

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**  
**(PROFMAT)**

**Diego Koenigkam Alves**

**Resolução da equação de terceiro grau no ensino médio**

Juiz de Fora

2023

Diego Koenigkam Alves

Resolução da equação de terceiro grau no ensino médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dra. Valéria Mattos da Rosa

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alves, Diego Koenigkam.

Resolução da equação de terceiro grau no ensino médio / Diego Koenigkam Alves. – 2023.

61 f. : il.

Orientador: Valéria Mattos da Rosa

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de ciências exatas. Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT), 2023.

1. Matemáticos italianos renascentistas. 2. História da álgebra 3. Equações Cúbicas. 4. Fórmula de Cardano. 5. Sequência didática. I. Rosa, Valéria Mattos da, orient. II. Título.

**Diego Koenigkam Alves**

## **Resolução da equação de terceiro grau no ensino médio**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 21 de março de 2023.

### **BANCA EXAMINADORA**

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Valéria Mattos da Rosa**

Orientadora Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa**

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Lucas Carvalho Silva**

Universidade Federal de Viçosa

Juiz de Fora, 17 / 02 / 2023.



Documento assinado eletronicamente por **Valeria Mattos da Rosa, Professor(a)**, em 23/03/2023, às 13:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Frederico Sercio Feitosa, Professor(a)**, em 24/03/2023, às 08:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **LUCAS CARVALHO SILVA, Usuário Externo**, em 24/03/2023, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1158867** e o código CRC **1748C71A**.

---

Dedico esse trabalho a todos os meus familiares e amigos.  
Em especial à minha esposa Tamiris e aos meus filhos  
Miguel, Daniel e Guilherme.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus por se fazer sempre presente em minha vida, me abençoando, protegendo e mostrando os caminhos que devo seguir. Agradeço ainda, por Ele ter me dado capacidade de aprendizado para adquirir sabedorias que, conseqüentemente, me fizeram realizar meus objetivos e sonhos.

À minha esposa Tamiris, pelo amor, carinho, cumplicidade, paciência e, principalmente, por todo incentivo e ajuda nas vezes em que pensei em desistir. E por ter adiado a realização do seu mestrado para que eu pudesse concluir o meu. Muito obrigado, meu amor! Amo você!

Aos meus filhos Miguel, Daniel e Guilherme, por serem meus combustíveis diários, meus presentes do céu e as razões da minha vida. Papai ama muito vocês!

Aos meus pais (Derli e Beatriz), que apesar de não terem tido a oportunidade de estudos, sempre me mostraram que somente através dele seria possível melhorar de vida. Obrigado por todo amor, cuidado e educação que me deram. Amo vocês!

Às minhas queridas irmãs Vivian e Danielle, pelo companheirismo, cumplicidade, incentivo e muita torcida. Obrigado por me fazer importante nas suas vidas. Amo vocês!

Aos meus avós, que foram de suma importância na minha criação, formação e que sempre serviram de espelhos para que eu pudesse me tornar quem sou hoje. Meus eternos amores!

À toda a minha família materna e paterna, que sempre serviram de alicerce nos momentos que precisei, se fazendo sempre presentes e dispostos ajudar. Amo vocês!

À família que ganhei através da minha esposa, bem como minha sogra Carlota, meu sogro Marcos Fernando, meu cunhado Vitor, minha concunhada Marcela e a Tia Alice. Meu muito obrigado!

Ao meu amigo Mayke Valle pela parceria nos estudos, pela companhia e boas conversas nas viagens, pela força e incentivo nos momentos difíceis. “Vida de professor não é mole não, em pleno janeiro curso de verão...” Obrigado, meu amigo!

Aos meus amigos professores Marcelo, Jorge, Arnaldo, Guto, Renato, Marcelinho e, em especial, Rodrigo, que estava sempre disposto a ajudar e foi de grande importância para escolha desse tema e construção desse trabalho.

À minha turma do PROFMAT de 2019 da UFJF, em especial aos colegas remanescentes Douglas, Júlia, Kelmer e Lenilson e, também, o Lima da turma de 2018 pelo ótimo convívio e trocas de experiências que contribuíram muito para minha formação docente.

À professora Valéria Mattos da Rosa pela orientação, confiança, paciência e troca de conhecimentos para elaboração e conclusão desse trabalho.

Aos professores do PROFMAT/UFJF pelos conhecimentos compartilhados. Em especial, aos professores Luís Fernando Crocco Afonso e José Barbosa Gomes pela atenção e competência demonstrada junto à coordenação do curso.

Aos professores componentes da banca examinadora, pelo seu tempo dedicado para avaliação do meu trabalho e por trazerem sugestões para aprimorá-lo.

À secretaria Flávia do PROFMAT/UFJF pela competência e por estar sempre pronta para ajudar e atender nossas solicitações.

Aos professores do IMPA e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pelo ofertamento do Curso em Rede Nacional.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo concetimento da minha bolsa de estudos.

“Para pesar as dificuldades é preciso ser sempre perseverante”  
(Niccólo Tartaglia)



## RESUMO

A matemática é uma ciência muito antiga, a qual está presente no cotidiano de todos como um poderoso e essencial instrumento. No que tange ao surgimento da Álgebra, cujo conteúdo desta dissertação abrange, existem relatos de que este ramo da matemática, provavelmente, obteve início na Babilônia, 1700 a.C. Importantes matemáticos renascentistas, como del Ferro, Tartaglia e Cardano, contribuíram para a descoberta de fórmulas resolutivas para equações cúbicas. Sendo este assunto frequente em vestibulares de grandes instituições faz-se necessário a contraposição da retirada deste conteúdo da atual BNCC, pois sua ausência restringe o conhecimento e dificulta o acesso às instituições públicas e privadas. Tendo em vista a ausência deste assunto nos novos materiais didáticos disponibilizados para a rede pública de ensino, este trabalho elaborou uma sequência didática visando sua possível utilização por parte dos educadores da rede. Para sua elaboração foi utilizado como método principal de resolução de equações cúbicas a fórmula de Cardano, associado ao método tradicional, existente em antigos livros didáticos. Tal metodologia foi escolhida pois demonstra grande eficiência e diminui possíveis situações adversas, possibilitando assim maior abrangência.

Palavras-chave – Matemáticos italianos renascentistas, história da álgebra, equações cúbicas, fórmula de Cardano

## ABSTRACT

Mathematics is a very old science, which is present in everyone's daily life as a powerful and essential instrument. With regard to the emergence of Algebra, which the content of this dissertation covers, there are reports that this branch of mathematics probably started in Babylon, 1700 BC. Important renaissance mathematicians, such as del Ferro, Tartaglia and Cardano, contributed to the discovery of resolving formulas for cubic equations. Since this subject is frequent in entrance exams of large institutions, it is necessary to oppose the withdrawal of this content from the current BNCC, as its absence restricts knowledge and makes access to public and private institutions difficult. Considering the absence of this subject in the new didactic materials made available to the public school system, this work elaborated a didactic sequence aiming at its possible use by the network's educators. For its elaboration, Cardano's formula was used as the main method of solving cubic equations, associated with the traditional method, existing in textbooks. This methodology was chosen because it demonstrates great efficiency and reduces possible adverse situations, thus allowing greater coverage.

Keywords: Renaissance Italian mathematicians, history of algebra, cubic equations, Cardano's formula

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Niccóló Tartaglia (1499 – 1557 . . . . .	18
Figura 2 - Girolamo Cardano (1501 – 1576) . . . . .	19
Figura 3 - Álgebra de Rafael Bombelli: capa da edição bolonhesa de 1579 . . . . .	33
Figura 4 - Leonhard Euler (1707-1783) . . . . .	34
Figura 5 - Paolo Ruffini (1765 – 1822) . . . . .	35
Figura 6 – Algoritmo Briot-Ruffini 1 . . . . .	36
Figura 7 - Albert Girard (1595 - 1632) . . . . .	37
Figura 8 - Algoritmo Briot-Ruffini 2 . . . . .	41

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Passo 1 do dispositivo . . . . .	36
Tabela 2 – Passo 2 do dispositivo . . . . .	36
Tabela 3 – Passo 3 do dispositivo . . . . .	36
Tabela 4 – Passo 4 do dispositivo . . . . .	36
Tabela 5 – Passo 5 do dispositivo . . . . .	37
Tabela 6 – Passo 1 do dispositivo . . . . .	42
Tabela 7 – Passo 2 do dispositivo . . . . .	42
Tabela 8 – Passo 3 do dispositivo . . . . .	42
Tabela 9 – Passo 4 do dispositivo . . . . .	42
Tabela 10 – Passo 5 do dispositivo . . . . .	42
Tabela 11 – Aplicação do dispositivo Briot-Ruffini . . . . .	43
Tabela 12 – Aplicação do dispositivo Briot-Ruffini . . . . .	46
Tabela 13 – Aplicação do dispositivo Briot-Ruffini . . . . .	47
Tabela 14 – Discussão do discriminante $D$ . . . . .	51

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IME	Instituto Militar de Engenharia
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
PISM	Programa de Ingresso Seletivo Misto
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PSS-UEPG	Processo Seletivo Seriado-Universidade Estadual de Ponta Grossa
PUC	Pontifícia Universidade Católica
UERJ	Universidade Estadual do Rio de Janeiro
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual
$\neq$	Diferente
$\implies$	Implica em
$\in$	Pertence / elemento de
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^*$	Conjunto dos números reais não nulo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO RENASCIMENTO</b> . . .	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>CONTRIBUIÇÃO DOS MATEMÁTICOS ITALIANOS</b> . . . .	<b>17</b>
3.1	SCIPIONE DEL FERRO . . . . .	17
3.2	NICCÓLO TARTAGLIA . . . . .	17
3.3	GIROLAMO CARDANO . . . . .	19
<b>4</b>	<b>AS DESCOBERTAS ALGÉBRICAS</b> . . . . .	<b>24</b>
4.1	A SOLUÇÃO DE DEL FERRO E TARTAGLIA . . . . .	24
4.2	SOLUÇÃO DE CARDANO PARA $y^3 + py = q$ ( $p, q > 0$ , com $p$ e $q$ inteiros) . . . . .	25
4.3	SOLUÇÃO DE CARDANO PARA $y^3 = py + q$ ( $p, q > 0$ , com $p$ e $q$ inteiros) . . . . .	27
4.4	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $y^3 + py + q = 0$ , COM ( $p, q > 0$ , com $p$ e $q$ inteiros) . . . . .	28
<b>5</b>	<b>CRITÉRIO PARA CLASSIFICAÇÃO DAS RAÍZES DA EQUAÇÃO CÚBICA</b> . . . . .	<b>30</b>
5.1	DEMONSTRAÇÃO DO DISCRIMINANTE $D = 0$ . . . . .	30
5.2	DEMONSTRAÇÃO DO DISCRIMINANTE $D > 0$ . . . . .	31
5.3	DEMONSTRAÇÃO DO DISCRIMINANTE $D < 0$ . . . . .	31
5.4	CONSOLIDAÇÃO DA FÓRMULA DE CARDANO PARA $D < 0$ . . .	33
<b>6</b>	<b>MÉTODOS UTILIZADOS NOS LIVROS DIDÁTICOS</b> . . . .	<b>35</b>
6.1	O DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI . . . . .	35
6.2	RELAÇÃO DE GIRARD PARA EQUAÇÃO DO 3º GRAU . . . . .	37
6.3	TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS . . . . .	38
<b>7</b>	<b>PROPOSTA PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b> . . . . .	<b>40</b>
7.1	PRIMEIRA FASE DA PROPOSTA DIDÁTICA: 6 aulas de 50 min cada	41
<b>7.1.1</b>	<b>Apresentação dos métodos presentes nos livros didáticos</b> . . . .	<b>41</b>
7.1.1.1	<i>Dispositivo prático de Briot-Ruffini</i> . . . . .	41
7.1.1.2	<i>Relação de Girard para equação de 3º grau</i> . . . . .	43
7.1.1.3	<i>Teorema das raízes racionais</i> . . . . .	45
7.2	SEGUNDA FASE DA PROPOSTA DIDÁTICA: 6 aulas de 50 min cada	48
<b>7.2.1</b>	<b>Breve histórico da fórmula de Tartaglia-Cardano</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>7.2.2</b>	<b>Apresentação da fórmula de Cardano</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência muito antiga, a qual está presente no cotidiano de todos como um poderoso e essencial instrumento para executar tarefas, organizar o tempo, compreender fenômenos, na construção das civilizações, comercialização, dentre inúmeras outras aplicações existentes. Sendo possível observar que seu desenvolvimento e aprimoramento esteve, a todo momento, atrelado a linguagem humana. Podemos assim, dizer que o surgimento dos primeiros passos da matemática tenha ocorrido ainda na pré-história através da necessidade em atribuir símbolos às quantidades.

