



PROFMAT

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ADILTON ALVES TEIXEIRA

**AFINAL, QUAL A RELAÇÃO ENTRE O CONCRETO E O ABSTRATO NO
PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO?**

Vitória da Conquista - BA

2022

ADILTON ALVES TEIXEIRA

**AFINAL, QUAL A RELAÇÃO ENTRE O CONCRETO E O ABSTRATO NO
PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO?**

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade

Vitória da Conquista - BA

2023

T264a Teixeira, Adilton Alves.

Afinal, qual a relação entre o concreto e o abstrato no processo de construção do conhecimento matemático?. / Adilton Alves Teixeira, 2023.

152f. il.

Orientador (a): Dr. Roque Mendes Prado Trindade.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2023.

Inclui referências. 139 - 146.

1. Ensino de matemática. 2. Abstrato e concreto - Objetos matemáticos. 3. Abstrações na matemática. 4. Matemática. I. Trindade, Roque Mendes Prado. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - Ba. III. T.

CDD: 510

Adilton Alves Teixeira

Afinal, qual a relação entre o concreto e o abstrato no processo de construção do conhecimento matemático?

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Roque Merdes Prado Trindade - UESB



Prof.ª Dr.ª Alexandra Oliveira Andrade - UESB



Prof.ª Dr.ª Ana Karine Dias Caires Brandão - IFBA

Vitória da Conquista – Ba, 28 de Abril de 2023

*Aos meus pais, Ilson Benevides Teixeira e
Ana Alves Teixeira, razões do meu existir. Dedico essa
conquista em forma de amor
e gratidão.*

AGRADECIMENTOS

Quero saber como Deus criou este mundo. Não estou interessado nesse ou naquele fenômeno. Quero saber como Ele pensa. O resto é detalhe. O aspecto mais incompreensível do mundo é o fato de ele ser compreensível.

Albert Einstein

Não é fácil e, na maioria das vezes, é injusto externar sentimentos de qualquer natureza por meio de palavras, pois nem sempre elas conseguem expressar a verdadeira intensidade desses sentimentos. E mesmo que dissesse um milhão de vezes “obrigado” não seria suficiente, assim como na Matemática, evidências numéricas não são suficientes para transformar uma conjectura em um teorema. Entretanto, seria ainda mais injusto deixar de expressá-los. Por isso, vou tentar, dentro de minhas limitações, demonstrar o meu eterno agradecimento a todas as pessoas que, de alguma forma, participaram da concretização deste trabalho.

Agradeço imensamente aos meus pais, Ilson Benevides Teixeira e Ana Alves Teixeira, que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com respeito e dignidade, me iluminando nos caminhos escuros para que trilhasse sempre na direção certa. Esses indivíduos renunciaram muitos de seus sonhos para que eu pudesse realizar os meus. A eles e aos demais membros de minha família, eu digo “muito obrigado!”.

Meu sincero agradecimento ao Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade, pela oportunidade de sua orientação, pelo apoio recebido desde o primeiro dia em que o procurei para solicitar ajuda. Obrigado pela confiança depositada em mim! Sem a sua colaboração, este trabalho não seria possível.

Agradeço aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade do Sudoeste da Bahia-UESB.

Agradeço aos colegas de turma do mestrado, pela amizade e companheirismo, pelo espaço que deixaram para que pudéssemos discutir (discutir literalmente!) e crescer juntos. Essas pessoas contribuíram, de diversas maneiras, para que eu me tornasse um ser humano melhor a cada dia.

Meu eterno agradecimento aos voluntários que dispuseram a colaborar com a pesquisa respondendo ao questionário.

CONVERSA FIADA

*Eu gosto de fazer poemas de um único verso.
Até mesmo de uma única palavra
como quando escrevo o teu nome no meio da página
e fico pensando mais ou menos em ti
porque penso, também, em tantas coisas... Em ninhos.
Não sei por que vazios em meio de uma estrada
deserta...*

*Penso em súbitos cometas anunciadores de um Mundo Novo
e - imagina! -
Penso em meus primeiros exercícios de álgebra,
eu que tanto, tanto os odiava...*

*Eu que naquele tempo vivia dopando-me em cores, flores,
amores,
nos olhos - flores das meninhas - isso mesmo! O mundo
era um livro de figuras.*

*Oh! Os meus paladinos, as minhas princesas prisioneiras
em suas altas torres,
os meus dragões
horrendos
mas tão coloridos...*

*E - já então - o trovoar dos versos de Camões:
"Que o menor mal de todos seja a morte!"
Ah, prometo àqueles meus professores desiludidos
que na próxima vida eu vou ser um grande matemático
porque a matemática é o único pensamento sem dor..
Prometo, prometo, sim... Estou mentindo? Estou!
Tão bom morrer de amor! E continuar vivendo...*

Mário Quintana

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia;

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional;

PISA – Programme for International Student Assessment;

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira;

CF – Constituição Federal de 1988;

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais;

LDB – Lei de Diretrizes e Bases;

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais;

ENEM– Exame Nacional do Ensino Médio;

ABdC – Associação Brasileira de Currículo;

ANPEd – Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação;

UNDIME – União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação.

MEC – Ministério da Educação

CNE – Conselho Nacional de Educação

ENCCEJA– Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

RESUMO

Este trabalho analisa como o concreto e o abstrato são concebidos nas práticas de ensino de Matemática e as implicações da relação desses termos no processo de ensino e aprendizagem. O cerne da reflexão está embasado na relação entre o abstrato e o concreto no processo de compreensão dos objetos matemáticos. Para tanto, são considerados elementos da Filosofia da Matemática, da História da Matemática e da Epistemologia, com o propósito de compreender como se relacionam as concepções de concreto e de abstrato e as práticas docentes. A pesquisa foi desenvolvida tomando como base alguns estudos teóricos existentes sobre esse tema e mediante a aplicação de um questionário semiaberto a professores de Matemática. A maneira como o senso comum pedagógico concebe os termos “concreto” e “abstrato” no ensino da Matemática baseia-se numa compreensão superficial desses termos que não leva em consideração a dinamicidade e a complexidade do processo de elaboração do conhecimento matemático. Os objetos matemáticos são abstratos por natureza, isto é, são objetos que não possuem existência física e, por este motivo, não são acessíveis de imediato aos sentidos. Assim, ao tratar um objeto matemático é necessário fazer uso de representações semióticas. O caráter abstrato da Matemática levou muitos professores a advogarem seu ensino de modo mais contextualizado, mais próximo ao cotidiano do estudante. Os documentos oficiais também reforçam a necessidade de um ensino mais contextualizado, tanto que a Constituição Federal de 1988 deu um impulso significativo nessa direção. Além disso, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, as diretrizes do Exame Nacional do Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular também apontam para uma educação mais factível à realidade do aluno, enfatizando a interdisciplinaridade. Porém, as abstrações que o indivíduo realiza são imprescindíveis no processo de construção do conhecimento, seja ele qual for. As abstrações situam no interior do processo e, portanto, não constituem ponto de partida e nem ponto de chegada. A concretude de um objeto matemático não depende de sua acessibilidade por meio dos sentidos ou de sua materialidade, ela depende sobretudo de uma mediação entre o concreto e o abstrato. Estudar Matemática é um trabalho cansativo, seu aprendizado requer esforço e dedicação, assim como qualquer outra disciplina do currículo escolar.

Palavras-chave: Abstrato e concreto. Ensino de Matemática. Objetos matemáticos. Documentos oficiais. Cotidiano. Abstrações.

ABSTRACT

This work analyzes how the concrete and the abstract are conceived in Mathematics teaching practices and the implications of the relationship between these terms in the teaching and learning process. The core of the reflection is based on the relationship between the abstract and the concrete in the process of understanding mathematical objects. Therefore, elements of the Philosophy of Mathematics, the History of Mathematics and Epistemology are considered, with the purpose of understanding how the concepts of concrete and abstract and teaching practices are related. The research was developed based on some existing theoretical studies on this topic and through the application of a semi-open questionnaire to Mathematics teachers. The way in which pedagogical common sense conceives the terms “concrete” and “abstract” in the teaching of Mathematics is based on a superficial understanding of these terms that does not take into account the dynamics and complexity of the process of elaboration of mathematical knowledge. Mathematical objects are abstract by nature, i.e, they are objects that have no physical existence and, for this reason, are not immediately accessible to the senses. Therefore, when dealing with a mathematical object, it is necessary to make use of semiotic representations. The abstract character of Mathematics has led many teachers to advocate its teaching in a more contextualized way, closer to the student's daily life. The official documents also reinforce the need for a more contextualized teaching, so much so that the Federal Constitution of 1988 gave a significant impetus in this direction. In addition, the National Education Guidelines and Bases Law, the National High School Exam guidelines and the National Curricular Common Base also point to a more feasible education for the student's reality, emphasizing interdisciplinary. However, the abstractions that the individual performs are essential in the process of knowledge construction, whatever it may be. The abstractions are situated within the process and, therefore, do not constitute a starting point or an arrival point. The concreteness of a mathematical object does not depend on its accessibility through the senses or its materiality, it depends above all on a mediation between the concrete and the abstract. Studying Mathematics is a tiring job, its learning requires effort and dedication, just like any other subject in the school curriculum.

Keywords: Abstract and concrete. Teaching Mathematics. Mathematical objects. Official documents. Daily. Abstractions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
1 MATERIAIS MANIPULATIVOS, PIAGET E ABSTRAÇÃO	14
1.1 Sobre o uso de materiais manipuláveis.....	14
1.2 Conhecimento e cotidianidade.....	16
1.3 A construção de significados	19
1.4 Piaget	23
1.4.1 Acomodação na Matemática	26
1.5 A abstração na Matemática	28
1.5.1 As preocupações estéticas dos matemáticos gregos.....	29
2 TRABALHO EDUCATIVO E AVALIAÇÃO EXTERNA.....	32
2.1 O trabalho educativo	32
2.2 O ato de contextualizar	33
2.2.1 Generalização	33
2.2.2 Síntese.....	35
2.2.3 As representações	35
2.2.4 A linguagem da Matemática.....	39
2.3 Os objetos da Matemática.....	43
2.4 O que é o PISA?.....	45
3 A EDUCAÇÃO BRASILEIRA	52
3.1 Dispositivos legais que regem a educação brasileira.....	52
3.1.1 A revolução trazida pela Constituição Federal de 1988	52
3.1.2 A Lei Magna da educação brasileira.....	57
3.2 O Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.....	59
3.3 A Base Nacional Comum Curricular - BNCC	67
3.3.1 Competências	69
3.3.2 Nem tudo é unanimidade.....	75
4 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO, A PRÁTICA PEDAGÓGICA E O PROCESSO DE ABSTRAÇÃO.....	80
4.1 Sobre a contextualização	80
4.2 A natureza dos objetos matemáticos	83
4.3 Como se alcança o conhecimento?	90
4.4 A concepção sobre o que é Matemática e a prática pedagógica	93
4.5 “O que é Matemática?”	99
4.6 O concreto e o abstrato	107

5	RESULTADOS DA PESQUISA, INTERDISCIPLINARIDADE E CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADO.....	117
5.1	Interdisciplinaridade	123
5.2	A construção de narrativas fabulosas	129
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
	REFERÊNCIAS	139
	ANEXOS	147
	TCLE	147
	QUESTIONÁRIO.....	149

INTRODUÇÃO

*... os contextos, tal como as línguas, podem ser barreiras.
Podem mesmo ser prisões.*

Karl R. Popper

As dificuldades encontradas por estudantes e professores no processo de construção do conhecimento matemático têm sido tema recorrente em pesquisas que tratam do ensino da Matemática. Nesse sentido, diversos aspectos têm merecido atenção de matemáticos, filósofos e educadores, tais como a relação entre a Matemática e a realidade material e a relação entre o concreto e o abstrato, que ganharam lugar de destaque nesse cenário. Porém, esse debate não é necessariamente novo, desde a Grécia Antiga, Platão acreditava que as formas matemáticas não eram idealizações de objetos empíricos, mas elas preexistiam independentemente deles e a eles serviam de modelos.

Os elementos que caracterizam a Matemática concreta, conhecida pelo senso comum, referem-se basicamente à atividade do sujeito no mundo, às situações nas quais o homem pode atuar de posse deste rico instrumento de mediação cultural, a Matemática. Todavia, o conhecimento matemático não procede da abstração das características do objeto, e sim das características cuja ação do sujeito introduz aos objetos. Aprender Matemática não se limita a resolver problemas da vida cotidiana.

Na Língua Portuguesa, Ferreira (2005, p. 229) define o concreto como “algo que existe em forma material; de consistência mais ou menos sólida; claro, definido”. Já o abstrato é, para ele, o “que expressa uma qualidade ou característica de algo que não pode ser visto” (Ferreira, 2005, p. 229). Na Língua Inglesa, o dicionário *The Oxford Desk Dictionary and Thesaurus* apresenta um conceito mais simples para o abstrato: aquilo “que existe no pensamento ou na teoria e não na matéria ou na prática”; enquanto o concreto é definido como “algo real; objeto físico”.

É muito comum conceber os termos “concreto” e “abstrato” com significados parecidos com as definições atribuídas pelos dicionários citadas anteriormente e impregnadas de conotações positivistas. Concreto é usado para referenciar a realidade, as coisas palpáveis e perceptíveis, aquilo que é ‘acessível’ e material; já o conceito de abstrato é entendido como fruto puro da imaginação, desligado da realidade, distante, cuja compreensão é difícil. Resulta daí o motivo pelo qual a Matemática é tomada como exemplo máximo do ‘abstracionismo’, dado que, como regra, ela não estuda o mundo real, mas sim modelos de abstrações do mundo

real.

A palavra abstração vem do verbo latino *abstrahere* (abs + trahere), que significa retirar, extrair, separar, apartar. Segundo Abbagnano (1970), a abstração é “A operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo...”. Por sua vez, o Dicionário Aurélio define como o “ato de separar mentalmente um ou mais elementos de uma totalidade complexa (coisa, representação, fato), os quais só mentalmente podem subsistir fora dessa totalidade”.

Já “contextuação” é a forma nominalizada do verbo contextualizar, que, etimologicamente, significa enraizar uma referência em um texto do qual fora extraída, e longe desse perde parte substancial de seu significado. Portanto, o ato de referir-se ao contexto é expresso pelo verbo contextualizar, que dá origem à palavra contextuação, embora o vocábulo contextualização seja a forma mais usada.

O termo “contexto” tem sua origem associada à palavra *contextus*, derivada do verbo latino *contextere*, que significa entrelaçar, reunir, tecer, compor. Na língua portuguesa, o dicionário Aurélio define o contexto como “o que constitui no seu todo”. Por outro lado, Ximenes diz que é o “conjunto de um texto, que esclarece suas partes; conjunto de circunstâncias que cercam e esclarecem um fato”. Assim, o termo contexto pode ser entendido pelo seguinte:

- Interpretação de circunstâncias que acompanham um fato ou uma situação;
- Conjunto de palavras, frases ou texto que precede ou se segue a determinada palavra, frase ou texto e que contribuem para o seu significado;
- Encadeamento do discurso.

No que tange ao ensino de Matemática, é comum o discurso de que essa disciplina “tem sido ensinada de maneira muito abstrata, distanciada da vivência cotidiana do aluno. É preciso torná-la mais concreta, mais próxima dos problemas que a realidade apresenta”. Talvez tal pensamento seja fomentado pelo baixo desempenho dos alunos, observado em avaliações externas e, de fato, os resultados apontam para um baixo aprendizado nessa área. Há, portanto, no discurso transcrito acima, certa concepção de abstrato e de concreto: o primeiro parece ser entendido como algo difícil de ser compreendido por não ter uma ligação direta e imediata com a realidade; enquanto o segundo parece ser concebido como o imediato, aquilo que é dado pela experiência sensível, seja ela externa ou interna, isto é, o concreto é pensado como a apreensão do que é efetivamente real ou determinado em sua totalidade.

Por isso, este trabalho objetiva analisar como o abstrato e o concreto são concebidos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A forma como esses dois termos são

utilizados nas práticas de ensino está intimamente associada com a concepção que se tem de conhecimento. De acordo com Fossa (2014), Machado (2011; 2013) e Silva (1999), o modo como o conhecimento matemático é concebido interfere diretamente na maneira que um indivíduo lida com esse conhecimento. No entanto, a compreensão que o ser humano tem sobre Educação, sobre o que é ensinar e aprender, sobre o que é Matemática está sujeita à mudança.

Inicialmente, a pesquisa buscou identificar, em estudos teóricos já realizados sobre a temática abordada, quais são as concepções de concreto e de abstrato adotadas no ensino de Matemática e, devido às especificidades do conhecimento matemático, fez-se necessário também buscar informações sobre a natureza dos objetos matemáticos na literatura. Para Fossa (2014) e D'Amore (2004), tais objetos não possuem existência física, são estruturas pensadas na mente e, portanto, não são acessíveis aos sentidos. Por não ser possível acessá-los através da percepção, Duval (2009) defende o seu acesso por meio de uma atividade semiótica.

Além, disso foi aplicado um questionário semiaberto a professores de Matemática, buscando coletar informações junto a eles sobre as concepções de concreto e abstrato utilizadas nas práticas de ensino. O questionário buscou também saber como esses professores avaliam o uso de materiais manipulativos nas aulas de Matemática, qual a relevância do conhecimento cotidiano na construção do conhecimento matemático e qual o nível conhecimento deles a respeito de alguns documentos oficiais, como a matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular.

Para lograr tal intento, essa dissertação foi dividida em cinco capítulos: no capítulo 1 é apresentada uma reflexão sobre o ensino de Matemática e são abordados aspectos como o uso de materiais manipulativos nas aulas de Matemática, os limites do cotidiano no processo de aquisição do saber elaborado e a necessidade de construir significado no processo de ensino. Também faz parte da reflexão a questão da aplicabilidade do conhecimento matemático e do caráter abstrato dos objetos de estudo dessa disciplina do currículo escolar.

O capítulo 2 traz considerações sobre o trabalho educativo, concebendo o espaço escolar como o ambiente institucionalizado de socialização do saber sistematizado; discute o ato de contextualizar, entendido como uma ação de significar, de atribuir significado, envolvendo três processos diretamente relacionados com a construção dos conceitos matemáticos: a generalização, a representação e a síntese; destaca as especificidades da linguagem matemática e encerra com algumas ponderações sobre a avaliação do PISA.

O capítulo 3 discorre sobre alguns dispositivos legais que regem a educação brasileira. Inicialmente, trata das mudanças trazidas para a educação pela Constituição Federal de 1988, entre elas, estão o clamor de professores por um ensino mais contextualizado e a educação posta

a serviço da cidadania. Inclusive, a cidadania passa a figurar como um importante contexto de ensino, afinal ela se faz também pelo direito ao acesso ao conhecimento historicamente elaborado. Esse capítulo tece algumas observações sobre os direitos fundamentais positivados na Constituição Federal, mas, certamente, são divagações fora do tema que se fizeram pertinentes no bojo da conjuntura na qual está inserida a problemática desta dissertação.

Ainda no capítulo 3, são abordados outros documentos oficiais como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, a Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular. Todos esses documentos convergem para um ensino mais contextualizado e interdisciplinar, todavia, a Base Nacional Comum Curricular é a mais recente política pública de educação no país.

O capítulo 4 aprofunda a discussão sobre as concepções de concreto e abstrato na prática pedagógica, porém tem início reflexões sobre a natureza do conhecimento matemático, as particularidades de seus objetos de estudo. E enfatiza que a compreensão do ser humano a respeito do que seja Matemática mudou ao longo do tempo. Nos dias de hoje, a definição dada por Devlin (2004), que entende a Matemática como a “ciência dos padrões”, parece bastante plausível.

No capítulo 5 são analisados os resultados obtidos da aplicação do questionário. A análise identifica certas concepções de conhecimento matemático presentes nas práticas de ensino, bem como a interdisciplinaridade e a intradisciplinaridade são indicadas como alternativas para a atribuição de significados. Nesse sentido, a construção de narrativas revela-se uma ferramenta fundamental no processo de significação.

A dissertação encerra-se com a apresentação das considerações finais e dos possíveis desdobramentos passíveis de investigação futura. Ao que parece, o conhecimento matemático pode ser entendido enquanto processo de abstração de abstrações.

1 MATERIAIS MANIPULATIVOS, PIAGET E ABSTRAÇÃO

O cientista não estuda a natureza por sua utilidade. Ele o faz porque se deleita com ela, e esse deleite vem de sua beleza. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la, e se não valesse a pena conhecê-la, não haveria porque viver essa vida.

Henri Poincaré

1.1 Sobre o uso de materiais manipuláveis

Há uma interpretação de que o concreto na prática pedagógica se traduz na utilização de “materiais concretos”, os quais possam ser manipulados pelos estudantes. Dessa interpretação, surge a assertiva: “eu trabalho primeiro no concreto”, a qual constitui uma reação ou mesmo uma aversão à abstração, tida como algo difícil e fora da vida real. Tenta-se, assim, associar o concreto à realidade cotidiana, dando ênfase a atividades que permitam a manipulação de materiais “concreto-pedagógicos”.

Isso parece uma versão romantizada para não ter que lidar com a assombração da abstração, isto é, um certo fetichismo como foi apontado por Araújo (1987/88) num artigo da Revista “Educação em Questão” há mais de 30 anos. É possível que esse quadro descrito por Araújo tenha sofrido mudanças com o passar dos anos. Resta saber se houve alguma mudança substancial na forma de conceber o uso de materiais manipulativos ou se ainda prevalece a crença de que a aprendizagem ocorra apenas com a manipulação desses materiais. No entanto, é fácil constatar que ainda perdura a ideia de que a dimensão do concreto se limita ao uso de objetos manipulativos. Araújo afirma:

Nos eventos sobre Educação Matemática, grande parte dos participantes busca uma metodologia para ensinar melhor Matemática; uma forma mágica e fantasmagórica de eficiência, capaz, por si só, de produzir automaticamente bons resultados. Percebe-se, em vários trabalhos apresentados, uma transparente apologia da metodologia de ensino; uma excessiva preocupação com materiais didáticos, como se fossem o “santo milagroso” o fetiche - capaz de solucionar os problemas do ensino da Matemática. (Araújo, 1987/88, p.127).

A discussão sobre o uso de materiais concretos na Matemática foi acentuada no início de 1990, entretanto, a defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas dessa disciplina surgiu no Brasil a partir de 1920. Segundo Fiorentini (1995), esse período assistiu ao surgimento de uma tendência chamada empírico-ativista no ensino da Matemática. Para o autor, nessa

tendência o aluno passou a ser considerado o centro do processo, e os métodos de ensino pautaram-se em atividades que deram ênfase à ação, à manipulação e à experimentação. Além disso, Fiorentini destaca que esse ideário empírico-ativista foi retomado, com certa relevância, na década de 70.

Com isso, esperava-se que o conhecimento matemático fosse construído através da simples manipulação dos materiais concretos pelos estudantes, e o concreto foi apresentado como solução mágica que permitia a superação das dificuldades encontradas por eles no aprendizado dos conceitos matemáticos, como observou Giardinetto (1997). No entanto, ainda hoje, em parte considerável dos casos, o material concreto utilizado é inapropriado para o fim proposto, pois não guarda relação com a lógica que permeia os conceitos matemáticos. Acontece que o conhecimento matemático possui uma lógica própria de elaboração na formação dos conceitos, cuja essência guarda certo grau de abstração, não tendo relação imediata com o cotidiano. Assim, as interconexões dos conceitos podem ser postas de lado em detrimento de uma Matemática mais ‘concreta’.

Muitos dos materiais manipuláveis utilizados no ensino da Matemática não guardam qualquer relação com os conteúdos trabalhados. Inclusive, Nacarato (2005) afirma que um dos “elementos que dificultam a aprendizagem com base em materiais manipuláveis diz respeito a sua não relação com os conceitos que estão sendo trabalhados”. Além do mais, tanto o uso inadequado quanto a pouca exploração de qualquer material manipulável muito pouco ou nada contribuiu para a aprendizagem dessa disciplina. Evidentemente, uma abordagem mais exploratória, que permita um movimento entre a experimentação e a conceitualização, poderá lograr algum êxito na aprendizagem. Contudo, a dimensão do concreto não se reduz ao uso de materiais manipuláveis, tampouco se limita à associação ao cotidiano.

Nesse sentido, Machado (2013, p. 10) afirma que a Matemática, em múltiplos contextos, é concebida “como se duas dimensões a esgotassem: a técnica, ao alcance apenas de especialistas, e a prática-utilitária, inevitável no dia a dia do cidadão comum”. É pouco provável que um professor de Matemática tenha se escapado de questionamentos como “para que serve isso?”, “qual a utilidade prática?”, “onde vou usar esse conhecimento?”, principalmente quando tal professor anuncia o estudo de um novo tema. “E por essa via, a febre do utilitarismo costuma eivar o ensino da Matemática. Tudo o que se ensina deve passar pelo crivo da aplicabilidade; nada merece nossa detida atenção se não se referir diretamente a um contexto prático, a uma situação concreta efetivamente existente” (MACHADO, 2013, p. 11). Nesse entendimento, caso um conteúdo não passe pelo crivo da aplicabilidade, não merece ser ensinado.

1.2 Conhecimento e cotidianidade

Não parece haver clamor pela aplicabilidade prática para tudo o que se estuda na escola, aparentemente, esse clamor ocorre apenas em Matemática. Porém, ao considerar justa a exigência de uma aplicação prática, pode-se, sem problemas, estendê-la também para outras disciplinas escolares, em seus diversos conteúdos. Afinal, do mesmo modo que se questiona a utilidade imediata dos objetos matemáticos, pode-se questionar, por exemplo, a utilidade prática de um poema ou de uma obra de arte. Para Machado (2013, p. 11), “a redução de qualquer tema ao nível do interesse prático-utilitário estreita os horizontes e pode conduzir a desvios...”. Aliás, o autor alerta que fixar apenas em contextos práticos, excluindo deles todos os centros de interesses dissonantes ou divergentes, condena o indivíduo à mera reprodução do status quo, a uma espécie de congelamento geral das expectativas.

Além disso, Giardinetto (1999, p. 5) acredita que algumas pesquisas realizadas no âmbito da educação Matemática “passaram a supervalorizar o conhecimento matemático cotidiano, elevando-o à condição de polo orientador para o desenvolvimento da prática pedagógica”. Para ele, essas pesquisas tentam se justificar, argumentando “que os conceitos escolares, na medida em que não apresentam uma relação imediata com a vida dos alunos, são regidos por procedimentos de ensino arbitrários, como que um amontoado de regras sem nexo que são impostas aos alunos” (GIARDINETTO, 1999, p. 4). De acordo com o mesmo autor, a proposta metodológica dessas investigações tinha “como base o pressuposto de que é o cotidiano, o locus da manifestação do conhecimento ‘natural’ e ‘genuíno’ e, portanto, ‘verdadeiro’” (GIARDINETTO, 1999, p. 5, grifos do autor).

Giardinetto (1999, p. 4) observa “que o conhecimento no cotidiano é um conhecimento fragmentário, que se manifesta segundo uma lógica conceitual própria às exigências de toda a vida cotidiana”. Essa lógica é adequada aos objetivos prático-utilitários e responde eficazmente às necessidades do cotidiano. O mesmo autor salienta que, quando a vida cotidiana está inserida numa sociedade baseada nas relações de subordinação e domínio, “essa cotidianidade acaba determinando também, no plano da atividade do indivíduo e na forma de como ele vai reproduzindo para si esse conhecimento existente, uma forma alienada dentro de condições de injustiça social” (GIARDINETTO, 1999, p. 6). Dessa maneira, na sociedade alienada, a lógica conceitual adequada aos objetivos prático-utilitários não objetiva ser prático-utilitária de uma vida cotidiana que humanize o homem, mas acaba sendo uma lógica prático-utilitária a serviço dos interesses do capital.

Destarte, o acesso ao conhecimento sistematizado, socializado pela escola, revela-se

imprescindível para a própria transformação da vida cotidiana. A realidade tornou-se tão complexa que o conhecimento elaborado por cada indivíduo para a sua vida diária já não dá conta de responder às necessidades dessa mesma vida. “A escola é a instituição resultante dessa complexidade. Isto é, tornou-se necessário elaborar um espaço próprio para transmissão e apropriação do saber historicamente acumulado” (GIARDINETTO, 1999, p. 45). Por isso, a própria vida habitual necessita de sucessivas interferências do não habitual. De acordo com Giardinetto (1999, p. 7), a supervalorização do cotidiano acaba por restringi-lo, gerando limitações no acesso ao conhecimento não cotidiano e no próprio cotidiano.

“COMO AS COISAS não se mostram ao homem diretamente tal qual são e como o homem não tem a faculdade de ver as coisas diretamente na sua essência, a humanidade faz um *detour*¹ para conhecer as coisas e a sua estrutura” (KOSIK, 1976, p. 27, grifos do autor). O homem precisa fazer um esforço (uma investigação) e um desvio (um *detour*, um distanciamento) para compreender as coisas como realmente são. Desse modo, as formas mais complexas de pensamento transformaram-se em instrumentos imprescindíveis para possibilitar ao indivíduo compreender a sua realidade. No cotidiano, o conhecimento é regido por raciocínios eficazes para dar respostas às tarefas diárias. “Os limites dessa eficácia não são adequados a raciocínios complexos necessários para apropriação do saber historicamente acumulado, via escola” (GIARDINETTO, 1999, p. 10). Ora, “a *práxis* utilitária imediata e o senso comum a ela correspondente colocam o homem em condições de orientar-se no mundo, de familiarizar-se com as coisas e manejá-las, mas não proporcionam a *compreensão* das coisas e da realidade” (KOSIK, 1976, p. 27, grifo do autor).

Conforme Kosik (1976), os esquemas de comportamento e de conhecimento presentes na estrutura da vida cotidiana geram, no sujeito, a interpretação imediata do real segundo uma concepção aparente e superficial. “As formas imediatas de manifestação do real determinam, no indivíduo, a pretensa ideia de que essa realidade imediata é a realidade mesma” (GIARDINETTO, 1999, p. 33, grifo do autor). Kosik (1976, p. 15) nomeia de *pseudoconcreticidade* “o complexo dos fenômenos que povoam o ambiente cotidiano e a atmosfera comum da vida humana, que, com a sua regularidade, imediatismo e evidência, penetram na consciência dos indivíduos agentes, assumindo um aspecto independente e natural”. Para o mesmo autor, o mundo da pseudoconcreticidade “é um claro-escuro de verdade engano. O seu elemento próprio é o duplo sentido. O fenômeno indica a essência e, ao mesmo tempo, a esconde”. (KOSIK, 1976, p. 15). Como disse Marx, numa carta a Engels, datada de

¹ Palavra em Francês cujo significado em Português é “desvio”.

27 de julho de 1867: “... Se os homens apreendessem imediatamente as conexões, para que serviria a ciência?”. “Toda ciência seria supérflua se a forma fenomênica e a essência coincidissem diretamente” (Marx, *O Capital*, III, séc. VII, cap. XLVIII, III).

“A *práxis* utilitária cotidiana cria ‘o pensamento comum’ - em que são captados tanto a familiaridade com as coisas e o aspecto superficial das coisas quanto a técnica de tratamento das coisas - como forma de seu movimento e de sua existência” (KOSIK, 1976, p. 19, grifo do autor). Assim, o pensamento comum é a forma ideológica do agir humano de todos os dias, mas, segundo Marx, o mundo que se manifesta ao homem na *práxis* fetichizada, no tráfico e na manipulação, não é o mundo real; embora tenha a “consistência” e a “validade” do mundo real, é “o mundo da aparência”. Portanto, a representação da coisa não é uma qualidade natural dessa e da realidade, “é a projeção, na consciência do sujeito, de determinadas condições históricas *petrificadas*” (KOSIK, 1976, p. 19, grifo do autor).

Kosik (1976, p. 20) entende que o pensamento, o qual aspira conhecer adequadamente a realidade, não deve contentar-se com os esquemas abstratos dessa realidade e nem com suas representações simples e abstratas, mas deve destruir a aparente independência do mundo dos contatos imediatos de cada dia. Segundo o autor, o que confere aos fenômenos o caráter de pseudoconcreticidade não é a sua existência por si mesma, mas a independência com a qual se manifesta. Então, a destruição da pseudoconcreticidade “não nega a existência ou a objetividade daqueles fenômenos, mas destrói a sua pretensa independência, demonstrando o seu caráter mediato e apresentando, contra a sua pretensa independência, prova do seu caráter derivado” (KOSIK, 1976, p. 20). Logo, no decorrer das atividades prático-utilitárias, os indivíduos se “familiarizam” com o real, porém sua efetiva compreensão não ocorre por meio da superação de seu modo prático-utilitário, e sim pela superação do caráter fetichizador presente no modo prático-utilitário de interpretação da realidade.

Para Kosik (1976, p. 23, grifo do autor), o mundo real, apesar de manifestar-se na pseudoconcreticidade, é oculto por ela, “é o mundo da *práxis* humana. É a compreensão da realidade humano-social como unidade de produção e produto, de sujeito e objeto, de gênese e estrutura”. O mundo real é aquele no qual “as coisas, as relações e os significados são considerados como *produtos* do homem social, e o próprio homem se revela como sujeito real do mundo social” (KOSIK, 1976, p. 23, grifo do autor). Além disso, Kosik (1976) compreende o mundo da realidade como um processo, no curso do qual a humanidade e o indivíduo realizam a própria verdade e operam a humanização do homem, como o universo das relações sociais, das relações humanas. Já a pseudoconcreticidade é a realidade percebida imediatamente pelo indivíduo de forma aparente, na qual as coisas não se apresentam como realmente são, é uma

‘consciência’ falsa.

A destruição da pseudoconcreticidade, conforme Kosik (1976, p. 23), “significa que a verdade não é nem inatingível, nem alcançável de uma vez para sempre, mas que ela se faz; logo, se desenvolve e se realiza”. Destarte, essa destruição se efetua pelo seguinte: crítica revolucionária por meio da qual se pode intervir mais significativamente na realidade, coincidindo com o processo de “humanização do homem”; pensamento dialético, que procura entender a realidade em seu movimento enquanto fato contraditório de uma totalidade social; e “realizações da verdade e criação da realidade humana em um processo ontogenético, visto que, para cada indivíduo humano, o mundo da verdade é, ao mesmo tempo, sua criação própria, espiritual, como indivíduo social-histórico” (KOSIK, 1976, p. 24).

O próprio Kosik (1976, p. 24) adverte que não se pode considerar a destruição da pseudoconcreticidade como o “rompimento de um biombo e o descobrimento de uma realidade que, por trás dele, se escondia pronta e acabada, existindo independentemente da atividade do homem”. O autor ainda concebe a pseudoconcreticidade justamente como a “existência autônoma dos produtos do homem e a redução do homem ao nível da *práxis* utilitária” (KOSIK, 1976, p. 24, grifo do autor). Enfim, o ser humano não está isolado no espaço e, por esse motivo, conhece a realidade de uma determinada configuração da materialidade social na qual está inserido. Acontece que na vida cotidiana, os indivíduos são essencialmente pragmáticos, buscam dar uma resposta imediata a um determinado problema.

1.3 A construção de significados

Machado (2013, p. 11) afirma que a busca do significado para aquilo que se ensina na escola é plenamente justificável, mas acredita que ter significado é muito mais do que ter aplicações imediatas. O autor usa as histórias infantis como exemplo para justificar sua arguição, uma vez que, para ele, essas histórias “são plenas de significados e vazias de aplicações. Na realidade, os animais não falam, não existem fadas voadoras, nem super-heróis com poderes extraordinários” (MACHADO, 2013, p. 11). Aliás, “as histórias infantis são fundamentais para as crianças construírem um repertório de situações de onde emergem os valores. Algo análogo ocorre com a Matemática” (MACHADO, 2013, p. 11).

De fato, a ideia de conhecimento liga-se umbilicalmente a de significado; conhecer é, sem dúvida, conhecer o significado. Nas palavras de Dewey (1979, p. 139), “compreender é apreender a significação... Apreender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou situação é ver a coisa em suas relações com outras coisas...”. Dewey (1979) afirma que a coisa

sem sentido para o indivíduo é aquela cujas relações não foram apreendidas. Então, construir o conhecimento é como construir uma grande rede de significações, na qual os nós seriam os conceitos, as noções e as ideias; e os fios que compõem e unem os nós uns aos outros seriam as relações que o indivíduo estabelece entre algo que lhe detém a atenção e as demais ideias, noções ou conceitos.

Assim, apreender o significado de um objeto ou de um acontecimento é enxergá-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos. Por isso, as significações dos signos são construídas através de relações, as quais se condensam em feixes, e estes se articulam sob a forma de uma grande rede construída social e individualmente e em permanente estado de atualização. A ideia de conhecer assemelha-se a de enredar. Machado (2011, p. 132) sugere a concepção de conhecimento como uma “rede de significados multiplamente articulados, em permanente formação e transformação, cuja construção inicia-se antes mesmo da chegada à escola e não a tem como único responsável”. Para Kosik (1976, p. 75), o mundo se apresenta ao indivíduo “como um sistema de significados, em que todas as coisas dependem de todo o resto e o sistema de significados como um todo se refere ao sujeito, para o qual as coisas têm um significado”. Portanto, a construção da significação será sempre uma ação de significar, de transformar em signo, de representar por um signo, através de um processo de abstração.

De igual modo, certa concepção de Matemática aparece, por exemplo, no poema “CONVERSA FIADA”, de Mário Quintana. Ao expressar a sua admiração por essa disciplina, o poeta faz a seguinte promessa: “Ah, prometo àqueles meus professores desiludidos que na próxima vida eu vou ser um grande matemático...”. Com essa afirmação, Quintana, provavelmente sem intenções explícitas de assim proceder, endossa o coro de que a capacidade para a Matemática seria inata. E além do mais, fala de sua repulsa aos exercícios de álgebra: “Penso em meus primeiros exercícios de álgebra, eu que tanto, tanto os odiava...”, corroborando com o discurso do “ama-se ou odeia-se a matemática”.

Se, por um lado, os estudantes que não conseguem um bom desempenho nas avaliações escolares geralmente ficam frustrados com essa disciplina; por outro, mesmo no grupo dos estudantes que conseguem a aprovação nas avaliações escolares, não há qualquer garantia de que a aprendizagem de Matemática foi efetiva para todos, ou seja, foi baseada na compreensão dos conceitos e aplicável a contextos diferentes dos que foram explorados em sala de aula.

Acontece que, muitas vezes, no ensino da Matemática da Educação Básica, a avaliação é limitada à produção escrita do estudante e compreende a mera reprodução mecânica dos procedimentos e das estratégias apresentadas pelo professor. Essa forma de conceber a avaliação, de maneira reducionista, traz consigo, no mínimo, um elemento limitador do

potencial do aluno para o fazer matemático. Assim, o resultado mais imediato dessa forma de avaliar é tolher o estudante de conceber o pensamento matemático propriamente dito, muito mais amplo do que aquele contemplado no tipo de produção escrita mencionado.

É uma obviedade o fato de que a avaliação da aprendizagem na prática escolar não deve se restringir a provas e exames, ela deve, de fato, ser diversificada. Porém, convém abandonar a concepção com ranço positivista, frequente em pesquisas que versam sobre o tema “avaliação”, para tecer algumas breves considerações sobre a questão. Inicialmente, é preciso refletir se existe um tipo de avaliação mais adequado para avaliar do que outro. Além disso, é realmente possível aferir, por meio de um determinado instrumento avaliativo, se a aprendizagem efetivamente ocorreu? A avaliação, seja ela qual for (avaliação escrita, prova, apresentação, trabalho, atividade, relatório, ...), tem apenas o condão de forçar o estudante estudar. Avaliação da aprendizagem não se confunde com os instrumentos avaliativos, ela consiste num processo contínuo de reflexão e intervenção.

A relação dialética entre o abstrair e o concretizar foi denominada por Henri Lefebvre (1979) como “movimentos do pensar”. Esses movimentos são entendidos pelos professores de diferentes maneiras: para uns, o pensamento de um indivíduo durante a construção dos conceitos parte do concreto rumo ao abstrato; para outros, a construção dos conceitos parte das abstrações em direção ao concreto.

O termo “dialética” deriva de diálogo e, segundo Abbagnano (1970), essa palavra recebeu diferentes significados ao longo da história da filosofia. Tais significados possuem diversas inter-relações, mas não são redutíveis uns aos outros, sequer a um resultado comum. Assim, é possível distinguir quatro significados fundamentais: a dialética como método; como lógica do provável; como lógica; e como síntese de opostos. Esses quatro conceitos têm origem nas quatro doutrinas - platônica, aristotélica, estoica e hegeliana - que mais influenciaram a história desse termo. (ABBAGNANO, 1970)

Para a dialética, o concreto é, ao mesmo tempo, ponto de partida e ponto de chegada ao processo de conhecimento, isto é, o concreto não é apreensível de forma imediata pelo pensamento, mas vai sendo mediatizado por meio de abstrações. Marx, em “O Método da Economia Política”, diferencia o concreto ponto de partida do concreto ponto de chegada, ou seja, de acordo com o momento de apreensão. O concreto ponto de partida refere-se ao captado pela experiência de maneira mais imediata, suas múltiplas determinações compõem representações abstratas que conduzem a uma representação do real; já o concreto ponto de chegada é o apreendido em suas múltiplas determinações e cujas propriedades não são acessíveis à apreensão sensorial. Há, portanto, um movimento que torna o concreto ponto de

partida e ponto de chegada, no qual a mediação é realizada pelas abstrações.

Ora, “então o que constituiria o concreto ponto de partida [no caso do conhecimento matemático]?”, indaga Machado (2013, p. 92). “Já não seriam as abstrações?”, prossegue ele. É inegável que a Matemática possui suas especificidades, porém, outras disciplinas também apresentam particularidades inerentes a elas. Mas a Matemática não trata de números, figuras, equações e outros objetos abstratos do gênero? Sim. Mas esses objetos existem independentemente da vontade humana ou são meras invenções? Silva (2007) questiona que tipo de objeto é um elemento abstrato da Matemática. Obviamente, essas questões não possuem respostas simples, quiçá taxativas.

Todavia, a história da Matemática mostra que ela sempre lidou com problemas e muitos dos quais não consegue resolver. Alguns desses problemas levaram centenas de anos para serem resolvidos; outros, como a hipótese de Riemann, ainda aguardam uma solução. De fato, são problemas difíceis, alguns até ganharam uma etiqueta de um milhão de dólares. As questões sobre a natureza do conhecimento matemático são um tipo especial de problemas tão interessantes quanto aqueles, isto é, não são problemas de Matemática propriamente, mas sobre a Matemática. Segundo Silva (2007), a história da Matemática também ensina que essa disciplina é um produto da cultura humana e muda com o tempo em função das diferentes culturas em que viceja e dos problemas práticos e teóricos que essas culturas enfrentam. “Portanto, a Matemática evolui no tempo e, presumivelmente, começa a fazer parte, entra diretamente em sua própria evolução” (D’AMORE, 2012, p. 2).

