Sociedade Brasileira de Matemática - **SBM**
Universidade Federal do Acre - **UFAC**
Mestrado Profissional em Matemática - **PROFMAT**

Herança de propriedades

Noah Gabriel Dantas da Silva

Rio Branco,
26 de maio de 2023

Noah Gabriel Dantas da Silva

Herança de propriedades

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na cidade de Rio Branco, Acre, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Rio Branco,
20 de maio de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

S5861h Silva, Noah Gabriel Dantas da, 1994 -
Herança de propriedades / Noah Gabriel Dantas da Silva; orientador: Dr. José Ivan da Silva Ramos. – 2023.
48 f.: il. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Rio Branco, 2019.
Inclui referências bibliográficas.

1. Classes de conjuntos. 2.Operações. 3. Propriedades. I. Ramos, José Ivan da Silva (orientador). II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Uéliton Nascimento Torres CRB-11º/1074.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Titulo da dissertação: Heranças de Propriedades

Autor: Noah Gabriel Dantas da Silva

Orientador: Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Acre – PPGPROFMAT, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos
Orientador e Presidente da Banca- UFAC

Prof. Dr. Cleber Pereira
Membro Interno – UFAC

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Membro Externo - UNIR

Rio Branco, 26 de maio de 2023.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Valdenor Rodrigues da Silva, (IN MEMORIAM), que sempre me indicou os estudos como direção para o sucesso.

À minha doce e querida mãe, Vanuza Dantas de Amorim, por ser meu porto seguro, meu alicerce e por todos seus ensinamentos sobre a vida.

À minha companheira de todos os dias, Aline Chocorosqui Fernandes, por ter se dedicado a nossa filha e sido paciente durante estes estudos.

Ao professor Dr. José Ivan da Silva Ramos, meu orientador, por toda sua competência, paciência e ensinamentos, durante a idealização deste trabalho.

A todos meus professores do PROFMAT, que contribuíram bastante na minha formação acadêmica até aqui.

Aos meus amigos do PROFMAT que estiveram comigo em vários momentos, em especial, Francisco Raíldo, Lucas Motta e Douglas Wilson.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), à Universidade Federal do Acre (UFAC).

Dedicatória

À Minha filha: Lívia C.F.D. da Silva

''A persistência é o caminho do êxito''

Charles Chaplin

Resumo

A partir de uma operação $*$ definida em um conjunto $A \neq \emptyset$, verificamos a herança de possíveis propriedades dessa operação para subconjuntos de A e possíveis propriedades da operação $\circledast$, induzida por $*$, para $\mathbb{F}(A) = \{f: A \to A \mid f \text{ é uma função}\}$, o conjunto ds funções que agem de A em si mesmo.

Palavras chave: Classes de conjuntos, operações e propriedades.

Abstract

From an operation $*$ defined on a set $A \neq \emptyset$, we check the inheritance of possible properties of this operation of subsets of A and possible properties of the operation $\dot{\underset{\cdot}{*}}$, induced by $*$, for $\mathbb{F}(A) = \{f: A \to A \mid f \text{ is a function}\}$, the set of functions that act from A to yourself.

Keywords: Classes of sets, operations and properties.

Lista de Símbolos

$<$: menor do que.

$>$: maior do que.

$\leq$: menor do que ou igual a.

$\geq$: maior do que ou igual a.

$=$: igual a.

$\neq$: diferente.

$\forall$: para todo, qualquer que seja.

$\Rightarrow$: então, implica.

$\Leftrightarrow$: equivalente, se e somente se, se e só se.

∞: infinito (não é um número).

$|$: tal que.

$\exists$: existe.

$\nexists$: não existe.

$\in$: pertence a.

$\notin$: não pertence a.

$\subset$ e $\supset$: está contido e contém

$\subseteq$: subconjunto de ou igual a.

$\subsetneq$: subconjunto de e diferente de ou subconjunto próprio de.

$\not\subset$: não está contido.

$\cup$: união.

$\cap$: interseção.

#X: número de elementos do conjunto X.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$: conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente.

$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$: conjunto dos múltiplos do número inteiro n.

$M_{mxn}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes de ordem mxn com entradas no corpo dos reais.

$M_n(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas em $\mathbb{R}$.

$\mathbb{F}_B^A$: conjunto de todas as funções que agem de A para B.

$\mathbb{F}(X)$: conjunto de todas as funções que agem de X em si mesmo.

Sumário

Introdução

O Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT é uma ótima oportunidade para o professor de matemática que busca aprimoramento em sua formação profissional, especialmente quando ele atua na rede básica de ensino. Disciplinas como *números e funções reais, aritmética, geometria e matemática discreta*, que compõe o primeiro ano letivo do mestrado, trazem uma excelente abordagem dos conteúdos ministrados no dia a dia do professor de matemática. Outras disciplinas, como *cálculo, geometria analítica, álgebra linear e tópicos de matemática*, oportunizam que haja uma revisão e um olhar diferente daquelas disciplinas que vimos no curso de graduação e isso fundamenta, ainda mais, a base matemática do professor.

Escolher um tema para um TCC, sem orientação, pode não ser uma tarefa fácil para o aluno do PROFMAT, visto a riqueza de temas e assuntos que estão relacionados com a ciência Matemática, e isso, na falta de experiência, pode nos deixar um pouco perdidos sobre o que focar e estudar. Porém, eu obtive margens e ideias sobre alguns temas, através de uma carta aberta, que nos fazia pensar e olhar certos conceitos ou definições de forma diferente. Um desses dizia:

'' Elementos neutros, em geral, são escassos! Como é o zero para a adição dos números. O número 1 para a multiplicação dos números. Em um dos livros do Adilson Gonçalves em [3], mais precisamente nas páginas 43 e 44, um conjunto de matrizes é apresentado com um "elemento neutro geral", I_2 em $M_2(\mathbb{R})$, e um subconjunto próprio desse, com um "elemento neutro local". Por que isso ocorre? Quando não ocorre? Que exemplos mais, podemos listar?''

A partir dessa ideia é que este trabalho começou a ser idealizado e, assim, como era de se esperar, com o início da pesquisa surgiram novas definições e observações que, acreditamos, merecem ser registradas.

A principio foi feito um estudo sobre a teoria dos conjuntos, o que ocorre no Capitulo 1 deste trabalho. Abordamos algumas operações usuais, o conjunto das partes de um conjunto, as leis de composição interna, as leis do cancelamento, definições de Famílias, Partições, Coberturas e Cadeias. Além de incluirmos as relações de equivalência, que permite que utilizemos em nossos exemplos, a estrutura do conjunto $\mathbb{Z}_n$, das classes residuais módulo um inteiro n, apresentamos as definições formais de função, paridade, injetividade, sobrejetividade, soma, multiplicação e composição de funções.

No Capítulo 2, apresentamos os temas centrais dessa pesquisa. Algumas classes de conjuntos e propriedades de operações definidas em um conjunto são relacionadas. Isso permitirá que abordemos vários exemplos que, ao final, darão a ideia de "herança" que pretendemos estabelecer. Como consequência, estabeleceremos o conceito de propriedade local e propriedade global de uma operação.

Acreditamos que nossa abordagem pode aguçar o interesse de ampliação deste estudo que preferimos encerrar por enquanto.

Capítulo 1: Noções preliminares

Neste tópico, apresentaremos algumas das principais definições e propriedades que podem ser relacionadas com operações definidas em um conjunto.

As leis do cancelamento, ligadas também com a existência de elementos inversos, darão suporte para as discussões feitas no capítulo 1.

Por fim, mostraremos que uma operação bem definida no contra domínio *Y,* de uma função, induz uma operação no conjunto $\mathbb{F}_Y^X$ de todas as funções que agem de X para Y.

1.1. Noções da teoria dos conjuntos

No estudo da teoria dos conjuntos, vale destacar a grande contribuição de G. Cantor (1845 – 1918) , matemático alemão , que estabeleceu inúmeros resultados, como por exemplo, o 'Cardinal' de um conjunto infinito, chamado por ele de ''*cardinal transfinito',* que diz:

''Todo conjunto cujos elementos podem ser postos em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto dos números naturais têm o mesmo e o ''menor'' cardinal transfinito.''

Os trabalhos de Cantor chamaram a atenção dos estudiosos da época. Sobre eles, comentou D. Hilbert (1862 – 1943): '' Do paraíso criado por Cantor ninguém nos tirará''.

1.1.1. Definição: Um *conjunto* é toda e qualquer coleção imaginável. Ele é formado, por exemplo, por objetos, animais, plantas, pessoas ou números, que são chamados de *elementos*. Uma coleção sem elementos é também um conjunto, nesse caso, denominado de *conjunto vazio.*

Exemplo 1: Seja $A = \{1,2,3\}$. Dizemos que 1, 2 e 3 são os elementos de A, e, então, podemos dizer que 1 pertence a A, 2 pertence a A e 3 pertence a A, que em símbolos pode ser escrito como $1 \in A$, $2 \in A$ e $3 \in A$, respectivamente. Note que 4 não pertence a A e , em símbolos, escrevemos $4 \notin A$.

Exemplo 2: Seja $B = \{\ \}$. Como não existem elementos em B, dizemos que B é um conjunto vazio, universalmente representado pela letra grega $\emptyset$ (phi).