No que tange ao surgimento da Álgebra, cujo conteúdo desta dissertação abrange, existem relatos de que este ramo da matemática, provavelmente, obteve início na Babilônia, 1700 a.C. (BAUMGART, 1992)(1). Os babilônicos, assim como egípcios e gregos, conseguiram desenvolver, cada qual a sua maneira, procedimentos numéricos e geométricos capazes de resolver equações lineares e quadráticas. Entretanto, a evolução de métodos para a resolutiva de equações mais complexas, como as cúbicas e quárticas, só tiveram continuidade na era renascentista, ou seja, cerca de três mil anos após os babilônicos (LIMA, 1987)(10).

O primeiro registro de um caminho para a resolução de equações cúbicas ocorreu, em 1515, pelo matemático e professor Scipione del Ferro. Este encontrou uma fórmula que permitia reduzir equações complexas e transformá-las em um formato mais simples e de fácil resolução. Mas o conhecimento de sua descoberta, a princípio, se restringiu a poucos. Alguns anos depois, o professor de matemática, conhecido pelo apelido Tartaglia, sem saber da descoberta de del Ferro, acabou redescobrando sua fórmula. Seguidamente, veio o brilhante matemático e especialista em multiáreas, Cardano, que resolveu escrever um livro de Álgebra, o qual conseguiu realizar, mais tarde, mediante a ajuda de Ludovico Ferrari, seu discípulo. Cardano procurou Tartaglia e propôs aprender, sob juramento, o método de resolução de equações cúbicas, desde que, em hipótese alguma, contaria a outrem. Tartaglia aceitou sua proposta e lhe ensinou na forma de versos, sem revelar a demonstração de como realizou sua descoberta. Mediante novos conhecimentos, Cardano e Ferrari partiram para descobrir a resolução de equações quárticas, a qual Ferrari conseguiu com maestria. Para tal, Ferrari diminuía o grau da equação, de modo que a quártica se transforma em um par de equações quadráticas. Entretanto, para fazer essa redução era preciso resolver uma cúbica, cuja solução, já era de conhecimento do mesmo. No entanto, Ferrari não podia utilizar estes dados para publicação, devido o juramento de Cardano a Tartaglia. Sendo assim, se dedicaram em achar uma alternativa que pudesse permiti-los publicar suas novas descobertas. Durante essa busca, descobriram a existência de um possível manuscrito, pertencente ao, já falecido, professor e matemático del Ferro. Já em posse do manuscrito, Cardano e Ferrari observaram que a fórmula de del Ferro correspondia a uma das fórmulas descobertas por Tartaglia. Conscientes de que a fórmula



de del Ferro antecede, alguns anos, a de Tartaglia, Cardano e Ferrari decidem usá-la, mediante as devidas citações de seus descobridores, para publicar em seu importante livro “Ars Magna”.

Segundo D’Ambrósio (1996)(7), a História da Matemática é de suma importância para que esta seja entendida como um instrumento cultural e sobretudo um mecanismo a ser utilizado para motivar, compreender e facilitar seu ensino. Historicamente o ensino da matemática proporciona uma dualidade de sentimentos, o qual pode gerar desde fascínio e admiração até temor e incompreensão (CASTRO, 2009)(3). Para o enfrentamento e tentativa de transformação desta dicotomia encontrada no estudo da matemática, a atual BNCC apresenta uma reformulação das competências específicas de matemática afim de construir “aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea”. Sendo assim, acredita-se que por meio deste novo conceito de matemática, sua aprendizagem se torne cada vez menos abstrata e mais próxima de situações concretas da realidade dos alunos.

Porém, as dificuldades encontradas no processo ensino-aprendizagem não podem ser utilizadas como argumentos limitadores de conhecimentos. Dentro deste conceito, esta dissertação irá se contrapor a retirada do conteúdo sobre resolução de equações cúbicas da atual BNCC, pois sua ausência restringe o conhecimento e dificulta o acesso às instituições públicas e privadas, que utilizam esse conteúdo em questões classificatórias em seus vestibulares. Além disso, tal remoção proporciona uma disparidade social, visto que o tema permanece em sistemas apostilados de ensino e, portanto, ainda são aplicados em escolas particulares. Em contrapartida, esse conteúdo foi totalmente retirado do currículo mínimo das escolas públicas, impossibilitando seus alunos de conquistarem posições igualitárias.

Tendo em vista a ausência deste assunto nos novos materiais didáticos disponibilizados para a rede pública de ensino, este trabalho elaborou uma sequência didática visando sua possível utilização por parte dos educadores da rede. Para sua elaboração foi utilizado um método de resolução de equações cúbicas, diferente do método tradicional, por meio do qual foi usado a fórmula de Cardano. Tal metodologia foi escolhida pois demonstra grande eficiência e diminui possíveis situações adversas. Mostrando-se assim, ser mais abrangente.

## 2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO RENASCIMENTO

Renascimento foi o nome atribuído a um período histórico marcado por grandes modificações no âmbito cultural, econômico, político e científico. Surgido na Itália no século XIV, esse período se prolongou até meados de 1650 por toda Europa. Tendo como inspiração os valores da cultura greco-romana, o Renascimento remodelou a vida medieval e foi o responsável pelo início da Idade Moderna (PROENÇA, 2009)(15).

Os impactos e modificações gerados no campo da ciência estão relacionados a nova concepção do homem renascentista. Nesse período, passaram-se a priorizar o racionalismo e o cientificismo, ou seja, a razão passa a ser considerada o único caminho para chegar-se ao conhecimento e este, por sua vez, deveria ser demonstrado e comprovado através da experiência científica (SEVECENKO, 2004)(18).

A história da matemática teve um avanço significativo no período renascentista, principalmente, no que tange a álgebra. Um dos progressos matemáticos da época foi resolução de equações cúbicas, em 1515, pelo, então professor, Scipione del Ferro (1465 – 1526). Segundo Lima (1987, p.10), é impressionante que a resolução da equação de terceiro grau tenha acontecido, somente, cerca de 3 milênios após a descoberta da equação de segundo grau, pelos babilônicos.

Durante este período histórico houve o surgimento e a contribuição de diversos gênios da ciência. Dentre eles podemos destacar: Scipione Del Ferro, Girolamo Cardano, Niccolo Tartaglia, Ludovico Ferrari e Galileu Galilei (LIMA, 1991)(11). Esses matemáticos italianos realizavam disputas entre si para solucionar problemas, a fim de adquirirem maior destaque. Inserido nesta competição, estava também a procura em solucionar as equações de terceiro grau, fato este, que culminou no aprimoramento dos resultados deste tipo de equações (JUNIOR, 2019)(9).

Podemos assim dizer, que uma equação cúbica, na incógnita  $x$ , pode ser definida como uma equação polinomial em uma única variável  $x$  de grau três. Por conseguinte, possui como fórmula geral:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Onde o  $x$  corresponde a incógnita e  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são números reais chamados de coeficientes da equação.

### 3 CONTRIBUIÇÃO DOS MATEMÁTICOS ITALIANOS

#### 3.1 SCIPIONE DEL FERRO

Em 1515, aproximadamente, o professor da Universidade de Bolonha, possuidor de vasto conhecimento em álgebra, conhecido por Scipione del Ferro, foi o primeiro a achar uma fórmula resolutive para a equação cúbica. Segundo SANTOS (2013, p.6)(17), a equação descoberta por del Ferro não é a mesma equação geral de equações cúbicas conhecida atualmente. Está relacionada a equação da forma:

$$x^3 + px = q$$

Tal fórmula permite reduzir equações complexas e transformá-las em um formato mais simples e de fácil resolução.

Porém, apesar da grande descoberta de del Ferro, ele não recebeu o merecido reconhecimento, pois manteve em segredo seu grande feito. Acredita-se que Scipione não tenha publicado pois tinha como objetivo possuir uma vantagem sobre seus oponentes nos habituais confrontos intelectuais que ocorriam na Itália, daquela época. Para os intelectuais essas disputas eram importantes meios para ganharem destaque e, portanto, conseguirem renovação de contratos de emprego, novas oportunidades de trabalho e aumentos salariais (SANTOS, 2013)(17).

Possuidor de uma enorme vantagem, del Ferro não manteve sua descoberta em total sigilo. Seus seguidores Annibale Della Nave, que posteriormente viria a se tornar seu genro, e seu aluno Antônio Maria Fiore tiveram o privilégio em ter acesso a nova fórmula criada. Importante ressaltar que para Fiore, del Ferro entregou a fórmula, mas não elucidou sua resolução (MATOS, 2014)(13).

Segundo SANTOS (2013, p.7)(17), após o falecimento de Scipione, Della Nave herdou o documento com o método de resolução das equações de terceiro grau. E mesmo, ambos seguidores de del Ferro, possuindo a fórmula descoberta não a publicaram. Somente em 1535, Fiore resolve confrontar, em uma disputa científica, o matemático Niccóló Tartaglia, com um conjunto de problemas que continham tais equações. Tartaglia aceitou a proposta e tal disputa foi o grande incentivo para suas novas descobertas (LIMA, 1991)(11).

#### 3.2 NICCÓLO TARTAGLIA

Detentor de uma infância pobre e trágica, Niccóló Tartaglia (Figura 1) nasceu em Bréscia, no norte da Itália, em 1499. Já aos 6 anos sofrera sua primeira infelicidade, ao se tornar órfão de pai. Situação essa, que deixara a pobreza de sua família ainda mais profunda (GARBI, 2010)(8). Segundo SANTOS (2013, p. 7)(17), tal infortúnio não abateu

Niccólo, o qual deu uma demonstração clara de sua inteligência e perseverança quando, mediante a tantas dificuldades, conseguiu concluir seus estudos sozinho.

Figura 1 - Niccóló Tartaglia (1499 – 1557)



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2\\_Fontana\\_Tartaglia](https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia)

Embora Niccóló Tartaglia já tivesse passado por um grande sofrimento, aos 14 anos ele vivenciou e carregou marcas, por toda vida, ocasionadas por uma invasão francesa, que gerou destruição e inúmeras mortes, na cidade onde vivia (LIMA, 1987)(10). Durante o ataque cruel, Niccóló, ainda criança, não foi polpado e levou um golpe de espada em sua cabeça e boca. Sob os cuidados de sua mãe ele se reestabeleceu, porém o ferimento em sua boca gerou prejuízos na fala, tornando-o gago. A partir deste momento ele começara a ser chamado de Tartaglia, que em italiano significa gago (JUNIOR, 2019)(9).

Segundo SANTOS (2013, p. 8)(17), aos 35 anos, ele veio a se tornar professor de matemática em Veneza, onde estabeleceu uma brilhante carreira e se tornou referência em sua área. Foi influente em vários ramos como na mecânica e artilharia. Além disso, elaborou a lei de formação dos coeficientes no desenvolvimento de  $(x + a)^n$ .

Por volta de 1530, Tartaglia recebeu uma proposta de um colega para desvendar e resolver a equação  $x^3 + 3x^2 = 5$ . Tartaglia, então, mergulhou no desafio e conseguiu solucionar a equação cúbica (MATOS, 2014)(13). A notícia sobre sua descoberta se espalhou e mediante a isso Fiore, confiante por deter a fórmula de del Ferro, resolveu lhe confrontar nas tais disputas científicas.