Infelizmente, como diz D’Amore (2012, p. 22), a única oportunidade que os estudantes têm de entrar em contato com a Matemática é na escola. Enquanto a dança, o teatro, a literatura, a fotografia, as artes em geral e até mesmo as outras ciências poderão ser encontradas na vida em diversas ocasiões, nos museus, na TV, no cinema, etc., a Matemática, normalmente não. Ao terminar o tempo da escola, “a matemática se torna uma lembrança obsoleta, cujas afirmações e cujas fórmulas se confundem com o rosto do professor ou dos professores, e cujo modo de agir se confunde com as solicitações deles” (D’AMORE, 2012, p. 22). Nesse sentido, a tarefa do estudante na escola é reduzida apenas a responder o melhor que puder, aquilo que o professor espera, a fim de alcançar a tão sofrida aprovação. Tal tarefa não se coaduna com aquela cultural de apreender matemática.

Surge daí a necessidade de superar a visão limitada sobre essa disciplina do currículo escolar em detrimento de outra, de conceber essa ciência como parte da cultura humana, “como ferramenta de trabalho, que revele com clareza o quanto a Matemática está inserida no processo histórico-social onde é produzida e que ela ajuda a produzir” (MACHADO, 2013, p. 29). É

preciso de uma visão que logre a superação do estereótipo de ciência dos “eleitos”, cuja função primordial, como a de muitos outros estereótipos, é a de justificar os privilégios de diferentes naturezas. A Matemática, como parte da cultura humana, “não tem nada a invejar das outras disciplinas, com as quais há milênios tem estabelecido sólidos pactos de aliança” (D’AMORE, 2012, p. 23). Já não parece restar dúvida de que ela está viva. Lamentavelmente, na escola, às vezes se perde uma oportunidade preciosa de tornar conhecida a sofisticação dessa ciência, de mostrar que ela não é útil apenas para as coisas concretas do cotidiano, mas é um instrumento formidável para entender o mundo em suas formas tão variadas. Assim, a Matemática é uma importante ferramenta para compreender a realidade, embora seus objetos não sejam reais, eles são estruturas pensadas na mente.

1.4 Piaget

Charles Pisot (in: NIMIER, 1989) distingue o aspecto matemático do aspecto físico. Segundo ele, a Matemática independe da realidade e a sua atividade tem por fundamento o raciocínio, no sentido da abstração reflexionante de Piaget. Fossa (2014) também acredita que os objetos da Matemática não possuem existência física, são estruturas pensadas na mente, que independem da experiência. E outra concepção que confirma esse pensamento diz: “[A] Matemática dá um exemplo brilhante de quão longe se pode ir no conhecimento a priori, independentemente da experiência” (KANT, 2013, p. 50). De fato, essa disciplina não pode fazer um apelo experimental, mas até a Física parece impor certos limites para as raízes empíricas das construções matemáticas; por exemplo, as experiências que comprovariam a validade da teoria da relatividade só foram realizadas depois de Einstein ter enunciado sua teoria. Conforme Du Sautoy (2007, p. 40),

O matemático é obcecado pela prova, e não se satisfaz apenas com dados experimentais que corroborem uma suposição matemática. Essa atitude é alvo de admiração, e às vezes de escárnio, em outras disciplinas científicas. A validade da conjectura de Goldbach foi verificada em todos os números até 400.000.000.000.000, mas ainda não foi aceita como um teorema. Quase todas as disciplinas científicas aceitariam tranquilamente esses acachapantes dados numéricos como argumentos convincentes, e então se preocupariam com outros assuntos. Se posteriormente surgissem novos indícios que exigissem uma reavaliação do cânone matemático, tudo bem.

Piaget faz a diferenciação de dois tipos de abstração: a empírica e a reflexionante. A primeira consiste na atividade mental, que é capaz de abstrair as propriedades dos objetos ou das ações, isto é, daquilo que é observável. Assim, retirar características dos objetos

(automóvel, árvore, parede, etc.) ou das ações (dirigir, plantar, tatear, etc.) qualifica a abstração empírica; em contrapartida, a reflexionante retira propriedades das ações que se realizam internamente ao sujeito e, por isso, não são observáveis. Desse modo, o suporte deixa de ser o mundo das coisas e passa a ser o mundo das ideias e das relações. Portanto, o cérebro realiza uma sucessão de operações coordenadas, permitindo construir estruturas a partir das propriedades tiradas de estruturas anteriores. Como bem destaca Piaget (1995, p. 193),

A abstração ‘reflexionante’ é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores e, como tal, tanto pode funcionar de maneira inconsciente como sob a direção de intenções deliberadas: particularmente, o sujeito de uma investigação ignora, por muito tempo, de que fontes ele tem haurido os mecanismos constitutivos de sua nova construção; e um matemático pode nada saber, sem por isso sentir-se impedido de realizar seu trabalho, sobre as raízes psicogenéticas das estruturas elementares que utiliza (como, por ex., a de grupo).

O processo de abstração reflexionante ocorre em dois momentos: o reflexionamento - ato de retirar as propriedades das coordenações das ações de um patamar e transferi-las para o patamar acima; e a reflexão - consiste numa reorganização das características transferidas pelo reflexionamento ao patamar superior, e dessa reorganização, resulta algo novo. Segundo Piaget, a reflexão é um “ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido” (Piaget, 1995, p. 274-275). Para entendermos tal abordagem, o mesmo autor acrescenta:

Em segundo lugar, essa abstração ‘reflexionante’ comporta uma ‘reflexão’ no sentido de uma reorganização mental, e isso necessariamente, pelo fato de que o ‘reflexionamento’ chega a um patamar superior no qual trata inicialmente de reconstruir o que foi abstraído do patamar inferior, de modo a ajustá-lo à estrutura desse patamar superior... (Piaget, 1974a, p. 82).

Enquanto as ações introduzidas nos objetos pelos sujeitos fazem parte da abstração pseudo-empírica, a abstração reflexiva, por sua vez, depende das ações do indivíduo e no qual se origina. Ela está associada não só às ações propriamente ditas, como também se relaciona às inter-relações entre essas ações e, por isso, tem por fundamento a construção de novas combinações por meio da aglutinação de abstrações. Essa característica construtiva da abstração reflexiva é bastante útil ao conhecimento matemático. Não é por acaso que Piaget (1995) afirma que esse conhecimento não decorre da abstração das propriedades do objeto, mas sim das propriedades que a ação do sujeito introduz nos objetos, isto é, da abstração reflexionante.

Ora, então o conhecimento enquanto capacidade surge da reorganização daquilo que já

foi construído previamente no plano da ação ou coordenações das ações. Para Piaget, o desenvolvimento do conhecimento enquanto capacidade ocorre por assimilações, acomodações e rupturas estruturais. Ele chamou de assimilação a adaptação de um novo aprendizado aos esquemas já possuídos pelo indivíduo. Porém, essa adaptação nem sempre acontece e, nesse caso, o indivíduo terá que modificar suas estruturas pré-existentes a fim de acomodar as novas informações, a menos que se desfaça delas. Piaget denominou esse processo de “acomodação”. Às vezes as modificações necessárias são bastante radicais, a ponto de ser mais propício falar da substituição de uma estrutura de conhecimento por outra, pois o indivíduo, na verdade, vê o mundo - ou aspecto dele incluído na dada estrutura - sob uma perspectiva diferente.

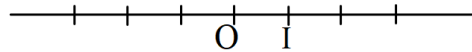
Assim, para Piaget, o conhecimento elementar não é o resultado de uma impressão deixada pelo objeto nos órgãos do sentido. Esse tipo de conhecimento “é sempre o resultado de uma assimilação ativa pelo sujeito, que incorpora os objetos aos seus esquemas sensório-motores, isto é, aos esquemas das suas próprias ações capazes de se reproduzir e de se combinar entre si”. (PIAGET, 1971, p. 107-108). Destarte, a aprendizagem enquanto experiência não deriva da pressão passivamente sentida pelo sujeito, mas sim da acomodação de seus esquemas de assimilação. Há, desse modo, “um certo equilíbrio entre a assimilação de objetos à atividade do sujeito, e a acomodação desta atividade aos objetos” (PIAGET, 1971, p. 107-108). Desse equilíbrio, origina-se o ponto de partida de todo conhecimento e este ponto se faz presente no início dessa ação, “na forma de uma relação complexa entre o sujeito e os objetos, que exclua, simultaneamente, qualquer interpretação puramente empírica ou puramente apriorística do mecanismo cognitivo” (PIAGET, 1971, p. 107-108).

Entretanto, conforme ressalta Devlin (2004, p. 46), estudos posteriores mostraram que muitas conclusões elaboradas por Piaget sobre a capacidade mental das crianças estavam equivocadas, a despeito de existir psicólogos que ainda sustentam as concepções piagetianas e acreditam que os resultados experimentais encontrados por esse estudioso admitem conclusões alternativas. Piaget foi um experimentalista e, por isso, sua obra teve tanta influência. Devlin (2004, p. 46) explica que foi necessária muita engenhosidade e equipamento – do qual esse pesquisador não dispunha em sua época – para permitir às gerações subseqüentes realizarem experimentos mais confiáveis. Por exemplo, estudos posteriores mostraram que, ao contrário das observações de Piaget em seus experimentos, crianças com dois anos de idade têm uma boa noção de números e conservação numérica. Inclusive, de acordo com Devlin (2004), parte desses estudos mostraram que bebês muito novos conseguem fazer discriminação entre 2 e 3 objetos, bem como, somas e subtrações envolvendo os números 1, 2 e 3.

1.4.1 Acomodação na Matemática

Um exemplo clássico de acomodação na história da Matemática é aquele que ocorre no desfecho da suposta “crise”² gerada pela descoberta da incomensurabilidade pelos antigos matemáticos gregos. Pois bem, os números racionais, até então conhecidos pelos gregos, comportam uma interpretação geométrica relativamente simples. De fato, para fazer uma análise geométrica de tais números, bastava marcar dois pontos distintos O e I numa reta horizontal (I à direita de O) e tomar o segmento OI como unidade de comprimento; depois admitir-se-ia que os pontos O e I representam, respectivamente, os números 0 e 1. Dessa maneira, números inteiros positivos e negativos poderiam ser representados por um conjunto de pontos da reta espaçados em intervalos unitários, os positivos à direita de O e os negativos à esquerda de O. As frações de denominador q seriam representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes. Assim, para cada número racional, haveria um ponto da reta. Segue a representação na figura 1:

Figura 1

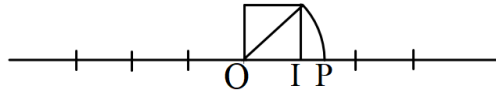


Fonte: autoria própria

Todavia, posteriormente descobriu-se que existem pontos na reta os quais não correspondem a nenhum número racional. Os matemáticos gregos provaram que não há nenhum número racional correspondente ao ponto P da reta, no caso em que OP é igual à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade. Assim, a diagonal de um quadrado com lado unitário era uma quantidade mensurável, mas até então, de acordo com o entendimento deles, não havia nenhum número que medisse essa quantidade. Tal problema só foi resolvido pela eventual reestruturação do conceito de número, ou seja, novos números foram “inventados” para serem associados a esses pontos; e não sendo racionais, vieram a ser chamados de “irracionais” (números não racionais). Segue a representação na figura 2.

² (GONÇALVES; POSSANI, 2009) relatam a existência de duas versões para aquilo que ficou conhecido como “a crise dos incomensuráveis”. E, segundo eles, em uma dessas versões, não há evidências de que a crise realmente ocorreu. Esta versão teria ficado restrita aos meios especializados da história antiga ou da história da matemática.

Figura 2



Fonte: autoria própria

O conjunto dos números irracionais é formado por todos os números que não podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Dois desses números, particularmente interessantes, são estudados na escola. Um deles é o π , definido como o quociente entre o comprimento de uma circunferência qualquer e o seu respectivo diâmetro, cujo valor aproximado é 3,14. Tal número é, sem sombra de dúvidas, o mais calculado da história: vai do valor de 3 oferecido pela *Bíblia* ao valor de 3,16 obtido pelos povos egípcios, passando pelo valor calculado atualmente com 100 trilhões de dígitos depois da vírgula. O outro número é o de Neper, representado por e , cujo valor aproximado é 2,7182818285 (a última casa decimal resulta de arredondamento). Pode-se encontrar e , por exemplo, ao calcular o limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, isto é, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Esses dois números possuem algo em comum, além do fato de serem irracionais, ambos são transcendentais, ou seja, não são solução de qualquer equação algébrica de coeficientes racionais. Explicando melhor, ao resolver a equação algébrica $x^2 - 2 = 0$, são encontradas duas raízes, isto é, duas soluções da equação, são elas: $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Mas não existem equações algébricas que possuam, entre suas raízes, os números π ou e . Entretanto, há os que ainda continuam procurando tais equações, assim como há quem tente construir um mecanismo capaz de gerar energia infinita, embora se saiba, na Física, que geradores de energia infinita não existem. Também já foi demonstrado que não é possível fazer a quadratura do círculo somente com régua e compasso, porém ainda há quem tente fazer essa construção. É claro que tais pesquisas são inúteis e, no caso específico da Matemática, se uma afirmação já foi demonstrada, é absurdo e pura perda de tempo tentar mostrar o contrário, pois o fato já foi provado.

No entanto, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) encontrou uma equação que relaciona π e e a um outro número da Matemática. Este número não tem nada a ver com aqueles, não é um número real como eles, é “imaginário”, ou seja, um número não real, definido pela seguinte igualdade: $i = \sqrt{-1}$, ou dito de outra maneira: $i^2 = -1$. Como o quadrado de um número real não pode ser negativo, foi preciso trazer o adjetivo “imaginário” para definir tal igualdade. Euler reuniu, de modo totalmente inesperado, esses três números numa só equação:

$e^{i\pi} = -1$. De fato, a função exponencial natural $y = e^z$ pode ser definida como $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, quando n tende ao infinito. Mas, ao fazer $z = i\pi$ segue-se que $e^{i\pi}$ é o limite de $\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$, quando n tende a infinito. E quando n cresce para o infinito, $\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$ se aproxima de -1 . Porém, esses procedimentos requerem uma boa quantidade de abstração.

1.5 A abstração na Matemática

O conceito de número foi se evoluindo no decorrer do tempo. Embora os números tenham se originado do processo de contagem, com o passar dos anos, eles foram ficando cada vez mais abstratos e perdendo sua correlação imediata com os objetos do mundo concreto material. Até mesmo o próprio zero deu a sua pitada de contribuição para essa crescente abstração. O atual sistema numérico, o indo-arábico, inicialmente contava com apenas nove dígitos, só depois é que o zero foi incorporado a esse sistema. A palavra zero, provavelmente, origina-se da forma latinizada *zephirum*, e esta, por sua vez, provém de *sifr*, uma tradução para o árabe de *sunya*, que em hindu significa “vazio” ou “vácuo”.

O zero apareceu pela primeira vez na Babilônia por volta do ano 300 a. C.. Nesse período, os babilônios usavam um sistema de numeração posicional, no qual o valor de cada dígito dependia da sua posição. Hoje parece simples a ideia de juntar algarismos para formar os números, mas ela é o engenhoso resultado de séculos de desenvolvimento da chamada ‘notação posicional’, cujo significado implica que a posição de cada algarismo indica seu valor. A título de exemplo, no atual sistema numérico, também posicional, o número 3 não vale o mesmo que o 3 com o 5 do lado, ou seja 35. A posição do 3 muda de unidades para dezenas e o seu valor se transforma. O problema é que a ausência do zero no sistema babilônico criava uma certa confusão; usando o exemplo anterior, seria como querer diferenciar o 35 do 305, deixando um espaço entre o 3 e o 5, mas o espaço vazio não era um método muito confiável. Por esse motivo, eles criaram um símbolo para representar a presença da ausência, ou seja, para dizer que ali não havia número algum.

Entretanto, o zero dos babilônios não era um número propriamente dito, era algo parecido com a vírgula atualmente, que serve para separar os decimais. Ela é parte do sistema numérico, isto é, compõe esse sistema, mas não é um número. O zero babilônico servia apenas com sinal e para fazer a marcação de um lugar vazio. Criar um símbolo para o zero foi importante, contudo o salto conceitual significativo ocorreu na Índia, por volta de 700 d. C.,

com a sua definição explícita. Certamente, não foi por acaso que tenha ocorrido por lá, onde os conceitos de nada e de eternidade ocupavam papel bastante relevante nas crenças dos antigos indianos. Esses povos acreditavam que o universo nasceu do nada e a volta ao nada seria o objetivo final da humanidade. Esta é a razão pela qual, culturalmente, não tiveram qualquer problema em adaptar-se à ideia do zero como vazio.

Há relatos de que a forma circular do zero representa o ciclo da vida, também conhecido como um *Uróboro*, aquela serpente da eternidade que morde a própria cauda. Outras narrativas dão ao zero uma origem mais terrena, literalmente! Dizem que a sua representação gráfica foi inspirada na forma como os antigos povos indianos faziam seus cálculos, ou seja, no chão com pedras. Ao retirar uma pedra, ficava um buraco redondo marcado na terra, como uma representação do movimento de alguma coisa para nada. Posteriormente, definiram-se regras sobre como somar, subtrair, multiplicar e dividir com esse algarismo. Aliás, a razão pela qual o zero precisou batalhar por séculos para ser aceito como um número possui um viés filosófico e teológico: foi justamente devido à dificuldade em admitir a noção de “nada” e de “vazio”.

Com o sistema numérico formado por apenas dez dígitos de 0 a 9, os matemáticos conseguiram criar e manipular números enormes de uma maneira muito mais eficiente. Como consequência, os algarismos começaram a ficar cada vez mais abstratos e a perder a sua correlação imediata com os objetos da vida real. Já não eram mais duas laranjas e três cabras, mas sim 2 e 3. Essa crescente abstração beneficiou particularmente o zero, o número que significava nenhuma cabra, ou pelo menos era isso que se esperava. O zero não se contentou em ser a última peça que faltava no quebra-cabeça do sistema numérico indo-arábico, deu início a uma revolução que transcendeu a Matemática e passou a ser hoje um dos pilares da linguagem computacional. A aceitação da existência do nada (zero) propiciou aos números um distanciamento cada vez maior das necessidades práticas, como contar os dias ou cabras e, por isso, eles se tornaram entidades abstratas com vida própria. Em outras palavras, o zero deixou de ser ‘nada’³ e virou uma das maiores invenções da humanidade.

1.5.1 As preocupações estéticas dos matemáticos gregos

Na sociedade grega, houve um período da história no qual a Matemática passou por um processo significativo de abstração. O conhecimento matemático, até então voltado às necessidades práticas e, portanto, com forte ligação entre Matemática e realidade, passou a ser

³ No sentido de espaço vazio.

ressignificado pelos gregos. Com o trabalho dos matemáticos gregos, as “amarras” do concreto físico tornaram-se bem mais frágeis. Machado (2013, p. 20-21) destaca que a estrutura de organização da sociedade grega permitiu à elite dirigente esse alheamento da realidade concreta. Tal elite tinha a seu dispor o trabalho dos escravos cujo rendimento não importava melhorar por meio de aperfeiçoamentos técnicos. Portanto, era comum que um grego da classe dirigente se inclinasse a especulações intelectuais e, motivado por razões estéticas, se abarrota-se de abstrações. Enfim, “esta estrutura social imprimiu um caráter original à Matemática grega, onde acentuado era o desdém pelas aplicações práticas... Os êxitos dos geômetras gregos estimularam mais e mais o alheamento do mundo sensível”. (MACHADO, 2013, p. 21).

Machado (2013) discorre sobre uma possível dicotomia entre o abstrato e o concreto, dá ênfase à crítica ao suposto caráter definitivo da tendência abstrata e aponta para a necessidade de superação da situação dicotômica. Segundo ele, “uma tentativa ‘oficial’ de superação da postura de absolutização do caráter formal, abstrato, da Matemática foi a sua subdivisão em dois compartimentos” (MACHADO, 2013, p. 27). Um desses compartimentos é a Matemática Pura, filha direta da Matemática grega, especulativa, recheada de abstrações cujas preocupações estéticas se sobrepõem às de ordem prática; outro é a Matemática Aplicada, a quem incumbiria o retorno da conceituação à experiência, ao mundo empírico, e a quem competiria aproximar os resultados obtidos pelos matemáticos “puros” da realidade concreta (MACHADO, 2013).

Além disso, Machado (2013, p. 27) considera que tal dicotomia não se encontra bem assentada em termos epistemológicos. Para ele, sobra muito pouco de Matemática, da chamada Matemática Aplicada, caso se desconte o trabalho de técnicos de diferentes ordens, como físicos e engenheiros. O mesmo autor questiona se o retorno ao concreto, após esse afastamento intencional, é uma tarefa somente para especialistas em aplicações, ou se a dita dicotomia é circunstancial e não sobreviverá ao momento histórico que a engendrou, carecendo, portanto, de um sentido epistemológico mais profundo.

Ora, há um consenso de que, entre 1890 e 1940, a Matemática encontrou efetivamente o seu verdadeiro sentido, o qual permanece em evidência até hoje. Durante estes 50 anos, diversos matemáticos, como Boole, Frege, Russel e Cauchy, empreenderam trabalhos de crítica dos fundamentos da Matemática. É claro que, como diz Machado (2013, p. 28), mesmo diante da abundância de novas ideias e novos conceitos, o florescer de um novo simbolismo não deve ocultar os elementos de continuidade entre a concepção das relações da Matemática com a realidade antes e depois desse meio século áureo.

No entanto, a dita produção “livre e desinteressada” observada nos trabalhos de numerosos matemáticos pode, certamente, atirar no escuro no sentido prático-utilitário. Sobre

essa perspectiva, parece existir algo mais inútil do que o conteúdo de matrizes? Contudo, as matrizes “encontraram” uma forma de se associar às imagens digitais⁴. Uma imagem digital é formada por pequenos pontos chamados de *pixels*⁵ e cada *pixel* representa um elemento da matriz a ela associada. Assim, uma imagem exibida na tela de um computador pode ser representada por uma matriz. Dessa forma, é possível fazer operações com matrizes e através dessas ações modificar as imagens digitais.

Outro exemplo, que também parecia também parecia completamente inútil, é a linguagem binária, por meio da qual os computadores funcionam. Acontece que o computador, pelo fato de ser uma máquina eletrônica, só ‘consegue interpretar’ duas informações: presença ou ausência de energia, aceso ou apagado. Logo, era muito mais fácil inserir duas informações num sistema binário com dois algarismos (0 e 1) do que os 10 algarismos do sistema decimal. Em nenhum dos exemplos anteriores havia uma preocupação inicial com uma utilidade prática imediata, tanto o conteúdo de matrizes quanto o sistema binário (0 e 1) surgiram de preocupações estéticas.

⁴ As primeiras imagens digitais surgiram no início do século XIX através da busca de meios de aperfeiçoar a qualidade das impressões das imagens transmitidas por cabos submarinos entre Londres e Nova Iorque.

⁵ *Pixel* é um termo cuja origem vem do inglês, por meio da junção de *picture* e *element*, isto é, elemento de imagem.

2 TRABALHO EDUCATIVO E AVALIAÇÃO EXTERNA

Numa democracia, nenhuma obra supera a de educação.

Anísio Spínola Teixeira

2.1 O trabalho educativo

A tarefa fundamental do trabalho educativo no espaço escolar, ambiente institucionalizado de socialização do saber, é garantir a apropriação do conhecimento sistematizado. Portanto, “não se trata de cada indivíduo singular construir todo o saber, mas ter o direito ao acesso a esse saber constituído” (GIARDINETTO, 1999, p. 47). Giardinetto (1999, p. 47) argumenta que esse saber não configura “uma imposição, não é algo a-histórico, mas é um resultado, um avanço que pode e necessita estar sendo socializado”. Além disso, trata-se de uma socialização de maneira simultânea “à efetiva possibilidade de apropriação dos conceitos escolares, a lógica da sistematização representa o acesso a níveis de abstração mais complexos que aqueles exigidos no decorrer das atividades cotidianas” (GIARDINETTO, 1999, p. 47).

Daí, Kosik (1976, p. 28) afirma “que o conhecimento não é contemplação” e acredita que a contemplação do mundo se baseia nos resultados da *práxis* humana. Para o autor, “o homem só conhece a realidade na medida em que ele *cria a realidade* humana e se comporta antes de tudo como ser prático” (KOSIK, 1976, p. 28, grifo do autor). A fim de conhecer a realidade, o homem alcança, por meio da ciência, um “distanciamento conveniente motivado, em cuja perspectiva as coisas e os acontecimentos se mostram de maneira adequada e isentam falsificações” (KOSIK, 1976, p. 28). E Saviani (2011, p. 13) afirma que “o trabalho educativo é o ato de produzir, direta e intencionalmente, em cada indivíduo singular, a humanidade que é produzida histórica e coletivamente pelo conjunto dos homens”.

Então, o trabalho educativo consiste numa “atividade mediadora, na formação do indivíduo, das objetivações em-si para o acesso às objetivações para-si, uma atividade mediadora na formação do indivíduo entre o cotidiano e o não cotidiano” (GIARDINETTO, 1999, p. 43). Como bem destaca Saviani (2011, p. 13), o trabalho educativo envolverá “a identificação dos elementos culturais que precisam ser assimilados” e “a descoberta das formas adequadas de desenvolvimento do trabalho pedagógico”. Logo, o ambiente escolar, no qual se realiza o trabalho educativo, revela-se um espaço privilegiado para o desenvolvimento de formas de pensar e de agir necessárias à apropriação das objetivações genéricas para-si. Enfim,

o espaço escolar é o local onde se realiza o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos pertencentes às objetivações para-si.

2.2 O ato de contextualizar

A contextualização é uma das formas usadas para mediar o conhecimento cotidiano e o não cotidiano. Desse modo, o ato de contextualizar, quando bem arquitetado, permite formar um encadeamento de significação que envolve três processos intimamente relacionados com a construção dos conceitos matemáticos, são eles: a generalização, a síntese e a representação. Esses conceitos serão desenvolvidos a seguir.

Mas o ato de contextualizar tem por finalidade basilar a construção de significado. E a significação, segundo Abbagnano (1970), refere-se à dimensão semântica do procedimento semiológico, ou seja, a possibilidade de um signo referir-se a seu objeto. “A construção do significado é sempre uma ação de significar, de transformar em signo, de representar por um signo, através de um processo de abstração” (MACHADO, 2011, p. 41). Assim, a construção de significados tem o condão de maximizar os elos entre o abstrato e o concreto.

2.2.1 Generalização

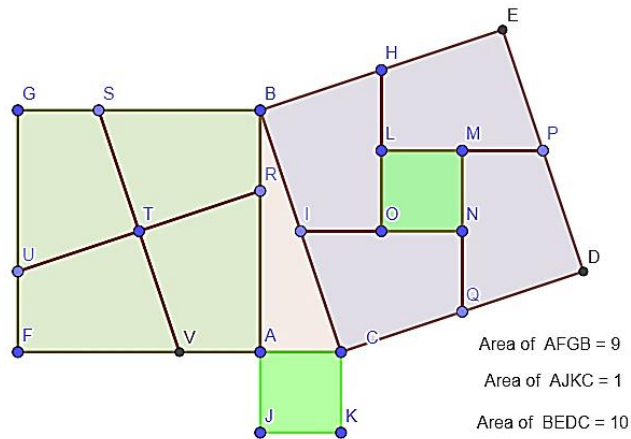
Se a Matemática é, de fato, a “ciência dos padrões” como defende Devlin (2008, p. 36), a generalização, enquanto busca por padrões, é uma tarefa crucial na atividade matemática, é uma das finalidades do ensino dessa disciplina. A generalização consiste na identificação de elementos comuns ou de um padrão, permitindo uma possível expansão dos domínios de validade. Mas procurar por um padrão também pode ser uma estratégia poderosa na resolução de problemas, aliás, resolvê-los é algo peculiar à ciência dos padrões. Desse modo, generalizar parece ser imprescindível tanto no aprender quanto no fazer matemática. Ambos os atos são muito próximos, tão próximos que, às vezes, se confundem. Nas palavras de Duval (In: FREITAS e REZENDE, 2013), “fazer matemática é resolver problemas”.

Para estimular e desenvolver a habilidade de generalização, é preciso explorar o reconhecimento de padrões desde os anos iniciais, desencadeando mecanismos de abstração. Entretanto, generalizar não se confunde com abstrair: a generalização ocorre, por exemplo, no trabalho com espaço vetorial, inicialmente com os espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , e se passa para o espaço \mathbb{R}^n através da generalização, preservando as operações de adição e de multiplicação por escalar; já a abstração ocorre quando é preciso fazer a transposição de um espaço vetorial V cujas

propriedades e operações ainda precisam ser identificadas.

A generalização também pode ser observada no teorema de Pitágoras, no qual diz: em um triângulo retângulo, a área do quadrado construído na hipotenusa é igual à soma das áreas dos dois quadrados construídos nos catetos. Deveras, isso pode ser observado na figura 3.

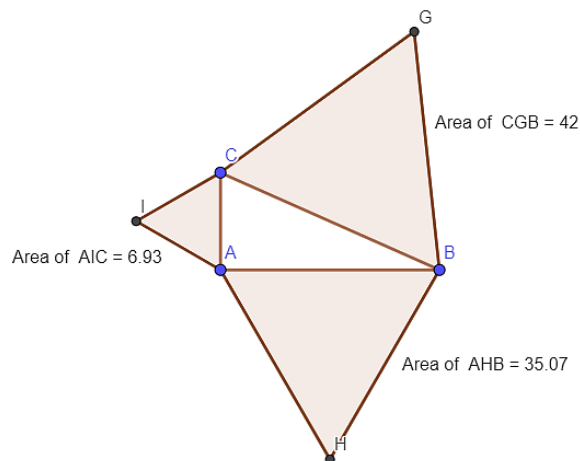
Figura 3



Fonte: autoria própria

Mas se no lugar da palavra “quadrado” fosse colocado “triângulo equilátero”? O teorema ficaria com o seguinte enunciado: em um triângulo retângulo, o triângulo equilátero construído na hipotenusa tem área igual à soma das áreas dos triângulos equiláteros construídos nos catetos (figura 4). Logo,

Figura 4

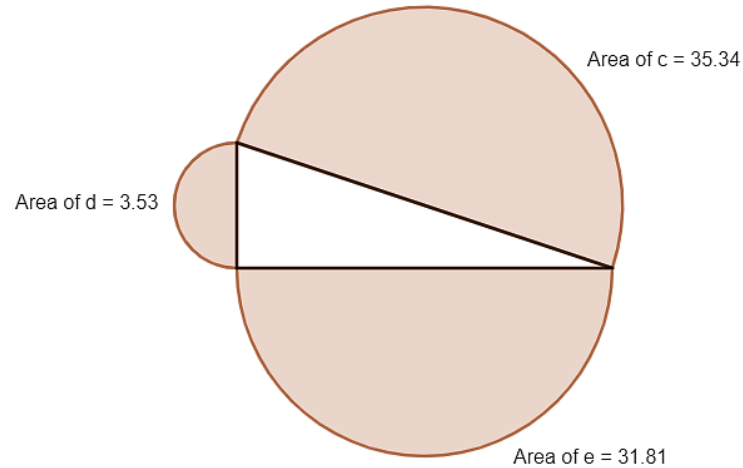


Fonte: autoria própria

Por meio de um processo de generalização, é possível substituir a palavra “quadrado” por “pentágono regular” ou “hexágono regular”, aliás, o teorema pode ser estendido a qualquer

tipo de polígono regular. Além do mais, pode-se usar o círculo, ou para tornar a figura mais elegante, o semicírculo. O teorema, então, ficaria assim: em um triângulo retângulo, o semicírculo que tem com diâmetro a hipotenusa tem área igual à soma das áreas dos semicírculos que têm com diâmetros os catetos (figura 5). Portanto,

Figura 5



Fonte: autoria própria

2.2.2 Síntese

A palavra “síntese” pode ser identificada no latim como “synthesis”, que provém do grego “sýnthesis”, formada por um prefixo “syn” para referir-se à união e por “thesis” para remeter-se à palavra tese, que significa um resultado ou uma conclusão sobre um tema. Por isso, uma síntese é um resumo que contempla as principais ideias ou a essência de alguma coisa, trata-se de uma simplificação de algo mais complexo e elaborado. Em suma, pode ser bem definida pela proposição de Nasser (2013): o processo de síntese consiste em combinar ou compor partes de modo a formar um inteiro, sendo que esse inteiro constitui mais do que simplesmente a soma das partes, dá origem a uma única entidade na qual as partes se inter-relacionam.

2.2.3 As representações

As representações estão em tudo que os sentidos dos seres humanos podem alcançar, nelas e por meio delas é possível associar conceitos, características, informações, opiniões e muito mais. Também possibilitam conhecer e mostrar características de objetos matemáticos, indicar propriedades de determinado conceito matemático, qualificar e quantificar objetos,

estruturar novos conhecimentos e assim elencar novas representações.

Duval (2012, p. 269) distingue dois tipos de representações: as semióticas e as mentais. As semióticas são “um meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação” e são, também, “essenciais à atividade cognitiva do pensamento”. Ora, ambas as representações destacadas pelo autor nutrem-se uma à outra, pois possuem uma relação mútua de dependência entre si. Elas podem ser melhor explicadas pelo seguinte:

As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (Duval, 2012, p. 269).

Nesse sentido, Dreyfus (1991) afirma:

[...] representação e abstração são, então, processos complementares em direções opostas: por um lado, um conceito é frequentemente abstraído de várias de suas representações e, por outro lado, as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato. Quando uma única representação de um conceito é usada, a atenção pode estar focada nela, em lugar do objeto abstrato. Entretanto, quando diversas representações são usadas em paralelo, a relação com o conceito abstrato correspondente se torna importante. (Dreyfus, 1991, p. 38).

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval desenvolve pesquisas em psicologia cognitiva desde os anos 1970, oferecendo importantes contribuições para a área de Educação Matemática. Ele foi pesquisador do Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática – IREM de Estrasburgo, França, de 1970 até 1995 e atualmente é professor emérito em Ciências da Educação da Université du Littoral Côte d'Opale, na França.

Dentre outras publicações, sua obra “Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels”, publicada em 1995, constitui o marco de suas produções, por tratar-se da primeira apresentação sistematizada de sua teoria dos Registros de Representação Semiótica. Desde então, essa teoria vem sendo divulgada em diversos países e publicada em vários idiomas. O trabalho em francês é composto por uma introdução seguida de seis capítulos. A primeira parte dessa obra, que segundo o próprio Duval “forma um conjunto por si só e serve para apresentar o quadro teórico global”, foi traduzida para o português com o título “Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais”, pela editora Livraria da Física, em 2009. No Brasil, tal teoria tem ganhado relevância e é comumente citada em diversas pesquisas em Educação Matemática, uma vez que busca analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Segundo a teoria de Duval, numa atividade de ensino, pode-se representar um objeto matemático utilizando os registros de representação semiótica. Conforme esse autor, “um registro é um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios” (DUVAL, 2012, p. 266). Ele escolheu usar o termo “registro” justamente “para distinguir os sistemas semióticos utilizados em matemática e os outros sistemas semióticos utilizados fora da matemática” (Duval, In: FREITAS e REZENDE, 2013). A escolha de tal palavra se justifica por ter sido utilizada por Descartes nas primeiras páginas de sua Geometria e pelo fato desta denominação “registro” também se referir “à extensão dos recursos disponíveis em domínios como a voz, os instrumentos musicais, os modos de se expressar” (Duval, In: FREITAS e REZENDE, 2013).

Desde a mais tenra idade, nas séries iniciais da vida escolar, as aulas de Matemática estão impregnadas de figuras, desenhos, diagramas, tabelas, gráficos, etc. Todas as ideias, as propriedades, as relações e os conceitos da Matemática são abordados mediante o auxílio primoroso de representações. Ocorre que essa ciência possui uma linguagem específica e complexa, podendo um mesmo objeto matemático possuir diversos modos de serem significados e representados. É comum a representação ser empregada na Matemática sob a forma verbal “representar” (Duval, 2012), contudo o modo de representar essa disciplina como é conhecida atualmente é relativamente novo, quando se compara com o longínquo período de desenvolvimento dela. De acordo com Eves (2011, p. 206), “o simbolismo usado nos nossos textos de álgebra elementar ainda não tem 400 anos”.

Durante muito tempo não existia uma maneira específica de representação, elas foram surgindo ao longo dos anos com a contribuição de diversos matemáticos. O desenvolvimento da notação algébrica, por exemplo, segundo Eves (2011), foi surgindo em três estágios: o primeiro a “álgebra retórica”, em que os argumentos da resolução de um problema são escritos apenas em prosa, sem fazer uso de abreviações ou símbolos específicos; o segundo a “álgebra sincopada” na qual se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que mais se repetem; e, finalmente, o último estágio a “álgebra simbólica”, na qual “as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada tem a ver com os entes que representam” (EVES, 2011, p. 206).

A despeito de existirem três estágios, a álgebra retórica, o primeiro, permaneceu predominante em boa parte do mundo por muitos anos. D’Amore (2012, p. 51) destaca que “durante 5 milênios e meio, o ser humano utilizou a álgebra retórica, escrita com palavras, quase totalmente sem símbolos”. De acordo com ele, “há cerca de meio milênio, contraiu-se os termos para agilizar as escritas e, a partir daí, nasceram as notações simbólicas que hoje dominam a

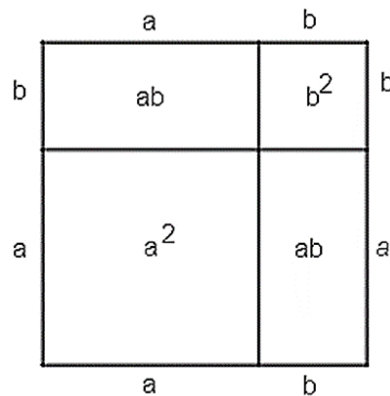
matemática” (D’AMORE, 2012, p. 51). Somente na metade do século XVII é que a álgebra simbólica acabou se impondo em todos os lugares (EVES, 2011, p. 206) e sem a qual a Matemática certamente seria fraca e ineficaz. Entretanto, convém lembrar que mesmo sem esse simbolismo moderno, o homem construiu pirâmides, estradas, pontes, calendários, túneis, monumentos, rotas marítimas, etc., o que indica um triunfo social da Matemática em si, seja simbólica ou não.

Segundo Eves (2011, p. 107), os gregos antigos idearam processos engenhosos para efetuar operações algébricas, embora carecendo completamente de qualquer notação algébrica adequada. O Livro II dos Elementos contém várias proposições que, na realidade, são identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica. Parte considerável dessa álgebra geométrica é atribuída aos pitagóricos e se encontra espalhada por vários dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides (EVES, 2011, p. 107). A exemplo, temos a Proposição 4 do Livro II de *Elementos* de Euclides, que estabelece geometricamente a identidade:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

decompondo o quadrado de lado $a + b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2 , b^2 , ab e ba , como mostra a figura 6 a seguir:

Figura 6- representação geométrica



Fonte: autoria própria

O enunciado de Euclides para essa mesma proposição é: *dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes. Ora, esses são três modos diferentes de representar tal identidade.*

Para Santaella (2007), a difusão das linguagens e dos códigos, dos meios de produção e reprodução de informações e mensagens fez emergir uma “consciência semiótica”. O precursor

ocidental da semiótica foi Charles Peirce, o responsável por sua difusão bem como por sua aplicabilidade em diversas áreas, ao elaborar categorias para se pensar a natureza. Essas categorias se fazem presentes em vários domínios. Peirce observou diferentes tipos de elementos detectáveis nos fenômenos, posteriormente agrupou esses elementos em classes e concluiu que só existem três categorias formais presentes em todos os fenômenos, são elas: a primeiridade - remete à ideia de originalidade, imediaticidade e espontaneidade; a secundidade - diz respeito à ação-reação, conflito, esforço e resistência; e a terceiridade - está ligada à noção de generalidade, mediação e representação.

Pois bem, é justamente a categoria da terceiridade que se associa à ideia do signo, tão estudado pela semiótica, aliás, Ferreira (2005) a define como a “ciência geral dos signos, dos sistemas de significação”. Então a semiótica pode ser entendida como o estudo das relações dos signos, a lógica deles. De acordo com Santaella (1995), há entre vinte e trinta formulações distintas para a definição de signo nos oito volumes dos *Collected Papers* (1931-58), de Charles Sanders Peirce. Entretanto, uma das definições mais divulgadas para a palavra encontra-se na afirmação: “signo é alguma coisa que representa algo para alguém”, da qual decorre a ideia de que uma representação precisa provocar algo a alguém, relativo a seu objeto. Assim, a função precípua de representar é carregar uma informação específica, que não diz tudo sobre o objeto e, ao mesmo tempo, consegue comunicar mais do que o conteúdo da própria representação. Então ela veicula um tipo de informação capaz de proporcionar uma ideia sobre o objeto o qual representa, todavia, na teoria semiótica de Peirce, uma representação não contempla a totalidade de um objeto e o objeto não se confunde com a sua representação.

Logo, é plausível que qualquer estudo em torno dos fenômenos relativos à aquisição de conhecimento demande uma noção de representação e essa mesma noção acabe se impondo tanto na psicologia cognitiva quanto em outras áreas do conhecimento. De fato, segundo Duval (2009), não é possível um indivíduo mobilizar qualquer conhecimento sem realizar uma atividade de representação. Assim, a noção de representar revela-se fundamental para qualquer estudo psicológico que objetive investigar como e quando ocorre a aquisição do conhecimento e o modo como se processam as transformações da representação.

2.2.4 A linguagem da Matemática

Na Matemática, se depara o tempo todo com representações de objetos e conceitos abstratos. Em seu estudo, não há outra coisa, senão representações dos objetos, e não os objetos em si mesmos. Por isso Duval (2012) afirma que as diversas representações semióticas dos

objetos matemáticos são absolutamente necessárias em razão desses não estarem “diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes” (Duval, 2012, p. 268, grifo do autor). Para D’Amore, a Matemática possui uma linguagem específica justamente pelo fato de não ser possível acessar os seus objetos diretamente, uma vez que eles remetem a ideias, conceitos e axiomas.