Os conjuntos numéricos, dada sua grande importância, são representados por símbolos especiais, temos que $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais, $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, $\mathbb{R}$ o conjunto dos númeors reais e $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1.2. Definição: Sejam A e B conjuntos, tais que todos os elementos de A são também elemento de B. Dizemos que A é um *subconjunto* de B e que A está contido em B. Em símbolos temos, A ⊂ B. Por outro lado, se pelo menos um dos elementos de A não está em B, dizemos que A não está contido em B, e podemos representar isso por A ⊄ B.

Exemplo 3: Dados os conjuntos A ={ 3, 5, 6, 0, 1} , B = { 3, 5, 6, 0,1, 8} e C={1, 4} , vemos que A ⊂ B e C ⊄ B .

Proposição 1: Vale que $\emptyset \subset X$, qualquer que seja o conjunto X.

De fato, se $\emptyset \not\subset X$, então existe um x tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin X$, mas $\emptyset$não possui elementos. Então devemos admitir que $\emptyset \subset X$.

É comum representarmos também o conjunto vazio por $\emptyset = \{\,\}$. Notemos que $\{\,\} \neq \{\emptyset\}$. Este último, é um conjunto unitário cujo elemento é a letra $\emptyset$.

Proposição 2: A relação de inclusão ⊂, goza das seguintes propriedades: $\forall\, A, B$ e C conjuntos,

a) $A \subset A$ (Reflexiva)

b) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (Transitiva).

É imediato que $\forall\, x \in A \subset A$, $x \in A$. Também, se $x \in A \subset B$, vale que $x \in B \subset C$, isto é, $x \in C$.

1.1.3. Definição: Dizemos que os conjuntos A e B são iguais se, e somente se A e B possuem os mesmos elementos se, e somente se, tivermos que $A \subset B$ e $B \subset A$.

1.1.4. Lei de composição interna

Em um conjunto A, não vazio, podem ser observadas regras para manipulação ou operacionalização de seus elementos. Essas regras, comumente chamadas de operações (bem) definidas em A, são denominadas de *leis de composição internas* definidas em A.

1.1.4.1. Definição: Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma operação $*$ está (bem) *definida* em A se, e somente se, $\forall\, x, y \in A$, vale que $x * y \in A$.

Exemplo 4: A adição é bem definida no conjunto dos números naturais e a multiplicação, no conjunto dos números inteiros. No conjunto dos números ímpares, porém, a adição não está bem definida, já que a soma de dois números ímpares é um número par.

1.1.4.2 Definições: Seja $*$ uma operação definida em um conjunto $A \neq \emptyset$. Dizemos que:

a) essa operação tem a *propriedade associativa* se, e somente se, $\forall\, x, y, z \in A$, valer que $x * (y * z) = (x * y) * z$.

b) essa operação tem a *propriedade comutativa* se, e somente se, $\forall\, x, y \in A$, valer que $x * y = y * x$.

c) $e \in A$ é *elemento neutro* para a operação $*$ se, e somente se, $\forall\, x \in A$, valer que $x * e = e * x = x$.

d) um elemento a é *inversível* (ou *possui inverso*) em A, com respeito à operação $*$ se, e somente se, $\exists\, a^{-1} \in A$, de modo que $a\, * a^{-1} =\, a^{-1} * a = e$ (se um elemento a em um conjunto A possui inverso, com relação a uma operação $*$, então o conjunto A necessariamente possui elemento neutro para operação $*$).

A adição $+$ em $\mathbb{N}$, possui as propriedades listadas em a), b) e c). Mesmo não existindo inversos para os elementos desse conjunto, o número 0 é o elemento neutro para essa operação.

A multiplicação $\cdot$ em $\mathbb{Z}$, goza das propriedades em a), b) e c); porém apenas os números -1 e 1 são inversíveis. Claro, 1 é o elemento neutro para essa operação.

Em $2\mathbb{Z}$, que é um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$, a multiplicação está bem definida. Claro que $0 \in 2\mathbb{Z}$, mas $1 \notin 2\mathbb{Z}$. Mais tarde diremos que $2\mathbb{Z}$ herda o elemento neutro da adição, mas não herda o elemento neutro da multiplicação.

No conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ dos números racionais, lembremos, as operações são definidas da seguinte forma: $\forall \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, definimos:

$$+: \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq};$$

$$\cdot: \frac{m}{n} . \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

Em $\mathbb{Q}$, a operação de multiplicação admite existência de inverso multiplicativo para todo elemento não nulo. Enquanto que em $\mathbb{Z}$, somente -1 e 1 são inversíveis.

1.1.5. Definição (potências inteiras): Seja A um conjunto não vazio, $*$ uma operação bem definida em A e e o elemento neutro para essa operação. Então, definimos as *potências inteiras* para um elemento a, em A, da seguinte maneira:

$$a^0 = e$$

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a * a$$

$$a^3 = a * a * a$$

....

$$a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n\ vezes};\ \forall\ 1 \leq n \in \mathbb{Z}$$

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * a^{-1} \dots * a^{-1}}_{n\ vezes};\ \forall\ 1 \leq n \in \mathbb{Z}$$

Calculando algumas potências do número 5, em relação à operação de adição em $\mathbb{Z}$, obtemos: $5^0 = 0$, $5^1 = 5$, $5^2 = 5 + 5 = 10$ e para todo $1 \leq n \in \mathbb{Z}$, temos $5^n = \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{n\ vezes} = 5n$.

Agora, se $1 \leq n \in \mathbb{Z}$, temos que $5^{-n} = (-5) + \cdots + (-5) = (-5)n$ é a n-ésima potencia do inverso aditivo de 5 em $\mathbb{Z}$.

O "valor" da expressão a^n está diretamente ligado à operação $*$ e, no caso de seu expoente ser $n = 0$, por definição, temos $a^0 = e$; onde e é o elemento neutro para essa operação (caso ele exista).

1.1.6. Proposição (unicidade do elemento neutro): Dado um conjunto A, não vazio, no qual está definida uma operação $*$. Então, se existir elemento neutro com respeito a essa operação, ele é único.

Uma maneira de justificar essa propriedade é a seguinte: sendo e seja o elemento neutro para a operação $*$ definida em A, vale que, para todo $a \in A$, $a * e = e * a = a$. E, se para $e' \in A$, também vale que $a * e' = e' * a = a$, vemos que $e = e' * e = e * e' = e'$, o que prova a unicidade de e em A.

Pode ser que um subconjunto próprio desse conjunto A, a depender da ausência de propriedades, possua um elemento neutro, ali localizado, que não coincida com o elemento neutro (geral) para essa operação.

1.1.7. Definição (As Leis do Cancelamento): Seja A um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida em A. Se para $a, b, c \in A$, temos que

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \text{ (cancelamento à esquerda) e}$$
$$b * a = c * a \Rightarrow b = c \text{ (cancelamento à direita),}$$

dizemos que valem as *leis do cancelamento* para a operação $*$ definida em A. Se a operação é comutativa, esses cancelamentos coincidem.

Exemplo 5: $\forall\ a\ , x\ , y \in \mathbb{Z}$ tais que vale a igualdade $a + x = a + y$, então $x = y$.

Exemplo 6: Considerando o conjunto $\mathbb{Q}$ e a operação $\cdot$ (multiplicação), a igualdade $a \cdot x = a \cdot y$, implica em $x = y$, quaisquer que sejam $0 \neq a, x, y\ \in\ \mathbb{Q}$.

No caso em que $a = 0$, que é um número racional não inversível, temos $0 \cdot 2 = 0 \cdot 3$, mesmo que seja $2 \neq 3$.

O próximo assunto pode motivar também o interesse por temas relacionados com as estruturas algébricas. As "partições" casos particulares de "coberturas" são mais comuns. Aparecem também como conjuntos quocientes, determinados por uma relação de equivalência como a "congruência módulo n".

1.1.8. Definições: Seja A um conjunto não vazio e $\sim$ uma relação entre pares de elementos de A. Dizemos que $\sim$ é uma *relação de equivalência* em A se, e somente se, valem as seguintes propriedades: $\forall\ x, y, z \in A$

$\mathcal{E}_1$: $x \sim x$ (reflexiva);

$\mathcal{E}_2$: Se $x \sim y$ e $y \sim x$, então $x = y$ (antissimétrica);

$\mathcal{E}_3$: Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$. (transitiva).

O conjunto $\bar{a} = \{x \in A \mid x{\sim}a\}$ é denominado de *classe de equivalência* do elemento a e $A/_{\sim} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$ é o *conjunto quociente* de A pela relação $\sim$.

Para entendermos que $A/\sim$ significa uma partição do conjunto A, incluímos a seguinte

1.1.9. Proposição: Se $\sim$ é uma *relação de equivalência* em A. São equivalentes as seguintes condições: $\forall\, x, y, z \in A$,

a) $x \sim y$;

b) $x \in \bar{y}$;

c) $y \in \bar{x}$;

d) $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$;

e) $\bar{x} = \bar{y}$.

Note que, se $s \in \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$; então $s \in \bar{x}$ e $s \in \bar{y}$. Portanto, se $a \in \bar{x}$, vale que, por transitividade $a \sim s \sim y$ e $a \in \bar{y}$. Portanto, vemos que $\bar{x} \subset \bar{y}$. A inclusão contrária também é clara e $\bar{x} = \bar{y}$. O passo de d) para e) garante que se $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$; então, vale que $\bar{x} \neq \bar{y}$. Consequentemente, $A/\sim$ é uma partição de A.