Mediante a tal proposta de Fiore, Tartaglia se colocou a estudar incessantemente, pois precisava aprofundar seus conhecimentos sobre equações cúbicas. Nesse período,

então, ele finalmente conseguiu redescobrir a fórmula de del Ferro  $x^3 + px = q$  e, logo em seguida, conseguiu resolver a equação cúbica do tipo  $ax + b = x^3$ . Sendo assim, dispondo de tamanho conhecimento, Tartaglia venceu o confronto, tornando-se ainda mais respeitado e admirado pelo meio científico (SANTOS, 2013)(17). A bem-aventurada notícia da vitória se espalhou e deu origem a um novo confronto com outro matemático da época, Girolamo Cardano.

### 3.3 GIROLAMO CARDANO

Figura 2 - Girolamo Cardano (1501 – 1576)



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo\\_Cardano](https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano)

Em 1501, em Pavia, na Itália, nasceu Girolamo Cardano (Figura 2). Possuidor de um pai detentor de boa condição financeira e influente, o qual era amigo de Leonardo da Vinci, Cardano pode obter uma ótima formação acadêmica. Sendo assim, se formou médico na universidade de Paiva e matemático na universidade de Pádua. Ele possuía inúmeras habilidades e por isso ficou conhecido como grande matemático, médico, astrônomo, filósofo, astrólogo, jogador (de jogos de azar) e grande escritor (LIMA, 1991)(11). Esta última habilidade lhe rendeu 131 livros publicados, incluindo sua autobiografia, e inúmeros outros, os quais resolveu não publicar (SANTOS, 2013)(17).

Seus livros mostravam seus múltiplos conhecimentos. Tendo ele contribuído com conceitos atuais sobre probabilidade em seu livro *Liber de lud aleae* (O livro dos jogos de azar), o *De Libris propriis* (Dos próprios livros) que fala sobre os demais livros que

escreveu e seus sucessos exercendo a medicina e o *De Subtilitate rerum* (Na sutileza das coisas) que explica sobre fenômenos naturais. Dentre todas suas publicações, o livro *Artis magnaе, sive de regulis algebraicis* (A Grande Arte, ou As Regras da Álgebra), que na álgebra ficou conhecido como *Ars magna*, foi o mais importante para a compreensão dos estudos das equações cúbicas.

De personalidade conflitante, Cardano passou por muita instabilidade ao logo da vida. Segundo SANTOS (2013, p.10)(17), existiram vários momentos de muitas riquezas e outros de pobreza, os quais demonstravam o quanto sua genialidade poderia o levar ao topo, ao passo que sua prepotência, nos jogos de azar, o levou deveras ao fracasso.

Como parte de seu brilhantismo e interesse pela matemática, Cardano resolveu escrever um livro de Álgebra, o qual conseguiu realizar, mais tarde, mediante a ajuda de Ludovico Ferrari. Este último, entrou na vida de Cardano ainda muito jovem, aos 14 anos. De origem humilde e em busca de emprego, Ferrari começou a trabalhar na casa de Cardano e, por demonstrar ser muito inteligente, logo se tornou seu assessor e discípulo (LIMA, 1987)(10).

Quando teve conhecimento da vitória de Tartaglia, em sua disputa com Fiore, Cardano começou uma incessante busca em descobrir o método de resolução das cúbicas, realizadas por Tartaglia. Segundo STEIN. (2008, p. 99)(20), foram inúmeras cartas enviadas ao mesmo, com o objetivo de usar tais descobertas em seu livro a ser publicado. Mas todas as tentativas foram mal sucedidas, pois Tartaglia não tinha interesse em publicar suas descobertas. Porém, Cardano não desistiu. Sabendo do interesse de Tartaglia por artilharia, ele comprometeu apresentar-lhe Alfonso D'Avalos que possuía o posto de comandante-em-chefe, em Milão. Ludibriado com tal possibilidade, Tartaglia foi a seu encontro.

O compromisso da apresentação não foi realizado, mas, de acordo com SANTOS (2013, p. 16)(17), Cardano foi um anfitrião impecável e conquistou a confiança de Tartaglia. Este, por sua vez, acabou por revelar seu método, mas estabeleceu algumas proposições. Dentre elas, sob juramento, Cardano não poderia publica-lo e, em hipótese alguma, contar a alguém. Mediante a tal juramento, Tartaglia ensinou seu método de resolução de equações cúbicas na forma de versos, pois dessa forma não revelaria a demonstração de como realizou sua descoberta.

Temos assim, uma possível tradução para o português, dos versos, tal como transcritos na página 120 da edição de 1554 dos *Quesiti et inventioni diverse*(22):

1. *Quando o cubo com a coisa em apreço  
Se igualam a qualquer número discreto  
Acha dois outros diferentes nisso*

2. *Depois terás isto por consenso  
Que seu produto seja sempre igual  
Ao cubo do terço da coisa certo*

3. *Depois, o resíduo geral  
Das raízes cúbicas subtraídas  
Será tua coisa principal*

4. *Na segunda destas operações,  
Quando o cubo estiver sozinho  
Observarás estas outras reduções*

5. *Do número farás dois, de tal forma  
Que um e outro produzam exatamente  
O cubo da terça parte da coisa*

6. *Depois, por um preceito comum  
Toma o lado dos cubos juntos  
E tal soma será teu conceito*

7. *Depois, a terceira destas nossas contas  
Se resolve como a segunda, se observas bem  
Que suas naturezas são quase idênticas*

8. *Isto eu achei, e não com passo tardo  
No mil quinhentos e trinta e quatro  
Com fundamentos bem firmes e rigorosos  
Na cidade cingida pelo mar*

Após obter as informações que desejava, Cardano e seu auxiliar Ferrari, se dedicaram e conseguiram encontrar uma demonstração que poderia solucionar qualquer equação de terceiro grau. Para tal, deve-se substituir  $x = y + \left(-\frac{b}{3a}\right)$  e, assim, consegue-se eliminar

o termo  $x^2$  da equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Com esse método, foi possível descrever diferentes fórmulas para resolver 13 tipos de equações cúbicas. Contudo, hoje podemos resumir todas em apenas uma única fórmula (LIMA, 1991)(11).

Dentre outros avanços, segundo LIMA (1991, p. 14)(11), ainda houve a identificação de raízes múltiplas em vários casos, relações entre coeficientes e raízes e aceitação de raízes menores que zero, irracionais e imaginárias.

Neste período, Zuanne de Tonini da Coi desafiou Cardano a resolver a equação quártica  $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ . Ele tentou, mas não obteve êxito. Porém, seu discípulo Ferrari conseguiu com maestria. Segundo SANTOS (2013, p. 18)(17), a resolução realizada por Ferrari diminuía o grau da equação, de modo que a quártica se transforma em um par de equações quadráticas. Entretanto, para fazer essa redução era preciso resolver uma cúbica, cuja solução, já era de conhecimento do mesmo. No entanto, Ferrari não podia utilizar estes dados para publicação, devido o juramento de Cardano a Tartaglia. Tal impedimento se estendia a Ferrari, já que o mesmo só teve acesso a fórmula de resolução das cúbicas através deste acordo.

À medida que o tempo passava, aumentava a necessidade de encontrar uma alternativa que pudesse permiti-los publicar suas novas descobertas. Durante essa procura incessante, descobriram a existência de um possível manuscrito, pertencente ao, já falecido, professor e matemático del Ferro. Na eminência de conseguirem publicar, partiram para Bolonha à procura de algum herdeiro. Conheceram assim, Annibale della Nave, o qual concedeu-lhes a fórmula da resolutive cúbica descoberta por del Ferro (LIMA, 1987)(10).

Em posse do manuscrito, Cardano e Ferrari observaram que a fórmula de del Ferro correspondia a uma das fórmulas descobertas por Tartaglia. Convencidos e empolgados por saberem que a fórmula de del Ferro antecede, alguns anos, a de Tartaglia, Cardano e Ferrari decidem usá-la para publicar. Acreditavam que citar del Ferro como o primeiro a descobrir uma resolução para as equações de terceiro grau os eximiam da culpa de uma possível quebra de juramento (STEIN, 2008)(20).

Em 1545, Cardano publicou seu importante livro “Ars Magna” que expandiu pela Europa e foi de suma importância para a Álgebra. Em seu livro Cardano atribui os devidos méritos as descobertas de del Ferro e Tartaglia (STEWART, 2012)(21). Podemos observar as palavras utilizadas por Cardano em um trecho de seu livro “Ars Magna”:

“Em sua época, Scipione del Ferro, de Bolonha, resolveu o caso do cubo e da primeira potência igual a uma constante, façanha muito elegante e admirável. (...) Numa emulação desse trabalho, meu amigo Niccolo Tartaglia de Brécia, não querendo ser superado, resolveu o mesmo caso quando participou de uma competição com seu [de del Ferro] pupilo, Antonio Maria Fiore e, comovido por minhas muitas súplicas, entregou-a a mim.”



Mesmo demonstrando não querer se apropriar das descobertas alheias e citando claramente seus descobridores, a notícia para Tartaglia foi recebida como um golpe. Sendo assim, preparou uma resposta em seu livro “*Quesiti e Inventioni Diverse*”, lançado em 1546, cuja provocação iniciou um enorme debate através de panfletos escritos por Tartaglia e Ferrari, o qual tomou as dores de Cardano. Este por sua vez resolveu se abster do conflito (MATOS, 2014)(13).

O ápice deste debate foi o momento em que Ferrari desafia Tartaglia e este, por sua vez, aceita. O desafio foi vencido por Ferrari que, segundo Tartaglia, obtinha a vantagem de estar “jogando em casa” e, portanto, possuía torcida ali presente (STEIN, 2008)(20). No entanto, podemos dizer que a maior derrota de Tartaglia estava contida no *Ars Magna*, pois o livro expôs sua breve participação na resolução das equações de 3 grau, concedida sobre forma de versos e sem demonstração, se contrastando as demonstrações para os 13 tipos de cúbicas e para quárticas de Cardano e Ferrari.

## 4 AS DESCOBERTAS ALGÉBRICAS

### 4.1 A SOLUÇÃO DE DEL FERRO E TARTAGLIA

Para o melhor entendimento sobre o desenrolar histórico da descoberta e desenvolvimento das equações de terceiro grau, iniciaremos demonstrando algebricamente a fórmula encontrada pelos matemáticos del Ferro e Tartaglia. Utilizamos como referência LIMA (1987)(10):

Sendo a equação do 3º grau

$$y^3 + py + q = 0 \quad (4.1)$$

Supondo uma solução do tipo  $y = u + v$ , isto é, como uma soma de duas parcelas. Elevando a igualdade  $y = u + v$  ao cubo, temos:

$$y^3 = (u + v)^3$$

onde,

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3 \quad (4.2)$$

Manipulando equação (4.2), obtemos:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0 \quad (4.3)$$

Comparando as equações (4.1) e (4.3), temos:

$$\begin{cases} -3uv = p \Rightarrow uv = -\frac{p}{3} \\ -(u^3 + v^3) = q \Rightarrow u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Elevando a igualdade  $uv = -\frac{p}{3}$  ao cubo, obtemos:

$$(uv)^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \Rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Deste modo,  $u^3$  e  $v^3$  podem ser considerados raízes da equação do 2º grau  $z^2 - Sz + P = 0$ , onde  $S$  é a soma das raízes e  $P$  é o produto das raízes

$$S = -q$$

e

$$P = -\frac{p^3}{27}$$

Portanto, a equação  $z^2 - Sz + P = 0$ , pode ser escrita por:

$$z^2 - (-q)z - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (4.4)$$

Usando a fórmula resolvente da equação do 2º grau, para resolver a equação (4.4), temos:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$z = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( q^2 + \frac{4p^3}{27} \right)}$$

$$z = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Como, por hipótese,  $u^3$  e  $v^3$  são raízes da equação  $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ , segue que:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad e \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Portanto, como  $y = u + v$ , a solução da equação  $y^3 + py + q = 0$  é:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

#### 4.2 SOLUÇÃO DE CARDANO PARA $y^3 + py = q$ ( $p, q > 0$ , com $p$ e $q$ inteiros)

Seguiremos com a demonstração do método estabelecido por Cardano para solucionar a equação:

$$y^3 + py = q \quad \text{com} \quad (p, q > 0) \quad (4.5)$$

Seja

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a > b > 0$ , podendo ser escrito da seguinte forma

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3 \quad (4.6)$$

Por comparação da igualdade (4.5) com (4.6), chegaremos em uma solução caso  $a$  e  $b$  sejam encontrados, de modo que

$$\begin{cases} p = 3ab \\ q = a^3 - b^3 \end{cases}$$

Portanto,  $y = a - b$  será uma raiz da equação (4.5).