A referida ciência possui uma linguagem de características peculiares, são elas, a precisão, a concisão e a universalidade. “A língua na qual se faz matemática possui, de fato, um “código semiológico próprio”; isto acarreta diversas convenções, mais ou menos explícitas: há um uso de escritas específicas, as expressões simbólicas, como as fórmulas” (D’AMORE, 2012, p. 45, grifo do autor). Em alguns casos, essas expressões ou códigos estão inseridos em frases constituídas por uma linguagem comum e podem desempenhar duas funções: uma função de designação (recorre-se à designação para nomear um objeto) e outra de localização. Origina-se disso um grande resultado de concisão e de precisão, mas a “densidade” da informação resultante é notável, às vezes superior às capacidades do aluno ao qual é proposta.

Até mesmo a “língua comum, quando utilizada em matemática, aparece bastante complexa devido à sua densidade, porque em poucas palavras precisa fornecer várias informações” (D’AMORE, 2012, P. 4). A título de exemplo, a frase: “O pé da perpendicular traçada de A à reta BC” não pode ser entendida sem fazer uso maciço de competências matemáticas que se considera de pleno domínio; caso o estudante tenha alguma lacuna de um desses substantivos ou verbo utilizados, terá uma dificuldade adicional oriunda da própria língua materna. Ademais, tal frase apresenta uma metáfora, a reta perpendicular não tem “pé”, o termo “pé” aparece ali de forma figurada, e nesse sentido, a depender da maturidade linguística do estudante, a própria metáfora pode não ser bem compreendida.

É inegável que o conhecimento matemático possui características gerais de objetividade, de precisão, de rigor e de certa neutralidade relativa, que até certo ponto o universaliza e o permite aplicar uma única regra em circunstâncias muito diferentes. Aliás, as demais ciências exatas parecem partilhar dessas características ao menos em parte, mas seria possível utilizar um texto matemático, no nível adequado e com a devida compatibilidade dos conteúdos, em qualquer parte do mundo? Nas ciências sociais não existe nem a possibilidade de fazer tal interrogação, pois nesse campo, os enunciados sofrem alterações significativas em função do tipo de sociedade de cada país. Esse caráter universal, peculiar à linguagem matemática possibilita comunicar ideias e proposições a todos que dominem esse sistema linguístico, independente da língua materna que possuam. Embora a linguagem matemática não seja

completamente universal como se possa acreditar, ela certamente está entre as linguagens mais difundidas e aceitas universalmente. D'Amore (2012, p. 181) afirma que nem mesmo a música alcança tamanha universalidade.

Dessa maneira, a Matemática possui uma linguagem específica e bastante complexa, na qual um mesmo objeto pode possuir diferentes significados e variadas representações, e cujos termos nem sempre guardam relação direta com seu significado na língua materna. A linguagem matemática pode ser entendida como um sistema simbólico, com símbolos próprios os quais se relacionam conforme determinadas regras. O conjunto de símbolos e regras deve ser bem compreendido pelo indivíduo que o utiliza, a propósito, para ser apreendida, a linguagem matemática requer processos cognitivos de assimilação e compreensão diferentes daqueles usados na aquisição da língua materna. Essa peculiaridade pode constituir-se em obstáculos para o processo de apropriação de conceitos e procedimentos matemáticos pelos estudantes.

Devlin (2004) acredita que a Matemática e a linguagem sejam inseparáveis. Para ele, “pensar matematicamente é apenas uma forma especializada de usar nossa capacidade para a linguagem” (DEVLIN, 2004, p. 17). Assim, a linguagem matemática pode ser entendida como um processo de “tradução” de elementos da língua materna para uma construção linguística formalizada, específica dessa disciplina. Os enunciados expressos na língua materna passam a ser escritos para o equivalente em símbolos matemáticos, e essa tradução possibilita converter os conceitos matemáticos em objetos mais facilmente manipuláveis e calculáveis. Contudo, extrair as informações de um determinado problema expresso em língua materna e codificá-las em uma ou mais sentenças é, muitas vezes, uma tarefa laboriosa, em razão da especificidade dos símbolos e das regras da Matemática.

Vale considerar também que na língua materna, o sentido atribuído às palavras utilizadas é bastante amplo e, por isso, os termos nem sempre expressam o rigor necessário de uma linguagem formalizada, isto é, o sentido das palavras é muito vago e impreciso. Porém, Machado (1998, p. 91) defende que há uma “impregnação mútua entre a Matemática e a Língua Materna”, caracterizada por sistemas de representações ou por metas que perseguem. Dessa forma, ambas mantêm uma estreita relação; ora, a língua materna, na sua forma escrita ou oral, tem relevante papel na Matemática, assim como nas demais áreas do conhecimento.

Devlin (2004, p. 20) defende a tese de que as “[...] características do cérebro que permitem lidar com a matemática são aquelas mesmas que nos permitem usar a linguagem – falar com os outros e entender o que eles dizem [...]”. Nessa mesma direção, Machado (1998) acredita que existe a possibilidade de se ensinar Matemática, desde as séries iniciais, a partir de uma mediação intrínseca da Língua Materna, baseando-se no pressuposto da participação

efetiva dessa nos processos de ensino daquela; e de igual modo, existe a possibilidade de ensinar a Língua Materna a partir de uma mediação intrínseca com a Matemática. Essa mediação não acontece “apenas tornando possível a leitura dos enunciados, mas sobretudo como fonte alimentadora na construção dos conceitos, na apreensão das estruturas lógicas da argumentação, na elaboração da própria linguagem matemática” (MACHADO, 1998, p. 9).

É possível compreender a importância das representações semióticas na Matemática a partir da afirmação de Duval (2012, p. 266): “as transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade matemática” (Duval, 2012, p. 266). Para ele, “as dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade dessas transformações” (Duval, 2012, p. 266). Assim, o mesmo estudioso entende que as dificuldades de compreensão encontradas na aprendizagem da Matemática não estão relacionadas aos seus conceitos, mas decorrem da variedade de representações semióticas utilizadas e o do uso confuso que se fazem delas.

Por sua vez, D’Amore (2004) entende que todo conceito matemático remete a não-objetos, pois corresponde a ideias e abstrações não necessariamente ligadas à realidade concreta e, portanto, não permitindo reenvios ostensivos. Para ele, todo conceito matemático deve servir-se de representações, pois a Matemática não dispõe de ‘objetos’ para exibir em seu lugar. Logo, a conceitualização deve necessariamente se tornar presente através dos registros representativos, que são bastante variados. Além disso, D’Amore (2004) afirma ser bem mais comum falar de “objetos matemáticos” em vez de conceitos, em suma, é possível entender que, do ponto de vista cognitivo, “a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas e não de conceitos puramente mentais, e, portanto, assemióticos”. (Duval, In: FREITAS e REZENDE, 2013).

D’Amore (2006) considera que os signos são a representação adequada dos significados, mas são também artefatos, objetos linguísticos (em sentido amplo) constituídos de termos que têm o objetivo de representar para indicar, proporcionando, assim, sua objetivação. Já Duval (2011) vê semelhanças entre representação e signo, semelhanças que decorrem justamente de ambos possuírem a função “[...] de ‘se colocar no lugar’ daquilo que eles representam ou designam e surgem da mesma exigência epistemológica fundamental que é jamais se confundirem com os próprios objetos [...]” (DUVAL, 2011a, p. 37); outra similaridade é que ambos provêm da natureza da relação com os próprios objetos. Para Duval (2011, p. 37), “[...] A relação entre os signos e os objetos não contém nenhuma interação, mas é apenas uma relação de referência dependendo do sistema semiótico utilizado, a língua, um sistema de numeração, etc.[...]”.

Ainda conforme Duval (2012), o acesso aos objetos matemáticos depende de uma atividade semiótica, pois não é possível acessá-los perceptivamente. Porém, um objeto matemático não pode confundir-se com suas representações, ao contrário deve ser reconhecido em cada uma delas. De acordo com o autor, para uma representação funcionar verdadeiramente, ela deve dar acesso ao objeto representado; o caráter inacessível do objeto matemático levou Duval a concluir que cada representação traz consigo elementos característicos do objeto representado, assim é possível fazer o reconhecimento dos objetos matemáticos sob suas diferentes representações. Na concepção de Duval, é a conversão das várias representações sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento. Sua teoria sobre a aprendizagem matemática através da mobilização de, ao menos, um par de registros para um mesmo objeto converge para a ideia de Peirce e se assemelha às relações idealizadas por ele.

2.3 Os objetos da Matemática

Na filosofia, 'objetos mentais' são chamados de 'representações mentais', os objetos matemáticos estão entre esses tipos de objetos mentais. Connes e Changeux (1996) afirmam que os objetos matemáticos têm uma realidade distinta da realidade material, eles entendem que os objetos matemáticos são “seres fictícios... que existem... apenas nos neurônios e nas sinapses que os matemáticos produzem” (Changeux e Connes, 1996, p. 21). Similarmente a Descartes, eles veem os objetos matemáticos com realidade distinta da material, embora se saiba que desde Pitágoras e Platão já se sustentava que os objetos matemáticos não podem ser reduzidos a propriedades sensíveis ou material. Na mesma perspectiva, temos o seguinte esclarecimento:

A matemática é quase inteiramente cerebral - o verdadeiro *trabalho* é feito não em laboratório ou escritório ou fábrica, mas sim na cabeça. É claro que a cabeça está presa ao corpo, o qual pode estar em um escritório (ou no sofá), mas a matemática propriamente dita está no cérebro, sem nenhuma conexão direta com coisa alguma no mundo físico. Isso não quer dizer que outros cientistas não exerçam trabalho mental. Mas na física ou química ou biologia, o objeto do pensamento do pesquisador é geralmente algum fenômeno do mundo físico. (DEVLIN, 2008, p. 24, grifo do autor).

Apesar de os objetos matemáticos serem tipos de representações mentais, estas se realizam no cérebro, e o cérebro é um elemento biológico que constrói representações a partir das propriedades que lhe são intrínsecas. Por exemplo, uma descoberta matemática pode significar a manifestação ou a expressão de um resíduo cerebral do matemático e implementar um novo objeto. Assim, a construção dos objetos matemáticos parece coincidir com a evolução da anatomia do cérebro.

Parece haver consenso de que a Matemática é uma disciplina difícil, são muitas dificuldades encontradas por alunos e professores no processo de construção do conhecimento matemático. Por um lado, o professor tem consciência de que não atingiu resultados satisfatórios; por outro, o aluno parece não conseguir entender a Matemática que lhe é ensinada na escola. Diante disso, torna-se relevante procurar soluções que facilitam o processo de construção do conhecimento matemático, e uma das saídas apresentadas pelo senso comum pedagógico é trabalhar no concreto, ou seja, conduzir o aluno a pensar a partir do concreto, o que significa fazer uso de materiais didáticos manipuláveis. Porém, nenhum recurso utilizado, seja manipulável ou de outra natureza, constitui solução mágica para a melhoria do ensino da Matemática, a eficácia ou não do material didático vai depender da maneira como será utilizado.

Miguel (2005), ao analisar as dificuldades de alunos e professores no processo de compreensão dos conceitos matemáticos, constatou que, geralmente, as crianças gostam de Matemática nas séries iniciais. Porém, essa afinidade vai diminuindo com o passar dos anos, chegando muitas vezes a tornar-se uma aversão. Silva (2008) também demonstrou a baixa afinidade dos estudantes com a Matemática ao realizar uma pesquisa com perguntas abertas a esses sujeitos, e os resultados obtidos pela pesquisadora apontaram o seguinte: cerca de um quarto dos alunos não acredita ser capaz de obter um bom desempenho em Matemática; apenas uma pequena parte dos estudantes sente prazer em aprender e estudar essa disciplina; uma outra parte, um pouco maior que a anterior, se sente fracassada e incapaz de aprender a matéria; já a maioria disse que gostaria mais da Matemática se não fosse tão difícil e que, caso isso ocorresse, se esforçaria para aprendê-la, mas apenas para ‘passar de ano’ e obter êxito profissional no futuro.

Os resultados do desempenho dos estudantes nas avaliações externas evidenciam essas dificuldades, apontando para um baixo aprendizado em Matemática. Esses resultados indicam que uma parcela significativa dos estudantes não atinge os níveis mínimos de aprendizagem de cada uma das etapas da Educação Básica. O PISA, apesar de não avaliar necessariamente uma determinada etapa de ensino, mas sim uma faixa etária (15 anos), também aponta um baixo aprendizado dos estudantes brasileiros em Matemática. De acordo com a edição do programa realizada em 2018, cerca de 68,1% dos estudantes brasileiros não possuem o nível básico de Matemática, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Em Ciências e em Leitura, o resultado é um pouco melhor, cerca de 55% e 50% não possuem o nível básico, respectivamente. É possível que essas avaliações evidenciassem uma realidade ainda mais alarmante, caso aspectos como o pensamento crítico e a criatividade fossem contemplados nesses exames.

2.4 O que é o PISA?

O Programme for International Student Assessment (PISA), traduzido para o português como Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, constitui um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O PISA fornece informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países, o que não é o caso do Brasil. Aos 15 anos, os estudantes brasileiros ainda não concluíram o Ensino Médio, e tal fato gera dados distorcidos da realidade em que se encontra a educação básica brasileira.

O principal objetivo do PISA é produzir indicadores que possam contribuir para a discussão da qualidade da educação nos países participantes e possibilitar possíveis melhorias. Em suma, os indicadores se dividem em três grupos: os que fornecem um perfil básico de conhecimento e habilidades dos estudantes; os que são derivados de questionários que mostram como tais habilidades são relacionadas às variáveis demográficas, sociais, econômicas e educacionais; e aqueles de tendências sobre o desempenho dos estudantes e o monitoramento dos sistemas educacionais ao longo do tempo. Esses indicadores permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades de seus aprendizes, compare o desempenho destes com o desempenho de estudantes de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outras nações e formule suas políticas e programas educacionais visando à melhoria da aprendizagem.

O PISA tornou-se uma relevante referência de avaliação educacional em larga escala no contexto mundial, e sua primeira edição foi realizada no ano 2000. Desde então, o número de países e economias participantes tem aumentado a cada ciclo, e o Brasil participa desde o início da pesquisa. Em 2018, 79 países participaram do programa, 37 deles são membros da OCDE e 42 países/economias parceiras. Ao todo, cerca de 600.000 alunos participaram dessa edição do PISA, dos quais 10.691 eram matriculados em 597 escolas espalhadas pelo território brasileiro. E estes 600.000 estudantes representam cerca de 32 milhões de jovens de 15 anos matriculados nas escolas dos países participantes.

Os dados da edição de 2018, cujo foco foi o domínio de Leitura, trouxeram um resultado geral pouco animador. Segundo o relatório divulgado, apenas 2% dos alunos avaliados pelo PISA no Brasil atingiram os níveis mais altos de proficiência em pelo menos um dos três principais domínios abordados pela prova: Leitura, Matemática e Ciências; por outro lado, 43% dos estudantes tiveram pontuação abaixo do nível mínimo de proficiência em todas as

disciplinas. Na média da OCDE, esses números são de 16% e 13%, respectivamente, e a proficiência no nível 2 é considerada como o nível mínimo que todos os estudantes devem adquirir até o final do Ensino Médio.

O PISA avalia três domínios básicos em cada edição: Leitura, Matemática e Ciências, sendo que um deles é destacado pela OCDE como principal, o que significa que haverá maior número de itens no teste dessa área do conhecimento e que os questionários se concentram na coleta de informações relacionadas à aprendizagem nesse domínio. A intercalação do foco da avaliação entre as áreas do conhecimento a cada edição do PISA permite um olhar mais atento sobre determinado âmbito, além de possibilitar tempo para o desenvolvimento de políticas públicas, uma vez que leva nove anos para uma área voltar ao foco. A avaliação também contempla os chamados domínios inovadores, como Resolução de Problemas, Letramento Financeiro e Competência Global, entretanto, o Brasil não fez a avaliação desse último na edição de 2018.

A avaliação do PISA é realizada de forma amostral, isso significa que são escolhidas escolas para compor uma amostra da realidade total do país. O principal desafio dessa tarefa, ainda mais no Brasil que possui dimensões continentais, é refletir a situação de instituições públicas e privadas, estados e regiões e estudantes com diferentes níveis socioeconômicos. Todavia, o caráter amostral da avaliação facilita a sua operacionalização, visto que o PISA conta, além das tradicionais questões de múltipla escolha, com questões dissertativas, o que lhe garante um formato diferente de outras avaliações externas. Apesar da importância das questões dissertativas, seria difícil viabilizá-las se a prova não fosse de caráter amostral.

Obviamente, os resultados do PISA são úteis, assim como os resultados das demais avaliações externas, mas devem ser analisados com cautela por diferentes motivos: primeiro porque o programa é uma fotografia muito instantânea para julgar a educação de um país, o espectro da educação é complexo demais para ser avaliado com um único índice; segundo porque a avaliação não abrange todo o cenário nacional; e terceiro porque o fato do PISA ser realizado pela OCDE, uma organização ligada à economia e não à educação, também deve ser motivo para redobrar as ressalvas. Tomados os devidos cuidados, os indicadores trazidos pelo PISA representam uma ferramenta importante para elaborar estratégias e políticas educacionais. Dito de outro modo, os dados do programa podem não revelar toda a verdade, mas trazem pelo menos uma parte dela.

Outro órgão que traz avaliações e resultados relevantes para a Educação é o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, vinculado ao Ministério da Educação. Esse instituto é responsável pelo planejamento e a operacionalização da avaliação

no Brasil. Suas atribuições são: representar o país perante a OCDE, coordenar a tradução dos instrumentos de avaliação, organizar a aplicação desses instrumentos nas escolas amostradas e a coleta das respostas dos participantes, coordenar a codificação dessas respostas, analisar os resultados e elaborar o relatório nacional.

O relatório nacional elaborado pelo INEP traz análises e reflexões sobre o nível de proficiência dos estudantes brasileiros nas três áreas temáticas (Matemática, Leitura e Ciências) e o histórico de anos anteriores, bem como traz o contexto social em que os jovens estão inseridos e o impacto desse contexto nos resultados. O documento trata de questões como o perfil socioeconômico dos alunos, dados sobre clima escolar e condições de aprendizagem, informações sobre equidade e percepções dos estudantes. Uma das abordagens apresentadas é que o contexto social no qual o estudante está inserido interfere diretamente no seu desempenho escolar, quanto melhor for a sua condição social, maiores são as oportunidades de acesso à educação e, com isso, melhor é o desempenho na escola. Um em cada dez estudantes pobres, na faixa etária de 15 anos, acredita que não vai concluir o ensino superior; já no caso dos mais ricos, a média é de 1 em cada 25.

Segundo o “Relatório Brasil no PISA 2018” (p. 29), elaborado pelo INEP, a participação do Brasil no ciclo de 2018 contou com uma amostra de 597 escolas e 10.691 estudantes avaliados, distribuídos por todo o território nacional, e apresentou resultados com precisão estatística adequada no âmbito nacional e nas grandes regiões geográficas. Os resultados da avaliação do PISA são relatados em formatos variados. É possível obter uma apuração geral através do resultado médio das proficiências, ou perquiri-la por meio dos níveis de proficiência descritos. Esses resultados também podem ser observados sob uma perspectiva internacional ou sob uma perspectiva nacional.

Na edição do PISA de 2018, a média de proficiência em Matemática dos estudantes brasileiros foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos alunos dos países da OCDE, os 10% dos estudantes brasileiros, cujo desempenho em Matemática foi pior, alcançaram média de proficiência igual a 277, e os 10% de melhor desempenho, 501.

A tabela a seguir traz as médias de proficiência do Brasil na série histórica do PISA nos três domínios: Matemática (desde 2003, quando foi escalada como domínio pela primeira vez), Leitura e Ciências (desde 2006, quando a escala desse domínio foi desenvolvida).

Tabela 1- médias de proficiência do Brasil na série histórica do PISA.

Brasil	2000	2003	2006	2009	2012	2015	2018
Matemática	-	356	370	386	389	377	384
Leitura	396	403	393	412	407	407	413
Ciências	-	-	390	405	402	401	404

Fonte: Relatório PISA

Embora a média de proficiência em Matemática em 2018 tenha aumentado 7 pontos em relação a 2015, com 384 e 377 pontos respectivamente, esses valores não são estatisticamente diferentes quando se leva em conta os intervalos de confiança. Através dos dados da tabela 1, infere-se que a média de proficiência do Brasil em Matemática melhorou no período de 2003 a 2018, porém a parte mais significativa dessa melhora ocorreu até 2009. Desde então, essa média vem oscilando em torno de 385 pontos.

Os resultados dos países no PISA também podem ser analisados por meio dos níveis de cada escala de proficiência, a escala de Matemática, por exemplo, apresenta seis níveis. De acordo com o Relatório Brasil no PISA 2018, em Matemática, apenas 31,7% dos estudantes brasileiros alcançaram o nível 2 ou o ultrapassaram, em contraste a 76,0% dos estudantes dos países da OCDE. Dito de outro modo, 68% deles não atingiram o nível mínimo de proficiência, o que é ainda mais desolador. Segundo a OCDE, é importante atingir ao menos o nível 2, pois este é considerado o básico de proficiência que se espera de todos os jovens, para que possam desfrutar de novas oportunidades de aprendizagem, bem como participar plenamente da vida social, política e econômica da sociedade contemporânea. Na outra ponta, somente 0,1% dos alunos brasileiros alcançaram o nível máximo em Matemática, contra 2,4% dos alunos na média OCDE.

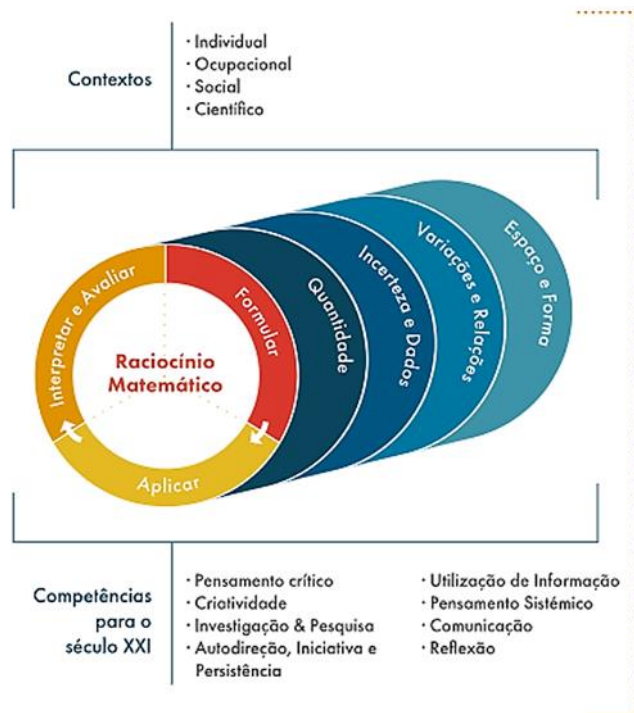
Por causa da pandemia de COVID-19, os países membros e associados da OCDE decidiram adiar a avaliação do PISA 2021 para 2022 e a de 2024 para 2025. A edição desse programa teve Matemática como domínio principal da edição e seus resultados serão importantes para mensurar o déficit educacional causado pela suspensão das aulas presenciais durante a pandemia do Coronavírus. Segundo relatório do Banco Mundial, mais de 1,5 bilhão de alunos ficaram sem estudos presenciais em 160 países entre o ano de 2020 e 2021. Em algumas regiões, a proposta de ensino à distância durante a pandemia não foi possível devido à dificuldade de acesso à internet em casa e de aparelhos celulares e computadores.

O PISA 2022 ocorreu em todo o Brasil, no período de 18 de abril a 31 de maio de 2022, em formato eletrônico. A avaliação foi aplicada a cerca de 14 mil estudantes de faixa etária de

15 anos, matriculados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. Apesar dos desafios logísticos, operacionais e pedagógicos enfrentados pelo momento de retomada das atividades escolares presenciais, a participação do Brasil foi satisfatória, com números que superaram a taxa mínima de 80% de participação exigida pela OCDE. Um dos desafios foi a necessidade de convencer as escolas amostradas a participarem, pois algumas dessas escolas ainda se encontravam em ensino remoto ou híbrido, e a avaliação não é obrigatória. Ao todo, 606 escolas de 420 municípios brasileiros foram selecionadas para participar do exame. Os números ainda são preliminares e, por esse motivo, podem sofrer pequenos ajustes quando o resultado final do exame for divulgado em dezembro de 2023.

O PISA 2022⁶ trouxe uma nova abordagem, com enfoque na criatividade e no pensamento crítico. Além disso, compreendeu a Matemática como ferramenta para formular juízos e decisões não-rotineiros para utilização individual e coletivamente, impulsionada por novas tecnologias e tendências nas quais os cidadãos devem ser criativos, inserida no contexto de um mundo que muda rapidamente. Contudo, a avaliação de Matemática do PISA 2022 continua ancorada no conceito de letramento matemático (literacia matemática) que sempre fez parte da estrutura do conceitual desse programa. Isso pode ser inferido através do quadro conceitual do PISA (figura 7).

Figura 7- quadro conceitual do PISA 2022.



Fonte: PISA 2022

⁶ Disponível em: <<https://pisa2022-maths.oecd.org/pt/index.html>>. Acesso em: 23 ago. 2022.

A estrutura da avaliação de Matemática do PISA relaciona o raciocínio matemático a três processos da resolução de problemas: formular; aplicar; e interpretar e avaliar. O conteúdo matemático da edição de 2022 retoma quatro dimensões do Pisa de 2012, enfatizando fenômenos de crescimento (variações e relações), aproximação geométrica (espaço e forma), simulações de computador (grandeza) e tomada de decisão condicionada (incerteza de dados). Esse conteúdo está dividido em quatro categorias, são elas “quantidade”, “incerteza de dados”, “variações e relações” e “espaço e forma”. O quadro conceitual do PISA 2022 descreve também quatro contextos nos quais os estudantes enfrentarão desafios matemáticos: individual, ocupacional, social e científico.

Embora os itens de Matemática do PISA 2022 não tenham sido especificamente desenvolvidos com base nas chamadas competências do século XXI, os responsáveis pela produção dos itens reconhecem essas competências. Nos últimos anos houve um aumento do interesse por tais competências e sua possível introdução nos sistemas educativos. A própria OCDE, que organiza o PISA, publicou um documento no qual tratou dessa questão e financiou o projeto de investigação intitulado “O Futuro da Educação e das Competências: Educação 2030”. Eis algumas competências do século XXI: pensamento crítico; criatividade; investigação e pesquisa; autodireção, iniciativa e persistência; utilização de informação; pensamento sistêmico; reflexão.

Para além dessa avaliação de cunho internacional, o Brasil também realiza avaliações nacionais, com o objetivo de averiguar a qualidade da educação oferecida aos estudantes. Algumas dessas avaliações são voltadas para o ensino fundamental nos anos iniciais, outras atendem aos anos finais do ensino fundamental, e outras ainda atendem ao ensino médio. Uma parte delas foi unificada no bloco de avaliações do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), que foi reestruturado em 2019 e agora contempla as três etapas da educação básica: a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. O SAEB compreende um conjunto de avaliações externas em larga escala, as quais permitem realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante. Inclusive, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) é composto pelas médias de desempenho obtidas pelos estudantes nas avaliações do SAEB, e pelas taxas de aprovação, reprovação e abandono apuradas no Censo Escolar.

Acontece que a principal legislação sobre a educação vigente no Brasil é a Lei Federal nº 9.394/96, também conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Esse documento legal segue os princípios norteadores estabelecidos na Constituição Federal e, dentre outras disposições, estabelece vários deveres atribuídos aos poderes públicos. No seu

artigo 9º são firmadas as incumbências da União, entre as quais está justamente a de “assegurar processo nacional de avaliação do rendimento escolar no ensino fundamental, médio e superior, em colaboração com os sistemas de ensino, objetivando a definição de prioridades e a melhoria da qualidade do ensino” (BRASIL, 1996, art. 9º, grifos nossos).

A Constituição Federal de 1988 trata da educação na “SEÇÃO I” do capítulo III “DA EDUCAÇÃO, DA CULTURA E DO ESPORTE”, artigos 205 a 214. Esse dispositivo legal estipula as diretrizes gerais da educação no país, e seu artigo 211 estabelece: “a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios organizarão em regime de colaboração seus sistemas de ensino” (BRASIL, 1988, art. 211). O parágrafo primeiro desse mesmo artigo diz que a União “exercera, em matéria educacional, função redistributiva e supletiva, de forma a garantir equalização de oportunidades educacionais e padrão mínimo de qualidade do ensino mediante assistência técnica e financeira aos Estados, ao Distrito Federal e aos Municípios”.

3 A EDUCAÇÃO BRASILEIRA

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.

Paulo Freire

3.1 Dispositivos legais que regem a educação brasileira

A redemocratização do país, culminada com a aprovação da Constituição Federal de 1988 pela Assembleia Nacional Constituinte, demandou a formação de um indivíduo que possua um conhecimento mais substancial de sua realidade. Promulgada em 5 de outubro de 1988, após 21 anos de regime militar, a Constituição Cidadã, além de assegurar a liberdade de pensamento, trouxe mecanismos para evitar abusos de poder por parte do Estado. Esse cenário do pós-redemocratização fez muitos educadores advogarem, com bastante ênfase, a defesa da contextualização do conhecimento escolar. Notadamente, foi um impulso importante na direção de um processo de transformação da escola o qual ainda não acabou.

3.1.1 A revolução trazida pela Constituição Federal de 1988

A intervenção normativa democrática, promovida através da promulgação da Constituição Federal de 1988, permitiu a ruptura da ordem vigente implantada pela ditadura militar e deu-lhe novos contornos organizacionais, balizando na direção de uma cidadania para todos. Foi nesse contexto que a educação, dada a sua inerência à cidadania e aos direitos humanos, foi positivada como um direito. O artigo 205 da Constituição Federal de 1988 é claro ao dizer: “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 1988, art. 205 – grifos nossos). E reforçando essa definição, o artigo 6º da Constituição Federal destaca a educação como o primeiro dos direitos sociais:

Art. 6º São direitos sociais a educação, a saúde, a alimentação, o trabalho, a moradia, o transporte, o lazer, a segurança, a previdência social, a proteção à maternidade e à infância, a assistência aos desamparados, na forma desta Constituição. (Redação dada pela Emenda Constitucional nº 90, de 2015) (BRASIL, 1988, artigo 6º).

Os direitos sociais, cuja observância é obrigatória num Estado Social de Direito, constituem as liberdades positivas e têm por objetivo a melhoria das condições de vida dos

hipossuficientes, visando à concretização da igualdade social. Ademais, a CF de 1988, além de conceber a educação como um direito social, concebeu o acesso ao ensino obrigatório e gratuito, a educação básica como um direito público subjetivo cuja falta ou oferta irregular pelo poder público importa responsabilidade da autoridade competente. Aliás, essa Constituição Federal recebeu o epíteto de “Constituição Cidadã” justamente por criar um verdadeiro Estado Democrático-Social de Direito, com a previsão de uma vasta quantidade de obrigações para o Estado, traduzidas em prestações positivas à população em geral.

A ideia de Educação Básica concebida nessa Constituição incorporou mudanças significativas no pacto federativo quanto à utilização pedagógica das instituições escolares. A educação básica com enfoque para a cidadania representou um avanço bastante importante, uma vez que a educação é, em si mesma, um pilar da cidadania. A Constituição Federal de 1988 colocou ainda a cidadania como um dos fundamentos do país, conforme se pode observar no artigo 1º, o qual diz que a República Federativa do Brasil tem “como fundamentos a soberania, a cidadania, a dignidade da pessoa humana, os valores sociais do trabalho e da livre iniciativa e o pluralismo político” (BRASIL, 1988, art. 1º – grifo nosso). Assim, o conceito de Educação Básica, inserido na CF de 1988, foi mais do que inovador para um país que, durante séculos, negou à maioria de seus cidadãos, o direito ao conhecimento pela ação estruturada da organização escolar. Desse modo, a educação básica deve ser objeto de uma política educacional de igualdade concreta e que faça jus à educação ser tratada como o primeiro direito social inscrito na CF, como direito civil inalienável dos direitos humanos e como direito político da cidadania (CURY, 2005).

Deveras, a primeira Constituição (1824) e a segunda (1891) não fizeram qualquer menção à palavra educação. Embora fosse subentendido que o estado tinha o dever de educar, não havia nenhuma intervenção, a nível nacional ou local, na direção de uma política pública para isso. Aliás, até o final da década de 1920, a pedagogia do Brasil ainda reproduzia o pensamento medieval, que se baseava em um ensino jesuítico tradicional sobre o qual Gadotti (1993, p. 231) diz:

Os jesuítas nos legaram um ensino de caráter verbalista, retórico, livresco, memorístico e repetitivo, que estimulava a competição através de prêmios e castigos. Discriminatório e preconceituoso, os jesuítas dedicaram-se à formação das elites coloniais e difundiram nas classes populares a religião da subserviência, da dependência e do paternalismo, características marcantes de nossa cultura ainda hoje. Era uma educação que reproduzia uma sociedade perversa, dividida entre analfabetos e sabichões, os “doutores”.

De acordo com Arroyo (2015), em nossa civilização, a educação foi concebida com base

no pensamento hegemônico, que a entende como uma forma de perpetuar nossas relações colonialistas e raciais. Nesse sentido, o processo de escolarização, ao longo da história educacional brasileira, serviu para o aniquilamento de muitas culturas tradicionais. Para Gadotti (2015), foi apenas em 1930, quando a classe urbano-industrial chegou ao poder, que se passou a defender a educação pública; e quatro anos depois, na Constituição de 1934, foi criado o primeiro capítulo inteiro dedicado à educação, incumbindo à União a responsabilidade de traçar as “diretrizes da educação nacional”.

Ao alçar a cidadania como fundamento da República Federativa do Brasil, o constituinte de 1988 o fez utilizando o sentido abrangente dessa expressão, e não apenas o técnico-jurídico. Assim, a cidadania enunciada no texto constitucional não se satisfaz com a mera atribuição formal de direitos políticos ativos e passivos aos brasileiros que atendem os requisitos legais, ela deve ser considerada, portanto, como está posta no Estado Democrático de Direito em sentido amplo, abrangendo os direitos civis, políticos, sociais, humanos. O exercício da cidadania deve nortear-se por uma participação efetiva, pela ampliação dos direitos individuais e coletivos e pelo respeito à diversidade cultural e social.

A origem da palavra “cidadania” vem do latim *civitas*, que quer dizer cidade. O termo latino *civitas*, por sua vez, provém de *civis*, e este do indo-europeu *kei-wi* cujo significado é “alguém da casa, membro da família”. Em ulterior ampliação, tal termo passou a significar o membro da cidade, do estado, da comunidade. Conceitualmente, parece não haver definições muito precisas à denominação de cidadania, mas para Ferreira (2005), ela significa condição de cidadão, definido como o “indivíduo no gozo dos direitos civis e políticos de um Estado”. Dessa forma, a cidadania está intimamente ligada à noção de direito, chegando a confundir-se com a própria prática dos direitos humanos. Cidadãos seriam, então, os portadores de direitos.

A cidadania é construída nos relacionamentos sociais e institucionais, é presumível que a consciência cidadã depende de um processo que tenha por base uma política nacional de educação, na qual educar seja sempre um ato político. Todavia, a educação tanto pode reduzir-se à função adaptativa, reproduzindo a ideologia dominante, como também pode ser emancipadora. De acordo com Gramsci, “toda relação de ‘hegemonia’ é necessariamente uma relação pedagógica, que se verifica não apenas no interior de uma nação, entre as diversas forças que a compõem, mas em todo campo internacional e mundial, entre conjuntos de civilizações nacionais e continentais” (GRAMSCI, 1981, p. 37, grifo do autor).

Nesse sentido, Freire (1996, p. 14, grifo do autor) afirma “que *formar* é muito mais do que puramente *treinar* o educando no desempenho de destrezas”, a dominação das consciências ocorre por oferecer uma ilusória sensação de liberdade. Portanto, é preciso formar para a

consciência, ou seja, transformar a educação num processo contínuo de criação, de crítica e de transformação do eu e da sociedade. Daí a necessidade de crítica permanente “à malvadez neoliberal, ao cinismo de sua ideologia fatalista e a sua recusa inflexível ao sonho e à utopia” (FREIRE, 1996, p. 14). Seguindo o pensamento gramsciano, é possível considerar o subsequente:

[É] através da sociedade civil que a classe dominante exercerá sua hegemonia sobre as classes subalternas a fim de obter o seu consentimento, sua adesão e apoio. Para tornar-se dirigente e não apenas dominante, a classe economicamente dominante deve convencer o conjunto da sociedade de que ela é a mais apta, a mais preparada para exercer o poder, que ela representa os interesses de toda a sociedade, essa hegemonia será exercida pela cultura e pela ideologia. (GADOTTI, 1988, p. 67)

Para Kapuziniak (2000), o exercício da cidadania ocorre na sociedade capitalista de forma conflituosa e se caracteriza por avanços e recuos em termos de direitos sociais, segundo a capacidade de organização das classes dominadas. Conforme a autora, a construção do espaço público para o exercício da cidadania tem, nos direitos humanos, um referencial que norteia o embate político e traça sendas de superação da dominação. Contudo, há de se ponderar que o próprio Estado – como representação simbólica desse espaço – tanto pode ser posto a serviço da dominação quanto da libertação. Porém, o mesmo discurso usado pela classe dirigente para dominar e impor uma determinada concepção de mundo à classe dominada pode ser transformado em discurso subversivo. Faz-se necessário, então, a classe dominada manter vivo dentro de si o gosto da rebeldia e da insubmissão, que aguça a curiosidade num permanente movimento de procura, baseado na inconclusão do ser humano. Pode ser a utopia convertida em alavanca de transformação.

Ademais, vale ressaltar que, embora as expressões “direitos humanos” e “direitos fundamentais” sejam utilizadas com o mesmo significado, há um traço distintivo entre elas. A primeira refere-se àquelas reivindicações de permanente respeito a certas posições essenciais ao homem, trata-se de direitos postulados em bases jusnaturalistas, de índole filosófica, e não tem como característica básica a positivação em uma ordem jurídica particular. Já a segunda expressão corresponde aos direitos relacionados às pessoas, inscritos em textos normativos de cada Estado. Tais direitos vigoram apenas numa ordem jurídica particular e são, em razão disso, garantidos e limitados no tempo e no espaço.

Os primeiros direitos fundamentais têm o seu surgimento atrelado à necessidade de impor limites e controles aos atos praticados pelo Estado. Desse modo, os direitos de primeira geração, ou num termo mais técnico “primeira dimensão”, marcaram a passagem de um estado

autoritário para um Estado de Direito, numa clara perspectiva de absentéismo estatal. Os direitos de primeira dimensão são, portanto, as chamadas liberdades individuais, cujo foco é a liberdade do homem individualmente considerado, sem qualquer preocupação com as desigualdades sociais. Eles são denominados direitos negativos, liberdades negativas, ou ainda direitos de defesa, justamente por impor restrições à atuação do Estado, por exigir dele uma abstenção e um não fazer em respeito à liberdade individual. Tais direitos referem-se às liberdades públicas, aos direitos civis e políticos.

Os direitos fundamentais de segunda dimensão acentuam a passagem do Estado liberal, de cunho individualista, para o Estado social, centrado na proteção dos menos favorecidos e na busca da igualdade (substancial, real e material, e não apenas formal) entre os homens. Assim, esses direitos correspondem àqueles de participação e são realizados através da implementação de políticas e serviços públicos, exigindo do Estado um conjunto de prestações, tais como saúde, educação, trabalho, habitação, previdência social, assistência social, dentre outras. Dessa forma, os direitos de segunda dimensão demandam a existência de um Estado prestacionista, intervencionista e realizador da chamada justiça distributiva; são, por esse motivo, denominados direitos positivos, direitos do bem-estar, liberdades positivas ou direitos dos desamparados.

Os direitos de terceira dimensão consagram os princípios da solidariedade e da fraternidade, evidenciando, assim, os direitos transindividuais. Logo, eles vão além dos interesses do indivíduo, ou seja, protegem interesses de titularidade coletiva ou difusa, assistem a todo o gênero humano. O ser humano está inserido numa coletividade e, por isso, passa a ter direitos coletivos ou de fraternidade, como por exemplo: o meio ambiente ecologicamente equilibrado, a autodeterminação dos povos, a defesa do consumidor, o direito à paz, etc. Tanto o Estado quanto a coletividade incubem-se, de maneira especial, de defender e preservar, em benefício das gerações presentes e futuras, esses direitos de titularidade coletiva e cunho transindividual.

Desse modo, o núcleo da esfera de proteção dos direitos fundamentais de primeira, segunda e terceira dimensões corresponde ao lema da Revolução Francesa: Liberdade, igualdade e fraternidade. Contudo, para que os direitos fundamentais se efetivem materialmente, é necessário que o poder público atue de modo a incentivar e oferecer condições propícias para a efetiva participação política dos indivíduos, fazendo valer seus direitos. E o caminho para este exercício da cidadania passa por uma sólida política pública de educação.

Enfim, o exercício da cidadania deve constituir-se como contexto relevante, perpassando por todo o currículo escolar e vinculando-se às práticas sociais, culturais e

políticas, bem como à realidade cotidiana, à vida pessoal e à convivência. A própria realização plena dos direitos de cidadania aos indivíduos se faz também pela luta ao acesso do saber escolar. “O status de cidadania, portanto, passa necessariamente pelo direito ao acesso ao conhecimento historicamente elaborado” (GIARDINETTO, 1999, p. 91).

3.1.2 A Lei Magna da educação brasileira

Em 1996, cumprindo o mandamento constitucional, foi aprovada a Lei Magna da educação brasileira, a Lei Federal nº 9394/96, também conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). O artigo 1º desta lei diz: “A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais” (BRASIL, 1996, art. 1º – grifos nossos). Conforme o 1º parágrafo deste mesmo artigo, a LDB “disciplina a educação escolar, que se desenvolve, predominantemente, por meio do ensino, em instituições próprias” (BRASIL, 1996, art. 1º, § 1º). E no 2º parágrafo, fica clara a vinculação da educação escolar tanto ao mundo do trabalho quanto à prática social, uma vez que se pode ler: “A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social” (BRASIL, 1996, art. 1º, § 2º – grifos nossos). Percebe-se, pela expressão “deverá vincular-se”, que essa vinculação não é facultativa.

O 2º artigo desta mesma lei diz que a “A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 1996, art. 2º – grifo nosso). Desse modo, as finalidades da educação devem ser propiciar o pleno desenvolvimento do educando, prepará-lo para o exercício da cidadania e qualificá-lo para o trabalho. Ademais, finalidades não podem ser confundidas com objetivos, uma vez que estes dizem respeito à operacionalização, implicam mediações e possuem caráter mais imediato; e as finalidades têm um longo alcance, de alçada maior e mais ampla e dizem respeito à meta ou às metas que se perseguem.

