aplicar a Matemática de forma mais atraente e interessante aos nossos estudantes, fazendo com que eles sintam que fazem parte da construção do próprio saber, tornando o conhecimento matemático, até então abstrato, em algo tangível, o que se espera uma melhor compreensão do conteúdo.

Especificamente para o Ensino Médio, na área de Matemática nos três anos desta etapa da educação básica, estão previstos aprofundamentos e conhecimentos em conteúdos programáticos tais como a Geometria Euclidiana Plana, noções de distâncias e unidades de medidas padrão. Para tanto, será introduzido o conhecimento de Astronomia como agente motivador no aprendizado desta proposta (BRASIL, 2018). No que concerne à Geometria Euclidiana Plana, são necessários os conceitos abordados no estudo de formas geométricas simples como circunferências, elipses e triângulos, mais especificamente o triângulo retângulo que é o principal objeto de estudo deste trabalho.

Ao introduzir as unidades de medida padrão, do Sistema Internacional de Unidades (SI), os estudantes podem vislumbrar o padrão e o rigor científico na construção de todo o conhecimento teórico e empírico ao apresentar as unidades padrão para distâncias (próximas e astronômicas) e a unidade padrão natural de representação angular (radianos). Os conceitos de Astronomia foram utilizados como agentes motivadores na construção do aprendizado, uma

¹ Segundo o Mundo da Educação, Corpos Celestes é um termo utilizado no meio astronômico quando se quer referenciar as matérias existentes fora do Planeta Terra. Sendo assim, este termo pode ser aplicado às estrelas, planetas, asteroides, cometas, satélites naturais, bem como materiais lançados pelo homem ao espaço.

vez que foram apresentadas noções do movimento celeste com referencial terrestre, bem como a Paralaxe Heliocêntrica como método de cálculo de distâncias de estrelas próximas. Além disso, a atividade desenvolvida não requer recursos matemáticos avançados, *e.g.*, o cálculo diferencial e integral. Sendo assim, os estudantes de Ensino Médio possuem total capacidade de acompanhar e compreender os passos que os conduzem às suas conclusões. Contudo, para analisar o aprendizado dos estudantes serão utilizados conceitos básicos de Modelagem Matemática, tais como ajuste de curvas pelo Método dos Mínimos Quadrados, na busca de quantificar o nível de aprendizado dos estudantes ao final da aplicação.

Foi valorizada uma modelização do problema proposto que, como Linus Pauling costumava afirmar, “*envolverá a renúncia à esperança de descrever em detalhes exatos o comportamento do sistema*” (PAULING, 1985). Portanto, simplificações adequadas podem se fazer necessárias no desenvolvimento deste trabalho.

Nos testes prévios poderá ser verificada uma certa perplexidade e um certo grau de desmotivação de grande parte dos estudantes no aprendizado dos conceitos abordados por não vislumbrarem uma aplicação instigante dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo. Quando levantarem de suas cadeiras e saírem da sala de aula para realizarem os experimentos necessários, espera-se uma melhora na motivação e no aprendizado dos conhecimentos abordados, fazendo com que a fixação dos conceitos seja mais efetiva.

1.1 QUESTÃO INICIAL

Seria possível integrar conceitos de Astronomia no Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo, a fim de motivar os estudantes a aprenderem este importante conteúdo matemático, apresentando uma aplicação real e instigante na qual aprofunda a curiosidade que a Astronomia pode trazer ao ser humano?

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Ao inserir os conceitos básicos de trigonometria para os estudantes do Ensino Médio Regular é notório o nível de insatisfação com o conteúdo explicado, o qual é gerado pela falta de uma aplicação que os motive a aprender determinados conceitos. Como dito por Miranda, Padilha e Ciani (2013, p. 6-7):

[...] especialistas em Ensino de Matemática, em suas experiências em sala de aula, indicam um desinteresse para aprender e ensinar Trigonometria. Consideram imprescindível conhecer a história da Matemática a fim de compreender os conceitos, é de fundamental importância que se estabeleça um vínculo com a realidade, de se saber como surgiu, saber que aquilo nem sempre existiu daquela maneira. Consideram ainda importante a utilização de materiais manipuláveis. Uma atividade proposta em seu trabalho diz respeito a um suposto asteroide que estaria se aproximando da Terra e, se não for encontrada

uma maneira eficaz para desviá-lo de sua rota, este irá chocar-se com o nosso planeta (MIRANDA; PADILHA; CIANI, 2013, p. 6-7).

Nota-se, ainda, que é possível que seja realizada uma transdisciplinaridade² entre a Matemática, a História e a Geografia, assim a contextualização da Trigonometria será mais eficaz.

Como o objetivo é gerar uma motivação no aprendizado da Trigonometria no Triângulo Retângulo utilizando a Astronomia como agente motivador, descrevo abaixo as questões destes trabalho:

1. Qual o nível de proficiência inicial de resolução de problemas sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo que os estudantes trazem?
2. Qual o nível de proficiência inicial sobre unidades de medidas padrão que os estudantes trazem?
3. Qual o nível de proficiência inicial sobre Astronomia, por exemplo, distâncias celestes, que os estudantes trazem?
4. Como a Astronomia pode ser utilizada como agente motivador no Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo?
5. Quais recursos e metodologias podem ser utilizados para fomentar o interesse no aprendizado?
6. Como avaliar a motivação dos estudantes ao final do desenvolvimento do trabalho?

Estas questões nortearam o desenvolvimento dos objetivos e da metodologia deste trabalho.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Analisar a melhora da proficiência dos estudantes na resolução de problemas que envolvam Trigonometria no Triângulo Retângulo por meio de avaliações diagnósticas pré-teste e pós-teste por meio do tema Astronomia, empregando o conceito e medições de paralaxe.

² Segundo a Professora de Língua Portuguesa Flávia Neves, transdisciplinaridade é um conceito da educação que compreende o conhecimento de uma forma plural. É uma corrente de pensamento mais aberta e que busca dar uma resposta ao método tradicional de divisão de disciplinas. As disciplinas são uma divisão artificial feita pelo homem para facilitar as práticas de ensino.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Diagnosticar a proficiência dos estudantes com relação a Trigonometria no Triângulo Retângulo diante das habilidades especificadas pela BNCC;
- Diagnosticar a proficiência dos estudantes em relação a Unidades de Medida de distância, bem como conversão entre unidades de medida;
- Diagnosticar a proficiência dos estudantes em relação a Astronomia Básica: Corpos Celestes, Sistema Solar, Órbita Terrestre e Distâncias Astronômicas;
- Determinar as conexões da Astronomia com a Matemática nas quais sejam efetivas na construção do conhecimento da Trigonometria por meio de revisão bibliográfica;
- Buscar, na literatura, recursos metodológicos que auxiliem no desenvolvimento do trabalho;
- Planejar, organizar e executar uma sequência didática para o ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo com o objetivo de aprofundar a compreensão dos conceitos abordados e melhorar a proficiência dos estudantes;
- Revisar com os estudantes as medidas de comprimento no sistema métrico decimal, além de medidas usadas em distâncias maiores, como ano-luz e demais unidades astronômicas;
- Analisar a melhora da proficiência dos estudantes sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo comparada com o diagnóstico inicial.

Sendo assim, este trabalho aborda em seu *Referencial Teórico*, Capítulo 2, um levantamento bibliográfico no qual relata quais as habilidades a serem desenvolvidas do ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo no Brasil de acordo com documentos oficiais, bem como o desenvolvimento histórico da Trigonometria. Define-se, também, os casos de semelhança de triângulo e as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Ainda é definido o processo de avaliação e elaboração de testes para verificar a proficiência dos estudantes em determinadas habilidades. Para tanto, define-se, em seguida, o modelo matemático probabilístico da Teoria da Resposta ao Item, uma vez que este trabalho visa utilizar-la como método de se verificar a proficiência dos estudantes nas habilidades testadas. Ao final do Referencial Teórico é definido como elaborar um Produto Educacional.

No Capítulo 3, *Metodologia*, são mostrados os métodos empregados em cada parte da pesquisa e do levantamento de dados, bem como o método de análise dos dados coletados.

No Capítulo 4, *Resultados e Discussões*, são apresentados os resultados de toda a pesquisa que justifica a construção deste trabalho, bem como todas as análises dos resultados da

aplicação da sequência didática com os 83 estudantes da Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Moraes Ramos”.

No Capítulo 5, *Considerações Finais*, são mostradas as impressões do pesquisador quanto ao desenvolvimento e execução deste trabalho, relatando se os objetivos propostos foram alcançados.

No Capítulo 6, *Proposta de Trabalhos Futuros*, são apresentadas três propostas de continuação desta pesquisa para trabalhos futuros, as quais poderão contribuir para a melhora da educação básica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo será apresentada toda a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Sendo assim, será mostrado na seção 2.1 o que se espera do Ensino de Trigonometria no Brasil segundo os documentos oficiais.

Na seção 2.2 será apresentado um breve relato histórico do desenvolvimento de toda a Trigonometria, iniciando pelo egípcios antigos, passando pelos romanos na Idade Média e finalizando nos anos modernos com o matemático suíço *Leonhard Euler*.

A fim de fundamentar a Semelhança de Triângulos, a seção 2.3 mostrará e fundamentará os principais casos de Semelhança de Triângulos que, segundo Neto (2013), são ensinados na Educação Básica.

A seção 2.4 fundamentará as Razões Trigonométrica *seno*, *coseno* e *tangente*, demonstrando matematicamente cada uma destas razões.

Uma vez que a Paralaxe foi utilizada para o desenvolvimento da sequência didática, a seção 2.5 define o que é Paralaxe e como é utilizada para calcular distâncias de forma indireta, seguindo para a seção 2.6 na qual são apresentadas e fundamentadas as unidades de medidas de distâncias astronômicas por meio das paralaxes geocêntrica e heliocêntrica.

Uma vez que se quer aferir a eficiência de uma sequência didática por meio de testes aplicados aos participantes, a seção 2.7 mostrará a definição de avaliações e testes, bem como a forma que estes instrumentos devem ser utilizados para se aferir o aprendizado dos estudantes.

Sendo necessário um modelo no qual seja mais confiável para aferir o aprendizado dos estudantes, foi escolhido o modelo matemático probabilístico da Teoria da Resposta ao Item (TRI) para aferir a proficiência, que nada mais é que as habilidades desenvolvidas, dos estudantes em um determinado assunto. Para tanto, este modelo é apresentado na seção 2.8, seguido da seção 2.9 onde é mostrado o cálculo da proficiência para um ou mais itens segundo a TRI.

Por fim, a seção 2.10 relata como um produto educacional pode ser elaborado a fim de auxiliar os docentes em sua prática diária.

2.1 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO BRASIL

A Base Nacional Comum Curricular propõe que o Professor de Matemática utilize estratégias diferenciadas a fim de contribuir para a formação geral dos estudantes. São competências específicas no ensino de Matemática, segundo BRASIL (2018, p. 523):

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma

formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 523).

Ainda, BRASIL (2018, p. 528-529) traz como habilidades relacionadas à Trigonometria que devem ser desenvolvidas na educação básica:

(EM13MAT306)¹ Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos (BRASIL, 2018, p. 528-529).

Neste caso, segundo a BNCC, o docente pode buscar estratégias das quais facilite a compreensão dos conceitos matemáticos que são abordados, fazendo com que o estudante consiga vislumbrar a real aplicação dos conceitos a serem estudados. Inicialmente, o docente pode adotar contextualizações nas quais deixem os estudantes mais curiosos, fazendo com que a vontade de aprender se sobreponha à vontade de permanecer na inércia (BRASIL, 2018).

Sendo assim, além de ter grande conhecimento da realidade na qual seus estudantes vivem, propõe-se o professor aborde os conceitos a serem lecionados de forma a fazer com que estes estudantes o conectem ao seu dia-a-dia. Neste caso, uma abordagem diferenciada se faz necessária, o que só é possível quando o docente tem um bom conhecimento transdisciplinar, isto é, rompe a barreira do conhecimento específico da sua disciplina e adentra, mesmo que de forma superficial, em conceitos de outras disciplinas, sempre fazendo conexões com os conceitos abordados (NICOLESCU, 1999).

¹ Segundo BRASIL (2018), o código de habilidades da BNCC é uma composição alfanumérica que corresponde a uma faixa etária diferente. Tomando como exemplo o código EM13MAT306, tem-se que *EM* representa a etapa escolar, sendo neste caso Ensino Médio; *13* representa a série/ano que a habilidade pode ser desenvolvida, neste caso indica que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio; *MAT* indica a área do conhecimento, neste caso Matemática e suas Tecnologias; *306* indica a competência específica à qual se relaciona a habilidade (primeiro algarismo) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos algarismos)

A transdisciplinaridade é complementar à abordagem disciplinar; faz emergir do confronto das disciplinas novos dados que as articulam entre si; e ela nos oferece uma nova visão da natureza e da realidade. A transdisciplinaridade não busca o domínio de várias disciplinas, mas a abertura de todas elas àquilo que as atravessa e as ultrapassa (NICOLESCU, 1999, p. 2).

Sendo assim, a transdisciplinaridade não é a criação de uma nova disciplina, mas uma forma do docente adquirir conhecimento de outras disciplinas a fim de ampliar as possibilidades interpretativas de maneira mais rica, uma vez que os docentes dotados dessa característica estão mais abertos à possibilidade do autoconhecimento (FLORES; FILHO, 2016).

No ensino de Trigonometria, a transdisciplinaridade se faz mais ainda necessária, uma vez que os conceitos abordados não são utilizados somente no Ensino da Matemática, mas também está presente no ensino de conteúdos da Física, Engenharia e Astronomia, sendo que este último faz com que a maioria das pessoas, naturalmente, aumentem a curiosidade e potencialize o aprendizado dos conceitos trigonométricos (MIRANDA; PADILHA; CIANI, 2013).

2.2 RELATO HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DA TRIGONOMETRIA

Como em toda a Matemática, a Trigonometria *TRI (três) GONO (ângulos) METRIA (medidas)* não foi desenvolvida tão rapidamente, foram necessários séculos para que ela se desenvolvesse para chegar ao ponto no qual conhecemos hoje e é ensinada em sala de aula. Segundo Aaboe (1984), a Trigonometria surgiu a partir de problemas dos quais as civilizações antigas enfrentavam na Navegação, na Astronomia e na Agrimensura².

2.2.1 Desenvolvimento da Trigonometria na antiguidade

Abaixo será relatado o desenvolvimento da Trigonometria pelos povos antigos. Tal desenvolvimento, como se pode observar, foi lento ao longo do tempo, sendo necessário o surgimento de novos teoremas para que desse prosseguimento a este desenvolvimento (AABOE, 1984).

Iniciando pelos povos egípcios, tem-se o primeiro registro conhecido que referenciava a Trigonometria vem dos egípcios em que o Papiro de Rhind, Figura 2, traz diversas soluções para problemas da época, sempre tentando postular conceitos matemáticos a fim de que futuros matemáticos, a serviço do faraó, pudessem utilizar em seus cálculos (SANTOS, 2017).

² Segundo o dicionário Michaelis, “Agrimensura arte ou conjunto de técnicas utilizadas para medir a superfície dos terrenos, de levantar plantas e trasladá-las para o papel.”

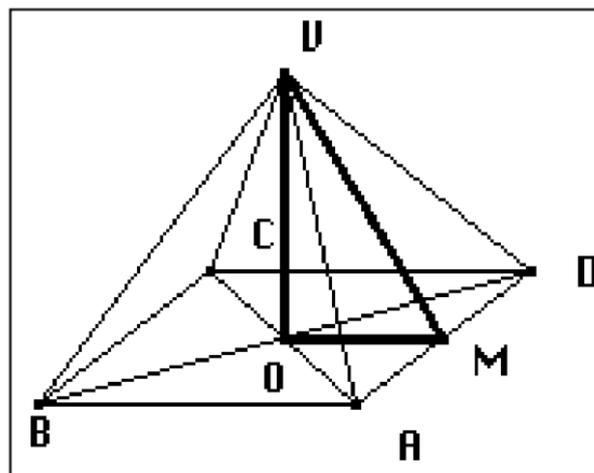
Figura 2 – Papiro de Rhind, documento egípcio datado de 1 650 a.C. que se encontra no Museu Britânico.



Fonte: Santos (2017).

Para a construção das Grandes Pirâmides, tumbas dos antigos faraós do Egito, devido a constante inclinação de suas faces laterais, formadas por triângulos, surgiu o conceito de *seqt*, que nada mais é do que a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical da pirâmide. Mesmo não sendo claro como se dava esta definição, conclusões apontam que esta definição seja a representação da cotangente do ângulo $\hat{O}MV$, conforme mostra a Figura 3 (AABOE, 1984).

Figura 3 – Representação egípcia da razão entre afastamento horizontal e elevação vertical (*seqt*).

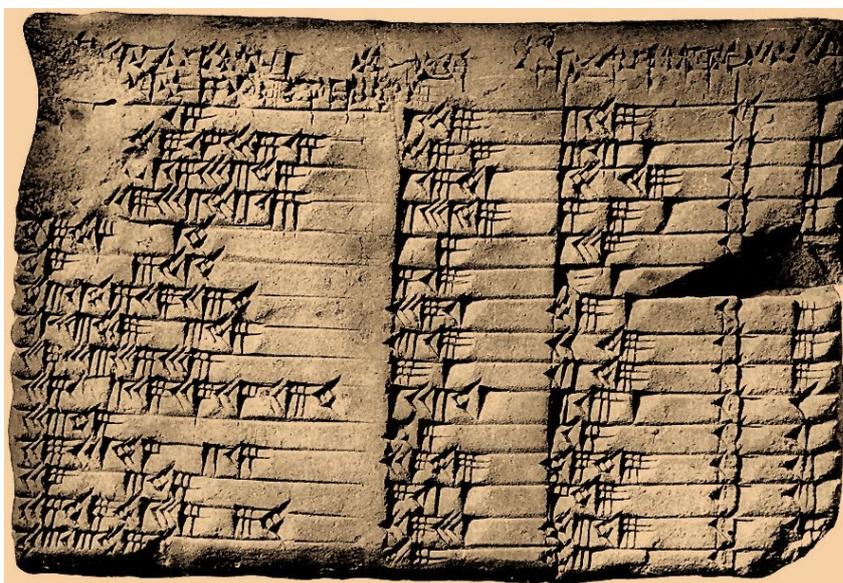


Fonte: Disponível em <<http://ligadamatematica.blogspot.com/2013/11/a-historia-da-trigonometria.html>>. Acessado em outubro de 2022.

Com o passar do tempo, a humanidade demonstrou grande interesse na Astronomia, os Babilônicos desenvolveram métodos trigonométricos que propiciaram o cálculo de distâncias cósmicas que hoje, após serem analisados com a tecnologia atual, pode-se notar que a precisão era satisfatória (SANTOS, 2017).

Como registro babilônico em relação à Trigonometria, podemos citar a tabela Plimpton 322 (Figura 4), que data de 1900 a.C. a 1600 a.C., inferindo, ali, conceitos elementares da Trigonometria.

Figura 4 – Tabela de Plimpton 322, tabela de argila babilônica datada de 1 800 a.C. que se encontra no Museu Arqueológico de Istambu.



Fonte: Disponível em <http://1.bp.blogspot.com/-_GhPScF5tzI/VELq-ThjU6I/AAAAAAAAAZW4/gygTfzYcgXI/s1600/Plimpton_322.jpg>. Acessado em outubro de 2022.

A partir dos gregos antigos, a Matemática sofre uma grande mudança de paradigmas: deixa de lado seu caráter empírico e adota o formato de uma ciência organizada e bem fundamentada, contribuindo significativamente para a construção da Trigonometria (MOL, 2013).

O período datado de 625 a.C. a 212 a.C. é muito bem fundamentado em Sousa e Sobrinho (2020, p. 15):

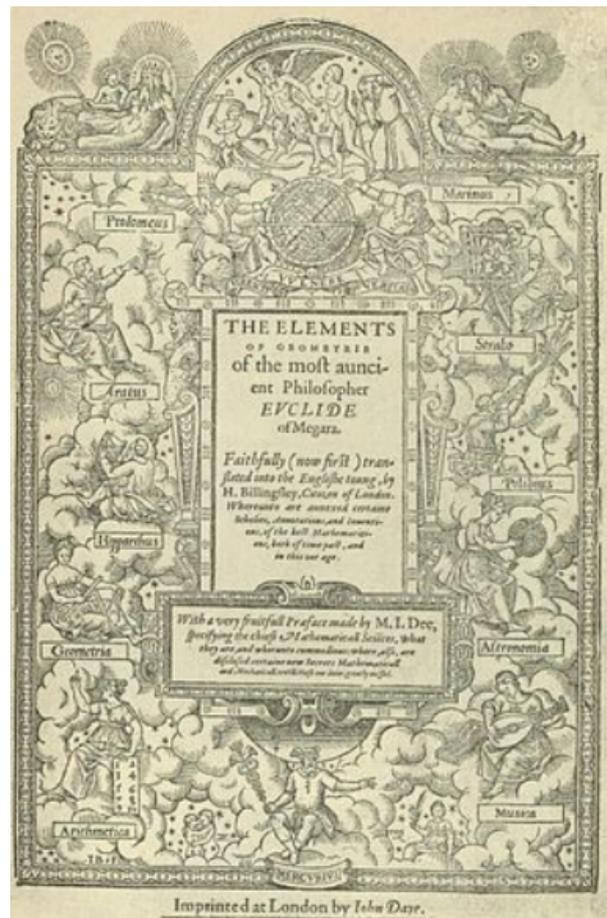
No que tange à elementos de conhecimento de Trigonometria os gregos faziam uso também do já mencionado gnomon, batizado por eles, segundo Heródoto (490-420 a.C.), como relógio de Sol.

A Grécia foi um celeiro de grandes pensadores. Dentre os quais elencamos Thales de Mileto (625-546 a.C.), contribuindo com estudos sobre semelhanças; Pitágoras (570-495 a.C.) com o teorema famoso que leva seu nome; e daí a escola Pitagórica (século V a.C.) desenvolvendo estudos sobre o som; Hip-sicles (180 a.C.) divide o zodíaco em 360 partes; Eratóstenes de Cirene (276-196 a.C.), contemporâneo de Arquimedes (287-212 a.C.) e Aristarco (310-230

a.C.) usaram a Trigonometria para o cálculo da circunferência da Terra (o que mostra uma relação direta com a Astronomia) (SOUSA; SOBRINHO, 2020, p. 15).

Com a sua obra *Os Elementos*, Figura 5, Euclides (século III a.C.) influenciou o desenvolvimento da Matemática até o século XIX, sendo que, segundo Mol (2013), “teve contribuição de outros matemáticos sob a coordenação de Euclides”.

Figura 5 – Os Elementos de Euclides - primeira edição em língua inglesa, de 1570.



Fonte: Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Os_Elementos>. Acessado em outubro de 2022.

Ainda, segundo Sousa e Sobrinho (2020, p. 16), temos:

Destaca-se no período helênico, com sua abordagem de conteúdos trigonométricos, Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.). Este dividiu a circunferência em 360 partes, construiu a primeira tabela trigonométrica e observou que num dado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180° para 0° . Seria este um resultado moderno para a expressão:

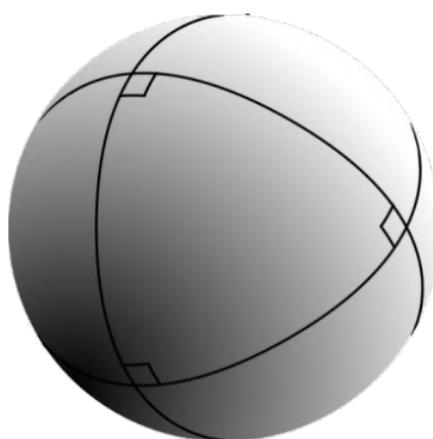
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad (1)$$

Assim, Hiparco ganhou o nome de *Pai da Trigonometria* (SOUSA; SOBRINHO, 2020, p. 16).

Escrita por Cláudio Ptolomeu (90 - 168), a obra *Almagesto* ganha destaque na Astronomia da Antiguidade, onde sistematiza os resultados preliminares de Hiparco indispensáveis naquele tempo. “O *Almagesto* é um marco no modelo de Astronomia e perdurou como referência até Nicolau Copérnico, no século XVI” (SOUSA; SOBRINHO, 2020, p. 18).

Em 100 d.C. surge o famoso *Teorema de Menelau* na obra *Sphaerica* do matemático Menelau de Alexandria, demonstrando a trigonometria de cordas no círculo, bem como a Trigonometria Esférica, Figura 6, que estuda todas as propriedades dos triângulos e ângulos esféricos.

Figura 6 – Esfera marcada com três circunferências máximas.



Fonte: Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria_esférica>. Acessado em outubro de 2022.

Sendo assim, segundo Mol (2013, p. 63), “os polos de criação matemática se deslocaram na direção do Oriente. A matemática ganhou contribuições vindas da Índia e, sobretudo, do Império Árabe, que deixaram consequências importantes em sua estrutura”.

2.2.2 Histórico do Desenvolvimento Ocidental da Trigonometria

Avançando para o tempo comum onde podemos destacar a queda do Império Romano no ano de 476 até a tomada de Constantinopla, esta que foi a capital do Império Bizantino no ano de 1453, podemos destacar que foram fundadas as primeiras universidades nos séculos XII e XIII, em que os conceitos matemáticos eram transmitidos em quatro artes matemáticas: aritmética, geometria, música e astronomia (MOL, 2013).

Importante desmembrar este desenvolvimento ocidental em duas épocas: Idade Média e Idade Moderna, conforme será feito a seguir.

Na Idade Média se destacam importantes astrônomos árabes por volta do século XI, tais

como *Ibrâhîm ibn Yahyâ al Naqqâsh* e *Jabir ibn Aflah*, os quais migraram até a Espanha para trabalhar, fazendo com que, assim, diversos conceitos fossem disseminados.

Segundo Mol (2013), Leonardo de Pisa, que viveu na Europa Medieval entre 1170 e 1250, é considerado o mais importante matemático daquela época. Leonardo é autor da obra *Practica Geometriae*, onde demonstra a aplicação da Trigonometria à Agrimensura.

As *Tábuas Afonsinas*, Figura 7, produzidas por estudiosos em 1254 a partir da tradução de textos árabes por ordem do rei Afonso X de Castela, foram documentos importantes na navegação naquela época, sendo que, no século XIV, Purbach calculou, a partir da obra de Ptolomeu, uma nova tábua de senos, tendo uma enorme contribuição do seu discípulo Regiomontanus (1436-1475) que “tem destaque com seu *De Triangulis Omnimodus* escrito em 1464, e o posterior *Tabulae Directionum*, que incluía a função tangente” (SOUSA; SOBRINHO, 2020).

Figura 7 – Tábuas Afonsinas, artefato histórico do século XIII.

The image shows two pages of the Alfonsine Tables, a historical astronomical and trigonometric table. The pages are filled with columns of numbers, likely representing sine, cosine, and tangent values for various angles. The text is written in a medieval Gothic script, with some headings in red ink. The tables are organized into columns, with some columns containing numbers and others containing text or symbols. The overall appearance is that of a dense, handwritten mathematical document.

Fonte: Disponível em <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/eb/Tablas_alfonsies.jpg/800px-Tablas_alfonsies.jpg>. Acessado em outubro de 2022.

Nos tempos modernos, segundo Mol (2013), depois de passar por guerras e doenças, a Europa despertou, novamente, para diversas atividades, proporcionando o desenvolvimento da literatura, arte e ciência.

Por outro lado, Sousa e Sobrinho (2020, p. 20) diz que:

A invenção da prensa com o alemão Johannes Gutemberg (1398-1468) propiciou o cenário para a difusão do conhecimento e com isso a atividade matemática desloca-se repetidamente para diversos países.

Com o trabalho de Joachim Rheticus em Leipzig (1551), “*Canon 14 Doctrinae et Triangulorum*” as funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões.

Os textos de Rhaeticus (1514-1576) retomou o trabalho sobre as tábuas de Regiomontanus de 1464, com maior rigor nos cálculos (SOUSA; SOBRINHO, 2020, p. 20).

Sousa e Sobrinho (2020) ainda ressalta os trabalhos do bacharel em direito *François Viète* (1540-1603), que desenvolveu o tratamento analítico na Trigonometria, aplicando as transformações algébricas.

Outra obra importante que podemos destacar é *Geometria Rotundi*, de *Thomas Fincke*, onde foi publicada a expressão equivalente às leis da tangente:

$$\frac{\tan(A + B)}{\tan(A - B)} = \frac{a + b}{a - b} \quad (2)$$

O Polonês *Nicolau Copérnico* (1473-1543) confrontou o modelo geocêntrico e defendeu o heliocentrismo em sua obra *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes*.

Reis (2016) diz que no ano de 1595, *Bartholomaeus Pitiscus* (1561-1613) publica a primeira obra trazendo a palavra Trigonometria em seu título.

Avançando para o século seguinte, podemos destacar o que foi dito por Sousa e Sobrinho (2020, p. 22):

Nos séculos XVI e XVII, citamos John Napier (1550-1617), matemático escocês que escreveu duas fórmulas trigonométricas para resolver triângulos esféricos e encontrou expressões exponenciais para funções trigonométricas. E ainda ano de 1626 [...] Albert Girard (1595-1632) publicou a obra mais antiga com o uso das abreviações sin, tan e sec para seno, tangente e secante.

No contexto britânico, dentre os principais expoentes com publicações sobre a Trigonometria destacamos Oughtred, que em 1657, usou símbolos para desenvolver suas abordagens. John Newton (1622-1678) publicou em 1658 o tratado "Trigonometria Britannica", o livro mais amplo sobre o tema à época. John Wallis (1616-1703) expressou fórmulas usando equações em vez de proporções. Isaac Newton (1642-1727) contribuiu com estudos sobre cálculos infinitesimais, expandindo o uso $\arcsin(x)$.

A partir dos estudos de Newton, o matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) contribuiu no estudo da trigonometria pavimentando o caminho da abordagem para o $\sin(x)$ e o $\cos(x)$ surgirem como números e não como grandezas. Após isso, Thomas-Fanten de Lagny (França), em 1710, foi o primeiro matemático a evidenciar a periodicidade das funções trigonométricas. E por fim, Kastner, (1719-1800) em 1759, foi o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros (SOUSA; SOBRINHO, 2020, p. 22).

Finalizando o apanhado histórico trazido até aqui, pode-se destacar o maior matemático do século XVIII, o suíço *Leonhard Euler* (1707-1783). Euler tem uma vasta obra composta por 560 livros e artigos, sendo que pode chegar a 800 manuscritos publicados após sua morte, conforme dito por Sousa e Sobrinho (2020).

Em *Introductio in Analysin Infinitorum*, Euler, Figura 8, introduz a notação de $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$, elaborando um tratamento analítico da trigonometria e relacionando às funções dos ângulos com os círculos unitários.

Figura 8 – Leonhard Euler, matemático suíço que viveu no século XVIII e foi responsável por grandes avanços na Matemática.



Fonte: Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Eule>. Acessado em outubro de 2022.

2.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: CASOS LLL, LAL E AA

Segundo Neto (2013, p. 166):

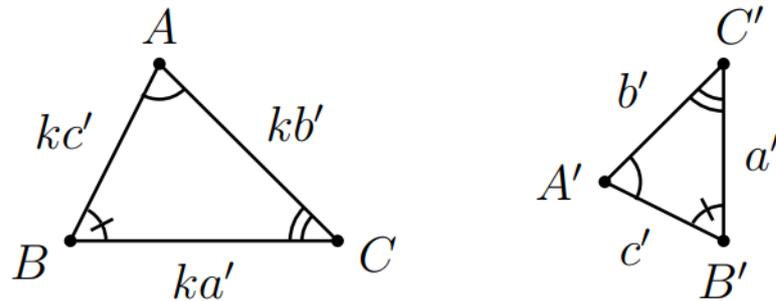
Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (NETO, 2013, p. 166).

Sendo assim, dois triângulos são semelhantes caso seja possível dilatar, girar, refletir e/ou transladar um deles, fazendo com que obtemos um outro triângulo ao final.

Na Figura 9, Neto (2013) mostra dois triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$. Como há igualdade entre os ângulos, tal que, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$ são correspondentes, então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k, \quad (3)$$

sendo k um número real positivo e razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$ nesta ordem. Então dizemos que $ABC \sim A'B'C'$.

Figura 9 – Dois triângulos semelhantes.

Fonte: Neto (2013, p. 129).

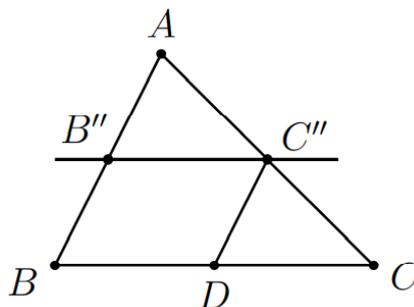
Neto (2013) diz que os casos mais comuns de semelhança entre triângulos são Lado Lado Lado (LLL), Lado Ângulo Lado (LAL) e Ângulo Ângulo (AA).

- *Caso de Semelhança LLL*

Sendo os triângulos da Figura 9 e, ainda, o disposto na Equação (3), temos que $ABC \sim A'B'C'$ pelo caso LLL, com os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$ correspondentes e $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$ (NETO, 2013). Para demonstrar esta razão de semelhança, Neto (2013) sugere que k é o valor comum das razões dadas, então:

$$\begin{cases} \overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'} \\ \overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}. \end{cases} \quad (4)$$

Supondo $k > 1$, marcamos em \overline{AB} o ponto médio B'' , conforme mostra a Figura 10

Figura 10 – Prova do caso de semelhança LLL.

Fonte: Neto (2013, p. 130).

Sendo C'' o ponto de interseção do lado \overline{AC} , temos que $\overline{B''C''} \parallel \overline{BC}$, o que nos dá a seguinte razão de semelhança:

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k}. \quad (5)$$

Sendo, ainda, $\overline{BB''} \parallel \overline{DC''}$, então vemos o quadrilátero $B''C''BD$, que é um paralelogramo, o qual nos dá a seguinte razão de semelhança:

$$\frac{\overline{B''C''}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k} \quad (6)$$

Sendo assim, tem-se que $\overline{AB''} = \overline{C''D}$, $\overline{AC''} = \overline{C''D}$ e $\overline{B''C''} = \overline{CD}$, o que prova que os triângulos $AB''C''$ e $CC''D$ são semelhantes pelo caso LLL.

■

- *Caso de Semelhança LAL*

Sendo os triângulos da Figura 9 e, ainda, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k$ e $\widehat{B} = \widehat{B}'$, temos que $ABC \sim A'B'C'$ pelo caso LAL, com os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$ correspondentes e $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$ (NETO, 2013).