1.1.10. Proposição: A relação: $x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - y = kn$; com $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv y (\operatorname{mod} n)$; onde $1 < n \in \mathbb{Z}$, é de equivalência.

Além disso, vale que $\bar{x} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \equiv x (\operatorname{mod} n)\}$ é a classe de equivalência do elemento x, e $\mathbb{Z}/_{\equiv\, (\operatorname{mod} n)}$, o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação $\equiv (\operatorname{mod} n)$, é dado por $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$.

Usando o Algoritmo da Divisão de Euclides podemos mostrar que $\mathbb{Z}_n$ possui exatamente n elementos (ver [3]).

1.1.11. Proposição: Em $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$ estão (bem) definidas as seguintes operações:

$+: \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n,\ \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$

$\cdot: \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n, \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$

Essa soma e esse produto obtidos independem dos representantes das classes (ver [3]; proposição 2.15) e decorrem do fato de que:

Se $a \equiv b (\operatorname{mod} n)$ e $c \equiv d (\operatorname{mod} n)$, então, somando e multiplicando, temos que $a + c \equiv b + d (\operatorname{mod} n)$ e $ac \equiv bd (\operatorname{mod} n)$ (ver [3]; proposição 2.14; página 30).

Debaixo da barra, agora é fácil entender, as propriedades da adição em $\mathbb{Z}$ valem todas em $\mathbb{Z}_n$ e da multiplicação, valem quase todas, a depender do inteiro n fixado.

Exemplo 7: Fixando $n = 4$, temos $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ e podemos calcular

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Essas tabelas revelam que, apesar das operações (debaixo da barra) serem feitas como na adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$, a multiplicação em $\mathbb{Z}_n$ tem propriedades diferentes. Essa discussão será feita no Capítulo 2 deste TCC.

1.1.12. Definição: Suponhamos que A e B sejam conjuntos não vazios e $*$ uma operação segundo a qual os elementos desses conjuntos podem ser operados. Então, podemos construir o conjunto:

$$A * B = \{a * b |\ a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Pode ocorrer que esse conjunto caia dentro de A, dentro de B ou, contrário a isso, possua novos elementos.

Exemplo 8: O plano analítico de Euclides pode ser reescrito como sendo o espaço vetorial $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\mathbb{R}^2 = \{ru/\ r \in \mathbb{R} \text{ e } u \in \mathbb{R}^2\}$.

Nesse caso, é usual definir $ru = r(a, b) = (ra, rb)$, para todo número r e todo ponto $u = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$.

1.1.13. Operações entre conjuntos

É possível construirmos um "novo" conjunto a partir de dois conjuntos dados. Quando relacionamos grupos de objetos ou executamos ações que podem ser modeladas por essa teoria.

Entendemos como essencial para as nossas discussões mais adiante, os conjuntos definidos a seguir, partindo de dois dados conjuntos A e B.

1.1.13.1. Interseção ($\cap$): o conjunto $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$, formados pelos elementos comuns aos conjuntos A e B é denominado *interseção* de A com B.

Os elementos da interseção de conjuntos acumulam muitas características. Não é difícil perceber que, quanto maior for a quantidade de conjuntos intersectados, maior é a chance de isso terminar no conjunto vazio.

Vale e é de fácil averiguação a seguinte

1.1.13.2. Proposição: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então, valem:

a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Associatividade).

b) $A \cap B = B \cap A$ (Comutatividade).

c) Se $A \subset B$, vale a igualdade $A \cap B = A$.

d) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1.1.13.3. União ($\cup$): o conjunto $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$, formados por todos os elementos que pertencem a A ou que pertence a B é denominado *união* de A com B.

Quase sempre, nesse conjunto, que reúne elementos com características distintas, propriedades podem não ser mantidas. Notadamente, quase sempre, o fechamento de uma operação.

Exemplo 9: O conjunto $2\mathbb{Z}$, dos números inteiros múltiplos de 2, pode ser unido ao conjunto $7\mathbb{Z}$, dos múltiplos de 7. No entanto, embora nesses conjuntos operação de adição esteja bem definida, em $2\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$ isso não está preservado. Temos, por exemplo, que $2, 7 \in 2\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$, porém, $2 + 7 = 9 \notin 2\mathbb{Z}$ e $9 \notin 7\mathbb{Z}$; ou seja, $2 + 7 \notin 2\mathbb{Z} \cup 7\mathbb{Z}$.

1.1.13.4. Proposição: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então, valem:

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Associatividade).

b) $A \cup B = B \cup A$ (Comutatividade).

c) Se $A \subset B$ então vale a igualdade $A \cup B = B$.

d) $A \cup \emptyset = A$.

As propriedades mostradas na proposição seguinte lembram a distributividade da multiplicação em relação à adição, verificada no conjunto $\mathbb{R}$: se $a, x, y \in \mathbb{R}$, vale que $a(x + y) = ax + ay$.

1.1.13.5. Proposição: Vale que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, para A, B e C conjuntos quaisquer.

Se $A \cap (B \cup C) = \emptyset$, significa que A não tem nada em comum com B ou C e também temos $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset$.

Supondo que $x \in A \cap (B \cup C)$, vale que $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Se $x \in B$ então $x \in A \cap B$. Ou, se $x \in C$, então $x \in A \cap C$. Portanto, concluímos $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Não mostraremos a inclusão $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

1.1.13.6. Proposição: Vale que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, para A, B e C conjuntos quaisquer.

Podemos supor $(A \cup B) \cap (A \cup C) \neq \emptyset$. Seja x um elemento desse conjunto. Assim, $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$; ou seja, $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \in A$ ou $x \in C$. Então, $x \in A$ e $x \in A$ ou $x \in C$ ou $x \in B$ e $x \in A$ ou $x \in C$. Segue que $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \in C$ que significa que $x \in A \cup (B \cap C)$.

Não mostraremos a inclusão $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.1.13.7. Diferença (\): o conjunto $A \backslash B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$, formado pelos elementos que estão em A e não estão em B, é denominado *conjunto diferença* entre A e B, nesta ordem. Em geral, temos $A \backslash B \neq B \backslash A$.

Exemplo 10: Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}$. Vale que $a - (b - c) = (a - b) + c$. E, se $C \subset B \subset A$, vale a relação $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup C$.

1.1.13.8. Conjunto complementar: Seja U o conjunto (universo) que contém todo e qualquer conjunto. Então, se A é um conjunto, $A^c = C_U(A) = \{ x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$ é o *complementar* do conjunto A.

Se A e B são conjuntos e $A \subset B$, então temos a coincidência $C_B(A) = A \backslash B$, que é o complementar do conjunto A em relação ao conjunto B.

As leis de Morgan (ou leis de dualidade) estão relacionadas nos itens c) e d) da seguinte

1.1.13.9. Proposição: Sejam A e B subconjuntos de U. Então, vale que:

a) $U^c = \emptyset$ e $\emptyset^c = U$

b) $(A^c)^c = A$

c) $A \cap A^C = \emptyset$ e $A \cup A^c = U$

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^C$ e $(A \cup B)^C = A^c \cap B^c$

1.1.13.10. Produto cartesiano: O conjunto $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \; e \; b \in B\}$ é denominado de *produto cartesiano* entre os conjuntos A e B (nessa ordem).

O produto cartesiano $\mathbb{R}^2$, já citado em nosso Exemplo 8, aparece com muita frequência e pode ser relacionado com muitas discussões.

Claro que precisamos ter A e B não vazios para formar o conjunto $A \times B$. Se esses conjuntos são finitos, embora tenhamos $A \times B \neq B \times A$, esses produtos coincidem no número de elementos.

É possível "impor" uma álgebra ao produto $A \times B$, a partir das eventuais propriedades que esses conjuntos A e B oferecem. Talvez algum tipo de herança que pode ser considerada mais adiante.

O conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto A, preferencialmente não vazio, será usado para a construção de exemplos que vamos relacionar em nosso próximo capítulo.

1.1.13.11. Conjunto das partes: Dado um conjunto A, preferencialmente não vazio, definimos $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ como sendo o conjunto das partes de A.

Esse conjunto é fechado para as operações de união e interseção que possuem $\emptyset$ e A, respectivamente, como elemento neutro. Isso nos permite que $P(A)$ possa ser relacionado em nossas discussões sobre as propriedades que podem ou não se transferirem de um conjunto para seus subconjuntos próprios.

Se o número de elementos de A é igual a $\#A = n < \infty$; então uma simples indução mostra que $\#P(A) = 2^n$.

Exemplo 11: Se A é um conjunto não vazio, a união $\cup$ está bem definida em $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Além disso, podemos ter $A, B, C \in P(A)$, de modo que $A \cup B = A \cup C$ sem que tenhamos a igualdade $B = C$.

Da mesma forma, a interseção $\cap$ está bem definida em $P(A) = \{X / X \subset A\}$. Podemos ter $A, B, C \in P(A)$, de modo que $A \cap B = A \cap C$, sem que tenhamos a igualdade $B = C$.

É fácil verificar esse fato de que, em geral, não valem as leis do cancelamento. Pense no conjunto $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

1.1.14. Proposição: Sejam A, B e C conjuntos. Então, temos que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ se, e somente se, $B = C$.