A ideia de vinculação prevista no parágrafo 2º do artigo 1º é reforçada no artigo 3º do mesmo dispositivo legal, no qual se pode ler que o ensino deve ser ministrado com base, entre outros princípios, na “valorização da experiência extraescolar” (BRASIL, 1996, art. 3º, inciso X) e na “vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais” (BRASIL, 1996, art. 3º, inciso XI). De acordo o artigo 21 da LDB, a educação escolar é composta por “educação básica, formada pela educação infantil, ensino fundamental e ensino médio” (BRASIL, 1996,

art. 21, inciso I) e “educação superior” (BRASIL, 1996, art. 21, inciso II). Nas disposições da LDB, “A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores” (BRASIL, 1996, art. 22– grifos nossos). A mesma lei diz ainda que os conteúdos curriculares da educação básica devem observar “a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática” (BRASIL, 1996, art. 27, inciso I).

A LDB foi a base legal que permitiu a construção e implementação das mudanças curriculares propostas para o Ensino Médio nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCN). E os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN), cuja construção ocorreu de forma concomitante à elaboração das diretrizes, foi o instrumento responsável pela difusão dos princípios da reforma curricular. Esses parâmetros, em conformidade com as diretrizes, dão destaque para a contextualização, através de um currículo que objetive proporcionar significado ao conhecimento escolar, promova a interdisciplinaridade e estimule o raciocínio e a capacidade de aprender.

O Ensino Médio, etapa final da educação básica cuja duração mínima é de três anos, apresenta, conforme a LDB, artigo 35, as seguintes finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 1996, art. 35 – grifo nosso).

Como se pode notar, por meio do seu artigo 35, a LDB deu nova identidade ao Ensino Médio, reforçando o caráter de terminalidade dessa etapa de escolarização, ao dispor que: “O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos” (BRASIL, 1996, grifo nosso). Assim, a reforma do ensino, da qual a LDB faz parte, buscou romper com a dualidade existente no Ensino Médio, o qual oscilava entre a preparação para o vestibular e a formação profissional. Por isso, o inciso II desse mesmo artigo, estabelece “a preparação básica para o trabalho” (BRASIL, 1996, grifo nosso), ou seja, preparo que deve ser base para a formação de todos e para todos os tipos de trabalho.

Inicialmente, a base nacional comum dos currículos do Ensino Médio ficou organizada em três grandes áreas de conhecimento para facilitar o trabalho interdisciplinar. São elas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias. Tais áreas possuem objetos de ensino em comum, favorecendo a interdisciplinaridade e a contextualização. Posteriormente, o componente de Matemática separou-se da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, passando a constituir uma nova área: Matemática e suas Tecnologias. Convém destacar que os conteúdos da formação básica passaram a ser objeto de avaliação do Ministério da Educação por meio do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), realizado ao término da última etapa da educação básica.

3.2 O Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM

Atualmente, o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM é a principal forma de acesso ao ensino superior, entretanto, foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar os estudantes concluintes do ensino médio, última etapa da educação básica. Os pressupostos que nortearam a elaboração da prova em 1998 caracterizaram-se pela produção do contexto através da utilização de diferentes linguagens e deram ênfase a situações que, aparentemente, constituíam o universo vivencial do estudante. Desse modo, o ENEM baseou-se nas relações interdisciplinares e também nas relações entre os significados conceituais e a vida cotidiana dos alunos. Avaliar de acordo com a matriz de referência do ENEM é avaliar através de um conjunto de 5 competências gerais. Eis as cinco principais competências:

- I) Capacidade de expressão em diferentes linguagens.
- II) Capacidade de compreensão de fenômenos.
- III) Capacidade de enfrentar situações-problema em diferentes contextos.
- IV) Capacidade de construir argumentações consistentes;
- V) Capacidade de elaborar propostas de intervenção solidária na realidade.

Em 2009, o ENEM sofreu uma reformulação e passou a ser utilizado como dispositivo de ingresso ao ensino superior. Na página⁷ do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP, no tópico “Apresentação”, encontra-se a seguinte declaração:

⁷ Disponível em: <[https:// www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem](https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem)>. Acesso em 28 de novembro 2021.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi instituído em 1998, com o objetivo de avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da educação básica. Em 2009, o exame aperfeiçoou sua metodologia e passou a ser utilizado como mecanismo de acesso à educação superior. Desde 2020, o participante pode escolher entre fazer o exame impresso ou o Enem Digital, com provas aplicadas em computadores, em locais de prova definidos pelo Inep.

Apesar dessas alterações, as cinco competências gerais originais foram mantidas, agora com a denominação de “eixos cognitivos”. Com as mudanças ocorridas, o exame passou a ser constituído por uma prova objetiva de 180 questões e uma redação. A reformulação buscou uma perspectiva de maior aproximação entre os conteúdos das disciplinas e as competências, no intuito de ampliar o espectro de orientações didáticas e avaliações da aprendizagem. A parte objetiva do exame foi dividida em 4 grandes áreas com 45 questões cada:

- I. Ciências Humanas e suas Tecnologias: História, Geografia, Filosofia e Sociologia;
- II. Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Química, Física e Biologia;
- III. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Redação: Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação e Comunicação;
- IV. Matemática e suas Tecnologias: Matemática.

Pela forma como foi concebida a matriz de competências e habilidades que referencia o ENEM, pressupõe-se que haja uma integração entre os conteúdos das diversas áreas do conhecimento. A avaliação da construção do conhecimento ocorre através das ações dos estudantes diante de situações-problema que possam aperfeiçoar as realidades individuais e coletivas. Nesse sentido, conclui-se que os eixos teóricos que norteiam o exame são as concepções de competências e habilidades, interdisciplinaridade, contextualização e situações-problema, contidas nos documentos que parametrizam esse processo avaliativo.

A título de comparação, tanto a estrutura da prova do ENEM atual quanto a estrutura original do exame de 1998 caracterizam-se pela ênfase na contextualização do ensino como mecanismo de conexão entre as disciplinas e as competências (eixos cognitivos). Desde 2009, também existe a divulgação de uma lista de “objetos do conhecimento”, isto é, os conhecimentos exigidos dos estudantes na prova. Os objetos da área de Matemática e suas Tecnologias compreendem 5 grandes tópicos: conhecimentos numéricos, geométricos, de estatística e probabilidade, algébricos e algébricos/geométricos.

De modo geral, as questões da prova objetiva do ENEM apresentam longos textos em seus enunciados e exigem do candidato uma leitura atenciosa e a interpretação das várias ideias

fornecidas. Nessas questões, o contexto parece ser composto a partir das diversas informações textuais. Ora, a criação de um contexto demanda um emaranhamento de condições que permitem agregar significados aos objetos de estudo, e essa criação pode ser realizada por meio de um texto dissertativo, informativo, narrativo etc. O exemplo a seguir foi extraído do exame de 2009 ‘segunda aplicação’:

“A evolução da luz: as lâmpadas LED já substituem com grandes vantagens a velha invenção de Thomas Edison.

A tecnologia do LED é bem diferente das lâmpadas incandescentes e das fluorescentes. A lâmpada LED é fabricada com material semicondutor semelhante ao usado nos chips de computador. Quando percorrido por uma corrente elétrica, ele emite luz. O resultado é uma peça muito menor, que consome menos energia e tem uma durabilidade maior. Enquanto uma lâmpada comum tem vida útil de 1.000 horas e uma fluorescente, de 10.000 horas, a LED rende entre 20.000 e 100.000 horas de uso ininterrupto.

Há um problema, contudo: a lâmpada LED ainda custa mais caro, apesar de seu preço cair pela metade a cada dois anos. Essa tecnologia não está se tornando apenas mais barata. Está também mais eficiente, iluminando mais com a mesma quantidade de energia.

Uma lâmpada incandescente converte em luz apenas 5% da energia elétrica que consome. As lâmpadas LED convertem até 40%. Essa diminuição no desperdício de energia traz benefícios evidentes ao meio ambiente.

(Revista Veja, 19 dez. 2007. Disponível em: http://veja.abril.com.br/191207/p_118.shtml)

Considerando que a lâmpada LED rende 100 mil horas, a escala de tempo que melhor reflete a duração dessa lâmpada é o:

- (A) dia*
- (B) ano*
- (C) decênio*
- (D) século*
- (E) milênio”*

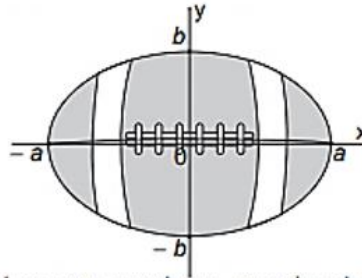
Como se pode notar, a questão sobre a evolução da luz apresenta um longo texto em seu enunciado com um conjunto de informações completamente irrelevantes para a resolução do problema proposto. Assim, a simples leitura e a interpretação das informações textuais não contribuem para a construção de um significado mais substancial sobre a conversão entre as unidades de tempo, que compreende a resolução do problema.

Na sequência, a figura 8 traz a questão 137 da prova amarela⁸ do ENEM de 2015.

Figura 8

QUESTÃO 137 ◇◇◇◇◇

A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores a e b são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$.

O volume dessa bola, em função apenas de b , é dado por

- A** $8b^3$
- B** $6b^3$
- C** $5b^3$
- D** $4b^3$
- E** $2b^3$

Claramente, a questão em epígrafe tem como elemento contextualizador a bola de futebol americano, contudo esse esporte não é muito comum no Brasil e, por isso, a questão não está necessariamente ligada à realidade brasileira. Entretanto, o objeto geométrico elipsoide, ‘formado’ pela bola, faz-se bastante presente na universidade em disciplinas como Geometria Analítica, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral. Todavia, a resolução do problema passa apenas pela utilização da última frase do texto, a qual se refere à diferença entre comprimentos verticais e horizontais, e depois, pela aplicação de valores em uma fórmula. Assim, a resolução é simples e não implica o estudante estabelecer relações nem com a imagem dada no problema para a construção do significado. Além disso, o termo elipsoide parece ter sido introduzido na questão com uma ‘natureza pedagógica’, a título de fornecer ao estudante um conhecimento a mais, porém sem nenhuma utilidade na resolução.

Especificamente sobre contextualização, o documento que parametriza o exame afirma:

[...] sempre conhecemos, sobre qualquer tema, muito mais do que conseguimos expressar, linguística ou conscientemente, e esse conhecimento tácito é absolutamente

⁸ Disponível em:

<https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%2005_AMARELO.pdf>. Acesso em 28 de novembro 2021.

fundamental para a sustentação daquele que se consegue explicitar. Como as avaliações levam em consideração essencialmente a dimensão explícita, é necessário desenvolver-se estratégias de enraizamento de tais formas de manifestação nas componentes da dimensão tácita do conhecimento, continuamente alimentadas por elementos culturais de natureza diversa. Tal enraizamento na construção dos significados constitui-se por meio do aproveitamento e da incorporação de relações vivenciadas e valorizadas no contexto em que se originam, na trama de relações em que a realidade é tecida; em outras palavras, trata-se de uma contextualização. (BRASIL, 2009, p. 47).

E continua:

[...] contextualizar é uma estratégia fundamental para a construção de significações. À medida que incorpora relações tacitamente percebidas, a contextualização enriquece os canais de comunicação entre a bagagem cultural, quase sempre essencialmente tácita, e as formas explícitas ou explicitáveis de manifestação do conhecimento. (BRASIL, 2009, p. 47-48).

A despeito dessa importância de contextualizar para efetivar a aprendizagem, a assimilação da Matemática depende muito da compreensão do significado. Sobre isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, surgidos no ano de 1997, afirmam:

(...) A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar... A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos... Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadora, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. (BRASIL, 1997b, p. 19).

Por vezes, no ENEM parece haver uma ideia de “contextualização a qualquer custo”, um certo exagero na contextualização a ponto de muitas questões apresentarem textos grandes e desnecessários à resolução. O professor Nilson José Machado da Universidade de São Paulo-USP, em uma entrevista⁹ concedida em 2013, a pedido da “Gestão escolar” da Fundação Civita, afirmou:

“O que percebi nas últimas provas do ENEM foi a ocorrência de excesso na contextualização, eu não estou dizendo excesso de contextualização, até porque acho que dar um contexto a uma questão é sempre bom, mas a interpretação do que é contextualizar é que tem sido inadequada”.

Ademais, a concepção de contextualização dos PCN vai muito além do estudo dos

⁹ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=UzShGnI5_8w>. Acesso em 28 de novembro 2021.

conteúdos com fins imediatos e profissionalizantes, isto é, aponta para uma ideia de contextualização que permeia a interdisciplinaridade expressa pelas relações intrínsecas de dependência conceitual. Essa interdisciplinaridade pode ser explicada em fatos como: na Biologia, a noção de dependência conceitual é usada em genética e probabilidade binomial, bem como o conceito de progressão geométrica, que é um objeto da Matemática, pode ser observado no processo de divisão celular por mitose, no qual uma célula mãe forma duas células filhas geneticamente idênticas; o conceito de progressão geométrica também aparece na Química, no decaimento radioativo, em que se calcula o tempo de meia-vida (período de semidesintegração); ainda na Química, o conceito matemático de logaritmo aparece no cálculo do potencial hidrogeniônico – pH; e mais ainda existem as conexões distintas entre o estudo das funções elementares e as características dos movimentos na Física.

Mesmo assim, a proposta para o “novo ENEM”, concebida pela reformulação do exame em 2009, adota algumas características da noção de contextualização contida nos PCN e diz o seguinte:

Assim, o novo exame seria composto por quatro testes, um por cada área do conhecimento, a saber: (i) Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (incluindo redação); (ii) Ciências Humanas e suas Tecnologias; (iii) Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e (iv) Matemática e suas Tecnologias. Esta estrutura aproximaria o exame das Diretrizes Curriculares Nacionais aos currículos praticados nas escolas, mas sem abandonar o modelo de avaliação centrado nas competências e habilidades.

Ora, a aproximação da proposta do “novo ENEM” parece conduzir para que as questões sejam formuladas a partir de contextos do mundo do trabalho e do exercício da cidadania, o que converge para a seguinte orientação dos PCN:

[...] a lei reconhece que, nas sociedades contemporâneas, todos, independentemente de sua origem ou destino socioprofissional, devem ser educados na perspectiva do trabalho enquanto uma das principais atividades humanas, enquanto campo de preparação para escolhas profissionais futuras, enquanto espaço de exercício de cidadania, enquanto processo de produção de bens, serviços e conhecimentos com as tarefas laborais que lhes são próprias. (BRASIL, 1997a, p. 80).

Aliás, a própria LDB também preconiza que a educação tem como uma de suas finalidades o preparo para o exercício da cidadania e a qualificação para o trabalho.

Mas a simples leitura da matriz de referência do ENEM permite identificar outros aspectos relevantes para a formação dos contextos. No caso específico de Matemática e suas tecnologias, a matriz prevê um conjunto de sete competências e trinta habilidades. As

competências e algumas das habilidades contidas na matriz de referência¹⁰ são reproduzidas¹¹ a seguir:

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recursos para a construção de argumentação.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de

¹⁰ Recolhido no endereço:

https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf, em novembro/2021.

¹¹ Todos os grifos são nossos.

estatística e probabilidade.

A parte destacada no texto da matriz de referência enfatiza aspectos como intervir na *realidade*, resolver *problemas do cotidiano*, agir sobre *situações do cotidiano*, lidar com *variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas*, reconhecer e entender o *contexto social*, compreender os *fenômenos naturais e sociais*, etc. Em um sentido mais abrangente, esses aspectos guiam a elaboração das questões com base em contextos que podem contemplar tanto temáticas do mundo do trabalho e da cidadania quanto temas da ciência, da cultura e da tecnologia.

Hoje, o ENEM busca uma maior aproximação à Base Nacional Comum Curricular - BNCC e ao Novo Ensino Médio. A Lei Federal nº 13.415/17, que introduziu as alterações da reforma do Ensino Médio na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), não trata de forma específica do ENEM. Contudo, o Ministério da Educação compreende que o exame deve adequar-se à BNCC e, conseqüentemente, às mudanças do Novo Ensino Médio. Nesse intuito, o Ministério da Educação publicou no Diário Oficial a Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018, que dispõe sobre a atualização das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a serem observadas pelos sistemas de ensino e suas unidades escolares. De forma bastante clara, o artigo 32 dessa Resolução¹² diz:

Art. 32. As matrizes do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e dos demais processos seletivos para acesso à educação superior deverão necessariamente ser elaboradas em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o disposto nos Referenciais para a Elaboração dos Itinerários Formativos.

§ 1º O Exame Nacional do Ensino Médio será realizado em duas etapas, onde a primeira terá como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a segunda, o disposto nos Referenciais para a Elaboração dos Itinerários Formativos.

§ 2º O estudante inscrito no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) escolherá as provas do exame da segunda etapa de acordo com a área vinculada ao curso superior que pretende cursar.

§ 3º As instituições de ensino superior deverão considerar para fins de acesso os resultados de ambas as etapas do Exame Nacional do Ensino Médio, quando for o caso. (Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018).

Através da Portaria Ministerial nº 411, de 17 de junho de 2021, o MEC instituiu um Grupo de Trabalho no âmbito do Ministério da Educação, com a finalidade de apresentar uma proposta de atualização do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos - ENCCEJA, adequando os referidos

¹² Disponível em: <https://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622>. Acesso em 28 de novembro 2021.

exames às recentes alterações promovidas na educação básica brasileira. Para tanto, o MEC deverá divulgar a nova Matriz de Referência do ENEM. A Portaria Ministerial¹³ nº 411 propõe:

Art. 1º Instituir Grupo de Trabalho, no âmbito do Ministério da Educação - MEC, com a finalidade de apresentar proposta de atualização do Exame Nacional do Ensino Médio - Enem e do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos - Encceja, tendo em vista recentes alterações ocorridas no âmbito da educação básica brasileira.

Art. 2º O Grupo de Trabalho será composto por representantes:

I - da Secretaria-Executiva - SE;

II - da Secretaria de Educação Superior - Sesu;

III - da Secretaria de Educação Básica - SEB;

IV - da Secretaria de Modalidades Especializadas de Educação - Semesp;

V - da Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica - Setec;

VI - do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - Inep;

VII - do Conselho Nacional de Educação - CNE;

VIII - do Conselho Nacional de Secretários de Educação - Consed; e

IX - da União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação - Undime.

De acordo com o artigo 11 da Portaria, o grupo de trabalho é temporário e tem um prazo de cento e oitenta dias para a conclusão das atividades, sendo permitida a renovação do vencimento. O grupo pode ainda, conforme o nono artigo, “convidar para participar de suas atividades representantes de órgãos e entidades públicas e privadas, além de pesquisadores e especialistas, quando útil para o cumprimento das suas finalidades” (Art. 9º, Portaria Ministerial nº 411, grifo nosso). Ressalte-se que a participação de entidades privadas é livre, desde que o Grupo de Trabalho a requeira, contudo a atividade essencial do grupo constituído é propor uma reformulação das avaliações externas de caráter público, cujo pilar fundamental é o interesse público. O envolvimento de entes privados nos processos decisórios pode acarretar desvios, de modo a prevalecer interesses particulares de determinados setores da sociedade.

3.3 A Base Nacional Comum Curricular - BNCC

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC é a política mais recente no âmbito educacional brasileiro, contudo a ideia de sua implantação não é tão recente assim. Desde 1988, o artigo 210 da Constituição Federal prevê esta delimitação: “Serão fixados conteúdos mínimos

¹³ Disponível em: <<https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-411-de-17-de-junho-de-2021-326511393>>. Acesso em 28 de novembro 2021.

para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais”. A LDB de 1996 reforça esse mandamento constitucional reiterando, no seu artigo 26, a necessidade de uma base comum e a determinação de que cada sistema de ensino e cada estabelecimento escolar devem conter uma parte diversificada, que considere as especificidades locais. O artigo 26 da LDB diz:

Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 1996, artigo 26).

Outros documentos oficiais foram criados com o mesmo intuito de normatizar um currículo nacional, dentre eles destaca-se: os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, criados em 1998; as DCN para o Ensino Fundamental, criadas em 2010; o Grupo de Trabalho dos Direitos de Aprendizagem, criado no MEC em 2011 e que se debruçou na criação de uma base curricular comum, chegando a publicar um documento preliminar em 2014; e o Plano Nacional de Educação - PNE 2014/2024, dispositivo que indica, de forma mais enfática, o compromisso com uma base nacional, conforme dispõe uma das estratégias da Meta 7:

Estratégia 7.1: estabelecer e implantar, mediante pactuação interfederativa, diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos(as) alunos(as) para cada ano do ensino fundamental e médio, respeitada a diversidade regional, estadual e local. (BRASIL, 2014, p. 61).

O texto final da BNCC foi entregue por volta do meio do ano de 2017 e aprovado pelo Conselho Nacional de Educação em dezembro do mesmo ano, ficando pendente somente a parte referente ao Ensino Médio, cuja publicação ocorreu no primeiro semestre de 2018. A versão aprovada se propõe a ser “Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares” (BRASIL, 2018, p. 8). Essa versão fixa habilidades e determina competências, articulando-as às aprendizagens; constitui-se, portanto, como um currículo unificado, embora haja quem não concorde com isso. Depreende-se do próprio texto da BNCC que ela vai além de apenas parâmetros, diretrizes ou meras orientações. Na introdução do referido documento é possível ler

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento ... (BRASIL, 2018, p. 7, grifos nossos)

Apesar de ser muito propagandeado que a BNCC é fruto de intenso debate coletivo ao longo de 4 anos, o texto final sofreu alterações substanciais depois do golpe de 2016 em relação ao que já havia sido discutido. A título de exemplo, somente Português e Matemática obtiveram detalhamento na última versão, contrariando os resultados dos debates feitos anteriormente e menosprezando o conjunto das áreas que compõem o currículo do Ensino Médio. Ademais, a única versão pública que o MEC apresentou para a BNCC do Ensino Médio foi justamente a que fora entregue ao CNE e este, por sua vez, se incumbiu de tornar público o debate. Por esse motivo, pode-se dizer que a BNCC para a última etapa da Educação Básica é verticalizada e autoritária.

A BNCC recebeu críticas em diversos pontos, um deles é a noção de competência dissociada do conteúdo. O texto do documento retira a centralidade do conhecimento em prol de um “saber fazer” e desarticula teoria e prática, reduzindo essa última a algo mais imediato e restritivo de um suposto saber-fazer. Assim, a BNCC estabelece como um de seus fundamentos pedagógicos que “[...] os conteúdos curriculares estão a serviço do desenvolvimento de competências [...]” (BRASIL, 2018, p. 11). Todavia, atribuir à escola a função de desenvolver competências em relação a um saber-fazer esvaziado de conteúdo é abdicar-se do que há de mais avançado no campo da ciência, da cultura e da arte; é negar o pilar essencial da escola como espaço de democratização do saber, do conhecimento.

3.3.1 Competências

A ênfase na aprendizagem por competências está relacionada com o pensar a escola como uma empresa e se articula com as políticas desenvolvidas pelo Banco Mundial e por outros organismos internacionais nos últimos anos. Nesse sentido, a noção de competência acaba por considerar o conhecimento como uma soma de habilidades que os alunos devem ter, de modo que sejam capazes de aplicá-lo para encontrar novas maneiras de agir, porém não como meio de transformação social, mas somente como forma de adaptação. Para corroborar tal entendimento, o seguinte conceito de competência diz:

Competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e

valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8, grifos nossos).

Oficialmente, a noção de competências não surge na BNCC, mas a partir da LDB, em seu artigo 9º, inciso IV, no qual diz que a União tem a seguinte incumbência:

IV - estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum (BRASIL, 1996, art. 9º, inciso IV, grifos nossos).

Depreende-se de tal inciso que as competências serão um dos eixos norteadores das escolhas dos conteúdos para garantir a dita formação básica comum, já que também existe uma parte diversificada no currículo (BRASIL, 1996, art. 26) para atender as características regionais de cada escola. Além disso, o parágrafo terceiro do artigo 44 do mesmo dispositivo legal diz que o processo seletivo para pleitear vagas no ensino superior “considerará as competências e as habilidades definidas na Base Nacional Comum Curricular”¹⁴ (BRASIL, 1996, art. 44, § 3º, grifo nosso).

As Diretrizes Curriculares Nacionais e os Parâmetros Curriculares Nacionais também abordaram a noção de competências, mas uma análise dessa abordagem presente em tais documentos foge ao escopo dessa dissertação. Na tese de Ricardo (2005), encontra-se uma análise dos fundamentos filosóficos e pedagógicos que nortearam a ideia de competência nos referidos documentos, inclusive, a sua pesquisa contou com uma entrevista dos elaboradores dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ricardo (2005) alerta que, ao adotar a educação por meio de competências, exige-se “uma revisão nas ações educacionais se o que se pretende é de fato repensar a formação dos alunos e assegurar sua autonomia crítica para um tempo posterior à escola”. O autor trata a noção de competências como um problema de transposição didática¹⁵, evidenciando a estreita relação entre a noção de competências e a interdisciplinaridade e a contextualização.

A discussão sobre o ensino por competências vem ganhando popularidade recentemente, porém não se trata de algo novo. Aliás, até mesmo o período de sua introdução parece controverso: por um lado, Ropé e Tanguy (1997) e Ramos (2001) acreditam que esse debate iniciou-se nas décadas de 60 e 70, dependendo do país; na mesma direção, Macedo (2002)

¹⁴ Parágrafo incluído pela Lei nº 13.415/17, a lei da reforma do Ensino Médio.

¹⁵ Chevallard conceitua “Transposição Didática” como o trabalho de fabricar um objeto de ensino, isto é, fazer um objeto de saber produzido pelo “sábio” (o cientista) ser objeto do saber escolar.

indica a década de 70; já Deluiz (2001) acredita que o início se deu nos anos 80; e por outro lado, para Brígido (2001) tal movimento teria sido introduzido na década de 20 e apenas ganhado força nos anos 60.

Igualmente controversa é a sua aceitação como alternativa pedagógica para a escola, ao que tudo indica, não há qualquer consenso nesse ponto. Contudo, inicialmente, um dos argumentos favoráveis às competências era a possível aproximação entre escola e trabalho, buscava-se, assim, mudar a relação entre teoria e prática, entre o geral e o específico. Mas, existem diferenças significativas entre a formação geral e o ensino profissionalizante, dentre elas: essas duas modalidades de educação atribuem distintos status para os saberes e para a prática. Nesse sentido, Tanguy (1997, p. 51) afirma que “a centralização sobre as aprendizagens e sobre sua avaliação nas tarefas dadas não é disputada pela força de uma tradição centrada sobre a transmissão de um patrimônio cultural”.

É comum as competências se apresentarem na forma de verbos que indicam ação, o que pode parecer paradoxal para Ricardo (2005), pois ao mesmo tempo em que estão associadas a recursos cognitivos e têm um uso social abstrato, revelam-se traduzidas num “saber fazer”. Contudo, no contexto educacional, há também a concepção de que competência não é um “saber fazer”, mas sim um “saber saber” ou um “saber conhecer”. Nessa perspectiva, competência diria respeito à capacidade do aluno mobilizar recursos, visando abordar e resolver uma situação complexa. O “saber fazer”, nessa acepção, seria a habilidade, vista como a aplicação prática de uma competência para resolver uma situação complexa.

Para Ferreira (2005), dentre outras significações, competência é a “qualidade de quem é capaz de apreciar e resolver certo assunto, fazer determinada coisa; capacidade, habilidade, aptidão, idoneidade”. Assim, segundo Ferreira (2005), parece não haver diferenciação entre habilidades e competências. Deveras, na prática, ambas são expressas por verbos de ação, de fazeres, e não há mais o que se falar sobre diferenciação entre elas.

Ensinar por competências pode implicar na redução do ensino a um mero treinamento, conforme alerta Ramos (2001) ao afirmar que a “função educativa começa a ser marcada também por uma perspectiva individualizante e adaptativa da sociedade às incertezas da contemporaneidade”. Um ensino com base em competências nesse formato certamente opõe-se a um projeto educacional emancipador, em detrimento de um modelo personalista, subjetivista ou produtivista. Ainda que se considere os diferentes pontos de partida dos alunos, não há qualquer garantia de que os pontos de chegada sejam os mesmos, cada um passa a contar consigo próprio.

Na lógica das competências, corre-se o risco de substituir a visão de educação como um

produto de sociedade e passar a encará-la como um projeto de indivíduos adaptáveis. Nesse sentido, Ricardo (2005) afirma que existem tentativas de definições para competências com “um viés cognitivo de adaptação à realidade, ou de necessidade de contínua apreensão da realidade e de novas competências visando novas adaptações”. Desse modo, “a construção do conhecimento se confunde com a adaptação do indivíduo ao meio” (Ricardo, 2005). Essa forma de conceber, cuja tônica do discurso é a adaptação, cerceia perspectivas de superação e de transformação da realidade. Como ensina o professor Paulo Freire, “se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda”, daí a educação deve transformar as pessoas, e as pessoas mudarem o mundo.

Outra problemática atrelada à noção de competências é o princípio do aprender a aprender. O cerne de tal problemática reside no fato desse princípio ser utilizado sem uma compreensão precisa de suas implicações. De imediato, o aprender a aprender ou continuar aprendendo suscita o seguinte questionamento: continuar aprendendo o quê? A falta de compreensão na implementação da lógica de competências pode conduzir ao esvaziamento dos conteúdos escolares. E esse esvaziamento pode ocorrer no sentido de haver uma mudança na valoração da aprendizagem realizada pelo indivíduo sozinho em detrimento da aprendizagem oriunda da transmissão dos saberes elaborados. Além disso, ao centrar a responsabilidade de aprender e de continuar aprendendo apenas no estudante, está se atribuindo a ele possíveis fracassos em seus projetos pessoais (Ricardo, 2005).

O sociólogo suíço Philippe Perrenoud encontra-se entre os autores que defendem o ensino por competências como alternativa pedagógica para a escola, aliás, foi através dele que o conceito dessa designação conseguiu aproximar-se de um enfoque mais didático, especialmente para a formação geral. Perrenoud atribui vários conceitos às competências, mas sua marca mais notável é a de entendê-las como capacidade de mobilizar recursos cognitivos. A diversidade de requisitos para se construir uma competência pode ser notada na afirmação seguinte:

Define-se uma competência como a aptidão para enfrentar uma família de situações análogas, mobilizando de uma forma correta, rápida, pertinente e criativa, múltiplos recursos cognitivos: saberes, capacidades, microcompetências, informações, valores, atitudes, esquemas de percepção, de avaliação e de raciocínio. (PERRENOUD, 2002b, p.19).

O ensino por competências pode ser uma alternativa ao enciclopedismo e à memorização, desde que não se reduza a um mero treinamento, a propósito, Perrenoud (2002b, p.39) destaca: “a ruptura com o enciclopedismo e com a memorização de fatos e regras levou

às competências. Nesse caso, considera-se que os saberes são recursos para compreender, julgar, antecipar, decidir e agir com discernimento”. Contudo, as competências não são apenas saberes, ora, elas são “uma capacidade de agir eficazmente em um determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem limitar-se a eles” (Perrenoud, 1999, p. 7). Dessa forma, uma competência manifestada na execução de uma tarefa não pode confundir-se com a mera aplicação de conhecimentos memorizados.

A despeito de sua importância, o ensino por competências apresenta um ponto bastante criticado, qual seja, o fato de centrar-se excessivamente sobre o sujeito, menosprezando os conteúdos, o que parece ocorrer na BNCC. Esse abdicar dos conteúdos ocorre quando o ensino é reduzido a um simples treinamento. O próprio Perrenoud (1999, p. 22) afirma que “os conhecimentos são indispensáveis para a inteligibilidade das observações e para a construção de hipóteses”, além disso, os saberes são fundamentais para a construção de competências responsáveis por orquestrar um conjunto de esquemas. Ademais, a abordagem por competências sozinha não deve ser vista como solução para o fracasso escolar, pois este decorre de múltiplos fatores.

Como já foi dito, a BNCC é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. Porém, é importante destacar que o currículo proposto na BNCC constitui o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, devendo ser complementado pelas particularidades regionais. Desse modo, a BNCC define um conjunto de aprendizagens tidas como essenciais e que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências, como pode ser constatado no trecho “[...] os conteúdos curriculares estão a serviço do desenvolvimento de competências [...]” (BRASIL, 2018, p. 11).

A BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica. Essas dez competências não versam sobre um conteúdo específico, elas estão mais direcionadas para o desenvolvimento de habilidades e a formação de atitudes e valores do que para os conteúdos escolares propriamente, conforme já foi apontado. Tais competências gerais devem ser desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica, nas três grandes etapas que a compõem: a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Desse modo, no decorrer da Educação Básica, essas dez competências gerais vão se inter-relacionar, perpassando todos os componentes curriculares. As dez competências gerais são:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BNCC, 2018, p. 9-10.)

A BNCC dispõe que, na primeira etapa da Educação Básica, devem ser assegurados seis direitos de aprendizagem e desenvolvimento, para que as crianças tenham condições de aprender e se desenvolver, são eles “Conviver, Brincar, Participar, Explorar, Expressar, Conhecer-se” (BRASIL, 2018, p. 25). Para essa etapa, a BNCC também estabelece cinco campos de experiências, a saber: O eu, o outro e o nós; Corpo, gestos e movimentos; Traços, sons, cores e formas; Escuta, fala, pensamento e imaginação; Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações (BRASIL, 2018, p. 25). A BNCC define ainda objetivos de aprendizagem e desenvolvimento organizados em três grupos por faixa etária para cada campo de experiências.

A segunda etapa da Educação Básica, o Ensino Fundamental, está organizado na BNCC

em cinco áreas do conhecimento: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas, e Ensino Religioso. De acordo com o documento, essas áreas “favorecem a comunicação entre os conhecimentos e saberes dos diferentes componentes curriculares” (BRASIL, 2018, p. 27). Para cada área foram estabelecidas competências específicas a serem desenvolvidas ao longo dos nove anos de duração dessa etapa. Ao considerar o Ensino Religioso como uma área, fica evidente a ênfase, exagerada por sinal, que a BNCC dá a essa temática. Nesse ponto, a bancada da Bíblia do Congresso Nacional exerceu forte influência sobre as discussões da proposta da BNCC, elevando o Ensino Religioso à condição de área. Mas, isso é, no mínimo contraditório, dada a laicidade do Estado Brasileiro.

Na BNCC, a área de Matemática no Ensino Fundamental está orientada na direção do conceito de letramento matemático do PISA, cuja definição segundo a Matriz do Pisa 2012 é:

“letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.”¹⁶

O Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, está organizado na BNCC em quatro áreas do conhecimento, conforme determina a LDB. Tais áreas são: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Para cada uma dessas áreas são estipuladas competências específicas e um conjunto de habilidades a elas associadas. De caráter prático, cognitivo e socioemocional, essas habilidades expressam as aprendizagens tidas com essenciais nessa etapa de escolarização. Ao contrário do Ensino Fundamental, cuja organização é por ano, no Ensino Médio não há essa divisão. Ao Ensino Médio, a BNCC incumbe a tarefa de aprofundar os conhecimentos desenvolvidos no Ensino Fundamental.

3.3.2 Nem tudo é unanimidade

Uma segunda crítica recai sobre o fato de a BNCC apontar para a redução de componentes curriculares, elegendo apenas Português e Matemática como disciplinas

¹⁶ Disponível em: <
https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf
>. Acesso em: 23 mar. 2022.

obrigatórias nos três anos do Ensino Médio. De fato, “são detalhadas as habilidades de Língua Portuguesa e Matemática, considerando que esses componentes curriculares devem ser oferecidos nos três anos do Ensino Médio” (BRASIL, 2018, p. 32, grifos nossos). Obviamente, tal redução implicará num esvaziamento ainda maior do currículo do Ensino Médio, uma vez que a BNCC se propõe a ser “um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver” (BRASIL, 2018, p. 7). A BNCC está submissa à lógica das avaliações em larga escala e, no intuito de melhorar o desempenho do país nessas avaliações, dá destaque aos componentes mais explorados nesses exames (Português e Matemática).

Contudo, conforme a alteração introduzida pela Lei Federal nº 13.415/17, o parágrafo segundo do artigo 35-A da LDB dispõe que “a Base Nacional Comum Curricular referente ao ensino médio incluirá obrigatoriamente estudos e práticas de educação física, arte, sociologia e filosofia” (BRASIL, 1996, art. 35-A, § 2º– grifos nossos). E o parágrafo primeiro do artigo 26 da LDB determina que os currículos de cada uma das etapas da educação básica “devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil” (BRASIL, 1996, art.26, § 1º– grifos nossos).

Desse modo, a BNCC inclui estudos e práticas de educação física, arte, sociologia e filosofia, mas não precisam, necessariamente, constituir-se como componente curricular, embora na prática provavelmente esses estudos constituam componentes curriculares dos sistemas de ensino. Ao reconhecer somente a Matemática e a Língua Portuguesa como disciplinas e transformar as outras do atual currículo em componentes e temas transversais, a BNCC traz um enorme prejuízo para a formação dos estudantes.

É inegável que esse documento adota um viés mercadológico neoliberal. Afinal, não foi por acaso que sua construção se deu em meio à implantação de uma série de políticas neoliberais no país, reduzindo o papel do Estado e delegando muitas das suas funções à iniciativa privada. A própria busca pela construção de uma base curricular ganhou força com a criação do Movimento pela Base – MPB, um grupo não governamental formado por diversos atores privados. Conforme a página eletrônica¹⁷ do MPB, os entes que o compõem são: a Fundação Lemann, a Fundação Maria Cecília Souto Vidigal, o Instituto Unibanco e o Instituto Natura. Esse movimento recebe o apoio institucional da Fundação Roberto Marinho, do Instituto Ayrton Senna, da União Nacional dos Conselhos Municipais de Educação - Uncme, da União Nacional

¹⁷ Disponível em: < <https://movimentopelabase.org.br/>>. Acesso em 28 de novembro 2021.

dos Dirigentes Municipais de Educação – Undime, do Conselho Nacional de Secretários de Educação – Consed, entre outros.

De acordo com a própria BNCC, ela também se alinha aos organismos internacionais.

Além disso, desde as décadas finais do século XX e ao longo deste início do século XXI, o foco no desenvolvimento de competências tem orientado a maioria dos Estados e Municípios brasileiros e diferentes países na construção de seus currículos. É esse também o enfoque adotado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa, na sigla em inglês), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, na sigla em inglês), que instituiu o Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (LLECE, na sigla em espanhol) (BRASIL, 2018, p. 13).

Saviani (2014) destaca que tais entes privados têm conseguido penetrar na esfera pública e ocupar espaços no poder decisório:

[...] a força do privado traduzida na ênfase nos mecanismos de mercado vem contaminando crescentemente a esfera pública. É assim que o movimento dos empresários vem ocupando espaços nas redes públicas via Undime e Consed nos Conselhos de Educação e no próprio aparelho do Estado, como o ilustram as ações do Movimento “Todos pela Educação”. (SAVIANI, 2014, p. 105).

A BNCC constitui uma política educacional que vai além da definição de currículo, ela prevê um conjunto de outras ações, como se pode notar na seção de introdução do documento, em que se lê:

(...) a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. (BRASIL, 2018, p. 8, grifos nossos).

Além disso, ainda em 2017- mesmo ano de elaboração da BNCC - o MEC anunciou uma nova política de formação de professores. Essa “nova” política foi alvo de uma nota¹⁸ assinada por diversas entidades públicas e com sólidas trajetórias no âmbito da pesquisa educacional, como a Associação Brasileira de Currículo - ABdC e a Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação – ANPED. A nota diz que tal política foi “definida de forma impositiva”, serve para desviar a “atenção da sociedade para o contingenciamento dos recursos públicos destinados à educação pública”, e também favorece “a ação dos poderosos

¹⁸ Disponível em: <<https://www.anped.org.br/news/nota-anped-proposta-de-bncc-do-ensino-medio-alguns-pontos-para-o-debate>>. Acesso em 11 de novembro 2021.

grupos privatistas nacionais e internacionais que aumentam seus lucros no mercado educacional”.

O discurso midiático vem colocando a BNCC como a solução para todos os problemas da educação básica brasileira, que reduz as desigualdades educacionais existentes e eleva a qualidade do ensino. Entretanto, as mudanças estabelecidas nesse documento não sugerem resultados que proporcionam a suposta melhoria da qualidade propagada. Pelo contrário, o modelo proposto possui outras intencionalidades que não convergem para a democratização do saber. Na verdade, as alterações promovidas pela BNCC não tocam nos principais problemas da educação brasileira, como a questão do financiamento, a estrutura das escolas, a evasão dos alunos, as condições de trabalho para os professores, o número de alunos por turma, etc. Essas alterações estão mais direcionadas para uma formação aligeirada e flexível, ao “substituir o modelo único de currículo do Ensino Médio por um modelo diversificado e flexível” (BRASIL, 2018, p. 468), bem como apontam para o aumento de parcerias que conduzem à privatização e à terceirização, colaborando com o esvaziamento e a precarização do ensino público.

Dessa maneira, os objetivos que guiaram a reforma do Ensino Médio não visam atender às necessidades e aos anseios da comunidade escolar, mas sim direcionar o ensino para atender às demandas do mercado. A reforma tem claro viés neoliberal e se apoia em três aspectos principais: primeiro critica o atual currículo, alegando a sua rigidez; depois propõe a sua substituição por outro modelo mais flexível, enxuto e dinâmico; e estabelece itinerários formativos diferenciados no Ensino Médio, de modo a permitir ao estudante escolher o itinerário que mais lhe satisfaça, concedendo-lhe um possível “protagonismo juvenil”. A propósito, essa possibilidade de escolha foi um dos principais *slogans* usados pelo governo federal para convencer os jovens de que a reforma atende ao “protagonismo juvenil”.

Entretanto, provavelmente o estudante não terá oportunidade de escolha, já que a oferta dos itinerários ficou a critério dos sistemas de ensino conforme a alteração introduzida na LDB pela Lei nº 13.415/17, que trata da reforma do Ensino Médio. O parágrafo primeiro do artigo 36 da LDB diz que a organização dos itinerários “será feita de acordo com critérios estabelecidos em cada sistema de ensino”. Portanto, a oferta de todos os itinerários não vai acontecer, ainda mais com o contingenciamento dos recursos imposto pela Emenda Constitucional nº 95 de 2016, tampouco há essa possibilidade de escolha na BNCC. De modo simplificado, a oferta ficará restrita às possibilidades da escola.