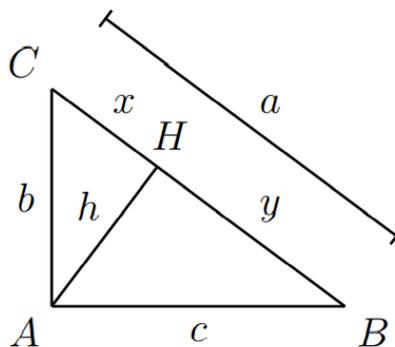
- *Caso de Semelhança AA*

Sendo os triângulos da Figura 9 e, ainda, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ e $\widehat{B} = \widehat{B}'$, temos que $ABC \sim A'B'C'$ pelo caso AA, com os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$ correspondentes e $\widehat{A} = \widehat{A}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$ (NETO, 2013).

2.3.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Dados os casos de semelhança demonstrados anteriormente, Neto (2013) mostra ser imediato as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, considerando a Figura 11, listados a seguir:

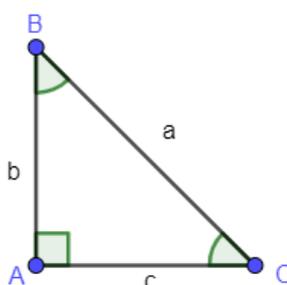
- $ah = bc$;
- $ax = b^2$ e $ay = c^2$;
- $a^2 = b^2 + c^2$;
- $xy = h^2$.

Figura 11 – Relações Métricas num Triângulo Retângulo.

Fonte: Neto (2013, p. 133).

2.4 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Segundo Iezzi (1977), um triângulo é considerado retângulo quando um de seus ângulos internos tem o arco de 90° .

Figura 12 – Triângulo Retângulo e seus elementos.

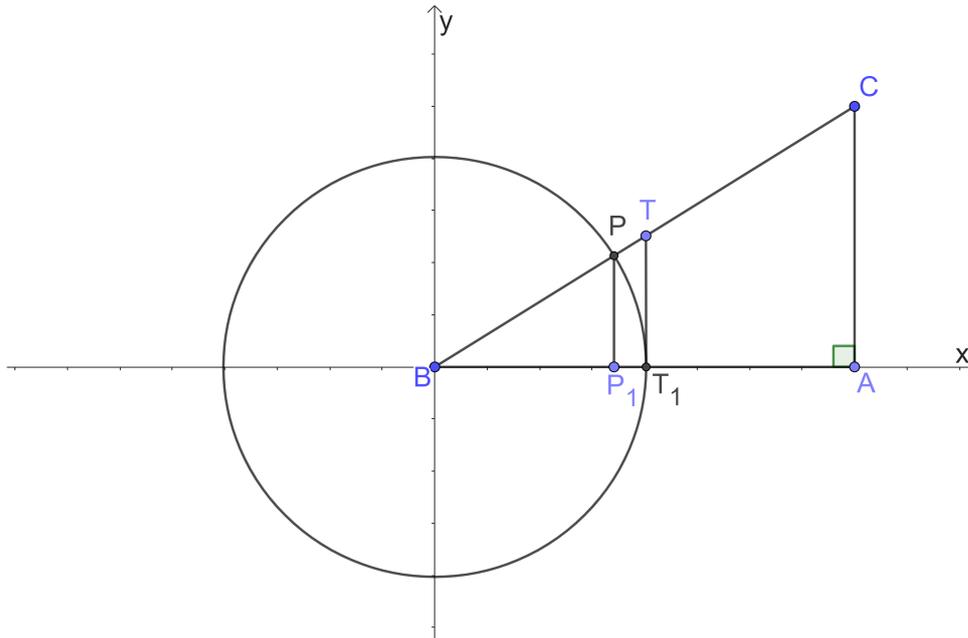
Fonte: Próprio autor.

Observando o Triângulo Retângulo da Figura 12, temos os seguintes elementos:

- Lados $\overline{AB} = b$ e $\overline{AC} = c$ chamados de catetos e o lado $\overline{BC} = a$ chamado de hipotenusa;
- Ângulos agudos \widehat{ABC} e \widehat{ACB} , bem como o ângulo reto \widehat{BAC} .

2.4.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Para que sejam demonstradas as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo considere a Figura 13:

Figura 13 – Triângulo Retângulo para demonstração das Razões Trigonômicas.

Fonte: Próprio autor.

Para tanto, considere esta circunferência com o raio unitário e centro em B e fixar o sistema xBy de referência.

- *Seno*

Sabendo que os triângulos BPP_1 e BCA da Figura 13 são semelhantes, e que o círculo tem raio unitário, ou seja, $\overline{BP} = 1$, temos que:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} \implies \frac{\widehat{\text{sen } \hat{B}}}{1} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} \implies \widehat{\text{sen } \hat{B}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}. \quad (7)$$

Sendo assim, o seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto a este ângulo e a hipotenusa do triângulo retângulo. ■

- *Cosseno*

Sabendo que os triângulos BPP_1 e BCA da Figura 13 são semelhantes, temos que:

$$\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \implies \frac{\widehat{\text{cos } \hat{B}}}{1} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \implies \widehat{\text{cos } \hat{B}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}. \quad (8)$$

Sendo assim, o cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente a este ângulo e a hipotenusa do triângulo retângulo.

■

• *Tangente*

Sabendo que os triângulos BTT_1 e BCA da Figura 13 são semelhantes, temos que:

$$\frac{\overline{T_1T}}{\overline{OT_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \implies \frac{\tan \widehat{B}}{1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \implies \tan \widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}. \quad (9)$$

Sendo assim, a tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a este ângulo.

■

2.4.2 Consequências das Razões Trigonométricas

Segundo Iezzi (1977), são imediatas as seguintes consequências em decorrência das Razões Trigonométricas demonstradas anteriormente:

1^a) Sendo $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180°) e $\widehat{A} = 90^\circ$, é fácil ver que $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$, isto é, \widehat{B} e \widehat{C} são complementares. Portanto, de acordo com a Figura 13:

$$\text{sen } \widehat{C} = \cos \widehat{B} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}, \quad (10)$$

$$\text{sen } \widehat{B} = \cos \widehat{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \quad (11)$$

$$\tan \widehat{C} = \frac{1}{\tan \widehat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (12)$$

2^a) Observando a Figura 14, Iezzi (1977) diz que tem-se as seguintes razões de semelhança:

$$\text{sen } \widehat{B} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BC_3}} = \dots \quad (13)$$

Isto é, sendo fixado \widehat{B} , o cateto oposto a \widehat{B} e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

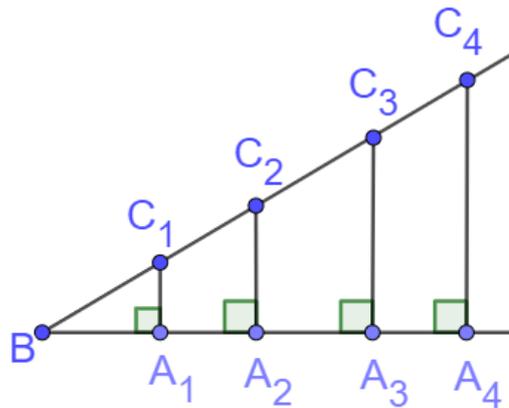
$$\cos \widehat{B} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{BA_3}}{\overline{BC_3}} = \dots \quad (14)$$

Isto é, sendo fixado \widehat{B} , o cateto adjacente a \widehat{B} e a hipotenusa são diretamente proporcionais. Portanto:

$$\tan \widehat{B} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BA_3}} = \dots \quad (15)$$

Isto é, sendo fixado \widehat{B} , o cateto oposto e o cateto adjacente a \widehat{B} são diretamente proporcionais.

Figura 14 – Exemplo de proporcionalidade no Triângulo Retângulo.

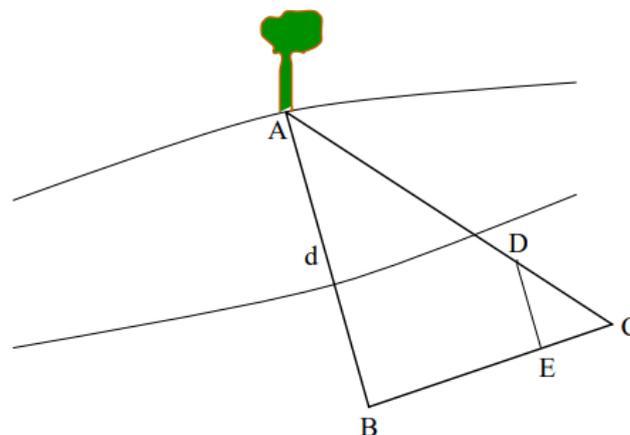


Fonte: Próprio autor.

2.5 PARALAXE

Para medir distâncias inacessíveis se utiliza o método da triangulação. Como exemplo simples de aplicação, Oliveira e Saraiva (2013) mostra, na Figura 15, um esquema para medir, de forma indireta, a distância de uma árvore no ponto A até o ponto B .

Figura 15 – Deslocamento aparente dos objetos vistos de ângulos distintos com medição indireta por meio da Paralaxe.



Fonte: Oliveira e Saraiva (2013, p. 177).

Conforme se pode observar na Figura 15, toma-se como um dos vértices do triângulo ABC a árvore, sendo \overline{AB} a distância entre esta árvore e um observador em B . Sendo assim, tem-se a seguinte proporção:

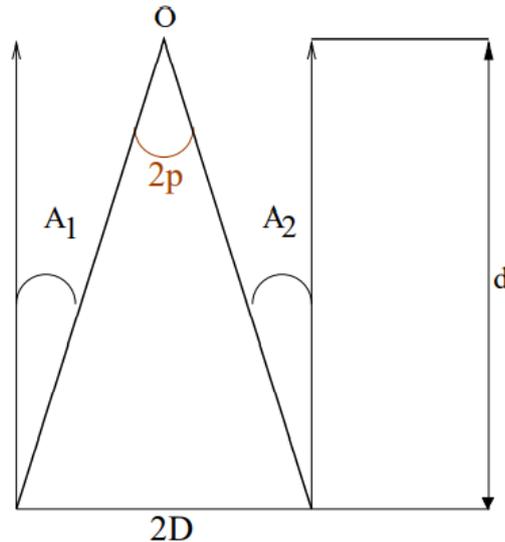
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}}. \quad (16)$$

Como se pode medir as distâncias \overline{BC} , \overline{DE} , \overline{DC} e \overline{EC} , com um instrumento métrico qualquer, de forma direta, basta substituir em (16) para encontrar a distância \overline{AB} , de tal maneira que

Vemos que a direção da árvore, vista de B , é diferente da direção da árvore vista de C . Esse deslocamento aparente na direção do objeto observado devido à mudança de posição do observador chama-se *paralaxe*. Em astronomia, no entanto, costuma-se definir a paralaxe como a metade do deslocamento angular total medido (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013, p. 178).

Para melhor ilustrar o que foi dito acima, pode-se observar a Figura 16, na qual é mostrado o ponto O ; os ângulos A_1 , A_2 e $2p$; a distância conhecida $2D$ e a distância desconhecida d .

Figura 16 – Ângulo paralático p quando a base tem valor D à uma distância d .



Fonte: Oliveira e Saraiva (2013, p. 178).

Sendo O a posição do objeto no qual se quer medir a distância d , A_1 e A_2 são os ângulos entre a direção do objeto visto de cada extremidade da linha de base e a direção de um objeto muito mais distante, temos, pela *trigonometria no triângulo retângulo*, que:

$$\tan p = \frac{D}{d}. \quad (17)$$

Como $p = \frac{A_1 + A_2}{2}$ e D é conhecido por medição direta, é possível medir a distância d utilizando a Equação (17), sendo que para ângulos pequenos, isto é, se $p \leq 4^\circ$ temos que a tangente do ângulo é aproximadamente igual ao valor deste ângulo medido em radianos. Sendo assim, temos que:

$$d = \frac{D}{p}, \quad (18)$$

com p medindo em radianos.

2.5.1 Paralaxe geocêntrica e heliocêntrica

Para medir as distâncias entre a Terra e os corpos celestes, utiliza-se este mesmo método de triangulação. Como dito por Oliveira e Saraiva (2013, p. 180):

Mas, como esses objetos estão muito distantes, é necessário escolher uma linha de base muito grande. Para medir a distância da Lua ou dos planetas mais próximos, por exemplo, pode-se usar o diâmetro da Terra como linha de base. Para se medir a distância de estrelas próximas, usa-se o diâmetro da órbita da Terra como linha de base (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013, p. 180).

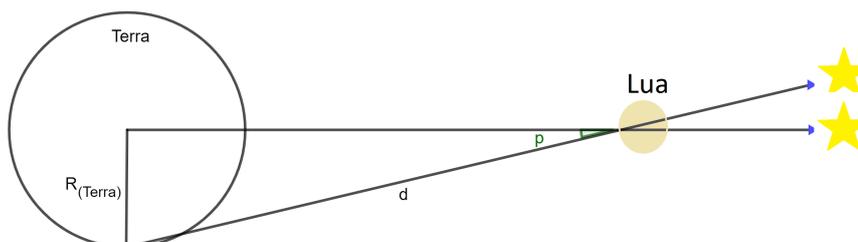
A distância entre a Terra e demais objetos do Sistema Solar era medida pelos astrônomos, antes da invenção do radar, tendo o diâmetro da Terra como linha de base para o cálculo (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013).

Este método de medição é chamado de *Paralaxe Geocêntrica*, sendo que o método descrito por Oliveira e Saraiva (2013) é o seguinte: “A posição da Lua em relação às estrelas distantes é medida duas vezes, em lados opostos da Terra e a paralaxe corresponde à metade da variação total na direção observada dos dois lados opostos da Terra”. A equação da Paralaxe Geocêntrica é expressa por:

$$p = \frac{R_{Terra}}{d} \implies d = \frac{R_{Terra}}{p}, \quad (19)$$

sendo p a paralaxe geocêntrica conforme mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Paralaxe geocêntrica: quando se é utilizado o raio da Terra como linha de base para calcular distâncias celestes.



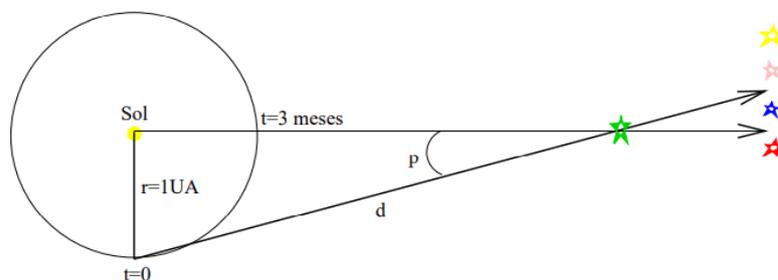
Fonte: Próprio autor

Usa-se o método da *Paralaxe Heliocêntrica* para medir de forma indireta a distância de estrelas mais próximas à Terra (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013).

No esquema mostrado na Figura 18, vê-se:

À medida que a Terra gira em torno do Sol, podemos medir a direção de uma estrela em relação às estrelas de fundo (mais distantes) quando a Terra está de um lado do Sol, e tornamos a fazer a medida seis meses mais tarde, quando a Terra está do outro lado do Sol. A metade do desvio total na posição da estrela corresponde à paralaxe heliocêntrica (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013, p. 180-181).

Figura 18 – Paralaxe heliocêntrica: quando a Terra se move em sua órbita em torno do Sol, uma estrela mais próxima parece se deslocar em relação às estrelas mais distantes.



Fonte: Oliveira e Saraiva (2013, p. 180).

A equação da Paralaxe Heliocêntrica é expressa por:

$$p = \frac{\text{raio da órbita da Terra}}{d} \implies d = \frac{1 \text{ UA}}{p}, \quad (20)$$

em que p representa a paralaxe heliocêntrica e 1 UA é uma Unidade Astronômica, isto é, a distância entre a Terra e o Sol, que é aproximadamente 149 597 870,7 km.

2.6 DISTÂNCIAS ANGULARES E ASTRONÔMICAS

2.6.1 Unidade Astronômica

A Unidade Astronômica (UA) é a representação da distância entre a Terra e o Sol, sendo assim é a mais utilizada para calcular distâncias entre objetos do Sistema Solar (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013).

Oliveira e Saraiva (2013) dizem que o desenvolvimento desta unidade de medida foi realizado por observações simultâneas, sendo que estes dados podemos verificar a seguir:

Com as observações simultâneas de Jean Richer (1630-1696) em Cayenne, na Guiana Francesa, Jean Picard (1620-1682) e Olaus Roemer (1644-1710) em

Paris, Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) estimou a paralaxe em 18". Considerando que Marte está a 1,52 UA do Sol, conforme determinado por Copérnico, estimou a unidade astronômica como sendo 140 milhões de km. O valor atual é de 149,59787069 milhões de km (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013, p. 181).

Apesar de não poder ser feita de forma direta, pois se fosse colocado um sinal de rádio a ser emitido diretamente do sol, o eco deste sinal se perderia em meio a todos os sinais de rádio que o Sol emite, a determinação da UA atualmente é feita por meio de radar de forma indireta, como descrito no exemplo abaixo por Oliveira e Saraiva (2013, p. 181):

suponha que um sinal de radar é enviado a Marte, quando esse planeta está em oposição, sendo encontrado que sua distância à Terra é 77 790 890 km. A distância média de Marte ao Sol é determinada pela Terceira Lei de Kepler³ como sendo de 1,52 UA. A distância entre Terra e Marte, para Marte em oposição, é portanto 0,52 UA (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013, p. 181).

Sendo assim, temos que a Unidade Astronômica é dada por:

$$UA = \frac{77\,790\,890}{0,52} \iff UA = 1,496 \times 10^8 \text{ km.} \quad (21)$$

2.6.2 Ano-Luz

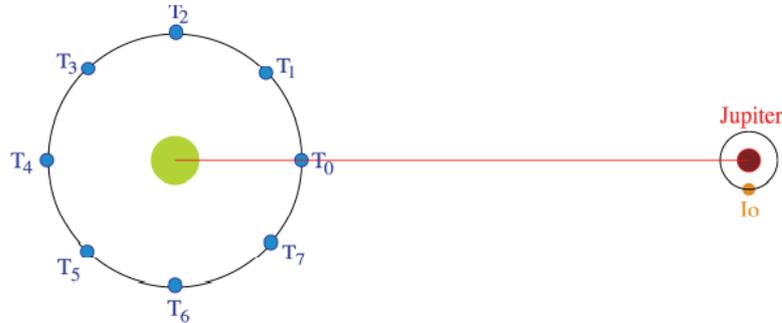
A distância que a luz percorre no vácuo no período de um ano é o ano-luz. Antes de determinar esta unidade de medida se faz necessário determinar a velocidade da luz.

O astrônomo dinamarquês *Olaus Roemer* (1644-1710) foi quem determinou a velocidade da luz pela primeira vez em 1675, quando mediu os intervalos sucessivos em que a lua Io⁴ eclipsava Júpiter para diferentes pontos da órbita terrestre, conforme ilustrado na Figura 19.

³ Segundo o site Brasil Escola, a terceira lei de Kepler, chamada lei harmônica, estabelece o seguinte: num referencial fixo no Sol, o quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse que representa a órbita do planeta.

⁴ Segundo a Wikipédia, Io é uma das quatro grandes luas de Júpiter conhecidas por Luas de Galileu, em honra ao seu descobridor Galileu Galilei. Ligeiramente maior que a Lua, Io é a quarta maior lua do sistema solar, logo a seguir a Ganímedes, Titã e Calisto.

Figura 19 – Medida da velocidade da luz em 1675, notando que quando a Terra está mais distante da Júpiter, em T_4 , na sua órbita em torno do Sol, leva mais tempo para a luz chegar à Terra e, portanto, para ocorrer o eclipse de Io por Júpiter.



Fonte: Oliveira e Saraiva (2013, p. 182).

O intervalo de tempo entre os sucessivos eclipses é o período de revolução do satélite, que pode ser calculado pela 3ª Lei de Kepler. Roemer verificou que os eclipses ficavam atrasados quando Júpiter estava mais distante da Terra e adiantados quando Júpiter estava mais próximo da Terra. O atraso total quando a Terra ia de T_0 para T_4 era de 1000 segundos. Roemer atribuiu o efeito ao tempo que a luz levava para ir de um ponto da órbita da Terra ao outro, isto é, do tempo que a luz levava para atravessar a diferença da distância entre o satélite e a Terra (OLIVEIRA; SARAIVA, 2013, p. 182).

Para ilustrar o que foi dito anteriormente, Oliveira e Saraiva (2013) diz que se pode considerar t_{T_0} o momento que ocorre o eclipse quando a Terra está na posição T_0 . Sendo assim, este eclipse é visto da Terra em um tempo posterior, pois a velocidade da luz é invariante, que pode ser dado por:

$$t'_{T_0} = t_{T_0} + \frac{d_{(T-J)_{T_0}}}{c}, \quad (22)$$

em que c é a velocidade da luz e $d_{(T-J)_{T_0}}$ é a distância entre a Terra e Júpiter no instante T_0 .

Quando a Terra se posicionar no instante T_4 , sendo a hora do eclipse dada por t_{T_0} , temos que na Terra o eclipse só será observado em:

$$t'_{T_4} = t_{T_4} + \frac{d_{(T-J)_{T_4}}}{c}, \quad (23)$$

em que c é a velocidade da luz e $d_{(T-J)_{T_4}}$ é a distância entre a Terra e Júpiter no instante T_4 .

Como o intervalo de tempo observado nos eclipses é maior que o intervalo de tempo real dos eclipses, temos que:

$$(t'_{T_4} - t'_{T_0}) - (t_{T_4} - t_{T_0}) = \frac{d_{(T-J)_{T_4}} - d_{(T-J)_{T_0}}}{c} \quad (24)$$

Como $(t'_{T_4} - t'_{T_0}) - (t_{T_4} - t_{T_0}) = 1000s$, temos que:

$$1000 = \frac{d_{(T-J)_{T_4}} - d_{(T-J)_{T_0}}}{c} \iff c = \frac{\text{diâmetro da órbita da Terra}}{1000} \quad (25)$$

Sabendo que, segundo Oliveira e Saraiva (2013), o maior eixo da órbita terrestre era 241 500 000 km, temos que:

$$c = \frac{241\,500\,000}{1000} \iff c = 241\,500\text{ km/s} \quad (26)$$

O que chegou a um resultado bastante próximo do que conhecemos hoje, pois sabemos que o maior eixo da órbita terrestre é 299 795 786 km, o que faz com que

$$c = \frac{299\,795\,786}{1000} \iff c = 299\,795,786\text{ km/s} \iff c = 299\,795\,786\text{ m/s} \quad (27)$$

seja a velocidade da luz medida experimentalmente neste experimento⁵.

Sendo assim, como determinamos a velocidade da luz anteriormente, podemos observar a seguir a distância que representa 1 ano luz (AL):

$$AL = \text{velocidade da luz} \times \text{segundos em 1 ano} = 2,9979 \times 10^5 \times 3,1557 \times 10^7 \quad (28)$$

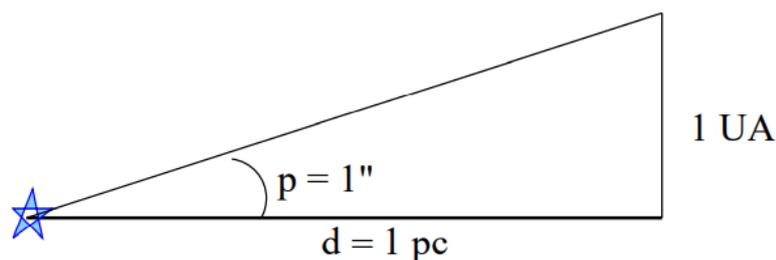
Portando, 1 ano luz = $9,46 \times 10^{12}$ km.

2.6.3 Parsec

Segundo Oliveira e Saraiva (2013), a *Par(alax) sec(ond)*, chamada de *parsec*, “é a distância de um objeto tal que um observador nesse objeto veria o raio da órbita da Terra com um tamanho angular de 1 segundo”.

Sendo assim, o *parsec* é a distância de um objeto que possui paralaxe heliocêntrica de 1” de arco, conforme mostra a Figura 20.

Figura 20 – Paralaxe p de 1 segundo de arco corresponde a uma separação de 1 unidade astronômica à uma distância de 1 parsec.



Fonte: Oliveira e Saraiva (2013, p.184).

⁵ Segundo o site Brasil Escola, a velocidade da luz no vácuo é exatamente 299 792 458 m/s

Sabendo que a distância a qualquer objeto é dado, em Unidades Astronômicas, por $d = \frac{1}{p(\text{rad})}$, e que caso esta distância seja de 1 parsec, então a paralaxe é 1" de arco, sendo que este ângulo é expresso em radianos por:

$$1'' = \left(\frac{1^\circ}{3600} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 4,848 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad (29)$$

Sendo assim,

$$1\text{pc} = \frac{1 \text{ UA}}{4,848 \times 10^{-6}} = 206\,265 \text{ UA} \quad (30)$$

Então, segundo Oliveira e Saraiva (2013), “a distância de um objeto, expressa em parsecs, é dada por $d(\text{pc}) = \frac{1}{p}$ ”.

2.7 AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Segundo Rocha (2014), a avaliação realizada no início de determinada etapa da escolaridade a fim de diagnosticar o conhecimento do estudante é denominada Avaliação Diagnóstica.

No discurso pedagógico, a avaliação diagnóstica tem sido também tratada como sinônimo de avaliação formativa. Nessa perspectiva, ela é entendida também como a avaliação que ocorre ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, visando a sua regulação. Ou seja, a avaliação diagnóstica pode ser entendida como aquela que verifica se o aluno aprendeu aquilo que lhe foi ensinado, a fim de identificar dificuldades de aprendizagem a serem superadas. Assim dimensionada, a avaliação diagnóstica (formativa) tem a função de orientar o ensino, o (re)planejamento do trabalho desenvolvido em sala de aula, com foco na aprendizagem do aluno (ROCHA, 2014).

Um ponto importante de destacar é que o docente, ao aplicar uma Avaliação Diagnóstica a seus estudantes, deve ter como foco parte de um percurso de aprendizagem e, ainda, delimitar os pontos de partida e/ou retomada para dar continuidade ao ensino, tendo em mente que “para ser qualificada como diagnóstica, uma avaliação precisa privilegiar os processos de ensino e aprendizagem e não a indicação de notas, classificações ou hierarquizações” (ROCHA, 2014).

Para que esse processo seja bem sucedido, alguns cuidados precisam ser tomados. O primeiro deles é ter consciência de que perguntar aos estudantes o que eles sabem sobre um determinado conteúdo não apenas é insuficiente, como também pode ser equivocado, dependendo da natureza (procedimental, conceitual, factual ou atitudinal) do conteúdo ou da aprendizagem que está em jogo (BRASIL, 2018).

Sendo assim, segundo BRASIL (2018), não basta perguntar aos estudantes, por exemplo, se eles têm conhecimento em determinado assunto. Para que o docente possa diagnosticar o conhecimento dos estudantes se faz necessário examinar a forma na qual estes estudantes aplicam o conhecimento em situações problemas, pois a “aprendizagem depende da prática supervisionada por alguém que domine o procedimento em questão” (BRASIL, 2018).

2.7.1 Pré-teste e pós-teste

Os testes, no ambiente educacional, são instrumentos avaliativos utilizados pelo docente para verificar a realidade vivida pelos estudantes, fazendo com que o docente possa repensar sua prática didática a fim de melhorar a compreensão dos estudantes na abordagem das habilidades lecionadas (VALLE, 2020). Um teste é composto por unidades básicas de análise que são as questões, ou itens do teste. Segundo BRASIL (2011), diante da Teoria da Resposta ao Item

[...] o item é a unidade básica de análise. O desempenho em um teste pode ser explicado pela habilidade do avaliado e pelas características das questões (itens) (BRASIL, 2011).

Ainda, segundo Valle (2020), quando o docente utiliza testes em dois momentos, o pré-teste e o pós-teste têm a função de auxiliar o docente a melhor planejar uma sequência didática a ser trabalhada em sala de aula.

O pré-teste averigua o conhecimento inicial dos estudantes sobre um aspecto do currículo ou um contexto no qual eles estão inseridos. Também ajuda o professor no planejamento da disciplina e a identificar se ele realmente conhece seus alunos. Qual o perfil desses estudantes e também as suas maiores dificuldades. Na prática, será um norteador das estratégias a serem utilizadas (VALLE, 2020).

Após a aplicação de uma sequência didática, propõe-se que o docente avalie se seus estudantes realmente desenvolveram as habilidades ensinadas por meio de um pós-teste, sendo que “ele analisa se a trajetória que foi desenvolvida em um bimestre, semestre ou ano avançou ou deixou lacunas, e quais são essas” (VALLE, 2020).

De acordo com Valle (2020) é importante salientar que os pré-testes e os pós-testes são instrumentos geradores de informação, sendo que não têm a função de distinguir aqueles estudantes que desenvolveram dos que não desenvolveram determinada habilidade, mas sim identificar lacunas na aprendizagem e nortear o trabalho docente durante as aulas para o desenvolvimento das habilidades.

Na elaboração do pré-teste, é importante que o docente se atente ao que será ensinado aos estudantes na sua sequência didática, assim poderá verificar as habilidades que estes estudantes possuem como pré-requisitos para aprender o que será ensinado. Já para o pós-teste, propõe-se que o docente se atente ao que foi ensinado, isto é, tenha em mente que o “objetivo é entender o que é o básico, o que o estudante já deveria saber para desenvolver outras concepções acerca daquele tema. A partir das lacunas, é elaborado um planejamento visando saná-las” (VALLE, 2020).

Na elaboração destes testes, Valle (2020) salienta que os itens⁶ devem ser compreensíveis para o estudante, sendo que o docente deve ter clareza acerca do entendimento da questão,

⁶ Segundo Filho (2020), na TRI cada questão contida no questionário é chamada de item.

sabendo, além da resposta, o que se espera que o estudante tenha de informação para que o item seja respondido de forma correta.

Em relação à elaboração de pré-teste e pós-teste, no que tange se podem ou não ser iguais, Valle (2020) diz que:

Quando iguais, permite comparar com exatidão o antes e o depois da intervenção pedagógica. Se diferentes, evitam que o aluno repita a resposta e ajuda a perceber seu entendimento do conteúdo. Se houver a disponibilidade de internet e aparelhos eletrônicos entre os alunos e no colégio, as tecnologias de comunicação e informação podem facilitar o trabalho do professor em cooptar e trabalhar os dados obtidos (VALLE, 2020).

Faz-se necessário que o docente, segundo Oliveira (2006), disponha de modelos eficazes para a consolidação dos dados obtidos nestes testes, os quais não contabilizem tão somente acerto ou erro, mas que consigam mostrar as deficiências no desenvolvimento de determinadas habilidades daquele estudante.

2.8 A TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM

De fato, modelos clássicos de avaliações educacionais, onde o estudante é submetido a uma gama de questões aleatórias organizadas pelo docente a fim de quantificar o desenvolvimento de determinadas habilidades não se mostram eficazes, uma vez que diversos fatores, como a possibilidade de acerto ao acaso, não são levados em consideração (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

A proposta de avaliação educacional vem se tornando prioridade nas políticas educacionais. Segundo Andrade, Tavares e Valle (2000, p. 3):

A avaliação educacional passou a ser, embora tardiamente, um dos pontos privilegiados das pesquisas educacionais. Já são inúmeros os projetos de avaliação conduzidas por órgãos responsáveis pelos destinos da Educação em nosso país. Reclamava-se, porém, por uma metodologia mais sofisticada e precisa, que permitisse não só a avaliação pontual, mas sobretudo, a construção de escalas de habilidades que pudessem levar a um acompanhamento do progresso do conhecimento adquirido pelos alunos ao longo do tempo (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000, p. 3).

Com isso, a Teoria da Resposta ao Item (TRI) que hoje é utilizada em instrumentos de avaliações nacionais, como o ENEM, SAEB, PROVA BRASIL, dentre outros, se mostra um “instrumento poderoso nos processos qualitativos de avaliação educacional, pelo fato de permitir, inclusive, a construção de escalas de habilidades calibradas” (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000, p. 5).

Nas últimas décadas, a TRI vem tornando-se a técnica predominante no campo de testes em vários países. Aqui no Brasil, a TRI foi usada pela primeira vez em 1995 na análise dos dados do Sistema Nacional de Ensino Básico - SAEB. A introdução da TRI permitiu que os desempenhos de alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e de 3ª série do Ensino Médio pudessem

ser comparados e colocados em uma escala única de conhecimento. A partir dos resultados obtidos no SAEB, outras avaliações em larga escala, como por exemplo o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP, também foram planejadas e implementadas de modo a serem analisadas através da TRI (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000, p. 5).

É possível verificar, ainda, que este instrumento de avaliação é utilizado no Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM, por não contabilizar, no teste, tão somente o número total de acertos, pois o desempenho do candidato será mensurado pelas suas habilidades desenvolvidas e pelas características das questões do ENEM (BRASIL, 2011).

Segundo BRASIL (2011), a TRI qualifica o item de acordo com três parâmetros:

- Parâmetro *a*: poder de discriminação. Este parâmetro mede a capacidade de um item distinguir os estudantes que têm a proficiência requisitada daqueles que não a têm;
- Parâmetro *b*: grau de dificuldade. Este parâmetro considera o nível de dificuldade que o item possui, distinguindo o nível de proficiência para acerto deste item;
- Parâmetro *c*: possibilidade de acerto ao acaso. Este parâmetro considera a possibilidade de um estudante acertar determinado item sem ter a proficiência necessária para tal.

Não sendo possível comparar a quantidade de acertos entre áreas, a TRI permite estimar a “habilidade de um candidato avaliado e de garantir que essas habilidades, medidas a partir de um conjunto de itens, sejam comparadas com outro conjunto na mesma escala” (BRASIL, 2011).

Sendo assim, pressupõe-se que um estudante tende a acertar questões de nível de dificuldade inferior ao que ele tem habilidade bem desenvolvida, fazendo com que seja necessário se levar em conta o padrão de resposta do estudante.

No entanto, quando se faz necessário aferir algo que não pode ser observado diretamente, como satisfação, qualidade de vida, usabilidade da internet, dentre outras características, é necessário incluir mais um modo de aferição, sendo que este modo de aferição é chamado, na TRI, de Traço Latente. Segundo Andrade, Tavares e Valle (2000, p. 3).

Atualmente, em várias áreas do conhecimento, particularmente em avaliação educacional, vem crescendo o interesse na aplicação de técnicas derivadas da Teoria de Resposta ao Item – TRI, que propõe modelos para os traços latentes, ou seja, características do indivíduo que não podem ser observadas diretamente. Esse tipo de variável deve ser inferida a partir da observação de variáveis secundárias que estejam relacionadas a ela. O que esta metodologia sugere são formas de representar a relação entre a probabilidade de um indivíduo dar uma certa resposta a um item e seus traços latentes, proficiências ou habilidades na área de conhecimento avaliada (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000, p. 3).