Isso pode ser justificado da seguinte maneira: primeiramente, seja $x \in B$. Então, $x \in A \cup B = A \cup C$, por hipótese. Daí, $x \in A \cup C$ e, assim, $x \in A$ ou $x \in C$. Se $x \in C$, concluímos que $B \subset C$. Se $x \in A$, $x \in A \cap B = A \cap C$, por hipótese. E, temos $x \in A \cap C$, e $x \in C$ e $B \subset C$.

De maneira análoga mostra-se que todo elemento de C é também um elemento de B e, por isso, temos $B = C$.

Noutro sentido, se $B = C$, é imediato concluir as igualdades $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$.

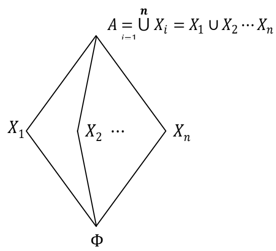
1.1.15. Famílias de (subconjuntos de) um conjunto: Partições, Coberturas e Cadeias

Consideremos $\emptyset \neq A$ um conjunto e $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$, o conjunto de todos os subconjuntos de A. Os subconjuntos formados por elementos de $P(A)$ são "famílias" de subconjuntos de A. Por exemplo, se $A = \mathbb{N}$, é o conjunto dos números naturais, $F = \{X \subset \mathbb{N} / \#X < \infty\} \subset P(\mathbb{N})$ é a família dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

As cadeias e coberturas de A também são particulares subconjuntos de $P(A)$, conforme as

1.1.15.1. Definições: Seja A um conjunto não vazio.

a) Dizemos que $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, com $1 \leq n \in \mathbb{N}$, é uma *partição* de A, se, e somente se, valer que:



i) $X_i \subset A$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$;

ii) $X_i \cap X_j = \emptyset$, para $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e $i \neq j$;

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = A$

b) Dizemos que $\mathcal{C} = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\}$, com $1 \leq m \in \mathbb{N}$, é uma *cobertura* de A se, e somente se, valer que:

i) $Y_j \subset A$, para todo $j = 1, 2, \cdots, m$;

ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} Y_i = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_m = A$

De imediata averiguação é o resultado mencionado na seguinte

1.1.15.2. Proposição: Seja $\mathcal{C} = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\}$, com $1 \leq m \in \mathbb{N}$ uma cobertura finita de um conjunto A não vazio. Então:

a) A é finito se, e somente se, Y_j é finito para todo $j = 1, 2, \cdots, m$;

b) Se A é infinito, vale que Y_j é infinito para algum $j \in \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\}$.

Uma cobertura pode ser formada por elementos finitos e o conjunto por ela coberto ser infinito. Exemplificando, $\mathcal{C} = \big\{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n\}, \cdots\big\}$ é uma cobertura (infinita) do conjunto dos números naturais. Temos $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$.

1.1.15.3. Definições: Seja A um conjunto não vazio.

a) Todo subconjunto $\mathcal{F}$ do conjunto $P(A)$ é denominado de uma *família* de (subconjuntos de) A.

b) Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de A é denominada de *cadeia* se, e somente se, valer que:

i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$;

ii) $\forall\, X, Y \in \mathcal{F}$, temos que $X \subset Y$ ou $Y \subset X$.

Exemplo 12: a) Se $A = \{1, 3, 5, 7\}$, temos que $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 5, 7\}\}$ é uma família de A, que não é uma partição, mas é uma cobertura. Além disso, $\mathcal{F}$ é uma cadeia.
b) $\mathcal{F} = \{X \mid X \subset N\ e\ \#X < \infty\}$ é a família dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
c) Se E é um conjunto no qual está definida uma operação $*$, podemos considerar $F = \{X \mid X \subset E\ e\ \forall\, a, b \in X, vale\ que\ a * b = b * a\}$, a família dos subconjuntos comutativos de E.

Na família $\mathcal{F} = \{X \mid X \subset N\ e\ \#X < \infty\}$ dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, podemos encontrar a cadeia $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{0, 1\}, \cdots, \{0, 1, \cdots, n\}, \cdots\}$, formada por infinitos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. É fácil ver que a união dos termos dessa cadeia é exatamente o conunto $\mathbb{N} = \bigcup_{L \in \mathcal{C}} L$; e essa união não é um suconjunto finito de $\mathbb{N}$.

Se $\mathcal{C}$ é uma cadeia na família $\mathcal{F}$ em c), então $\forall\, x, y \in D = \bigcup_{Y \in \mathcal{C}} Y$, na pior das hipóteses , temos que $x \in X$ e $y \in Y$, para X e Y elementos de $\mathcal{C}$. Mas, como $X \subset Y$ ou $Y \subset X$, temos que $x, y \in Y$ ou $x, y \in X$. Assim, vale que $x * y = y * x$ e isso mostra que $D \in \mathcal{F}$ (independentemente da cadeia que escolhemos).

Essa propriedade da união dos termos de uma cadeia estar ou não na família que a contém dá destaque à seguinte definição:

1.1.15.4. Definição: Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um dado conjunto A não vazio é *indutivamente ordenada* se, e somente se, para toda cadeia $\mathcal{C}$ dessa família, vale que $\bigcup_{W \in \mathcal{C}} W \in \mathcal{F}$.

Garantir a existência de elementos maximais para certas famílias de subconjuntos, muitas vezes, pode ser uma ou a única saída visível, no caso de termos que argumentar em um conjunto infinito.

1.1.15.5. Lema de Zorn: toda família indutivamente ordenada possui um maior elemento.

Nesse contexto, “maior” significa o seguinte: se M é um maior elemento de uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de A; então $\forall\, X \in \mathcal{F}$, vale que $X \subset M$. Novamente, olhando para o item c), do Exemplo 12, vemos, agora, que naquele conjunto E existe um conjunto comutativo maximal.

Outro bom exemplo de uma aplicação do lema de Zorn é a garantia de que todo espaço vetorial tem uma base, para isso basta mostrar que todo espaço vetorial V contém um conjunto de vetores linearmente independentes e que todo conjunto linearmente independente, pelo lema, faz parte de uma base de V (Veja os conceitos básicos da Álgebra Linear em: [4]).

1.2. Funções

Quando definimos uma "função", podemos relacionar quase tudo que sabemos à respeito das operações definidas em um conjunto não vazio, suas propriedades e características de seus elementos.

Vamos admitir que os conjuntos aqui relacionados ou usados como exemplos são conhecidos e, assim, não vamos dar as suas descrições com respeito a operações ou propriedades de seus elementos.

1.2.1. Definição: Dados os conjuntos A e B não vazios, dizemos que, uma lei (ou regra) f que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $f(x) \in B$, é uma *função* (que age) de A em (para) B.

Comumente, representamos uma função de A em B por:

$$\begin{aligned} f:\ & A \to B \\ & x \rightsquigarrow f(x) \end{aligned}$$

O conjunto $A = D(f)$ é chamado de *domínio*, $B = CD(f)$, de *contra domínio* e $Im(f) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$, de *conjunto imagem* da função f.

Duas funções coincidem se e somente se possuem os mesmos domínios , os mesmos contradomínios e as mesmas regras.

Exemplo 13: a) A função

$$\begin{aligned} i_A:\ & A \to A \\ & x \rightsquigarrow i_A(x) = x \end{aligned}$$

é chamada de *função identidade* de A. Vale que $Im(f) = A = CD(f)$.

b) Um caso particular de *função afim* é a função

$$\begin{aligned} f\colon\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \ \rightsquigarrow\ f(x) = x + 5 \end{aligned}$$

Aproveitando de um dos axiomas de medição (da Geometria Plana) podemos representar essa função graficamente. Surgem, portanto, agradáveis encontros com ideias geométricas.

c) O conceito de operação (bem definida) binária pode ser visto como a função

$$\begin{aligned} +\colon & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & (x, y) \ \rightsquigarrow +((x, y)) = x + y \end{aligned}$$

Mudando para essa notação, as propriedades da adição em $\mathbb{Z}$ podem ser descritas da seguinte forma:

a) $+((x, y)) = +((y, x)))$

b) $+\big(x, +(\ (y, z)\ )\big) = +\big(+\big((\ (x, y)\ )\big), z\big)$

c) $\exists\ 0 \in \mathbb{Z}$, tal que $+\big((x\ , 0)\big) = +((0\ , x))\ =\ x$

d) $\exists - x \in \mathbb{Z}$, tal que $+((x, -x))\ = +((-x, x))\ \ 0$

De maneira análoga podemos em termos de uma função, que age em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, descrever as propriedades da multiplicação.

1.2.2. Definição: Definimos por $\mathbb{F}_B^A = \{f\colon A \longrightarrow B \mid f$ é uma função$\}$ o conjunto de todas as funções que agem de A em (para) B. Se $A = B$, escrevemos simplesmente $\mathbb{F}(A)$ para denotar o conjunto das funções que agem de A em si mesmo. Claro que, a função do Exemplo 13, $i_A \in \mathbb{F}(A) \neq \emptyset$.

Exemplo 14: Se $A = B$, podemos definir que $\forall\, f, g \in \mathbb{F}(A)$, $f \circ g$ como sendo a função

$$\begin{aligned} f \circ g &: A \longrightarrow A \\ a &\rightsquigarrow\ (f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big). \end{aligned}$$

Esse caso particular da operação denominada *composição de funções*, conhecidamente, pode ser definida de forma mais geral como a seguir.