Devido a esse contingenciamento dos recursos imposto pela EC nº 95, o ensino integral, tido como um dos compromissos assumidos pela BNCC, deverá não dispor do volume de recursos necessários à sua implantação. O documento enfatiza que “[...] a BNCC afirma, de

maneira explícita, o seu compromisso com a educação integral” (BRASIL, 2018, p. 14). Na BNCC, a educação integral é entendida como uma educação que visa à formação e ao desenvolvimento humano de forma global, e, mesmo tempo, é factível à realidade do aluno e alinhada às demandas da sociedade contemporânea. Entretanto, pela forma como está organizada a estrutura da BNCC, a centralidade das preocupações está mais voltada para a adaptação, a assimilação e a flexibilidade à mudança do que para formação integral do sujeito. É preciso adaptar-se à nova ordem mundial, não há tempo para questionar!

[...] o conceito de educação integral com o qual a BNCC está comprometida se refere à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea. Isso supõe considerar as diferentes infâncias e juventudes, as diversas culturas juvenis e seu potencial de criar novas formas de existir. (BRASIL, 2018, p. 14)

Por vezes, a educação pública escolar é posta como ferramenta para conformar os espíritos, homogeneizar os discursos e fazer os indivíduos aceitarem como natural as desigualdades econômicas, sociais e culturais. Contudo, tal procedimento não é necessariamente novo. Ao falar sobre a sociedade dos séculos XVII e XVIII, por exemplo, Foucault (1999) disserta sobre o desenvolvimento de mecanismos de controle dos indivíduos com o intuito de formar “corpos dóceis”, sujeitos que, posteriormente, seriam lapidados pelas instituições. De acordo com Foucault (1999, p. 164), tais mecanismos permitem o “controle minucioso das operações do corpo, que realiza a sujeição constante de suas forças e lhes impõe uma relação de docilidade-utilidade”. E, para ele, essa sujeição opera em um duplo movimento, pois ao mesmo tempo em que o controle aumenta a força do indivíduo ao treiná-lo para a execução de determinadas funções, reduz essa mesma força ao submetê-lo aos termos de uma obediência.

4 O CONHECIMENTO MATEMÁTICO, A PRÁTICA PEDAGÓGICA E O PROCESSO DE ABSTRAÇÃO

A matemática é a única ciência exata em que nunca se sabe do que se está a falar nem se aquilo que se diz é verdadeiro.

Bertrand Russell

4.1 Sobre a contextualização

Para o senso comum, a ideia de contextualização está associada à mera aplicação dos conceitos matemáticos em situações cotidianas. Essa aplicação, porém, é apenas uma das muitas formas de atribuir significados aos conteúdos estudados. Spinelli (2011) afirma que “o conhecimento exige ser construído com base nas relações estimuladas por múltiplos contextos, com diferentes características”. É possível, por exemplo, atribuir significados aos conceitos estudados, através das relações internas que eles possuem dentro da Matemática. O contexto pode ainda conter elementos da história da Matemática, bem como contemplar a interdisciplinaridade.

Abstrair e concretizar são ações presentes no processo de construção do conhecimento, seja qual for. As palavras “concreto” e “abstrato” podem receber diferentes significados por parte das pessoas, mas de modo geral, o senso comum entende a primeira como tudo aquilo que pode ser tocado, ao passo que a segunda é aquilo que não pode ser tocado. Assim, para o senso comum, ambos os termos estão em acentuada oposição, isto é, parecem situar-se nos polos de dois extremos. A opção por uma conceituação de abstrato e de concreto possivelmente decorre das experiências vividas por cada sujeito.

No caso específico do conhecimento matemático, o senso comum parece entender que o seu percurso de construção deve partir sempre do concreto em direção ao abstrato e, desse modo, um é visto como referência da realidade perceptível, enquanto outro é visto como generalizações. Entretanto, o concreto e o abstrato estão num constante movimento; é por meio das abstrações que se transpõe de um nível de concretude para outro; num determinado momento, o concreto se transforma em abstrato e, noutro momento, este se transforma naquele. Nesse sentido, o concreto “aparece no pensamento como o processo da síntese, como resultado, não como ponto de partida, embora seja o verdadeiro ponto de partida e, portanto, o ponto de partida também da intuição e da representação” (MARX, 2008, p. 258-259).

A abstração inicial expressa características que constituem a essência do objeto concreto. A essência é a determinação universal do objeto, isto é, a conexão interna que garante

as características e formam a unidade dos aspectos do todo, dando ao objeto um caráter concreto. Isso mostra que o conhecimento não passa, de forma imediata, “do sensorial concreto ao concreto pensado. Esse caminho, como todos os outros, é complexo e contraditório. Para atingir a concreticidade autêntica, o conhecimento perde temporariamente a concreticidade em geral e passa ao seu próprio oposto: o abstrato” (KOPNIN, 1978, p. 158). Machado (2014) afirma que “sem abstração não há conhecimento”, por outro lado se pode dizer que o concreto do pensamento, é

o conhecimento mais profundo e substancial dos fenômenos da realidade, pois reflete com o seu conteúdo não as definibilidades exteriores do objeto em sua relação imediata, acessível à contemplação viva, mas diversos aspectos substanciais, conexões, relações em sua vinculação interna necessária. Abstrações isoladas elevam o nosso conhecimento da apreensão geral do empírico ao universal, enquanto o concreto no pensamento fundamenta a conexão do singular com o universal, fornece não uma simples unidade de aspectos diversos, mas a identidade dos contrários (KOPNIN, 1978, p. 162, grifo do autor).

As categorias “abstrato” e “concreto” fornecem elementos relevantes para a clarificação do processo de conhecimento, é quase um truísmo o fato de ambas terem implicações diretas na construção do saber matemático através da escolha dos tipos de metodologias de ensino. Assim, é necessário considerar a relação entre o concreto e o abstrato no ensino de Matemática, pois tal relação pode interferir nas diversas representações do conhecimento nos processos de aprendizagem.

Machado (2013) entende haver duas concepções de construção do conhecimento matemático: uma concepção cuja construção do conhecimento acende do concreto em direção ao abstrato; e a outra, simetricamente oposta, que vai do abstrato em direção ao concreto. Segundo o autor, aquela “frequentemente reduz a função do pensamento teórico à de uma via de mão única, através da qual são criadas abstrações generalizadoras, que se tornam cada vez mais abrangentes e, naturalmente, mais distantes do real” (MACHADO, 2013, p.7).

Para Giardinetto (1999), o pensamento abstrato deve servir para dar maior compreensão à realidade a qual nunca se apresenta de forma acabada, e o concreto material auxilia nesse processo. De acordo com ele, o conhecimento escolar permite alcançar níveis de desenvolvimento conceitual cada vez mais elaborados e, para isso, necessita de um processo de abstração, de um determinado método de pensamento que garanta atingir esses níveis cada vez mais profundos, distanciando-se daquele tipo de raciocínio mais atrelado ao que imediatamente se vê e de que imediatamente se precisa (GIARDINETTO, 1999, p. 50).

A cada dia, a vida cotidiana tem demandado conhecimentos desenvolvidos em outras

esferas de objetivações, fato que reafirma a importância da apropriação dos conteúdos escolares para a formação do indivíduo. De modo análogo, “os conteúdos escolares tornam-se exigência para a continuada elaboração das objetivações para-si” (GIARDINETTO, 1999, p. 46). Kosik (1976, p. 30), ao falar sobre apropriação prático-espiritual do mundo, defende a compreensão da realidade, enquanto um todo indivisível de entidades e significados, através da abstração, da tematização e da projeção. E, além disso, Giardinetto (1999, p. 50) argumenta que o saber diário fornece elementos para a apropriação do saber escolar, porém ele acredita que isso acontece na forma de uma relação de superação por incorporação, ou seja, o saber escolar supera o modo de pensamento presente no cotidiano a partir da incorporação de elementos ou germens do próprio cotidiano.

Como se não bastasse a polissemia de sentido das palavras “concreto” e “abstrato”, muitas vezes esses termos são entendidos com conotações positivistas, assim o concreto tem sido usado como referência da realidade perceptível e o abstrato como generalizações teóricas (MACHADO, 2013; GIARDINETTO, 1999; KOSIK, 1976). Concepções desse tipo têm permeado o discurso de vários professores os quais advogam que lidar com o cotidiano é o essencial das práticas de ensino. Nessa perspectiva, o ensino de Matemática baseado em percepções superficiais de concreto e abstrato pode conduzir tanto a uma perspectiva de supervalorização da abstração quanto a uma negação dela. Para Giardinetto, algumas pesquisas

passaram a supervalorizar o conhecimento matemático cotidiano elevando-o à condição de polo orientador para o desenvolvimento da prática pedagógica. Da necessária valorização do conhecimento cotidiano, viu-se ocorrer uma supervalorização desse conhecimento perdendo-se de vista a relação com o saber escolar (GIARDINETTO, 1999, p. 05).

Ora, um ensino da Matemática cujo fundamento principal apela para o concreto, para o cotidiano do aluno, certamente não traz benefícios significativos à compreensão dos conceitos. Kaminski et al (2008) entendem que os exemplos do mundo real obscurecem a Matemática subjacente e os alunos não são capazes de aplicar o conhecimento a novas situações. Desse modo, atribuir ao caráter abstrato da Matemática toda a responsabilidade pelas dificuldades dos estudantes no estudo dessa disciplina parece ser um equívoco, uma vez que as demais ciências estudadas na escola também fazem uso de processos abstratos.

A título de exemplo, os conceitos de “Estado” (quanto às suas dimensões físicas e políticas), de “Força” (o agente da dinâmica responsável por alterar o estado de repouso ou movimento de um corpo) e de “Energia” (uma quantidade abstrata e imaterial associada com o estado de um sistema) são objetos que, com base nessas interpretações positivistas de concreto

e abstrato concebidas na escola, pertencem ao espectro das abstrações. Entretanto, tais objetos precisam ser estudados, ainda que não se possa tocá-los ou quiçá vê-los.

Destarte, os objetos de estudo das diversas ciências lidam, inevitavelmente, com o abstrato. Como bem afirma Fossa (2014), uma atuação docente cuja essência não deva transpor os ‘muros’ ditados pelo cotidiano poderá alijar ou extinguir o significado educacional. Além do mais, Spinelli (2011) ressalta que a interpretação do real requer abstrações, de maneira que a natureza interpretativa do conhecimento conceitual origina-se na percepção dos atributos concretos do objeto e manifesta-se por meio das abstrações que o sujeito realiza a partir dos significados que reconhece no objeto.

4.2 A natureza dos objetos matemáticos

Os objetos matemáticos são, por sua natureza, abstratos, isto é, não têm ligação direta com o real; por exemplo, o objeto matemático “número” não guarda qualquer relação com um objeto concreto. Devlin (2004) diz que “número” talvez seja o objeto mais simples e mais abstrato do mundo da Matemática, exemplificando, 2 é uma ideia abstrata, não é uma coisa concreta do mundo real. De fato, embora os números tenham se originado do processo de contagem, eles foram ficando cada vez mais imateriais, se distanciando de sua correlação com os objetos da vida real, contudo 2 é uma abstração extremamente útil, pois ao adicionar 1, tem-se 3, independentemente de estar ou não se referindo a elementos do mundo real. O matemático Andrew Willes, ao falar sobre o mundo matemático vislumbrado durante a demonstração do último teorema de Fermat, afirmou: “o abstrato torna-se real, ganha vida para o indivíduo, passa a fazer sentido”.

Nessa perspectiva, Souza (2015, p. 97) também enfatiza a questão do objeto e da abstração, quando diz:

o objeto só existe para o sujeito, também terá validade com relação às representações abstratas, os conceitos. E como a cada modificação no objeto conhecido corresponde igualmente uma alteração no sujeito que o conhece, chamada faculdade de conhecimento, será preciso, então, uma nova capacidade cognitiva para os conceitos. Se o conhecimento intuitivo das formas puras da intuição, espaço e tempo, possui como faculdade a sensibilidade pura; o conhecimento intuitivo empírico dos objetos, o entendimento; assim, também haverá uma determinação específica do sujeito para o conhecimento abstrato, que será denominada razão. A razão, portanto, é a capacidade cognitiva responsável pelo conhecimento abstrato, as representações abstratas, os conceitos. (SOUZA, 2015, p. 97).

Será então o conhecimento matemático um conhecimento “*a priori*”? A expressão “*a*

priori” significa “anterior à experiência” ou “independente da experiência”, assim uma proposição é *a priori* se o conhecimento não é baseado em qualquer experiência do campo de acontecimentos do mundo real. Em tal proposição pode necessitar da experiência para aprender os conceitos envolvidos, mas não é necessária nenhuma experiência específica com o mundo real. Por outro lado, uma proposição é *a posteriori* se o conhecimento é baseado na experiência de como o mundo funciona, por exemplo: “a gravidade obedece aproximadamente a lei do inverso do quadrado”.

Alguns filósofos defendem que não existe conhecimento *a priori*, a exemplo do empirista John Stuart Mill. Para ele, a Matemática é empírica e, deste modo, *a posteriori*. Mill é um precursor de algumas descrições empiristas contemporâneas da Matemática e sustentou, em oposição à visão kantiana, que a mente humana é completamente parte de natureza, e, portanto, que nenhum conhecimento significativo do mundo pode ser *a priori*. Esse filósofo naturalista desenvolveu uma epistemologia com essa base empirista radical, contudo, sua epistemologia para a Matemática e a Lógica não é tão sofisticada, pois ele defendeu que as leis de ambas as ciências podem ser inferidas a partir de observações via generalizações sobre o que é observado.

Na geometria, por exemplo, Mill rejeita a existência de objetos abstratos, e tenta fundamentá-la na observação. Para isso, ele precisa explicar inicialmente a razão pela qual os objetos estudados na geometria não são como coisa alguma observada no mundo físico. Qualquer linha reta observada no mundo real tem espessura e não é perfeitamente reta. Para contornar esse obstáculo inicial, Mill defendeu que os objetos geométricos são aproximações de figuras desenhadas reais.

O filósofo considera as linhas retas sem espessura e os pontos sem comprimento como conceitos limites. Uma linha reta traçada numa folha de papel pode ser mais ou menos delgada, a depender da qualidade da tinta, do afiado da ponta do lápis, ou da resolução da impressora. As linhas retas da geometria seriam então o limite que é aproximado quando se traça linhas cada vez mais retas e delgadas. De modo similar, o ponto seria o limite quando é traçado segmentos de reta cada vez mais curtos e delgados. Como fisicamente não há tais limites, Mill defende que a geometria não lida com objetos existentes e, portanto, as figuras postuladas seriam “representantes fictícios”.

Como já foi dito, para Mill, o conhecimento matemático é baseado em generalizações indutivas da experiência. Na aritmética, ele concorda com Platão e Aristóteles que os números naturais são números de coleções. Para ele, os números são números de objetos comuns:

Todos os números devem ser números de algo: não há tais coisas como números em abstrato. Dez deve significar dez corpos, ou dez sons, ou dez pulsações. Mas embora os números devam ser números de algo, eles podem ser números de qualquer coisa. Portanto, as proposições relativas a números têm a peculiaridade notável de serem proposições relativas a coisas quaisquer, todos os objetos, todas as existências de qualquer tipo, conhecidas pela nossa experiência. (MILL, 1973 254-255)

Além disso, Mill sustenta ainda que cada numeral representa coleções do tamanho do número correspondente. Mas, isto implica que há, ou poderia haver, infinitos objetos. Existe alguma justificção empírica para isto? E, caso fosse adotada uma teoria física a qual implicasse que há apenas objetos físicos em número finito? Seria isto uma não confirmação da aritmética? A descrição da aritmética de Mill é tão limitada quanto a sua descrição da geometria e abarca pouco mais do que somas e diferenças simples. Por exemplo, o Princípio da Indução Finita é um tópico central da aritmética axiomática e as generalizações a partir experiência não fornecem qualquer justificção para a indução matemática.

Já de acordo com o estruturalismo, a essência de um número natural reside nas suas relações com os outros números naturais. O estruturalista sustenta que a aritmética é uma estrutura abstrata única, o padrão comum a qualquer coleção infinita de objetos que têm uma relação de sucessão, um único objeto inicial, e que satisfaz o Princípio da Indução Finita. Assim, o número 2 é apenas a segunda posição na estrutura dos números naturais; 3 é a terceira posição. Nenhum desses objetos tem independência da estrutura na qual estão posicionados e, como posições nesta estrutura, também não possuem independência um do outro. Dessa forma, para o estruturalista, a estrutura dos números naturais é constituída por uma função sucessor um-a-um com um objeto inicial que satisfaz o princípio da indução matemática.

A ideia central estruturalismo é que a Matemática é a ciência da estrutura, entre os seus defensores principais estão Paul Benacerraf (1965), Geoffrey Hellman (1989), Michael Resnik (1997), Shapiro (1997). De acordo com um estruturalista, as estruturas podem ser apreendidas por meio do reconhecimento de padrões. Ainda criança, o ser humano desenvolve a capacidade de entender as estruturas cardinais, para além daquilo que realmente contou, ou que poderia contar ou reconhecer de imediato por meio da identificação de padrões. Ninguém observou sistemas suficientemente grandes, de modo a abstrair a sua estrutura cardinal. Desse modo, mais cedo ou mais tarde a criança vai refletir que a sequência dos numerais vai além das coleções que ela contou.

Inicialmente, a criança percebe que qualquer coleção finita pode ser contada e, portanto, tem uma cardinalidade. As próprias estruturas finitas pequenas, uma vez abstraídas, exibem padrões. Em determinado momento, os estudantes acabam por entender o que se pretende dizer

com as reticências “...” e, assim, já apreenderam a estrutura dos números naturais. No entanto, depois de uma estrutura dada ser entendida, outras estruturas podem ser caracterizadas e entendidas através dela, a saber: a estrutura dos números inteiros, por exemplo, é como a estrutura dos números naturais, mas interminável em ambos os sentidos:

... |||| ...

Essa transição requer uma reconstrução cognitiva de reconhecimento de padrões que vai além da simples abstração. Segundo Tall (1991),

[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições. (TALL, 1991, p. 20)

Já para Tung-Sun (2000)

[...] existem dois tipos de conhecimento, o perceptivo e o conceitual. Tomemos por exemplo uma mesa ou uma cadeira. Esses objetos podem ser tocados e percebidos, diretamente. É um conhecimento perceptivo. Por outro lado, a uniformidade da Natureza e a noção de um Ser Supremo não podem ser verificadas pelos sentidos, e a casualidade, a teleologia etc., são também de natureza conceitual. (p. 170)

Ora, então o conhecimento perceptivo citado por Tung-Sun refere-se à possibilidade de o objeto ser percebido plenamente pela sua concretude bruta, de ser tocado e sentido. De modo semelhante, Machado (2013, p. 90) afirma que no “nível empírico, o objeto já é representado a partir de suas manifestações exteriores consideradas mais significativas após a observação direta”. E quanto ao conhecimento conceitual, este é construído pela mente humana por meio de abstrações. Dessa forma, o conhecimento perceptivo refere-se ao concretizar, enquanto o conceitual refere-se ao abstrair.

Apesar dessa diferenciação, as duas definições apresentam uma relação indissociável, conforme Tung-Sun (2000, p.170) expressa:

Pode-se observar que o conhecimento perceptivo não pode estar fora do conceitual, nem se pode separar o conceitual do perceptivo. Na realidade, todo conhecimento conceitual contém elementos perceptivos e vice-versa. A diferenciação entre os dois visa às simples conveniências de análise. Eles não existem isoladamente.

Sobre essa temática, Kosik (1976) também afirma:

O método da ascensão do abstrato ao concreto é o método do pensamento; em outras palavras, é um movimento que atua nos conceitos, no elemento da abstração. A ascensão do abstrato ao concreto não é uma passagem de um plano (sensível) para outro plano (racional); é um movimento no pensamento e do pensamento. Para que o pensamento possa progredir do abstrato ao concreto, tem de mover-se no seu próprio elemento, isto é, no plano abstrato, que é negação da imediatidade, da evidência e da concreticidade sensível. A ascensão do abstrato ao concreto é um movimento para o qual todo início é abstrato e cuja dialética consiste na superação desta abstratividade. O progresso da abstratividade à concreticidade é, por conseguinte, em geral movimento da parte para o todo e do todo para a parte; do fenômeno para a essência e da essência para o fenômeno; da totalidade para a contradição e da contradição para a totalidade; do objeto para o sujeito e do sujeito para o objeto. (KOSIK, 1976, p. 36-37, grifo do autor).

Na mesma perspectiva, Spinelli (2011) formula duas premissas: a primeira delas refere-se ao caminho da construção conceitual, que parte sempre do concreto e a ele retorna, fortalecido pelas novas relações de significados estabelecidas durante o processo; na segunda premissa, o caminho de um estágio a outro de concretude, com a qualidade das abstrações exigidas, necessita que o objeto seja visto como um elemento pertencente a um conjunto infinito caracterizado por condições determinadas, no qual as relações entre significados sejam claramente identificadas e possam estimular a construção do conhecimento do objeto.

Por muitas vezes, a noção de contextualização frequentemente adotada apresenta, em sua essência, uma exagerada apologia de que tudo tem que ser trazido à realidade do aluno. Para esse propósito, são elaboradas narrativas que não acrescentam qualquer significado relevante aos conceitos, quiçá nem permitem uma compreensão mais profunda deles, mas supostamente, os estudantes sentem-se mais motivados. Entretanto, a interdisciplinaridade, cuja importância tem sido propagada nos documentos oficiais e no discurso de muitos professores sobre essa temática, não é contemplada. Em tais narrativas, muitas vezes o contexto parece ser colocado apenas com o objetivo de ‘suavizar’ o conteúdo.

Desse modo, nas práticas escolares aparenta prevalecer a existência de dois mundos completamente distintos, um deles é o mundo da escola, organizada em função de atividades dissociadas da realidade material; outro é o mundo externo à escola, no qual se fazem presentes atividades do cotidiano, como o lazer, o trabalho, as relações sociais, etc. Nesse mundo externo ocorrem fenômenos dos mais variados, mas, supostamente, sem reflexos na educação escolar. Giardinetto (1999), Machado (2013) e D’Amore (2012) trazem indicativos que corroboram com a existência de tal concepção.

Faz-se necessário, então, adentrar um pouco mais na direção filosófica, precisamente na Filosofia da Matemática e da Educação Matemática. Para D’Amore (2012, p. 157), é “impossível desenvolver um discurso sobre a Matemática que não resulte em filosofia; diferente

é fazer um discurso de Matemática no qual podem ser ignorados os problemas ontológicos ou fundacionais, e restringir-se aos conteúdos matemáticos”. Silva (1999, p. 46) afirma que “a Filosofia e a Matemática sempre se influenciaram e alimentaram-se reciprocamente”. Segundo Barker (1969, p. 11), “Desde que a Filosofia começou entre os gregos antigos, a matemática tem sido uma das grandes questões filosóficas”. E de acordo com Shapiro (2015, p. 21), “Muitas técnicas e ferramentas usadas na filosofia contemporânea foram desenvolvidas e afinadas com a Matemática - apenas Matemática - em mente, às vezes para melhor e outras para pior”.

Na questão filosófica, é importante considerar “[a] decisão de não aceitar como óbvias e evidentes as coisas, as ideias, os fatos, as situações, os valores, os comportamentos de nossa existência cotidiana; jamais aceitá-los sem antes havê-los investigado e compreendido” (CHAUI, 2000). Este aspecto da não aceitação leva a crer que o conhecimento não pode ser concebido como algo pronto e acabado, mas sim em contínuo processo de construção. Destarte, a relação entre a filosofia e a Matemática parece ser extremamente útil no processo de desenvolvimento e conhecimento de ambas as disciplinas.

Shapiro (2015, p. 22) destaca certas razões que justificam o elo entre esses dois campos do conhecimento, a saber: ambos estão entre as primeiras tentativas intelectuais para entender o mundo; ambos nasceram na Grécia Antiga ou nela sofreram transformações profundas; e a Matemática é um importante estudo de caso para o filósofo, aliás, muitas questões da filosofia contemporânea apresentam formulações notavelmente claras quando focalizadas na Matemática. D’Amore também concorda com essa relação, quando afirma:

Temo que os estudos escolares de filosofia, disjuntos de considerações matemáticas, contribuam para um dano quase irreparável na cultura de muitos países: a distinção, ou até mesmo a oposição, entre as disciplinas. (...) A disjunção entre matemática e filosofia, como se fossem disciplinas diferentes ou antagônicas, retira muito de ambas. (D’AMORE, 2012, p.13).

Apesar desse entrelaçamento entre as disciplinas escolares ser preconizado em diversos documentos oficiais da educação brasileira, a interdisciplinaridade tem sido contemplada muito pouco ou nada nas práticas escolares. A disjunção entre Matemática e Filosofia descrita por D’Amore pode ser observada até mesmo no ensino superior, em que muitas grades curriculares das Licenciaturas em Matemática não contemplam disciplinas de Filosofia da Matemática. Assim, o conhecimento matemático ensinado é desprovido de um caráter filosófico, apoiado em um discurso ingênuo de neutralidade e sem quaisquer vestígios de significação dos conceitos. No ensino básico também não é diferente, as conexões dos conceitos entre as diferentes disciplinas quase nunca são exploradas.

Chauí (2000) destaca que a Filosofia das Ciências tem se ocupado bastante com questões sobre a natureza dos objetos e princípios matemáticos. Eis alguns dos questionamentos feitos por ela:

São eles uma abstração e uma purificação dos dados de nossa experiência sensível? Originam-se da percepção? Ou são realidades ideais, alcançadas exclusivamente pelas operações do pensamento puro? São inteiramente a priori? Existem em si e por si mesmos, de tal modo que nosso pensamento simplesmente os descobre? Ou são construções perfeitas conseguidas pelo pensamento humano? (CHAUI, 2000, p. 332).

Ademais, o desenvolvimento da álgebra contemporânea e das chamadas geometrias não euclidianas promoveu mudanças importantes na Matemática, dando-lhe um aspecto relevante de liberdade de criação, ao abandonar a concepção de que a estrutura da realidade é a Matemática. O avanço da criação e construção matemáticas foi um fator decisivo para o surgimento da teoria da relatividade por exemplo. Sobre isso, o próprio Einstein escreveu em 1922:

Os conhecimentos matemáticos que possibilitaram o estabelecimento da teoria da relatividade geral, temos de agradecer às investigações geométricas de Gauss e de Riemann... Riemann estendeu a linha de pensamento gaussiana aos contínuos de quaisquer dimensões, e previu o significado físico desta generalização da geometria de Euclides com visão profética... as leis naturais só adaptam a sua forma lógica mais satisfatória quando não são expressas como leis do contínuo quadridimensional espaço-temporal.

Parece que os questionamentos sobre a natureza da Matemática não têm recebido a devida atenção por parte de vários professores. Segundo Fossa (2014, p. 20), “com exceção de um punhado de fundamentalistas e vários filósofos desajustados, os pensadores tendem a não tratar assuntos ontológicos”. Igualmente, Cury (2001) aponta que questões sobre a natureza da Matemática, quais os seus limites, suas simbologias, seus princípios, sua linguagem, etc., não têm sido temática dos cursos de formação de professores de Matemática.

Além disso, há uma concepção que trata a Matemática com uma neutralidade absoluta, completamente dissociada da realidade. Nessa concepção, a Matemática é tratada à margem das relações sociais, como um conhecimento desprovido de quaisquer aplicações a situações cotidianas e como se não exercesse influência numa série de problemas da vida das pessoas. Nesse ponto de vista, confunde-se o caráter de universalidade das ciências exatas com uma pretensa neutralidade, e o reduto do qual origina essa problemática parece emergir da Matemática. De fato, a igualdade $2 + 3 = 3 + 2$ é válida em qualquer parte do mundo, mas a essência de validade universal de tais ciências é suficiente para garantir a dita neutralidade? A

simples observação dos fatos históricos relativos à formação e evolução dessas ciências permite inferir que eles não se coadunam com a pretensa neutralidade.

A decomposição de números grandes em seus fatores primos, por exemplo, aparentemente não tinha nenhuma utilidade prática, mas revelou-se extremamente útil em sistemas sofisticados de criptografia, que garantem a segurança nas transações comerciais da internet. São modernos sistemas de criptografia que se baseiam em descobertas matemáticas feitas por Fermat há mais de 300 anos, cuja segurança é garantida pela dificuldade de fatorar números demasiadamente grandes. Tais sistemas funcionam com duas chaves, uma pública que todo mundo conhece e outra privada; enquanto a chave secreta é usada para decifrar a mensagem criptografada, a chave pública é usada para codificá-la. Em linhas gerais, estes sistemas de criptografia se baseiam na dificuldade de decompor números muito grandes em seus fatores primos. Nesse âmbito, pode-se considerar que

Encontrar números primos com 100 algarismos parece ser algo inteiramente inútil. Embora a maioria das pessoas reconheça que a matemática está envolvida na construção de um avião ou no desenvolvimento de tecnologia eletrônica, poucos esperam que o mundo esotérico dos primos possa provocar um grande efeito em suas vidas. De fato, já na década de 1940, G.H. Hardy pensava da mesma forma: "Gauss e outros matemáticos menores não se equivocaram ao louvar esta ciência [a teoria dos números] que, por ser tão afastada das atividades humanas comuns, deverá se manter sempre nobre e limpa." Entretanto, os números primos passaram recentemente ao primeiro plano do mundo vulgar e sujo do comércio. Não estão mais confinados à cidadela matemática. (DU SAUTOY, 2007, p. 20).

De modo completamente inusitado, as contribuições matemáticas de Fermat, Gauss e Riemann foram postas no coração do mundo comercial. A busca por números primos deixou de ser uma brincadeira casual presente no meio acadêmico para se tornar uma importante ferramenta de negócios (DU SAUTOY, 2007). Descobriu-se, então, uma maneira de usar os números primos para proteger as informações dos cartões de crédito enquanto as pessoas passeiam pelos shopping centers eletrônicos do mercado globalizado. No entanto, uma compreensão mais aprofundada sobre os números primos e sobre como ocorre a sua distribuição dentro do conjunto dos números naturais poderá pôr em xeque a segurança desses sistemas de criptografia. Portanto, a segurança do mundo eletrônico depende da compreensão que a humanidade tem sobre números primos.

4.3 Como se alcança o conhecimento?

O processo de construção do conhecimento vem sendo estudado por diferentes áreas,

como a Filosofia, a Pedagogia e a Psicologia. Esse processo é o modo pelo qual o ser humano aprende e desenvolve a sua inteligência, isto é, constrói o saber. Na Filosofia, a área que estuda como se constrói o conhecimento é chamada de Teoria do Conhecimento. Essa teoria é, segundo Hessen (2000, p. 20), “uma interpretação e uma explicação filosóficas do conhecimento humano”. É fato que essa questão tem desafiado e até mesmo embaraçado muitos filósofos que se propuseram a estudá-la.

O ato de conhecer é complexo e requer diversas variáveis e múltiplos diálogos, é impossível conceber o processo de aquisição do conhecimento como um ato unidirecional que parta apenas do objeto a ser conhecido ou somente do sujeito. Esse processo envolve diversos fatores, entre os quais se encontram os conhecimentos prévios que o indivíduo já possui, o objeto, o sujeito, as significações que o sujeito faz em relação ao objeto, bem como o contexto social e cultural.

O ser humano possui conhecimentos mediatos e imediatos. Estes são frutos de intuições, aqueles não. Contudo, o mesmo “ser humano reelabora os seus conhecimentos, procurando para cada um alguma forma de evidência, a fim de transformá-los em conhecimentos próximos àqueles produzidos pelas intuições” (D'AMORE, 2012, p. 123). Todavia, o conhecimento humano não é algo natural que vem biologicamente determinado, pelo contrário, é um produto histórico social. Na concepção histórico-social de homem, o conhecimento matemático, inclusive o espontâneo (não intencional), não é imediato, é “algo mediatizado pelo trabalho, isto é, ele não é determinado por leis biológicas, mas por leis histórico-sociais. Portanto, por mais imediato e espontâneo que pareça, ele é sempre um conhecimento mediatizado” (GIARDINETTO, 1999, p. 64).

Silva (2007, p. 21) afirma que a Matemática é um produto da cultura humana, por isso o conhecimento matemático é uma construção sociocultural e, conseqüentemente, os objetos matemáticos têm objetividade, uma vez que são construções socialmente aceitas. De igual modo, outros conceitos construídos socialmente são conhecidos por impactarem a vida das pessoas, tais como “dinheiro”, “tempo”, “gênero” e “justiça”. Mas, por exemplo, o que é o dinheiro? Não são pedaços de papel ou discos de metal, pois esses podem ser impressos a seu bel-prazer, o dinheiro é uma construção social partilhada, tem valor na medida em que foi acordado como de valor.

Algo é socialmente construído quando sua essência depende relativamente de aspectos contingentes da existência social. Assim, um elemento não poderia ter existido se não tivesse sido construído; e se esse elemento não precisasse ser construído, pelo menos na sua forma presente. Outro tipo de sociedade, que talvez tivesse outras necessidades, outros valores ou

interesses, poderia construir algo diferente ou construir essa mesma coisa diferentemente. Logo, o “dinheiro”, a “cidadania” e a “justiça” são claramente construções sociais, pois não poderiam ter existido sem sociedade. Parece que a sociedade resulta da construção social da realidade, isto é, a percepção dos sentidos em si é moldada pelos sentidos subjetivos atribuídos objetivamente a uma experiência. Essa realidade é, então, conhecida e aceita como natural.

Em seu livro “What Is Mathematics, Really?”, o matemático Reuben Hersh, numa perspectiva filosófica humanista, diz que a Matemática é “uma atividade humana, um fenômeno social, parte da cultura humana, com evolução histórica e inteligível no contexto social”. É claro que tal assertiva trata-se de uma descrição e não de uma definição, pois não especifica o conteúdo dessa atividade, entretanto as convenções sociais que governam as atividades das mentes humanas estão sujeitas a rigorosos constrangimentos não sociais. Dessa forma, ainda que os matemáticos se reunissem e concordassem em fazer π igual a 3, não estaria correto. Sobre isso, Stewart afirma:

Um círculo matemático é algo mais do que somente uma ilusão partilhada. É um conceito dotado de características extremamente específicas; «existe» na medida em que mentes humanas podem deduzir outras propriedades a partir dessas características, com a exigência crucial de que se duas mentes diferentes investigarem a mesma questão, não podem, raciocinando corretamente, chegar a respostas contraditórias. (STEWART, 2006, p. 33, grifo do autor).

E isso leva a crer que a Matemática está em alguma parte, em algum lugar. É por esse motivo que encontrar a resposta para uma questão em aberto parece-se com uma descoberta, e não com uma invenção. “A Matemática é um produto de mentes humanas, mas não se dobra à vontade humana” (STEWART, 2006, p. 33). Explorá-la é como explorar uma terra desconhecida, é como “entrar dentro do espelho de Alice”¹⁹. Por exemplo, Riemann só conseguiu vislumbrar uma nova paisagem, quando entrou no seu espelho matemático imaginário. Foi assim que ele vislumbrou um método para explicar a razão pela qual a estimativa de Gauss para o número de primos existente entre 1 e N permanecia precisa. A paisagem matemática não existe até que ela seja explorada.

É tentador pensar que, mesmo ao considerar que a Matemática é uma construção social partilhada como afirma Hersh, ela tem uma espécie de inevitabilidade lógica. Todavia, a Matemática desenvolvida pelo homem está intimamente ligada às fisiologias, às experiências e

¹⁹ A expressão “entrar dentro do espelho de Alice” tem como referência o livro “Alice através de espelho” escrito pelo matemático e romancista inglês, Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), conhecido pelo pseudônimo Lewis Carroll. No livro, Alice atravessa a camada de vidro do espelho e se depara com um mundo novo, onde as peças do tabuleiro de xadrez falam e agem como pessoas reais.

às preferências psicológicas específica dos seres humanos. A título de exemplo, os pontos e as linhas da Geometria podem parecer ser a base natural para uma teoria de formas, mas são também as características segundo as quais o sistema visual do homem, por qualquer razão, disseca o mundo. E embora os números discretos como 1, 2, 3, pareçam ser universais, sua origem reporta-se à tendência humana para agrupar coisas parecidas, como por exemplo cabras.

A filosofia moderna entende que o conhecimento representa um dos modos de apropriação do mundo pelo homem. Para Kosik (1976), os dois elementos constitutivos de cada modo de apropriação do mundo são o *sentido subjetivo* e o *sentido objetivo*. De acordo com ele, “o processo de captação e descobrimento do *sentido* da coisa é ao mesmo tempo criação, no homem, do correspondente *sentido*, graças ao qual ele pode compreender o *sentido* da coisa” (KOSIK, 1976, p. 29, grifo do autor). Dessa forma, é possível “compreender o *sentido objetivo* da coisa se o homem cria para si mesmo um sentido correspondente” (KOSIK, 1976, p. 29, grifo do autor). Kosik afirma que esses sentidos, por meio dos quais o homem descobre a realidade e o sentido dela, são um produto histórico-social (KOSIK, 1976, p. 29). Giardinetto (1999) também partilha desse entendimento, quando observa que todo conhecimento que o indivíduo vai adquirindo, seja pela aprendizagem sistematizada (a intencional) ou pela aprendizagem informal, que se dá no cotidiano dos indivíduos (a não-intencional, espontânea), é um produto histórico-social. (GIARDINETTO, p. 63).

4.4 A concepção sobre o que é Matemática e a prática pedagógica

Fossa (2014, p. 13) acredita ser razoável supor que a concepção sobre o que é Matemática afeta a maneira como essa disciplina é ensinada e a maneira de se fazer pesquisas em Educação Matemática. Machado (2011, p. 33), de modo mais incisivo, entende ser “quase um truísmo afirmar-se que toda ação docente com um mínimo de consistência articula-se simbioticamente com um discurso pedagógico”. Ele considera que tanto a ação quanto o discurso são “tributários de uma concepção de conhecimento que frequentemente subjaz” (MACHADO, 2011, p. 33).

Em situações de crise, no entanto, quando se configuram rupturas

Não há prática ou teoria pedagógica que não seja de modo consciente ou não, influenciada, quando não determinada, por uma concepção filosófica sobre a natureza da Matemática. O educador precisa necessariamente responder às questões filosóficas fundamentais sobre o estatuto do objeto matemático, sobre a natureza da verdade matemática, sobre o caráter do método matemático, sobre a finalidade da Matemática, sobre o estatuto do conhecimento matemático enfim, antes de criar teorias, estabelecer

objetivos, elaborar estratégias, desenhar métodos ou qualquer outra atividade teórica ou prática cuja finalidade última seja o ensino de Matemática. (SILVA, 1999, p. 57).

A busca pela compreensão de como o conhecimento é alcançado tem ocupado a mente de muitos pensadores ao longo do tempo. Na filosofia, esse tema tem sido posto com diferentes caminhos e é tratado pela Teoria do Conhecimento - a dimensão filosófica que se ocupa do estudo sobre como se dá a construção do conhecimento humano. Esse ramo da filosofia, que tenta entender como o ser humano pode conhecer, também é chamado de Epistemologia.

Para a corrente inatista, o conhecimento é pré-formado ou é uma característica inata, isto é, o indivíduo já nasce com as estruturas do conhecimento e elas se atualizam à medida que esse indivíduo se desenvolve, ele já nasce com suas qualidades e capacidades básicas. Atualmente, os principais fundamentos do inatismo foram rejeitados, entretanto, essa tendência deu origem a outras vertentes filosóficas sobre o conhecimento, dentre elas, o racionalismo.

O racionalismo (de *ratio*, razão) é o ponto de vista epistemológico no qual a única forma de se chegar ao conhecimento é por meio da razão. Os racionalistas acreditam que o conhecimento só depende do pensamento, o pensamento é a verdadeira fonte e fundamento do conhecimento humano. Segundo Chauí, “[P]ara o racionalismo, a fonte do conhecimento verdadeiro é a razão operando por si mesma, sem o auxílio da experiência sensível e controlando a própria experiência sensível” (CHAUÍ, 2000, p.146). Desse modo, o conhecimento provém de uma dedução lógica, somada a uma argumentação e a uma análise de informações, a propósito, os racionalistas defendem que a mente organiza, armazena e atribui significado às informações que já foram adquiridas.

Alguns autores atribuem similaridade entre o racionalismo e o conhecimento matemático. Nesse entendimento, parece haver uma interpretação clássica do que seja a Matemática, conforme se pode notar sequentemente:

É óbvio que um determinado tipo de conhecimento serviu de modelo à interpretação racionalista do conhecimento. E não é difícil dizer qual seja: é o conhecimento matemático. Ele é predominantemente dedutivo e conceitual. Na geometria, por exemplo, todos os conhecimentos são derivados de conceitos superiores e axiomas. Nela, o pensamento impera com completa independência da experiência, na medida em que segue apenas suas próprias leis. Por isso, todos os juízos que formula distinguem-se pelas notas características da necessidade lógica e da validade universal. Se todo o conhecimento humano for concebido e interpretado segundo esse tipo de conhecimento, teremos o racionalismo em sua forma mais imediata. Se considerarmos mais de perto a história do racionalismo, encontraremos aí uma explicação importante para sua origem. É da matemática, mostra-nos a história, que vêm quase todos os representantes do racionalismo. (HESSEN, 2000, p. 37)

A forma mais antiga de racionalismo é encontrada em Platão, ele se convenceu de que

um saber genuíno distingue-se pelas notas características da necessidade lógica e da validade universal. Assim, o mundo da experiência é incapaz de transmitir qualquer conhecimento, pois está em permanente mudança. Desse modo, Platão atribui à razão humana o poder de penetrar nos domínios suprassensíveis da Matemática.

Um mérito do racionalismo foi dar destaque, de modo insistente, à importância dos fatores racionais no conhecimento humano, entretanto, essa escola filosófica foi unilateral ao fazer do pensamento a única ou verdadeira fonte do conhecimento. Shapiro (2015, p. 20) afirma que o racionalismo pode ser caracterizado como “uma tentativa para estender a metodologia percebida da Matemática a todo o conhecimento”. Segundo ele, os “racionalistas ficaram impressionados com as aparentemente inabaláveis fundações da Matemática, e a sua base na racionalidade pura”. Ademais, ele diz: “Tentaram pôr todo o conhecimento no mesmo pé”.

Contrapõe-se ao racionalismo, o empirismo (de *empíria*, experiência). Para os empiristas, o conhecimento tem origem e evolui a partir da experiência que o indivíduo vai acumulando. Nessa corrente filosófica, a razão não possui nenhum patrimônio apriorístico, aliás, o empirismo argumenta que todo o conhecimento humano deve ser adquirido de experiências sensoriais, isto é, a partir das vivências dos indivíduos.