Como se pode observar ainda em Andrade, Tavares e Valle (2000), para se medir o Traço Latente são necessários dois fatores fundamentais, a saber:

- Instrumento de medida: nada mais é do que questionários aplicados a uma determinada população com itens dos quais se quer aferir habilidades desenvolvidas. Estes questionários são elaborados por especialistas em suas áreas e, quando visa aferir habilidades alcançadas, as questões são elaboradas em diferentes graus de dificuldade em uma mesma área. Com isso, geram-se dados qualitativos para a pesquisa;
- Escala: conforme as respostas dos indivíduos que se submetem ao questionário aplicado, é necessária uma escala padrão para mensurar os resultados e analisá-los. Com isso, geram-se dados quantitativos para serem analisados.

Tomando como exemplo o ENEM, os itens parecem levar em consideração um modelo não dicotômico, isto é, ao invés dos itens terem apenas duas alternativas na qual o candidato deve escolher (geralmente verdadeiro ou falso), cada questão traz consigo um conjunto de cinco alternativas das quais somente uma representa a resposta correta e as outras quatro, naturalmente, estão incorretas. Mas ao analisar tal modelo, como o candidato tem somente duas possibilidades ao responder a questão (acerto ou erro), observa-se que é um modelo dicotômico. Os itens do ENEM são elaborados com níveis de dificuldade diferentes, o que atribui pontuação diferente a cada item, sendo assim, os itens têm diferentes níveis de Traço Latente (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

2.8.1 Modelos dicotômicos aplicados às populações

Para a utilização da TRI em um determinado estudo, é preciso levar em consideração qual modelo o pesquisador pretende utilizar. Apesar de serem definidas diversas variáveis, modelos de um único grupo são amplamente empregados em Avaliações Educacionais, onde a população é definida por diversas características. Uma mesma pesquisa pode ser consolidada de uma ou mais amostras com populações distintas, como por exemplo: estudantes de séries diferentes, turnos diferentes e idades diferentes. Estes fatores devem ser levados em consideração quando o pesquisador irá realizar a inferência dos dados (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

O modelo dicotômico, segundo Andrade, Tavares e Valle (2000), é utilizado na correção de diversos instrumentos de avaliação da educação em nosso país. Tal modelo pode ser utilizado em itens de múltipla escolha dicotomizadas (com alternativas certas ou erradas) ou para itens dissertativos, este último quando avaliado como certo ou errado. Segundo Andrade, Tavares e Valle (2000, p. 9):

Na prática, os modelos logísticos para itens dicotômicos são os modelos de resposta ao item mais utilizados, sendo que há basicamente três tipos, que se diferenciam pelo número de parâmetros que utilizam para descrever o item. Eles são conhecidos como os modelos logísticos de 1, 2 e 3 parâmetros, que consideram, respectivamente:

- (i) somente a dificuldade do item;

- (ii) a dificuldade e a discriminação;
- (iii) a dificuldade, a discriminação e a probabilidade de resposta correta dada por indivíduos de baixa habilidade (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000, p. 9).

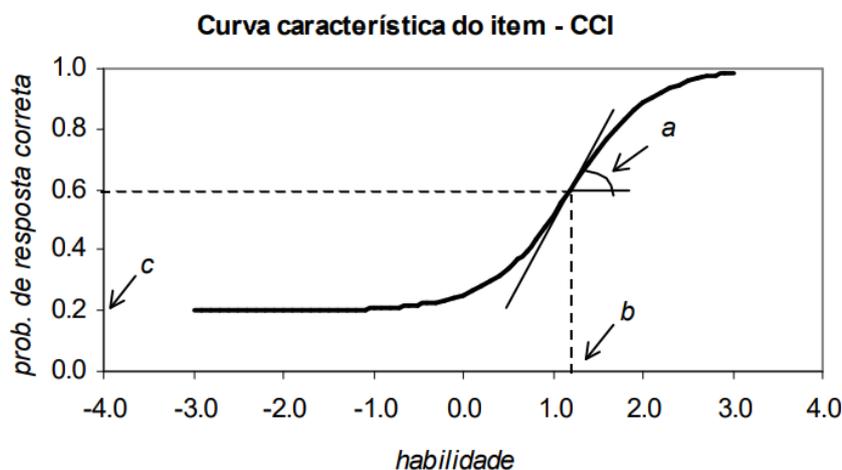
Para este trabalho será utilizado o modelo logístico unidimensional de 3 parâmetros por ser o mais completo, sendo que este é dado por:

$$P(U_{ij} = 1 | x_j) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + e^{-Da_i(x_j - b_i)}} \quad (31)$$

com $i = 1, 2, \dots, I$, I o total de itens do instrumento avaliativo, $j = 1, 2, \dots, n$ indivíduos, em que U_{ij} é uma variável que assume o valor de 1 quando o indivíduo acerta, assume o valor de 0 quando o indivíduo erra ou deixa de responder uma determinada questão; x_j representa o traço latente do j -ésimo indivíduo; $P(U_{ij})$ é chamada de Função de Resposta ao Item. Representa a probabilidade de um indivíduo j responder corretamente o item i tendo habilidade x_j ; b_i parâmetro de dificuldade do item i ; a_i é o parâmetro de discriminação (ou de inclinação) do item i , com valor proporcional à inclinação da Curva Característica do Item — CCI no ponto b_i ; c_i é o parâmetro do item que representa a probabilidade de indivíduos com baixa habilidade responderem corretamente o item i (muitas vezes referido como a probabilidade de acerto casual); D é um fator de escala, constante e igual a 1. Utiliza-se o valor 1,7 quando deseja-se que a função logística forneça resultados semelhantes ao da função ogiva normal.

Sendo uma escala de avaliação arbitrária, pode-se notar que a Função Resposta ao Item gera um gráfico em formato de S, conforme mostra a Figura 21.

Figura 21 – Exemplo de uma Curva Característica do Item – CCI



Ela é obtida baseando-se no fato de que candidatos com maior habilidade possuem maior probabilidade de acertar um determinado item com nível de dificuldade maior. Segundo Andrade, Tavares e Valle (2000, p. 10):

A escala da habilidade é uma escala arbitrária onde o importante são as relações de ordem existentes entre seus pontos e não necessariamente sua magnitude. O parâmetro b é medido na mesma unidade da habilidade e o parâmetro c não depende da escala, pois trata-se de uma probabilidade, e como tal, assume sempre valores entre 0 e 1.

Na realidade, o parâmetro b representa a habilidade necessária para uma probabilidade de acerto igual a $\frac{(1+c)}{2}$. Assim, quanto maior o valor de b , mais difícil é o item, e vice-versa.

O parâmetro c representa a probabilidade de um aluno com baixa habilidade responder corretamente o item e é muitas vezes referido como a probabilidade de acerto ao acaso. Então, quando não é permitido “chutar”, c é igual a 0 e b representa o ponto na escala da habilidade onde a probabilidade de acertar o item é 0,5.

O parâmetro a é proporcional à derivada da tangente da curva no ponto de inflexão. Assim, itens com a negativo não são esperados sob esse modelo, uma vez que indicariam que a probabilidade de responder corretamente o item diminui com o aumento da habilidade. Baixos valores de a indicam que o item tem pouco poder de discriminação (alunos com habilidades bastante diferentes têm aproximadamente a mesma probabilidade de responder corretamente ao item) e valores muito altos indicam itens com curvas características muito “íngremes”, que discriminam os alunos basicamente em dois grupos: os que possuem habilidades abaixo do valor do parâmetro b e os que possuem habilidades acima do valor do parâmetro b (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000, p. 10).

2.9 PROFICIÊNCIA

De acordo com a Teoria da Resposta ao Item, definimos Proficiência como um conjunto de números ordenados dos quais são medidos em uma determinada área de conhecimento. É importante ressaltar que a probabilidade de acerto em um determinado item aumenta à medida que a proficiência aumenta (KLEIN, 2014).

Ainda, segundo disse Klein (2014, p. 1), temos que:

A escala de proficiência não tem uma origem (zero) e uma unidade de medida absoluta. Portanto, a origem e a unidade de medida precisam ser arbitradas para se evitar a indeterminação. Utilizando uma analogia para facilitar a compreensão dessa ideia, tem-se que o mesmo ocorre com a escala de temperatura. É preciso saber, por exemplo, qual é o ponto de fusão da água, de ebulição da água. Na escala Celsius, o 0 (zero) é definido pelo ponto de fusão da água e o 100 (cem) pelo ponto de ebulição da água e a unidade pelo valor 1 (um). Mas é preciso interpretar outros pontos da escala para saber, por exemplo, quando a temperatura do corpo é normal e quando indica febre. Do mesmo modo, é preciso interpretar a *escala de proficiência* para sabermos o que os alunos sabem e são capazes de fazer em um determinado ponto da escala (KLEIN, 2014, p. 1).

Sendo assim, conforme podemos ver em Klein (2014), é se fazendo esta interpretação que é permitido ao avaliador estabelecer a relação entre escala de proficiência e desempenho

escolar, possibilitando a identificação da habilidade que o estudante provavelmente possui.

Assim, a *escala de proficiência* representa a habilidade do aluno em um *continuum* de valores. A interpretação da escala é cumulativa no sentido de que, à medida que a proficiência aumenta, novas habilidades são acrescidas às que os alunos já dominam. Em uma avaliação de alfabetização, espera-se que um item que focaliza a habilidade de ler palavras simples se localize em um ponto da escala de proficiência abaixo de um item que focaliza a habilidade de inferir informação em uma curiosidade de curta extensão. Isso significa que os alunos que dominam a segunda habilidade provavelmente dominam também a primeira (KLEIN, 2014, p. 1).

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, SAEB, apresenta uma escala única para todas as séries de aplicação do exame. A média do desvio padrão para os 9º anos, por exemplo, foi arbitrada em 1997, sendo que na prova de Língua Portuguesa é de 250 e na de Matemática é de 50 (KLEIN, 2014). Para manter a escala de proficiência única é necessário que os itens aplicados sejam comuns nos anos escolares, fazendo com que se possa avaliar a evolução da qualidade do sistema educacional brasileiro (ANDRADE; TAVARES; VALLE, 2000).

Em suma, a *escala de proficiência* interpretada oferece elementos aos sistemas de ensino e aos educadores para aferição do que os alunos sabem e são capazes de fazer em um determinado ponto da escala. A partir dessa interpretação, podem ser inferidos os aspectos adequados e os que demandam replanejamento de políticas públicas e ações pedagógicas (KLEIN, 2014, p. 2).

2.9.1 Determinando a escala de proficiência

Observando o contradomínio da Função (31) vê-se que a função descrita possui um valor máximo e mínimo a depender dos valores dos parâmetros a , b e c informados (FILHO, 2020).

Para exemplificar, o modelo descrito na Função (31) será adaptado conforme descrito na Função (32):

$$f(x) = c + \frac{1 - c}{1 + e^{-a(x-b)}} \quad (32)$$

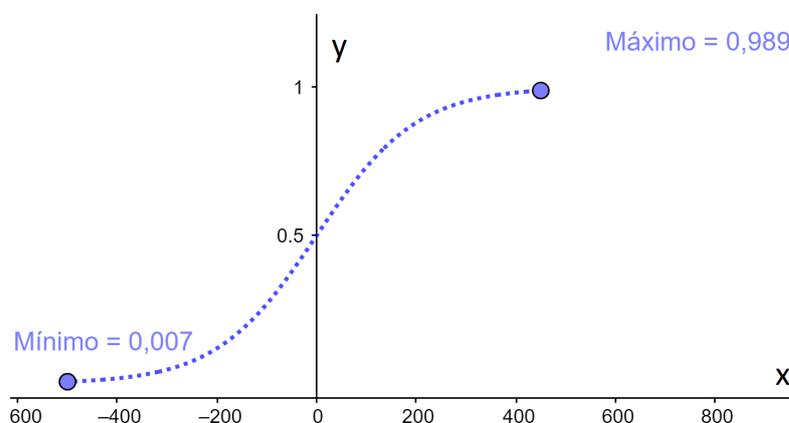
Com isso, atribuindo os valores nos parâmetros a , b e c conforme mostrado no sistema de valores $a = 0,01$, $b = 0,01$ e $c = 0,0002$ e substituindo-as em (32), temos que:

$$f(x) = 0,0002 + \frac{1 - 0,0002}{1 + e^{-0,01(x-0,01)}} \quad (33)$$

Com a ajuda do Geogebra se pode determinar o valor máximo e mínimo da função (33) no intervalo $[-500,500]$ ⁷ deste item, conforme mostrado na Figura 22. Este intervalo foi definido pelo fato de se conseguir melhor analisar o comportamento da Curva Característica do Item em 1000 pontos.

⁷ Este intervalo foi dado para que possamos calcular o a diferença de 1000 pontos entre o máximo e o mínimo das abcissas.

Figura 22 – Simulação do valor máximo e mínimo de um item segundo os parâmetros do $a = 0,01$, $b = 0,01$ e $c = 0,0002$.



Fonte: Próprio autor.

Conforme visto na Figura 22 temos valor de proficiência mínima neste item de 0,007 pontos e máxima de 0,989 pontos.

É importante salientar que, segundo Andrade, Tavares e Valle (2000), o ENEM é constituído de 45 itens por área do conhecimento, sendo que cada um destes itens têm seus valores de proficiência mínima e máxima, então, pela natureza do modelo matemático disposto na TRI um candidato, mesmo errando todos os itens de uma prova (ou deixando todos os itens em branco no gabarito), não ficará com zero em sua nota, mas sim a média ponderada das proficiências mínimas de todos os itens.

2.9.2 Determinando a proficiência para vários itens

Para que se possa determinar a proficiência que um candidato em um teste com vários itens utilizando o modelo da TRI utilizamos o seguinte somatório:

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^q x_j L(x_j)}{\sum_{j=1}^q L(x_j)}, \quad (34)$$

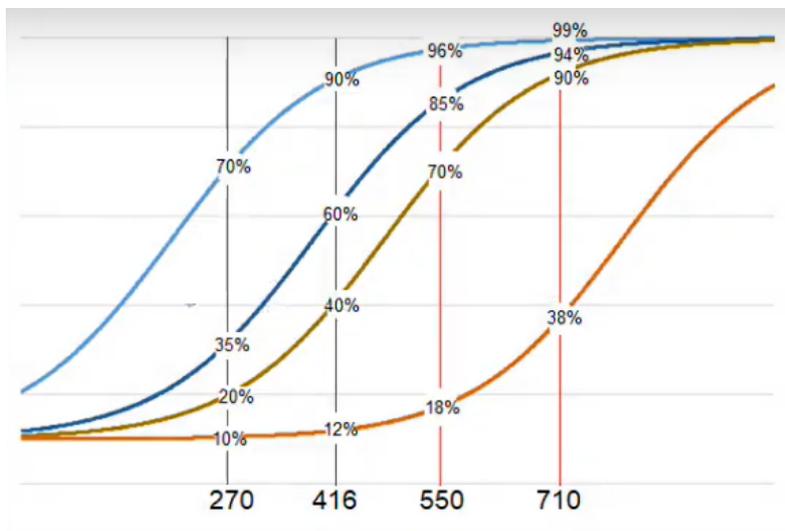
em que θ é a proficiência total do candidato, x_j é a proficiência que se especula, q é o número de partições do intervalo de interesse entre o mínimo e máximo das várias funções de $P(U_{ij} = 1, x_j)$, $L(x_j)$ é a probabilidade que o candidato tem de se acertar e/ou errar uma determinada sequência de itens. Esta probabilidade conjunta pode ser calculada por

$$L(x_j) = \prod_{i=1}^I \{U_{ij} P(U_{ij} = 1, x_j) + (1 - U_{ij}) [1 - P(U_{ij} = 1, x_j)]\}, \quad (35)$$

sendo I a quantidade de itens do instrumento avaliativo, U_{ij} assumindo o valor 1 quando o item i é acertado e 0 quando o item i é errado ou deixado em branco.

Como exemplo, Lessa (2020) traz um exemplo com 4 itens conforme mostrado na Figura 23 onde é apresentada a Curva Característica de cada Item. É importante destacar que Lessa (2020), neste exemplo, determinou como proficiência mínima de 270 pontos pelo fato de ser o ponto mais baixo da Curva Característica do Item inferior (curva laranja) e como proficiência máxima 710 por ser um ponto superior da Curva Característica do Item superior (azul claro).

Figura 23 – CCIs de 4 itens utilizado como exemplo para cálculo de proficiência com base na TRI.



Fonte: <<https://www.youtube.com/watch?v=Wec-rClutBc>>.

No gráfico da Figura 23 temos que o eixo da horizontal indica a proficiência do candidato e o eixo vertical indica a probabilidade que um candidato com determinada proficiência tem de acertar o item.

Como exemplo, Lessa (2020) indica que caso um candidato acerte os itens 1, 2, 4 e erre o item 3, temos que:

$$L(270) = \frac{70}{100} \frac{35}{100} \left(1 - \frac{20}{100}\right) \frac{10}{100} = 1,9\% \quad (36)$$

$$L(416) = \frac{90}{100} \frac{60}{100} \left(1 - \frac{40}{100}\right) \frac{12}{100} = 3,8\% \quad (37)$$

$$L(550) = \frac{96}{100} \frac{85}{100} \left(1 - \frac{70}{100}\right) \frac{18}{100} = 4,4\% \quad (38)$$

$$L(710) = \frac{99}{100} \frac{94}{100} \left(1 - \frac{90}{100}\right) \frac{38}{100} = 3,5\% \quad (39)$$

Fazendo a média ponderada, Equação (34), entre os resultados das Equações (36), (37), (38) e (39) e suas referidas proficiências, temos que:

$$\theta = \frac{270 \cdot 1,9\% + 416 \cdot 3,8\% + 550 \cdot 4,4\% + 710 \cdot 3,5\%}{1,9\% + 3,8\% + 4,4\% + 3,5\%} \cong 514 \quad (40)$$

Sendo assim, conclui-se que o candidato, nas condições propostas, atingiria 514 pontos de proficiência.

2.10 PRODUTO EDUCACIONAL

Um produto educacional é proveniente da investigação e estudo realizado pelo mes- trando, o qual deve ser elaborado visando a aplicação em situações reais no cotidiano docente, facilitando sua prática em sala de aula.

Em relação à elaboração de um Produto Educacional, Rizzatti et al. (2020, p. 4) diz que:

Considera-se PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE) na Área de En- sino, o resultado tangível oriundo de um processo gerado a partir de uma ati- vidade de pesquisa, podendo ser realizado de forma individual (discente ou docente *Stricto Sensu*) ou em grupo (caso do *Lato Sensu*, PIBID, Residên- cia Pedagógica, PIBIC e outros). O PE deve ser elaborado com o intuito de responder a uma pergunta/problema oriunda do campo de prática profissional, podendo ser um artefato real ou virtual, ou ainda, um processo (RIZZATTI et al., 2020, p. 4).

Sendo assim, o Produto Educacional deverá ser algo de acesso universal e gratuito, em linguagem simples e de texto objetivo, fazendo com que o leitor se interesse pela leitura e consiga compreender e aplicar tudo o que está sendo ensinado.

3 METODOLOGIA

Como esta pesquisa visa melhorar o ensino dos conceitos iniciais de Trigonometria no Triângulo Retângulo na etapa do Ensino Médio da Educação Básica, antes se faz necessário verificar, nos materiais disponibilizados aos estudantes, como estes conceitos são abordados, realizando uma revisão bibliográfica com cunho qualitativo, que segundo Gerhardt e Silveira (2009, p. 34):

Tenta compreender a totalidade do fenômeno, mais do que focalizar conceitos específicos;
 Possui poucas ideias preconcebidas e salienta a importância das interpretações dos eventos mais do que a interpretação do pesquisador;
 Coleta dados sem instrumentos formais e estruturados;
 Não tenta controlar o contexto da pesquisa, e, sim, captar o contexto na totalidade;
 Enfatiza o subjetivo como meio de compreender e interpretar as experiências;
 Analisa as informações narradas de uma forma organizada, mas intuitiva
 (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 34).

A seguir serão apresentados os procedimentos metodológicos desta pesquisa com mais detalhes, sendo que estes oportunizam uma melhor investigação para um resultado mais coeso.

3.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA

A utilização da Paralaxe Heliocêntrica como agente motivador no estudo inicial da Trigonometria no Triângulo Retângulo para estudantes do Ensino Médio.

3.2 MATERIAIS E RECURSOS

Para o levantamento bibliográfico, foram realizadas pesquisas no banco de dados do Google Acadêmico, em livros virtuais encontrados na biblioteca digital da UNEMAT, livros impressos escritos por pesquisadores das áreas relacionadas, bem como na biblioteca de Dissertações do PROFMAT a fim de encontrar conexões da Astronomia no ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo, métodos de avaliações mais eficazes a fim de melhor medir a proficiência dos estudantes e, ainda, relatos sobre o desenvolvimento da Trigonometria no decorrer da história.

Em um primeiro momento foi realizado um levantamento do material didático utilizado na Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Moraes Ramos” a fim de analisar a forma que é abordado o tema Trigonometria no Triângulo Retângulo. Como o estado de Mato Grosso possui dois materiais, sendo um livro do PNL D, o qual a Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Moraes Ramos”, localizada em Lucas do Rio Verde no estado de Mato Grosso, adotou o livro do 9º ano do Ensino Fundamental *Trilhas da Matemática*, escrito por Sampaio (2019), foram verificados os dois materiais a fim de comparar a abordagem que os

autores fizeram acerca do tema Trigonometria no Triângulo Retângulo, verificando se a forma na qual o tema é introduzido aos estudantes é motivadora.

Também foi verificado o material estruturado didático do 9º ano do Ensino Fundamental, organizado por Cabral (2022), e do 2º ano do Ensino Médio, organizado por Júnior (2018). Este material começou a ser disponibilizado a todos os estudantes da rede pública estadual de ensino do Mato Grosso de forma gratuita pela SEDUC-MT a partir do ano de 2022.

Em ambos os materiais se busca verificar a respeito dos seguintes itens:

- A forma na qual o tema Trigonometria no Triângulo Retângulo é introduzido aos estudantes;
- O(s) agente(s) motivador(es) que são mostrados na introdução ao tema, tais como contextualização e apanhado histórico;
- A quantidade de atividades propostas aos estudantes e a qualidade destas atividades, verificando tanto os exercícios de fixação como os exercícios contextualizados.

Esta verificação, como pode ser observado nos itens anteriores, é qualitativa, isto é, é relatada os métodos de abordagem do tema feita pelos autores fazendo com que se possa analisar a qualidade do material e se este está de acordo com a BNCC.

3.3 PÚBLICO ALVO PARA A APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE AULA

Participaram deste projeto 83 estudantes regularmente matriculados no 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Militar Tiradentes Sd PM “Adriana Moraes Ramos”, localizada em Lucas do Rio Verde no estado de Mato Grosso, no ano de 2022.

3.4 MODELO DE ANÁLISE

3.4.1 Proficiência

Para mensurar a proficiência dos estudantes, tanto antes do desenvolvimento da sequência didática quanto após esse desenvolvimento, foi utilizado o Modelo Matemático da Teoria da Resposta ao Item, o qual permitiu uma análise da proficiência do estudante mais condizente com a realidade, sendo que os acertos com alternativas assinaladas aleatoriamente (chute) não interferem no resultado do estudante. É considerada, também, a discriminação da questão, o que possibilita a distinção do candidato que tem a proficiência esperada daquele que não a tem, além da probabilidade de acerto ao acaso.

A proficiência dos estudantes foi aferida em dois momentos por meio de três pré-testes, primeiro de Astronomia, o segundo de Unidades de Medidas Padrão no Sistema Internacional

e o terceiro de Trigonometria no Triângulo Retângulo, e um pós-teste, sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Os itens destes testes foram elaborados seguindo os três parâmetros a , b e c dispostos na TRI. Os critérios utilizados para estimar os valores atribuídos à estes parâmetros estão dispostos na Tabela 1 e foram escolhidos arbitrariamente pelo pesquisador para uso neste trabalho.

Tabela 1 – Distribuição dos valores atribuídos aos parâmetros a , b e c nos itens dos testes aplicados.

Parâmetro	Descrição	Valor	Condição
a	Discriminação	1,25	Muito baixa
		1,50	Baixa
		1,75	Moderada
		2,00	Alta
b	Dificuldade	1	Requer conhecimento básico para saber responder, sendo que as perguntas deste nível não necessitam de conversão de unidades, outros saberes anteriores nem de conhecimentos gerais para se alcançar a resposta.
		2	Requer um conhecimento um pouco mais apurado para responder. Para que o estudante responda a estas perguntas ele deve observar detalhes das questões tais como unidades de medidas e saber que deve padronizar para responder de forma correta.
		3	Requer conhecimento aprofundado para saber responder. Estas questões, além de conter texto narrativo, requer que o estudante faça a conexão de mais saberes para que consiga responder. Além do mais, os cálculos para resolução destas questões são mais extensos, fazendo com que os estudantes tenham mais atenção na construção das respostas.
c	Acerto ao acaso	0,01	Não possui alternativas com erro calculado.
		0,02	Possui 2 alternativas com erro calculado.
		0,03	Possui 3 alternativas com erro calculado.
		0,04	Possui 4 alternativas com erro calculado.

Fonte: Próprio autor.

Como se pode observar, os parâmetros foram estimados sem o auxílio de métodos estatísticos dado o tempo disponível para a realização da pesquisa. Desta forma, a etapa da calibração dos parâmetros não foi explorada.

Para análise dos gráficos de proficiência dos estudantes foram utilizados os seguintes critérios:

Ruim Esta classificação foi determinada simulando como o estudante tenha acertado todas as questões de nível 3 (mais difícil) e errado as demais, caracterizando uma alta probabilidade de ter acertado ao acaso. Foram agrupados nesta classificação aqueles estudantes que, em cada um dos pré-testes e pós-teste, atingiram proficiência no intervalo limitado entre o valor mínimo do teste e o valor simulado pela condição de classificação.

Boa Esta classificação foi determinada simulando como o estudante tenha acertado todas as questões de nível 1 (mais fáceis) e errado as demais, caracterizando que possuem habilidades mínimas para compreensão e resolução das questões, mas não possuem habilidades mais avançadas para a resolução de problemas mais elaborados. Foram agrupados nesta classificação aqueles estudantes que, em cada um dos pré-testes e pós-teste, atingiram proficiência no intervalo limitado entre o valor máximo da classificação dada como ruim e o valor simulado pela condição de classificação.

Excelente Esta classificação foi determinada simulando como o estudante tenha acertado todas as questões de nível 1 (mais fáceis) e de nível 2 (intermediárias) e errado as de nível 3 (difíceis), caracterizando que possui habilidades mínimas para compreensão e resolução das questões, além de possuir habilidades mais avançadas para a resolução de problemas mais elaborados. Foram agrupados nesta classificação aqueles estudantes que, em cada um dos pré-testes e pós-teste, atingiram proficiência no intervalo limitado entre o valor máximo da classificação dada como *Boa* e o valor máximo do teste.

3.4.2 Intervalos Qualitativos de Proficiência

Com isso, podemos obter as proficiências mínimas e máximas que os estudantes alcançaram, conforme elencado abaixo:

- Pré-teste sobre Unidades de Medidas - utilizando a Equação (34) foi calculada a proficiência mínima de 451,2 pontos (caso erre todos os itens) e proficiência máxima de 855,8 pontos (caso acerte todos os itens). Os estudantes serão agrupados em três níveis de proficiência, a saber:

Ruim pontuação inferior a 458,31 pontos;

Boa pontuação entre 458,31 pontos e 665,31 pontos;

Excelente pontuação superior a 665,31 pontos;

- Pré-teste sobre Astronomia - utilizando a Equação (34) foi calculada a proficiência mínima de 454,2 pontos (caso erre todos os itens) e proficiência máxima de 860,3 pontos (caso acerte todos os itens). Os estudantes serão agrupados em três níveis de proficiência, a saber:

Ruim pontuação inferior a 460,7 pontos;

Boa pontuação entre 460,7 pontos e 650,1 pontos;

Excelente pontuação superior a 650,1 pontos;

- Pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo - utilizando a Equação (34) foi calculada a proficiência mínima de 455,3 pontos (caso erre todos os itens) e proficiência máxima de 863,4 pontos (caso acerte todos os itens). Os estudantes serão agrupados em três níveis de proficiência, a saber:

Ruim pontuação inferior a 544,11 pontos;

Boa pontuação entre 544,11 pontos e 604,3 pontos;

Excelentes pontuação superior a 604,3 pontos.

Estas avaliações nortearam o trabalho a ser executado, bem como intervenções a grupos de alunos que apresentaram baixa proficiência nos itens avaliados. Ao término do desenvolvimento das atividades, os mesmos estudantes realizaram o pós-teste de Trigonometria no Triângulo Retângulo.

A realização dos testes foi feita no Ambiente Virtual de Aprendizagem escrito no Moodle, sendo que os estudantes participantes responderam os questionários via Chromebooks na presença do pesquisador, sendo observados para que não acessassem outras abas e, assim, não procurassem por respostas, dando uma maior credibilidade ao levantamento dos dados.

O modelo de análise foi baseado em uma comparação entre um pré-teste, seguindo de uma intervenção na forma de sequência didática, com um questionário pós-teste, sendo cada etapa será descrita a seguir.

3.4.3 Como foi planejado, executado e analisado o Pré-teste

Os estudantes foram submetidos, como dito anteriormente, a três pré-testes, sendo estes:

- Unidades de Medidas - É importante que o estudante saiba as unidades de medidas padrão dadas do Sistema Internacional de Unidades. Para tanto, fez-se necessário que se verifique o quanto este estudante esteja familiarizado com estas unidades, bem como a capacidade de conversão entre unidades semelhantes. Para tanto, este questionário visou uma análise deste conhecimento e, após verificar os dados, a necessidade de nivelamento para a realização dos trabalhos;

- Astronomia - Este questionário tem perguntas importantes para o desenvolvimento do trabalho, pois determinados conceitos são necessários para que os estudantes possam vislumbrar uma aplicação instigante do ensino de Trigonometria. Este questionário foi aplicado de forma a diagnosticar o conhecimento dos estudantes para que se possa nivelar este conhecimento para o desenvolvimento do trabalho;
- Trigonometria no Triângulo Retângulo - sendo o único tema que foi aplicado no pós-teste pelo fato de ser o produto final a ser observado, este questionário visou, além de verificar o conhecimento inicial dos estudantes sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, uma forma de comparar o conhecimento anterior à intervenção e posterior a esta. Este questionário foi elaborado com questões referentes à Trigonometria no Triângulo Retângulo que vão de questões simples de interpretação a até problemas elaborados.

Após os estudantes realizarem os pré-testes, as respostas de cada estudante foram transferidas para a planilha eletrônica do Anexo A, a qual foi preparada para calcular a proficiência dos estudantes em cada assunto de forma automatizada. Com isso, foi analisada a proficiência dos estudantes como um todo, sendo que quanto mais próximo do *mínimo* conclui-se que o estudante não desenvolveu as habilidades em relação ao tema e quanto mais próximo ao *máximo* conclui-se que o estudante desenvolveu a maior parte das habilidades em relação ao tema.

3.4.4 Como foi planejada, organizada e executada a sequência didática

A partir deste cenário, foi elaborada uma intervenção com sequência didática e construção de material manipulável a fim de motivar os estudantes na compreensão das razões fundamentais da Trigonometria. Esta sequência didática tem conhecimentos teóricos e práticos, conhecimentos estes que fizeram com que o estudante se motive a compreender a aplicação destas razões.

Após a análise do Pré-teste foi realizada uma revisão de conceitos de Astronomia e Unidades de Medidas para os estudantes no mesmo AVA em que foram realizados os testes. Essa revisão se deu por meio de materiais em PDF e vídeo-aulas selecionadas do Youtube, uma forma de direcionar os estudantes na busca do aprendizado.

Podemos indicar, no planejamento da sequência didática, as seguintes questões facilmente respondidas:

1. Qual domínio este projeto se aplica?

O domínio deste projeto se refere à criação de uma sequência didática onde se utiliza a Astronomia como agente motivador no ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo. Espera-se que após a execução desta proposta os estudantes tenham uma melhor compreensão dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo e consigam aplicar estes conceitos na resolução de problemas.

2. Qual será o público alvo para esta proposta?

Apesar desta proposta ter sido aplicada para alunos regularmente matriculados no 2º ano do Ensino Médio, nada impede que seja adaptada para ser aplicada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, série/etapa na qual os estudantes têm o primeiro contato com as razões trigonométricas.

3. O que já existe na literatura para auxiliar na condução desta proposta?

Como visto em Szpak (2018) é possível utilizar metodologias ativas como forma de motivar os estudantes a compreender conceitos matemáticos aos quais são apresentados. Diversos são os materiais encontrados on-line que podem ser aproveitados pelo docente em suas aulas.

Os estudantes, também, construíram um visor rudimentar de paralaxe orientados pelo pesquisador, cujos materiais necessários para a construção, bem como os passos necessários para a montagem do visor, estão descritos na seção 3.4.8.

Após a construção, os estudantes fizeram medições indiretas, orientados pelo pesquisador, de objetos utilizando o Visor de Paralaxe, o que proporcionou a eles uma aplicação dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo. Foram selecionados objetos terrestres no pátio da escola, onde as medições realizadas pelos estudantes puderam ser comparadas de forma direta.

Como última atividade da sequência didática, os grupos de estudantes calcularam a distância entre a Terra e as estrelas da Tabela 2.

Tabela 2 – Dados das estrelas para que os grupos calculem a distância destas à Terra.

Grupos	Estrela	Distância (ano-luz)	Ângulo paralático (arcsec)
1, 5, 9	Estrela de Barnard	5,95	0,54
2, 6, 10	Sirius	8,60	0,38
3, 7, 11	Gliese 674	14,8	0,22
4, 8	Luyten	12,2	0,27

Fonte: Dados retirados da Wikipédia.

Para tanto, foram disponibilizados dados de posição destas estrelas para que os estudantes pudessem realizar a medição da distância entre estas estrelas e a Terra utilizando o método da Paralaxe Heliocêntrica, chegando a uma aproximação desta distância.

3.4.5 Como foi planejado e executado o pós-teste

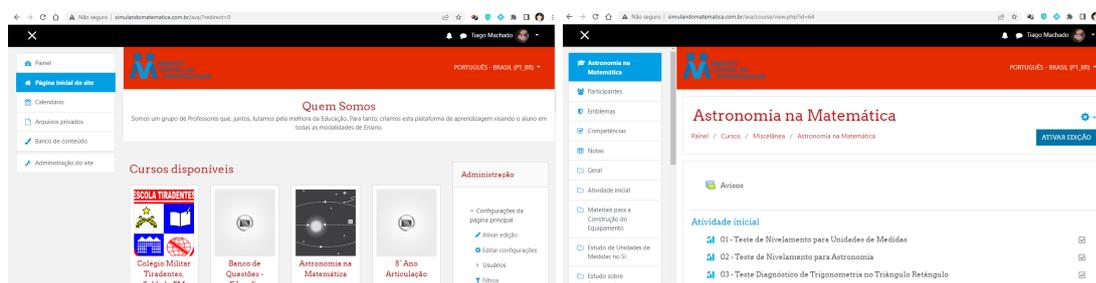
Como se quer mensurar o desenvolvimento da proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo, foi utilizado para pós-teste o mesmo questionário do pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, sendo este questionário disposto no Apêndice C.