1.2.3. Definição (Composição de funções): Dadas $f \in \mathbb{F}_Y^X$ e $g \in \mathbb{F}_W^Z$, desde que $Im(g) \subset X\ e\ \ Im(f) \subset Z$, podemos definir as funções

$$\begin{array}{ll} g \circ f : X \longrightarrow W & \text{e} \quad f \circ g : Z \longrightarrow Y \\ \quad x \rightsquigarrow (g \circ f\,)(x) = g(f(x)) & \quad z \rightsquigarrow (f \circ g)(z) = f\big(g(z)\big), \end{array}$$

respectivamente, a *composta da função g com a função f* (nessa ordem) e a *composta da função f com a função g* (nessa ordem).

Observemos que, como a multiplicação de matrizes, excetuado o caso mencionado no Exemplo 14, não podemos pensar na composição de funções como uma operação definida em um conjunto não vazio.

Em geral temos que $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$, para algum x; ou seja, essa operação não é comutativa. Mesmo em $\mathbb{F}(A)$, não podemos esperar comutatividade.

Apesar desses objetos (funções), em geral pertencerem a mundos diferentes, algumas propriedades ainda podem ser verificadas, como por exemplo, a associatividade.

Um bom exercício pode ser listar as propriedades da operação "$\circ$" em $\mathbb{F}(A)$. Claro que i_A, a função do item a), do Exemplo 13, é o elemento neutro para essa operação definida em $\mathbb{F}(A)$.

1.2.4. Tipos especiais de funções

Apresentaremos alguns conceitos que comumente aparecem nos textos básicos de Matemática, admitindo que a maior parte dos assuntos seja claro.

Por exemplo, o conceito de paridade para funções, apresentado a seguir, há muito tempo foi generalizado (ver [1]). Então, em nossas discussões particulares sobre paridade de funções, usamos o termo "funções reais" e chamamos a atenção para a generalização que já foi estabelecida.

1.2.4.1. Definições:

1. *Função real par e função real ímpar*: uma função real f é *par* sempre que $f(x) = f(-x)$, para qualquer x em $\mathbb{R}$. E, uma função real f é *ímpar* sempre que $f(x) = -f(-x)$, para qualquer x em $\mathbb{R}$.

Devemos observar que é o fato de os números serem inversíveis com respeito à operação de adição que permite estabelecer as definições acima.

Exemplo 15: a) A composição de duas funções reais ímpares, é uma função ímpar. Vejamos: sejam f e g funções ímpares quaisquer. Então, vale que $(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = -f\big(g(x)\big) = -(f \circ g)(x)$; para todo x em $\mathbb{R}$. Isso mostra que $f \circ g$ é ímpar.

b) Se f e g são pares, temos $(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$, para todo x em $\mathbb{R}$. Isso mostra que $f \circ g$ é par.

c) Se f é uma função real par e g é uma função real ímpar, para todo x em $\mathbb{R}$, vale que $(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big)$; então, $f \circ g$ é par.

Além disso, se f ímpar e g é par, para todo x em $\mathbb{R}$, vale que $(f \circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$. E, por tanto, $(f \circ g)(x)$ também é par.

2. *Função injetiva*: uma função $f\colon\ A \to B$ é *injetiva* quando elementos distintos de seu domínio possuem imagens distintas: $\forall\, x, y \in A$, com $x \neq y$, temos $f(x) \neq f(y)$. Equivalentemente, $\forall\, x, y \in A$, com $f(x) = f(y)$, temos $x = y$.

A função

$$\begin{aligned} s\colon\ & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \rightsquigarrow s(n) = n + 1, \end{aligned}$$

que associa a cada número natural n seu sucessor $n + 1$, é injetiva.

3. *Função Sobrejetiva*: uma função $f\colon\ A \to B$ é sobrejetiva se, e somente se, acontece a coincidência $Im(f) = CD(f)$. Isso significa que: para qualquer $b \in B$, existe ao menos um elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

4. *Função bijetiva*: se $f\colon\ A \to B$ é, ao mesmo tempo, injetiva e sobrejetiva, dizemos que essa função é *bijetiva*.

A função $s\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, relacionada no item b), não é sobrejetiva. Portanto, não é uma função bijetiva.

Funções bijetivas são funções que, se especializadas um pouco mais, podem identificar conjuntos sobre os quais elas estão definidas. Conhecidamente, todo ponto do plano pode ser identificado como um número complexo e, vice versa.

5. *Homomorfismo*: uma função

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ (A,*) &\to (B,\square) \\ x &\rightsquigarrow \varphi(x) = x, \end{aligned}$$

definida de um conjunto A, onde está definida uma operação $*$, para um conjunto B, onde está definida uma operação $\square$, é um *homomorfismo*, se $\forall\, x, y \in A$, vale que $\varphi(x * y) = \varphi(x)\square\varphi(y)$.

Exemplo 16: a) as funções reais, exponencial e logaritmo, são exemplos de homomorfismos.
b) todo número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ pode ser identificado ou como um vetor $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ou como uma matriz $L = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\text{x}2} \in M_2(\mathbb{R})$. Os homomorfismos bijetivos são, respectivamente, definidos por $\delta(a + bi) = (a, b)$ e $\varphi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}_{2\text{x}2}$.

A depender da estrutura do conjunto B, podemos definir uma operação em $\mathbb{F}_B^A = \{f\colon A \longrightarrow B / f$ é uma função$\}$, induzida por uma operação (possivelmente) definida em B.

1.2.5. Operações induzidas para um conjunto de funções

Consideremos $\mathbb{F}_B^A = \{f\colon A \longrightarrow B \mid f$ é uma função$\}$, o conjunto de todas as funções definidas de A para B.

Suponhamos que em B a operação $*$ esteja definida. Então; essa operação induz uma operação $\circledast$ em $\mathbb{F}_B^A$, da seguinte maneira: $\forall\, f, g \in \mathbb{F}_B^A$, a função $f \circledast g$, definida por

$$\begin{aligned} f \circledast g \,:\, A &\longrightarrow B \\ a &\rightsquigarrow (f \circledast g)(a) = f(a) * g(a). \end{aligned}$$

é um elemento de $\mathbb{F}_B^A$.

Em $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f$ é uma função$\}$, já sabemos, as operações de adição e multiplicação induzem uma operação de adição $\oplus$ e uma operação de multiplicação $\odot$ de modo que: $\forall\, f, g \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, as funções, "soma" e "produto" $f \oplus g$ e $f \odot g$, definidas por

$$\begin{aligned} f \oplus g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} f \odot g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow (f \odot g)(x) = f(x)g(x), \end{aligned}$$

podem ser operacionalizadas como se fossem números reais. Isso faz com que quase todas as propriedades da adição e multiplicação dos números se verifiquem em $(\mathbb{F}(\mathbb{R}), \oplus, \odot)$.

Capítulo 2 – Herança de propriedades

O reconhecimento de uma subestrutura algébrica pode ser realizado se soubermos decidir que propriedades se transferem para esses subconjuntos. Na caracterização dos subespaços vetoriais, subanéis, ideais e subgrupos, por exemplo, não levamos em conta a associatividade da operação que define as estruturas algébricas, pois essa propriedade sempre é herdada por esses subconjuntos.

O principal objetivo de nosso trabalho, e que consta neste capítulo, é mostrar que muitas propriedades de operações definidas em um conjunto, podem ser herdadas por seus subconjuntos e, em outros casos, mostrar que essas operações induzem operações, no conjunto das funções que agem sobre eles, que podem ser ricas em propriedades e que, assim, podem definir uma "nova" estrutura algébrica.

2.1. Classes de conjuntos.

Dizemos que $\mathfrak{X}$ é uma *Classe* de conjuntos se, e somente se, podemos decidir se para um dado conjunto A, temos que $A \in \mathfrak{X}$ ou $A \notin \mathfrak{X}$. Equivalentemente, decidir se A possui ou não a propriedade $\mathfrak{X}$.

O exemplo a seguir traz uma lista de classes de conjuntos que relacionamos com as nossas discussões.

Exemplo 1: a) Sendo $\mathfrak{F}$ *a classe dos conjuntos finitos*, vale que $\mathbb{N} \notin \mathfrak{F}$, enquanto que o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N} \;/\; n! < 7\} \in \mathfrak{F}$.

Podemos denotar por $\mathfrak{F}^c$ como sendo a *classe dos conjuntos infinitos* e, assim, reescrever $\mathbb{N} \notin \mathcal{F}$ como sendo $\mathbb{N} \in \mathfrak{F}^c$.

b) Seja $\mathcal{C}$ *a classe dos conjuntos comutativos*. Então, aditivamente ou multiplicativamente, vale que $D_2(\mathbb{R}) \in \mathcal{C}$, enquanto que, multiplicativamente, $M_2(\mathbb{R}) \notin \mathcal{C}$.

Podemos denotar por $\mathfrak{C}^c$ como sendo a *classe dos conjuntos não comutativos* e, assim, dizer que $M_2(\mathbb{R}) \in \mathfrak{C}^c$, se a operação considerada for a multiplicação de matrizes, é claro.

Vamos incluir somente mais uma classe, para passarmos a olhar para as propriedades decorrentes das operações que podem ser definidas em um conjunto não vazio.

Mais uma vez se destaca a importância das funções e as diversas maneiras que suas ações podem ser definidas.

2.1.1. Definição: dizemos que um conjunto X é *enumerável* se, e somente se, vale uma das condições:

i) $X \in \mathfrak{F}$

ii) existe uma bijeção entre X e $\mathbb{N}$.