[A] consciência cognoscente não retira seus conteúdos da razão, mas exclusivamente da experiência. Por ocasião do nascimento, o espírito humano está vazio de conteúdos, é uma tabula rasa, uma folha em branco sobre a qual a experiência irá escrever. Todos os nossos conceitos, mesmo os mais universais e abstratos, provêm da experiência. (HESSEN, 2000, p. 41).

Ao contrário do racionalismo que se embasa numa ideia de conhecimento geral *a priori*, o empirismo sustenta que o conhecimento só pode ser alcançado a partir de fatos concretos. Ao sustentar tal ponto de vista, os empiristas argumentam que o processo de conhecer se inicia com as percepções concretas na criança e vai, aos poucos, formando representações e conceitos gerais, com base nessas percepções. Ora, então nessa acepção, o conhecimento se desenvolve daquilo que os sentidos evocam da experiência e, desse modo, ela aparece como única fonte do conhecimento.

Costuma-se distinguir a experiência em dois tipos: a interna e a externa, esta consiste na percepção sensível, enquanto aquela se baseia na autopercepção. Para HESSEN (2000, p. 41), John Locke (1632-1704) é o verdadeiro fundador da corrente empirista e combateu com toda firmeza a doutrina das ideias inatas. Ainda segundo HESSEN (2000, p. 41), Locke acreditava que “A alma é um ‘papel em branco’, que a experiência vai aos poucos cobrindo com marcas escritas. Há uma experiência externa (sensação) e outra interna (reflexão)”. Ele afirmou também

que o ser humano é uma *tabula rasa*. A tábula era um instrumento romano de escrita feito com cera, onde as pessoas escreviam com uma espécie de estilete e, caso quisessem apagar, bastava raspar ou derreter esse material. A compreensão entre dois tipos de experiência fez os empiristas admitirem a importância do pensamento, mas apenas como dispositivo de reflexão. Para eles, o pensamento serve somente para unir os diferentes dados oriundos da experiência.

A expressão latina *tabula rasa*, traduzida literalmente como “tábua raspada”, tem o sentido de “folha de papel em branco”, de “recipientes vazios”. Hoje, está completamente superada a ideia de que os alunos são como “*tabulas rasas*”, “folhas de papel em branco” e “baldes vazios” a serem preenchidos com a matéria que recebem na escola. A ideia do “recipiente vazio”, no qual as informações vão sendo inseridas, foi ofuscada pelos sofisticados construtivismos de diferentes matizes. É pouco provável existir professor que ainda imagine os alunos como uma “folha de papel em branco”, visto que há um consenso geral de que o conhecimento é algo que se constrói.

Entretanto, “disfarçadamente no discurso, e escancaradamente em algumas práticas docentes, o “baldismo” subjaz” (MACHADO, 2004, p. 16, grifo do autor). Ele permanece ativo e é possível detectá-lo quando, por exemplo, “se identifica um processo de avaliação como um processo de medida: a nota seria como o indicador em uma vareta inserida no líquido/matéria contido no recipiente/aluno” (MACHADO, 2004, p. 16). Também se pode reconhecê-lo “nos planejamentos que se reduzem a contabilizar o número de aulas dedicadas a cada assunto, como se se estivesse regulando a vazão da torneira que enche o balde/aluno de matéria” (MACHADO, 2004, p. 16). Portanto, “o balde não existe, mas está em toda parte” (MACHADO, 2004, p. 16).

Ora, o antagonismo entre o racionalismo e o empirismo é evidente. O primeiro baseia-se na ideia de que a única forma de se chegar ao conhecimento é pela via da razão; por outro lado, o segundo fundamenta-se na via da experiência. Porém, ao fazer da experiência a única fonte do conhecimento, de forma unilateral, o empirismo acaba por trocar um extremo por outro. Mas é fato que essas duas vertentes juntas trazem dois fatores importantes para a construção do conhecimento: a experiência e a razão. Soares (2015) destaca que a Matemática parece, por um lado, ser usada para validar o racionalismo e, por outro, expor incoerências ou contradições do enfoque empirista. Já Shapiro (2015) diz que a Matemática é um importante estudo de caso para o filósofo.

Uma orientação epistemológica que se propõe fazer uma mediação entre o empirismo e o racionalismo é chamada por Hessen (2000) de intelectualismo. Como o próprio nome sugere (*inrelligere*, de *inrus legere*, ler dentro), nessa concepção, a consciência cognoscente lê na experiência, retira os seus conceitos na experiência; em outras palavras, a experiência e o

pensamento constituem o fundamento do conhecimento humano. Os intelectualistas sustentam a existência de juízos necessários ao pensamento e com validade universal concernente não apenas aos objetos *ideais*, mas também aos objetos *reais*. Há, desse modo, no intelectualismo, o predomínio da inteligência sobre os sentimentos e a vontade. As perspectivas empirista e intelectualista podem ser melhores explicadas no seguinte:

Para os empiristas, a sensação conduz à percepção como uma síntese passiva, isto é, que depende do objeto exterior. Para os intelectualistas, a sensação conduz à percepção como síntese ativa, isto é, que depende da atividade do entendimento. Para os empiristas, as ideias são provenientes das percepções. Para os intelectualistas, a sensação e a percepção são sempre confusas e devem ser abandonadas quando o pensamento formula as ideias puras (CHAUI, 2000, p. 152).

Nesse sentido, o professor de Matemática precisa refletir sobre a natureza dos objetos matemáticos, e ao fazer isso, depara-se com o desafio imediato de entender que tais objetos são, necessariamente, de natureza abstrata. Até mesmo a reta e os números, que são objetos matemáticos mais simples quando comparados com grupos topológicos ou espaços vetoriais, não são entidades físicas. De forma simplificada, enquanto a reta pode ser entendida como uma linha formada por infinitos pontos e sem extremidades, os números podem ser entendidos como objetos abstratos usados para descrever uma quantidade, ordem ou medida. “Enquanto o questionador ingênuo parece pintar um quadro de objetos matemáticos como parte da realidade física, de fato é quase impossível ao matemático, como matemático, ‘sujar suas mãos’” (FOSSA, 2014, p. 23).

Dessa forma, os objetos de estudo da Matemática não possuem existência física, são abstratos por natureza, são estruturas pensadas na mente e, portanto, independentes da experiência. Então, como é possível compreendê-los, se na sua essência, não são objetos concretos, não são manipuláveis? Como agir diante das várias ‘teorias’ do conhecimento? Contudo, o objetivo maior do processo educativo é transcender as trivialidades do cotidiano, fazendo o sujeito desenvolver a capacidade de criar e interpretar, tanto situações reais quanto eventos imaginários, objetos concretos e objetos essencialmente abstratos.

É consenso que o fato de os objetos matemáticos não poderem ser verificados por meio da experiência concreta dificulta a sua compreensão. Em relação ao ensino de Matemática, o professor se perde, ora ao atribuir importância exagerada em associações com o mundo real, ora ao agarrar-se numa crença ingênua de neutralidade absoluta. No ensino básico, aparenta haver uma necessidade maior de mediação entre as associações com o mundo real e as abstrações dos conceitos. E à medida que o estudante vai avançando nos níveis de ensino, parece

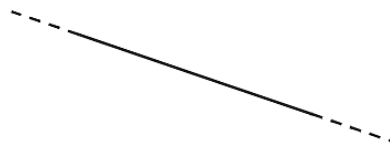
que a sua capacidade de compreender as coisas mais abstratas vai amadurecendo.

Na física, por exemplo, se alguém quisesse explicar a queda dos corpos bastava soltar objetos de diferentes alturas e medir os respectivos tempos de queda com ajuda de um cronômetro. Ao fazer a indução sobre os resultados, descobrir-se-ia facilmente que $s = \frac{1}{2}gt^2$, onde s é o percurso do objeto, g é a aceleração da gravidade terrestre e t é o tempo de queda do objeto. É o que se pode chamar de método empírico.

Mas, e se alguém quisesse verificar algo de forma análoga na Matemática? Se alguém quisesse, por exemplo, mostrar empiricamente que duas retas concorrentes possuem um único ponto em comum? O obstáculo inicial seria como fazer para ter acesso às duas retas, já que elas não existem na realidade concreta. Então, esse alguém poderia fazer um desenho representando as duas retas concorrentes e examinaria a intersecção entre elas com ajuda de uma potente lente de aumento. Ora, o desenho da reta é diferente da reta.

Ao tratar um objeto da Matemática, é necessário representar o seu registro semiótico, seja por meio de uma palavra, por meio de um desenho ou por meio de uma equação. Isso ocorre porque os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem o uso de registros de representação. Os registros semióticos não são importantes apenas por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações sobre o objeto representado. Assim, a “reta” pode ser representada pela palavra reta (oral ou escrita), pelo desenho

Figura 9- representação da reta



Fonte: autoria própria

ou por uma equação ($ax + by + c = 0$).

Obviamente, os termos concreto e abstrato recebem diferentes conotações, conforme as atribuições do senso comum, da filosofia, da fenomenologia, da ontologia e da ciência em geral. Especificamente para o senso comum, a distinção entre o abstrato e o concreto parece bastante simples: este é tudo aquilo que está ao alcance dos sentidos, que pode ser tocado, que é real e que faz parte do cotidiano; já aquele é artificial, está no mundo das ideias, do pensamento. Se por um lado, alguns estereótipos bastante difundidos aproximam o abstrato ao não real ou ao que nada tem de real, por outro lado, há estereótipos que associam as abstrações à verdadeira

realidade, à essência do real. É o que se infere da pretensão de que, “partindo-se da realidade concreta, por um processo de depuração sucessiva, abstraindo-se características não relevantes para os objetivos colimados, constrói-se um objeto abstrato, capaz de representar os objetos concretos naquilo que têm de mais real” (MACHADO, 2011, p. 41).

Ademais, não é possível fazer uma reflexão sobre o ensino da Matemática sem adentrar em questões sobre a natureza dos objetos dessa disciplina, também não há como fazer uma discussão sobre o par conceitual concreto-abstrato e suas implicações na construção do conhecimento matemático sem evocar aspectos da história da Matemática. O filósofo Imre Lakatos, adaptando um dito de Kant, disse que a filosofia da Matemática sem a história da Matemática é vazia e esta sem aquela é cega.

Nesse sentido, sequer é possível ignorar a questão filosófica, mais especificamente a epistemologia, dentro da qual surgiu a Filosofia da Matemática. Essa filosofia é a área de estudo que analisa os fundamentos e as consequências das estruturas matemáticas, através de diferentes perspectivas, como a metafísica, a epistemologia, a lógica e a filosofia da linguagem. A Filosofia da Matemática tenta fornecer um relato da natureza da Matemática e entender o lugar dela na vida das pessoas. De acordo com Shapiro (2015, p. 23), a Matemática é um caso importante para a epistemologia e a metafísica geral, e se ela própria é ou não uma atividade de aquisição de conhecimento é uma questão filosófica substancial. Resta, portanto, perguntar ‘o que é Matemática?’.

4.5 “O que é Matemática?”

O termo “Matemática” é de origem grega e deriva de *mathema*, que quer dizer aprendizagem. Possivelmente, uma busca nos dicionários pode levar a desvios: Ferreira (2005) diz que Matemática é a “Ciência que estuda os números, as formas e as medidas de grandezas e quantidades”; Ximenes (2000), de modo parecido, a define como a “Ciência que investiga, por meio do raciocínio dedutivo, as relações entre entidades abstratas, como os números, as figuras geométricas, etc., e as propriedades dessas entidades”; e Abbagnano (1970) destaca “que as definições filosóficas de Matemática por um lado expressam orientações diferentes da investigação nessa área e, por outro, modos diferentes de justificar a validade e a função dessa disciplina no conjunto das ciências”. Assim, de acordo com Abbagnano (1970), a Matemática pode receber quatro definições fundamentais: ciência da quantidade, ciência das relações, ciência do possível e ciência das construções possíveis.

A “Ciência da quantidade” foi a primeira definição filosófica para a Matemática e foi

formulada por Aristóteles, entretanto tal definição já estava implícita nas considerações de Platão sobre a aritmética e a geometria, que buscavam evidenciar a diferença entre as grandezas percebidas pelos sentidos e as grandezas ideais. Abbagnano (1970) afirma que esse conceito persistiu por muito tempo e só depois começou a parecer insuficiente para exprimir todos os aspectos desse campo de estudos. Aristóteles dizia:

“O matemático constrói sua teoria por meio da abstração; prescinde de todas as qualidades sensíveis, como peso e leveza, dureza e seu contrário, calor e frio, e das outras qualidades opostas, limitando-se a considerar apenas a quantidade e a continuidade, ora em uma só dimensão, ora em duas, ora em três, bem como os caracteres dessas entidades, na medida em que são quantitativas e continuativas, deixando de lado qualquer outro aspecto delas. Consequentemente, estuda as posições relativas e o que é inerente a elas: comensurabilidade ou incomensurabilidade e proporções”.

A segunda definição fundamental “ciência das relações” está estreitamente ligada à lógica ou parte desta. Os antecedentes dessa concepção podem ser encontrados em Descartes, que afirmava: “Embora as ciências comumente chamadas de matemáticas tenham objetos diferentes, estão de acordo quanto a considerarem apenas as diversas relações ou proporções neles encontradas” (*Discours, II*). Porém, essa estreita conexão da Matemática com a lógica começou a evidenciar-se como característica só quando a lógica assumiu a forma de cálculo matemático. Frege foi o estudioso que deu maior contribuição para inscrever a Matemática no domínio da lógica.

A terceira designação “ciência do possível” pertence à corrente formalista. Entende-se por possível aquilo que não implica contradição. Nesse ponto de vista, a Matemática não é parte da lógica e não a pressupõe, portanto não pode ser construída como simples cálculo, sem exigir qualquer interpretação. Para essa terceira designação, é essencial a possibilidade de determinar a não-contradição dos sistemas axiomáticos, porém foi justamente essa possibilidade que o teorema descoberto por Gödel em 1931 pôs em dúvida. Ele descobriu que não é possível demonstrar a não-contradição de um sistema S com os meios (axiomas, definições, regras de dedução, etc.) pertencentes ao mesmo sistema S ; para efetuar tal demonstração, é preciso recorrer a um sistema S_i , mais rico em meios lógicos.

E a última concepção fundamental “ciência das construções possíveis” significa que a Matemática tem por objeto a possibilidade de construção. Trata-se da noção kantiana da Matemática como “construção de conceitos” e, por isso, essa corrente comumente é chamada de intuicionismo. Segundo Brouwer, um dos principais representantes do intuicionismo, a Matemática identifica-se com a parte exata do pensamento humano e não pressupõe ciência

alguma, nem a lógica, mas exige uma intuição que permita apreender a evidência dos conceitos e das conclusões.

Davis e Hersh (1985, p. 31) definem a Matemática como a ciência da quantidade do espaço, entretanto compreendem que a definição de tal matéria muda com o tempo, pois cada geração e cada matemático de uma respectiva geração formula um conceito. Silva (2007, p. 21) também entende que a Matemática, por ser um produto da cultura humana, muda com o tempo. E Devlin (2008, p. 36), por sua vez, a refere como “a ciência dos padrões”.

... a frase que melhor descreve o assunto é “a ciência dos padrões”. Algumas das mais conhecidas entre as muitas especialidades da matemática de hoje em dia são a teoria dos números (o estudo dos padrões para os números), a geometria (o estudo dos padrões para as formas), a trigonometria (que considera medidas de superfícies), a álgebra (que estuda padrões de relacionamento entre coisas), o cálculo (padrões de movimento contínuo e de variações), a topologia (padrões de proximidade e posição relativa), a teoria da probabilidade (padrões de repetição e eventos aleatórios), a estatística (padrões dos dados do mundo real) e a lógica (padrões do raciocínio abstrato). (DEVLIN, 2008, p. 36).

A história da Matemática mostra que esta ciência nem sempre surgiu de questões teóricas, em muitos casos surgiu da necessidade de resolver problemas práticos da realidade cotidiana. Acredita-se que tal fato tenha ocorrido com a geometria por exemplo, isto é, as primeiras medições de distâncias, áreas e volumes provavelmente surgiram de necessidades do dia a dia. Civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, precisavam, além de outras necessidades, medir as terras para demarcar os limites das propriedades e das plantações. Foi nesse contexto que a geometria surgiu, a própria origem grega da palavra significa “medida da terra”. Aliás, foi na Grécia que a geometria se desenvolveu como uma forma de conhecimento organizada, sem a obrigatoriedade de ter aplicações práticas.

Desde os primórdios de sua existência, a Matemática se desenvolveu da tentativa de solucionar problemas de ordem teórica e prática. Esses problemas às vezes se confundem, tanto que a solução de problemas teóricos acaba levando a solução de problemas práticos, proporcionando não só o desenvolvimento da Matemática e de soluções práticas, mas também das técnicas necessárias para permitir o avanço das outras ciências. É importante observar que vários estudiosos partiram da tentativa de solucionar grandes problemas matemáticos e acabaram levando contribuições importantes a outras áreas da Matemática, mesmo que sem essa intenção.

A história da Matemática é longa. Davis e Hersh (1985, p. 34) afirmam que “difícilmente existem culturas, por mais primitivas que sejam que não exibam algum tipo de matemática rudimentar”. Segundo Eves (2011, p. 26), a matemática mais antiga é aquela resultante dos

primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número. Para ele, o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se antes dos primeiros registros históricos, há evidências arqueológicas de que o homem era capaz de contar há cerca de 50 000 anos, e a maneira como ocorreu é largamente conjectural.

É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso (EVES, 2011, p. 26).

Com a evolução gradual da sociedade, a necessidade fez as primeiras contagens simples aparecerem, por exemplo: uma tribo precisava saber quantos eram os seus membros e quantos eram os seus inimigos; e era preciso saber se o rebanho de carneiros estava diminuindo. Provavelmente, a maneira mais antiga de contar baseava-se em algum método de registro simples, no qual era empregado o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros podia-se dobrar um dedo para cada animal, ou fazer marcações no barro, ou então fazer nós numa corda. Só mais tarde, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar os números.

Isso significa a percepção do conceito de número a partir da realidade material, embora essa percepção tenha ocorrido de forma não intencional, isto é, a abstração humana se deu de forma involuntária. É bastante plausível que as bases do conhecimento matemático não decorrem somente da experiência, mas pelo menos uma parte delas tem origem nessa experiência.

Não há dúvida que todo o nosso conhecimento começa com a experiência; pois de que outro modo poderia a nossa faculdade de conhecimento ser despertada para o exercício, não fosse por meio de objetos que estimulam nossos sentidos e, em parte, produzem representações por si mesmos, em parte colocam em movimento a atividade do nosso entendimento, levando-a a compará-las, conectá-las ou separá-las e, assim, transformar a matéria bruta das impressões sensíveis em um conhecimento de objetos chamado experiência? (KANT, 2013, p. 45).

Retomando a pergunta evocada anteriormente, “o que é Matemática?”, uma resposta ingênua poderia dizer que “ela trata de números”, ou que é a “ciência do estudo dos números”. Se essa pergunta fosse feita a qualquer pessoa comum, provavelmente se obteria respostas bem parecidas com a citada. Mas para Devlin (2004, p. 24), essa resposta está atrasada em pelo menos 2.500 anos. De fato, de lá para cá a Matemática se desenvolveu tanto que, nas universidades, os matemáticos frequentemente têm problemas em entender a pesquisa dos colegas de seus próprios departamentos, conforme aponta Shapiro (2015) e cita como exemplo

o fato de os algebristas não poderem acompanhar o desenvolvimento da análise. Parte das mudanças na descrição da Matemática é expressa por Devlin (2004, p. 24), quando diz:

A resposta para o que vem a ser a matemática mudou diversas vezes desde aquela época. Até cerca de 500 a.C., a matemática era realmente algo que tratava de números. A matemática do antigo Egito, Babilônia e China consistia quase que inteiramente em aritmética. Era largamente utilitária e de uma variedade bem do tipo ‘livro de receitas’. Entre 500 a.C. e 300 d.C. a matemática se expandiu além do estudo dos números. Os matemáticos da antiga Grécia se preocupavam mais com a geometria. (...) Para os gregos, com ênfase na geometria, a matemática eram números e formas. (...) Depois dos gregos, embora a matemática progredisse em diversas partes do mundo – notavelmente na Arábia e na China –, sua natureza não mudou até meados do século XVII. (...) A matemática tornou-se o estudo dos números, da forma, do movimento, da mudança e do espaço.

É claro que falar de ‘aplicações da Matemática em situações concretas’ é diferente de falar de ‘Matemática concreta’, crença que habita o imaginário do senso comum. A própria concepção de “ciência do estudo dos números” traz em si uma estrutura impregnada de abstração, na noção carregada de relativismos que se tem do termo. Um fato curioso é que, durante um bom tempo, houve uma distinção entre dois tipos de Matemática, a pura e a aplicada. As duas, apesar de muitas vezes terem sido postas de lados opostos, “são tendências, não os extremos do espectro” (STEWART, 2006, p. 107).

Devlin (2004, p. 36) entende que os seres humanos possuem um senso numérico inato, ou melhor, o homem possui esse senso ou desde os primeiros anos de vida ou desde quando nasce. Para Devlin (2004, p. 36), os animais como o pombo, o chimpanzé e o rato possuem esse senso numérico, a diferença é que somente a espécie humana domina a habilidade de contar. Além disso, outra habilidade inerente ao homem é a capacidade de usar símbolos para representar os números e, a partir dessa representação, operar com quantidades diversas através da manipulação desses símbolos.

O conhecimento matemático, como diz Giardinetto (1999, p. 73), “atinge um nível tão elevado de desenvolvimento que a relação entre a realidade e a produção do conhecimento matemático passa, progressivamente, a se desenvolver para além de uma vinculação mais imediata”. A linguagem matemática, por meio da qual esse desenvolvimento se manifesta, é um produto histórico-social que garante o acesso a formas mais abstratas do que aquelas restritas ao concreto imediato. Porém, esse caráter abstrato do conhecimento matemático não é um aspecto negativo, e sim um procedimento essencial de sua construção. Obviamente, não se pode tomar os termos “concreto” e “abstrato” no sentido do senso comum, ou seja, o “abstrato” como algo distante da realidade e supérfluo, e o “concreto” o seu oposto: os elementos da realidade que imediatamente se manifestam aos sentidos. “E mais, o concreto imediato, ao mesmo tempo

que possibilitou um avanço, passou a ser entrave para a superação de novas necessidades” (GIARDINETTO, 1999, p. 73).

O fato de a Matemática, por sua natureza, alcançar níveis que vão muito além da associação imediata com a realidade não implica descontextualização. Essa ciência não deixa de ser válida como conhecimento por não estar sempre diretamente vinculada ao real. É fácil perceber certas interpretações em frases como “a Matemática é a ciência das abstrações”, como se ser o lugar das abstrações por excelência, no sentido que o senso comum dá à palavra, fosse necessariamente negativo. Também é comum encontrar quem advogue que o conhecimento matemático precisa estar mais ligado à realidade (entendida como aquela acessível pela imeditividade dos sentidos). Daí o clamor pelo seu ensino mais contextualizado, um clamor que, muitas vezes, provém de uma interpretação ingênua do que seja a Matemática.

Provavelmente, ao perguntar a uma criança: “o que é o “três?”, ela mostrará três dedos da mão, ou escreverá o número 3 numa folha de papel; é fácil perceber que estas são apenas representações do três, não são “o três”. Porém, se se estabelece que os objetos da matemática não são reais na acepção ingênua do termo, resta indagar: tais objetos existem ou não existem? Os átomos existem, os ácidos também, mas e as retas? Vários pensadores têm se debruçado sobre perguntas desse tipo e, dentre as diferentes respostas, alguns disseram afirmativamente que sim. Para eles, os objetos da Matemática enquanto ideias e conceitos “possuem uma própria ‘existência’, mas não é uma existência sensível, como aquela ‘normal’, que observamos na nossa experiência. Trata-se de uma existência diferente em um mundo à parte, conceitual, como se ocorresse num outro universo” (D'AMORE, 2012, p. 137, grifo do autor).

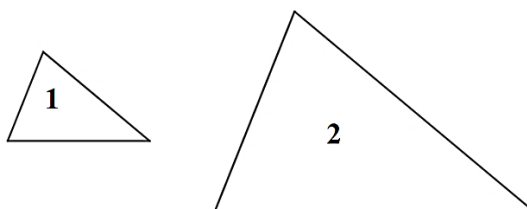
“Os objetos matemáticos são então símbolos de unidades culturais que emergem de um sistema de utilizações que caracterizam as pragmáticas humanas e que se modificam continuamente no tempo, também segundo a necessidade” (D'AMORE, 2012, p. 140). Desse modo, esses objetos e os seus significados dependem dos problemas enfrentados em Matemática e dos processos de suas resoluções. Assim, refletir sobre a natureza dos objetos matemáticos não deve ser tarefa somente de quem se ocupa de Epistemologia, de Filosofia da Matemática ou do matemático, mas de todos aqueles que se ocupam do ensino e da aprendizagem dessa disciplina.

“Muitos têm dificuldade, estudantes, pessoas comuns, mesmo gênios universais, para entender que a matemática não é uma realidade empírica” (D'AMORE, 2012, p. 147). A Matemática é um ótimo instrumento para entender a realidade e para descrevê-la, mas não é a mesma coisa, ou pelo menos se parece com um conjunto de conhecimento puramente racional sobre entidades abstratas apenas pensáveis, isto é, aparentemente independente da experiência.

Por isso, ao trabalhar com objetos concretos no ensino e aprendizagem dessa disciplina, principalmente na educação infantil, a fim de ilustrar os objetos matemáticos abstratos, é “necessário ter muita consciência didática e cultura epistemológica, para depois conduzir o estudante na direção da abstração” (D’AMORE, 2012, p. 147); caso contrário, “não será a matemática que se ensinará e se fará apreender, mas um híbrido, que não irá favorecer uma verdadeira competência matemática” (D’AMORE, 2012, p. 147).

Inclusive, no ensino primário²⁰, muitas vezes é comum as crianças acreditarem que quanto maiores os lados do triângulo, maior é a soma dos seus ângulos internos. É possível entender isso a partir da imagem da figura 10:

Figura 10 - triângulos



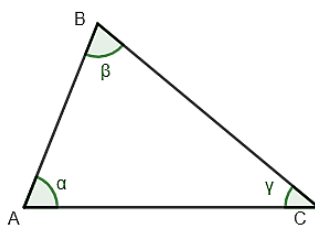
Fonte: autoria própria

Segundo as crianças, a soma dos ângulos internos do triângulo 2 é maior do que a de 1. A demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo é, sem sombra de dúvidas, desproporcional para convencê-las do contrário, elas nem entenderiam a operação. Então, recorre-se a procedimentos empíricos: desenha-se um triângulo num pequeno cartão, corta-se as pontas e as encosta de maneira oportuna para mostrar que os lados externos estão na mesma reta, isto é, os três ângulos formam um ângulo raso. Esse experimento concreto é suficiente para convencer uma criança, mas trata-se, evidentemente, de um processo empírico e não de uma demonstração, ou seja, matematicamente é irrelevante.

Somente uma demonstração poderá garantir que a soma dos três ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois ângulos retos, isto é, 180 graus. Nem mesmo a medição das três amplitudes com a ajuda de um transferidor seria válida do ponto de vista matemático. Pois bem, tome o triângulo da figura 11; esse não é o triângulo, é apenas sua representação semiótica, que será útil para acompanhar o raciocínio.

²⁰ O estudo dos polígonos e a soma de seus ângulos internos são feitos no Brasil no 7º ano do Ensino Fundamental II, cuja faixa etária dos estudantes está entre 11 e 14 anos. E o Estatuto da Criança e do Adolescente (lei federal nº 8.069/90) diz, por meio do seu artigo 2º, que “Art. 2º Considera-se criança, para os efeitos desta Lei, a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade”. Por esta razão, referiu-se aos estudantes como “crianças”.

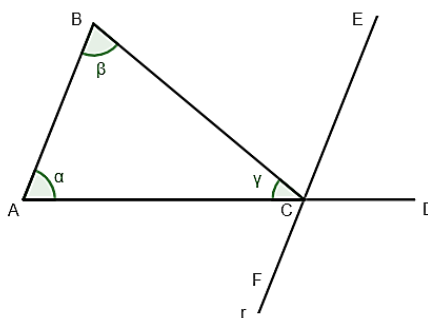
Figura 11



Fonte: autoria própria

O primeiro passo para a demonstração é prolongar o lado AC para além de C , até um ponto D escolhido arbitrariamente; em C traça-se a reta r paralela a AB ; sobre esta reta r toma-se dois pontos E e F , em semirretas opostas com relação a C , que permitirão designar alguns ângulos (figura 12). O ângulo BCE é igual ao ângulo β , uma vez que são alternos internos, formados pelas retas (AB e r) cortadas por uma transversal BC . O ângulo DCE é igual ao ângulo α , pois são correspondentes em uma situação análoga. Mas a soma de γ com BCE e com DCE forma o ângulo ACD , que é raso. Portanto, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é um ângulo raso.

Figura 12



Fonte: autoria própria

Ironicamente, nos dias de hoje, a propriedade da soma dos ângulos internos depende do objeto triangular considerado. Caso o objeto triangular esteja sob a ação de um campo gravitacional intenso, a soma dos seus ângulos internos não será igual a um ângulo raso. Isso ocorre porque a teoria geral da relatividade não acata a validade *a priori* da geometria euclidiana, essa teoria faz a geometria do espaço depender da distribuição de matéria e energia.

Se o triângulo considerado estiver sobre a superfície de uma esfera, a soma de seus ângulos internos também não será igual à soma de um ângulo raso. A demonstração da soma dos ângulos construída anteriormente foi feita sobre a geometria de Euclides, tanto que em certo

passo, traçou-se a reta, passando por um ponto, paralela a uma reta dada. Na geometria de Lobachevsky, no entanto, é possível passar mais de uma paralela a uma reta dada por um ponto fora dela; nesse caso, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre menor que um ângulo raso. E na geometria de Riemann, a soma de tais ângulos também não é igual à soma de um raso, mas é sempre maior que um ângulo raso, não sendo possível, portanto, traçar uma reta paralela a uma reta dada por um ponto fora dela.

Ora, os resultados da soma dos ângulos parecem contraditórios, a ponto de se pensar ingenuamente que apenas um deles possa ser verdadeiro. Só parecem! Os resultados das demonstrações²¹ são coerentes com relação à teoria, com relação aos axiomas escolhidos. A Matemática não é, porém, a disciplina das verdades.

4.6 O concreto e o abstrato

Para o senso comum, nada parece mais óbvio de que, partindo do significado do termo “concreto”, se deduz o “abstrato” como o não concreto. Entretanto, também parecia óbvio que o Sol girasse em torno da Terra (o homem via o Sol aparecer e esconder atrás da Terra) e que o corpo mais pesado caísse ao solo mais rapidamente do que o corpo mais leve. Mas Galileu mostrou que ambas as obviedades são falsas. Assim, apesar de sua relativa circularidade, a concepção de concretude não é nítida e, por isso, o entendimento do senso comum conduz a uma simplificação corriqueira que “reduz o concreto ao palpável, ao manipulável, mitigando-se ou mesmo omitindo-se uma dimensão fundamental da concretude, associada a seu conteúdo de significações” (MACHADO, 2011, p. 41).

A simplificação na caracterização do abstrato e do concreto conduz à crença de que, no processo de construção do conhecimento, bastaria definir uma entre as alternativas: “ou ele se daria a partir de um movimento, de uma ascensão do concreto para o abstrato, ou ele teria as abstrações como referência inicial, atingindo-se, a partir delas, a realidade concreta” (MACHADO, 2011, p. 42). No discurso pedagógico, é comum um elogio acentuado da ascensão da concretude à abstração, por pressupor maior simplicidade do concreto na relação com as construções “abstratas”. Todavia, o caminho perseguido nas atividades escolares é amplamente o do abstrato em direção ao concreto, a julgar pelo esquema “teoria/exercícios” e

²¹ A demonstração de que, na geometria de Riemann, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre maior que um ângulo raso foi omitida nesta dissertação por fugir da temática abordada. Entretanto, tal demonstração pode ser encontrada em Coutinho (2015). Do mesmo modo, a demonstração de que, na geometria de Lobachevsky, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre menor que um ângulo raso encontra-se em Batista (2019).

“conteúdo/aplicações”, predominante na prática pedagógica nos diferentes níveis de ensino.

A concepção platônica sobre o significado da Matemática ainda se faz presente em várias práticas educativas da atualidade. Para Platão, o que se concebia como realidade concreta era nada mais do que somente um mundo de aparências. As entidades reais – as formas ou as ideias – eram, na verdade, os modelos ideais dos objetos do mundo físico ou das situações ideais as quais o homem devia esforçar-se por atingir. Platão restringiu as suas formas a duas classes: as matemáticas e as morais. Ele concebia a Matemática como a ciência de estudo dos objetos de existência independente, ou seja, essa ciência se refere às entidades que têm existência objetiva e fora da mente do matemático, mas que também não se encontram no mundo empírico. Machado (2013, p. 34) destaca que, para Platão, “as Formas matemáticas não eram idealizações de objetos empíricos, mas elas preexistiam independentemente deles e a eles serviam de modelos”.

Na concepção platônica, de um ponto de vista matemático, “conhecer” significa “descobrir” as entidades de existência objetiva e suas relações num domínio ideal. Platão legou um estereótipo às gerações posteriores, no entanto, a imagem da Matemática como uma ciência de domínio fora desse mundo, ao qual se ascende pelo pensamento, ainda permanece entre os matemáticos. As concepções platônicas deixaram marcas profundas em muitos campos do conhecimento e imperaram absolutas, principalmente nos primeiros séculos que se sucederam. Pois bem, conforme Platão, o conhecimento insere-se num absolutismo, que tem a ideia da descoberta como pilar central para entender o ato de conhecer. E ainda na concepção platônica, como a Matemática não era constituída por objetos da realidade, ela poderia ser descoberta, explorada e estudada numa conjuntura distante e independente da problemática da vida cotidiana.

Entretanto, é bastante plausível a definição de Devlin (2004) o qual refere à Matemática como a “ciência dos padrões”. Os padrões dos quais ele fala podem ser reais ou imaginários, possuem uma complexidade inerente a eles, sua essência demanda certo nível de abstração, e podem perfeitamente ser associados à realidade concreta. Tais afirmações são confirmadas no seguinte:

[A] matemática é a *ciência dos padrões*. (...) os padrões estudados pelo matemático podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, utilitários ou recreativos. Eles surgem no mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, e do funcionamento da mente humana (DEVLIN, 2004, p. 26, grifo do autor).

Na prática pedagógica, o par conceitual “concreto/abstrato” deve ser entendido sob uma

perspectiva que vai além da concepção do senso comum. Desse modo, deve haver um movimento dialético entre esse par no estudo dos objetos matemáticos, apoiado na ideia de que o nível de abstração desses objetos é relativo. A disjunção advinda da maneira de conceber o concreto e o abstrato como opostos, por meio de definições simplistas, implica em equívocos no processo de ensino e aprendizagem. Por isso, é fundamental haver um diálogo entre os termos desse par conceitual, que desencadeie um processo de significação dos objetos matemáticos. Logo, o fazer matemática na escola não deve limitar-se ao cotidiano, dado que a função precípua do saber escolar é transpor os muros do concreto material perceptivo, do manipulável.

O entendimento de concreto e abstrato corrente no meio educacional coincide com aquele dado pelo senso comum. Tomando por base a compreensão simplista desses termos, costuma-se atribuir à Matemática o ‘peso’ da abstração, entretanto, nessa concepção reducionista – na qual o concreto é entendido como tudo aquilo que está ao alcance dos sentidos, que existe em forma material, que é palpável e manipulável, e o abstrato é entendido como aquilo que não pode ser tocado, que só existe no mundo das ideias – grande parte dos objetos de estudo das demais disciplinas do currículo escolar da Educação Básica se encaixa na categoria de objetos abstratos, apesar de vários elementos desses componentes curriculares fazerem parte do mundo físico.

Não obstante isso, um estudo de qualquer componente escolar sem a mediação do pensamento abstrato não faria sentido algum. Processos de abstração são comuns durante a construção do conhecimento, seja ele qual for. O pensamento abstrato é, portanto, um fator preponderante na aprendizagem de qualquer tema que se proponha a aprender. Pensar que a aprendizagem ficaria prejudicada pelo aspecto abstrato dos conhecimentos e conceitos científicos é, evidentemente, um equívoco, dada a refinada capacidade humana em lidar com abstrações. Logo, além de uma representação simbólica e de uma linguagem estruturada, a aprendizagem de um tema requer processos de abstração, competência que o ser humano dispõe.

Todavia, o conhecimento humano é dinâmico, relacional e está em constante transformação, assim, o conhecimento matemático enquanto parte do conhecimento humano também é dinâmico e relacional. Aliás, não há como discordar de Machado (2013, p. 100) quando ele enfatiza o aspecto relacional do pensamento matemático, pois o que a Matemática tem de mais fundamental é justamente o seu caráter relacional. E o nível de abstração de um objeto matemático é relativo, não está relacionado somente à sua complexidade, depende também da estrutura cognitiva de quem o explora. A base cognitiva do indivíduo determina o

que é concreto para ele.

Dessa relatividade, resulta a pressuposição de que um objeto matemático não tem o mesmo nível de abstração para todas as pessoas. E como diz Kosik (1976, p. 91), o homem não só cria o mundo, mas também se insere como parte integrante em um todo supra individual regido por leis. Com tal inserção, ocorre uma metamorfose na qual o homem abstrai-se da própria subjetividade. Parafraseando o próprio Kosik (1976), o sujeito que elabora o conhecimento matemático não é um ‘espírito’ abstrato, mas sim um homem histórico concreto que reflete a totalidade do real no seu pensamento.

Soares (2015) também acredita que o nível de concretude de um objeto matemático é relativo. Em sua pesquisa, ele elenca quatro aspectos principais para justificar o seu posicionamento, e o primeiro deles diz respeito à estrutura cognitiva de quem explora o objeto, como já foi citado antes. Além disso, outro elemento que, segundo o autor, interfere no nível de abstração dos objetos matemáticos é a natureza de suas representações. Assim, se um “objeto matemático possui representações com repercussão no mundo físico ele terá um nível de abstração maior que um objeto que só possui representação no campo da simbolização” (SOARES, 2015, p.128). Ademais, o próprio modo como essas abstrações são exploradas também vai interferir no nível de abstração dos objetos. O último aspecto elencado por Soares (2015) trata do caráter relacional da Matemática, uma vez que se refere ao lugar do objeto matemático na rede intradisciplinar, ou seja, como ele se relaciona com os demais objetos matemáticos. Desse modo, quanto mais significados o objeto possuir, maior será o seu nível de abstração²².

Nesse sentido, pode-se dizer que qualquer conhecimento possui um certo nível de abstração e de concretude o qual varia de indivíduo para indivíduo. À medida que um objeto é incorporado à base cognitiva do indivíduo - independente da natureza desse objeto, isto é, se tenha materialidade ou não -, passa a ser entendido como um objeto concreto, ainda que seja uma concretude cognitiva. O concreto considerado já não é aquele da suposta polaridade enfatizada pelo discurso simplista, mas é entendido para além de algo manipulável, visível e palpável. Reduzir o significado desse termo à dimensão do palpável acaba por desconsiderar aspectos relevantes do fenômeno em exame, então é possível a coexistência de diferentes formas de organização do concreto, que costumam dar origem a diversos prosseguimentos quando mediadas por diferentes sistemas de abstrações.

²² “Nível de abstração” no sentido de ter sido abstraído.

O caminho de nosso conhecimento desde o concreto-sensível através do abstrato para o concreto, reproduzido sobre a base do conhecimento da essência dos fenômenos, expressa a lei dialética da negação da negação no desenvolvimento do saber humano. O abstrato é a negação do concreto-sensível, e o concreto, como síntese de inúmeras abstrações, é a negação do abstrato. Mas isto não significa uma simples volta para o concreto, que servia como ponto de partida, mas para o concreto elevado a um nível mais alto de desenvolvimento, em que o objeto é captado de modo profundo e multilateral (KOPNIN, 1958, p. 315)

É plausível que o processo de construção do conhecimento tanto pode ascender do concreto em direção ao abstrato quanto pode partir do abstrato rumo ao concreto. Ao que parece, esse processo não pressupõe a eleição clara de uma das alternativas anteriores, mas é possível que o marxismo tenha desconsiderado esse ponto. Apesar de a análise marxista ser bastante fecunda nessa temática, o marxismo não resistiu à tentação, tendo optado nitidamente pela via da ascensão do abstrato ao concreto. Contudo, convém enfatizar que a compreensão dos processos de construção dos significados, individual ou socialmente, não pressupõe uma opção entre as duas alternativas citadas. “As passagens do abstrato ao concreto e do concreto ao abstrato constituem componentes solidários de um movimento que não tem seu início facilmente localizável nem no desenvolvimento ontogenético, nem no filogenético” (MACHADO, 2011, p. 43). Nesse movimento, as etapas sucedem-se de forma harmônica, sendo, portanto, “irrelevante a decisão sobre qual seria o ponto de partida ou de chegada” (MACHADO, 2011, p. 43).

No processo cognitivo, os papéis desempenhados pela realidade concreta e pelas abstrações são distintos e, por isso, pretender uma alternativa entre ambos certamente é um equívoco. Muitas vezes, classificar algo como “abstrato” decorre de uma compreensão rasa do papel desempenhado pelas abstrações, elas nunca poderiam ser consideradas um ponto de chegada, quiçá um ponto de partida, uma vez que se situam no interior do processo; constituem, portanto, mediações necessárias, nunca um início ou fim. Existem, porém, diferentes níveis de concretude, englobando um concreto bruto e concretos pensados, em harmonia com as respectivas abstrações mediadoras. Na construção do conhecimento, a própria percepção já representa um primeiro momento da abstração.

As abstrações funcionam como instrumentos necessários para a passagem de um patamar de concretude a outro, elas “são responsáveis pela organização de relações crescentemente significativas, que passam a caracterizar a realidade concreta como uma teia mais complexa, mais rica, viabilizando uma ação mais efetiva sobre ela” (MACHADO, 2011, p. 43). A depender das características das abstrações mediadoras, as possibilidades operatórias

e de articulação podem resultar mais ou menos incrementadas. É importante destacar que o processo de elaboração não se exaure após uma simples mudança de nível; clarificado com abstrações mais abrangentes, cada novo patamar pode transformar-se em um novo ponto de partida, que conduzirá a novo estágio no qual as relações determinantes estruturam-se de modo ainda mais significativo. Ressalte-se que o ponto de partida e de chegada é cada patamar e não as abstrações em si.