Assim como os demais, este questionário foi realizado no mesmo AVA onde os estudantes estão cadastrados sob a supervisão do pesquisador e, da mesma forma, não puderam realizar nenhum tipo de consulta a nenhum material.

3.4.6 Materiais no Ambiente Virtual de Aprendizagem

Todo o material necessário para que os estudantes pudessem prosseguir nesta sequência didática foram disponibilizados em um Ambiente Virtual de Aprendizagem escrito em Moodle, cujo endereço eletrônico é <www.simulandomatematica.com.br/ava>, criado pelo autor, no qual a página inicial é mostrada na Figura 24.

Figura 24 – Página Inicial do Ambiente Virtual de Aprendizagem à Esquerda e Página Principal do Curso “Astronomia na Matemática” à Direita.



Fonte: Próprio autor.

Foi necessário que os estudantes atendessem a alguns pré-requisitos para uma melhor compreensão da sequência didática. Sendo assim, o conhecimento sobre as Unidades de Medidas padrão do Sistema Internacional de Unidades e conhecimentos básicos de Astronomia são importantes para um melhor aproveitamento dos estudantes. Para tanto, foram disponibilizadas links de aulas no Youtube para que eles assistissem, sendo estas aulas elencadas abaixo:

- Astronomia - foi disponibilizada uma sequência de videoaulas nas quais eles puderam aprofundar o conhecimento em conceitos básicos da Astronomia que são necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Os vídeos foram disponibilizados em forma de sequência, sendo citados a seguir:
 1. Unidades de Medida do Sistema Internacional de Unidades - Videoaula do Professor (SILAS, 2017) disponibilizada no Youtube no Canal Brasil Escola. Esta aula fala sobre o Sistema Internacional de Unidades (SI) e as unidades de medida padrão que

são utilizadas no meio científico. Ele ressalta a importância da padronização, uma vez que é fundamental para a construção de modelos e teorias;

2. Fundamentos da Astronomia - são duas aulas ((GONÇALVES-01, 2019) e (GONÇALVES, 2019)) para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Nestas aulas, a professora Raphaela Gonçalves recorda conceitos básicos da Astronomia como Corpos Celestes, movimentos astronômicos e características de alguns objetos.
 3. Medidas Astronômicas - são duas aulas ((ACADEMY-01, 2019) e (ACADEMY-02, 2019)). Nestas aulas, o professor fala sobre as principais Unidades de Medidas que são utilizadas na Astronomia, como a Unidade Astronômica, Ano Luz e Parsec. São aulas curtas e objetivas que visam a compreensão rápida dos conceitos;
 4. Definição de Parsec - aula na qual (ACADEMY, 2021) dá uma definição objetiva desta unidade de medida. Esta aula se fez necessária para que os estudantes tivessem uma introdução para a aula seguinte e pudessem ter familiaridade com esta unidade de medida;
 5. A Paralaxe Trigonométrica - como este é um ponto de aplicação desta sequência didática, conforme mencionado na Metodologia, a aula do AstroBioFísica (2021) foi escolhida por ser a mais completa e com linguagem acessível aos adolescentes. Nesta aula, o professor explica como utilizar a Paralaxe Heliocêntrica para calcular a distância que as estrelas estão da Terra. Este cálculo é feito por ele em parsec, posteriormente transformado em ano luz;
- Trigonometria no Triângulo Retângulo - foram disponibilizadas duas aulas do Professor Paulo Pereira, do canal Equaciona, as quais descrevemos abaixo:
 1. Razões Trigonométricas - Nesta aula, o Professor (PEREIRA, 2019b) explica as razões trigonométricas no triângulo retângulo, mostrando em exemplos simples e de fácil compreensão;
 2. Arcos Notáveis - Nesta aula o Professor (PEREIRA, 2019a) mostra os arcos notáveis e dá exemplos de aplicação. Esta aula foi selecionada com o intuito dos estudantes perceberem que podem aplicar estes arcos em cálculos do dia a dia.

3.4.7 Análise da aprendizagem e da motivação dos estudantes no desenvolvimento do trabalho

A análise da aprendizagem se deu por meio da comparação dos gráficos gerados a partir dos resultados dos pré-testes 1, 2 e 3, sendo que foi feita uma comparação da proficiência entre o pré-teste 3 e o pós-teste, podendo, assim, verificar se o método empregado contribuiu ou não na melhora da proficiência dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo por parte dos estudantes participantes. Sendo assim, foi avaliado o desempenho da turma em relação às

questões aplicadas. Este desempenho/pontuação foi dado pelo modelo da Teoria da Resposta ao Item, o qual foi referenciado anteriormente. Para tanto, foi utilizada uma planilha eletrônica para automatizar o processo e aumentar a confiabilidade das inferências.

A motivação dos estudantes foi avaliada por meio de um questionário, disposto no Apêndice D, aplicado ao final do experimento, questionário este que contou com perguntas qualitativas a cerca do que foi proposto, onde visando a opinião dos estudantes participantes. Recortes das respostas destes estudantes foram adicionados nos resultados desta pesquisa.

3.4.8 Construção do Visor de Paralaxe

Nesta etapa, foi feita uma adaptação do método apresentado por Szpak (2018) no capítulo 3 de sua dissertação de mestrado, a fim de que os estudantes tenham uma melhor orientação na construção. Este trabalho gerou um produto educacional, na forma de e-book, do qual mostra a construção do Visor de Paralaxe.

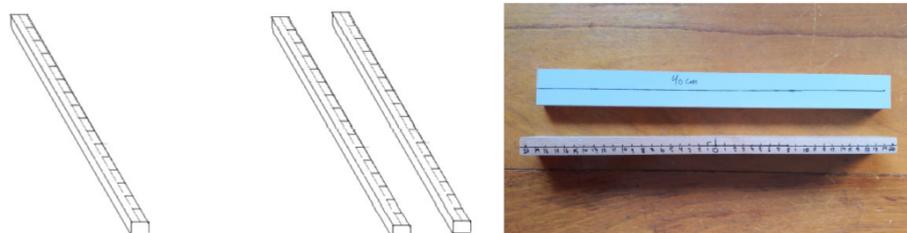
Para o desenvolvimento da atividade de construção do Visor de Paralaxe, após os pré-testes serão utilizados os seguintes materiais:

- 2 ripas de madeira de 40cm × 4cm × 1cm. Estas ripas devem ser de cor mais clara possível, pois serão feitas marcações nelas;
- 5 pregos de 5 cm;
- 1 régua de 30 cm;
- 1 marcador permanente de escrita fina;
- 1 martelo;
- 1 furadeira com broca para madeira de 3 mm;
- 1 tubo de cola madeira.

Sendo assim, serão ministradas aulas expositivas em sala, bem como diversos materiais serão disponibilizados no Ambiente Virtual de Aprendizagem, tais como os manuais de construção e manuseio do equipamento. Seguem as 4 etapas para a construção do visor de paralaxe:

Etapa 01 - Em uma das ripas, utilizando a régua, na face de 40 cm de comprimento por 1 cm de largura, trace uma reta partindo de 0,5 cm da largura até o lado oposto e demarque na reta a escala em centímetros, com espaçamento de 1 cm, sendo o meio da reta a origem (0 centímetros) até cada extremidade da ripa que será demarcada com unidade de medida 20 cm, como mostra a sub-figura à esquerda da Figura 25 :

Figura 25 – Ripas para construção do Visor de Paralaxe: a esquerda uma ripa com demarcação da Madeira e à direita a graduação.



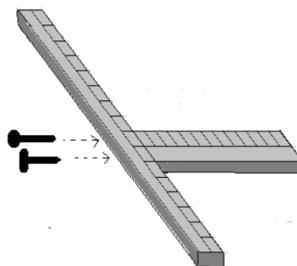
Fonte: Szpak (2018).

Etapa 02 - Na outra ripa, também utilizando a régua, na face de 40 cm de comprimento por 4 cm de largura, trace uma reta partindo de 2 cm da largura até o lado oposto. Esta demarcação deverá ocorrer no centro da face. Demarque, na reta, a escala em centímetros sendo uma das extremidades a origem (0 centímetros) e a outra extremidade com unidade de medida 39,5 cm, conforme a Figura 25.

Etapa 03 - Para unir estas duas ripas da direita das Figuras 25, primeiro fure, utilizando a furadeira em ambas as ripas, os locais onde serão fixados os dois pregos.

Antes de pregar as ripas, passe a cola madeira na união e fixe dois pregos de forma que ambas ripas estejam dispostas perpendicularmente, que as origens fiquem próximas, alinhadas e as ripas não sobrepostas, como mostra a Figura 26.

Figura 26 – União das ripas para a construção do Visor de Paralaxe.

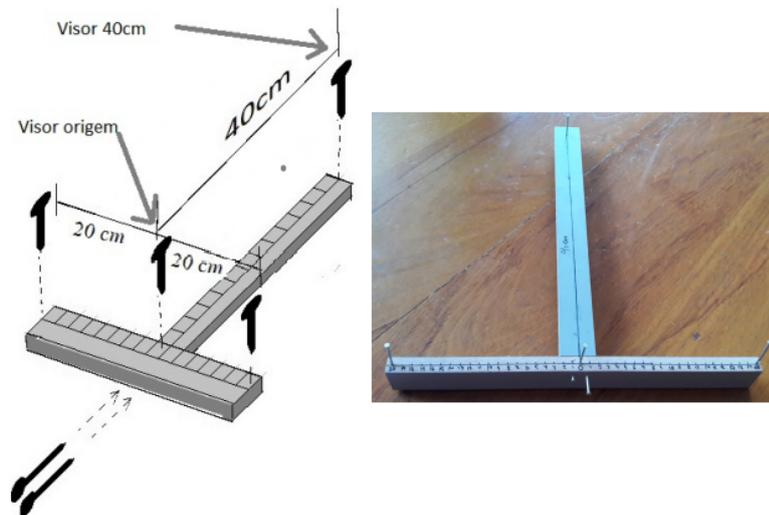


Fonte: Szpak (2018).

Etapa 04 - Nesta etapa, conforme mostrado na Figura 27, utilizaremos o que foi descrito em Szpak (2018, p. 56):

Em seguida serão pregados os visores que são os demais pregos, que devem ser fixados na ripas até a metade de seu comprimento em cima das demarcações, sendo na ripa da direita da Figura 25, no centímetro 0 e nas duas extremidades demarcadas como 20 e na ripa da Figura 25 apenas no centímetro 39,5, lembrando que do prego em 0 (origem) até a distância 39,5 terá 40 cm (SZPAK, 2018, p. 56).

Figura 27 – Fixação dos pregos no Visor de Paralaxe.



Fonte: Szpak (2018).

Assim, como mostra a Figura 28, finalizamos a construção do nosso Visor de Paralaxe:

Figura 28 – Visor de Paralaxe finalizado.



Fonte: Szpak (2018).

3.5 O PRODUTO EDUCACIONAL

A fim de contribuir com os docentes na prática em sala de aula, foi elaborado um manual de construção do Visor de Paralaxe, uma vez que poderá ser aplicado em sala de aula de forma dinâmica, pois os próprios estudantes poderão construir o equipamento e utilizar para medir distâncias indiretas com o auxílio do professor.

Nosso Produto Educacional foi elaborado em formato de e-book, o qual conta com um texto objetivo e contará com os capítulos:

- Para quem é esse material?
- O que é paralaxe?

- Quais os materiais para a construção do Visor de Paralaxe?
- Como montar o Visor de Paralaxe?
- Qual a teoria por trás do Visor de Paralaxe?
- Como utilizar o Visor de Paralaxe para medir distâncias?
- Extra: Calculando áreas de figuras com o Visor de Paralaxe.
- Tabela de razões trigonométricas.
- Referências.

O manual foi desenvolvido utilizando as seguintes plataformas:

- Solidwork: utilizado para a construção das peças do Visor de Paralaxe bem como sua montagem em ambiente virtual. A versão do software utilizada foi a 2022 no período de teste gratuito;
- Adobe Photoshop 2020: utilizado no tratamento das imagens (corte, edição e tratamento de cores). A versão do software utilizada foi a 2020 no período de teste gratuito;
- Canva - utilizado para a diagramação do manual. Foram utilizadas diversas imagens de distribuição gratuita do Canva, a fim de melhorar a qualidade visual do produto educacional. Foi utilizada a versão gratuita do software.

Este manual contará, também, com uma sequência de videoaulas no endereço <https://youtube.com/playlist?list=PL28i2uYaF--kkPODhHxE_h-uW0xsc1G7W> para os que preferam as instruções por meio de mídia audiovisual.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo visa apresentar e discutir os resultados advindos da pesquisa bibliográfica que nortearam a criação da sequência didática da qual é a proposta deste trabalho, além de apresentar os resultados obtidos com aplicação nas turmas de 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Militar Tiradentes Soldado “Sd PM Adriana Moraes Ramos”, a partir do que foi descrito na metodologia.

Iniciamos com as observações acerca do material didático do Estado de Mato Grosso, disponibilizado para a Escola Estadual Militar Tiradentes Soldado “Sd PM Adriana Moraes Ramos”, voltado para o 9º ano do Ensino Fundamental e do 2º ano do Ensino Médio do ano de 2022, no que tange ao Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo. Em seguida discorre-se sobre a aplicação das Avaliações Diagnósticas iniciais sobre Unidades de Medidas, Astronomia e Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Os dois primeiros pré-testes visaram diagnosticar a proficiência dos estudantes em conceitos básicos em Unidades de Medidas diversas e Astronomia a fim de possibilitar uma melhor compreensão do assunto abordado. Já o terceiro pré-teste visou diagnosticar a proficiência inicial dos estudantes sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, sendo que este foi re-aplicado após a sequência didática, oportunizando que fosse feita uma análise do desempenho dos estudantes e a eficácia da proposta.

Após as avaliações iniciais, decreve-se como foi planejada e aplicada a intervenção para a melhora da aprendizagem, analisando todo o processo de interação dos estudantes na construção do aprendizado.

Por fim, foram apresentados os resultados do pós-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, fazendo um comparativo com o pré-teste também sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, o que nos mostrou a eficácia da sequência proposta. Ainda foi feita uma análise da avaliação dos estudantes em relação à intervenção.

4.1 OBSERVAÇÕES ACERCA DO MATERIAL DIDÁTICO UTILIZADO NA ESCOLA

Conforme mencionado na Metodologia, faz-se necessário uma verificação do material didático que é disponibilizado aos estudantes. Para tanto, a seguir, será feita algumas considerações acerca do livro didático Trilhas da Matemática, escrito por Sampaio (2019), bem como das apostilas do Material Estruturado do Estado de Mato Grosso voltadas para o 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio do ano de 2022.

4.1.1 Observações acerca do Livro *Trilhas da Matemática*

O livro didático *Trilhas da Matemática*, disponibilizado à escola por meio do Programa Nacional do Livro Didático, inicia seu Capítulo 11, do 9º ano do Ensino Fundamental, apresentando, de forma breve, sobre os primórdios da Trigonometria, onde Hiparco de Niceia (190 a 125 a.C.) “teria sido o primeiro a relacionar as medidas de comprimento dos lados com as medidas de abertura dos ângulos de um triângulo retângulo” (SAMPAIO, 2019).

Após, o livro já traz de forma objetiva os elementos do triângulo retângulo, tais como os nomes dos lados e a localização fixa da hipotenusa (sempre o lado oposto ao ângulo de 90°), e as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em forma de fórmulas para que os estudantes possam se referir e resolver as questões propostas.

O livro traz ao estudante, também, as principais relações entre as razões trigonométricas, tais como a razão da tangente ($\tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$) e o Teorema do Ângulo Complementar. É mostrado aos estudantes a tabela das razões trigonométricas dos arcos notáveis (30°, 45° e 60°).

Este é o único capítulo deste livro que aborda as razões trigonométricas no triângulo retângulo e, apesar de ter 18 atividades para que os estudantes resolvam, em suas 9 páginas não foram encontradas aplicações diretas da Trigonometria no Triângulo Retângulo em nenhuma área.

4.1.2 Observações acerca do Material Estruturado Didático do Estado de Mato Grosso

No ano de 2022 a Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso (SEDUC-MT) disponibilizou, em contrato firmado com a Fundação Getúlio Vargas (FGV) o Material Estruturado Didático para todos os estudantes da rede estadual de ensino. Para os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, as apostilas são de organização de Cabral (2022).

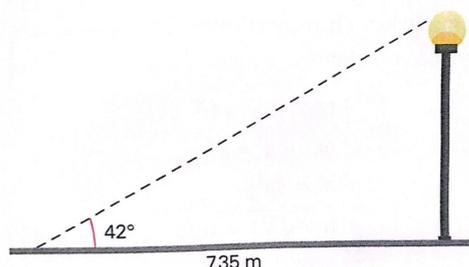
Ao contrário do livro didático do PNLD relatado anteriormente, a apostila da FGV traz, logo no início da sua Unidade 4 da apostila 3 do 9º ano do ensino fundamental, uma real aplicação das Razões Trigonométricas, sendo esta aplicação na Topografia utilizando um Teodolito¹. O autor explica que, para que o topógrafo utilize o Teodolito, é necessário que aplique as razões trigonométricas no Triângulo Retângulo.

Esta apostila faz uma retomada das relações métricas no triângulo retângulo antes de abordar as razões trigonométricas. Ao abordar as razões trigonométricas são apresentados ao estudante diversos exemplos de cálculo destas razões em triângulos retângulos, seja com os arcos notáveis, seja com os demais ângulos agudos onde as razões destes são mostradas em uma tabela.

Como exemplo apresentado na apostila, podemos citar o seguinte:

¹ Segundo a Wikipédia, o teodolito é um instrumento de precisão óptico que mede ângulos verticais e horizontais, aplicado em diversos setores como na navegação, na construção civil, na agricultura e na meteorologia.

A determinada hora do dia, um poste projeta uma sombra de 7,35 m. Nesse momento, os raios do Sol estão inclinados 42° em relação ao solo. Utilizando os valores da tabela, calcule a altura do poste mostrado na Figura



Resolução: No triângulo formado por poste, solo e raio, temos a sombra projetada como cateto adjacente ao ângulo e a altura do poste como cateto oposto. Logo, a tangente é a razão que devemos usar.

$$\tan 42^\circ = \frac{\text{altura do poste}}{\text{sombra projetada}} = \frac{x}{7,35} \quad (41)$$

Utilizando $\tan 42^\circ = 0,9$:

$$\begin{aligned} \tan 42^\circ = \frac{x}{7,35} &\iff 0,9 = \frac{x}{7,35} \\ &\iff x = 0,9 \cdot 7,35; \iff x = 6,615 \text{ m} \end{aligned} \quad (42)$$

Portanto, a altura do poste é de 6,615 m (CABRAL, 2022).

Junto com outros exemplos, esta apostila traz 18 exercícios em diferentes níveis de dificuldade, sendo estes questões de concursos públicos, ENEM e vestibulares.

Já no 2º ano do Ensino Médio, a apostila 2 da FGV, de autoria de Júnior (2018) inicia a Unidade 1 com um longo texto mostrando aos estudantes o relato histórico do desenvolvimento da Trigonometria, onde apresenta, também, a imagem de um importante artefato histórico, o Papiro de Rhind, já mostrado neste trabalho. Neste texto, os autores argumentam da importância do estudo da trigonometria para a civilização, mais precisamente seu emprego na construção civil. Mais adiante, os autores definem as razões trigonométricas no triângulo retângulo, lembrando os ângulos notáveis e resolvendo diversos exemplos de aplicação.

Esta apostila conta com 18 exercícios a respeito deste conteúdo em diversos níveis de conhecimento. Tais exercícios são de autoria própria da FGV, de vestibulares e do ENEM.

Ao analisar os materiais acima se pode inferir que eles fazem uma abordagem inicial na qual introduz o tema de forma que os estudantes são levados a ver aplicações dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo em áreas como a construção civil. Pode-se notar, também, que a apostila do 2º ano do Ensino Médio traz uma breve abordagem histórica do desenvolvimento da Trigonometria. Com isso se faz necessário apresentar mais aplicações para que mais estudantes se sintam motivados a aprender os conceitos apresentados.

Em Relação aos exercícios propostos em todos os materiais se vêem uma grande variedade, desde questões de fixação até questões contextualizadas das quais o estudante é levado a demonstrar as habilidades desenvolvidas no decorrer das aulas, sendo positivo para uma melhor compreensão e fixação dos conceitos.

4.2 DISCUSSÃO DAS APLICAÇÕES DOS PRÉ-TESTES

Nesta seção foi realizada uma análise das avaliações diagnósticas pré intervenção que foram aplicadas aos estudantes. Estas avaliações foram aplicadas utilizando o Ambiente Virtual de Aprendizagem escrito no Moodle, sendo que os estudantes fizeram na presença do autor desta proposta com os Chromebooks disponibilizados a todo o estado de Mato Grosso pela Secretaria Estadual de Educação de Mato Grosso. Os 83 estudantes foram previamente cadastrados nesta plataforma no curso “Astronomia na Matemática”, onde tiveram acesso às Avaliações Diagnósticas, materiais em texto e vídeos para nivelamento e aprofundamento dos conhecimentos necessários para o aprendizado, bem como enviar os relatórios das atividades aplicadas. Para tanto, foi seguido o seguinte cronograma:

1. 17/10/2022 - Pré-teste sobre Unidades de Medidas;
2. 18/10/2022 - Pré-teste sobre Astronomia;
3. 19/10/2022 - Pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo;
4. De 20/10/2022 à 08/11/2022 - Aulas no AVA sobre Unidades de Medidas; Astronomia - astros e distâncias celestes; Trigonometria no Triângulo Retângulo;
5. 09/11/2022 - Construção do Visor de Paralaxe;
6. 10/11/2022 - Medição indireta de objetos no pátio da escola;
7. De 10/11/2022 à 13/11/2022 - Entrega do relatório sobre a construção do Visor de Paralaxe e medições indiretas no pátio da escola;
8. De 13/11/2022 à 14/11/2022 - Entrega do relatório sobre o cálculo da distância entre uma estrela e a Terra;
9. 16/11/2022 - Pós-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo;
10. De 16/11/2022 à 20/11/2022 - Entrega dos relatos de opinião sobre a sequência didática.

4.2.1 Pré-teste sobre Unidades de Medidas

Este teste foi aplicado em sala de aula no dia 17 de outubro de 2022. Todos os 83 estudantes finalizaram o teste sem a possibilidade de revisão da proficiência e das questões.

Os estudantes foram agrupados em três níveis de proficiência, a saber:

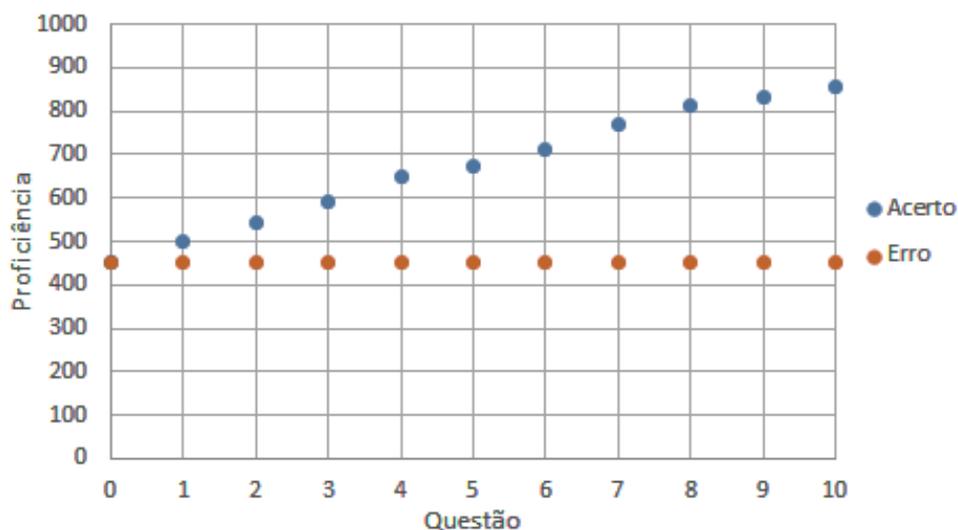
Ruim pontuação inferior a 458,31 pontos;

Boa pontuação entre 458,31 pontos e 665,31 pontos;

Excelente pontuação superior a 665,31 pontos;

Para este teste, segundo a Teoria da Resposta ao Item e utilizando a Equação (34), temos como proficiência mínima 451,2 pontos e proficiência máxima uma total de 855,8 pontos, como podemos observar na Figura 29.

Figura 29 – Dispersão da proficiência do pré-teste sobre unidades de medidas.

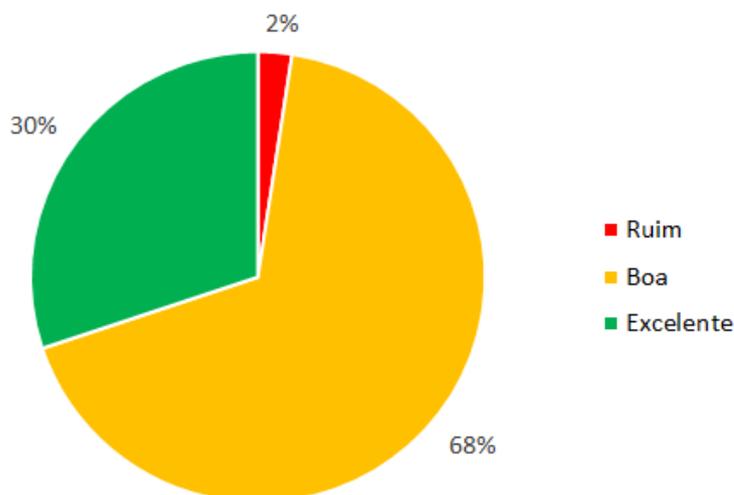


Fonte: Próprio autor.

Pode-se notar na Figura 30 que 2% dos estudantes tiveram proficiência ruim, 68% dos estudantes tiveram boa proficiência e 30% tiveram excelente proficiência neste teste.

É importante ressaltar também que 2 estudantes não acertaram nenhuma questão neste teste, sendo necessária uma intervenção para nivelar estes estudantes com os demais a fim de uma melhor compreensão dos estudos durante a aplicação.

Figura 30 – Nível de proficiência dos estudantes em unidades de medidas.



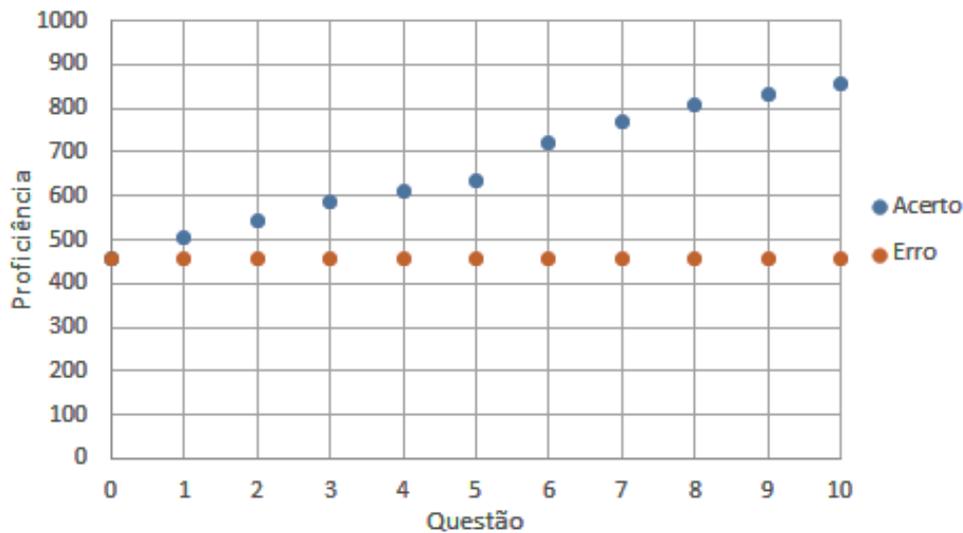
Fonte: Próprio autor.

4.2.2 Pré-teste sobre Astronomia

Este teste foi aplicado em sala de aula no dia 18 de outubro de 2022. Todos os 83 estudantes finalizaram o teste sem a possibilidade de revisão da proficiência e das questões.

Para este teste, segundo a Teoria da Resposta ao Item e utilizando a Equação (34), temos como proficiência mínima 454,2 pontos e proficiência máxima uma total de 860,6 pontos, como podemos observar na Figura 31.

Figura 31 – Dispersão da proficiência do pré-teste sobre Astronomia.



Fonte: Próprio autor.

Os estudantes foram agrupados em três níveis de proficiência, a saber:

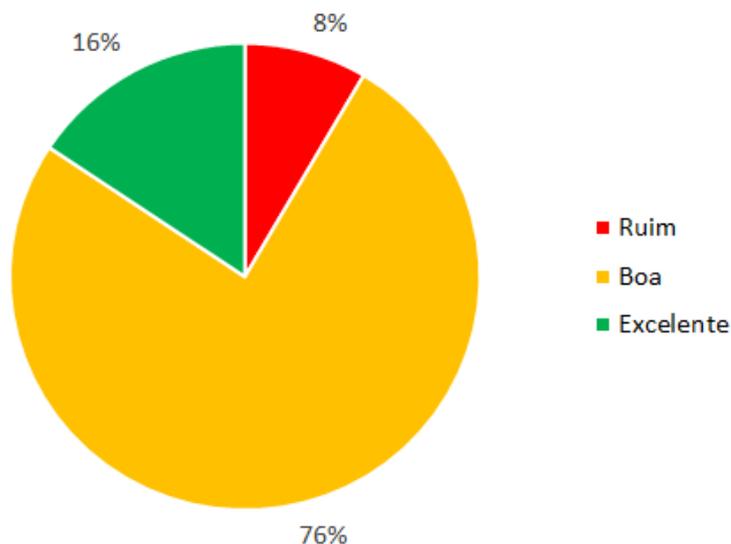
Ruim pontuação inferior a 460,7 pontos;

Boa pontuação entre 460,7 pontos e 650,1 pontos;

Excelente pontuação superior a 650,1 pontos;

Podemos notar na Figura 32 que 8% dos estudantes tiveram proficiência ruim, 76% dos estudantes tiveram boa proficiência e 16% tiveram excelente proficiência neste teste.

É importante ressaltar também que 7 estudantes não acertaram nenhuma questão neste teste, sendo necessária uma intervenção para nivelar estes estudantes com os demais a fim de uma melhor compreensão dos estudos durante a aplicação.

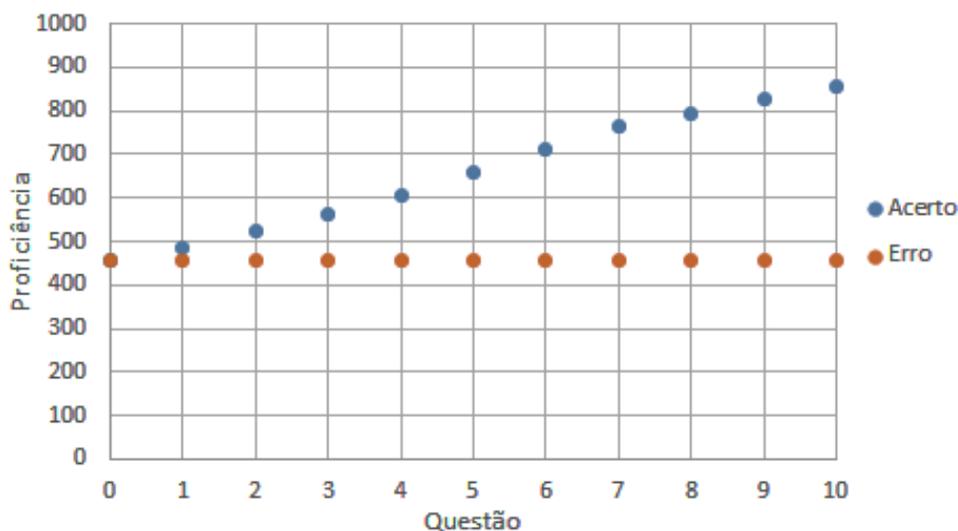
Figura 32 – Nível de proficiência dos estudantes em Astronomia.

Fonte: Próprio autor.

4.2.3 Pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo

Este teste foi aplicado em sala de aula no dia 19 de outubro de 2022. Todos os 83 estudantes finalizaram o teste sem a possibilidade de revisão da proficiência e das questões.

Para este teste, segundo a Teoria da Resposta ao Item e utilizando a Equação (34), temos como proficiência mínima 455,3 pontos e proficiência máxima uma total de 860,3 pontos, como podemos observar na Figura 33.

Figura 33 – Dispersão da proficiência do pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Fonte: Próprio autor.

Os estudantes foram agrupados em três níveis de proficiência, a saber:

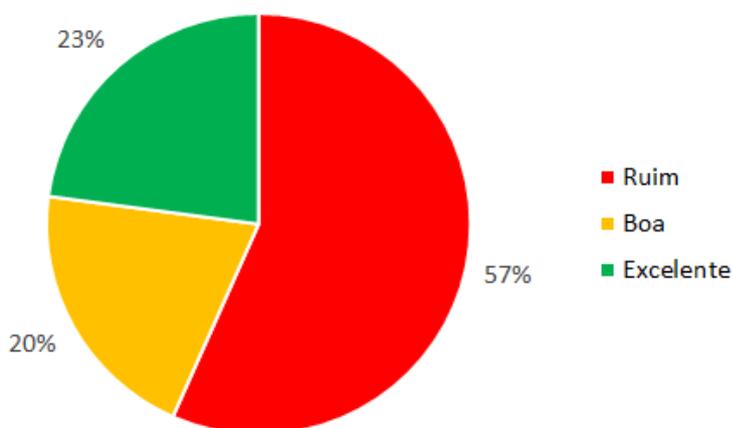
Ruim pontuação inferior a 544,11 pontos;

Boa pontuação entre 544,11 pontos e 604,3 pontos;

Excelentes pontuação superior a 604,3 pontos.

Podemos notar na Figura 34 que 57% dos estudantes tiveram proficiência ruim, 20% dos estudantes tiveram boa proficiência e 23% tiveram excelente proficiência neste teste.

Figura 34 – Nível de proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo.



Fonte: Próprio autor.

É importante ressaltar também que 5 estudantes não acertaram nenhuma questão neste teste, sendo assim, além de observação a evolução dos estudantes de um modo geral será feita uma análise da evolução destes estudantes em particular.

Baseado na proficiência que os estudantes obtiveram nos pré-testes, foi necessário aplicar uma sequência didática para que eles pudessem ter os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do trabalho, tais como: conhecimento sobre Unidades de Medidas padrão, Astronomia e Razões Trigonométricas. Sendo assim, foram disponibilizados vídeo-aulas no AVA para que os estudantes pudessem, em casa, ter acesso a este conhecimento.