Exemplo 2: São enumeráveis os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

A função

$$i_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \rightsquigarrow i_{\mathbb{N}}(n) = n$$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ em si mesmo.

Também a função

$$j: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \rightsquigarrow j(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, se\ n \text{ é } ímpar \\ -\frac{n}{2}, se\ n \text{ é } par \end{cases}$$ é uma bijeção.

2.1.2. Proposição: Seja $\mathcal{E}$ *a classe dos conjuntos Enumeráveis*. Então, vale que:

a) $\mathfrak{F} \subset \mathcal{E}$.

b) se $X \subset Y$ e $Y \in \mathcal{E}$, então $X \in \mathcal{E}$ (subconjunto de um conjunto enumerável é (um conjunto) enumerável).

c) se $X, Y \in \mathcal{E}$ então $X \times Y \in \mathcal{E}$.

d) se $X, Y \in \mathcal{E}$, então $X \cup Y \in \mathcal{E}$ (união de conjuntos enumeráveis é (um conjunto) enumerável).

Que $\mathfrak{F} \subset \mathcal{E}$, é claro.

É conhecido que, se uma função $f: A \longrightarrow B$ é injetiva e B é enumerável, então A é enumerável (ver [6]; corolário 1). Sendo $Y \in \mathcal{E}$, podemos considerar a função injetora

$$g: Y \supset X \to Y$$
$$x \rightsquigarrow g(x) = x.$$ Isso prova o item b).

A função

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(m, n) \rightsquigarrow g(m, n) = 2^m 3^n$$ é injetiva. Portanto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Além disso, sabendo que existem sobrejeções $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$ e $g: \mathbb{N} \longrightarrow Y$, podemos definir a função

$$h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$$
$$(m,n) \rightsquigarrow h\big((m,n)\big) = \big(f(m), g(n)\big)$$
que é sobrejetiva. Então, (ver [6]; corolário 2), concluímos que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Por fim, a validade do item d) pode ser verificada em [6]; Corolário 4.

Exemplo 3: O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável (ver corolário 2, citado anteriormente).

A função

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$$
$$(a,b) \rightsquigarrow f\big((a,b)\big) = \frac{a}{b}$$
é uma função sobrejetiva e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Então, concluímos que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Exemplo 4: O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Isso é provado, (ver [6];teorema 5) , mostrando que não existe nenhuma função sobrejetiva, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Podemos denotar por $\mathcal{E}^C$ a *classe dos conjuntos não enumeráveis* e, assim, reescrever $\mathbb{R} \notin \mathcal{E}$ como sendo $\mathbb{R} \in \mathcal{E}^C$.

2.2. Propriedades de operações definidas em conjuntos.

Isso já foi mencionado em 1.1.4.2. Se $A \neq \emptyset$ é um conjunto e $*$ uma operação definida em A, sabemos que são propriedades: a associatividade, a comutatividade, a existência de elemento neutro e a existência de inversos.

Que propriedades ainda podem ser notadas, dependendo do conjunto A escolhido e da operação definida nesse conjunto?

Vamos incluir uma lista de mais algumas propriedades para dar sentido às nossas discussões, consequentemente, dar mais sentido a essa abordagem que fizemos neste trabalho.

2.2.1. Definição: *Existência de elementos idempotentes.* Essa propriedade vale se existir um elemento $a \in A$, no qual está definida uma operação $*$, e $a^2 = a * a = a$.

O conjunto $\mathcal{I}_{d_*}(A) = \{a \in A \;/\; a\text{^}2 = a * a = a\}$ é o conjunto dos elementos idempotentes de A.

Em $\mathbb{R}$, considerando "+", a operação de adição, temos que o conjunto $\mathcal{I}_{d_+}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} |\; x^2 = x + x = x\}$ é não vazio, $\mathcal{I}_{d_+}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Então, a adição em $\mathbb{R}$ admite a *existência de elementos idempotentes*. O que é $\mathcal{I}_{d_.}(\mathbb{R})$?

Exemplo 5: As leis do cancelamento, citadas em 1.1.7, podem valer com relação a uma operação $*$ definida em um conjunto S, ou pela existência de inversos:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \Leftrightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \Leftrightarrow b = c$$

que é um caso mais geral, ou por não existirem divisores de zero, quando temos operações de adição e multiplicação definidas em S.

2.2.2. Definição: *Existência de divisores de zero* poderia ser até entendida como uma "fragilidade". Então, poderíamos estar definindo como propriedade: *não existência de divisores de zero*. Claro, isso não traz confusão alguma.

Dizemos que um conjunto não vazio S, no qual estão definidas operações de adição, com elemento neutro 0, e multiplicação, com elemento neutro 1, ambas satisfazendo as propriedades citadas em 1.1.4.2, possui *divisores de zero* se, e somente se, existem elementos $0 \neq x, 0 \neq y \in S$ tais que $xy = 0$.

Em nosso Capítulo 1, no Exemplo 7, temos $\overline{2} \neq \overline{0}$, com $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$.

Em nosso exemplo anterior, usamos o termo "mais geral" porque existência de inversos pode significar não existência de divisores de zero. Vemos isso na pequena

2.2.3. Proposição: Seja S um conjunto como na definição em 2.2.2. Então, se existe s^{-1} para todo elemento $0 \neq s \in S$, esse conjunto não contém divisores de zero.

De fato: dados elementos x e y em S, satisfazendo $xy = 0$; se $x \neq 0$, como existe x^{-1}, obtemos $xy = 0 \Leftrightarrow x^{-1}(xy) = x^{-1}0 \Leftrightarrow (x^{-1}x)y = 0 \Leftrightarrow 1y = y = 0$. Caso seja $y \neq 0$, argumentamos da mesma maneira e obtemos $x = 0$.

Notemos, nesses argumentos, o uso da associatividade da multiplicação e do fato de que 0 anula todo elemento em S.

O exemplo a seguir mostra duas estratégias para resolver uma simples equação.

Exemplo 6: O único número que satisfaz a equação $(*)$: $2x = 6$ é o número 3.

De fato, além de podermos usar a existência de $2^{-1} = \frac{1}{2}$, reescrevendo $(*)$ como sendo $2x = 6 \Leftrightarrow 2(x-3) = 0$, argumentamos que, nessa equação, $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

2.2.4. Definição: *Existência de elementos nilpotentes*. Essa propriedade vale se existir elemento $0 \neq s \in S$, sendo S um conjunto não vazio, no qual estão definidas operações de adição, com elemento neutro 0, e multiplicação, e tivermos $s^k = 0$, para $0 < k \in \mathbb{Z}$.

O conjunto $\mathcal{N}(S) = \{s \in S \mid s\hat{}k = 0;\ para\ 0 < k \in Z\}$ é o conjunto dos elementos nilpotentes de S.

Claro que, se S é um conjunto como na definição em 2.2.2, os conjuntos $\mathcal{I}_{d.}(S)$ e $\mathcal{N}(S)$ são disjuntos; ou seja, temos $\mathcal{I}_{d.}(S) \cap \mathcal{N}(S) = \emptyset$.

Exemplo 7: Os itens abaixo indicam alguns elementos idempotentes e nilpotentes e os respectivos conjuntos nos quais eles estão contidos.

a) $\bar{4} \in \mathcal{I}_{d.}(\mathbb{Z}_{12})$; enquanto que $\bar{2} \in \mathcal{N}(\mathbb{Z}_8)$.

b) $\mathcal{I}_{d.}(\mathbb{Z}) = \{0,1\}$; enquanto que $\mathcal{N}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

c) $\begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}_{2x2} \in \mathcal{I}_{d.}(M_2(\mathbb{Z}_6))$; enquanto que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} \in \mathcal{N}(M_4(\mathbb{R}))$.

2.3. Herança de classes ou propriedades de conjuntos.

Este parágrafo fecha a discussão de nosso trabalho que tem como objetivo principal, também mostrar ou fazer perceber como que, em muitos casos, se entrelaçam as estruturas dos conjuntos, as características de funções e as operações definidas em conjunto.

2.3.1. Herança de classes de conjuntos.

Consideremos a classe $\mathfrak{X}$ de conjuntos e um subconjunto L de um conjunto $A \in \mathfrak{X}$. Diremos que L é um herdeiro ou não dessa classe se, e somente se, $L \in \mathfrak{X}$ ou $L \notin \mathfrak{X}$, respectivamente.

Exemplo 8: a) Toda vez que $A \in \mathfrak{F}$, todo subconjunto $L \subset A$ é tal que $L \in \mathfrak{F}$. Porém, se $A \in \mathfrak{F}^c$, podemos ter $L \subset A$, com $L \in \mathcal{F}$; ou seja, em geral, L não herda a infinitude do conjunto A.

b) Toda vez que $A \in \mathcal{E}$, todo subconjunto $L \subset A$ é tal que $L \in \mathcal{E}$. Porém, se $A \in \mathfrak{F}^c$, podemos ter $L \subset A$, com $L \in \mathcal{E}$; ou seja, em geral, L não herda a não enumerabilidade de A. Lembremos que $\mathbb{N}$ é enumerável e é subconjunto de $\mathbb{R}$, que não é enumerável.

c) Toda vez que $A \in \mathfrak{C}$, todo subconjunto $L \subset A$ é tal que $L \in \mathfrak{C}$. Porém, se $A \in \mathfrak{C}^c$, podemos ter $L \subset A$, com $L \in \mathfrak{C}$; ou seja, em geral, L não herda a não comutatividade de A. Por exemplo, $M_4(\mathbb{R}) \in \mathfrak{C}^c$ e $D_4(\mathbb{R}) \subset M_4(\mathbb{R})$ é tal que $D_4(\mathbb{R}) \in \mathfrak{C}$.