De acordo com Devlin (2004), o cérebro humano possui uma capacidade para lidar com entidades abstratas que nenhum outro animal parece possuir, por isso

“Podemos pensar praticamente em qualquer coisa que quisermos: objetos reais com os quais estamos familiarizados, mas que não se encontram no nosso ambiente imediato; objetos reais que nunca vimos, mas dos quais simplesmente ouvimos falar ou sobre os quais lemos; ou objetos puramente fictícios”. (DEVLIN, 2006, p.142).

O mesmo autor classifica o pensamento humano em quatro níveis de abstração: no primeiro não há abstração, os objetos sobre os quais o indivíduo pensa são todos reais, acessíveis à percepção no ambiente imediato; o segundo nível diz respeito a objetos reais familiares a quem pensa, mas que não são acessíveis à percepção no ambiente imediato; no terceiro, os objetos de pensamento podem ser reais que o indivíduo conheceu de alguma forma, mas que nunca encontrou na realidade, ou versões imaginárias desses objetos, ou combinações imaginárias; e no quarto nível, no qual está inserido o conhecimento matemático, os objetos são inteiramente abstratos. Para Devlin (2004), os objetos matemáticos não têm ligações simples ou diretas com o mundo real, ou que não sejam abstraídas do mundo a partir de relações e ideias criadas pela mente.

Entretanto, como já foi dito, o nível de concretude de um objeto depende da base cognitiva do sujeito e não de sua materialidade²³. É a base cognitiva que determina o que é concreto e o que é abstrato para o indivíduo. Os elementos relacionados ao nível de concretude que se tem de um objeto em cada etapa do seu processo de conhecimento são imprescindíveis em etapas posteriores. Não pairam quaisquer dúvidas sobre o fato de que o conhecimento matemático é abstrato por natureza (no sentido dado ao termo pelo senso comum). Porém, à medida que esse conhecimento vai sendo internalizado por meio de um processo de significação, ele se junta aos elementos já constituídos na base cognitiva do sujeito, formando concretos cognitivos. Para aprender Matemática, antes de tudo, é preciso transcender os

²³ Convém esclarecer que a materialidade de um objeto não está condicionada à possibilidade de acesso a ele. Por exemplo, o homem não consegue adentrar no contexto do mundo atômico, mas isso não significa que os átomos não existem.

aspectos sensitivos físicos dos objetos concretos materiais, senão o conhecimento matemático não fará sentido algum.

Percebe-se facilmente que, pelo modo como o concreto e o abstrato são concebidos nas práticas pedagógicas amplamente utilizadas no ensino da Matemática, esses dois termos não dialogam entre si. Nelas, o abstrato é posto em oposição ao concreto, ficando este reduzido ao empírico e aquele ao mero domínio de certas fórmulas matemáticas, sendo que o domínio das fórmulas é apenas um dos muitos momentos do abstrato. O resultado dessas práticas pedagógicas é uma limitação dos conceitos matemáticos a qual prejudica o processo de significação de seus objetos. Assim, o ensino da Matemática fica reduzido apenas à operacionalização dos conceitos.

O nível de concretude de um objeto pode ser mensurado através dos elementos, das propriedades e dos conceitos já compreendidos; por outro lado, o abstrato se configura nas especificidades e características ainda não compreendidas e que, mais tarde, permitirão a feitura de um segundo nível de concretude. Assim, as especificidades ainda não detectadas no concreto inicial serão exploradas na abstração, uma vez que o concreto inicial, em tese, se manifesta de modo cognitivamente caótico e obscuro. Mas o todo não é, como diz Kosik (1976, p. 36), “imediatamente cognoscível ao homem, embora lhe seja dado imediatamente em forma sensível, isto é, na representação, na opinião e na experiência”. E para conhecer e compreender este todo ou para torná-lo claro e explicá-lo, “o homem tem de fazer um *detour*: o concreto se torna compreensível através da mediação do abstrato, o todo através da mediação da parte” Kosik (1976, p. 36).

Trata-se de um processo de *concretização* que opera “do todo para as partes e das partes para o todo, dos fenômenos para a essência e da essência para os fenômenos, da totalidade para as contradições e das contradições para a totalidade” (KOSIK, 1976, p. 36). E é justamente nesse processo de correlações e por meio de um movimento dialético que os conceitos se compenetraram e se elucidam mutuamente, atingindo a concreticidade. Em tal processo, a abstratividade dos aspectos enquanto unilateralidade e isolamento é superada em uma correlação dialética, quantitativo-qualitativa e regressivo-progressiva. Na compreensão dialética da totalidade, as partes se encontram em relação de interação e conexão entre si e com o todo. Porém, “o todo não pode ser petrificado na abstração situada por cima das partes, visto que o todo *se cria a si mesmo* na interação das partes” (KOSIK, 1976, p. 50, grifo do autor).

Desse modo, o concreto é entendido para além do concreto material, perceptivo, real e manipulável, isto é, a partir da compreensão de um objeto matemático, os elementos abstratos que o compõem deixam de ser abstratos e se transformam em um concreto cognitivo, pensado.

O par conceitual “concreto-abstrato” tem um peso relevante em vários contextos. Obviamente, o estudo da relação desse binômio com a construção do conhecimento matemático ou até mesmo das suas implicações para a própria Matemática requer reflexões minuciosas.

Como os objetos da Matemática não são acessíveis por meio dos sentidos, o uso de recursos tecnológicos pode ajudar na visualização desses objetos durante o processo de construção do conhecimento. Sem dúvida, os recursos computacionais representam uma alternativa metodológica para conduzir um diálogo entre o concreto e o abstrato, inclusive, softwares computacionais podem auxiliar no processo de representação, essencial para a aprendizagem. De acordo com Duval (2009), quanto maiores forem as possibilidades de representação de um objeto matemático, maiores serão as chances de sua compreensão. À medida que se vislumbra várias formas de representação de um mesmo objeto, conseqüentemente, se favorece a sua significação, fortalecendo as relações entre os seus aspectos de concretude e abstração. Como disse o pesquisador e professor da Universidade de Columbia Paulo Blikstein, “Ferramentas tecnológicas devem ser usadas quando há um propósito pedagógico e não porque são novas ou modernas”. Ele defende que a tecnologia seja usada para coletar dados, explorar conceitos e criar soluções.

“Mas a Matemática é difícil²⁴!”. Sim! E, parafraseando o professor Lenio Streck²⁵, até “as pedras sabem disso”. Caso alguém ainda não esteja totalmente convencido desse fato, basta observar um caso curioso que ocorre na Matemática: um número par maior que 2 pode ser escrito como uma soma de dois números primos, a exemplo: o número “4” pode ser escrito como $2 + 2 = 4$, o número “6” pode ser escrito como $3 + 3 = 6$, o “8” como $3 + 5 = 8$, o “10” como $5 + 5 = 10$, o “12” como $5 + 7 = 12$ e assim por diante. Seguindo esse raciocínio, é presumível conjecturar que o resultado apresentado seja válido para todo número par maior que 2, mas esse procedimento parece muito simples e resta, portanto, provar que tal conjectura é válida. Pois bem, o “resta” não foi usado por acaso: o raciocínio em questão é um dos problemas em aberto da Matemática, trata-se da conjectura formulada pelo matemático prussiano Christian Goldbach. Porém, como algo que parece ser tão simples pode continuar sem solução? Na verdade, só parece simples! A Matemática é, no entanto, uma ciência dura, cujo aprendizado demanda esforços significativos.

²⁴ Aqui é preciso esclarecer que, ao afirmar que a “Matemática é difícil”, essa dissertação não está defendendo que a Matemática é a ciência dos eleitos. A ideia de ciência dos eleitos já está totalmente superada, ou pelo menos deveria ter sido superada.

A Matemática é a única disciplina do currículo escolar que tem problemas em aberto cuja solução vale um milhão de dólares (Os Problemas do Milênio).

²⁵ Lenio Luiz Streck é um jurista brasileiro. Também é professor e advogado.

Há, inclusive, quem diga que Matemática se aprende a custo de muito suor e lágrimas! Talvez essa assertiva seja um pouco exagerada, contudo, conforme destaca D'Amore (2012, p. 92), “estudar matemática e fazer matemática é um trabalho cansativo, que requer muito estudo e aplicação. Não é de modo algum verdade que Matemática seja tão somente divertimento e imagem. É cálculo, esforço, estudo contínuo e exigente”. Além do mais, D'Amore (2012, p. 92) afirma categoricamente que “não é concedido a todos tornar-se um matemático importante”. Porém, isso não é uma peculiaridade exclusiva da Matemática, visto que em outras áreas também ocorre algo parecido. Tomando o esporte como exemplo, é fácil ver que nem todos os atletas possuem habilidades excepcionais, alguns se destacam mais, outros menos. O jornalista italiano Beniamino Placido, em 1990, dizia que:

“A cultura, porém, é difícil, o saber que tem valor não é fácil, nem imediato, mas vale a pena comprometer-se, é uma atividade que dá uma satisfação imensa, uma vez que o esforço necessário para aprender a controlar os instrumentos tenha sido realizado; dizer que tudo pode ser tornado simples, fácil é uma mentira, um engano”.

Machado (2013, p. 163) observa que os extremos são muito frequentes nesse tema, “ama-se ou odeia-se a Matemática”. De acordo com ele, ao mesmo tempo em que, para alguns, o tema “é sedutor, lugar de harmonias, equivalências, simetrias, ordenações e relações caprichosas e surpreendentes, expressão de beleza que tangencia a poesia”; para outros, “trata-se de um território árido, povoado por números frios e cálculos insípidos, compreensíveis apenas por especialistas, ou pessoas com dons especiais, um tema do qual nos afastamos tanto quanto as necessidades do dia a dia nos permitem” (MACHADO, 2013, p. 163). A despeito disso, “a Matemática está ali, pronta, em perpétua evolução, totalmente disponível para ser conhecida, para ser entendida, para ser amada” (D'AMORE, 2012, p. 199).

Geralmente, odeia-se a Matemática justamente por ser um assunto de estudo denso e difícil, mas nem por isso se odeia a gramática, mesmo escrevendo “chuva” com “x”. Contudo, a Matemática pode ser odiada sem problema! Certamente, seria muito bom se um estudante pudesse estudar só o que gosta durante a sua vida escolar, mas não é bem assim que funciona. A complexidade da vida em sociedade exige que ele estude muitos assuntos dos quais não gosta, aliás, um indivíduo se submete a fazer várias coisas que não gosta durante a vida inteira, nem sempre há opções de escolha para tudo que precisa ser feito. A escola não se transforma em um fardo pelo simples motivo de estudar ser difícil e cansativo. Na verdade, para apreender Matemática, é preciso muito esforço e dedicação, mas qual a disciplina do currículo escolar cujo aprendizado não demanda esforço e dedicação? Portanto, o saber é difícil, o processo de

construção do conhecimento é árduo.

5 RESULTADOS DA PESQUISA, INTERDISCIPLINARIDADE E CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADO

Uma palavra sem significado é um som vazio; o significado portanto, é um critério da 'palavra', seu componente indispensável.

Lev Vygotsky

A pesquisa possui caráter qualitativo, pois busca ampliar o entendimento sobre a relação entre o concreto e o abstrato no processo de construção do conhecimento matemático. De modo resumido, uma pesquisa qualitativa é uma abordagem na qual o significado dado ao fenômeno tem mais importância que sua quantificação. Nesse sentido, Creswell (2014, p. 49-50) adota uma definição de pesquisa qualitativa que dá “ênfase ao processo de pesquisa como uma continuidade dos pressupostos filosóficos para a lente interpretativa e até os procedimentos envolvidos no estudo de problemas sociais ou humanos”. Para o mesmo autor,

A pesquisa qualitativa começa com pressupostos e o uso de estruturas interpretativas/teóricas que informam o estudo dos problemas da pesquisa, abordando os significados que os indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano. Para estudar esse problema, os pesquisadores qualitativos usam uma abordagem qualitativa da investigação, a coleta de dados em um contexto natural sensível às pessoas e aos lugares em estudo e a análise dos dados que é tanto indutiva quanto dedutiva e estabelece padrões ou temas. O relatório final ou a apresentação incluem as vozes dos participantes, a reflexão do pesquisador, uma descrição complexa e interpretação do problema e a sua contribuição para a literatura ou um chamado à mudança. (CRESWELL, 2014, p. 49-50)

A Análise de Conteúdo é uma técnica bastante utilizada para analisar dos dados em pesquisas qualitativas. O objetivo da Análise de Conteúdo não é examinar os dados sob o aspecto qualitativo, mas sim alcançar, após uma minuciosa observação, uma significação contida nos textos por meio da interpretação de mensagens que estejam obscuras ou com duplos sentidos. De acordo com Bardin,

Um conjunto de instrumentos metodológicos cada vez mais sutis em constante aperfeiçoamento, que se aplicam a ‘discursos’ (conteúdos e continentes) extremamente diversificados. O fator comum dessas técnicas múltiplas e multiplicadas - desde o cálculo de frequências que fornece dados cifrados, até a extração de estruturas traduzíveis em modelos - é uma hermenêutica controlada, baseada na dedução: a inferência. (BARDIN, 2021, p. 11)

A pesquisa aqui apresentada teve como público alvo professores de Matemática da

Educação Básica. O questionário da pesquisa foi disponibilizado em formato digital por meio do Google Formulários e o link do questionário foi compartilhado em dois grupos de redes sociais, um grupo do Facebook e o outro do WhatsApp.

Ao todo, 6 professores participaram da pesquisa, 4 participantes do sexo masculino e 2 do sexo do feminino, com faixa etária entre 20 e 40 anos. 50% dos participantes são do quadro efetivo do serviço público, os outros 50% possuem vínculo empregatício de REDA (Regime Especial de Direito Administrativo). Não houve participação pelo regime celetista (CLT). A jornada de trabalho predominante no grupo pesquisado é de 40 horas semanais. 2 participantes possuem formação a nível de graduação, 3 a nível de especialização e 1 participante possui mestrado. Somente um dos participantes leciona Matemática a mais de 8 anos. E todos atuam no Ensino Médio. Quatro deles escolheram a profissão de professor de Matemática por terem afinidade com essa disciplina.

De modo geral, os professores pesquisados (P1, P2, P5 e P6) gostam mais de lecionar os conteúdos matemáticos fáceis de relacionar com o cotidiano. A aplicação dos conteúdos escolares à vida cotidiana tem se tornado, praticamente, uma imposição na prática educativa, especialmente no ensino de matemática, uma vez que os objetos de estudo dessa disciplina não possuem existência física. É como se tudo aquilo que não se refere a um contexto prático, não merece ser ensinado. Machado (2013, p. 13) chama essa exigência de aplicação prática para tudo o que se ensina na escola de “febre do utilitarismo”. P4 disse gostar mais de lecionar Álgebra, porém não justificou. P3 usou a noção conceitual para justificar quais conteúdos gosta mais de lecionar. As ponderações de cada entrevistado a respeito do que mais gostam de ensinar são as seguintes:

P1: Matemática Financeira, Estatística e Geometria. Acredito que são mais fáceis de relacionar com o dia a dia.

P2: Praticamente todos relacionados com álgebra e geometria, tentando associar sempre ao cotidiano do aluno.

P3: Estudo e aprendizagens das Funções Algébricas (por permitir a exploração das diferentes representações: Algébrica, textual, gráfica, virtual, ...), da Trigonometria (pode-se atrelar ao desenvolvimento das Ciências, suas diferentes aplicações) e da Análise Combinatória (pela contribuição no desenvolvimento do pensamento e da autonomia na Matemática).

P4: Álgebra

P5: Funções, pois consigo levar com facilidade para o cotidiano do aluno

P6: Função do 1 grau. Pois consigo relacionar o conteúdo com o cotidiano do aluno.

Quando perguntados se a Matemática tem alguma particularidade que a torna diferente das demais disciplinas currículo escolar, os professores, de maneira unânime, disseram que sim. P1 justificou sua resposta “sim” com o caráter prático (no sentido de fazer exercícios, de

exercitar). P2 apontou a possibilidade de resolver com situações-problema. P3 destacou a importância de se considerar diferentes caminhos durante a investigação e a exploração dos objetos matemáticos, salientou também o caráter não mecânico da Matemática. P4 indicou os pré-requisitos, associados à ideia de linearidade (Machado, 2011). P5 enfatizou a não subjetividade dos conteúdos. Por fim, P6 disse que a Matemática ajuda na administração da pessoa.

Aparentemente, os professores parecem não ter compreendido bem essa pergunta, ou talvez ela precisasse ser melhor formulada. No entanto, o que se pretendia com tal questionamento era verificar se os professores acreditavam que a Matemática possui alguma especificidade que a torna uma disciplina especial em relação às demais disciplinas do currículo escolar. É claro que a Matemática possui especificidades a ela inerentes, mas, de modo similar, Geografia, Biologia, Filosofia, História, Língua Portuguesa, Sociologia, Química, Física, ... também possui especificidades. Eis as respostas dos entrevistados:

P1: Sim. A aprendizagem em matemática só ocorre quando o aluno quer aprender, gosta de pensar, sabe interpretar e talvez o mais importante, pratique os conteúdos abordados pelos professores. Matemática é prática!

P2: Sim, a necessidade de calcular e resolver situações presente ou não no dia a dia, além de estimular o raciocínio lógico matemático e outros desafios da área.

P3: Sim. Apesar de algumas pessoas considerarem (muitas vezes de maneira equivocada) que em Matemática sempre se obtém um resultado, uma resposta, e que esta é única (ou seja, pressupõe que o processo é mecânico), é possível construir e reconstruir diferentes caminhos diante da investigação e exploração dos objetos dessa Ciência e de suas aplicações.

P4: Sim, os pré-requisitos.

P5: A não subjetividade dos conteúdos, em sua maior parte são conteúdos bem objetivos e diretos.

P6: Sim. Ela ajuda na administração financeira da pessoa.

Todos os docentes participantes da pesquisa consideram importante o uso de materiais concretos no ensino da Matemática. Com exceção de E4, que acredita não haver a necessidade do uso de materiais manipulativos no ensino da Matemática no Ensino Superior, todos os demais acreditam ser necessário o uso desses materiais na docência da Matemática, em todos os níveis e modalidades de ensino. Contudo, o material manipulativo pode até ser útil sob o aspecto da aprendizagem, como no caso da soma dos ângulos internos de um triângulo, mas é matematicamente irrelevante.

Embora não exista uma classificação em dois tipos de Matemática, uma concreta e outra abstrata, o senso comum parece concebê-los. Por isso, foi solicitado no questionário que os professores caracterizassem cada um desses ‘tipos’ por meio de uma palavra. Os participantes entendem como “matemática concreta” aquilo que está relacionado a algo palpável ou à

aplicação, conforme se pode notar nas descrições a seguir:

- P1: Palpável
- P2: Na Prática
- P3: Aplicação (Exploração).
- P4: muletas
- P5: Palpável
- P6: É a matemática que tem a ver com a realidade do aluno. Ou seja, uma matemática que ele possa usar na prática.

Por outro lado, quase todos os docentes pesquisados entendem a “matemática abstrata” como imaginário, que não possui existência física. A única exceção foi o professor P6, que respondeu “raciocínio lógico”. As definições citadas por eles são:

- P1: Impalpável.
- P2: Algo Imaginário.
- P3: Imaginário.
- P4: Sonhos.
- P5: Intangível.
- P6: Raciocínio lógico.

Com o objetivo de entender melhor como os professores concebem o concreto e o abstrato, foi solicitado aos participantes da pesquisa que classificassem (em “concreto” ou em “abstrato”) uma lista de objetos matemáticos e não matemáticos. Os participantes P4 e P6 deixaram de classificar alguns desses objetos. O único objeto da lista tachado, unanimemente, como abstrato foi “um pensamento, uma ideia”. E o único objeto qualificado como concreto, de forma unânime, foi “mesa”. Além do mais, à exceção de P5, que classificou o objeto matemático “círculo” como concreto ou abstrato, todos os demais o classificaram como concreto. É possível inferir através dos resultados (tabela 2) que os participantes da pesquisa compreendem o concreto como aquilo que pode ser visto, tocado; já o abstrato é, para eles, o oposto, isto é, aquilo que não pode ser tocado.

Tabela 2 - classificação dada pelos professores aos objetos

Objeto	Professores					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Um pensamento, uma ideia	A	A	A	A	A	A
Equação da área de um trapézio	A	A	C	A	A	C
Um círculo	C	C	C	C	A ou C	C
5 (número 5)	A	C	C	C	A	C

Força (da Física)	A	A	A	A	A	C
Energia (da Física)	A	A	A	A	A	C
Uma mesa	C	C	C	C	C	C
Estado (quanto às suas dimensões físicas e políticas)	C	A	C	C	A	A
Uma reta	C	C	C	-	C	A
Átomo	C	A	A	-	A	-
Uma aresta	C	C	C	-	A	-
Um quadrado	C	C	C	-	C	-

Legendas: A – Abstrato; C – Concreto

Quando foi perguntado aos participantes da pesquisa como eles diferenciam um objeto concreto de um objeto abstrato: P1 associou o primeiro ao palpável, a algo que pode ser tocado, e o segundo a aquilo que não pode ser tocado, a algo imaginário; P2, na mesma linha, entende o concreto como algo que está relacionado com a prática, acessível aos sentidos, e abstrato é, para ele, a imaginação; P3 concebe o concreto e o abstrato por meio de uma representação semiótica, relacionando o pensamento e o real; P4 associa o concreto a coisas passíveis de medição e P5 compreende o concreto como aquilo que é palpável, que é visível; finalmente, P6 associa o concreto a algo que se pode tocar, e o abstrato ao que não se pode tocar. Em linhas gerais, a compreensão dos participantes sobre o concreto e o abstrato se aproxima do entendimento senso comum, no qual um é visto como tudo aquilo que pode ser tocado, que é palpável, e o outro, por oposição, aquilo que não pode ser tocado, não palpável. Essa visão reducionista omite, conforme Machado (2011, p. 41), uma dimensão essencial da concretude, relacionada com o processo de significação. As respostas dos entrevistados oferecem as seguintes definições:

P1: O primeiro é palpável, podemos tocar. E o objeto abstrato é o contrário, ou seja, imaginário, intocável.

P2: Aquilo que podemos relacionar com a prática, visual ou tato e a imaginação.

P3: Pela definição, representação semiótica. A relação entre o real e pensamento.

P4: Geralmente o concreto tem medidas.

P5: Objeto concreto são materiais manipulados palpáveis, visíveis. Objetos concretos são conceitos ideias algoritmizadas.

P6: Concreto aquilo que se pode pegar. Abstrato aquilo que não se pode pegar.

Ao serem questionados sobre a afirmação “O aspecto abstrato da Matemática é o principal responsável pelas dificuldades encontradas no aprendizado dessa disciplina”, quatro dos docentes participantes da pesquisa concordam com tal assertiva, ainda que parcialmente. Apenas dois participantes discordaram dela, também parcialmente. Parte das respostas obtidas

nesse quesito indicam que o aspecto abstrato da Matemática ainda é visto como o grande obstáculo ao aprendizado dessa ciência. É fato que, como diz D'Amore (2004), todo conceito matemático remete a não-objetos, correspondendo a ideias e abstrações não necessariamente ligadas à realidade concreta. Porém, atribuir à Matemática toda a responsabilidade pelos processos abstratos do contexto escolar converge para o entendimento do senso comum, como já fora apontado por Soares (2015).

Todos os participantes da pesquisa consideram importante levar em conta a relação entre o concreto e o abstrato no ensino da Matemática, inclusive, quatro deles entenderam ser muito relevante considerar tal relação. Todavia, três entrevistados afirmaram partirem, em sua prática docente, do abstrato em direção ao concreto; e dois afirmaram partirem do concreto rumo ao abstrato. Assim, a construção do conhecimento é concebida como uma via de mão única: ou vai do concreto em direção ao abstrato ou parte do abstrato rumo ao concreto (MACHADO, 2013). Somente um dos docentes afirmou agir, em sua prática docente, no sentido de um movimento entre o abstrato e o concreto. Entretanto, conforme já foi salientado, as abstrações não podem ser consideradas nem ponto de partida e nem ponto de chegada do conhecimento, pois elas situam-se no interior do processo, são mediações necessárias.

Quanto à pergunta se o conhecimento cotidiano do estudante deve ser o polo orientador para a construção do conhecimento matemático, somente o participante P4 foi taxativo afirmando que não e que a curiosidade é quem deve ser esse polo orientador. Os demais professores participantes da pesquisa entenderam que o conhecimento cotidiano deve ser o polo orientador para a construção do conhecimento matemático, alguns por acreditarem que esse conhecimento é mais fácil de ser aprendido, outros por entenderem que ele contempla os conhecimentos prévios do estudante e também lhe permite intervir na realidade. Contudo, as limitações do conhecimento cotidiano foram elencadas no Capítulo 01 dessa dissertação, tendo como base as obras de Kosik (1976) e de Giardinetto (1999). Eis a íntegra das respostas da referida pergunta:

P1: Na maioria das vezes, sim. Quando o conteúdo aproxima da realidade do aluno, facilita a aprendizagem, mas antes disso é necessário que o estudante queira aprender.

P2: Às vezes, associar o conteúdo com situações vividas ou presenciadas facilita a compreensão.

P3: Pode, sim. É importante considerar a bagagem de conhecimento do aprendiz, isso contribuirá para a apreensão de novas informações, favorecendo a construção e reconstrução do conhecimento.

P4: Não. Deve ser a sua curiosidade.

P5: Sim, pois o objetivo final é que ele use de seu aprendizado para lidar com as facetas da sua vivência diária em meio a comunidade que ele está inserido

P6: Sim. Pois todos já têm um conhecimento, o que devemos fazer é aprimorar esse conhecimento que eles já trazem com novos conhecimentos.

Na pergunta sobre o conhecimento da Matriz de Referência do ENEM, com exceção de P5, todos os demais entrevistados afirmaram conhecer essa matriz. Quatro deles usam essa matriz como base para o desenvolvimento das atividades escolares, conforme as afirmações apresentadas adiante. É obvio que o planejamento das atividades escolares não deve limitar-se somente às disposições da matriz de referência do ENEM, mas é plausível considera-las.

- P1: Conheço. Busco sempre abordar os conteúdos e o estilo das questões do Enem nas minhas aulas.
 P2: Sim, alguns tópicos.
 P3: Sim. É considerado na construção das sequências didáticas.
 P4: Sim, às vezes.
 P5: Não, não
 P6: Sim.

E sobre a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, dois participantes afirmaram não conhecer totalmente as suas disposições, algo bastante aceitável, pois a BNCC é uma política recente. P1 afirmou não concordar com totalmente com as disposições desse documento. Como visto anteriormente, a BNCC tem recebido diversas críticas de professores e pesquisadores, mas talvez um ponto interessante da BNCC seja o fato de ela enfatizar, insistentemente, uma abordagem interdisciplinar.

5.1 Interdisciplinaridade

De modo geral, a organização do trabalho escolar nos diferentes níveis de ensino tem por base a constituição de disciplinas estruturadas com certa independência, havendo pouca interação intencional e institucionalizada. Tais disciplinas constituem verdadeiros elos de comunicação entre a escola e a realidade. Para Machado (2011, p. 174), cada uma delas, de forma isolada, expressa relativamente pouco e é interesse apenas de especialistas; por outro lado, essas mesmas disciplinas, quando consideradas “no corpo sintético de uma classificação, amparadas em ordenações e posições relativas, expressam seguramente muito mais” (MACHADO, 2011, p. 174).

Tem sido comum a introdução de temáticas nas estruturas curriculares com status de disciplinas propriamente ditas, a fim de buscar uma presumida sintonia entre a escola e a vida real. Entre essas temáticas, destacam-se Educação Sexual, Educação Moral e Cívica, Resolução de Problemas, Construções Geométricas e Matemática Financeira. Entretanto, conforme

pondera Machado (2011, p. 171), muitas vezes, esses temas são, em sua maioria, desprovidos dos elementos mínimos que garantem a um assunto o estatuto e a dignidade disciplinar.

Machado (2011, p. 171-172) aponta que a interdisciplinaridade tem sido uma palavra-chave na discussão da forma de organização do trabalho escolar. Segundo ele, dois aspectos podem estar diretamente relacionados a essa emergência: o primeiro é a fragmentação crescente dos objetos do conhecimento sem a devida contrapartida do implemento de uma visão do conjunto do saber instituído; e o segundo aspecto é que está cada vez mais difícil o enquadramento dos fenômenos que ocorrem fora da escola no âmbito de uma só disciplina.

De fato, a interdisciplinaridade se propõe a ser o fator de ruptura da excessiva fragmentação e da especialização do saber instituído pela ciência moderna sob o esteio do capital, do mundo do trabalho e da cultura, reproduzidas na prática educativa. A reprodução da fragmentação do saber na prática educativa decorre, dentre outras razões, da própria produção do conhecimento que, segundo Jupiassú (1976), “com o advento da ciência moderna passou por um profundo processo de esfacelamento em função da multiplicação crescente das ciências, cujo desenvolvimento se fez às custas da especialização”. Milton Jupiassú foi um dos precursores da interdisciplinaridade no Brasil.

Nesse cenário, parece haver consenso da necessidade de uma proposta de trabalho escolar que tenha por base a interdisciplinaridade. Entretanto, conforme aponta Ivani Fazenda (1994), a interdisciplinaridade não é algo novo, ela surgiu na França e na Itália por volta da década de 60. Esse período foi marcado por movimentos estudantis que, além de outras pautas, reivindicavam um ensino mais sincronizado com as questões de ordem social, política e econômica vivenciadas na época. A interdisciplinaridade foi uma resposta a tal reivindicação, pois os problemas da época já não podiam ser resolvidos no âmbito de uma única disciplina. Embora a preocupação com a busca da interação entre as disciplinas só tenha ocorrido, de maneira mais nítida, na educação do século XX, já se buscava esse diálogo disciplinar no final do século XIX.

No Brasil, a interdisciplinaridade começou a ser adotada a partir da Lei nº 5692/71 e, de lá para cá, foi recepcionada por outros documentos oficiais, como a LDB (Lei nº 9394/96), as DCN, os PCN e, mais recentemente, a BNCC. Segundo Kaveski (2005, p.128, grifo nosso), “a interdisciplinaridade é entendida nos PCN como função instrumental, a de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista a partir de uma abordagem relacional...”. Já nas DCN, nos parágrafos 1º e 2º do artigo 7º, pode-se ler:

§ 1º O currículo deve contemplar as quatro áreas do conhecimento, com tratamento metodológico que evidencie a contextualização e a interdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos.

§ 2º A organização por áreas de conhecimento não dilui nem exclui componentes curriculares com especificidades e saberes próprios construídos e sistematizados, mas implica no fortalecimento das relações entre eles e a sua contextualização para apreensão e intervenção na realidade, requerendo planejamento e execução conjugados e cooperativos dos seus professores. (BRASIL, 2013, p. 195-196, grifo nosso).

Retomando aos PCN, eles destacam que a interdisciplinaridade deve ir além da mera justaposição de disciplinas e, ao mesmo tempo, evitar a diluição delas em generalidades. De acordo com o documento,

O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos (Brasil, 2000, p. 75).

Ainda conforme o texto dos PCN,

[A] interdisciplinaridade supõe um eixo integrador, que pode ser o objeto de conhecimento, um projeto de investigação, um plano de intervenção. Nesse sentido, ela deve **partir da necessidade sentida pelas escolas, professores e alunos, de explicar, compreender, intervir, mudar, prever, algo que desafia uma disciplina isolada e atrai a atenção de mais de um olhar, talvez vários** (Brasil, 2000, p. 76, grifo do autor).

E na BNCC, política mais recente na educação brasileira, a interdisciplinaridade também é abarcada, uma vez que o documento destaca a necessidade de “romper com a centralidade das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real” (Parecer CNE/CEB nº 5/2011) (BRASIL, 2018, p. 479, grifos nossos). Além disso, prossegue afirmando que é fundamental a adoção de um tratamento metodológico o qual

evidencie a contextualização, a diversificação e a transdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos, contemplando vivências práticas e vinculando a educação escolar ao mundo do trabalho e à prática social e possibilitando o aproveitamento de estudos e o reconhecimento de saberes adquiridos nas experiências pessoais, sociais e do trabalho (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 7, § 2º). (BRASIL, 2018, p. 479, grifos nossos).

Nessas perspectivas consensuais aqui apresentadas, a ideia de interdisciplinaridade tende a transformar-se em uma bandeira de aglutinação na busca de uma visão sintética, de uma

reconstrução da unidade perdida. Objetiva-se, assim, fazer uma reconexão dos elos entre as diferentes disciplinas, bem como contemplar a complementaridade delas. Ximenes (2000) diz que algo é interdisciplinar quando é comum ou realizado por duas ou mais disciplinas. Dessa forma, a interdisciplinaridade pode ser entendida como um modo de interação entre as disciplinas ou áreas do saber, e tal interação pode ocorrer em diversos níveis de complexidade.

Todavia, o aparente consenso não diminui o tamanho dos obstáculos. O primeiro deles é que a interdisciplinaridade não consiste no confronto das disciplinas já constituídas; também não se limita à mera fixação de um tema gerador do qual brotarão as diversas disciplinas, embora esta seja a caracterização mais frequente das tentativas de ações interdisciplinares. Não parece haver, portanto, a necessidade de criar um novo objeto, uma vez que o conhecimento humano é único. A divisão por disciplinas é necessária e facilita tanto o estudo quanto a compreensão de uma determinada área, contudo essa divisão não é necessariamente uma separação, pois as disciplinas não são neutras, elas se entrelaçam e se complementam. Sequer é preciso criar uma nova disciplina para que ocorram ações interdisciplinares. Roland Barthes, em *O Rumor da Língua* (1988), parece ter captado algumas dessas dificuldades ao afirmar:

O interdisciplinar que tanto se fala não está em confrontar as disciplinas já constituídas das quais, na realidade, nenhuma consente em abandonar-se. Para se fazer interdisciplinaridade não basta tomar um “assunto” (um tema) e convocar em torno de duas ou três ciências (BARTHES, 1988, p. 99).

Frigotto (1995) também destaca os desafios para a efetivação do trabalho interdisciplinar, ao dizer que a formação fragmentária, positivista e metafísica do docente, bem como a forma de organização do trabalho na escola e na vida social em geral constituem barreiras para o trabalho interdisciplinar. Desse modo, a concepção que se tem de ciência, de política e de cultura e a postura ética delineiam a ação docente nas práticas interdisciplinares. Aliás, a interdisciplinaridade é entendida por Ivani Fazenda (1999a) como uma ação que depende de uma atitude ou de uma mudança de postura em relação ao conhecimento, uma substituição da concepção fragmentária para a unidade do ser humano. Ora, então fica evidente que a ênfase é dada ao sujeito, para que se promova uma transformação e uma reorganização do saber constituído.

Há ainda, no emaranhado das disciplinas, uma conotação de ordenação e supervalorização de uma disciplina em detrimento de outras. A concepção comteana (Comte, 1844), por exemplo, afirmava que as ciências fundamentais eram a Matemática, a Astronomia, a Física, a Química, a Biologia e a Sociologia. Apesar de essa classificação ter sido ultrapassada pelo próprio desenvolvimento das ciências constituídas, ela permanece com relevância, pois ao

que tudo indica, foi fonte de inspiração para a classificação proposta por Piaget, o Círculo das Ciências (PIAGET, 1978).

Para Machado (2011, p. 177), o significado curricular de cada disciplina não pode resultar de uma apreciação isolada de seu conteúdo, mas deve ser resultado do modo como se articulam disciplinas em seu conjunto. De acordo com ele, tal articulação depende de uma sistematização mais abrangente cujos princípios norteadores são necessários reconhecer. A possibilidade de um trabalho interdisciplinar fecundo depende desse reconhecimento, principalmente em relação à própria concepção de conhecimento e o modo pelo qual as disciplinas se articulam (MACHADO, 2011).

O debate em torno da concepção do conhecimento, da natureza dos processos cognitivos, tem concentrado esforços demasiados em um ponto aparentemente já superado, a questão da construtibilidade. De fato, conforme aponta Machado (2011, p. 178), a ideia de que o conhecimento é algo que se constrói, sobretudo a partir do que as crianças já sabem, é uma banalidade. Portanto, a questão não é mais se o conhecimento é ou não construído, e sim a forma como ele é construído. Machado (2011, p. 179) diz que a palavra-chave para refletir sobre como se constrói o conhecimento é a *linearidade*.

A forma de organização linear é amplamente predominante na organização do trabalho escolar, muitas vezes há uma fixação excessiva de pré-requisitos, acompanhada de uma seriação exageradamente rígida. Embora a organização linear seja mais acentuada em Matemática, ela perpassa o conjunto das disciplinas escolares. Aparentemente existe uma ordem para a apresentação dos conteúdos cuja ruptura é fatal para a aprendizagem. Obviamente, existem etapas a serem cumpridas antes que outras advenham, porém há de se ponderar a relevância disso para se condicionar os programas.

Deveras, algumas etapas devem preceder outras, e isso é absolutamente normal. Não se pode, por exemplo, ensinar os algoritmos das operações básicas a quem ainda não aprendeu a representar os números no sistema de numeração decimal. Mas essa limitação é muito óbvia e insuficiente para condicionar os programas, a propósito, o fato de, na grande maioria dos livros didáticos, a demonstração do teorema de Pitágoras usar a noção de semelhança de triângulo não significa, necessariamente, que este conteúdo deva preceder àquele. A própria noção de semelhança pode ser motivada ou apresentada a partir do teorema de Pitágoras e o teorema pode ser demonstrado de diversas maneiras.

Segundo Machado (2011, p. 180), no caso de um planejamento anual nas diferentes disciplinas, é difícil escapar de determinações resultantes da predisposição da linearidade, tanto no interior de cada disciplina quanto no estabelecimento de relações entre elas. De acordo com

o mesmo autor, uma maneira de contribuir para a viabilização do trabalho interdisciplinar passa por uma concepção de conhecimento na qual as cadeias de linearidade sejam substituídas, tanto nas relações interdisciplinares quanto no interior das disciplinas, pela imagem de uma rede, de uma teia de significação (MACHADO, 2011, p. 181).

Conforme Machado (2004, p. 17), o ponto de vista que representa o conhecimento pela imagem de uma rede o considera como uma grande teia, uma grande rede de significações. Nessa analogia, os nós são os conceitos, as noções, as ideias, os significados; e os fios que compõem os nós são as relações que se estabelecem entre algo e o mundo ou os significados que se constrói. Essa enorme teia não tem centro, é completamente acentrada, ou ainda pode ter diferentes centros de interesses. Outro aspecto relevante dessa rede é o seu caráter de permanente estado de atualização, característica fundamental das redes. Ademais, a caracterização do conhecimento como uma rede de significações não elimina, quiçá diminui a importância das disciplinas. A representação do conhecimento pela imagem da rede se constitui na ideia seguinte:

(...) o conhecimento é uma grande teia, uma grande rede de significações. Os nós são os conceitos, as noções, as ideias, os significados; os fios que compõem os nós são as relações que estabelecemos entre algo – ou um significado que se constrói – e o resto do mundo. Iniciar essa teia não constitui – nunca constituiu um problema escolar: todos os alunos já chegam à escola com uma prototeia de significações, engendrada pelo domínio da língua em sua forma oral. (MACHADO, 2004, p.17).

O trabalho na escola é naturalmente multidisciplinar, pois faz uso da contribuição de diversas disciplinas. Diferentemente da interdisciplinaridade, que objetiva estabelecer intercomunicação entre as disciplinas, na multidisciplinaridade, os interesses próprios de cada uma delas são preservados, conservando-se sua autonomia e seus objetos particulares. Dessa forma, as unidades da disciplina são mantidas, tanto em relação aos métodos quanto em relação aos objetos. Esse modelo caracteriza-se pela horizontalidade.

Já na intradisciplinaridade, a característica fundamental é a verticalidade, e as progressivas particularizações do objeto de uma disciplina dão origem a uma ou mais subdisciplinas, que não detêm autonomia nem em relação ao método nem em relação ao objeto. Nesse caso, o ponto central é a construção de significados por meio de uma abordagem relacional explorando as interconexões e a complementariedade das ramificações de uma mesma disciplina. É possível, por exemplo, desenvolver um trabalho intradisciplinar dentro da Matemática entre a Aritmética, a Geometria e a Álgebra.

A intradisciplinaridade propõe o trabalho simultâneo entre os ramos da Matemática, sem

negar a interdisciplinaridade. Os diferentes ramos da Matemática não são dissociados, eles se relacionam entre si e os objetos estudados em várias dessas ramificações partilham características em comum. Desse modo, um ensino de Matemática sem conexão entre suas ramificações reduz o objeto de estudo a apenas parte de um todo, dificultando o processo de construção de significado.

5.2 A construção de narrativas fabulosas

Ora, o cerne da ação docente, a finalidade da educação em sentido lato, é a construção do conhecimento, e o ato de conhecer tem como pilar fundamental a construção de significados. Conhecer é conhecer o significado. Para atribuir significado, necessita-se de informações as quais se apresentam de forma fragmentária e efêmera; e para fixá-las, é preciso engendrar uma narrativa, contar uma história. Obviamente, nesse ponto, percebe-se uma demanda por uma aproximação mais estreita de diferentes disciplinas do currículo escolar, em especial, a aproximação entre a Matemática e a Língua Materna. De fato, o significado pode ser construído por meio de uma história, de uma narrativa bem delineada. Nesse sentido, o professor que constrói significados será sempre um bom contador de histórias, e certamente não só as crianças gostam de uma boa história. Assim, a escola não pode privar os alunos, mesmo os mais velhos, de narrativas fabulosas.

No entanto, no repertório do professor não cabe uma história qualquer, cada história a ser contada por ele deve trazer consigo a semente de algum recado, de algum ensinamento, ou seja, cada uma delas deve ter uma moral. Desse modo, as histórias que o professor conta são como fábulas: narrativas breves e geralmente fictícias, mas com um propósito pedagógico ou moral. Todavia, trata-se de uma moral flexível, que possa ser significada de múltiplas formas em sintonia com as circunstâncias dos alunos. É preciso semear a moral da história, entretanto, não se pode dedicar somente a essa tarefa, relegando a história para segundo plano, ou mesmo dispensando-a como invólucro desnecessário. Sobre isso, o professor Nilson José Machado afirma:

Uma boa aula é como uma história bem contada. Uma história de natureza fabulosa, que envolve valores, e de onde emerge uma moral. Não uma moral única, mas um amplo feixe de “morais”, quase tantas quantas são os alunos. É muito importante o fato de que essas “morais” devem ser tácitas. Um bom professor semeia a história e

pacientemente colhe resultados variados. Quem quer ensinar diretamente a moral da história, em geral é um chato: além de cansativo, é inócuo para os alunos²⁶.