4.3 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Aqui é o ponto fundamental na aplicação deste trabalho, uma vez que, como proposta de sequência didática, foram disponibilizados aos estudantes uma sequência de 9 videoaulas de curta duração em ambiente virtual para que eles pudessem construir seu próprio conhecimento.

Dessa maneira, os estudantes acessaram estes materiais em suas casas e qualquer dúvida que perdurasse era esclarecida via mensagem de texto ou presencialmente na escola. Neste momento, alguns estudantes relataram dificuldades no acesso ao material online por diversos

motivos e, como forma de sanar este problema, o material foi encaminhado por meio de mensagens de texto e, para aqueles que não possuíam meios de acesso, foi marcado outro momento, fora do horário de aula, para que estes viessem até à escola e utilizassem os recursos disponíveis guiados pelo pesquisador.

Além disso, sob orientação do pesquisador, os estudantes puderam construir um Visor de Paralaxe e utilizá-lo para medir distâncias indiretas, fazendo com que os estudantes pudessem ver na prática algo tão abstrato.

4.3.1 Construção do Visor de Paralaxe

Esta aula ocorreu no dia 09/11/2022 no laboratório de física da Escola Estadual Militar Tiradentes Soldado “Sd PM Adriana Moraes Ramos”, onde os estudantes puderam demarcar, furar e pregar os materiais. O manual para a construção do Visor de Paralaxe foi disponibilizado aos 83 estudantes no AVA, onde eles acessaram, adquiriram o material e ferramentas necessários e seguiram para a montagem, na escola, com a minha supervisão.

Conforme mostrado na Figura 35, os estudantes iniciaram analisando o manual de construção do Visor de Paralaxe. Cada grupo discutiu acerca dos materiais e do método de construção antes de iniciar a montagem do visor, determinando a função de cada membro durante o processo.

Figura 35 – Estudantes lendo do manual de instruções para montagem do Visor de Paralaxe.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 36 mostra os estudantes demarcando as ripas para colocar a graduação. Na imagem à esquerda, vemos os estudantes demarcando o segmento de reta na face 40 cm de comprimento por 4 cm de largura. Na imagem à direita, os estudantes estão demarcando o segmento de reta na face 4 cm de comprimento por 1 cm de largura. Nesta última, os estudantes de forma autônoma utilizaram a bancada para firmar a régua e a ripa para uma fixação mais precisa.

Figura 36 – Medição e marcação das ripas para montagem do Visor de Paralaxe.



Fonte: Próprio autor.

À esquerda da Figura 37 são mostrados os estudantes fixando as ripas do Visor de Paralaxe. Enquanto dois integrantes do grupo seguravam as ripas, um terceiro estudante fixava os pregos. Por fim, à direita da Figura 37 são mostrados os Visores de Paralaxe já montados.

Figura 37 – Estudantes fixando as ripas do Visor de Paralaxe à esquerda e Visores de Paralaxe montados à direita.



Fonte: Próprio autor.

4.3.2 Medição Indireta Utilizando o Visor de Paralaxe

Após a construção dos Visores de Paralaxe os 83 estudantes, divididos em 11 grupos, foram para o pátio da Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Morais Ramos” no dia 10/11/2023 para realizar as medições indiretas de alguns objetos próximos. Com o visor em mãos, conforme mostra a Figura 38, além de realizar as medições os estudantes anotaram os dados e relataram as medições em relatórios entregues no Ambiente Virtual de Aprendizagem.

Figura 38 – Estudante realizando medição indireta com o Visor de Paralaxe.



Fonte: Próprio autor.

Cada um dos 11 grupos fizeram um relatório sobre a atividade, sendo que o relatório do grupo 2, composto por 8 estudantes, o qual os relatos presentes foi feito por todos os estudantes do grupo, transcrevo abaixo:

“Relatório de Medições Indiretas Terrestres

Este relatório será feito a partir da experiência do nosso grupo, 02, no trabalho de astronomia ministrado pelo professor de matemática da Escola Estadual Militar Tiradentes “Soldado PM Adriana Moraes Ramos”, Tiago Wesley. O mesmo nos havia apresentado o trabalho com algumas semanas de antecedência, isso para que pudéssemos nos preparar e, conseqüentemente, montar os grupos para realização do que fosse pedido.

Grande parte do trabalho foi feito pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), criado e organizado pelo professor Tiago. Pelo AVA tivemos acesso a tudo o que era necessário, que partia dos materiais necessários, passando por video-aulas com conceitos básicos sobre o assunto e até mesmo como faríamos as medições e os cálculos.

Todos os integrantes do grupo tiveram participação no trabalho, em todos os aspectos. Para que conseguíssemos as materiais dividimos entre nós mesmos o que cada um levaria, pois dessa maneira não ficaria difícil para ninguém colaborar com o trabalho.

No laboratório, fizemos a montagem do medidor de paralaxe, nessa etapa todos fizeram alguma coisa, uns fizeram as marcações, outros furaram a madeira e os demais ajudaram martelando os pregos e colocando cola para madeira, assim certificando-se que tudo ficaria bem fixo e não soltaria, nem entortaria.

Relatos

Optamos por cada um dar o seu relato pessoal sobre o que foi o trabalho e seu ponto de vista sobre o mesmo.

Estudante 1 - ‘Esse trabalho sobre astronomia foi bem legal, pois pude ver mais ou

menos como são feitas as medidas de distâncias entre planetas e estrelas. Foi bem legal o processo de montagem do equipamento, principalmente pois tivemos uma aula diferente das que temos em nosso cotidiano.’;

Estudante 2 - ‘O projeto de astronomia ministrado pelo professor Tiago, foi essencial para mim e meus colegas. Trabalhar com a astronomia é saber que vai existir muitos desafios, mas ao mesmo tempo é muito inovador. Foi muito bom trabalhar com o meu grupo, cada um fez a sua colaboração e se dedicou, fomos para o laboratório começar o projeto. Com o manual feito pelo professor montamos um visor de paralaxe, ele serve para mirar em algum alvo que queremos saber a distância.’;

Estudante 3 - ‘Em nosso estudo sobre astronomia, tivemos a construção do Visor de Paralaxe foi uma atividade prática na qual utilizamos duas ripas de madeira de 40 cm de comprimento, 5 pregos, marcador permanente fino, régua de 30 cm, furadeira, cola de madeira e um martelo. Com o auxílio da furadeira, pregamos as duas ripas de madeira formando um T, fizemos as medidas corretamente com a régua e pregamos os pregos nas ripas somente até ficar firme. Também utilizamos um transferidor de 360 graus, para nos auxiliar caso facilitasse as medidas que tínhamos que achar, no nosso grupo acredito que com o transferidor tivemos uma pouco de dificuldade até mesmo para manusear a Paralaxe. Como nas últimas semanas estávamos estudando sobre astronomia e para tornar nossa aula mais dinâmica e interessante o professor nos trouxe esta atividade prática, a qual fez com que nós trabalhássemos em grupo e pensar em uma maneira de resolver a equação para que todos pudessem participar em cada passo a passo.’;

Estudante 4 - ‘Para construir o visor usamos os seguintes materiais: 2 ripas de MDF de 40 cm, cola de madeira, cinco pregos, um martelo, um marcador, uma régua e uma furadeira. A primeira etapa da montagem foi bem simples, basicamente tínhamos que medir com a régua e fazer as marcações na ripa onde devíamos fazer os furos. A parte da montagem já foi mais complicada, pois nossos pregos eram de 6 cm e tinha uma espessura maior, logo quando fomos pregar o prego na ripa de MDF, ela acabou cedendo e rachando um pouco, mas com a ajuda do professor conseguimos executar a atividade com sucesso. Achei interessante a ideia desse trabalho, pois é um tipo de atividade que nunca tínhamos praticado e foi uma ótima experiência.’;

Estudante 5 - ‘O trabalho foi maravilhoso, aprendi e entendi várias coisas, foi de extremo aprendizado tanto para mim quanto para meus colegas, tenho certeza que todos gostaram pois foi um trabalho bem dinâmico que todos puderam ajudar de alguma forma. Fizemos o equipamento com alguns materiais que cada um levou no dia, usamos 2 ripas de madeira, pregos, cola, furadeira e alguns outros materiais... Quando concluímos, o professor nos deu as devidas instruções e fomos ao pátio fazer as medições.. Logo depois nós fizemos os cálculos.’;

Estudante 6 - ‘No dia 7 segunda feira fizemos um visor, que serve para fazer medições indiretas. Para fazer esse visor utilizamos os seguintes materiais: duas ripas de madeira de

40 cm, cola de madeira, cinco pregos, um martelo, um marcador, uma régua e uma furadeira. Na lateral de uma das ripas foi feita uma linha de 20 cm em cada ponta até o meio, depois foi escrito os números, e em seguida foi pregado as duas ripas em forma de T, e por fim em uma das ripas foi colocado três pregos e na outra apenas um. A parte de medir e marcar com o marcador os números foi tranquilo de fazer, já na etapa de pregar as ripas foi um pouco complicado pois a madeira começou a rachar, depois com a ajuda do professor conseguimos pregar elas sem que a rachadura fosse maior. O processo de construção andou muito bem, e gostei de fazer esse tipo de trabalho.’;

Estudante 7 - ‘A parte de montar o equipamento foi a mais interessantes na minha opinião, onde a gente pode realmente ver no “físico”, como que uma medição sem uma régua, trena, ou até mesmo estimada por passos, iria funcionar, (até então não havia parado pra pensar como media-se distância entre dois planetas). Sendo uma atividade em grupo, tive mais facilidade na compreensão, tanto na montagem prática, quanto no desenvolvimento das resoluções, mesmo não chegando em um resultado exato e esperado.’;

Estudante 8 - ‘Durante as aulas de matemática, pudemos fazer um experimento, relacionada a um dos temas trabalhados abordados em sala “Astronomia e unidades de medida”, o que me despertou bastante interesse, pois o universo para muitos é uma incógnita, algo distante ou que não é abordado com tanta frequências. Ao realizar esse experimento pude aprender a medir a distancia de planetas, asteroides, estrelas, entre outros inúmeros astros espalhados pela nossa galáxia. No mesmo, fizemos a manipulação do equipamento de paralaxe, onde medimos uma certa distancia, tanto em graus quanto em centímetros, para que dessa forma utilizássemos da tangente do valor estimado para chegar ao resultado através da fórmula apresentada.’.

Exemplo feito na escola

Para que pudéssemos medir alguma estrela, que seria uma distância muito maior, o professor propôs que cada grupo ficasse responsável por medir algo na escola. Nosso grupo ficou responsável por medir a distância entre a parede e um poste que há em nossa escola.

Para que pudéssemos fazer os cálculos e descobrir a distância, tivemos que consultar o documento que o professor Tiago havia disponibilizado no AVA, esse documento era um manual de manipulação do equipamento de paralaxe, nele havia tudo o que precisávamos fazer, como passo a passo, e tinha também a fórmula que precisaríamos usar para chegar num resultado depois de fazer as medições.

Mesmo sendo uma distância curta, em relação a estrelas e planetas, não poderíamos fazer uma medição direta, pois esse não era o intuito do trabalho.

Nosso grupo se dividiu, pois estava muito quente e ensolarado para que todos ficassem no local da medição, então foram alguns integrantes e mediram rapidamente o que era preciso, que no caso seria o ângulo ou a diferença em centímetros.

Nossos cálculos foram os seguintes:

$$z = \frac{40(100 + x)}{x}$$

$$z = \frac{40(100 + 2)}{2}$$

$$z = \frac{40(102)}{2}$$

$$z = \frac{4080}{2}$$

$$z = 2040 \text{ cm}$$

$$z = 20,4 \text{ m}$$

Concluindo que a distância procurada é de 20,4 m”

Como pudemos observar no relato deste grupo, os estudantes gostaram da experiência de construir algo no qual eles pudessem utilizar, demonstrando estarem motivados com a aula, o que contribuiu muito para a eficácia da proposta.

Pôde-se observar, também, que eles desenvolveram os cálculos da distância com êxito, sendo que erraram por poucos centímetros, o que é esperado pelo fato do equipamento ser bastante rudimentar e sua construção, apesar de seguir um padrão pré estabelecido, pode correr o risco das marcações da graduação não serem colocadas com precisão.

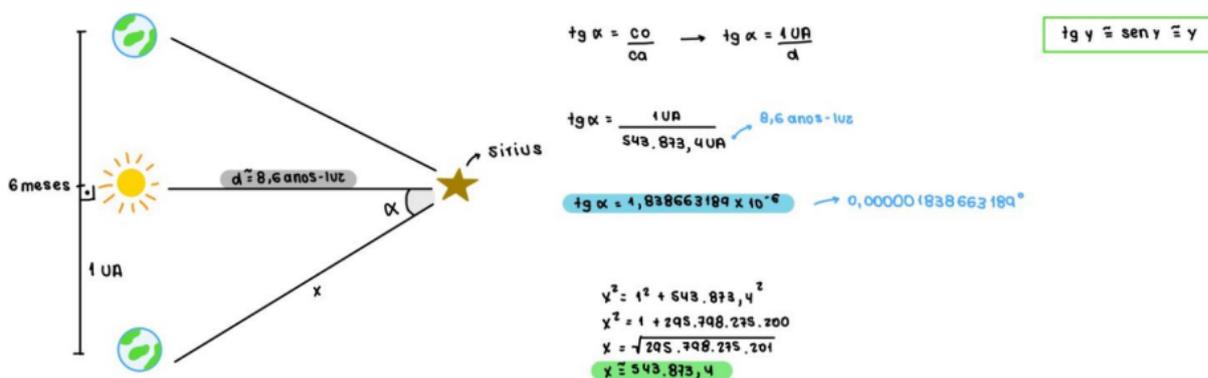
Todos os outros 10 grupos descreveram o relato da experiência no AVA, os quais se assemelham a este acima citado.

4.3.3 Medição da Distância entre Estrelas e a Terra Utilizando a Paralaxe Heliocêntrica

Somente 9 grupos fizeram esta atividade, sendo que os dois grupos restantes perderam o prazo para postar o relatório, que foi no dia 14/11/2022, não sendo contabilizado para a elaboração deste trabalho.

Como se pode observar no relato dos estudantes, eles utilizaram dois pontos de translação terrestre e conseguiram fazer a triangulação correta da estrela, fazendo com que realizassem os cálculos de forma correta, conforme apresentado por AstroBioFísica (2021), o que fez com que chegassem à distância correta entre a estrela e a Terra, concluindo com êxito a atividade proposta, conforme observado na Figura 39.

Como uma aplicação direta da Trigonometria, conforme explicado na Metodologia deste trabalho, foram disponibilizados dados de algumas estrelas para os grupos, Com estes dados, os estudantes puderam calcular a distância entre estas estrelas e a Terra utilizando o método da Paralaxe Heliocêntrica. Os estudantes, nesta etapa, demonstraram uma grande

Figura 39 – Esquema feito pelo grupo 3 antes do cálculo da distância da estrela Sírius.

Fonte: Grupo de estudantes que participaram da aplicação.

autonomia na realização da tarefa, buscando mais informações na literatura a fim de compreender o processo no qual é desenvolvido o cálculo. Após os cálculos, os estudantes relataram a experiência e postaram no AVA. A seguir citamos o relatório do grupo 3:

“Antes de começarmos a fazer os cálculos, fizemos um desenho para ficar melhor a visualização. Após terminarmos a representação observamos que havia formado um triângulo retângulo, o qual poderíamos utilizar as relações trigonométricas para descobrir a distância da Terra e o ângulo de paralaxe.

Para começarmos, escolhemos descobrir primeiro o ângulo de paralaxe depois a distância da Terra.

Para descobrir o ângulo de paralaxe utilizamos a distância do Sol com a estrela, e a distância do Sol com a Terra. Essa relação pode ser vista como uma tangente, pois tínhamos a distância do Sol com a Estrela sendo o cateto adjacente e a distância do Sol com a Terra sendo o cateto oposto.

Então assim fizemos, montamos uma equação sendo tangente de alpha igual a cateto oposto, Sol e Terra, dividido por cateto adjacente, Sol e estrela.

O valor do cateto oposto seria 1 UA, e o valor do cateto adjacente seria a 8,6 anos-luz, porém, convertendo para unidades astronômicas, ficaria 543873 UA. Realizando a divisão chegamos em um resultado de $1,838663189 \times 10^{-6}$, ou seja, 0,000001838663189.

Então, concluímos que descobrimos o valor do ângulo de paralaxe através da tangente, e de uma relação dita no último vídeo passado pelo professor Tiago, a qual diz que, em situações de ângulos muito pequenos, o valor da tangente do ângulo é, aproximadamente o valor seno do ângulo, e esse é, aproximadamente o valor do ângulo.

Nesse momento, nos faltava apenas a distância entre a Terra e a estrela. Como já tínhamos o valor de dois lados do triângulo retângulo, utilizamos o Teorema de Pitágoras, pois assim facilitaria na descoberta do valor do terceiro lado, hipotenusa.

Fizemos então, x ao quadrado, igual á 1 ao quadrado e 543.873,4 ao quadrado, todas essas medidas em unidades astronômicas (UA). Após desenvolver o cálculo chegamos em um resultado de, aproximadamente, 543873,4, essa seria então a distância aproximada entre a Terra e a estrela Sirius.”

Nota-se, ainda, que o grupo de estudantes desenhou o problema para que pudessem visualizar a melhor forma de resolução. Isto demonstra a evolução do grupo na resolução de problemas.

4.4 PÓS-TESTE SOBRE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Este teste foi aplicado em sala de aula no dia 16 de novembro de 2022. Da mesma forma que foi feito no pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, os estudantes foram agrupados em três níveis de proficiência, a saber:

Ruim pontuação inferior a 544,11 pontos;

Boa pontuação entre 544,11 pontos e 604,3 pontos;

Excelentes pontuação superior a 604,3 pontos.

Todos os 83 estudantes finalizaram o teste sem a possibilidade de revisão da proficiência e das questões. Podemos notar na Figura 40 que 22% dos estudantes tiveram proficiência ruim, 17% dos estudantes tiveram boa proficiência e 61% tiveram excelente proficiência neste teste.

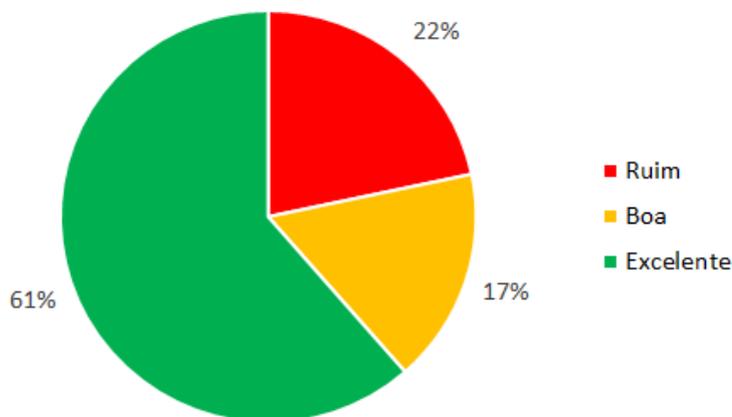
Como este pós-teste possui os mesmos itens do pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, também possui as mesmas características e critérios e o gráfico de dispersão se comporta da mesma forma do gráfico da Figura 33 anterior.

Neste teste final nenhum estudante obteve proficiência de 455,3 pontos, isto é, nenhum estudante errou todas as questões do teste.

Quando fazemos um comparativo com o mesmo teste aplicado antes da intervenção, podemos notar uma melhora significativa na proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo, conforme mostrado na Figura 41.

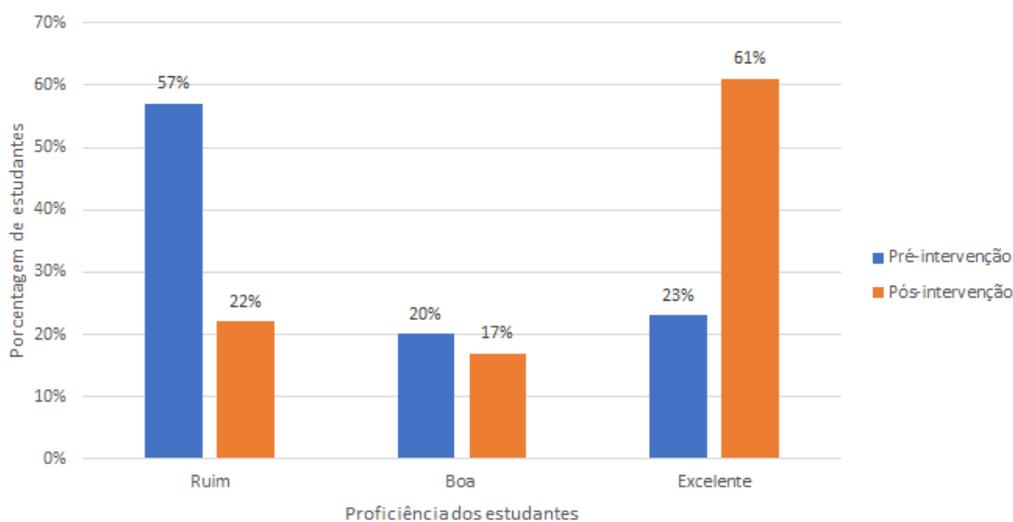
Como pode ser observado antes da intervenção, 57% dos estudantes tinham proficiência que consideramos ruim em Trigonometria no Triângulo Retângulo, sendo que este número caiu para 22% após a aplicação da sequência didática proposta. Pode-se observar, ainda, que 43% dos estudantes tinham proficiência boa ou excelente antes da aplicação da sequência didática, sendo que este número aumentou para 78% em relação ao pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, o que demonstra uma melhora da proficiência dos estudantes após a aplicação da sequência didática.

Figura 40 – Nível de proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo no pós-teste.



Fonte: Próprio autor.

Figura 41 – Comparativo do nível de proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo pré-teste e pós-teste.



Fonte: Próprio autor.

Como observado nos resultados do pré-teste sobre Triângulo Retângulo, 5 estudantes não acertaram nenhuma questão. Após a aplicação da sequência didática podemos observar as seguintes evoluções:

- Dois estudantes permaneceram com proficiência ruim, sendo que um atingiu 516,2 pontos e outro 523 pontos;
- Um estudante atingiu 583,2 pontos de proficiência, a qual é considerada boa;
- Dois estudantes adquiriram excelente proficiência em Trigonometria no Triângulo Retângulo, sendo que um obteve 696,4 pontos e o outro 766 pontos.

4.5 ANÁLISE DOS DEPOIMENTOS DOS ESTUDANTES SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

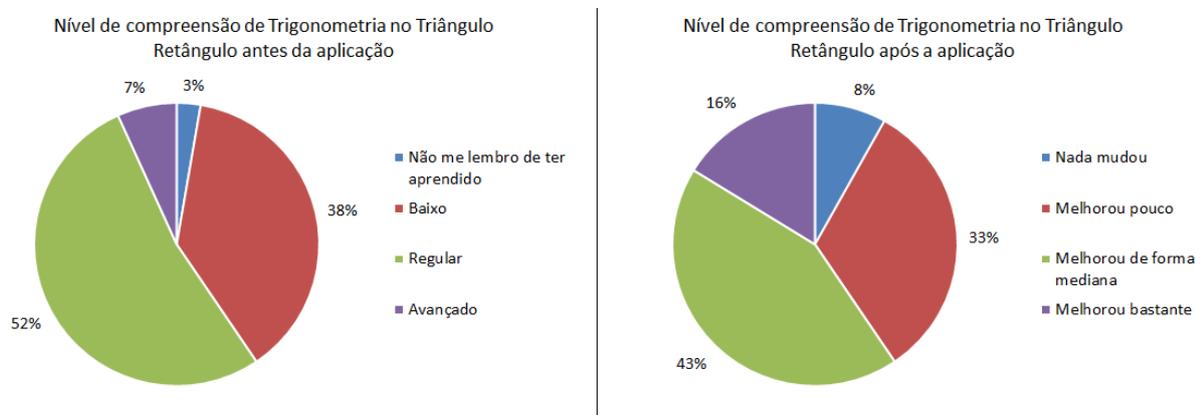
Ao final de toda a sequência didática, conforme previsto na Metodologia, foi realizada uma pesquisa de opinião dos estudantes em relação às aulas. Esta pesquisa é importante neste trabalho para demonstrar o nível de interesse que os estudantes participantes em relação ao trabalho executado. O questionário está no Apêndice D e as respostas dos estudantes serão analisadas a seguir:

4.5.1 Compreensão dos Conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo

Conforme podemos observar na Figura 42, 93% dos estudantes diziam ter conhecimento regular, baixo ou se quer lembrar de ter aprendido o conteúdo de Trigonometria no Triângulo Retângulo antes da aplicação da sequência didática.

Após a aplicação desta sequência, 59% dos estudantes disseram ter notado alguma melhora na compreensão dos conceitos abordados.

Figura 42 – Autoanálise dos estudantes do nível de proficiência em Trigonometria no Triângulo Retângulo antes e depois da intervenção.

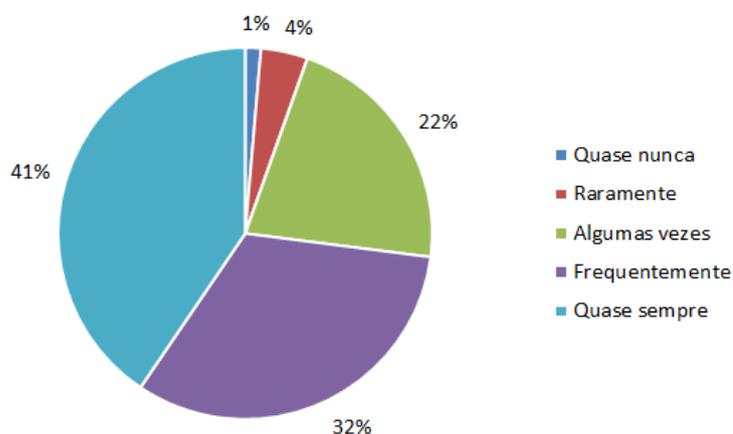


Fonte: Próprio autor.

4.5.2 Avaliação dos temas propostos

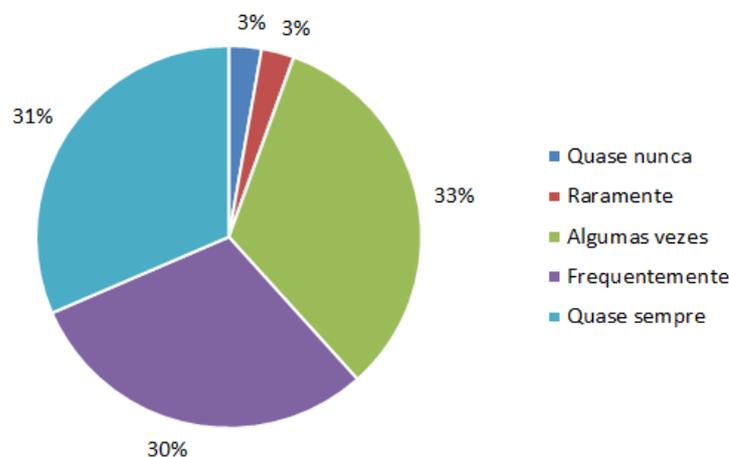
Os estudantes foram questionados em relação a diversos aspectos da sequência didática aplicada, onde puderam responder à perguntas objetivas.

Quando questionados sobre a contribuição do AVA para a interação e compreensão da proposta, bem como o direcionamento para o aprendizado, podemos observar na Figura 43 que 73% dos estudantes avaliam que esta ferramenta ajudou no direcionamento do aprendizado e na realização das atividades. Os 27% restante disseram que preferiam que a explicação fosse dada em aula presencial pelo fato de não ter domínio ou disciplina de coordenar sozinho os estudos.

Figura 43 – Autoanálise dos estudantes em relação à utilização do AVA.

Fonte: Próprio autor.

Sobre se a sequência das atividades propostas (delimitação da proposta, materiais de aprendizado, atividades e testes) contribuíram para que você compreendesse o objetivo do trabalho, podemos observar na Figura 44 que 61% dos estudantes apontam que a proposta contribuiu de forma significativa na compreensão e execução do trabalho.

Figura 44 – Autoanálise dos estudantes em relação à contribuição da sequência de atividades na compreensão da proposta.

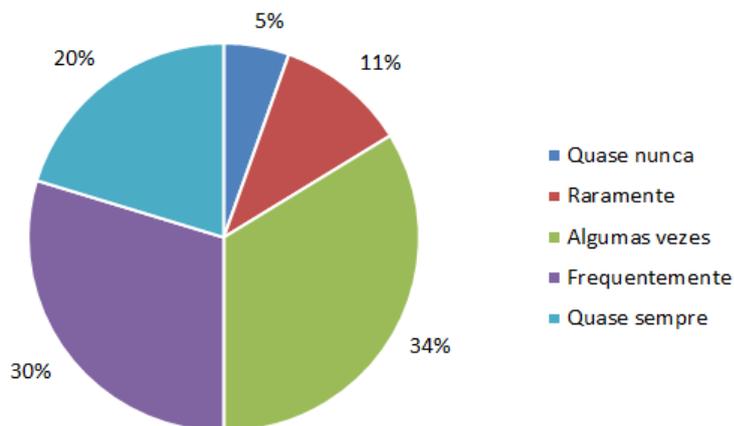
Fonte: Próprio autor.

Ao serem questionados em relação à Astronomia motivá-los a aprender e compreender os conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo, podemos observar na Figura 45 que 64% dos estudantes se sentiram mais motivados a aprender o conteúdo proposto.

Os estudantes também puderam dissertar de forma breve o que acharam da metodologia de aulas no desenvolvimento deste trabalho, sendo abaixo alguns relatos dos quais englobam todos os outros:

- *“Particularmente, sou uma pessoa que gosta de assuntos quem envolvam Astronomia.*

Figura 45 – Autoanálise dos estudantes em relação à contribuição da Astronomia na motivação em aprender os conceitos de Trigonometria.



Fonte: Próprio autor.

Por mais que estamos falando de cálculos, usá-los na astronomia despertou um pouco mais o meu interesse para aprender Trigonometria. Então, sim. A Astronomia deveria ser empregada mais vezes na matemática.”

- *“Sendo bem sincero, Trigonometria e Matemática no geral nunca foi, para mim, algo de muito interesse. Estas aulas causaram um efeito contrário para mim, me senti mais atraído por Astronomia. A Astronomia é uma boa forma de adicionar um conteúdo mais prático e interessante em Matemática.”*
- *“Falar sobre Trigonometria neste ano já se tornou algo muito chato e poucos prestam atenção por agora, mas esse projeto e trabalho que se foca apenas em uma coisa específica, faz com que quem não compreendeu totalmente o uso da Trigonometria, aprenda a fazer e a entender melhor o conteúdo sem ser algo chato e castigante.”*
- *“Eu gosto bastante de Astronomia e acho que ela deveria ser utilizada mais vezes na Matemática, porque ela torna tudo um pouco mais leve e “divertido”, eu me interessei muito mais por essas aulas.”*
- *“A Astronomia estar inserida na Matemática tem um grande diferencial na hora de estudar, principalmente para aqueles que se interessam pelo assunto, no meu caso, não sou tão chegado na Astronomia, mas, depois desse projeto, a minha curiosidade sobre o assunto aumentou moderadamente.”*
- *“A Astronomia incentiva muito no aprendizado da Trigonometria além do mais por tratar de um tema que eu particularmente tenho interesse em aprender, pois se trata sobre o universo e como ele funciona, e como ele é grande e tão pouco desvendado, motiva muito pela questão de ter que usá-la nos cálculos, deveria ser mais empregada nas escolas, assim fazendo com que o aluno se interesse mais na aula, não só por envolver a Trigonometria.”*

Como podemos observar nos relatos acima, os estudantes gostaram da forma na qual a Trigonometria foi abordada, isto é, utilizando a Astronomia como agente motivador na construção do aprendizado. Com isso, podemos perceber uma melhora na motivação para o aprendizado de Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Mesmo aqueles estudantes que antes não se interessavam em Astronomia, alguns relataram que passaram a se interessar pelo tema, mostrando que a forma na qual determinado conceito é abordado faz com que a atenção do estudante tenha sido direcionada para o que foi ensinado.

Ainda podemos destacar que Trigonometria, de forma geral, foi ensinada nas aulas de Matemática durante todo o ano de 2022 para as turmas, sendo que Trigonometria no Triângulo Retângulo foi ensinado logo no início do ano letivo. Por isso vemos em um dos relatos que o estudante disse que falar em Trigonometria se tornou “algo chato”, mas ele relata que com a intervenção aplicada pôde compreender melhor os conceitos da Trigonometria no Triângulo Retângulo e aplicar na resolução do problemas.

Com os relatos dos estudantes no Apêndice E e no Apêndice F, podemos ver que a grande maioria dos estudantes se demonstrou empolgada com a construção do Visor de Paralaxe e, mais ainda, se empenharam em aprender a utilizá-lo para medir distâncias de forma indireta, o que nos mostra que os estudantes participantes se colocaram como atores principais na construção do conhecimento.

No Apêndice H foram colocadas as respostas de todos os estudantes participantes da pergunta “*Fale sobre a Astronomia ter motivado seu aprendizado sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo e se deveria (a Astronomia) ser empregada mais vezes na Matemática*”. Lá podemos ver respostas tanto positivas quanto negativas quanto à sequência didática aplicada, bem como a opinião dos estudantes participantes em relação à proposta de emprego da Astronomia como agente motivador no ensino de conceitos matemáticos.

Por fim, analisando os relatos das dificuldades que os estudantes tiveram para calcular as distâncias das estrelas que foram disponibilizadas a eles, relatos estes elencados no Apêndice G, podemos inferir que, apesar das dificuldades e obstáculos encontrados pelos estudantes participantes, eles conseguiram chegar a um resultado correto. Alguns grupos relataram, ainda, que realizaram pesquisas adicionais na internet a fim de compreender melhor os conceitos, demonstrando que atingiram uma certa autonomia em seus estudos.

Com os dados de registro de acesso fornecidos pelo AVA, pôde-se observar que todos os estudantes participantes acessaram os materiais disponibilizados no AVA, não sendo possível inferir, neste momento, se todos os estudantes ampliaram seus conhecimentos nestes temas após o acesso.

4.6 O PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional proveniente deste trabalho é uma produção derivada da seção referente aos procedimentos de construção e medição usando o visor de paralaxe. O produto tem título *Visor de Paralaxe: Fundamentos, aplicações, construção e medição*, sendo que é um e-book intencionalmente dedicado aos professores, alunos que estão nos anos escolares em que se permite empregar metodologias para se aprender trigonometria no triângulo retângulo, bem como para pesquisadores da área de Matemática que se interessarem pelo tema e desejarem implementar construções análogas.