Classes de conjuntos ou propriedades de conjuntos podem, muitas vezes, significar a mesma coisa. Certamente, isso foi percebido em relação a classe $\mathfrak{C}$ dos conjuntos comutativos.

Dizemos que $A \in \mathfrak{C}$ para significar que em A está definida uma operação $*$ tal que $\forall\, x, y \in A$, vale que $x * y = y * x$.

No entanto, se A é simplesmente um conjunto, sem mais nada, em geral, propriedades de uma operação definida em A não são suficientes para garantir que $A \in \mathfrak{F}$.

A seguir, em 2.3.2, a discussão é feita olhando para os subconjuntos de um conjunto não vazio, onde operações podem ser definidas. Não existirá, portanto confusão entre classe de conjuntos e propriedades de operações definidas em conjuntos.

2.3.2. Herança de propriedades de operações definidas em conjuntos.

O que é comum nessa investigação, toda vez que consideramos um subconjunto E de um conjunto $S \neq \emptyset$, no qual está definida uma operação $*$, é saber se essa operação está definida em E.

Dado essa problemática, podemos considerar dois tipos de propriedades, uma vez que, em geral, o fechamento da operação $*$ não se verifica em E.

2.3.2.1. Definição: Diremos que p é uma *propriedade geral* (*ou global*) de uma operação $*$ *definida em um conjunto* S se, e somente se, p se verifica para todo subconjunto $E \subset S$, onde $*$ está definida. Dizemos, nesse caso, que E *herda* a propriedade p.

Exemplo 9: É fácil ver que a associatividade e a comutatividade da adição e da multiplicação são herdadas por todo subconjunto E de $\mathbb{R}$; ou seja, elas são propriedades gerais da adição e da multiplicação definidas em $\mathbb{R}$.

Isso pode ser justificado pelo menos uma vez: seja $E \subset \mathbb{R}$ e suponhamos que $a, b, c \in E$. Sabemos que $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, vale que $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$ e, mais ainda, $x + y = y + x$ e $xy = yx$. Como $a, b, c \in E \subset \mathbb{R}$, para esses "particulares" elementos em E, temos $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a(bc) = (ab)c$ e, mais ainda, $a + b = b + a$ e $ab = ba$.

2.3.2.2. Definição: Diremos que l é uma *propriedade local* de uma operação $*$ *definida em um conjunto* S se, e somente se, l se verifica para um dado $E \subsetneq S$, onde $*$ está definida, sem que essa operação se verifique em S.

Exemplo 10: Temos $D_2(\mathbb{R}) \subsetneq M_2(\mathbb{R})$ e $\forall\, D_1, D_2 \in D_2(\mathbb{R})$, vale que $D_1 D_2 = D_2 D_1$. Porém, em $M_2(\mathbb{R})$ a multiplicação não é comutativa. Então, podemos dizer que a comutatividade da multiplicação, em $M_2(\mathbb{R})$, é uma *propriedade local*.

2.3.3 Elemento neutro local, elemento neutro global e as leis do cancelamento

Apresentaremos algumas discussões sobre o elemento neutro de uma operação definida em um conjunto. Em 1.1.6, é mostrada a unicidade do elemento neutro para uma operação $*$, definida em um conjunto $A \neq \emptyset$. Mas, localmente, se B for um subconjunto próprio de A, pode ocorrer que B não herde essa propriedade, ou B possua um elemento neutro local (diferente do elemento neutro para essa operação definida em A). Vamos mostrar que as leis do cancelamento podem decidir essa questão.

2.3.3.1. Proposição: Suponha que valem as leis do cancelamento para uma operação $*$ definida em um conjunto $A \neq \emptyset$ e que ela admite existência de elemento neutro e. Então, se essa operação está definida e admite existência de elemento neutro e'em $B \subset A$, vale que $e' = e$.

Essa igualdade é de fácil verificação: $\forall\, a \in A$, vale que $a * e = e * a = a$. Além disso, $\forall\, b \in B$, vale que $b * e' = e' * b = b$. Particularmente, $\forall\, b \in B$, vale que $b * e = e * b = b$. Daí, temos $e' * b = b = e * b$. Cancelando b, obtemos $e' = e$.

A recíproca não é verdadeira. Ver Exemplo 17, capítulo 2.

Observemos que os argumentos aqui são outros, comparados à prova da unicidade do elemento neutro, como fizemos em 1.1.6.

Exemplo 11: Um subespaço W de um espaço vetorial $V(K)$ sobre um corpo K, sempre contém o vetor nulo. Então, toda subestrutura de $V(K)$ contém o elemento neutro da operação de adição que define esse espaço vetorial. Para essa operação valem as leis do cancelamento e, imitando os argumentos em 2.3.3.1, trocando A por $V(K)$, B por W e $*$ por $+$, obtemos que $0_W = 0_{V(K)}$; ou seja, todo subespaço de $V(K)$ contém o vetor nulo. Ele é o elemento neutro global com relação à operação de adição (veja os conceitos básicos da Álgebra Linear em: [4]).

Exemplo 12: No conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n, com respeito a operação de multiplicação $\cdot$, não valem as leis do cancelamento. A matriz I_n, identidade de ordem $n \times n$, é o elemento neutro global do conjunto $M_n(\mathbb{R})$: $\forall\, A \in M_n(\mathbb{R})$, vale que $AI_n = I_nA = A$.

Agora, seja $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{nxn} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subsetneq M_n(\mathbb{R})$. Temos que $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$ é o elemento neutro (local) para a operação de multiplicação definida no conjunto A.

Se valessem as leis do cancelamento isso não ocorreria, teríamos $E = I_n$, o que claramente não é verdade.

Exemplo 13: Seja $P(A)$ o conjunto das partes de um conjunto $A \neq \emptyset$. Podemos supor, nesse caso, que A possua pelo menos 3 elementos. Em $P(A)$, não valem as leis do cancelamento em relação às operações de união e interseção.

a) Com relação à operação $\cup$, definida em $P(A)$, $\emptyset$ é o elemento neutro. E, se $B \subsetneq A$, temos $P(B) \subsetneq P(A)$, a operação $\cup$ está bem definida e $\emptyset$ é o elemento neutro para essa operação definida em $P(B)$.

Nesse caso, $\emptyset$ é elemento neutro global com relação a união definida em $P(A)$.

b) Com relação à operação $\cap$, definida em $P(A)$, A é o elemento neutro. E, se $B \subsetneq A$, temos $P(B) \subsetneq P(A)$, a operação $\cap$ está bem definida e B é o elemento neutro para essa operação definida em $P(B)$.

Nesse caso, a operação interseção está definida em $P(B)$ e B é o elemento neutro para cada $B \subsetneq A$. Então, podemos pensar em uma cadeia $\mathcal{F} = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\}$ de subconjuntos de A, como definida em 1.1.15.3. É fácil imaginar que daí decorre uma cadeia

$$P(Y_1) \subset P(Y_2) \subset \cdots \subset P(Y_m) \subset P(A),$$

onde $\cap$ está definida em cada termo $P(Y_i)$; para $i = 1,2, \cdots, m$, que tem como elemento neutro os respectivos membros de $\mathcal{F}$. Isso mostra que toda cadeia em A é, de certa forma, uma cadeia de elementos neutros.

2.3.4. Propriedades herdadas por um conjunto de funções

Em 1.2.5, temos uma boa estratégia de construirmos uma estrutura em um conjunto de funções. Provavelmente, já é conhecido, dos cursos intermediários, o caso particular quando o domínio e contradomínio das funções é o conjunto dos números.

Que propriedades se transferem para as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função}\}$, dadas as propriedades que valem para a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$?

Como, por definição, os domínios e contradomínios das funções soma e produto são iguais a $\mathbb{R}$, basta olharmos para as leis de formação das funções que queremos verificar se são iguais; conforme sugerimos na

2.3.4.1. Proposição: A operações de adição e multiplicação induzidas do conjunto $\mathbb{R}$ para o conjunto $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função}\}$ *herdam* as seguintes propriedades: $\forall\, f, g, h \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$;

a) $f + (g + h) = (f + g) + h$ e $f(gh) = (fg)h$.

b) $f + g = g + f$ e $fg = gf$.

c) as funções a seguir são, respectivamente, o elemento neutro da adição e da multiplicação em $\mathbb{F}(\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned} o: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\leadsto o(x) = 0 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} 1: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\leadsto 1(x) = 1. \end{aligned}$$

d) $\exists -f \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$; tal que $-f + f = f + (-f) = 0$.

e) $f(g + h) = fg + fh$.

Por exemplo, no último item, uma justificativa para essa igualdade pode ser feita da seguinte maneira: $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $\big(f(g + h)\big)(x) = f(x)(g + h)(x) = f(x)\big(g(x) + h(x)\big) = f(x)g(x) + f(x)h(x) = (fg)(x) + (fh)(x) = (fg + fh)(x)$. Daí, temos a igualdade $f(g + h) = fg + fh$.

Exemplo 14: A propriedade de existência de inverso multiplicativo para cada elemento não nulo e de não existir divisores de zero, *não são herdadas* de $\mathbb{R}$.