Elevando  $p = 3ab$  ao cubo obtém-se

$$p^3 = 27a^3b^3$$

Que pode ser reescrito como

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27} \quad (4.7)$$

Em contrapartida, elevando  $q = a^3 - b^3$  ao quadrado tem-se que

$$q^2 = (a^3 - b^3)^2$$

Que pode ser reescrito como

$$a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2 \quad (4.8)$$

Como resultado da soma das equações (4.7) e (4.8), temos

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27} \quad (4.9)$$

Nota-se que o lado esquerdo da última igualdade (4.9) é um quadrado da soma de cubos, portanto

$$a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

Deste modo, tem-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

Que apresenta a solução

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad e \quad b = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Assim, por Cardano uma solução da equação cúbica em sua forma reduzida  $y^3 + py = q$  com  $(p, q > 0)$  é

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

#### 4.3 SOLUÇÃO DE CARDANO PARA $y^3 = py + q$ ( $p, q > 0$ , com $p$ e $q$ inteiros)

Seja desta vez a equação na forma:

$$y^3 = py + q \text{ com } p, q > 0 \quad (4.10)$$

Da igualdade  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a > b > 0$ , segue que

$$(a + b)^3 = 3ab(a + b) + (a^3 + b^3) \quad (4.11)$$

Por comparação da igualdade (4.10) com (4.11), chegaremos em uma solução caso  $a$  e  $b$  sejam encontrados, de modo que

$$\begin{cases} p = 3ab \\ q = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Portanto,  $y = a + b$  será uma raiz da equação  $y^3 = py + q$  com  $p, q > 0$ .

Elevando  $p = 3ab$  ao cubo obtém-se

$$p^3 = 27a^3b^3$$

Que pode ser reescrito como

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27} \quad (4.12)$$

Em contrapartida, elevando  $q = a^3 + b^3$  ao quadrado tem-se que

$$q^2 = (a^3 + b^3)^2$$

Que pode ser reescrito como

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 \quad (4.13)$$

Como resultado da subtração das equações (4.13) e (4.12), temos

$$a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2 - \frac{4p^3}{27} \quad (4.14)$$

Nota-se que o lado esquerdo da igualdade (4.14) é um quadrado da diferença de cubos, portanto

$$a^3 - b^3 = \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}$$

Deste modo, tem-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}} \\ a^3 + b^3 = q \end{cases}$$

Que apresenta a solução

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad e \quad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Assim, por Cardano uma solução da equação cúbica em sua forma reduzida  $y^3 + py = q$  com  $(p, q > 0)$  é

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

#### 4.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $y^3 + py + q = 0$ , COM $(p, q > 0, \text{ com } p \text{ e } q \text{ inteiros})$

Seguindo o mesmo formato de resolução dos métodos anteriores, tomemos a equação

$$y^3 + py + q = 0 \quad (4.15)$$

com  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Da igualdade  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , segue que

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$$

Que pode ser escrita como

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) - (a^3 + b^3) = 0 \quad (4.16)$$

Por comparação de (4.15) com (4.16), chega-se em uma solução  $y = a + b$ , tal que

$$p = -3ab \quad e \quad q = -(a^3 + b^3)$$

De  $p = -3ab$ , tem-se  $a^3 \cdot b^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ .

Donde segue o seguinte sistema

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = -q \\ a^3 \cdot b^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

De acordo com o sistema acima, note que  $a^3$  e  $b^3$  são as raízes da equação quadrática do tipo  $u^2 - (-q)u + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$ , cuja solução pela sua fórmula resolutive é dada por

$$u = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(q^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Assim,

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad e \quad b^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

O que implica na seguinte solução para a equação  $y^3 + py + q = 0$ :

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Onde  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$  será o discriminante  $D$ , de modo que:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

## 5 CRITÉRIO PARA CLASSIFICAÇÃO DAS RAÍZES DA EQUAÇÃO CÚBICA

Pode-se discutir as raízes da equação  $y^3 + py + q = 0$ , com  $p, q \in \mathbb{R}$  quanto ao sinal do discriminante  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ .

Sejam  $y_1, y_2$  e  $y_3$  raízes da equação, segue da Relação de Girard (que veremos na próxima seção), já observadas antes por Cardano, que:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p \\ -y_1y_2y_3 = q \end{cases}$$

De  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ , tem-se  $-y_1 = y_2 + y_3$ , que substituindo em  $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p$ , segue

$$p = y_1(y_2 + y_3) + y_2y_3 = -y_1^2 + y_2y_3$$

Substituindo  $p$  e  $q$  em  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ , temos:

$$D = \frac{y_1^2y_2^2y_3^2}{4} + \frac{(y_2y_3 - y_1^2)^3}{27}$$

### 5.1 DEMONSTRAÇÃO DO DISCRIMINANTE $D = 0$

Para este caso a equação admite três raízes reais, sendo duas ou três iguais.

Sejam  $y_1, y_2$  e  $y_3$  as raízes reais da equação  $y^3 + py + q = 0$  com  $p, q \in \mathbb{R}$ , onde o discriminante  $D$ , é tal que:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{5.1}$$

Pelas relações de Girard, que veremos na seção 6.2, temos:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$p = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$$

$$q = -y_1y_2y_3$$

Supondo  $y_1 = y_2$ . De  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$  segue que  $y_3 = -2y_1$ , que substituindo em (5.1), tem-se que:

$$D = \frac{y_1^2 \cdot y_1^2 \cdot (-2y_1)^2}{4} + \frac{(-2y_1 \cdot y_1 - y_1^2)^3}{27} = 0$$



Agora supondo  $y_1 = y_3$ . De  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$  temos que  $y_2 = -2y_1$ , que substituindo em (5.1), segue que:

$$D = \frac{y_1^2 \cdot (-2y_1)^2 \cdot y_1^2}{4} + \frac{((-2y_1) \cdot y_1 - y_1^2)^3}{27} = 0$$

Por fim, supondo  $y_2 = y_3$ . De  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$  segue que  $y_1 = -2y_2$ , que substituindo em (5.1), temos que:

$$D = \frac{(-2y_2)^2 \cdot y_2^2 \cdot y_2^2}{4} + \frac{(y_2^2 - (-2y_2)^2)^3}{27} = 0$$

Assim,  $D = 0$ , como queríamos demonstrar.

## 5.2 DEMONSTRAÇÃO DO DISCRIMINANTE $D > 0$

Para este caso a equação admite duas raízes complexas e uma real.

Sendo  $y_1 = m + ni$ ,  $y_2 = m - ni$  e  $y_3 = k$  as raízes da equação  $y^3 + py + q = 0$ , com  $p, q \in \mathbb{R}$ , sendo  $k \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{R}^*$ . Sabe-se que se um número complexo  $w$  é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, seu conjugado,  $\bar{w}$ , também é.

Pelas relações de Girard, tem de  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ , que implica em  $2m + k = 0$  e conseqüentemente  $y_3 = -2m$ .

De  $p = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = y_1y_2 + y_3(y_1 + y_2)$ , tem-se que  $(m^2 + n^2) - 2m(2m) = n^2 - 3m^2$ , o que implica que  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{n^2}{3} - m^2\right)^3$ .

Por fim, de  $-q = y_1y_2y_3 = -2m(m^2 + n^2)$ , obtém-se  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 = m^2(m^2 + n^2)^2$

Logo,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = m^2(m^2 + n^2)^2 + \left(\frac{n^2}{3} - m^2\right)^3$$

$$D = 3m^4n^2 + \frac{2}{3}m^2n^4 + \frac{n^6}{27}$$

Como  $3m^4n^2 + \frac{2}{3}m^2n^4 \geq 0$  e  $\frac{n^6}{27} > 0$ , pois  $n \in \mathbb{R}^*$

Assim,  $D > 0$ , como queríamos provar.

## 5.3 DEMONSTRAÇÃO DO DISCRIMINANTE $D < 0$

Para este caso a equação admite três raízes reais e distintas.

Supondo que  $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$  sejam raízes reais e distintas da equação  $y^3 + py + q = 0$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ .

Pelas relações de Girard, tem-se  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ , donde  $y_1^2 = (y_2 + y_3)^2$ . Portanto, substituindo em (5.1).

$$D = \frac{y_1^2 y_2^2 y_3^2}{4} + \frac{(y_2 y_3 - y_1^2)^3}{27}$$

$$D = \frac{((y_2 + y_3) y_2 y_3)^2}{4} + \frac{(y_2 y_3 - (y_2 + y_3)^2)^3}{27}$$

Fazendo  $y_2 y_3 = R$  e  $y_2 + y_3 = S$ , segue que:

$$D = \frac{(RS)^2}{4} + \frac{(R - S^2)^3}{27}$$

$$D = \frac{1}{108} (4R^3 + 15R^2 S^2 + 12RS^4 - 4S^6)$$

Como  $S^2 - 2R = y_2^2 + y_3^2 > 0$  e fazendo  $S^2 - 2R = K \Rightarrow S^2 = K + 2R$ , tem-se:

$$D = \frac{1}{108} (4R^3 + 15R^2(K + 2R) + 12R(K + 2R)^2 - 4(K + 2R)^3)$$

$$D = \frac{1}{108} (50R^3 + 15KR^2 - 12K^2R - 4K^3)$$

$$D = \frac{50}{108} \left(R + \frac{2}{5}K\right)^2 \cdot \left(R - \frac{1}{2}K\right)$$

Fazendo uma análise desse produto, tem-se que  $R - \frac{1}{2}K < 0$ . Caso fosse o contrário,  $2R \geq K$  e como  $K = S^2 - 2R$ , tem-se que  $4R \geq S^2$ . Comparando os termos de raízes,  $4y_2 y_3 \geq (y_2 + y_3)^2$ , implicaria que  $(y_2 - y_3)^2 \leq 0$ . O que contradiz que  $y_2 \neq y_3$ .

Sendo  $\left(R + \frac{2}{5}K\right)^2 \geq 0$ , o fator  $\left(R + \frac{2}{5}K\right) \cdot \left(R + \frac{2}{5}K\right)$  se anula em  $\left(R + \frac{2}{5}K\right) = 0$ . Como  $K = S^2 - 2R$ , temos que  $R + 2S^2 = 0$ , o que concluímos que  $y_2 y_3 + 2(y_2 + y_3)^2 = 0$ , cujo desenvolvimento é  $2y_2^2 + 5y_2 y_3 + 2y_3^2 = 0$ .

Se fixarmos  $y_3$ , a equação quadrática admite as raízes  $y_2 = \frac{1}{2}y_3$  ou  $y_2 = -2y_3$ .

Usando a primeira relação de Girard, tomando  $y_1 = -(y_2 + y_3)$ , temos que  $y_1 = -(y_2 - 2y_2) = y_2$  ou  $y_1 = -(2y_3 + y_3) = y_3$ . No entanto, note que isto contradiz a hipótese que as raízes são distintas.

Caso fixássemos  $y_3$ , devido a simetria de  $y_2$  e  $y_3$  na equação  $2y_2^2 + 5y_2 y_3 + 2y_3^2 = 0$ , o resultado seria o mesmo.

Portanto,  $R + \frac{2}{5}K$  não se anula em nenhum caso se as raízes forem reais e distintas e, logo,  $\left(R + \frac{2}{5}K\right)^2 > 0$ .

Daí,  $\mathbf{D} < \mathbf{0}$ , como queríamos provar.

#### 5.4 CONSOLIDAÇÃO DA FÓRMULA DE CARDANO PARA $D < 0$

Segundo SILVA (2018, p.23)(19), somente após trinta anos da publicação de *Ars Magna*, por Cardano, Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha (Itália), notou que equações cúbicas com soluções reais conhecidas, porém para determiná-las é necessário extrair raízes quadradas de números negativos.