A fábula é uma narrativa bem arquitetada, de caráter ficcional, que faz uso da alegoria para construir seus sentidos. Já os contos de fadas, cuja estrutura é mais simples que os mitos e as lendas, possuem um conteúdo bem mais rico que o mero teor moral encontrado na maioria das fábulas. Nesse sentido, os contos de fadas são capazes de envolver a atenção das crianças (e dos adultos também!), bem como despertar-lhes sentimentos e valores intuitivos que bradam por um desenvolvimento justo. Esse encantamento proporcionado por essas narrativas tem um papel decisivo na formação de atitudes e valores na criança, instigando o seu imaginário. Os contos de fadas são como obras de arte, capazes de envolver em seu enredo, de instigar a mente e de gerar comoção com a sina de seus personagens. A simplificação dos papéis, geralmente de forma exagerada, entre o bom, o mau, o bonito, o feio, etc., constitui uma abstração importante para a construção de um cabedal de papéis a serem desempenhados noutros contextos.

Parece ocorrer algo semelhante no ensino de Matemática. Mesmo sendo comum a sua associação à temática de características como objetividade, exatidão e significação única para os símbolos envolvidos, não é possível ensinar Matemática com o foco das atenções somente nos conteúdos explícitos, desprezando-se um cabedal de elementos que contribuem para a construção do seu significado. Dito de outro modo e fazendo uma analogia, não é possível ensinar Matemática desprezando a própria Matemática, assim como não é possível ensinar a moral da história desprezando a história. Dessa forma, um bom professor de Matemática ou de qualquer outro assunto deverá necessariamente ser um bom contador de história, afinal, preparar uma aula também é construir uma narrativa pertinente.

De modo geral, a narrativa opera como firmamento dos significados envolvidos, que constituem a verdadeira moral da história. Um exemplo de história pode ser observado quando se inicia o conteúdo de sequências numéricas, sobre a reprodução de um casal de coelhos. Certamente, poucos professores que já lecionaram esse conteúdo escaparam de contar alguma variante da seguinte história:

Um criador tem um casal de coelhos, macho e fêmea; depois de um mês ainda são muito pequenos para procriar e, portanto, no segundo mês o criador ainda possui um único par de coelhos; mas no mês sucessivo, o terceiro, os dois procriam um casal de coelhos, um macho e uma fêmea, e assim, no terceiro mês, o criador possui dois casais de coelhos; no mês seguinte,

²⁶ Disponível em: <<https://www.nilsonjosemachado.net/mil-e-uma82-o-professor-como-construtor-de-narrativas-fabulosas/>>. Acesso em 28 de novembro 2021.

o primeiro casal produz outro casal, macho e fêmea, e assim por diante, mês a mês; enquanto o novo casal é muito jovem para procriar e o fará somente depois de dois meses, mas a seguir, sempre mês a mês.

*Pois bem, após um ano, quantos casais de coelhos haverá na criação?*²⁷

Claro que se pode protestar questionando se existe alguma garantia de que nascem sempre um macho e uma fêmea, ou que os coelhos podem morrer... De fato, do ponto de vista biológico parece muito improvável ocorrer tal nascimento, no entanto, a história descrita trata-se de uma situação hipotética do mundo mágico da Matemática, um mundo onde é possível formular hipóteses e trabalhar sobre elas, incumbindo a outros o encargo de verificar a realidade do que foi obtido. Logo, a pergunta não é real, é uma pergunta matemática: com essas hipóteses, quantos casais existirão depois de um ano?

Descobre-se então que, por exemplo, em janeiro há somente um casal, assim como em fevereiro; em março já existe dois casais; em abril, além desses dois, há um terceiro, aquele gerado pelo primeiro casal; continuando esse raciocínio, encontra-se o resultado apresentado na tabela 3.

Tabela 3

Mês	Número de casais
Janeiro	1
Fevereiro	1
Março	2
Abril	3
Maiο	5
Junho	8
Julho	13
Agosto	21
Setembro	34
Outubro	55
Novembro	89
Dezembro	144

A sucessão mostrada à direita da tabela é denominada “sequência de Fibonacci”. Muito

²⁷ Retirado de D’amore (2012, p. 31).

tempo depois de ser aplicada aos casais de coelhos, foi descoberto que a sequência de Fibonacci vale para uma parte considerável das manifestações da natureza: no crescimento das sementes de girassol, das folhas de um galho de árvore, dos pequenos brotos de uma couve-flor e assim por diante. Tal sequência numérica, tão bela e elegante, inspirou artistas famosos, e uma sequência de Fibonacci aparece hoje no Beaubourg de Paris, uma obra de Mario Merz (1925-2003).

Fibonacci escreveu o problema do casal de coelhos em seu livro “Líber Abaci”, que pode ser traduzido para o português como “Livro de cálculo”, um tratado de aritmética e álgebra elementar, cuja publicação ocorreu em 1202. Porém, essa sequência não foi criada por Fibonacci, o registro mais antigo em que ela aparece data-se entre 450 a 200 antes de Cristo e está num livro sobre métrica, escrito pelo matemático indiano Pingala. Na verdade, o grande mérito de Fibonacci foi a sua enorme influência na popularização do sistema numérico indo-arábico na Europa, o mesmo sistema usado hoje.

Claro que alguém poderá não concordar com a referência a essa sequência pelos adjetivos “bela” e “elegante”; talvez não concorde por não perceber a sua estrutura íntima, isto é, a sua regra constitutiva. Sem considerar os dois termos iniciais (1 e 1), todos os demais são obtidos como soma dos dois anteriores, uma formulação simples, elegante e verdadeira. Assim, tal regra não vale apenas para os primeiros 12 passos, vale para todos os outros a partir do terceiro passo, e esta também é uma característica da Matemática, a universalidade. Aliás, a sequência numérica ora tratada é infinita! Em linguagem matemática, pode-se descrever a sequência de Fibonacci como:

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n+2}, \text{ com } n \geq 2.$$

Ademais, ao se efetuar a divisão entre um termo de tal sequência pelo seu anterior, obtém-se: $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{2}{1} = 2$; $\frac{3}{2} = 1,5$; $\frac{5}{3} = 1,666 \dots$; $\frac{8}{5} = 1,6$; $\frac{13}{8} = 1,625$; $\frac{21}{13} = 1,615$; $\frac{34}{21} = 1,619$; $\frac{55}{34} = 1,617$; \dots . Quanto maiores forem os números escolhidos, o resultado da divisão $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ fica cada vez mais próximo de 1,6180339887498948482045868343656. Em outras palavras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right) = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948482045868343656 \dots,$$

onde a letra grega φ (Fi) representa o número de ouro, também conhecido como “proporção áurea”.

A estreita relação da proporção áurea com a arte teve início no século XVI, a partir de um livro escrito por um monge italiano Luca Pacioli, cujo título foi traduzido para o português

“Divina proporção”²⁸. Sabe-se que Luca era amigo do pintor italiano Leonardo Da Vinci (1452-1519), este foi quem ilustrou o livro do monge. Somente depois disso a proporção áurea passou a ser aplicada em inúmeros quadros e esculturas da Renascença para que os artistas lograssem alcançar em suas obras maior beleza e equilíbrio. Estudos mostraram que o próprio Da Vinci aplicou o conceito para definir as proporções em sua obra “A Última Ceia” na qual o número de ouro está presente na sala, na mesa e até na posição dos protagonistas. O artista italiano também usou a proporção áurea para criar a “Mona Lisa” e o “Homem Vitruviano”.

Retomando a ideia da construção de narrativas e de modo semelhante, é muito pouco provável que algum professor que já lecionou o conteúdo de progressão aritmética, mais especificamente sobre a soma dos primeiros n termos de uma PA, tenha conseguido escapar de contar alguma variante da história a seguir:

Com 10 anos, um aluno inquieto chamado Gauss, que mais tarde viria a ser um matemático famoso, recebeu de sua professora uma tarefa que visava a acalmá-lo, deixando-o ocupado por uns bons minutos: calcular a soma dos 100 primeiros números inteiros positivos ($1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$). Tendo-lhe incumbido da tarefa, a professora virou-lhe as costas e voltou-se para o restante da classe, e quase que imediatamente depois, Gauss entregou-lhe o resultado: 5.050. Inquirido sobre como fizera as contas tão rapidamente, Gauss teria explicado: na adição $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, o primeiro termo somado com o último ($1 + 100$) dá o mesmo resultado que o segundo somado com o penúltimo ($2 + 99$), que dá o mesmo que o terceiro somado com o antepenúltimo ($3 + 98$), e assim por diante, completando cinquenta parcelas iguais a 101. Assim, a soma dos 100 termos deve ser igual a 50×101 , ou seja, 5.050²⁹.

Trata-se, sem dúvida, de uma história inspiradora para a compreensão da ideia básica traduzida pela fórmula:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

De fato, como uma progressão aritmética é uma sequência numérica em cada termo, a partir do segundo, somando-se ao anterior é obtida uma constante r , chamada de razão da PA, segue, portanto, que $a_1 + a_n$ é igual a $a_2 + a_{n-1}$, uma vez que a_2 é $a_1 + r$ e a_{n-1} é $a_n - r$; de modo análogo, pode-se constatar que $a_2 + a_{n-1}$ é igual a $a_3 + a_{n-2}$, e assim por diante. Desse modo, a soma mencionada resulta igual à metade do número n de parcelas multiplicada pelo valor da soma da primeira com a última, pelo menos no caso em que n é par (quando n é ímpar,

²⁸ “De Divina Proportione” (1509)

²⁹ Retirado de Machado (2004, p. 95-96).

pode-se argumentar de outro modo para mostrar que vale o mesmo resultado).

Assim, essa história associada a Gauss funciona como uma estrutura de fixação do raciocínio fecundo que conduz a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, e faz pouca diferença se o fato narrado na história ocorreu efetivamente ou não. Didaticamente, a narrativa funcionaria da mesma forma, ainda que fosse apenas imaginada pelo professor. É possível extrair um raciocínio análogo da narrativa sobre a reprodução do casal de coelhos, na qual é construída a noção de uma sequência numérica por recorrência. De fato, do ponto de vista biológico é muito improvável tal sucessão de nascimento (macho e fêmea) ocorrer e, além disso, os coelhos do problema são fictícios, não existem na realidade.

Nessa perspectiva, a história da Matemática pode ser impulsionadora de muitas narrativas a serem arquitetadas pelo professor para facilitar a construção dos significados nas situações de ensino. Mas nesse caso, o foco do compromisso do professor deve ser a construção dos significados, e não a mera reprodução dos fatos que realmente ocorreram. Para Machado (2004, p. 96), os fatos históricos podem estar impregnados de elementos fortuitos, de circunstâncias irrelevantes para o significado que se deseja construir. A narrativa do que efetivamente aconteceu pode ser bem mais complexa do que a contida na fábula construída pela imaginação do professor. Assim, cabe a ele filtrar a narrativa de modo a construir uma fábula que atenda seus intentos.

Além disso, a Matemática também faz uso constante de metáforas, inclusive, essa figura de linguagem é usada para além do esperado no dia a dia das pessoas, só que às vezes aparece “escondida” na linguagem comum, como em “o pescoço da garrafa”. As metáforas são habituais na poesia, apresentando-se, por exemplo, no poema de Vinícius de Moraes “Rosa de Hiroshima”, “A rosa radioativa”; são muito frequentes na música, como nas canções “Pedaco de mim”, de Chico Buarque, “A saudade é arrumar o quarto / Do filho que já morreu” ou na canção “Gita”, de Raul Seixas, “Eu sou a luz das estrelas”; e ainda as metáforas são necessárias na linguagem da matemática: “Duas retas a e b se interceptam”.

Entretanto, enquanto na poesia elas são explicadas pelos críticos e analisadas de maneira explícita, na língua comum tendem a ser aceitas e usadas sem a consciência de que se trata de metáforas; e na Matemática, há a impressão de que poucas pessoas percebem, em muitas frases, a presença de metáforas e não de objetos. É o caso, por exemplo, das expressões: “Prolongar um segmento”, “Unir dois pontos”, “A reta corta a reta s ” e “Traçar a circunferência”. Tais expressões corriqueiras na Matemática são todas metáforas, utilizam palavras que se referem à realidade concreta mesmo falando de objetos ideais, abstratos, muito distantes de concretude.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É preciso ter esperança, mas ter esperança do verbo esperar; porque tem gente que tem esperança do verbo esperar. E esperança do verbo esperar não é esperança, é espera. Esperançar é se levantar, esperançar é ir atrás, esperançar é construir, esperançar é não desistir! Esperançar é levar adiante, esperançar é juntar-se com outros para fazer de outro modo...

Paulo Freire

Não é incomum chegar ao final de um longo percurso, como o que foi trilhado, e restar mais perguntas que respostas, mais dúvidas que certezas. Entre as poucas certezas obtidas no decorrer da caminhada, certamente está a segurança de que a forma como se concebia o conhecimento matemático no início do caminho foi substancialmente modificada em função das leituras realizadas e da aplicação dos questionários. Entretanto, apesar da exigência de apresentar resultados concisos em um trabalho de pesquisa acadêmica, neste não há resultados claros e inquestionáveis. Os objetivos propostos e o que efetivamente se amalhou até aqui em momento algum pretenderam desembaraçar todo o emaranhado, pela simples razão de não saber como fazê-lo.

Ao longo dessa jornada, refletiu-se sobre os objetos do conhecimento matemático. As discussões suscitadas sobre a relação entre o concreto e o abstrato no ensino da Matemática, partindo de diferentes formas de conceber esses conceitos, servem ao menos para manter vivo o debate. Caminhar na direção de uma concepção dialética, na direção de um movimento dos atributos de concretude e de abstração parece ser o rumo a perseguir. Assim, as passagens do abstrato ao concreto e do concreto ao abstrato constituem componentes solidários desse movimento, conforme foi apontado por Machado (2011).

A partir da pesquisa, é possível insinuar que a forma corrente de se conceber os termos “concreto” e “abstrato” na prática pedagógica se aproxima do entendimento do senso comum, no qual o concreto é aquilo que se apresenta imediatamente aos sentidos, que tem materialidade, e o abstrato é aquilo que se encontra no mundo das ideias, no pensamento. Machado (2013) também apontou que o discurso de muitos professores de Matemática coincide com o ponto de vista do senso comum. Isso afeta o processo de ensino, sobretudo no que tange ao processo de construção de significados. De fato, ao adotar essa visão reducionista de concreto e de abstrato no ensino do saber elaborado, quase nada restará de concreto naquilo que se estuda na escola.

Essa concepção simplista de abstrato e de concreto traz consigo a crença de que, no processo de construção do conhecimento, bastaria definir uma entre as alternativas: ou conhecimento ascenderia do concreto rumo ao abstrato, ou partiria das abstrações em direção à realidade concreta. Embora seja comum haver, no discurso pedagógico, um elogio enfático da ascensão da concretude à abstração, por pressupor uma maior simplicidade do concreto em relação às construções abstratas, a referência adotada nas atividades escolares é largamente a do abstrato em direção ao concreto, a julgar pelo esquema “teoria/exercícios” e “conteúdo/aplicações”, predominante na prática pedagógica nos diversos níveis de ensino.

Nessa caracterização simplista de concretude e de abstração, os objetos do conhecimento matemático são puras abstrações, pois tais objetos não possuem existência física. Eles são estruturas pensadas na mente, não necessariamente ligadas à realidade concreta, porém, durante certo período de tempo, o conhecimento matemático esteve, quase que exclusivamente, voltado para as necessidades cotidianas. Sobretudo a partir dos matemáticos gregos, esse cenário mudou substancialmente e a Matemática foi se tornando cada vez mais abstrata, sem uma relação imediata com a realidade cotidiana.

Essa crescente abstração dos objetos matemáticos fez surgir movimentos na defesa de uma ligação entre o conhecimento matemático e os objetos da realidade cotidiana. Machado (2013, p. 85) afirma que, por mais que o conhecimento matemático tente se libertar da experiência e constituir-se num sistema independente, esse mesmo conhecimento parece trair-se, revelando, em suas raízes, os resíduos da experiência concreta. Tais movimentos repercutiram no ensino da Matemática e muitos professores começaram a advogar um ensino mais factível à realidade dos estudantes.

Entretanto, de acordo com Giardinetto (1999), da necessária valorização do conhecimento cotidiano, viu-se ocorrer um fenômeno de supervalorização desse saber cotidiano perdendo-se de vista a relação com o saber escolar. Para Giardinetto (1999), algumas pesquisas realizadas no âmbito da educação Matemática passaram a supervalorizar o conhecimento matemático cotidiano, elevando-o à condição de polo orientador para o desenvolvimento da prática pedagógica. Tais investigações se baseavam no pressuposto de que o cotidiano é o locus da manifestação do conhecimento ‘natural’ e ‘genuíno’. Porém, o conhecimento baseado no cotidiano é um conhecimento fragmentário, que se manifesta segundo uma lógica conceitual própria às exigências de toda a vida cotidiana. Além disso, Kaminski et al (2008) acreditam que os exemplos do mundo real obscurecem a Matemática subjacente, impedindo que os alunos consigam aplicar o conhecimento matemático a novas situações.

Assim, o fazer matemática na escola não deve limitar-se ao saber cotidiano, pois a

escola, enquanto espaço de socialização do saber sistematizado, tem como principal função transpor os limites da realidade cotidiana. Logo, o estudo do conhecimento matemático e de qualquer outro conhecimento escolar deve fazer uso do pensamento abstrato. O “peso” da abstração, atribuído pelo senso comum à Matemática, tem berço na caracterização simplista de concreto e de abstrato. Entretanto, ao tomar essa caracterização simplificada de concretude, parte considerável dos objetos estudados nas demais disciplinas do currículo também se encaixam na categoria de objetos abstratos. Portanto, o pensamento abstrato é um aspecto preponderante na aprendizagem de qualquer tema que se proponha aprender.

O nível de concretude de um objeto matemático é relativo, como já fora apontado por Soares (2015). A concretude de um objeto matemático não está relacionada somente à complexidade desse objeto, ela depende também da base cognitiva do sujeito que o explora. É a base cognitiva do indivíduo que determina o que é concreto para ele. Dessa relatividade, resulta a asserção de que um objeto matemático não tem o mesmo nível de concretude para todas as pessoas, esse nível varia de indivíduo para indivíduo. À medida que determinado objeto – tenha ele materialidade ou não – vai sendo incorporado à base cognitiva do sujeito, ele passa a ser concebido como concreto, ainda que seja uma concretude cognitiva.

Os papéis desempenhados pela realidade concreta e pelas abstrações são distintos no processo cognitivo, por isso, eleger uma alternativa entre ambos é um erro. As passagens do concreto ao abstrato e do abstrato ao concreto são componentes solidários de um movimento dialético. As abstrações não podem ser consideradas nem ponto de partida e nem ponto de chegada do conhecimento pois elas situam no interior do processo, constituindo, portanto, mediações necessárias. Além disso, funcionam como mecanismos para a passagem de um patamar de concretude a outro. Convém salientar que o processo de elaboração do conhecimento não se exaure com a simples mudança de patamar. Após ser clarificado com abstrações mais abrangentes, cada novo patamar poderá transformar-se em um novo ponto de partida, que conduzirá a novo estágio no qual as relações determinantes estruturam-se de modo ainda mais significativo.

A Matemática possui uma linguagem específica, constituída por símbolos próprios que se relacionam de acordo com determinadas regras. Nessa linguagem matemática, um determinado objeto pode possuir diferentes significados e diversas representações e os termos utilizados nem sempre guardam relação direta com seu significado na língua materna. Tal conjunto de símbolos e regras precisa ser bem compreendido pelo indivíduo que o utiliza. O aprendizado da linguagem matemática demanda processos cognitivos de assimilação e compreensão diferentes daqueles usados na aquisição da língua materna. Essa simbologia

refinada pode dificultar o processo de apropriação de conceitos e procedimentos matemáticos pelos estudantes.

D'Amore (2012) acredita que a Matemática possui uma linguagem específica justamente por não ser possível acessar os seus objetos diretamente, uma vez que eles remetem a ideias, conceitos e axiomas. Trata-se de uma linguagem com algumas características peculiares, entre elas estão a precisão, a concisão e a universalidade. Essa linguagem matemática possui um código semiológico próprio, sua característica de “universalidade” possibilita comunicar ideias e proposições a todos que dominem esse sistema linguístico, independente da língua materna que possuam.

Para aprender Matemática, é preciso, sobretudo, transcender os aspectos sensitivos físicos dos objetos concretos materiais, senão o conhecimento matemático não fará sentido algum. Aprender Matemática demanda um processo de correlação dos objetos matemáticos. Tal aprendizagem requer esforço e dedicação, pois estudar Matemática é um trabalho cansativo. Mas, qual aprendizado, seja ele escolar ou não, não demanda esforço e dedicação? Enfim, o saber é difícil, porém a proeza de conquistá-lo concede orgulho e felicidade.

É importante esclarecer que ao afirmar que os objetos da Matemática são estruturas pensadas na mente, não está negando a existência de aplicações da Matemática, muito menos diminuindo a importância dessas aplicações. Muitas dessas aplicações também demandam o pensamento abstrato. Considerando o atual estágio de desenvolvimento do conhecimento matemático, já não faz mais sentido separar a matemática duas, uma “aplicada” e outra “pura”. Assim, essa dissertação concebe o conhecimento matemático como único, não existe dois tipos (um aplicado e um puro).

E como não foi possível desembaraçar todo o emaranhado (sequer houve a intenção de desembaraçá-lo completamente) e, no decorrer da investigação, surgiram outras perguntas, vislumbrou-se alguns caminhos para continuidade das investigações relacionadas com essa temática. É possível, por exemplo, investigar: “como os aspectos relativos à natureza dos objetos matemáticos têm sido abordados nos cursos de formação de professores de Matemática?”; “de que forma a relação entre o concreto e o abstrato tem sido concebida dentro dos cursos de formação de professores de Matemática?”; “como construir um currículo de Matemática que contemple um movimento dialético entre o abstrato e o concreto?”; “como repensar a aprendizagem da Matemática por meio de um processo de abstração de abstrações?”.

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de Filosofia. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- ARAÚJO, Antônio Pinheiro de. O fetichismo na metodologia do ensino da matemática. Revista Educação em Questão, v.1/2, n. 2/1, p.127 – 9, 1987/8.
- ARROYO, Miguel Gonzales. Pobreza, desigualdades e educação. Módulo Introdutório. Curso de Especialização em Educação, pobreza e desigualdade social. Brasília, DF: MEC, 2015. Disponível em: <<http://catalogo.egpbf.mec.gov.br/>>. Acesso em: 25 nov. 2021.
- BARKER, Stephen. Filosofia da Matemática. Tradução: Leonidas Hegenberg; Octanny Silveira Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.
- BARDIN, Laurence. Análise de conteúdo. Tradução: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2021.
- BARTHES, Roland. O rumor da língua. São Paulo: Brasiliense, 1988.
- BATISTA, Pollyanna Débora da Silva. Geometria hiperbólica e aplicações. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa-Florestal, MG, 2019.
- BECKER, Fernando. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: significado epistemológico e educacional. 2014. Disponível em: <[https:// https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem](https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem)>. Acesso em 28 de novembro 2021.
- BENACERRAF, P. (1965), ‘What Numbers Could Not Be’, *Philosophical Review*, 74, 47-73; reimpr. em Benacerraf e Putnam (1983), 272-94.
- BIONDO, Franco Gomes. Base nacional comum curricular: contexto, significados e desalinhamentos cotidianos. Disponível em: <<https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/e-mosaicos/article/view/38729/29674>>. Acesso em 20 de dez 2021.
- BOTO, Carlota; SANTOS, Vinício de Macedo; SILVA, Vivian Batista da; OLIVEIRA, Zaqueu Vieira (Organizadores). A escola pública em crise: inflexões, apagamentos e desafios. São Paulo: FEUSP, 2020.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, e Uta C. História da Matemática. 3. Tradução: Helena Castro. Vol. I. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRANCO, Emerson Pereira; BRANCO, Alessandra Batista de Godoi; IWASSE, Lilian Fávoro Alegrância; ZANATTA, Shalimar Calegari. Uma visão crítica sobre a implantação da base nacional comum curricular em consonância com a reforma do ensino médio. Debates em Educação, Maceió, vol. 10, n. 21, maio/ago. 2018.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular – MEC/CONSED/UNDIME, Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf>. Acesso em 31 dez. 2021.

_____. Relatório Brasil no PISA 2018. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf>. Acesso em 31 dez. 2021.

_____. Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação. Brasília, 2013.

_____. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: 2000.

_____. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: 1997a.

_____. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental. Brasília: 1997b.

_____. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, DF. 1996.

_____. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Brasília, DF. 1988.

BRÍGIDO, Raimundo Vossio. Certificação e Normatização de Competências: origens, conceitos e práticas. Boletim Técnico do SENAC, Rio de Janeiro, v.27, n.1, jan/abr., p.3-15, 2001.

BRITO, J. Cartas de Parker: para o ensino de aritmética nas escolas primárias. Revista de Ensino, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 1-46, 1902. Disponível em: <<http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/98842>>. Acesso em: 27 nov. 2021.

CECÍLIO, Camila. Blikstein: “Ferramentas tecnológicas devem ser usadas quando há um propósito pedagógico e não porque são novas ou modernas”. 2021. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/20717/paulo-blikstein-ferramentas-tecnologicas-devem-ser-usadas-quando-ha-um-proposito-pedagogico-e-nao-porque-sao-novas-ou-modernas/>>. Acesso em 28 de novembro 2021.

CHANGEUX, Jean-pierre; CONNES, Alain. Matéria e Pensamento. Tradução de Luiz Paulo Rouanet. São Paulo: Editora da UNESP, 1996.

CHAUÍ, Marilena. Convite à Filosofia. São Paulo: Ática, 2000.

COUTINHO, Lázaro. Trigonometria esférica: a matemática de um espaço curvo. 1ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

CRESWELL, John W. Investigação qualitativa e projeto de pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens. Tradução: Sandra Mallmann da Rosa – 3. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Penso, 2014.

CURY, Carlos Roberto Jamil. Os Fora de série na escola. Campinas: Autores Associados, 2005.

CURY, Helena Noronha. A formação dos formadores de professores de matemática: quem

somos, o que fazemos, o que podemos fazer. In: CURY, Helena Noronha (org.). Formação de professores de matemática, uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

D'AMORE, Bruno. Matemática, estupefação e poesia. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

_____. Objetos, Significados, Representaciones Semióticas y Sentido. In: Radford L., D'amore, B. (Eds.). Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. Número especial della rivista Relime (Cinvestav, México. DF, México), 2006. p. 177 – 196.

_____. Conceptualización, registros e representaciones semióticas y noética: intenciones constructivistas en la aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, Espanha, 35, 2004. p. 90 – 106.

DELUIZ, Deise. O Modelo das Competências Profissionais no Mundo do Trabalho e na Educação: Implicações para o Currículo. Boletim Técnico do SENAC, Rio de Janeiro, v.27, n.3, set/dez., p.13-25, 2001.

DEVLIN, Keith. Os problemas do milênio. Tradução: Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2008.

_____. O Gene da Matemática. 3. Tradução: Sérgio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DEWEY, John. Como pensamos. São Paulo: Nacional, 1979.

DU SAUTOY, Marcus. A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 2007.

Duval, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamentos cognitivos da compreensão em matemática. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

_____. Ver e Ensinar a Matemática de outra Forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. (Org.). Tânia M.M. Campos; trad. Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011a.

_____. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. MORETTI, M. T. Revemat, v.6, n. 2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2011b. Disponível em: <www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>.

_____. Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. (Fascículo I).

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. 5 ed.

Campinas: Unicamp, 2011.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. *Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa*. São Paulo: Papirus, 1999a.

_____. (Org.) *Práticas Interdisciplinares na Escola*. 6ª ed. São Paulo: Cortez, 1999b.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Dicionário escolar da Língua Portuguesa*. Curitiba: Positivo, 2005.

FIorentini, Dário. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Educação*, Faculdade de Educação da Unicamp. Zetetiké 4 (Novembro 1995): 1- 37.

FOSSA, John. *Teoria intuicionista da educação matemática*. Tradução: Alberta M. R. B. Ladchumanandasivam. 2ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

FOUCAULT, Michel. *Vigiar e punir: nascimento da prisão*. Tradução Raquel Ramallete. Vigésima edição. Petrópolis: Vozes, 1999.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 39 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. ENTREVISTA: RAYMOND DUVAL E A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Campo Mourão, v. 2, n. 3-1, jul-dez. 2013.

FRIGOTTO, Gaudêncio. A interdisciplinaridade como necessidade e como problema nas ciências sociais. In: JANTSCH, Ari Paulo e BIANCHETTI, Lucídio (Orgs). 9ª ed. atualizada e ampliada. *Interdisciplinaridade para Além da Filosofia do Sujeito*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

GADOTTI, Moacir. *Escola cidadã*. 4 ed. São Paulo: Cortez, 1996.

_____. *História das ideias pedagógicas*. São Paulo: Edditora Ática, 1993. (Série educação).

_____. *Concepção dialética da Educação*. 6 ed. São Paulo: Cortez, 1988.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. *Matemática Escolar e Matemática da vida cotidiana*. Campinas: Autores Associados, 1999.

_____. Abstrato e o Concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões. *Bolema*, Rio Claro – SP, v. 11, n. 12, 1997.

GONÇALVES, C. H. B.; POSSANI, Claudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. *Revista Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, n. 47, p. 16-24, dez. 2009.

GRAMSCI, Antônio. *Concepção Dialética da História*, 4 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1981.

_____. *Introdução ao Estudo da Filosofia e do Materialismo Histórico*. In: *Obras Escolhidas*. São Paulo: Martins Fontes, 1978a.

_____. In: Obras Escolhidas. São Paulo: Martins Fontes, 1978b.

_____. Os intelectuais e a organização da cultura. 2 ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978c.

Grattan-Guinness, I. The Fontana history of the mathematical sciences. The rainbow of mathematics. London: Fontana Press, 1997.

HELLMAN, Geoffrey. Mathematics Without Numbers. Oxford: Oxford University Press, 1989.

HERSH, Reuben. What Is Mathematics, Really? Oxford Univ. Press, 1997.

HESSEN, Johannes. Teoria do Conhecimento. Tradução: João Vergílio Gallerani Cuter. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

JAPIASSÚ, Hilton. Interdisciplinaridade e patologia do saber. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

KAMINSKI, J. A.; SLOUTSKY, V. M.; HECKLER, A.. The advantage of abstract examples in learning Math. Science, 320, April, 2008.

KANT, Imanuel. Crítica da razão pura. 2 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

KAPUZINIÁK, Célia. A cidadania como finalidade da educação: uma reflexão sobre as LDBs. Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2000.

KAVESKI, F. C. G. Concepções acerca da interdisciplinaridade e transdisciplinaridade: um estudo de caso. In: II Congresso Mundial de Transdisciplinaridade, Vitória/Vila Velha, 2005.

KOPNIN, P.V. A Dialética como lógica e teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, Karel. Dialética do Concreto. 2. Tradução: Célia Neves e Alderico Toríbio. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

LEFEBVRE, Henri. Lógica Formal/Lógica Dialética. Rio de Janeiro: Civilização brasileira, 1979.

LENZA, Pedro. Direito constitucional. 25ª ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2021.

MACEDO, Elizabeth. Currículo e Competências. In: LOPES, Alice Casimiro; MACEDO, Elizabeth (orgs.). Disciplinas e Integração Curricular: história e políticas. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

MACHADO, Nilson José. Matemática e realidade: das concepções às ações docentes. 9ª ed. São Paulo, SP: Cortez, 2013.

_____. Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. -7.ed.- São Paulo: Cortez, 2011.

_____. Conhecimento e valor. São Paulo, SP: Moderna, 2004.

_____. Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

MANNO, Ambrogio Giacomo. A filosofia da matemática. Tradução: Armindo José Rodrigues. Lisboa : Edições 70, [s.d.].

MARX, Karl. Contribuição à crítica da Economia Política. 2 ed. Tradução: Florestan Fernandes. Vol. 1. São Paulo: Expressão popular, 2008.

MIGUEL, José Carlos. O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico- metodológicas. Núcleos de Ensino: Artigos dos Projetos realizados em 2003. p.375-394, 2005. Disponível em:<<http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/SLC0630-1/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf>>. Acesso em 20 dez 2021.

MILL, John Stuart. A System of Logic: The Collected Works of John Stuart Mill, Vol. 7, ed. J. M. Robson. Toronto: University of Toronto Press, 1973.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. Revista de Educação Matemática, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005.

NASSER, Lilian. O papel da abstração no pensamento matemático avançado. Acta Latino-americana de Matemática Educativa, México, v. 26, p. 889-896, 2013.

NIMIER, J. Entretiens avec mathématiciens. IREM, Lyon. (1989).

PAULO, Vicente; ALEXANDRINO, Marcelo. Direito Constitucional Descomplicado. São Paulo: MÉTODO, 2014.

PEIRCE, Charles Sanders. Semiótica. Tradução: José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005 (Coleção estudos).

PERRENOUD, Philippe. Construir as competências desde a escola. Tradução Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

_____. Dez Novas Competências para Ensinar. Tradução de Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

_____. A Prática Reflexiva no Ofício de Professor: profissionalização e razão pedagógica. Tradução de Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002a.

_____. As Competências para Ensinar no Século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Tradução: Cláudia Schilling e Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed Editora, 2002b.

PIAGET, Jean. Biologia e Conhecimento. Petrópolis: Vozes, 1996. [1967].

_____. Psychology and epistemology. New York: Grossman Publishers, 1971.

_____. Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais.

Tradução: Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. [1977].

_____. O Nascimento da Inteligência na Criança. Rio de Janeiro: Zahar, 1978a. [1936].

_____. *Adaption vitale et psychologie de l'intelligence: sélection organique et phénocopie*. Paris: Hermann, 1974a.

POPPER, K. R. O Mito do Contexto: em defesa da racionalidade da ciência. Lisboa: Edições 70, 2009.

_____. O conhecimento e o problema corpo “mente”. Tradução: Joaquim Alberto Ferreira Gomes. Lisboa: Edições 70, 1997.

_____. Conhecimento objetivo. São Paulo: EDUSP, 1975.

RAMOS, Marise oqueira. A Pedagogia das Competências: autonomia ou adaptação? São Paulo: Cortez, 2001.

RESNIK, Michael. *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press, 1997.

RICARDO, Elio Carlos. Competências, interdisciplinaridade e contextualização: dos Parâmetros Curriculares Nacionais a uma compreensão para o ensino das Ciências. Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

ROPÉ, Françoise; TANGUY, Lucie (orgs.). *Saberes e Competências: o uso de tais noções na escola e na empresa*. Tradução Patrícia Chittoni Ramos e equipe do ILA-PUC/RS. Campinas SP: Papyrus, 1997.

SANTAELLA, Lúcia. *O que é semiótica*. São Paulo: Brasiliense, 2007.

_____. *A teoria geral dos signos: como as linguagens significam as coisas*. São Paulo: Pioneira, 2000.

_____. *Teoria Geral dos Signos, semiose e autogeração*. São Paulo: Editora Ática, 1995.

SAVIANI, Dermeval. *Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações*. 11ª ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2011.

_____. *Sistema nacional de educação e plano nacional de educação*. Campinas: Autores Associados, 2014. 118 p.

SILVA, Jairo José da. *Filosofia da Matemática*. São Paulo: Editora da UNESP, 2007.

_____. *Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática*. In: *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. BICUDO, Maria Aparecida Viggiane. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

SILVA, Veleida Anahi da. *Relação com o saber na aprendizagem matemática: uma contribuição*

para a reflexão didática sobre as práticas educativas. *Revista Brasileira de Educação*, v. 13 n. 37 jan./abr. 2008. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbedu/v13n37/13.pdf>>. Acesso em 13 nov. 2021.

SHAPIRO, Stewart. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. New York: Oxford University Press, 1997.

_____. *Filosofia da Matemática*. Tradução: Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2015.

SOARES, Luís Havelange. *A dialética entre o concreto e o abstrato na construção do conhecimento matemático*. Tese de Doutorado da Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

SOUZA, Eduardo Ramos Coimbra de. *Schopenhauer e os conhecimentos intuitivo e abstrato: uma teoria sobre as representações empíricas e abstratas*. – 1. ed. – São Paulo: Cultura Acadêmica, 2015.

SPINELLI, Walter. *A construção do conhecimento entre abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da Matemática*. Tese de Doutorado da Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

STEWART, Ian. *Cartas a uma Jovem Matemática*. Tradução: Pedro Ferreira. Lisboa: Relógio D'Água, 2006.

TALL, D. (1991). *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

TANGUY, Lucie (orgs.). *Saberes e Competências: o uso de tais noções na escola e na empresa*. Tradução Patrícia Chittoni Ramos e equipe do ILA-PUC/RS. Campinas-SP: Papirus, 1997.

The Oxford Desk Dictionary and Thesaurus. American Edition. Berkley Books. Oxford University Press, Inc. 1997.

TUNG-SUN, C. *A teoria do conhecimento de um filósofo chinês*. In: CAMPOS, H. *Ideograma: lógica, poesia, linguagem*. São Paulo: EDUSP, 2000.

VIANA, Marcelo. *A matemática é criada ou descoberta?* Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2021/05/a-matematica-e-criada-ou-descoberta.shtml>>. Acesso em: 25 nov. 2021.

XIMENES, Sérgio. *Minidicionário da Língua Portuguesa*. 2ª ed. São Paulo: Ediouro, 2000.

ANEXOS

TCLE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) Senhor (a):

Eu, Adilton Alves Teixeira, aluno do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, orientando do Professor Roque Mendes Prado Trindade, estou desenvolvendo a pesquisa “Afinal, qual a relação entre o concreto e o abstrato no processo de construção do conhecimento matemático?” que estuda as contribuições da mediação entre o concreto e o abstrato para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática.

Esse estudo objetiva refletir sobre a relação entre o concreto e o abstrato na construção do conhecimento matemático, bem como busca identificar as concepções de concreto e de abstrato adotadas no ensino de Matemática básica e suas respectivas matrizes teóricas.

A finalidade deste trabalho é contribuir para a melhoria do ensino dessa disciplina. Por entendermos que a aprendizagem em matemática é influenciada pela forma como os seus objetos são concebidos, acreditamos que refletir sobre a natureza de tais objetos e sobre o seu ensino pode trazer elementos significativos para o processo de construção do conhecimento matemático.

Solicito a sua colaboração respondendo a um questionário e a sua autorização para apresentar os resultados deste estudo em eventos da área educacional e publicar em revista científica. No caso de publicação dos resultados, o(a) senhor(a) tem o sigilo de seu nome garantido(a).

É importante esclarecer que a sua participação no estudo é voluntária e, desse modo, o(a) senhor(a) não é obrigado(a) a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas pelo pesquisador(a). O(a) senhor(a) poderá decidir por não participar do estudo ou de retirar sua participação a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo pela sua decisão. Estamos à sua disposição para eventuais esclarecimentos que considere necessário em qualquer etapa da pesquisa.

Adilton Alves Teixeira

Pesquisador

Autorização

Diante do exposto acima, eu, _____, de forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento em participar da pesquisa. Declaro que recebi cópia deste termo de consentimento, e autorizo a realização da pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

Assinatura do Participante da Pesquisa

ou Responsável Legal

Contato do Pesquisador (a) Responsável:

Caso necessite de maiores informações sobre o presente estudo, favor ligar para o pesquisador:

(77) 9 8118 -7455

Endereço: Rua Travessa Mauá, s/n, Rancho Alegre, Caetité-BA. E-mail:

adiltonateixeira@gmail.com

QUESTIONÁRIO

Questionário direcionado a professores de Matemática

1) Sexo

Masculino

Feminino

2) Faixa etária

20 a 30

31 a 40

41 a 50

51 a 60

Acima de 60

3) Vínculo empregatício

Efetivo

Substituto

Reda

Celetista (CLT)

4) Jornada de trabalho

20 h

30 h

40 h

60 h

5) Titulação

Graduação

Especialização

Mestrado

Doutorado

Pós-doutorado

6) Há quanto tempo leciona Matemática?

- 0 a 4 anos
- 4 a 8 anos
- 8 a 12 anos
- 12 a 16 anos
- Acima de 16 anos

7) Leciona em qual nível ou etapa de ensino?

- Educação Infantil
- Ensino Fundamental
- Ensino Médio
- Superior

8) Por que você escolheu ser professor de Matemática?

9) Qual (is) conteúdo(s) da Matemática você gosta mais de lecionar? Por quê?

10) A Matemática possui alguma peculiaridade que a torna diferente das demais disciplinas do currículo escolar? Se sim, qual?

11) Você considera importante o uso de material concreto no ensino da Matemática?

- Sim
- Não

12) Caso a sua resposta tenha sido “sim” à pergunta anterior (pergunta 11), em qual(is) nível(eis) de ensino?

- Educação Infantil
- Ensino Fundamental 1
- Ensino Fundamental 2
- Ensino Médio
- Superior

13) Caracterize por meio de uma palavra aquilo que você entende como matemática ‘concreta’.

14) Caracterize, também por meio de uma palavra, a matemática ‘abstrata’.

15) Classifique cada “objeto” apresentado abaixo, de acordo com a concepção, como concreto ou abstrato:

- Um pensamento, uma ideia
- Equação da área de um trapézio
- Um círculo
- 5 (número 5)
- Força (da Física)
- Energia (da Física)
- Uma mesa
- Estado (quanto às suas dimensões físicas e políticas)
- Uma reta
- Átomo
- Uma aresta
- Um quadrado

16) Como você diferencia um objeto concreto de um objeto abstrato?

17) Avalie a seguinte afirmação “O aspecto abstrato da Matemática é o principal responsável pelas dificuldades encontradas no aprendizado dessa disciplina”.

- Concordo totalmente
- Concordo parcialmente
- Não concordo, nem discordo
- Discordo parcialmente
- Discordo totalmente

18) Você considera importante levar em conta a relação entre o concreto e o abstrato no ensino da Matemática?

- Muito importante
- Importante
- razoavelmente importante
- pouco importante

sem importância

19) Na sua prática docente no ensino da Matemática, você:

- Parte do concreto rumo ao abstrato.
- Parte do abstrato em direção ao concreto.
- Age de outro modo.

20) Caso tenha respondido “ Age de outro modo” na pergunta anterior (pergunta 19), qual é esse modo?

21) O conhecimento cotidiano do estudante deve ser o polo orientador para a construção do conhecimento matemático? Por quê?

22) Você conhece a matriz de referência do ENEM? Toma essa matriz como base no seu planejamento?

23) A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento oficial, de caráter normativo, que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica. Você tem conhecimento das disposições da BNCC?