Para a diagramação do produto educacional foi utilizada a plataforma *Canva* com seus recursos gráficos e textuais gratuitos. Ele foi desenvolvido sem a utilização de modelos disponíveis na plataforma *Canva*, isto é, a criação do layout é do próprio autor. As cores que compõem o produto foram escolhidas de maneira que o aspecto visual fosse agradável e tranquilo.

O produto educacional possui ao todo 52 páginas que estão divididas em 9 capítulos. Cada capítulo inclui diversas ilustrações de acesso gratuito na plataforma *Canva*, de domínio público ou produzidas pelo autor em programas de computador para edição e produção gráfica e disponibilizadas gratuitamente no produto educacional.

A capa do produto educacional é apresentada na parte da esquerda da Figura 46 e foi feita uma montagem utilizando formas geométricas e instrumentos matemáticos.

Figura 46 – Capa do e-book à esquerda e imagem de inícios dos capítulos do e-book à direita.



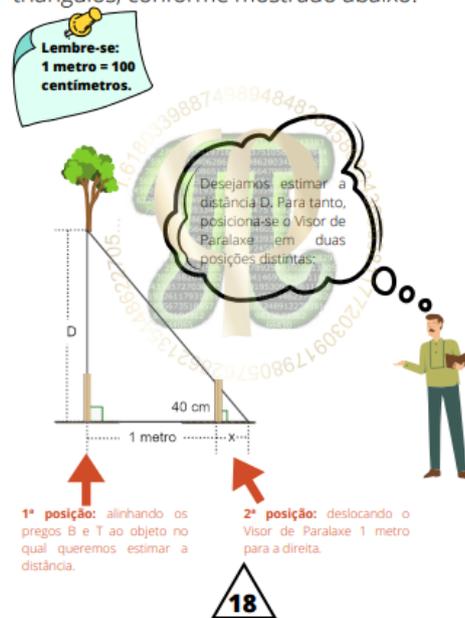
Fonte: Próprio autor.

O início de cada capítulo pode ser visualizado à direita na Figura 46 e contém elementos que remetem à formas geométricas e à instrumentos de desenho geométrico e cálculo com calculadora eletrônica. Em toda chamada de capítulo o autor coloca o título deste capítulo em meio a uma imagem do céu repleto de corpos celestes e satélites, sendo que, abaixo, vê-se um garoto observando este céu com o título do capítulo. O intuito desta composição, além de deixar o e-book mais bonito, é chamar a atenção para o título do capítulo.

Em todo o e-book o autor buscou relacionar as instruções com imagens explicativas com o objetivo de facilitar a compreensão do material e do conteúdo proposto. Essa abordagem pode é mostrada, por exemplo na Figura 47.

Figura 47 – Exemplo de Imagens Explicativas no Produto Educacional.

Para determinarmos a distância entre dois objetos de forma indireta utilizando o Visor de Paralaxe utilizamos semelhança de triângulos, conforme mostrado abaixo:



Fonte: Próprio autor.

Após a elaboração do produto educacional, este foi encaminhado para avaliação de um engenheiro electricista e um engenheiro mecânico, ambos com formação e experiência em elaboração de manuais de instrução. O objetivo desta avaliação foi uma revisão do material no que diz respeito às instruções de montagem e manuseio do visor de paralaxe. Eles retornaram com as sugestões de melhoria no dia 24/01/2023, as quais foram analisadas e, quando pertinentes, implementadas no material.

Com as pertinentes alterações implementadas, o produto educacional foi encaminhado ao orientador deste trabalho de dissertação para apreciação e sugestões de melhorias, o qual fez alguns apontamentos que foram implementados a fim de enriquecer o material produzido e

melhorar a sequência de apresentação dos capítulos.

Sendo assim, o produto educacional será disponibilizado de forma gratuita na plataforma Educapes para que as pessoas interessadas tenham acesso e possam fazer bom uso no que lhes for pertinente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A forma na qual os conceitos matemáticos são abordados pelo docente em sala de aula influencia diretamente a motivação dos estudantes em querer aprender e internalizar as habilidades necessárias para a resolução de problemas. Encontrar um contexto no qual esses conceitos podem ser aplicados e ainda ative a curiosidade da maioria dos estudantes não é uma tarefa fácil para o docente, sendo assim, este trabalho se aventurou na elaboração de uma sequência didática onde se utiliza a Astronomia como agente motivador no ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo, uma vez que a Astronomia é um tema que chama a atenção da humanidade há milênios. Para tanto, foi necessário realizar um levantamento da forma que a Trigonometria no Triângulo Retângulo é abordada na educação básica e pôde-se observar, nos materiais utilizados na Escola Estadual Militar Tiradentes “Sd PM Adriana Moraes Ramos”, a falta de um agente motivador mais eficaz na introdução à Trigonometria.

Com isso, o objetivo específico *determinar as conexões da Astronomia com a Matemática nas quais sejam efetivas na construção do conhecimento da Trigonometria no Triângulo Retângulo* foi alcançado já no Referencial Teórico. Nesta revisão pôde-se observar que conceitos matemáticos são aplicados na Astronomia, como por exemplo no cálculo de distâncias entre corpos celestes por meio da Paralaxe.

O objetivo específico *buscar, na literatura, recursos metodológicos que auxiliem no desenvolvimento do trabalho* foi alcançado quando encontramos um manual de construção de um Visor de Paralaxe rudimentar, sendo que, para a execução deste trabalho, diversas adaptações foram feitas, o que proporcionou uma maior eficácia para os estudantes.

Os seguintes objetivos específicos:

- *diagnosticar o conhecimento dos estudantes com relação a Trigonometria no Triângulo Retângulo diante das habilidades especificadas pela BNCC;*
- *diagnosticar a proficiência dos estudantes em relação a Unidades de Medida de distância, bem como conversão entre estas unidades de medidas;*
- *diagnosticar a proficiência dos estudantes em relação a Astronomia Básica: Corpos Celestes, Sistema Solar, Órbita Terrestre e Distâncias Astronômicas*

foram alcançados com a aplicação dos pré-testes, onde se pode verificar a proficiência dos estudantes, com a utilização da Teoria da Resposta ao Item, nos temas abordados.

Também se pode considerar alcançado o objetivo *analisar a melhora da proficiência dos estudantes sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo comparada com o diagnóstico inicial*, uma vez que foi aplicado o pré-teste e, com os dados obtidos, foi feita uma análise da evolução da proficiência dos estudantes por meio de um pós-teste sobre Trigonometria no

Triângulo Retângulo, do qual os itens possuíam os mesmo parâmetros do pré-teste sobre o mesmo assunto. Com isso, pôde-se observar uma melhora considerável no nível de proficiência dos estudantes participantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Com o auxílio do AVA foi possível que os objetivos específicos

- *planejar, organizar e executar uma sequência didática para o ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo com o objetivo de aprofundar a compreensão dos conceitos abordados e melhorar a proficiência dos estudantes;*
- *revisar com os estudantes as medidas do sistema métrico decimal, além de medidas usadas em distâncias maiores, como ano-luz e demais unidades astronômicas*

uma vez que foram disponibilizadas aulas gravadas nas quais os estudantes puderam desenvolver suas habilidades nos temas abordados e, como forma de diagnosticar este desenvolvimento, realizaram atividades onde tiveram que demonstrar todo o conhecimento adquirido.

Elaborar uma sequência didática de forma que motive os estudantes a aprender as habilidades pretendidas não é simples, por isso é importante que os estudantes saibam como será aplicada a sequência didática previamente, objetivando, assim, a inteira participação da maioria. Neste trabalho, os estudantes foram receptivos à proposta, o que proporcionou uma sequência de aulas interativas e divertidas, onde os próprios estudantes participantes relataram ter gostado da forma na qual o conteúdo foi ensinado, mostrando a eficácia da proposta.

Em relação ao modelo de avaliação utilizado neste trabalho para verificar a proficiência dos estudantes, sendo este a Teoria da Resposta ao Item, pôde-se constatar a eficácia deste modelo, uma vez que conseguiu verificar se determinadas habilidades não foram desenvolvidas por meio da aplicação dos pré-testes e, ainda, utilizando os mesmos critérios do pré-teste sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo no pós-teste, pôde-se fazer um comparativo da proficiência que os estudantes tinham antes da aplicação da sequência didática e após a aplicação desta sequência, verificando um bom aumento desta proficiência e, assim, constatar que os estudantes desenvolveram habilidades que antes não possuíam.

Neste trabalhado, apesar de mostrar um aumento no nível de proficiência dos estudantes em Trigonometria no Triângulo Retângulo, foi observado, nos depoimentos dos estudantes, que uma pequena porcentagem não aprovou a abordagem que foi utilizada por não gostar de Trigonometria no Triângulo Retângulo ou, até mesmo, por não gostar dos conceitos de Astronomia, sendo necessário que se busque outros meios para que os motive mais a desenvolver estas habilidades.

Pôde-se observar, também, que a maioria dos estudantes responderam de forma positiva à aplicação. Sendo assim, constata-se a eficácia da sequência didática no que se refere à questão inicial *seria possível integrar conceitos de Astronomia no Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo, a fim de motivar os estudantes a aprender esta importante habilidade,*

apresentando uma aplicação real e instigante na qual aprofunda a curiosidade que a Astronomia naturalmente traz ao ser humano?.

É importante ressaltar que esta é uma proposta de contextualização para motivar os estudantes como muitas outras que existem atualmente. Faz-se necessário que o docente encontre formas de motivar a maior parte dos estudantes a aprender as habilidades matemáticas que devem ser desenvolvidas ao longo da educação básica.

Em relação ao Produto Educacional proveniente deste trabalho, o e-Book *Visor de Parallaxe: Fundamentos, Aplicações, Construção e Medição*, pode-se notar que contribuiu muito na aplicação da sequência didática, uma vez que os estudantes puderam romper as paredes da sala de aula e construir um instrumento no qual pudessem medir distâncias de forma simples utilizando relações matemáticas. Sendo assim, este Produto Educacional pode contribuir na prática didática do docente, sendo utilizado como agente motivador para que o estudante desenvolvas as habilidades esperadas em Trigonometria no Triângulo Retângulo.

6 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Como este é um trabalho inicial e foi aplicado em um curto período, faz-se necessário uma análise mais detalhada da eficácia sequência didática aplicada, uma vez que os estudantes que participaram da aplicação são matriculados em uma instituição de ensino que seleciona os discentes, sendo assim é importante que se aplique, também, em outras instituições públicas de ensino com realidades diferentes.

Outra questão que é importante destacar é que a Astronomia não é o único método que pode ser utilizado para motivar o aprendizado dos estudantes. Pode ser que existam outras contextualizações até mais eficazes, nas quais poderão alcançar a aprovação de uma quantidade maior de estudantes. Propõe-se buscar na literatura tais contextualizações para realizar a aplicação em sala de aula, observando o contexto social no qual a comunidade escolar está inserida.

Por fim, como dito no decorrer do trabalho, os métodos convencionais de avaliação podem não ser tão eficazes na atualidade, podendo não retratar a proficiência dos estudantes em um conjunto de habilidades a serem avaliadas. Existe a necessidade de levantar de forma minuciosa os métodos avaliativos empregados nacionalmente a fim de verificar a eficácia destes métodos e, se for o caso, criar ou adaptar métodos avaliativos que retratem melhor a realidade dos estudantes.

REFERÊNCIAS

- AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro - RJ: Editora SBM, 1984. ISBN 9788585818951.
- ACADEMY-01, K. *Medidas astronômicas | Parte I*. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=YhzH8iVMHI0&t=3s>>. Acesso em: 30 out. 2022.
- ACADEMY-02, K. *Medidas astronômicas | Parte II*. 2019. Disponível em: <<https://youtu.be/1XIW-7WdHfA>>. Acesso em: 30 out. 2022.
- ACADEMY, K. *Definição de Parsec*. 2021. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=IiJEw1WUwDc&t=8s>>. Acesso em: 30 out. 2022.
- ANDRADE, D. F. de; TAVARES, H. R.; VALLE, R. da C. *Teoria da Resposta ao Item: Conceitos e Aplicações*. 1. ed. Campinas - SP: SINAPE, 2000. Volume Único.
- ASTROBIOFÍSICA, A. *A Paralaxe Trigonométrica - Medindo distâncias na Astronomia - Astronomia em Grau Olímpico*. 2021. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=veuYKFWFETA&t=2s>>. Acesso em: 30 out. 2022.
- BRASIL. Teoria de resposta ao item avalia habilidade e minimiza o chute de candidatos. 2011. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/389-ensino-medio-2092297298/17319-teoria-de-resposta-ao-item-avalia-habilidade-e-minimiza-o-chute#:~:text=A20teoria20da20resposta20ao,a20unidade20bC3A1sica20de20anC3A1lise>>. Acesso em: 5 out. 2022.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 5 out. 2022.
- CABRAL, T. G. *Maxi: Ensino Fundamental 2: Matemática 9º ano*. 1. ed. São Paulo: FGV, 2022.
- DANTE, L. R. *Matemática Dante*. 1. ed. São Paulo - SP: Ática, 2008. Volume Único. ISBN 9788508098026.
- FILHO, F. da E. S. *Teoria da resposta ao item: influência do tamanho da amostra na estimação dos parâmetros dos itens utilizandoos microdados do Enem*. set. 2020. Tese (mathesis) — USP, São Carlos, set. 2020. Disponível em: <<https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-21092020-170142/pt-br.php>>. Acesso em: 10 dez. 2022.
- FLORES, J. F.; FILHO, J. B. da R. Transdisciplinaridade e educação. *Revista Aleph*, p. 13, ago. 2016. ISSN 1807-6211. Disponível em: <https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/11797/2/Transdisciplinaridade_e_educacao.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2022.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. 1. ed. Porto Alegre - RS: Editora UFRGS, 2009. Volume Único. ISBN 9788538600718.
- GONÇALVES-01, R. *Fundamentos de Astronomia 1 - Ciências 6º ano*. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ZOFmn-tqgZE&t=12s>>. Acesso em: 30 out. 2022.
- GONÇALVES, R. *Fundamentos de Astronomia 2 - Ciências 6º ano*. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=jf14HW3rg9k&t=5s>>. Acesso em: 30 out. 2022.

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar*. 2. ed. São Paulo: Editora Atual, 1977. v. 3. ISBN 9788535716849.

JÚNIOR, F. S. J. H. T. *Sistema Maxi de Ensino: Ensino Médio: 2º ano: Caderno 2*. 1. ed. Cajamar: Editora FGV, 2018. Único. ISBN 9788578377991.

KLEIN, R. Escala de proficiência. *Glossário Ceale: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores*, 2014. Disponível em: <<https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossarioceale/verbetes/escala-de-proficiencia>>. Acesso em: 10 dez. 2022.

LESSA, D. *Como é calculada a nota do ENEM? (Teoria de Resposta ao Item - T.R.I.)*. 2020. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Wec-rClutBc>>. Acesso em: 31 out. 2022.

LINDEGGER, L. R. de M. *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos*. 2000. Dissertação (mathesis) — PUC – SP, São Paulo, 2000. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Dissertacao_Lindegger.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2022.

MIRANDA, S. M. C.; PADILHA, S. L.; CIANI, A. B. Trigonometria, cálculo, ensino e aprendizagem. *XI Encontro Nacional de Educação Matemática (Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas)*, p. 8, jul. 2013. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dezembro2013/matematica_artigos/artigo_miranda_padilha_ciani.pdf>. Acesso em: 1 set. 2022.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. 1. ed. Belo Horizonte - MG: Editora CAED UFMG, 2013. Volume Único. ISBN 9788564724266.

NETO, A. C. M. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013. ISBN 9788585818937.

NICOLESCU, B. *O manifesto da Transdisciplinaridade*. São Paulo: Editora Triom, 1999. ISBN 9788585464226.

OLIVEIRA, F. C. de. Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades. 2006. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16022/1/FranciscoCanindeO.pdf>>. Acesso em: 1 set. 2022.

OLIVEIRA, K. de; SARAIVA, M. de F. *Astronomia e Astrofísica*. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. Volume Único. ISBN 9788578611873.

PAULING, L. *Introduction to quantum mechanics: with applications to chemistry*. 3. ed. Mineola, Nova York: Editora Dover Publications, 1985. Volume Único. 468 p. ISBN 9780486648712.

PEREIRA, P. *ARCOS NOTÁVEIS - Trigonometria no Triângulo Retângulo (tabela, demonstração e exemplos)*. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=LxHY-bj3pSU&t=4s>>. Acesso em: 31 out. 2022.

PEREIRA, P. *Razões Trigonométricas (seno, cosseno e tangente) - Trigonometria no Triângulo Retângulo*. 2019. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=4sTUs4lI3dI&t=3s>>. Acesso em: 31 out. 2022.

- REIS, F. *Uma Visão Geral da Trigonometria: História, Conceitos e Aplicações*. 2016. Dissertação (mathesis) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016. Disponível em: <<https://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/1506>>. Acesso em: 5 set. 2022.
- RIZZATTI, I. M.; MENDONÇA, A. P.; MATTOS, F.; RÔÇAS, G.; SILVA, M. A. B. V. D.; CAVALCANTI, R. J. de S.; OLIVEIRA, R. R. de. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. *ACTIO: Docência em Ciências*, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), v. 5, n. 2, p. 1, aug 2020. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>>. Acesso em: 10 dez. 2022.
- ROCHA, G. Avaliação diagnóstica. *Glossário Ceale: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores*, 2014. Disponível em: <<https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossarioceale/verbetes/avaliacao-diagnostica>>. Acesso em: 31 out. 2022.
- SAMPAIO, F. A. *Trilhas da Matemática, 9º ano: Ensino Fundamental, anos finais*. 1. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2019. ISBN 9788547233679.
- SANTOS, J. Os papiros da matemática egípcia - o papiro de rhind ou ahmes. *Matemática Fácil*, 2017. Disponível em: <<https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>>. Acesso em: 20 set. 2022.
- SCHWARZA. *Onde Estaremos em 2200 - Uma viagem pela exploração espacial*. 1. ed. São Paulo - SP: Editora Outro Planeta, 2020. Volume Único. ISBN 9786555350630.
- SILAS, J. *Sistema Internacional de Unidades (SI) - Brasil Escola*. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=752KWWVH_VU&t=7s>. Acesso em: 31 out. 2022.
- SOUSA, A. M. de; SOBRINHO, J. A. B. Currículo de trigonometria no ensino médio: Uma análise dos documentos oficiais, pnld e enem. *II Encontro Campinense PROFMAT*, p. 5, out. 2020. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/encontrocampinenseprofmatt/wp-content/uploads/sites/24/2021/07/IIIECP_Airtonelton_Versao-Final.pdf>. Acesso em: 1 set. 2022.
- SZPAK, W. *Cálculo de distâncias e Áreas com o Instrumento de Visor Parallaxia*. 2018. Dissertação (mathesis) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá - PR, 2018. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=4114&id2=160610049>. Acesso em: 15 out. 2022.
- TYSON, N. de G. *Astrofísica Para Apressados*. 2. ed. São Paulo - SP: Editora Planeta, 2017. Volume Único. ISBN 9786555351286.
- VALLE, L. Pré e pós-teste ajudam professor a identificar lacunas na aprendizagem. *Instituto Claro*, 2020. Disponível em: <<https://www.institutoclaro.org.br/educacao/nossas-novidades/reportagens/pre-e-pos-teste-ajudam-professor-a-identificar-lacunas-na-aprendizagem/>>. Acesso em: 30 out. 2022.

APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL DE UNIDADES DE MEDIDAS

1. Converta 2 m para dam. (*Parâmetros: $a = 1$; $b = 1$; $c = 0,02$*)
(A) 0,02 dam (C) 20 dam (E) 2000 dam
(B) 0,2 dam (D) 200 dam
2. Determine, segundo o Sistema Internacional de Unidades, a Grandeza Fundamental para representar o tempo. (*Parâmetros: $a = 1$; $b = 1$; $c = 0,03$*)
(A) hora (C) segundo (E) unidade astronômica
(B) ano-luz (D) minuto
3. Determine, segundo o Sistema Internacional de Unidades, a Grandeza Fundamental para representar a distância. (*Parâmetros: $a = 1$; $b = 1$; $c = 0,04$*)
(A) quilômetro (C) ano-luz (E) metro
(B) milímetro (D) centímetro
4. Um veículo se move do ponto A ao ponto B em 2 horas. Assinale a alternativa que representa este tempo gasto em segundos. (*Parâmetros: $a = 1,25$; $b = 2$; $c = 0,01$*)
(A) 7200 segundos (C) 430 segundos (E) 3 600 segundos
(B) 120 segundos (D) 890 segundos
5. Em um TAF, Teste de Aptidão Física, do concurso da Polícia Militar do Estado de Mato Grosso um candidato percorreu 2,4 km em 0,2 horas. Considerando que a velocidade seja constante em todo o trajeto, qual a velocidade média, aproximadamente, do candidato? (*Parâmetros: $a = 1,5$; $b = 3$; $c = 0,02$*)
(A) 12 m/s (C) 12,22 m/s (E) 0,2 m/s
(B) 3,33 m/s (D) 2,4 m/s

6. No Parque da Águas, em Cuiabá/MT, foi instalado um chafariz no qual jorra água no ritmo das músicas que são colocadas, abrilhantando os olhos dos que estão presentes com a chamada “Dança das Águas”. Supondo que este chafariz tenha sido importado de um país cuja medida padrão seja pés (ft), sabendo que, em conversão direta, 1 ft corresponde a 30 centímetros, e ainda que a água deste chafariz atinge a altura máxima de 175 ft, determine, segundo o Sistema Internacional de Unidades, a altura que esta água atinge. (*Parâmetros: $a = 2$; $b = 3$; $c = 0,04$*)
- (A) 5 250 decímetros (C) 52,5 centímetros (E) 525 metros
(B) 52,5 metros (D) 5 250 metros
7. Sistemas de aviões e navios calculam a distância percorrida em milhas náuticas, unidade de medida de distância onde cada milha náutica corresponde a 1852 metros. Se um avião, após decolar, se encontra a 35 milhas náuticas do aeroporto de origem, qual seria esta distância em metros? (*Parâmetros: $a = 2$; $b = 2$; $c = 0,02$*)
- (A) 55 560 m (C) 5560 m (E) 9528 m
(B) 64 820 m (D) 7453 m
8. Uma aeronave está a uma velocidade de 600 km/h. Determine dentre as alternativas abaixo, segundo o Sistema Internacional de Unidades, a que representa, aproximadamente, a velocidade na qual este avião se encontra. (*Parâmetros: $a = 1,75$; $b = 2$; $c = 0,02$*)
- (A) 600 km/h (C) 320,42 km/h (E) 33,37 m/s
(B) 166,67 m/s (D) 166,67 km/s
9. Converta 342 mm para metros. (*Parâmetros: $a = 1$; $b = 1$; $c = 0,04$*)
- (A) 0,342 m (C) 34,2 m (E) 3420 m
(B) 3,42 m (D) 342 m
10. A unidade de medida Anos Luz corresponde a: (*Parâmetros: $a = 1,25$; $b = 1$; $c = 0,02$*)
- (A) Tempo (C) Massa (E) Força
(B) Distância (D) Temperatura

APÊNDICE B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL DE ASTRONOMIA

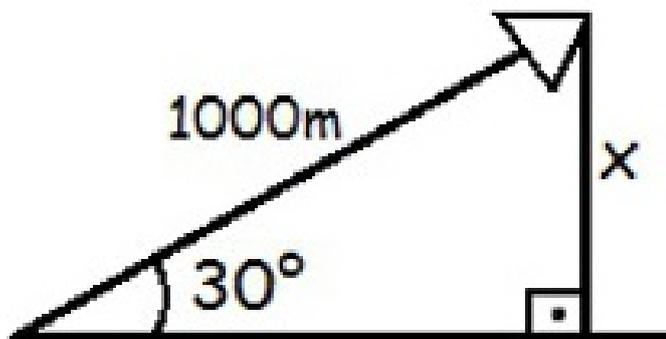
1. O que significa Unidade Astronômica? (*Parâmetros: $a = 1,25$; $b = 1$; $c = 0,01$*)
 - (A) A distância entre a Terra e Marte.
 - (B) A distância entre a Terra e o sol.
 - (C) A distância entre o Sol e Alpha Centauri.
 - (D) A distância entre Marte e Júpiter.
 - (E) A distância entre A Terra e a Lua.
2. Determine, dentre as alternativas abaixo, a que tem a melhor aproximação da velocidade da luz: (*Parâmetros: $a = 1,5$; $b = 1$; $c = 0,02$*)
 - (A) 300 000 km/s
 - (B) 195 253 km/s
 - (C) 300 000 000 km/s
 - (D) 356 000 000 km/s
 - (E) 195 000 km/s
3. Assinale, dentre as alternativas abaixo, a que descreve o parsec: (*Parâmetros: $a = 1,5$; $b = 2$; $c = 0,01$*)
 - (A) É a unidade de distância que se tem medindo o ângulo de Paralaxe entre a Terra e o Sol
 - (B) É a distância exata de um ano luz
 - (C) É a distância entre a Terra e o Sol
 - (D) É a distância que a Luz percorre em 60 segundos
 - (E) É a unidade de distância que é definida pelo tamanho do sistema solar e utilizada para medir o tamanho do universo
4. Determine, dentre as alternativas abaixo, o tempo necessário para que a luz percorra 1 parsec: (*Parâmetros: $a = 1,75$; $b = 3$; $c = 0,04$*)
 - (A) $1,028 \times 10^8$ s
 - (B) $1,028 \times 10^{18}$ s
 - (C) $9,25 \times 10^{15}$ s
 - (D) $1,028 \times 10^{-8}$ s
 - (E) $9,25 \times 10^{18}$ s
5. Segundo estimativas em estudos da Cosmologia, o Universo observável possui cerca de 28 gigaparsecs. Sendo assim, determine o tempo necessário para que a luz percorra toda esta distância: (*Parâmetros: $a = 2$; $b = 3$; $c = 0,04$*)

- (A) $2,8784 \times 10^{-11}$ s (C) $2,8784 \times 10^{15}$ s (E) $8,74 \times 10^{-13}$ s
(B) $8,65 \times 10^{-12}$ s (D) $28,74 \times 10^{-10}$ s
6. Determine o nome do movimento que a Terra faz ao redor do sol e o tempo gasto no percurso. (*Parâmetros: a = 1; b = 1; c = 0,04*)
- (A) Rotação e gasta 24 horas (D) Rotação e gasta 12 horas
(B) Rotação e gasta 365 dias (E) Translação e gasta 365 dias
(C) Revolução e gasta 12 horas
7. Assinale a definição correta de Paralaxe Heliocêntrica. (*Parâmetros: a = 1,25; b = 2; c = 0,02*)
- (A) É usada para medir a distância entre a Terra e estrelas próximas. Com o movimento de translação da Terra podemos ver o descolamento de uma determinada estrela em relação às estrelas de fundo e, assim, calcular a distância.
(B) É usada para medir o grau de luminosidade de uma estrela, podendo descobrir sua massa e idade.
(C) Com ela é possível descobrir exoplanetas pelo método do trânsito, isto é, quando o planeta passa em frente sua estrela hospedeira e ofusca parte da luz desta estrela.
(D) É utilizada somente para calcular o diâmetro da Terra.
(E) É usada para medir a distância entre a Terra e estrelas próximas. Com o movimento de rotação da Terra podemos ver o descolamento de uma determinada estrela em relação às estrelas de fundo e, assim, calcular a distância.
8. Determine, dentre as alternativas abaixo, o nome da estrela mais próxima da Terra. (*Parâmetros: a = 1; b = 1; c = 0,02*)
- (A) Próxima Centauri (C) Betelgeuse (E) Sol
(B) Sírius (D) Canopus
9. As distâncias astronômicas são calculadas em anos luz. Excluindo nossa estrela, o sistema estelar mais próximo da Terra está a aproximadamente 4 anos luz de distância de nós, isto é, se conseguíssemos viajar na velocidade da luz, demoraríamos 4 anos para chegar até esta estrela. Qual é esta estrela?. (*Parâmetros: a = 1,5; b = 2; c = 0,01*)
- (A) Próxima Centauri (C) Canopus (E) Sírius
(B) Amintaka (D) Betelgeuse
10. Qual é o método rudimentar que os astrônomos utilizam para calcular a distância entre a Terra e outras estrelas, sendo que eles precisam de dois dados coletados em épocas diferentes do ano? (*Parâmetros: a = 1,25; b = 2; c = 0,02*)

- (A) Paralaxe Heliocêntrica (C) Paralaxe Geocêntrica (E) Quadrangulação
(B) Método de Hint (D) Método de Cassing

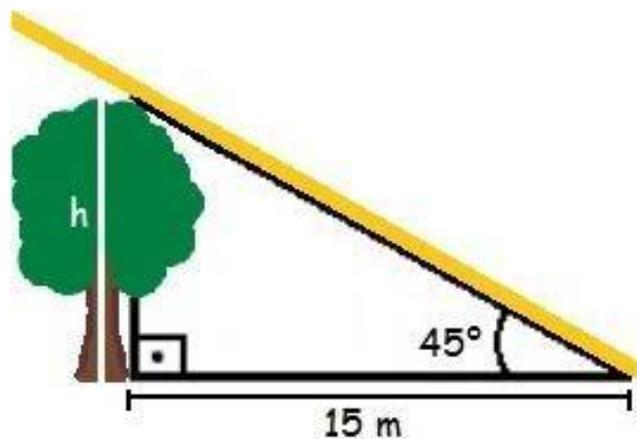
APÊNDICE C – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1. Determine o valor de x na figura abaixo: (*Parâmetros: $a = 1$; $b = 1$; $c = 0,01$*)

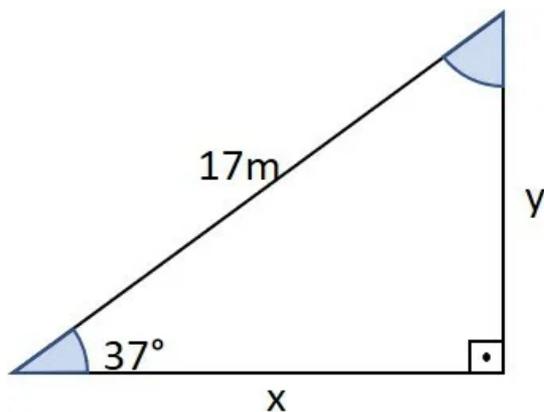


- (A) 500 m. (C) 250 m. (E) 150 m.
(B) 2000 m. (D) 3000 m.
2. Utilizando as Razões Trigonômicas, podemos descobrir a medida de um lado de qualquer triângulo retângulo se tivermos o valor de um de seus ângulos agudos e a medida de outro lado. Sabendo estas razões, qual devemos utilizar caso um dos lados dados seja o cateto oposto ao ângulo agudo e queremos descobrir a medida do cateto adjacente a este ângulo? (*Parâmetros: $a = 1,25$; $b = 1$; $c = 0,04$*)
- (A) Tangente. (C) Cosseno. (E) Cossecante.
(B) Seno. (D) Secante.

3. Determine o valor de h na figura abaixo: (Parâmetros: $a = 1$; $b = 1$; $c = 0,02$)



- (A) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (E) $\frac{\sqrt{5}}{9}$.
 (B) $\frac{15\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
4. Considerando $\sin 37^\circ = 0,60$, $\cos 37^\circ = 0,79$ e $\tan 37^\circ = 0,75$, determine os valores de x e y na figura a seguir:

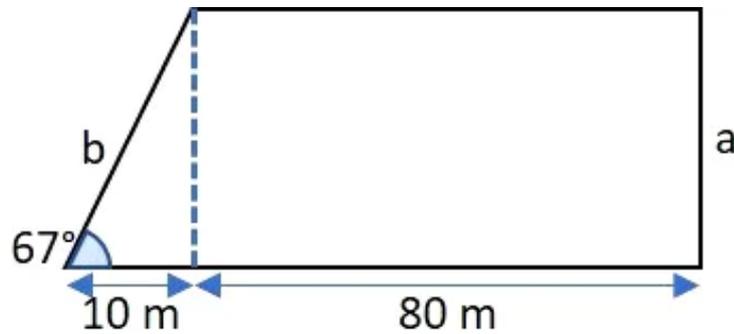


(Parâmetros: $a = 1,25$; $b = 1$; $c = 0,02$)

- (A) $y = 10,2\text{ m}$ e $x = 13,43\text{ m}$. (D) $y = 10\text{ m}$ e $x = 19\text{ m}$.
 (B) $y = 90,5\text{ m}$ e $x = 12,7\text{ m}$. (E) $y = 5,2\text{ m}$ e $x = 6,43\text{ m}$.
 (C) $y = 1\text{ m}$ e $x = 13\text{ m}$.

5. A sombra projetada de uma casa, em determinada hora, mede 23 metros e faz um ângulo de 45° com o solo. Determine a altura desta casa. (*Parâmetros: $a = 1,25$; $b = 2$; $c = 0,03$*)
- (A) 23 m. (C) 33 m. (E) 5 m.
(B) 10 m. (D) 45 m.
6. Determine a medida da diagonal de um retângulo com base medindo 8 cm sabendo que o ângulo formado entre a base e esta diagonal mede 30° . (Use $\sqrt{3} = 1,7$) (*Parâmetros: $a = 1,75$; $b = 2$; $c = 0,01$*)
- (A) 5. (C) 7. (E) 9.
(B) 6. (D) 8.
7. (Cesgranrio) Uma escada de 2 m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de: (*Parâmetros: $a = 1,75$; $b = 2$; $c = 0,01$*)
- (A) 0,5 m. (C) 1,5 m. (E) 2,0 m.
(B) 1 m. (D) 1,7 m.
8. Uma tirolesa será feita em uma montanha que possui 100 metros de altura. Sabendo que ela será amarrada de tal modo que forme com o chão um ângulo de 30° , qual deve ser o tamanho do cabo da tirolesa? (*Parâmetros: $a = 1,5$; $b = 2$; $c = 0,03$*)
- (A) 100 m. (C) 150 m. (E) 200 m.
(B) 125 m. (D) 175 m.

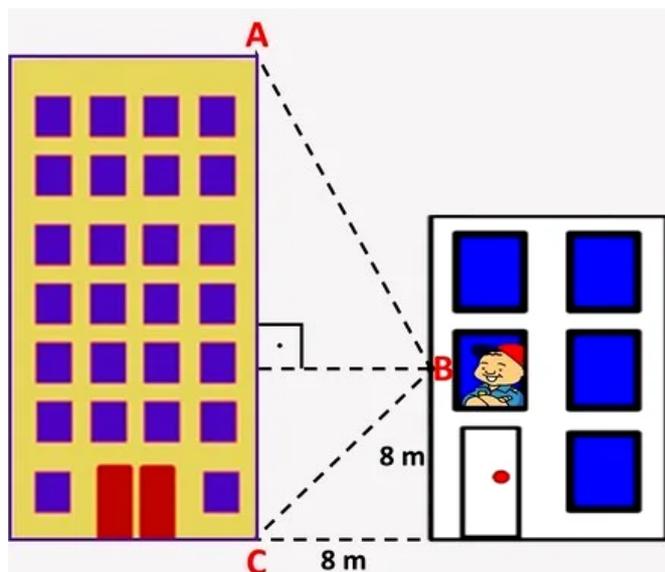
9. Determine o perímetro da figura abaixo:



Considere: $\sin 67^\circ = 0,92$, $\cos 67^\circ = 0,39$ e $\tan 67^\circ = 2,35$. (Parâmetros: $a = 2$; $b = 3$; $c = 0,04$)

- (A) 219,1 m. (C) 203 m. (E) 156 m.
 (B) 540,2 m. (D) 431,7 m.