Figura 3 - Álgebra de Rafael Bombelli: capa da edição bolonhesa de 1579



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Rafael\\_Bombelli](https://pt.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli)

Como vimos nas seções anteriores, a equação do tipo

$$x^3 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{R}.$$

Tem-se as 3 raízes reais se, e somente se,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Sendo assim, Bombelli concluiu que os números reais eram insuficientes para este tipo de equações algébricas, e propôs a necessidade de criar um novo conceito de número, o qual precisava ser estendido (MONTEIRO, 2004)(12).

Ainda que a descoberta de Bombelli tenha sido brilhante (Figura 3), esta não foi suficiente para desvendar o enigma. Porém, sua pioneira ideia foi utilizada, cerca de dois

Figura 4 - Leonhard Euler (1707-1783)



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)

séculos depois, como embasamento para que Leonhard Euler, na (Figura 4), matemático nascido na Suíça, conseguisse extrair raízes de números complexos.

Em meio a seus estudos e grandes produções, Euler conseguiu determinar como extrair a raiz enésima de um número complexo. Mediante a tal descoberta, novas conquistas foram surgindo, assim como a descoberta de que *"qualquer número complexo não nulo (os reais inclusive) tem exatamente n raízes enésimas (n inteiros)"*, (GARBI, 1997, p. 106)(8).

Euler ficou conhecido por sua grande produtividade e contribuições para a matemática e a física. Segundo Garbi (1997, p. 104)(8), *"muitos pesquisadores já haviam trabalhado na matéria quando Euler fez-lhe um ataque final, deixando pouca coisa a ser descoberta no futuro"*, fato este que demonstra claramente a genialidade do matemático. Portanto, dentre o conteúdo desta dissertação, a contribuição de Euler está relacionada a sua conquista ao determinar as raízes enésimas de um número complexo, o qual desvendou o grande enigma daqueles que tentaram aplicar a fórmula de Cardano-Tartaglia nos casos em que  $D < 0$ . Concomitante a isto, mostrou seu grande domínio sobre os números complexos, principalmente com a definição da função exponencial para números complexos e sua relação com as funções trigonométricas.

## 6 MÉTODOS UTILIZADOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

### 6.1 O DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

Figura 5 - Paolo Ruffini (1765 – 1822)



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Paolo\\_Ruffini](https://pt.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini)

Paolo Ruffini (Figura 5), médico e matemático, nasceu em Valentano, atual Itália, em 1765. Na área da matemática seu nome está intimamente associado com a comprovação da impossibilidade de resolver algebricamente a equação de quinto grau. Por meio de vários tratados (1803, 1805 e 1813) procurou demonstrar que as raízes das equações de 5º grau ou superiores não podem ser expressas por meio de radicais em termos de seus coeficientes (MORO, 2000)(14). Segundo SANTOS (2013, p. 28)(17) acredita-se que suas escritas não tenham sido devidamente compreendidas, na época, devido sua grande extensão de conteúdo.

Ruffini elaborou um dispositivo prático, o qual ficou conhecido como método Briot-Ruffini. Sua aplicação é amplamente utilizada, pois permite dividir um polinômio  $p(x)$  de grau  $n$  por um polinômio do tipo  $x - \alpha$ . A grande aplicabilidade e auxílio deste algoritmo na resolução da equação algébrica, concentra-se na análise do resto da divisão. Sendo este igual a zero, segue que " $\alpha$ " é uma raiz da equação.

Esquema de montagem do dispositivo, representado na (Figura 6).

Figura 6 – Algoritmo Briot-Ruffini 1

<i>termo constante do divisor, com sinal trocado</i>	<i>coeficientes de x do dividendo p(x)</i>	<i>termo constante do dividendo p(x)</i>
	<i>coeficientes do quociente</i>	<i>resto</i>

Fonte: DANTE, Luís Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. Vol.3. 3ªed. São Paulo. Editora Ática, 2016.

Aplicação do método na equação  $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ , em que  $-1$  é uma raiz da equação

Em tabelas, segue o passo a passo do dispositivo aplicado ao exemplo.

Note que utilizaremos apenas os coeficientes

Tabela 1 – Passo 1 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
----	---	----	----	---

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Descendo o primeiro coeficiente do dividendo

Tabela 2 – Passo 2 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2			

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Multiplicando o termo repetido pelo divisor e somando o produto com o próximo termo do dividendo.

Tabela 3 – Passo 3 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2	$\underbrace{-6}_{-1 \cdot 2 + (-4)}$		

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Repetindo o processo para obtemos o próximo termo do quociente.

Tabela 4 – Passo 4 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2	$\underbrace{-6}_{-1 \cdot 2 + (-4)}$	$\underbrace{4}_{-1 \cdot (-6) + (-2)}$	

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Finalmente,

Tabela 5 – Passo 5 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
2	$\underbrace{-6}_{-1 \cdot 2 + (-4)}$		$\underbrace{4}_{-1 \cdot (-6) + (-2)}$	
	$\underbrace{0}_{-1 \cdot 4 + 4}$			

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Como já era esperado, o resto da divisão foi zero. Uma vez que  $-1$  é raiz da equação, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x + 1) \cdot (2x^2 - 6x + 4) = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau  $2x^2 - 6x + 4 = 0$ , temos que as outras raízes são 1 e 2. Assim, a solução da equação  $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$  é:

$$S = \{-1; 1; 2\}$$

## 6.2 RELAÇÃO DE GIRARD PARA EQUAÇÃO DO 3º GRAU

Figura 7 - Albert Girard (1595 - 1632)



Fonte: [http://clubes.obmep.org.br/blog/b\\_girard/](http://clubes.obmep.org.br/blog/b_girard/)

O matemático Albert Girard (Figura 7) nasceu em St Mihiel, na França, em 1595. Ficou conhecido por suas grandes contribuições em diferentes áreas como álgebra, trigonometria e aritmética. No que tange a álgebra, Girard demonstrou, em seu livro *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629), que as equações conseguiam ter raízes negativas e imaginárias, assim como definiu relações entre as equações e suas raízes. Sendo estas

relações responsáveis por permitir obtenção da equação principal a partir de suas raízes (VALE, 2013)(24).

Sendo assim, a relação de Girard tem por objetivo estabelecer associações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do tipo polinomial.

Para a equação cúbica na forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a \neq 0$ , sendo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  suas raízes, por Girard, têm-se que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Demonstração:

Considere a equação cúbica na forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a \neq 0$ , sendo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  suas raízes.

A equação pode ser escrita como uma decomposição de fatores do 1º grau, isto é:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Abrindo o produto, segue:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$$

Dividindo a igualdade por a, temos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Da igualdade de polinômios, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

### 6.3 TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

O teorema nos permite desenvolver uma relação de todas as possíveis raízes racionais de equações algébricas com coeficientes inteiros. A partir deste resultado podemos testá-los individualmente, a fim de encontrarmos os possíveis resultados que de fato representam os zeros da função.



Dada a equação polinomial  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ , de coeficientes inteiros, com  $a_n \neq 0$ . Se o número racional  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si, é uma raiz da equação, então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .

Demonstração:

Como  $\frac{p}{q}$  é raiz da equação, tem-se:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^1 + a_0 = 0 \quad (6.1)$$

Multiplicando a igualdade por  $q^n$ , segue que:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (6.2)$$

Isolando  $a_n p^n$  no lado esquerdo da igualdade (6.2) e evidenciando  $q$  no lado direito, tem-se:

$$a_n p^n = -q \underbrace{\left(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)}_{\alpha} \quad (6.3)$$

Agora, isolando  $a_0 q^n$  no lado esquerdo da igualdade (6.2) e evidenciando  $p$  no lado direito, tem-se:

$$a_0 q^n = -p \underbrace{\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}\right)}_{\beta} \quad (6.4)$$

Como por hipótese todos os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n, p$  e  $q$  são inteiros, logo  $\alpha$  e  $\beta$  são inteiros.

Em (6.3), tem-se:

$$a_n p^n = -q \cdot \alpha \implies \frac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z}$$

O que mostra que  $a_n p^n$  é divisível por  $q$ . Como  $p^n$  e  $q$  são primos entre si, logo  $a_n$  é divisível por  $q$ , ou seja,  $q$  é divisor de  $a_n$ .

Em (6.4), segue que:

$$a_0 q^n = -p \cdot \beta \implies \frac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z}$$

O que mostra que  $a_0 q^n$  é divisível por  $p$ . Como  $q^n$  e  $p$  são primos entre si, logo  $a_0$  é divisível por  $p$ , ou seja,  $p$  é divisor de  $a_0$ .

## 7 PROPOSTA PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta dissertação propõe uma sequência didática a qual utiliza situações recorrentes em sala de aula relacionados ao tema de resoluções de equações cúbicas, sobre o qual os livros didáticos, do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), explicam a resolução por meio do dispositivo de Briot-Ruffini, Relação de Girard e/ou utilizando o Teorema das Raízes Racionais. No entanto, além de limitar o aluno a casos específicos, este mecanismo exige um método de inspeção para determinar a possível raiz racional. Mediante a esta metodologia de ensino, torna-se comum o questionamento, por parte, dos alunos sobre a possível existência de uma fórmula resolutiva isenta de situações adversas, tais como, mencionadas acima.

Desde modo, esta sequência didática tem como objetivo, além de apresentar aos alunos os métodos tradicionais utilizados nos livros didáticos e sistemas apostilados de ensino, uma nova forma de resolver equações cúbicas pela Fórmula de Cardano, que apesar de um primeiro contato parecer extensa para a visão do aluno, se torna bem eficaz e principalmente atende seus questionamentos para a generalização de resolução de equações do 3º grau.

Vale ressaltar ainda, que após a homologação da nova BNCC, em 14 de dezembro de 2018 (BRASIL,2018)(2), para o novo Ensino Médio, o assunto acima citado não faz mais parte do currículo nacional, sendo assim, esta proposta didática pode ser usada como material complementar para o 3º ano do ensino médio, tendo em vista que vestibulares nacionais como UERJ, PISM 3 – UFJF, IME, ITA, ESCOLA NAVAL, UNICAMP, entre outros cobram o tema em seus conteúdos programáticos. Importante destacar também que os sistemas apostilados de ensino como Anglo, COC, UNOi, SAS, Eleva/Salta, dentre outros de escolas particulares mantiveram o assunto em questão. Deste modo, o uso desta sequência didática, principalmente em escolas públicas, além de não privar o conhecimento matemático dos alunos, será de grande valia para minimizar a diferença que existe em relação ao ensino ofertado pela rede privada e a rede pública.

Descrição da sequência didática:

**Turma:** 3º Ano do Ensino Médio.

**Disciplina e área do conhecimento:** Matemática e suas tecnologias.

**Objeto do Conhecimento:** Equações polinomiais de 3º grau.

**Objetivo específico:** Criar e desenvolver habilidades competentes para resolução de equações cúbicas.

**Metodologia de ensino:** Aula expositiva com debate sobre o assunto.

**Recurso didáticos:** Quadro, pincel/giz, notebook, projetor de multimídia e material

impresso com as atividades propostas.

**Carga horária total:** 12 aulas (600 min).

## 7.1 PRIMEIRA FASE DA PROPOSTA DIDÁTICA: 6 aulas de 50 min cada

Nesta etapa, será apresentado e proposto aos alunos a resolução de equações polinomiais do 3º grau pelos métodos disponíveis nos livros didáticos, os quais são utilizados no 3º Ano Ensino Médio. Utilizaremos, a priori, o método ofertado a fim de possibilitar ao aluno a compreensão de que se trata do mesmo assunto e permiti-lo ampliar suas possibilidades de entendimento e resolução de questões relacionadas.

Sendo assim, faremos inicialmente uma explicação teórica, com exemplos resolvidos sobre o dispositivo de Briot-Ruffini, mediante o conhecimento prévio de uma raiz da equação. Na sequência realizaremos a Relação de Girard aplicada nas equações cúbicas e finalizaremos com o Teorema das Raízes Racionais para obter uma possível raiz racional.

Como embasamento para as explicações, tomaremos como fonte o livro *Matemática – Contexto e Aplicações – Volume 3 – 3ª Edição – 2016*, escrito pelo autor Luiz Roberto Dante.

### 7.1.1 Apresentação dos métodos presentes nos livros didáticos

#### 7.1.1.1 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

O dispositivo prático de Briot-Ruffini é um método amplamente utilizado o qual permite dividir um polinômio  $p(x)$  de grau  $n$  por um polinômio do tipo  $x - \alpha$ . A grande aplicação e auxílio deste algoritmo na resolução da equação algébrica, está na análise do resto da divisão. Sendo este igual a zero, segue que  $\alpha$  é uma raiz da equação.

Esquema de montagem do dispositivo (Figura 8):

Figura 8 - Algoritmo Briot-Ruffini 2

<i>termo constante do divisor, com sinal trocado</i>	<i>coeficientes de x do dividendo p(x)</i>	<i>termo constante do dividendo p(x)</i>
	<i>coeficientes do quociente</i>	<i>resto</i>

Fonte: DANTE, Luís Roberto. *Matemática Contexto & Aplicações. Vol.3. 3ªed. São Paulo. Editora Ática, 2016.*

Aplicação do método na equação  $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ , em que  $-1$  é uma raiz da equação

Em tabelas, segue o passo a passo do dispositivo aplicado ao exemplo.

Tabela 6 – Passo 1 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2			

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Note que utilizaremos apenas os coeficientes

Descendo o primeiro coeficiente do dividendo

Tabela 7 – Passo 2 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2			

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Multiplicando o termo repetido pelo divisor e somando o produto com o próximo termo do dividendo.

Tabela 8 – Passo 3 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2	-6		
		$\underbrace{-6}_{-1 \cdot 2 + (-4)}$		

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Repetindo o processo para obtemos o próximo termo do quociente.

Tabela 9 – Passo 4 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2	-6	4	
		$\underbrace{-6}_{-1 \cdot 2 + (-4)}$	$\underbrace{4}_{-1 \cdot (-6) + (-2)}$	

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Finalmente,

Tabela 10 – Passo 5 do dispositivo

-1	2	-4	-2	4
	2	-6	4	0
		$\underbrace{-6}_{-1 \cdot 2 + (-4)}$	$\underbrace{4}_{-1 \cdot (-6) + (-2)}$	$\underbrace{0}_{-1 \cdot 4 + 4}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Como já era esperado, o resto da divisão foi zero. Uma vez que  $-1$  é raiz da equação, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x + 1) \cdot (2x^2 - 6x + 4) = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau  $2x^2 - 6x + 4 = 0$ , temos que as outras raízes são 1 e 2. Assim, a solução da equação  $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$  é:

$$S = \{-1; 1; 2\}$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(UFJF- pism 3 - 2021)(4) Suponha que existe um único  $x > 8$  e uma fatoração do polinômio  $p(x) = x^3 - 18x^2 + 104x - 192$  em fatores lineares distintos para expressar o produto de três inteiros positivos. Seja  $r$  um desses inteiros. Sabendo que  $r + 8$  é raiz do polinômio  $D(x) = p(x) - 48$  e que  $D(x)$  é divisível por  $x - 10$ , encontre o menor entre esses três números.

- a) 24
- b) 12
- c) 8
- d) 2
- e) 1

Solução comentada:

Do enunciado:

$$D(x) = x^3 - 18x^2 + 104x - 192 - 48 = x^3 - 18x^2 + 104x - 240$$

Como  $D(x)$  é divisível por  $x - 10$ , aplicando Briot-Ruffini, temos:

Tabela 11 – Aplicação do dispositivo Briot-Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 10 & 1 & -18 & 104 & -240 \\ & & 10 & -8 & 24 \\ \hline & 1 & -8 & 24 & 0 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Dos coeficientes do quociente, segue a equação:

$$x^2 - 8x + 24 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = -32 < 0$$

Logo,  $x = 10$  é a única raiz real de  $D(x)$ .

Portanto:

$$r + 8 = 10 \implies r = 2$$

### 7.1.1.2 Relação de Girard para equação de 3º grau

Considere a equação cúbica na forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a \neq 0$ , sendo  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  suas raízes. A equação pode ser escrita como uma decomposição de fatores do 1º grau, isto é:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Abrindo o produto, segue:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \left[ x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \right]$$

Dividindo a igualdade por  $a$ , temos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Da igualdade de polinômios, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}$$

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

(UFJF-PISM3-2022)(5) Considere o polinômio dado por  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . A soma e o produto de suas raízes são, respectivamente, 2 e 3. Sabe-se ainda que  $p(1) = 10$  e que  $-1$  é raiz desse polinômio. Encontre os valores dos coeficientes  $a, b, c, d$ .

Solução comentada: Aplicando as relações de Girard para a soma e o produto das raízes e as demais informações do enunciado, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{b}{a} = 2 \\ -\frac{d}{a} = 3 \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 10 \\ a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} b = -2a & (I) \\ d = -3a & (II) \\ a + b + c + d = 10 & (III) \\ -a + b - c + d = 0 & (IV) \end{array} \right.$$

Fazendo (III) + (IV) e utilizando (I) e (II), obtemos:

$$2b + 2d = 10$$

$$b + d = 5$$

$$-2a - 3a = 5$$

$$a = -1$$

Logo:

$$b = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$d = -3 \cdot (-1) = 3$$

Substituindo esses valores em (III):

$$-1 + 2 + c + 3 = 10$$

$$c = 6$$

Portanto, os valores dos coeficientes são  $a = -1, b = 2, c = 6$  e  $d = 3$ .

### 7.1.1.3 Teorema das raízes racionais

O teorema tem como finalidade uma pesquisa sobre as possíveis raízes racionais de equações algébricas com coeficientes inteiros. Dada a equação polinomial  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , de coeficientes inteiros, com  $a_n \neq 0$ . Se o número racional  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si, é uma raiz da equação, então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .

Demonstração:

Como  $\frac{p}{q}$  é raiz da equação, tem-se:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^1 + a_0 = 0 \quad (7.1)$$

Multiplicando a igualdade (7.1) por  $q^n$ , segue que:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (7.2)$$

Isolando  $a_n p^n$  no lado esquerdo da igualdade (7.2) e evidenciando  $q$  no lado direito, tem-se:

$$a_n p^n = -q \underbrace{(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})}_{\alpha} \quad (7.3)$$

Agora, isolando  $a_0 q^n$  no lado esquerdo da igualdade (7.2) e evidenciando  $p$  no lado direito, tem-se:

$$a_0 q^n = -p \underbrace{(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1})}_{\beta} \quad (7.4)$$

Como por hipótese todos os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n, p$  e  $q$  são inteiros, logo  $\alpha$  e  $\beta$  são inteiros.

Em (7.3), tem-se:

$$a_n p^n = -q \cdot \alpha \implies \frac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z}$$

O que mostra que  $a_n p^n$  é divisível por  $q$ . Como  $p^n$  e  $q$  são primos entre si, logo  $a_n$  é divisível por  $q$ , ou seja,  $q$  é divisor de  $a_n$ .

Em (7.4), segue que:

$$a_0 q^n = -p \cdot \beta \implies \frac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z}$$

O que mostra que  $a_0 q^n$  é divisível por  $p$ . Como  $q^n$  e  $p$  são primos entre si, logo  $a_0$  é divisível por  $p$ , ou seja,  $p$  é divisor de  $a_0$ .

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Disponível no livro *Matemática – Contexto e Aplicações – Volume 3 – 3ª Edição – 2016*, escrito pelo autor Luiz Roberto Dante.(6) Página 228

Pesquise as raízes racionais da equação  $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$

Solução comentada:

Na equação, temos que  $a_0 = 2$  e  $a_n = 3$

$$p \text{ é divisor de } 2 \implies p \in \{-1, 1, -2, 2\}$$

$$q \text{ é divisor de } 3 \implies q \in \{-1, 1, -3, 3\}$$

Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que as possíveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{ -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Fazendo a inspeção, segue que:

Se  $x = -1 \implies 3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 7(-1) + 2 = 8$ , logo  $x = -1$  não é raiz.

Se  $x = 1 \implies 3(1)^3 + 2(1)^2 - 7(1) + 2 = 0$ , logo  $x = 1$  é raiz.

Como  $x = 1$  é raiz, logo  $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$  é divisível por  $x - 1$ .

Aplicando o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, temos:

Tabela 12 – Aplicação do dispositivo Briot-Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 2 & -7 & 2 \\ & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Resolvendo a equação  $3x^2 + 5x - 2 = 0$ , vem que:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 25 + 24$$

$$\Delta = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-5 - 7}{6} = -2$$

Assim, as raízes racionais da equação estão apresentadas na solução

$$S = \left\{ -2, \frac{1}{3}; 1 \right\}.$$



## EXERCÍCIO PROPOSTO 1

Disponível no livro *Matemática – Contexto e Aplicações – Volume 3 – 3ª Edição – 2016*, escrito pelo autor Luiz Roberto Dante.(6) Página 229

(PUC-SP) Quais são as raízes da equação  $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$ ?

Solução comentada:

Na equação, temos que  $a_0 = -3$  e  $a_n = 3$

$p$  é divisor de  $-3 \implies p \in \{-1, 1, -3, 3\}$

$q$  é divisor de  $3 \implies q \in \{-1, 1, -3, 3\}$

Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que as possíveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \left\{ -1, 1, -3, 3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Fazendo a inspeção, segue que:

Se  $x = -1 \implies 3(-1)^3 - 13(-1)^2 + 13(-1) - 3 = -32$ , logo  $x = -1$  não é raiz.

Se  $x = 1 \implies 3(1)^3 - 13(1)^2 + 13(1) - 3 = 0$ , logo  $x = 1$  é raiz.

Como  $x = 1$  é raiz, logo  $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$  é divisível por  $x - 1$

Aplicando o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, temos:

Tabela 13 – Aplicação do dispositivo Briot-Ruffini

1	3	-13	13	-3
	3	-10	3	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Resolvendo a equação  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ , vem que:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\Delta = 100 - 36$$

$$\Delta = 64$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x_1 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

Assim, a solução da equação é  $S = \left\{ \frac{1}{3}; 1; 3 \right\}$ .

Note, que apesar de, mais uma vez, todas as raízes da equação pertencerem ao conjunto  $\frac{p}{q} \in \left\{-1, 1, -3, 3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ , isso não é uma regra geral que se aplica a todos os casos de equações desse tipo.

## EXERCÍCIO PROPOSTO 2

Foi retirado do mesmo livro (DANTE, Luiz Roberto-2016-página 229)(6).

(ITA-SP) Quais são as raízes inteiras da equação  $x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$ ?

Solução comentada:

Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que as possíveis raízes racionais são:

$$\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}$$

Por inspeção, verifica-se que a única raiz racional da equação é  $-2$ .

Mediante a vários exemplos, finalizamos assim a primeira fase proposta. Por meio desta etapa os alunos deverão ser capazes de questionar e perceber, independente da sua utilidade, que os métodos apresentados são restritos para uma possível generalização para a resolução de todos os casos de equações de 3º grau. Por isso, na próxima etapa apresentaremos um outro método capaz de preencher, junto com as técnicas já conhecidas, lacunas para a resolução de equações cúbicas, que é o método de Cardano.

## 7.2 SEGUNDA FASE DA PROPOSTA DIDÁTICA: 6 aulas de 50 min cada

### 7.2.1 Breve histórico da fórmula de Tartaglia-Cardano

Segundo D'Ambrósio (1996)(7), a História da Matemática é de suma importância para que esta seja entendida como um instrumento cultural e sobretudo um mecanismo a ser utilizado para motivar, compreender e facilitar seu ensino. Este objetivo se contrapõe ao atual modelo mecanicista atribuído a mesma, o qual a caracteriza exclusivamente como uma ciência exata. Tendo em vista tais argumentos, iniciaremos esta fase apresentando um breve histórico da fórmula de Cardano, a fim de alcançarmos o maior potencial de compreensão por parte dos alunos.

Processo histórico apresentado aos alunos:

O primeiro registro de um caminho para a resolução de equações cúbicas ocorreu, em 1515, pelo matemático e professor Scipione del Ferro. Este encontrou uma fórmula que permitia reduzir equações complexas e transformá-las em um formato mais simples e de fácil resolução. Mas o conhecimento de sua descoberta, a princípio, se restringiu a poucos.

$$x^3 + px = q$$

Alguns anos depois, o professor de matemática, conhecido pelo apelido Tartaglia, sem saber da descoberta de del Ferro, acabou redescobrando sua fórmula.