10. Pedro, localizado a 8 metros do chão, está observando o prédio vizinho. Sabendo que a sua distância para o prédio vizinho é de 8 m e entre as duas estruturas forma-se um triângulo, cujo ângulo ABC é de 105° , determine a altura do prédio que Pedro está observando. (Parâmetros: $a = 2$; $b = 3$; $c = 0,04$)



(A) 21,86m.

(C) 15,7m.

(E) 12m.

(B) 29m.

(D) 32m.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO PARA OPINIÃO DOS ESTUDANTES SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

1. Antes da aplicação do trabalho, qual o seu nível de compreensão dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo?
 - (A) Não me lembro de ter aprendido.
 - (B) Baixo, mal sabia calcular utilizando as razões trigonométricas.
 - (C) Regular. Sabia calcular utilizando as razões trigonométricas, mas em questões simples.
 - (D) Avançado. Sabia calcular utilizando as razões trigonométricas em qualquer situação.
2. A sequências das atividades propostas (delimitação da proposta, materiais de aprendizado, atividades e testes) contribuíram para que você compreendesse o objetivo do trabalho?
 - (A) Quase nunca.
 - (B) Raramente.
 - (C) Algumas vezes.
 - (D) Frequentemente.
 - (E) Quase sempre
3. O Ambiente Virtual de Aprendizagem contribuiu de forma significativa para a compreensão dos conceitos relacionados.
 - (A) Quase nunca.
 - (B) Raramente.
 - (C) Algumas vezes.
 - (D) Frequentemente.
 - (E) Quase sempre
4. Estou satisfeito pois a forma que foi abordado o conteúdo de Trigonometria pois possibilitou que eu aprendesse de forma mais efetiva.
 - (A) Quase nunca.
 - (B) Raramente.
 - (C) Algumas vezes.
 - (D) Frequentemente.
 - (E) Quase sempre
5. Eu não percebi o tempo passar quando eu desenvolvia as atividades propostas pelo professor.
 - (A) Quase nunca.
 - (B) Raramente.
 - (C) Algumas vezes.
 - (D) Frequentemente.
 - (E) Quase sempre
6. As aplicações na Astronomia o motivaram e facilitaram seu aprendizado dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo.

- (A) Quase nunca. (C) Algumas vezes. (E) Quase sempre
(B) Raramente. (D) Frequentemente.

7. No seu ponto de vista, a utilização de conceitos da Astronomia motiva o aprendizado de vários conteúdos da Matemática.

- (A) Quase nunca. (C) Algumas vezes. (E) Quase sempre
(B) Raramente. (D) Frequentemente.

8. Após a aplicação do trabalho, como se sente sobre seus conhecimentos em Trigonometria no Triângulo Retângulo?

- (A) Nada mudou. (C) Melhorou de forma mediana.
(B) Melhorou pouco. (D) Melhorou bastante.

9. Fale sobre a sua opinião em relação à construção do Visor de Paralaxe (manual, participação e equipamento).

10. Fale sobre a sua opinião em relação à medição de distâncias utilizando o Visor de Paralaxe (fale sobre a contribuição para ser aprendido).

11. Fale sobre a sua opinião em relação ao cálculo de distâncias astronômicas (dificuldades, pesquisas, acertos e erros).

12. Fale sobre a Astronomia ter motivado seu aprendizado de conceitos de Trigonometria e se deveria (a Astronomia) ser empregada mais vezes na Matemática.

APÊNDICE E – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO À CONSTRUÇÃO DO VISOR DE PARALAXE

Abaixo estão transcritos os relatos dos estudantes participantes em relação ao item *fale sobre a sua opinião em relação à construção do Visor de Paralaxe (manual, participação e equipamento)*. Para manter a originalidade dos relatos, os mesmos foram transcritos sem correções, sendo assim, erros gramaticais poderão ser encontrados.

- *“achei bem divertido porque eu nunca ia imaginar que agente poderia ter uma aula diferente, sem aquela pressão dentro de sala de aula, o visor foi uma “régua” que dá pra medir algo muito distante, coisa que eu nunca ia imaginar que dá pra fazer utilizando pregos e duas ripas, mais foi uma experiência e tanto gostei muito”.*
- *“Foi uma atividade interessante de se fazer. Porém, eu não tinha noção do que estávamos fazendo e nem para o que servia. Após algumas aulas, pude compreender melhor”.*
- *“Primeiramente, eu desenvolvi uma área na qual nunca achei que iria conhecer, mas o manual me ajudou em quase tudo , pois me fez ter uma ideia de como seria o cálculo. Com simples materiais descobri que eu poderia calcular qualquer distância, vamos dizer de um ponto aonde me encontro até um alvo , minha participação foi possível acredito eu , pois ajudei na resolução dos cálculos”.*
- *“O equipamento de início foi uma preocupação, porém conseguimos o material necessário. O manual foi útil apesar das duvidas do grupo”.*
- *“Em primeiro instante, quando comecei a ler o manual junto com o meu grupo, fiquei confuso, não só eu mas meu amigos também. Isso se deve talvez pela falta de compreensão de visualizar o que devia ser feito. Mas quando pegamos o jeito de construir, se tornou algo diferente e divertido de aprender. Claro que quando terminamos de fazer o Visor, não sabíamos como usar ou nem mesmo onde iríamos usar”.*
- *“Eu gostei bastante, porque antes eu não sabia de nada com a construção do Visor de Paralaxe eu comecei a me interessar e aprendi muito também”.*
- *“Bom, no dia em questão eu não compareci à aula, devido a alguns problemas pessoais. Mas pelo que meu grupo me relatou foi um trabalho interessante e de certa forma até um pouco divertido”.*
- *“No dia eu faltei, mas o projeto final ficou muito bom e diferente do que eu imaginava que ia ser, não sabia nem como usava mas após a explicação do professor achei bem fácil de utilizar”.*

- *“Bom no começo foi difícil entender como montar e aplicar o equipamento na hora das contas, mas os vídeos e, depois que o professor explicou ajudou nas partes da montagem do equipamento e na hora dos cálculos ficou mais fácil de compreender o conteúdo. E pra mim foi um conteúdo muito legal e interessante porque nunca imaginei estudar um pouco sobre astronomia e como são feitos os cálculos que são diferentes dos cálculos da matemática, e gostaria de ter mais aulas sobre astronomia”.*
- *“A experiência em si foi muito legal e divertida, o manual estava de uma forma fácil de entender, e sobre o equipamento, eu não sabia que dava pra calcular a distância sem precisar de trena, e além do mais foi algo muito divertido de montar e também muito interessante para aprender”.*
- *“O manual bem explicativo, achei bem divertido montar o equipamento, meio difícil de usar mas interessante”.*
- *“O equipamento ajuda a medir as distâncias de forma eficaz e nos faz compreender as fórmulas e cálculos distintos, como por exemplo como calcular a distância da terra para uma estrela”.*
- *“Devido aos materiais que nós usamos, ficou um pouco mais difícil que o normal, mas no geral, conseguimos criar o Visor, de forma que pudemos utilizá-lo nos cálculos, mais a frente”.*
- *“A maneira da construção do equipamento em grupo foi uma ótima forma de aprendizado e bem divertida, o mais importante de citar foi a colaboração de todos os membros do grupo, assim cada membro cuidou de uma parte do projeto e cada um dos equipamentos definidos pelo professor foram utilizados da maneira correta, assim foi possível finalizar o projeto”.*
- *“Achei bom, porém é meio complicado de utilizar”.*
- *“Participação: o meu grupo todo participou na montagem do equipamento com exceção do Samuel que teve que ir embora mais cedo. E eu achei muito top a aula que montamos o equipamento, aulas diferentes são legais. Equipamento: achei diferente e legal. Interessante a construção do equipamento, foi bom fazer algo diferente. A construção não foi difícil de fazer, o manual de instruções da montagem não era difícil de entender, mas o equipamento e a forma que ele funciona foi complicado e confuso de compreender”.*
- *“A construção do visor de paralaxe, foi para mim uma experiência diferente, pois, nunca tinha ouvido falar desse instrumento de medida, neste caso, a construção desse visor de paralaxe mostrou que de forma simples podemos obter medidas em metros, de uma forma muito simples e bem ultrapassada e com medidas não tão exatas, sendo até legal a forma na qual conseguimos medir as distâncias de um local ao outro”.*

- *“Começamos pela as medições e as marcações que precisávamos ter nas ripas de madeira, na ripa 1, é aquela que fica na horizontal, desenhamos as medidas, do centro (0cm) até a esquerda, a ponta da ripa (20cm), e, também, do centro (0cm) até a direita, a outra ponta da ripa, que seria (20cm). Já na ripa 2, essa ripa vai ficar na vertical, fizemos a medição de 40cm, e o professor sempre por perto, para auxiliar nós”.*
- *“O manual foi essencial porque mostrou passo a passo em como fazer a construção do Visor, todos os membros do meu grupo foi participativo e o Visor de Paralaxe foi algo que eu nunca tinha visto antes. sobre o manual achei bem explicativo e fácil de entender, consegui compreender antes mesmo de começar o visor. Tive bastante participação na hora de montar. O equipamento do meu grupo ficou meio torto mas conseguimos fazer”.*
- *“Foi divertido mexer com furadeira, martelo e pregos, então gostei bastante, mas o manual achei um pouco difícil de entender e faltava algumas informações, entretanto, tirando isso, foi legal. A participação de todos para fazer um instrumento interessante foi... emocionante, principalmente quando umas pessoas estavam calculando a hipotenusa que formava nos visores.... contudo, também, havia pessoas que se colocaram nas costas das pessoas e não fizeram nada e isso foi... desgastante, mas o grupo era grande e o trabalho que tinha que ser feito podia menos de cinco pessoas fazerem, mas (pt.2) essas pessoas nem respondiam o grupo, então foi um pouco irritante. Tirando isso, foi uma experiência boa e que levarei para o resto da vida, principalmente o calcular a distância das estrelas, para eu medir junto com o meu pai, que gosta bastante dessas coisas”.*
- *“Eu achei bem legal, pois conseguimos fazer um trabalho em grupo, onde não ficou pesado para somente um do grupo, onde todos participaram e se envolveram, fazendo com que ficasse um trabalho bem elaborado e bem bonitinho, um equipamento em que se todos se envolveram como aconteceu com o nosso grupo não foi muito difícil para ser produzido. Agradecemos ao professor por ter nos passado alguns de seus conhecimentos na área da astronomia”.*
- *“Foi legal. Por mais que eu tava meio mal por conta de problemas pessoais, foi bom. Eu pude botar em prática a minha cabeça sobre como que tinha que ser feito (sem ofensas, mas não consegui entender nada do que tinha na folha de como fazer. Só o professor explicando que consegui entender). Só queria fazer um adendo que nem todos ajudaram na construção do equipamento nem nas outras atividades propostas, fazendo com que só minha irmã e eu (estávamos no mesmo grupo) fizesse boa parte de todo o trabalho. Essas pessoas começam com a letra G e R, principalmente. Elas que, literalmente, não fizeram nada. E teve mais pessoas, como a que começa com A, que nunca se propôs a fazer os relatórios e ficava dando opinião do que estava errado depois. Enfim, tirando essa parte de não-participação das pessoas e o dia que eu estava meio mal, foi bom fazer uma atividade prática. Ah, os equipamentos nós usamos bem”.*

- *“Foi uma experiência incrível, por mais que tenha tido dificuldade no início, foi ótimo para aprendizado e para socialização com os colegas”.*
- *“Foi uma experiência de aprendizado diferente do que era de se esperar, após começarmos a trabalhar em grupo e seguindo o manual disponibilizado pelo professor, consegui desenvolver um ótimo trabalho em equipe e começou a gerar um interesse enorme em colocar nosso trabalho em prática, pois não fazia ideia de que poderia medir certas distâncias por um simples equipamento. Um aprendizado único”.*
- *“Bem infelizmente não pude participar da construção do visor de Paralaxe, mas nas aulas que se seguiram eu pude entender como o visor funciona e até tive prática do uso, é um instrumento muito interessante para aprofundar o aprendizado dentro o conteúdo estudado”.*
- *“A construção foi bem explicativa e dinâmica, conseguimos perceber que com simples materiais podemos fazer um equipamento que pode calcular grandes distâncias, logo esta atividade foi muito interessante, pois conseguimos aprender vários conceitos novos de uma forma divertida”.*
- *“Gostei muito, facilitou no entendimento e realização das atividades que em sala muitas vezes pareciam ser muito complexas”.*
- *“A construção de um visor paralaxe foi uma experiência única e muito divertida, aprendemos que tem q estar todas as medidas corretas se não estará errado na hora de utilizar, achei divertido a construção do material a na hora de utilizá-lo assim nos interessamos mais no assunto e aprendemos mais”.*
- *“Já tenho contato diário com madeira, prego e martelo, mas não impediu de ser uma experiência muito divertida”.*
- *“Foi uma experiência bastante divertida em questão a montagem do equipamento, consegui entender um pouco mais sobre o conteúdo com os vídeos disponibilizados. Porém ainda assim, por causa da minha dificuldade de compreensão com matemática ainda continuo com alguns problemas em relação a razões trigonométricas, consegui entender mais a equação, porém tenho dificuldades em utilizar”.*
- *“Na primeira hora que eu li o manual eu não entendi muita coisa, mas depois eu fui compreendendo o funcionamento da coisa, eu sinceramente não ajudei muita na parte da construção do equipamento pois não tinha muita noção, mas em relação ao funcionamento do equipamento é muito bom eu até duvidei do funcionamento dele por um momento mas depois eu aprendi como usava e deu tudo certo”.*

- *“Gostei muito desse projeto, possibilitou um enorme conhecimento sobre trigonometria e também a união, aonde todos contribuíram para o aprendizado. Espero fazer mais projetos similares a esse”.*
- *“Foi uma experiência muito distinta do que eu estava acostumado, alguns materiais foram mais complicados de encontrar, como as madeiras com medidas bem específicas. Por ter sido um trabalho em grupo, facilitou que todos pudessem participar sem se desgastar tanto. Em relação ao medidor pronto, tivemos que tentar mais de uma vez para chegar em um resultado mais próximo do esperado, creio que fizemos o que foi proposto. Ambos os manuais estavam bem dinâmicos, com imagens e passo a passo, para facilitar a montagem e a medição”.*
- *“Esse equipamento eu nunca tinha visto antes e por ser uma coisa feita sem muito preparo, com poucas peças no caso eu achei muito funcional e útil para medir pouca distância”.*
- *“Foi uma experiência interessante, teve que ter um trabalho em equipe muito grande tanto pra conseguir os materiais quanto para fazer os cálculos, na hora da montagem teve alguns problemas mas nada muito complexo levando em consideração que no final deu certo, e um leve medo na hora que a madeira rachou porém deu pra resolver com cola de madeira”.*
- *“Foi uma experiência diferente e divertida de se fazer”.*
- *“Achei um método divertido de introduzir e relacionar todos os membros do grupo, pois, todos ajudaram e se comprometeram com a construção em relação ao manual achei um pouco difícil de interpretar mas nada que fosse impossível”.*
- *“O manual foi redigido de forma simples o que ajudou a todos meus colegas de grupo na compreensão em relação a participação foi legal participar uma novidade pra mim foi um conteúdo interessante de se aprender. Em relação ao equipamento no começo foi um pouco complicado de compreender a forma de utiliza-lo mais depois tudo fluiu bem conforme as instruções que o professor nos passou”.*
- *“Achei o manual bem explicado. A atividade foi bem legal. O visor é bem simples de ser usado.*
- *“Achei legal o método de que foi desenvolvido para que cada grupo construísse o seu visor de paralaxe, foi uma experiência bacana, pois eu nunca havia vivenciado uma experiência parecida construindo algo em grupo”.*
- *“Achei muito bom, foi uma ótima experiência, ver como que é feito e aprender como que é feito”.*

- *“No começo achei uma aula um tanto “chata” mas, com o decorrer do tempo fui entendendo melhor como funcionava o visor de Paralaxe, como se realiza e a finalidade de todo este trabalho. Com o auxílio do professor conseguimos nos encontrar no trabalho e aos poucos conseguindo realiza-lo. Foi uma experiência boa, diferente de aulas feitas anteriormente, por ser uma aula prática. Acho bom ressaltar o trabalho feito em grupo, a união com a qual tivemos ao manusear os instrumentos precisos, ao conversar para chegarmos nos resultados obtidos e etc”.*
- *“O manual foi fácil de compreender, teve a participação de todos do grupo na montagem, e os materiais eram de fácil acesso”.*
- *“Eu gostei pois foi uma atividade diferenciada, que possibilita uma melhor compreensão das áreas de trigonometria, além de quebrar aquela rotina de estudar no livro e caderno, gostaria que houvesse mais aulas como essa, pois se trata de um conteúdo mais interativo que despertou interesse nos alunos em explorar e matéria e o conteúdo em si”.*
- *“Para construir o visor utilizamos os seguintes materiais: duas ripas de madeira de 40 cm, cola de madeira, cinco pregos, um martelo, um marcador, uma régua e uma furadeira. A primeira etapa da montagem foi bem simples, basicamente tínhamos que medir com a régua e fazer as marcações na ripa onde devíamos fazer os furos. A parte da montagem já foi mais complicada, pois nossos pregos eram de 6 cm e tinha uma espessura maior, logo quando fomos pregar o prego na ripa de pvc ela acabou cedendo e rachando um pouco, mas com a ajuda do professor conseguimos executar a atividade com sucesso. Achei interessante a ideia desse trabalho, pois é um tipo de atividade que nunca tínhamos praticado e foi uma ótima experiência”.*
- *“Foi uma experiência bacana, pois pude vivenciar como mais ou menos profissionais fazem para medir as estrelas, mas medindo metros”.*
- *“Foi uma experiência foda, aprendi pra caramba e gostei de fazer o visor. pretendo continuar a estudando sobre o assunto, foi uma divertido fazer o trabalho em grupo”.*
- *“No meu ponto de vista, eu gostei de como foi montado o equipamento e também a forma em que foi usado, além de ser uma forma diferente de aprender, só achei um pouco complicado a parte do manual pois entrava muito formal o que dificultou o entendimento dos alunos, achei divertido a forma de como foi trabalhado as equipes, porque todos participaram e ajudaram”.*
- *“Achei muito legal, o manual no início parecia um pouco confuso mas conforme fomos fazendo, entendemos ele. achei bom o fato de ter interação com os colegas e o trabalho em equipe tanto na construção quanto no desenvolvimento dos cálculos”.*

- *“Achei maravilhoso nos envolver em um trabalho assim, onde nós mesmos pudemos nos ajudar e fazer o equipamento... foi muito dinâmico e com muita certeza nos ajudou muito”.*
- *“Foi um pouco difícil de montar por ser muito preciso, mas foi muito legal ver o resultado, ver que os cálculos batiam com o resultado. Isso foi muito satisfatório, me senti muito bem em ver o resultado”.*
- *“O manual auxiliou muito na construção e utilização do equipamento, o diálogo que tivemos em grupo e o desenvolvimento das contas foi de grande importância para o conhecimento sobre o conteúdo e o equipamento foi algo inovador que pudemos usar de maneira a ajudar o conhecimento matemático geral”.*
- *“Achei interessante a forma do experimento, não sei se consegui entender bem como o objeto em si funcionava (não soube manusear corretamente, porém os colegas ajudaram), já que o manual era um pouco denso, mas acho que o fato de expor uma situação prática de trigonometria me ajudou a fazer algumas relações importantes para avançar um pouco no e seguir melhor com o conteúdo”.*
- *“Gostei da experiência, pois foi possível aprender um pouco mais sem precisar estar sempre com a caneta na mão respondendo atividades, a montagem foi bem legal fiquei um pouco perdida nas instruções mas depois meus colegas me explicaram e gostei de martelar os pregos (por mais que minha única vez de martelar eu só entortei o prego e tiveram que fazer tudo de novo)”.*
- *“O manual estava com uma linguagem bastante difícil, no vocabulário matemático. Isso foi uma dificuldade imensa para mim, que não pude ajudar meus colegas na explicação e compreensão do manual, tentei participar como pude. A minha participação contou mais na montagem do equipamento e muito pouco nos cálculos, o que me incomodou um pouco, mas me incentivou a procurar mais sobre o assunto. No geral a atividade foi diferente, desafiadora e não podia ter chegado em um momento melhor da minha vida como aluna”.*
- *“Foi interessante”.*
- *“Foi boa por assim dizer, embora eu não tenha tido tanto contato assim com o visor eu fiquei por perto observando cada passo sendo construído, achei uma atividade diferente e gostei pelo fato de ter feito tudo uma interação a mais com o pessoal, seria bom atividades assim pra descontrair um pouco”.*
- *“Na minha opinião, foi um trabalho muito interessante de se fazer, pois além de darmos uma diferenciada nas aulas de matemática fizemos e mexemos com algumas coisas que nunca nem ouvimos falar, o manual estava muito bem compreensivo na hora de executar*

- o passos, foi bem legal fazer as medições e compara-las com o valor real da distância, o equipamento que montamos é um pouco peculiar e bem divertido de ser montado”.*
- *“Foi algo diferencial da escola, nunca tinha feito algo nesse estilo, muito menos fazer, usar, e ter um aprendizado com isso”.*
 - *“Eu gostei, não era uma aula que eu esperava ter em matemática. Apesar de não ter compreendido muito sobre o conteúdo, pois não sou tão boa na matéria, foi algo divertido e diferente, saiu um pouco da rotina”.*
 - *“Achei interessante a proposta do professor em desenvolver essa atividade prática, fazendo com que trabalhássemos em grupo para construir o Visor de Paralaxe então cada membro do grupo fez sua parte na montagem até que ficasse pronto para o professor nos ensinar a usar, e ninguém ficar de fora. O manual que o professor deu para cada grupo também facilitou muito para a montagem”.*
 - *“Achei uma ideia boa trazer a atividade dessa forma, o passo a passo apresentado através do manual foi intuitivo e os materiais não foram tão difíceis de se encontrar, fazendo assim uma atividade interessante e diferente do que estou acostumado”.*
 - *“Não participei no dia da construção do visor, mas no dia seguinte o testei e fiz os cálculos, achei legal, e algo interessante, e de importante aprendizado”.*
 - *“Usamos material de fácil acesso, lendo as instruções no manual a montagem foi fácil a única parte que poderíamos cometer algum erro seria a marcação em cm”.*
 - *“Meu grupo fez 2 paralaxe, na primeira não participei da montagem, na segunda eu participei (fiz) somente das marcações de cm. Na aula pratica não participei, pois não compreendi direito o funcionamento do equipamento”.*
 - *“Bom, pensei que era mais difícil porém não foi bem assim foi bem mais tranquilo do que o esperado”.*
 - *“Foi uma experiência que acrescentou muito nos meus conhecimentos, pois aprendi que o paralaxe é usado para fazer medições indiretas”.*
 - *“Particularmente gostei de fazer parte deste projeto, foi de forma curiosa e ansiosa para aprender sobre astronomia, um conteúdo interessante e divertido”.*
 - *“Faltou um pouco de didática, pois apenas no papel ficou um pouco difícil para compreensão, e também um pouco de atenção do regente, o grupo em que eu estava teve pouquíssimo auxílio na hora da montagem”.*
 - *“Infelizmente não pude participar da aula”.*

- *“Faltei no dia”.*
- *“No primeiro dia continha apenas pessoas que queriam colaborar e ajudar de alguma forma então em minha opinião foi o único dia que deu certo,foi o único dia q consegui aprender alguma coisa ao menos.A ajuda do professor nesse dia foi sem dúvidas o que mais nos guiou pois eu não consegui entender nada,absolutamente nada da explicação do manual porém outras pessoas do grupo conseguiram um pouco.Nesse dia eu estava ajudando em todas as fases que consegui,meus colegas também e por isso acho que fluiu.Sobre os equipamentos,foram bem difíceis de encontrar mas graças a um colega conseguimos realizar. No segundo dia foi horrível,um desastre completo, haviam pessoas demais no grupo, pessoas que não se interessavam e atrapalhavam quem se interessavam, pessoas que queriam aprender não conseguiram graças a isso, eu sendo uma delas inclusive por que não dava de ler o manual com uma linguagem mais formal com tanto barulho. Após medirem,errado e faltando uma parte, vale ressaltar Fomos para a sala e quem tentava fazer os cálculos não conseguia graças a gritaria. No terceiro dia eu não entendi muito bem a explicação do professor mas olhei as coisas junto de um colega,conseguindo compreender um pouco porém não ficou muito claro. Demorou aprender as coisas então creio que seja por isso mas um colega conseguiu fazer os cálculos.”*
- *“Não participei”.*

APÊNDICE F – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO AOS CÁLCULOS DE DISTÂNCIAS COM O VISOR DE PARALAXE

Abaixo estão transcritos os relatos dos estudantes participantes em relação ao item *fale sobre a sua opinião em relação à medição de distâncias utilizando o Visor de Paralaxe (fale sobre a contribuição para ser aprendido)*. Para manter a originalidade dos relatos, os mesmos foram transcritos sem correções, sendo assim, erros gramaticais poderão ser encontrados.

- *“De primeira a gente não conseguiu mais depois de pensar um pouco agente conseguiu medir, sobre os cálculos achei bem legal porque tenho um pouco de dificuldade com cálculos mais esse tipo eu até consegui”.*
- *“Os cálculos foram muito complexos , mas me abriu várias áreas que eu gostaria de aprender mais”.*
- *“Admito que não fui tão presente nessa parte, porém tentei ajudar o máximo o grupo com dicas, comparações e com os cálculos. O local escolhido deixou algumas duvidas por ser inclinado, mas fora isso tudo ocorreu bem”.*
- *“Sobre a medição eu conseguia medir corretamente as distâncias onde era pra medir”.*
- *“Eu achei bem complexo e difícil de entender, mas no fim vi que as contas não eram tão monstruosas, a parte mais complicada foi só mesmo a compreensão e o nosso visor já não estava tão certo e alinhado o que dificultou a tirada de medidas”.*
- *“A princípio não sabia nem como usar, mas depois ficou tudo mais claro e eu achei fácil demais de usar o visor para medir”.*
- *“Pra mim foi muito difícil utilizar e manusear o equipamento , e principalmente na hora das contas não foi nada fácil pra mim , mais gostei muito”.*
- *“Para calcular não foi muito complicado, chegamos até em um valor bem próximo da distância, e essa atividade ampliou o meu conhecimento”.*
- *“Achei uma forma divertida de aplicar a trigonometria nas coisas , com isso aprendi que dá de usar trigonometria na vida Nos ajudou a compreender melhor as distâncias e os cálculos”.*
- *“Tivemos que mudar nossa maneira de calcular a distância, devido a um problema com o Visor, mas, a forma de calcular a distância é bem intuitiva. Então, no final das contas, conseguimos chegar a um resultado bem próximo do real. Foi o cálculo mais fácil de realizar, mas por ser em tempo limitado, deixou a experiência um pouco mais complicada”.*

- *“A forma da medição ainda me geram dúvidas, mas com certeza facilitou o aprendizado do conteúdo e por mim achei uma forma bem melhor de aprender”.*
- *“Ótimo”.*
- *“Eu achei a aula bem diferente e legal. Aulas assim fazem a gente compreender melhor o conteúdo e ele se torna mais divertido”.*
- *“Ela contribui para suprir a curiosidade dos estudantes em saber a distância de coisas que não dá para medir diretamente, por exemplo a distância da Terra até as estrelas”.*
- *“Como já dito anteriormente, o método de construção é bem retrógrada e simples de mais, sendo muito fácil sua construção e utilização”.*
- *“Foi algo bem dinâmico para todos os alunos, todos interessados e envolvidos em cada passo do projeto. Gostaríamos de mais dinâmicas semelhante a esta”.*
- *“Fomos para fora, para medir a distância. O professor deu a distância para medirmos, mas foi um pouco complicado para medir. Porém, no final encontramos um valor”.*
- *“No começo eu não entendi muito e tive com pouco de dificuldade, mas agora acho que consegui entender”.*
- *“Eu acabei não participando dessa parte por motivos de saúde, mas pelo o que me falaram, foi bem interessante. Tinha que ficar sob o Sol medindo a distância e o ângulo do objeto e tudo refletia nos olhos, o que ocasionava uma dorzinha chata pela claridade e calor grande que estava no dia. Mas tudo tem sacrifícios, né? Porque para se ter muito dinheiro, você terá que meter sua cabeça em livros e livros ou treinar para caramba durante várias madrugadas”.*
- *“Fiz os cálculos utilizando os relatos que me passaram, as contas e equações legais e o aprendizado que isso me proporcionou, além do entendimento melhor sobre a matéria, foi o motivo de trigonometria ser tão importante em alguma parte do mundo: a astronomia”.*
- *“Então, no meu grupo fizemos o seguinte, enquanto um fazia a medição com o visor de Paralaxe, o outro ia marcando no caderno e os outros iam ajudando para conseguirmos fazer o nosso trabalho, foi fácil? não, porém acho que conseguimos fazer como deveria ser feito”.*
- *“Como eu não tenho uma interpretação boa, foi muito difícil para mim fazer isso. Principalmente que fui eu que fiz toda a conta. Não estou desprezando as outras, algumas delas ajudaram com outras coisas no dia. Só consegui fazer depois de pedir ajuda para o professor. Tadinho, em plena 21 da noite ele estava ajudando uma aluna confusa. Mas tirando toda essa parte, depois da explicação do professor, compreendi totalmente como que tinha que ser feito a medição da paralaxe”.*

- *“Tivemos muita dificuldade no início, mas depois que pegamos o jeito ficou mais prático e legal”.*
- *“Para medirmos a distância, utilizamos um manual que funcionou certamente para auxílio e com alguns passos para esquerda e direita, visando um ângulo, conseguimos chegar a um resultado próximo da distância correta”.*
- *“Bem acredito que para ele ter uma medição precisa o Visor precisa ter sido construído o mais reto possível, para que dê uma medida precisa, caso ele fique torto ele dá algo aproximado”.*
- *“A medição foi bem interessante, no início estávamos meio confusos, mas logo que começamos as medições conseguimos perceber como é possível fazer esses cálculos com o aparelho que montamos, por fim foi uma atividade nova e muito legal o que chamou a atenção de nossa turma”.*
- *“Gostei do método escolhido, nunca tinha visto, foi inovador e auxiliou no aprendizado”.*
- *“Consegui aprender mais sobre contas matemáticas, pois envolve uma fórmula matemática para chegar ao resultado assim exercendo mais das contas e do conhecimento, e você tem que ter uma ótima precisão para utiliza-lo”.*
- *“Pude perceber que, além das 4 operações principais da matemática, pode-se usar trigonometria, muito pouco, mas ainda utilizáveis”.*
- *“No primeiro momento eu duvidei sobre o seu funcionamento, mas ele ajudou demais na contribuição do meu aprendizado, pois facilitava e muito na hora de fazer os cálculos”.*
- *“Bem interessante, um equipamento simples mas muito funcional. Possibilitou informações muito interessantes sobre as estrelas do nosso universo”.*
- *“Contribui para que eu pudesse, de forma prática, ter noção de como são feitas as medidas astronômicas, mesmo que tenhamos feito com materiais que não chegassem a medidas exatas”.*
- *“Ele é bem útil para medir poucas distância”.*
- *“Utilizar o equipamento foi de certa forma até fácil, de primeira tivemos uma grande precisão levando a um acerto de quase 100%”.*
- *“No começo foi meio complicado e difícil de se desenvolver mais conforme vai prestando atenção vai ficando mais fácil de se fazer”.*
- *“De certa maneira foi uma boa proposta para os alunos fazendo os utilizar o visor de paralaxe, foi complexo no início pois não tínhamos muito conhecimento e o tempo para*

ser tiradas as medidas foi curto, mas ao aplicar as medidas documentadas na fórmula tudo ocorreu de maneira correta”.