Seguidamente, veio o brilhante matemático e especialista em multiáreas, Cardano, que resolveu escrever um livro de Álgebra, o qual conseguiu realizar, mais tarde, mediante a ajuda de Ludovico Ferrari, seu discípulo. Cardano procurou Tartaglia e propôs aprender, sob juramento, o método de resolução de equações cúbicas, desde que, em hipótese alguma, contaria a outrem. Tartaglia aceitou sua proposta e lhe ensinou na forma de versos, sem revelar a demonstração de como realizou sua descoberta.

Mediante novos conhecimentos, Cardano e Ferrari partiram para descobrir a resolução de equações quárticas, a qual Ferrari conseguiu com maestria. Para tal, Ferrari reduzia o grau da equação, transformando a quártica em um par de equações quadráticas. Entretanto, para fazer essa redução era preciso resolver uma cúbica, cuja solução, já era de conhecimento do mesmo. No entanto, Ferrari não podia utilizar estes dados para publicação, devido o juramento de Cardano a Tartaglia. Sendo assim, se dedicaram em achar uma alternativa que pudesse permiti-los publicar suas novas descobertas. Durante essa busca, descobriram a existência de um possível manuscrito, pertencente ao, já falecido, professor e matemático del Ferro. Já em posse do manuscrito, Cardano e Ferrari observaram que a fórmula de del Ferro correspondia a uma das fórmulas descobertas por Tartaglia. Conscientes de que a fórmula de del Ferro antecede, alguns anos, a de Tartaglia, Cardano e Ferrari decidem usá-la, mediante as devidas citações de seus descobridores, para publicar em seu importante livro “Ars Magna”.

### 7.2.2 Apresentação da fórmula de Cardano

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a} \quad (7.5)$$

Como é notório, a fórmula neste formato é bem extensa e apresenta uma certa dificuldade de memorização. No entanto, a fórmula (7.5) apresentada acima para resolver equações do tipo  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  pode ser escrita de maneira mais simplificada pegando como base a equação reduzida de del Ferro  $y^3 + py + q = 0$ , fazendo  $x = y - \frac{b}{3a}$ .

Para isso, consideremos a equação cúbica na forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Dividindo a igualdade por  $a$ , com  $a \neq 0$ , temos:

$$\frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

Note que o coeficiente do termo de grau 3 ficou igual a 1, ou seja, tomemos por hipótese  $a = 1$ .

$$1x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0$$

Substituindo na fórmula resolutive (7.2.21), segue que:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27.1^3} + \frac{bc}{6.1^2} - \frac{d}{2.1}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27.1^3} + \frac{bc}{6.1^2} - \frac{d}{2.1}\right)^2 + \left(\frac{c}{3.1} - \frac{b^2}{9.1^2}\right)^3}} +$$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27.1^3} + \frac{bc}{6.1^2} - \frac{d}{2.1}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27.1^3} + \frac{bc}{6.1^2} - \frac{d}{2.1}\right)^2 + \left(\frac{c}{3.1} - \frac{b^2}{9.1^2}\right)^3}} - \frac{b}{3.1}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} +$$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} - \frac{b}{3}$$

Tomando  $b = 0$ , e  $x = y - \frac{b}{3a} \implies x = y - \frac{0}{3.1}$

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{0^3}{27} + \frac{0.c}{6} - \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{0^3}{27} + \frac{0.c}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{0^2}{9}\right)^3}} +$$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{0^3}{27} + \frac{0.c}{6} - \frac{d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{0^3}{27} + \frac{0.c}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{0^2}{9}\right)^3}} - \frac{0}{3}$$

Portanto:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}}$$

Considerando  $d = q$  e  $c = p$ , observamos a fórmula em duas parcelas de soma que se diferenciam por + e -.

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Fazendo ainda  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ , temos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\underbrace{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}_D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\underbrace{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}_D}} \quad (7.6)$$

Ou ainda,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

Observe que a fórmula (7.6) com radicais cúbicos se tornou menor e mais acessível comparada a apresentada em (7.5) inicialmente.

Em resumo, podemos estabelecer que para encontrar a raiz real da equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  pela fórmula de Cardano, precisamos da sua transformação para forma reduzida  $y^3 + py + q = 0$ , através a mudança de variável  $x = y - \frac{b}{3a}$ . Lembrando que já foi deduzido nesta dissertação que  $p = c - \frac{b^2}{3}$  e  $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$ .

Uma análise para o esperado quanto as raízes da equação cúbica se dá a partir do discriminante  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ .

A tabela 9 mostra a discussão quanto ao discriminante  $D$

Tabela 14 – Discussão do discriminante  $D$

$D > 0$	A equação admite uma raiz real e duas complexas
$D = 0$	A equação admite três raízes reais, sendo duas ou três iguais
$D < 0$	A equação admite três raízes reais e distintas

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

### EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Resolva a equação  $x^3 - 6x - 9 = 0$  pela fórmula de Cardano.

Solução comentada:

Comparando a equação dada com a equação reduzida  $x^3 + px + q = 0$ , temos:  $p = -6$  e  $q = -9$  e sendo  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ , logo

$$D = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = \frac{81}{4} + (-8) = \frac{49}{4} > 0$$

Aplicando a fórmula resolutive de Cardano, segue:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \\ x &= \sqrt[3]{-\left(\frac{-9}{2}\right) + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-9}{2}\right) - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\ x &= \sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{7}{2}} \\ x &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\ x &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Dividindo a equação  $x^3 - 6x - 9 = 0$  por  $x - 3$ , obtemos a equação quadrática  $x^2 + 3x + 3 = 0$ , cujas raízes são complexas e dadas por  $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Portanto, a solução da equação  $x^3 - 6x - 9 = 0$  é  $\left\{3; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO 2

Usando a Fórmula de Cardano determine uma das raízes da equação

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$$

Solução comentada:

Primeiramente, devemos transformar a equação geral para a forma reduzida  $y^3 + py + q = 0$ .

Sendo  $x = y - \frac{b}{3}$ , temos:

$$p = c - \frac{b^2}{3} = 6 - \frac{(-6)^2}{3} = 6 - 12 = -6$$

$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2(-6)^3}{27} - \frac{(-6) \cdot 6}{3} + (-5) = -16 + 12 - 5 = -9$$

Assim, tem-se a forma reduzida da equação dada por  $y^3 - 6y - 9 = 0$

Aplicando a Fórmula de Cardano, segue que:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ y &= \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} \\ y &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} \\ y &= \sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{7}{2}} \\ y &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\ y &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Como  $x = y - \frac{b}{3}$ , logo  $x = 3 - \frac{(-6)}{3} \implies x = 3 + 2 \implies x = 5$

Portanto, conforme pedido  $x = 5$  é uma das raízes da equação.

Uma outra maneira determinar uma das raízes da equação é usando o Teorema das Raízes Racionais, que é o método utilizado nos livros didáticos do Ensino Médio.

Na aplicação do teorema, devemos analisar os possíveis valores para as raízes na forma  $\frac{m}{n}$ , onde  $m$  seja divisor de  $-5$  e  $n$  seja divisor de  $1$ .

Sendo assim, os possíveis candidatos as raízes racionais são  $\frac{m}{n} = \{-1; 1; -5; 5\}$

Testando esses valores na equação verificamos  $x = 5$  é raiz da equação, pois  $5^3 - 6.5^2 + 6.5 - 5 = 0$

### EXERCÍCIO RESOLVIDO 3

Resolva a equação  $x^3 - 3x - 2 = 0$  pela fórmula de Cardano.

Solução comentada:

Fazendo a comparação da equação dada com a equação reduzida  $x^3 + px + q = 0$ , temos:

$p = -3$  e  $q = -2$  e sendo  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ , logo

$$D = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 1 - 1 = 0$$

Sendo  $D = 0$ , a equação admite três raízes reais, sendo duas ou três iguais

Aplicando a fórmula resolvente de Cardano, segue:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \\ x &= \sqrt[3]{-\left(\frac{-2}{2}\right) + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-2}{2}\right) - \sqrt{0}} \\ x &= \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} \\ x &= 1 + 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sendo  $x = 2$  uma raiz da equação  $x^3 - 3x - 2 = 0$ , podemos dividi-la por  $(x - 2)$ , que resulta em  $x^3 + 2x + 1$ , donde

$$x^3 - 3x - 2 = (x - 2) \cdot (x^3 + 2x + 1) = (x - 2) \cdot (x + 1)^2 = 0$$

Pelo anulamento do produto, tem-se que

$$(x + 1)^2 = 0 \implies x = -1$$

Como já era previsto, devido  $D = 0$ , a equação  $x^3 - 3x - 2 = 0$ , admite  $x = 2$  e  $x = -1$  como raízes, sendo  $x = -1$  de multiplicidade 2.

### EXERCÍCIO PROPOSTO 1 (23)

(UFMS 2021) Considere um sólido composto por 6 faces, sendo duas a duas paralelas e iguais. Ele tem seu volume igual  $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$ . O valor da soma das arestas desse sólido é igual a:

a)  $(x + 2)$ .

b)  $2(x + 2)$ .

c)  $3(x + 2)$ .

d)  $6(x + 2)$ .

e)  $12(x + 2)$ .

Proposta de solução:

Vamos utilizar a Fórmula de Cardano para encontrar as raízes da equação  $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$

Primeiramente, devemos transformar a equação para a forma reduzida  $y^3 + py + q = 0$ .

Sendo  $x = y - \frac{b}{3}$ , temos:

$$p = c - \frac{b^2}{3} = 23 - \frac{9^2}{3} = 23 - 27 = -4$$

$$q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = \frac{2 \cdot 9^3}{27} - \frac{9 \cdot 6}{3} + 15 = 54 - 69 + 15 = 0$$

Assim, tem-se a forma reduzida da equação dada por  $y^3 - 4y + 0 = 0$

$$\text{Sendo } D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$$

Note que como  $D < 0$ , a equação admite três raízes reais e distintas.

Aplicando a Fórmula de Cardano, segue que:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$y = \sqrt[3]{0 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{0 - \sqrt{D}}$$

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\sqrt{D}}$$

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{D}} - \sqrt[3]{\sqrt{D}} = 0$$

Como  $x = y - \frac{b}{3}$ , logo  $x = 0 - \frac{9}{3} \implies x = -3$ .

Portanto, podemos escrever o volume do sólido por  $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = (x + 3) \cdot (x^2 + 6x + 5) = (x + 3) \cdot (x + 1) \cdot (x + 5)$

Cujo o valor da soma das suas arestas vale

$$4(x + 1 + x + 3 + x + 5) = 4(3x + 9) = 12(x + 3)$$

Portanto, não há alternativa correta, e por isso, a questão foi anulada.

Note que, neste caso, a equação  $y^3 - 4y + 0 = 0$ , poderia ser facilmente resolvida por

$$y^3 - 4y = 0$$



$$y.(y^2 - 4) = y.(y - 2).(y + 2) = 0$$

Portanto  $y = 0$  ou  $y = 2$  ou  $y = -2$ .

Como  $x = y - \frac{b}{3} \implies x = y - \frac{9}{3} \implies x = y - 3$ , logo as raízes são:

$$x = 0 - 3 = -3$$

$$x = 2 - 3 = -1$$

$$x = -2 - 3 = -5$$

O que chegaria na mesma expressão para o volume do sólido, dada por:

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = (x + 3) \cdot (x + 1) \cdot (x + 5).$$

## EXERCÍCIO PROPOSTO 2 (11)

(Lima (1991, p.21) Resolva a equação  $x^3 - 6x - 4 = 0$ .

Proposta de solução

Por comparação da equação dada com a equação reduzida  $x^3 + px + q = 0$ , temos:  $p = -6$  e  $q = -4$  e sendo  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ , logo

$$D = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = -4 < 0$$

Sendo  $D < 0$ , logo a equação admite três raízes reais e distintas.

Aplicando a Fórmula de Cardano, segue que:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{-4}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} \tag{7.7}$$

Apesar de (7.7) parecer um número complexo, não é, pois sendo  $D < 0$ , a equação admite três raízes reais e distintas.

Portanto a resolução desta equação pelo método de Cardano nos leva a uma manipulação dos números complexos  $\sqrt[3]{2 + 2i}$  e  $\sqrt[3]{2 - 2i}$ , que pode ser resolvido utilizando a fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , o que foge do objetivo desse trabalho.

Por outro lado, utilizando o Teorema das Raízes Racionais, a partir da inspeção verificamos que  $-2$ , é uma raiz da equação. Assim, fazendo a divisão  $(x^3 - 6x - 4) \div (x + 2)$ ,

obtemos  $x^2 - 2x - 2$ , cuja solução da equação  $x^2 - 2x - 2 = 0$ , admite como raízes  $1 + \sqrt{3}$  e  $1 - \sqrt{3}$ .

Portanto,  $-2$ ,  $1 + \sqrt{3}$  e  $1 - \sqrt{3}$  são as raízes da equação  $x^3 - 6x - 4 = 0$ .

### EXERCÍCIO PROPOSTO 3 (16)

(UEPG-PSS 3 2020) Sabendo que o número real  $m$  e os números complexos  $z_1$  e  $z_2$  são as soluções da equação  $x^3 + x + 10 = 0$ , assinale o que for correto.

- 01)  $z_1 \cdot z_2 = 5$ .  
 02)  $z_1 + z_2 = 2$ .  
 04)  $m + z_1 + z_2$  é um número positivo.  
 08)  $(z_1 \cdot z_2 - i)^2$  é um número imaginário puro.

Proposta de solução:

Vamos utilizar a Fórmula de Cardano para auxiliar a encontrar as raízes da equação  $x^3 + x + 10 = 0$ .

Comparando a equação dada com a equação reduzida  $x^3 + px + q = 0$ , temos  $p = 1$  e  $q = 10$  e sendo  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ , logo

$$D = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 25 + \left(\frac{1}{27}\right) = \frac{676}{27} > 0$$

Note que  $D > 0$ , o que já era esperado, pois de acordo com o enunciado da questão a equação admite uma raiz real e duas complexas.

Aplicando a fórmula resolutive de Cardano, segue:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x = \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}} \quad (7.8)$$

Observe que não é trivial a resolução de (7.8) que representa uma soma de raízes cúbicas.

No entanto, como  $D > 0$  e coeficientes da equação são inteiros, podemos provar que  $\sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}}$  é uma raiz inteira da equação. Para isso vamos elevar (7.8) ao cubo.

$$x^3 = \left( \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}} \right)^3$$

$$x^3 = -5 + \sqrt{\frac{676}{27}} + (-5) - \sqrt{\frac{676}{27}} +$$

$$3. \left( \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} \right) \left( \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}} \right) \cdot \left( \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}} \right)$$

Desenvolvendo e simplificando, quando possível, os radicais obtemos:

$$x^3 = -10 + \underbrace{\left( \sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}} \right)}_{x'} \quad (7.9)$$

Por hipótese, a equação  $x^3 + x + 10 = 0$ , pode ser manipulada de tal maneira que,

$$x^3 + x + 10 = 0$$

$$x^3 = -10 - x \quad (7.10)$$

Comparando as equações (7.9) e (7.10), concluímos que  $x = x'$ .

Como  $x = -2$ , por inspeção verifica a equação (7.10),

$$x^3 + x + 10 = (-2)^3 + (-2) + 10 = -8 - 2 + 10 = 0.$$

Desse modo,  $x = x' = -2$ , portanto,  $\sqrt[3]{-5 + \sqrt{\frac{676}{27}}} + \sqrt[3]{-5 - \sqrt{\frac{676}{27}}} = -2$ , que é inteiro.

Para a conclusão do exercício basta dividir  $(x^3 + x + 10)$  por  $(x + 2)$  que obtemos

$$x^3 + x + 10 = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 5) = 0$$

Pelo anulamento do produto, tem-se que  $(x^2 - 2x + 5) = 0$

Cujas raízes são  $x = 1 - 2i$  e  $x = 1 + 2i$ .

Assim,  $m = -2$ ,  $z_1 = 1 - 2i$  e  $z_2 = 1 + 2i$

Deste modo, fazendo a análise das afirmativas, podemos julgá-las

01)  $z_1 \cdot z_2 = 5$ .

Verdadeira, pois  $(1 - 2i) \cdot (1 + 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4 \cdot (-1) = 5$

02)  $z_1 + z_2 = 2$ .

Verdadeira, pois  $(1 - 2i) + (1 + 2i) = 2$

04)  $m + z_1 + z_2$  é um número positivo.

Falsa, pois  $-2 + 2 = 0$

08)  $(z_1 \cdot z_2 - i)^2$  é um número imaginário puro.

Falsa, pois  $(5 - i)^2 = 25 - 10i + i^2 = 24 - 10i$

Observação: O uso da fórmula de Cardano na resolução do exercício acima, é um método alternativo, apesar de trabalhoso, de grande valia para discutir e encontrar os valores das raízes da equação. No entanto, uma outra solução do exercício, é a utilização da relação de Girard, que de forma rápida e objetiva, chega-se na resposta pedida, porém sem encontrar as raízes.

Outra solução:

[01] Verdadeira. Por inspeção,  $x = -2$  é raiz. Logo, pelas relações de Girard:

$$-2 \cdot z_1 \cdot z_2 = -10 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 5$$

[02] Verdadeira. Da soma das raízes, obtemos:

$$-2 + z_1 + z_2 = -0/1 \Rightarrow z_1 + z_2 = 2$$

[04] Falsa. Do item anterior:

$$m + z_1 + z_2 = 0$$

[08] Falsa. Como  $z_1 \cdot z_2 = 5$ , temos:

$$(5 - i)^2 = 25 - 10i + i^2 = 24 - 10i$$

## 8 CONCLUSÃO

A proposta inicial deste trabalho era a inserção e utilização da fórmula de Cardano como instrumento único, para a resolução de equações cúbicas, ao lecionar este conteúdo para o ensino médio. Porém, durante diferentes análises, esta metodologia se mostrou deveras extensa e não trivial para determinados casos. O que observamos em situações como estas abaixo:

1. Para  $D < 0$  e  $q \neq 0$ , onde as três raízes são reais e distintas, a partir da fórmula de Cardano não conseguimos chegar ao resultado final sendo necessário a utilização de operações com números complexos.
2. Para  $D > 0$ , onde uma raiz é real e duas são complexas, sendo os coeficientes da equação inteiros, a expressão da fórmula de Cardano  $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$  é uma raiz inteira da equação, o que não é muito fácil de provar quando a soma dessas raízes cúbicas não são parcelas com raízes cúbicas exatas.

Mediante a tais análises, agregamos outras metodologias para facilitar a resolução de equações que se enquadrem nas exceções cuja fórmula de Cardano demonstra-se menos adequada.

A fim de entendermos com profundidade a fórmula de Cardano, elaboramos um breve histórico, tendo em vista entender que na história dos conteúdos matemáticos considerados complexos foram desenvolvidos e construídos através da continuidade dos saberes de grandes cientistas. O que demonstra claramente que a matemática não pode ser considerada uma ciência pronta, visto que está em constante aperfeiçoamento.

Tendo como objetivo a ampliação e aprofundamento dos estudos sobre equações cúbicas elaboramos uma sequência didática sobre este conteúdo. Reconhecendo o 3º ano do ensino médio como nosso público alvo, adotamos uma metodologia voltada para a construção do conhecimento, que acreditamos ser eficiente para os educadores utilizarem em sala.

Sendo assim, temos como produto final desta dissertação a apresentação de uma variedade de técnicas para resolução de equações polinomiais de terceiro grau, a fim de ampliarmos as possibilidades de sua execução. Por meio deste material produzido, no formato de sequência didática, acredita-se que este trabalho possa ser amplamente utilizado como instrumento de aperfeiçoamento de professores, que queiram acrescentar conteúdo e/ou aprimorar suas aulas, e alunos de ensino médio e superior que desejam ampliar seus conhecimentos.

## REFERÊNCIAS

- 1 BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra**. Ed. Atual, São Paulo, 1992.
- 2 BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. 154p. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC\\_EnsinoMedio\\_embaixa\\_site\\_110518.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf) Acesso em: 17 jul. 2022.
- 3 CASTRO, R. S. **Concepções de matemática de professores em formação: outro olhar sobre o fazer matemático**. Tese (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 138p, 2009.
- 4 COPESE/UFJF. **Prova do Programa de Ingresso Seletivo Misto III da Universidade Federal de Juiz de Fora de 2021** Disponível em: [https://www2.ufjf.br/copese/wp-content/uploads/sites/42/2021/02/PROVA-PISM-2021-DIA\\_1-M%C3%93DULO\\_III-EXATAS.pdf](https://www2.ufjf.br/copese/wp-content/uploads/sites/42/2021/02/PROVA-PISM-2021-DIA_1-M%C3%93DULO_III-EXATAS.pdf) Acesso em: agosto 2022.
- 5 COPESE/UFJF. **Prova do Programa de Ingresso Seletivo Misto III da Universidade Federal de Juiz de Fora de 2022** Disponível em: [https://www2.ufjf.br/copese/wp-content/uploads/sites/42/2022/02/PROVA-PISM-2022-DIA\\_1-M%C3%93DULO\\_III-Exatas.pdf](https://www2.ufjf.br/copese/wp-content/uploads/sites/42/2022/02/PROVA-PISM-2022-DIA_1-M%C3%93DULO_III-Exatas.pdf) Acesso em: agosto 2022.
- 6 DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações**. Vol.3. 3ªed. São Paulo. Editora Ática, 2016. 396p.
- 7 D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1998
- 8 GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4ªed. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2010.p.9-134.
- 9 JUNIOR, J. V. F. **A fórmula de cardano como ferramenta auxiliar na resolução de equações cúbicas**. Tese (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal do Pará, Pará, 97p, 2019.
- 10 LIMA, E. L. **A Equação do 3º Grau**. Revista Matemática Universitária, v. 5, p. 9-23, 1987.
- 11 LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- 12 MONTEIRO, M. S. **História dos Números Complexos. Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001**. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/mat1512/complexos.pdf> Acesso em: maio 2022.
- 13 MATOS, E. B. **Estudo das equações do terceiro grau no ensino médio a partir da equação de Van der Waals**. Tese (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal do Santa Maria, Rio Grande do Sul, 71p, 2014.

- 14 MORO, M. de O. *Um estudo sobre polinômios. Trabalho* de Conclusão de Curso de Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina, 48p, 2000.
- 15 PROENÇA, M. V. dos S. *História da Arte*. 17. ed. São Paulo: Ática, 2009
- 16 PSS/UEPG. *Prova do Processo Seletivo Seriado III da Universidade Estadual de Ponta Grossa de 2020* Disponível em:  
[https://cps.uepg.br/pss/documentos/2020/provas/PSS\\_III.pdf](https://cps.uepg.br/pss/documentos/2020/provas/PSS_III.pdf) Acesso em: agosto 2022
- 17 SANTOS, S. R. dos. *As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus: Sua História e Suas Soluções*. 2013. 78p. Trabalho de Conclusão de Curso. Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT. -Universidade Federal de Sergipe, Sergipe. 2013
- 18 SEVECENKO, N. O Renascimento - Coleção Discutindo a História. 1 ed. Atual Editora, 2004
- 19 SILVA, W. P. *Proposta de sequência didática para o ensino de equação do 3o grau com utilização da resolução de problemas* 2018. 56p. Trabalho de Conclusão de Curso. Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT. -Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-Bahia. 2013
- 20 STEIN, J. D. *Como a Matemática explica o mundo: o poder dos números no cotidiano*. Rio de Janeiro: Campus, 2008.
- 21 STEWART, I. *Uma história da simetria na Matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.
- 22 TARTAGLIA, N. *Perguntas e invenções diversas de Nicolo Tartaglia* . a spese de Tartaglis, 1554.
- 23 UFMS. *Prova do Processo Seletivo Vestibular da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul de 2021* Disponível em:  
<https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes/8541fb71-f0>  
Acesso em: agosto 2022.
- 24 VALE, A. F. A. dos *As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau*. Tese (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Semiárido, Mossoró, 76p, 2013.