- *“Contribuiu muito e apesar de ser uma tecnologia um pouco ultrapassada ajudou e muito”.*
- *“A medição achei meio difícil”.*
- *“No começo foi difícil de entender como o visor de paralaxe tinha que ser utilizado, mas depois que entende, fica tranquilo”.*
- *“Foi muito bom, eu não sabia para que aquilo usava e agora tenho uma noção sobre isso. Achei uma experiência boa, uma forma diferente a qual nunca tinha visto e bem intuitiva em todos os aspectos”.*
- *“Com a fórmula e os conhecimentos básicos de astronomia foi fácil calcular a distância, e o material ajudou a compreender melhor na prática.”*
- *“Foi meio difícil pois é algo que nunca fizemos antes, mas por ter alunos com mais facilidade em entender as instruções, conseguimos com um pouco mais de facilidade. Achei meio complicado.”*
- *“Eu mesma não conseguiria fazer sozinha, mas no meu grupo tinha outras pessoas que entenderam com mais facilidade com se media”.*
- *“Para construir o visor utilizamos os seguintes materiais: duas ripas de madeira de 40 cm, cola de madeira, cinco pregos, um martelo, um marcador, uma régua e uma furadeira. A primeira etapa da montagem foi bem simples, basicamente tínhamos que medir com a régua e fazer as marcações na ripa onde devíamos fazer os furos. A parte da montagem já foi mais complicada, pois nossos pregos eram de 6 cm e tinha uma espessura maior, logo quando fomos pregar o prego na ripa de pvc ela acabou cedendo e rachando um pouco, mas com a ajuda do professor conseguimos executar a atividade com sucesso. Achei interessante a ideia desse trabalho, pois é um tipo de atividade que nunca tínhamos praticado e foi uma ótima experiência”.*
- *“Complicado e complexo, porém satisfatório quando chegamos no resultado aproximado”.*
- *“Apreendi bastante, gostei da experiência. tive algumas dificuldades pra calcular a distância, mas meu grupo se ajudou e tivemos uma boa experiência”.*
- *“Achei super divertido e diferente a forma de fazer as medições com o aparelho que foi feito por nós mesmo, e também na hora dos cálculos, foi super fácil com a ajuda do professor, não entendi muito a parte dos cálculos mas entendi as medições e tudo mais”.*

- *“Muito interessante. Porque é um aparelho que eu mesma não conhecia e nem sabia que dava para calcular a distância de algo”.*
- *“Gostei e consegui aprender e entender muitas coisas em relação a como são feitas as medições”.*
- *“Como mencionado no último questionário, foi de grande valia. ver que algo montado com as nossas mãos pode nos proporcionar uma medição quase que 100% precisa”.*
- *“Embora tive muita dúvida no início de como utilizá-lo, logo se tornou mais compreensível a medida que usávamos os números nos devidos cálculos matemáticos”.*
- *“Acho que ajudou sim no aprendizado, no fator que serviu também para dar um pouco mais de noção do porque essas razões são usadas e poder relacionar ao calculo e executar essa tarefa melhor”.*
- *“Achei criativo pois não sabia que eram assim que eram feitas as medidas, a parte de medir foi legal e eu consegui entender bem o problema foi os cálculos depois que não entendi nada”.*
- *“Foi a parte mais desafiadora para mim, como participante ativa e aluna! Não sou a melhor em cálculos e me senti muito perdida na maior parte do tempo, no entanto, meus colegas fizeram que não fosse massante fazer uma tentativa em aprender e me esforçar para fazer os cálculos”.*
- *“Mais fácil, pra poder conseguir medir distâncias maiores, eu consegui ter uma noção de como se mede, embora ainda não consiga desenvolver e resolver alguns cálculos sozinha”.*
- *“Me ajudou a ter uma melhor base de distância e espaço dentro da realidade que vivo, contribuiu de um jeito muito bom”.*
- *“Algo meio complicado de entender no início mas uma experiência inovadora”.*
- *“Por não ter participado muito nesse parte, pois como já havia dito antes, não sou muito boa com cálculos, pelo que vi da parte do meu colega, ele teve um pouco de dificuldade no começo, porém conseguiu fazer com sucesso depois que entendeu a atividade proposta”.*
- *“Até então não achei que seria possível medir a distância desta forma em um instrumento tão simples de construir, foi muito importante para nossa compreensão sobre astronomia pois na teoria pensamos que é fácil mas na prática foi um pouco mais complicado para achar as medidas corretas pois se não tivéssemos calma não acharíamos o valor mais aproximado. O transferidor de 360° também nos auxiliou na atividade”.*
- *“Foi legal, e me ajudou bastante a entender como funciona, sem dúvidas foi mais intuitivo e divertido do que uma aula convencional”.*

- *“Complicado no começo, mas depois de ver os vídeos e entender fica mais fácil”.*
- *“Aparentemente era difícil, mais foi bem ao contrário, até entender a fórmula da conta, depois foi fácil”.*
- *“Bom, sobre a medição, após algumas tentativas falhas no final eu consegui fazer a medição certinha onde era para medir”.*
- *“No começo, no primeiro desafio, foi um pouco confuso mas com a ajuda dos colegas do meu grupo, e as explicações abrangentes que o professor nos deu ficou mais fácil de entender e de desenvolver as atividades”.*
- *“Uma atividade de suma importância, porém, que precisa ser trabalhada com mais afinco e com um pouco mais de atenção. Acredito que ainda tenho muito o que aprender. No entanto, minha relação com tal atividade não permitiu que absorvesse o conteúdo por completo. Meu raciocínio para exatas não é um dos melhores, mas, com uma pouco mais de estudo e dedicação, posso aprimorar essa área”.*
- *“Quando fomos para o lado de fora, deu para compreender muito mais o objetivo e o que precisávamos fazer. O que achei diferente foi entender que quanto menor for a distância dos centímetros do prego do centro (no ponto de vista de quem está usando o Visor), maior é a distância do objeto. Usar os graus são mais difíceis de achar e resolver também. As contas eram bem confusas no material que foi entregue, mas creio que ao explicar sobre como usar mais a equação, irei compreender muito mais o uso da ferramenta”.*
- *“Particularmente não obtive entendimento algum nessa parte do trabalho, não faço ideia de como o instrumento funciona e muito menos de como realizar os cálculos”.*
- *“Foi complicado fazer a medição”.*
- *“Entendi como se fazia a equação porém não conseguia utilizar de forma prática, meus amigos de grupo também tiveram um pouco dessa dificuldade, talvez também por causa do equipamento ser impreciso”.*
- *“Não tenho uma opinião formada pois o nosso não deu certo e eu não compreendi muito bem porém o projeto em si foi legal”.*
- *“Tive dificuldade mas consegui aprender.”*
- *“Como disse no questionário anterior, não participei da aula prática então não compreendi como utilizar”.*
- *“Não participei das aulas práticas”.*

APÊNDICE G – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO AOS CÁLCULOS DE DISTÂNCIAS ASTRONÔMICAS

Abaixo estão transcritos os relatos dos estudantes participantes em relação ao item *fale sobre a sua opinião em relação ao cálculo de distâncias astronômicas (dificuldades, pesquisas, acertos e erros)*. Para manter a originalidade dos relatos, os mesmos foram transcritos sem correções, sendo assim, erros gramaticais poderão ser encontrados.

- *“Eu acho a parte mais difícil é medir a distância depois fica um pouco mais fácil, quando calculei a minha estrela fui no Google e achei a distância, aí só com essa distância eu consegui descobrir a paralaxe e descobrir a distância em anos luz”.*
- *“Pesquisar sobre não foi um problema, porém, compreendê-los se torna dificultoso para minha pessoa. Não há nada que não podemos melhorar”.*
- *“Meu grupo foi um pouco bagunçado, pois ninguém sabia nada sobre astronomia e então foi muito complicado nos conseguirmos acertar a distância, mas com o tempo nós fomos aprendendo como solucionar o cálculo”.*
- *“Houve dificuldades nos cálculos inicialmente, com dúvidas sobre ser o valor correto ou termos calculado mal a distancia, mas no geral com a ajuda de outros integrantes do grupo os cálculos foram bem formulados”.*
- *“Ainda estou confuso quanto aos cálculos, porque é fácil se perder no que e em como fazer os cálculos. Os vídeo são muito bem construídos para dar maior auxílio ao aluno, mas o desempenho e a capacidade vem de cada um”.*
- *“Em relação ao cálculo eu tive bastante dificuldade para conseguir resolver mais depois de muitos erros eu consegui”.*
- *“Como eu disse na pergunta anterior, eu tive bastante dificuldade de compreender mas depois que me foi explicado eu até que entendi a resolução, mas ainda assim foi bem complicado o trabalho.”*
- *“Eu tive uma certa dificuldade com os cálculos, mas após pesquisar como fazia consegui compreender um pouco melhor, deu muito erro nos meus cálculos mas porque eu estava fazendo do jeito errado”.*
- *“Simplesmente achei muito difícil, mas gostei muito das pesquisas”.*
- *“Foi um pouco difícil, inicialmente achei bem difícil de entender, e além de a Internet não possuir amplas informações e foi bem difícil localizar aonde estava a nossa estrela, tive que baixar vários aplicativos até localizar ela, a conta tivemos que fazer várias vezes até chegar no resultado”.*

- *“achei mas complexo ainda mais por ser algo fora do comum com novas unidades de medidas e números mais extensos”.*
- *“Nosso grupo teve dificuldades para identificar as medidas, como o ângulo, no cálculo de distâncias astronômicas, mas fizemos o cálculo inverso para encontrar todos os dados da equação. No geral, foi a experiência mais difícil das três, mas foi legal de fazer”.*
- *“O mais difícil foi calcular para acertar os cálculos.”*
- *“A única dificuldade que eu tive, foi no momento da utilização e resolução dos cálculos, onde com a ajuda do professor consegui entender melhor e terminar a atividade proposta a tempo”.*
- *“Tivemos alguns problemas para resolver entretanto, todos do grupo juntou seus conhecimentos e conseguimos enfim um resultado positivo”.*
- *“Pesquisamos muito, assistimos vídeos para nos auxiliar, mas o manual do professor foi muito bom também. Não foi tão fácil, mas também não foi impossível, foi muito bom aprender algo que eu nunca tinha visto antes”.*
- *“É um pouco diferente de fazer de outras medidas mas com as pesquisas consegui entender bastante e com os vídeos também ajudaram”.*
- *“É apenas transformações de medidas e trigonometria simples, então não houve tanta confusão, só o que me incomodou bastante foi o parsec e o ângulo de paralaxe”.*
- *“Então, tivemos bastante dificuldades em questão de como calcular a estrela, fazíamos pesquisas e não achávamos exemplos de como calcular, não conseguimos nos reunir para tentarmos todos juntos, depois de um tempo um dos colegas teve uma ideia e colocou-a em prática, a questão de como calcular a estrela”.*
- *“Como disse anteriormente, tive muita dificuldade. Mesmo com os vídeos disponíveis para os alunos, eu não entendi exatamente como que tinha que fazer na época. O real problema nisso tudo foi onde que tinha que calcular o ângulo. Todos os cálculos eu errei, mas minha lógica tava certa. Pelo menos isso”.*
- *“No começo, foi difícil para aplicar uma certa formula, mas com auxílio dos demais, conseguimos finaliza-lo”.*
- *“Em relação a dificuldade dos cálculos eu achei mediana, pois tem cálculos muito simples, porém tem alguns que a dificuldade aumenta”.*
- *“Os cálculos pareciam ser bem complexos quando pegamos eles logo de cara, mas ao assistir os vídeos indicados, conseguimos ter a ideia de como é calculado a distância de locais ou estrelas novas em relação a Terra”.*

- *“Não foi uma tarefa fácil, mas conseguimos realizar com sucesso, serviu de aprendizado para não desistirmos na primeira tentativa”.*
- *“Os cálculos são bem complicados por envolver grandes números, assim tendo que pesquisar mais sobre o assunto adentrar mais ao tema, tivemos falhas no começo pois não compreendi bem o tema mas depois de estudar mais o assunto consegui encontrar a resposta correta”.*
- *“O cálculo em si não tem uma dificuldade tão absurda de se usar em razões simples, porém ao ir avançando comecei a ter dificuldades de compreensão, sobre a distância das estrelas em relação a Terra e ao Sol principalmente, ainda não consegui utilizar de forma precisa e não tive acertos fáceis”.*
- *“Tive sim uma dificuldade no começo, mas eu lia o manual várias vezes até entender o certo, tivemos muitos erros e acertos mas no final deu bom”.*
- *“Cálculo difícil, mas muito interessante. De começo foi um “bicho de 7 cabeças”, mas depois ficou mais tranquilo”.*
- *“Uma das minhas dificuldades foi a questão das conversões de medidas, como anos-luz, unidades astronômicas. Por conta disso errei diversas vezes em cálculos em que precisávamos descobrir a distância entre um ponto e outro no céu. Tive que fazer pesquisas sobre assuntos básicos que eu não lembrava, como notação científica, isso pois quando eu estava fazendo as contas com o auxílio da calculadora os resultados apareciam em notação científica”.*
- *“É fácil quando se entende no início eu não tava conseguindo fazer mas com o tempo fui aprendendo”.*
- *“Um pouco complexa, mas divertida”.*
- *“Foi muito complexo para mim pois tive algumas dificuldades uma delas era “como que eu vou fazer pra medir uma estrela sendo que ela tá longe a beça”, mas ao estudar e tentar compreender o conteúdo minhas dúvidas foram se esvaindo mas ainda restaram algumas porém pretendo estudar e me aprofundar no conteúdo para que possa compreender tudo”.*
- *“Um das maiores dificuldades foi o cálculo prático em relação as pesquisas foi até interessante não foi muito complicado erramos apenas na parte do cálculo usando o visor e acertamos na montagem e no cálculo teórico”.*
- *“Eu tive dificuldade na hora de fazer os cálculos, os vídeos que assisti ajudaram um pouco, mas mesmo assim tive dificuldade”.*

- *“Os cálculos são mais difíceis e complicados, alguns mais fáceis e outros mais difíceis. Ouve alguns erros no começo mas depois de assistir vídeo aulas consegui me achar melhor”.*
- *“Achei tranquilo, com o auxílio do equipamento e as fórmulas”.*
- *“Sobre os cálculos, essa foi a área que eu tive mais dificuldade, mas busquei o conhecimento sobre a área e tirei dúvidas com os meus parceiros do grupo que conseguiram realizar os cálculos”.*
- *“Na primeira vez meu grupo errou, pois não entendemos muito bem a explicação. Na segunda já acertamos”.*
- *“Tivemos uma certa dificuldade na resolução dos cálculos que foram pedidos, pois na teoria parecia fácil mas quando íamos resolver acabávamos nos perdendo um pouco, mas no final deu tudo certo”.*
- *“Não fui eu que fiz o cálculo mas eu olhei sim e compreendi um pouco como fazer”.*
- *“Em relação aos cálculos, tenho um pouco de dificuldade com cálculos, eu não entendi muito bem, eu busquei entender o conteúdo e as dúvidas que tive tirei com as pessoas do grupo que tinham mais facilidade”.*
- *“O cálculo foi um pouco complicado pois tem que analisar bem os números”.*
- *“Na parte dos cálculos eu tive muitas dificuldades, mas com o apoio do professor e com a ajuda dos colegas do meu grupo eu pude entender melhor. Por isso a importância do trabalho em grupo”.*
- *“Os meus cálculos não foram 100% precisos, mas a diferença tão muito pouca. E é interessante observarmos isso, tipo, conseguimos calcular a distância que estamos de uma estrela, isso é surreal. Não vou mentir senti muita dificuldade, até entender os cálculos, se bem que essa parte foi fácil, difícil foi achar os números que precisa para calcular a estrela selecionada. Mas foi uma experiência ótima”.*
- *“Os números para os cálculos eram bem grandes e os cálculos necessitavam de uma tensão e discussão extra do grupo”.*
- *“Algumas dificuldades foram dadas pelo fator do ambiente onde o Sol estava bem alto no céu no momento em que realizamos a atividade, e também do objeto não ser lá muito preciso, pois era apenas um experimento amador, a pesquisa em si se deu de forma mais tranquila, já que tínhamos a base formulada, mas mesmo assim utilizar o aparelho foi um pouco complicado, não sabíamos como tirar as medidas do começo, mas conseguimos. Acho que conseguimos um bom resultado, erramos o cálculo no início, porém deu certo no final”.*

- *“Tive dificuldade no início mas compreendi”.*
- *“Eu tenho dificuldade em medir essas distâncias, pelo que vi não é tão complicado assim embora exija uma certa atenção”.*
- *“São cálculos um tanto complicados em certo ponto, mas depois que você passa a entender os passos vai ficando mais fácil, as pesquisas tiveram que ser um pouco extensas para fazermos as medições, nas vezes que erramos fizemos o possível para consertar essas divergências e após acertarmos podemos perceber como realmente temos que executar os cálculos”.*
- *“Difícil no começo mas com tempo e estudo se torna mais simples”.*
- *“No grupo, separamos as atividades da seguinte forma: um colega ficou com os cálculos, outros ficaram com um dos relatórios, por esse motivo não tive participação nos cálculos, logo não posso afirmar a minha opinião”.*
- *“Os cálculos na minha opinião foi a parte mais complicada dessa atividade, pois para encontrar o ângulo foi bem difícil e tivemos q pedir o auxílio para o professor, mesmo com o transferidor ainda tivemos um pouco de dificuldade, mas depois de achar o ângulo com a fórmula que estava no manual de instruções foi um pouco mais fácil de fazer os cálculos”.*
- *“Foi uma experiência muito legal e de grande aprendizado, e espero continuar aprendendo e repetir trabalhos assim novamente”.*
- *“O cálculo é uma coisa difícil para mim, como mencionado anteriormente, meu raciocínio precisa de aprimoramento”.*
- *“Não realizamos a atividade”.*
- *“A forma do cálculo e as pesquisas são bem complicadas e eu ainda não compreendi por completo, quanto aos acertos e erros eu e meu grupo tivemos mais erros nos cálculos do que nos acertos, porém depois corrigimos”.*
- *“Minha opinião sincera é que talvez não fossem necessários de ser ensinados ao segundo ano do ensino médio, são complexos demais, com números exorbitantemente grandes. Como já deixei claro, não aprendi como realizá-los, então, não posso dizer o nível de dificuldade”.*
- *“Eu tive muita dificuldade apesar de ver todos os vídeos colocados aqui no site. Não sei dizer quantos acertos e erros eu tive”.*
- *“Complicado achar alguns dados da estrela, principalmente os cálculos, eu não entendi os cálculos”.*

- *“Tivemos dificuldades com os cálculos, não sabíamos por onde começar”.*
- *“Não pude compreender como é feito os cálculos, visto que cada um tem um raciocínio diferente, então não posso opinar”.*
- *“Difícil, extremamente difícil, tivemos muitos erros, O cálculo foi extremamente complicado, tivemos uma dificuldade muito grande para achar as respostas certas, apesar que no final com ajuda de grande parte do grupo, onde quem tinha mais compreensão ajudava os demais”.*
- *“É bem complexo”.*
- *“Eu achei bem complexo, um pouco difícil”.*
- *“Difícil, acredito que foi mais por ter sido a primeira festa, ficamos pouco perdidos. Tive muita dificuldade, vários erros e me sai um pouco ruim”.*
- *“Sinceramente não entendi quase nada daqueles cálculos, e as transformações achei tudo muito confuso e não consegui fazer direito Foi a parte mais fácil para mim, sendo sincera. O assunto se tornou instigante a cada vídeo assistido, aqueles que foram disponibilizados dentro do AVA e, foi fascinante até as dificuldades que tive ao errar algo que tive certeza, mas que no final era um ledão engano”.*
- *“Minha maior dificuldade foi a escala e a finalização das contas por mais que tenha dado certo no final, sinto que ainda não entendo 100% como fazer a conta”.*
- *“Em relação aos cálculos meu grupo deixou em mãos de quem tinha compreendido o conteúdo e teria maior facilidade para resolver, não participei da resolução”.*
- *“Os cálculos foram complexos e difíceis, houve várias tentativas”.*
- *“Bom, não chegamos a fazer essa conta, porém, aparentemente era bem complicada”.*
- *“Nós não fizemos esse trabalho”.*
- *“Um pouco complicado de fazer, fiquei confusa ao tentar descobrir qual fórmula de cálculo deveria ser usado”.*

APÊNDICE H – RELATOS DOS ESTUDANTES QUANTO À MOTIVAÇÃO GERADA PELA ASTRONOMIA

Abaixo estão transcritos os relatos dos estudantes participantes em relação ao item *fale sobre a Astronomia ter motivado seu aprendizado de conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo e se deveria (a Astronomia) ser empregada mais vezes na Matemática*. Para manter a originalidade dos relatos, os mesmos foram transcritos sem correções, sendo assim, erros gramaticais poderão ser encontrados.

- *“Eu acho que a astronomia deveria ser mais utilizada nas escolas por ser um ótimo conteúdo que ensina coisa sobre nosso espaço, é algo que todo ser humano deveria saber pelo menos o básico, por que tem muita pessoa que não sabe sobre”.*
- *“Particularmente, sou uma pessoa que gosta de assuntos quem envolvam astronomia. Por mais que estamos falando de cálculos, usá-los na astronomia despertou uma pouco mais o meu interesse para aprender trigonometria. Então, sim. A astronomia deveria ser empregada mais vezes na matemática”.*
- *“Eu gostaria que o meu professor pudesse fazer mais vezes esse trabalho, pois eu achei top demais, pois assim nunca achei que iria usar a tangente pra resolver alguma coisa”.*
- *“Sendo bem sincero, Trigonometria e Matemática no geral nunca foi para mim algo de muito interesse, e foi o efeito contrário para mim, me senti mais atraído por Astronomia. A Astronomia é uma boa forma de adicionar um conteúdo mais pratico e interessante em Matemática”.*
- *“Falar sobre Trigonometria neste ano já se tornou algo muito chato e poucos prestam atenção por agora. Mas esse projeto e trabalho que se foca apenas em uma coisa específica, faz com que quem não compreendeu totalmente o uso da Trigonometria, aprenda a fazer e a entender melhor o conteúdo sem ser algo chato e castigante”.*
- *“Me ajudou muito no caso de cálculos porque antes eu tinha muita dificuldade e ainda tenho pra desenvolver cálculos”.*
- *“Acho interessante a astronomia ser empregada na escola, entretanto não sei se é uma área que eu gosto, não sou boa em matemática e a astronomia queima os poucos neurônios que eu tenho”.*
- *“Eu gosto bastante de astronomia e acho que ela deveria ser utilizada mais vezes na matemática, porque ela torna tudo um pouco mais leve e “divertido”, eu me interessei muito mais por essas aulas”.*
- *“Eu gostei muito da astronomia e acho que deve sim ser empregada na matemática”.*

- *“Eu não sabia que dava pra calcular a distância de uma estrela a partir de trigonometria e o estudo sobre astronomia e interessante ajuda a compreender o que há além da Terra e o sol, e eu acho que é bem importante o emprego da astronomia na matemática”*,
- *“Astronomia já é algo interessante por causa dos astros e tudo mais e você aplicar contas que muitas vezes achamos chatas e desnecessária ajuda nós alunos a achar interessante”*.
- *“A astronomia deveria ser mais estudada nas escolas pois é um campo muito interessante e pode ser até divertido de se estudar”*.
- *“Achei bem interessante que princípios bem básicos de matemática e trigonometria são aplicados com bastante frequência na Astronomia”*.
- *“Imagino que com a Astronomia pode se encontrar uma boa maneira de explicar princípios matemáticos de forma mais didática, se aplicada corretamente”*.
- *“Achei que o conteúdo de astronomia conseguiu ajudar a compreender mais facilmente a trigonometria, para mim a aplicação da mesma na matéria de Matemática poderia ser bastante útil, principalmente para alunos que estariam interessados”*.
- *“Eu não diria que motivou meu aprendizado em trigonometria, mas a astronomia fez a trigonometria ser mais interessante”*.
- *“A astronomia mostra que trigonometria não é apenas aquilo o que a apostila traz, acho legal introduzir mais vezes ela nos estudos, tornaria a aula mais interessante”*.
- *“A Astronomia estar inserida na matemática tem um grande diferencial na hora de estudar, principalmente para aqueles que se interessam pelo assunto, no meu caso, não sou tão chegado na Astronomia, mas, depois desse projeto, a minha curiosidade sobre o assunto aumentou moderadamente”*.
- *“Não gostava muito, porém, com toda essa dinâmica foi fácil de aprender e agora gosto um pouquinho”*.
- *“Sim, a Astronomia deveria ser mais empregada na matemática. Nunca tinha visto sobre isso, foi muito interessante. Construímos um Visor de Paralaxe, medimos a distância da Terra até uma estrela, muitas pessoas devem ter essa oportunidade e levar esse aprendizado pra vida”*.
- *“Olha, não entendi super bem, mas acho que seria bom colocá-la em prática algumas vezes em nossas vidas e nosso cotidiano”*.
- *“Creio que devia sim a astronomia ser mais usada na matemática para dar um “apoio” para nós estudantes e dar também uma descontraída”*.

- *“A astronomia é um assunto interessante, pois apresenta um desvio do padrão da Matemática”.*
- *“Bem fiquei bem animada pelo fato de compreender mais sobre o assunto, pois antes nunca tinha me interessado sobre, acho que deveria ser uma matéria abordada nas escolas”.*
- *“Com a astronomia podemos perceber facilmente como é fácil utilizar a trigonometria em nossos cálculos e nossa vida, e acredito sim que deve ser mais empregada na matemática, pois conseguimos aprender matemática de uma maneira fora do habitual nosso, o que nos chama mais a atenção e interesse”.*
- *“É um tema bastante interessante, que de fato deveria ser mais abordada na realização do ensino, é um tema mais dinâmico e que pode ser usado em diversas experiências”.*
- *“A astronomia incentiva muito no aprendizado da trigonometria além do mais por tratar de um tema que eu particularmente tenho interesse em aprender pois se trata sobre o universo e como ele funciona, e como ele é grande e tão pouco desvendado, motiva muito pela questão de ter que usá-la nos cálculos, deveria ser mais empregada nas escolas assim fazendo com que o aluno se interesse mais na aula, não só por envolver a trigonometria mas a astronomia por ser um conteúdo bem abrangente e envolver coisas diferentes do nosso dia a dia”.*
- *“Sempre gostei de astronomia, utilizar para aprender a fazer cálculos me motivou bastante na verdade, após aprender um pouco com os vídeos comecei a pesquisar sobre as estrelas para praticar utilizando as unidades astronômicas e o Parsec, pois se parecem muito com os cálculos de razões trigonométricas”.*
- *“Sim deu uma motivada e acho deve ser mais empregada na matemática”.*
- *“Por ser um conteúdo muito interessante de se aprender, tanto na parte teórica tanto na parte prática, deveria sim ter mais participações na matemática”.*
- *“A astronomia fez com que eu precisasse ter mais atenção em assuntos básicos da trigonometria. Penso que a astronomia deveria ser empregada como algo extra curricular, ou seja, algo que não fosse obrigatório”.*
- *“Acho que sim pois é um conteúdo bem diferente e sempre é bom ver coisas diferentes”.*
- *“Astronomia realmente foi uma das coisas mais interessantes apresentadas pra mim no ensino médio, saber o mínimo por mais que seja pouco foi bom”.*
- *“A astronomia foi um jeito mais fácil e divertido de se aprender matemática com valores maior”.*

- *“Claro é um mundo novo e repleto de novidades para pessoas que não entendem, e obviamente deve ser empregada de maneira a auxiliar o conhecimento dos alunos na área da matemática desde que seja tudo explicado e bem ensinando não vejo mal algum em trazer futuros novos astrônomos para a história do Brasil”.*
- *“Eu acho que sim deveria ser empregado apesar de parecer ser um conteúdo complicado fica fácil depois de algumas tentativas e creio que até um aluno do ensino fundamental tem capacidade para compreender e colocar em pratica os conteúdos e conceitos”.*
- *“Eu gosto muito de astronomia então gostei do conteúdo, deveria sim ser mais empregada mais vezes”.*
- *“A Astronomia deveria sim ser empregada mais vezes na matemática, pois é uma forma de animar os estudantes passando um conteúdo diferente que grande parte dos alunos se interessam, e com certeza se dedicariam mais para aprender”.*
- *“Com certeza eu acho que é bom nós aprendermos sobre isso e expandir nossa visão é conhecimento sobre isso”.*
- *“Achei um modo muito bom de se aprender sobre espaço, os cálculos. Descobri coisas novas e isso me motiva a entender mais sobre”.*
- *“Achei um bom motivador para explorar mais ainda a área de matemática, e deveriam ter mais projetos assim”.*
- *“Eu acho que foi muito importante pois a astronomia em si é uma área da ciência que é muito interessante, e querendo ou não, atraiu a curiosidade de alguns alunos que se interessaram e buscaram conhecer”.*
- *“Mas achei legal aprender sobre isso um pouco”.*
- *“A astronomia nos motivou muito, pois nunca estudamos sobre e não tínhamos nenhum contato/experiência com ela, esse trabalho nos motivou muito a querer aprender mais sobre a astronomia e sobre como ela afeta nossas vidas”.*
- *“Colocar uma prática em conteúdo teórico de fato ajuda no interesse do aluno”.*
- *“Acho que sim, aprendi muito sobre. foi boa a experiência e espero continuar estudando o assunto”.*
- *“Deveria ser sim relacionado porém em projetos maiores e apenas com quem estivesse extremamente interessado ou não valeria a pena muito”.*
- *“ela foi muito importante pois despertou mais interesse mim para aprender, pois a astronomia pra mim é bem divertida”.*

- *“A astronomia deveria ser bem mais valorizada porque é um conteúdo muito interessante e que desperta uma certa curiosidade. É um conteúdo muito bom de estudar”.*
- *“Me motivou muito, acredito que também por não ser algo que eu veja e estude muito, me interessei por ser novo para mim”.*
- *“Com toda a certeza esse estudo foi um diferencial para o aprendizado. Devíamos incluí-la mais vezes”.*
- *“Conceitos astronômicos por mais interessantes que sejam, e algumas vezes ajudem no aprendizado sobre outros campos matemáticos participantes, não são de muita utilidade na vida do futuro adulto que hoje é estudante e que não for se especializar na área matemática ou astronômica”.*
- *“Bom achei o conceito bem bacana para explicar as medições e a trigonometria simplificando mais o conteúdo dando uma visão, mas ainda sim as unidades de medidas espaciais me deixaram um pouco confusa”.*
- *“Sim, acho importante que os estudantes possam ter acesso a novas ideias o tempo todo, e eles não precisam saber só o que está na apostila é bom eles conhecerem essa outra área da matemática”.*
- *“Com total certeza afirmo que sim. A astronomia te enche de curiosidade e fascínio, juntamente com a trigonometria ela se torna incapaz de ser ignorada”.*
- *“Sempre achei astronomia uma coisa extraordinária, mas não sou muito fã da parte dos cálculos, gosto mais de admirar apenas”.*
- *“A astronomia pode ser bem interessante quando é agregada à matemática, eu diria que o único ponto negativo seria a dificuldade em nomes ou em algumas contas mais complicadas, tirando isso é muito boa de fazer comparações às contas matemáticas”.*
- *“Gosto muito de estrelas e do universo mas não busco aprendizado a fundo sobre isso, mas gostaria de ver mais nas aulas na matemática”.*
- *“Achei bacana ter incluído ela na matéria, pois como já disse a atividade prática deu uma quebrada na rotina, não assisti todos os vídeos, mas, acredito que pelo pouco que vi, em partes me será muito útil futuramente”.*
- *“Sempre gostei de astronomia e tudo envolvido, e esse trabalho foi bom para eu conhecer os cálculos e entender que a trigonometria é sim importante para nossos estudos, foi motivador entender os cálculos e sim a astronomia deveria ser mais inclusa e não esquecida na matemática, agradeço ao professor por incluir essa atividade em nossas aulas, desenvolvendo nosso interesse por novas áreas na matemática”.*

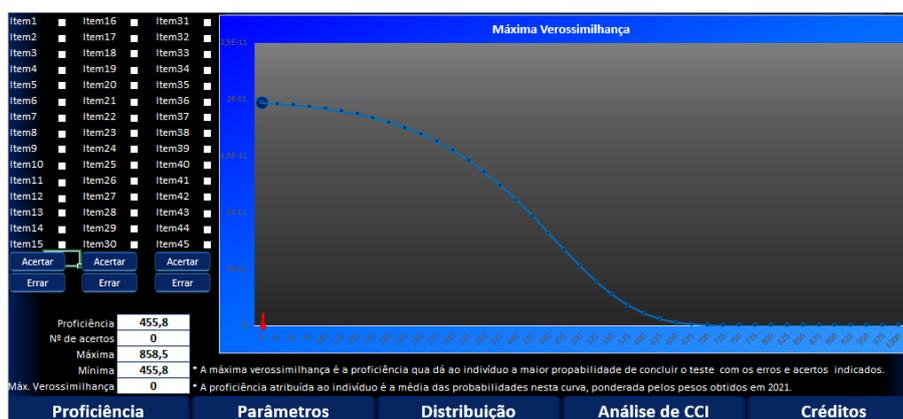
- *“Eu gosto da ideia de utilizar mais a astronomia, visto que a mesma é algo que desperta mais o meu interesse nos cálculos pois é algo tão novo para mim”.*
- *“Deveria sim, pois é algo que não vemos e fazemos constantemente na escola, e deveremos fazer mais”.*
- *“Quando o professor apresentou a proposta de utilizar a astronomia chamou minha atenção pensando que iríamos estudar algo relacionados a fenômenos etc. Porém utilizamos a trigonometria na astronomia e foi algo que eu não participei ou tive muito contato, porém a proposta da aula foi boa”.*
- *“A astronomia é interessante mas bem complexa, seus cálculos são complicados, apesar disso seria legal podermos aprender mais sobre”.*
- *“Deveria ser mais empregado de forma com que usamos o triângulo retângulo”.*
- *“Na minha opinião a astronomia deveria ser uma matéria para ser estudada como as demais matérias na escola, pois acho que todos deviam pelo menos entender o mínimo”.*
- *“Sim, astronomia envolve muito os cálculos de trigonometria e acredito que se a astronomia fosse inserida mais vezes dentro da matéria, de matemática, seria mais fácil para o aprendizado do aluno”.*
- *“Isso apenas me desestimulou, e deixou claro que não sou da área de exatas. Não acho que deveria ser empregada mais vezes, tendo em vista que matérias mais importantes poderiam ser aplicadas”.*
- *“Não, complicou mais pela dificuldade das medições”.*
- *“Eu gostaria muito mas com um pouco mais de explicações na conta que é bem difícil”.*
- *“A Trigonometria me foi ensinado muito bem, então percebi que não é um bicho de sete cabeças, só é apenas cansativo se fizer muito, então ter inserido a Astronomia no assunto não me fez descobrir muitas coisas do que já sabia sobre a matéria, só me faz entender mais sobre os astros, o que, se colocasse a Astronomia em aulas do dia a dia, seria só mais uma coisa para decorar para as provas, entretanto... acho que, se desde cedo, for introduzindo a Astronomia nos assuntos matemáticos, talvez a aprendizagem se torne mais leve e divertida, pois a Astronomia, na minha opinião, é tão divertida quanto uma tartaruga que anda com duas pernas, tipo: “como?” e “por que?”... a Astronomia não descobriu tudo sobre o Universo, então essas perguntas simples, mas com respostas tão complexas e talvez nem as tenha a faz ser... misteriosa e interessante, portanto, como não se interessar? Então, resumindo, acho que com uma introdução leve e devagar, isso seja possível”.*

- *“A astronomia deveria sim ser implementado mais na matemática, mas se a astronomia me motivou a aprender mais sobre trigonometria... Não concordo muito com isso não. Como tive que aprender esse conteúdo infernal por 6 meses, não fiquei motivada em nenhum momento a aprender mais sobre, mesmo que esteja dentro de um assunto que eu amo tanto e que vejo desde que me entendo por gente”.*
- *“Passaria a me interessar mais por trigonometria apenas para estudos do Enem e possível faculdade. Estudar a matéria desde o início do ano letivo me faz querer nunca mais ouvir a palavra “trigonometria” e “triângulo””.*
- *“Não sou muito fã de astronomia por isso nunca tive interesse”.*
- *“Não deveria ser empregada na matemática”.*

ANEXO A – IMAGENS DA PLANILHA PREPARADA COM A TRI PARA O CÁLCULO DA PROFICIÊNCIA

Na Figura 48 se tem o gráfico mostrando a curva de proficiência dos itens que são assinalados, caso o candidato acerte, nas caixas à esquerda. Nesta imagem também são mostrados a Proficiência do candidato, o número total de acertos, a Proficiência Mínima, a Proficiência Máxima e o ponto máximo de Verossimilhança alcançado no teste.

Figura 48 – Planilha para lançar os acertos dos estudantes.



Fonte: Próprio autor.

A Figura 49 é o ambiente onde se são lançados os parâmetros a , b e c para cada item do teste. Abaixo é mostrado o gráfico das Curvas Características dos Itens (à esquerda) e o gráfico de dispersão das proficiências máximas e mínimas de cada item.

Figura 49 – Planilha para lançar os parâmetros de avaliação.



Fonte: Próprio autor.