Além disso, as leis do cancelamento que valem (quase sempre) para a multiplicação em $\mathbb{R}$, não se verificam para a multiplicação em $\mathbb{F}(\mathbb{R})$.

A função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\leadsto f(x) = senx \end{aligned}$$

não possui inverso multiplicativo

As funções

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \text{e} \qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x < 0 \\ x, \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad x \rightsquigarrow g(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } x < 0 \\ 0, \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

são tais que $f \neq o$, $g \neq o$; porém, vale que $fg = o$. Temos que $(fg)(x) = 0x^2 = 0$, se $x < 0$ ou $(fg)(x) = x0 = 0$, se $x \geq 0$.

Vamos considerar um conjunto $A \neq \emptyset$. Em $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$, (ver exemplo 11 do capítulo 1) estão definidas as operações $\cup$ e $\cap$. Conforme definição em 1.2.5, podemos considerar o conjunto de funções, $\mathbb{F}(P(A)) = \{f: P(A) \longrightarrow P(A) \mid f$ é uma função$\}$.

Podemos definir, e isso é natural, $\forall\, f, g \in \mathbb{F}(P(A))$,

$$f \cup g: P(A) \longrightarrow P(A)$$
$$X \rightsquigarrow (f \cup g)(X) = f(X) \cup g(X)$$

Também, $\forall\, f, g \in \mathbb{F}(P(A))$,

$$f \cap g: P(A) \longrightarrow P(A)$$
$$X \rightsquigarrow (f \cap g)(X) = f(X) \cap g(X).$$

2.3.4.2. Proposição: A união e a interseção induzidas de $P(A)$ para o conjunto $\mathbb{F}(P(A)) = \{f: P(A) \longrightarrow P(A) \mid f$ é uma função$\}$ *herdam* as seguintes propriedades: $\forall\, f, g, h \in \mathbb{F}(P(A))$; valem que

a) $f \cup (g \cup h) = (f \cup g) \cup h$ e $f \cap (g \cap h) = (f \cap g) \cap h$.

b) $f \cup g = g \cup f$ e $f \cap g = g \cap f$.

c) as funções a seguir são, respectivamente, o elemento neutro da união e da interseção em $\mathbb{F}(P(A))$;

$$\mathcal{O}: P(A) \longrightarrow P(A) \qquad\qquad \text{e} \qquad \mathrm{I}: P(A) \longrightarrow P(A)$$
$$X \rightsquigarrow \mathcal{O}(X) = \emptyset \qquad\qquad X \rightsquigarrow \mathrm{I}(X) = A,$$

d) $f \cap (g \cup h) = (f \cap g) \cup (f \cap h)$.

e) $f \cup (g \cap h) = (f \cup g) \cap (f \cup h)$.

No item b), uma justificativa para essa igualdade pode ser feita da seguinte maneira: vale que $(f \cup g)(X) = f(X) \cup g(X) = g(X) \cup f(X) = (g \cup f)(X)$ e

$(f \cap g)(X) = f(X) \cap g(X) = g(X) \cap f(X) = (g \cap f)(X)$, $\forall\, X \in P(A)$. Claro, usamos as propriedades da comutatividade listadas em 1.1.13.2 e 1.1.13.4.

Os itens d) e e), decorrem diretamente de 1.1.13.5 e 1.1.13.6: se $X \in P(A)$, temos, $(f \cap (g \cup h))(X) = f(X) \cap (g \cup h)(X) = f(X) \cap \big(g(X) \cup h(X)\big)$. Usando a prposição 1.1.13.5, temos que $(f \cap (g \cup h))(X) = \big(f(X) \cap g(X)\big) \cup \big(f(X) \cap h(X)\big) = (f \cap g)(X) \cup (f \cap h)(X) = ((f \cap g) \cup (f \cap h))(X)$. Isso mostra a igualdade $f \cap (g \cup h) = (f \cap g) \cup (f \cap h)$. Argumentos análogos dão a validade de $f \cup (g \cap h) = (f \cup g) \cap (f \cup h)$.

O resultado que vimos em 1.1.14, com relação às operações de união e interseção, definidas em $P(A)$, também valem com relação às operações de união e interseção induzidas em $\mathbb{F}(P(A))$. Vejamos a

2.3.4.3. Proposição: Se $f, g, h \in \mathbb{F}\big(P(A)\big)$; então $f \cup g = f \cup h$ e $f \cap g = f \cap h$ se, e somente se, vale a igualdade $g = h$.

Em um sentido, o resultado é claro: se vale a igualdade $g = h$ é fácil concluir que $f \cup g = f \cup h$ e $f \cap g = f \cap h$.

Agora, $\forall\, X \in P(A)$, vamos mostrar que $g(X) = h(X)$ e terminamos!

De fato, $\forall\, X \in P(A)$, por hipótese vale que $(f \cup g)(X) = (f \cup h)(X)$ e $(f \cap g)(X) = (f \cap h)(X)$. Por definição de união e interseção de funções vale que $f(X) \cup g(X) = f(X) \cup h(X)$ e $f(X) \cap g(X) = f(X) \cap h(X)$, como $f(X), g(X)$ e $h(X)$, são conjuntos, pela proposição 1.1.14, temos que $g(X) = h(X)$.

Dentro do conjunto $\mathbb{F}(A) = \{f: A \to A \mid f \text{ é uma função}\}$, podemos, como em 2.3.2, verificar a possível herança de propriedades de uma operação. Isso pode ser feito sem levar em conta que essa operação seja induzida por uma operação definida em A.

Exemplo 15: Consideremos as operações de adição e multiplicação definidas em $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função}\}$; reveja 1.2.5.

O conjunto $\wp(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{é uma função par}\}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ onde as operações de adição e multiplicação citadas acima estão definidas: se $f, g \in \wp(\mathbb{R})$, temos que $(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x) = f(-x) \oplus g(-x) = (f \oplus g)(-x)$ e $(f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x) = f(-x) \odot g(-x) = (f \odot g)(-x)$; $x \in \mathbb{R}$.

O conjunto $\Im(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f$ é uma função ímpar$\}$ é um subconjunto próprio de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ onde a operação de adição citada acima está definida (pense nisso!). Que o produto de funções ímpares, em geral, não é uma função ímpar, é claro.

Agora, é fácil relacionar que propriedades da adição $\oplus$ e da multiplicação $\odot$ são herdadas por $\wp(\mathbb{R})$ e que propriedades da adição $\oplus$ são herdadas por $\Im(\mathbb{R})$.

A validade do item d), da proposição 2.3.4.1, garante que valem as leis do cancelamento para a adição $\oplus$ em $\mathbb{F}(\mathbb{R})$. Isso se transfere para a adição em $\wp(\mathbb{R})$? E para a adição em $\Im(\mathbb{R})$? As respostas são sim, caso o inverso aditivo de uma função par seja uma função par e o inverso aditivo de uma função ímpar, seja uma função ímpar. Isso também é verdade!

Como a função

$$\begin{aligned} o&: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow o(x) = 0 \end{aligned}$$

pertence ao conjunto $\wp(\mathbb{R}) \cap \Im(\mathbb{R})$, diremos que $\wp(\mathbb{R})$ e $\Im(\mathbb{R})$ herdam o elemento neutro da adição definida em $\mathbb{F}(\mathbb{R})$.

Exemplo 16: Consideremos o conjunto $\mathrm{P}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0, \text{se } x \geq 0\}$. É fácil ver que ele é fechado para a operação de multiplicação $\odot$.

Claramente, a função

$$\begin{aligned} 1 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow 1\,(x) = 1 \end{aligned}$$

não é um elemento de $\mathrm{P}(\mathbb{R})$; já que $1\,(7) = 1 \neq 0$. Então, $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ não herda o elemento neutro da multiplicação definida em $\mathbb{F}(\mathbb{R})$. Mas, $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ contém a função

$$\begin{aligned} \mathbb{I}&: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \mathbb{I}(x) = \begin{cases} 1; & \text{se } x < 0 \\ 0; & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e mais, para $f \in \mathrm{P}(\mathbb{R})$, vale que $(f \odot \mathbb{I})(x) = \begin{cases} f(x) \odot \mathbb{I}(x) = f(x) \odot 1 = f(x); & \text{se } x < 0 \\ 0; \;\text{se } x \geq 0 \end{cases}$

e $(\mathbb{I} \odot f)(x) = \begin{cases} \mathbb{I}(x) \odot f(x) = 1 \odot f(x) = f(x); & \text{se } x < 0 \\ 0; \;\text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Isso mostra que $f \odot \mathbb{I} = \mathbb{I} \odot f = f$ e $\mathbb{I}$ é um elemento neutro local para a multiplicação em $\mathrm{P}(\mathbb{R})$.

No conjunto $\mathrm{P}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0, \text{se } x \geq 0\}$, é fácil verificarmos, que não valem as leis do cancelamento com respeito à operação $\odot$.

Exemplo 17: (Reveja as definições em 1.2.3, 1.2.4.1 e os exemplos 14 e 15 também do capítulo 1) A composição de funções "$\circ$" está bem definida em $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ e, como vimos,

$$\begin{aligned} i_{\mathbb{R}}&: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow i_{\mathbb{R}}(x) = x \end{aligned}$$

é o elemento neutro global, com respeita a essa operação.

Note, ainda, que as leis do cancelamento não se verificam. Para quaisquer funções $f, g \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, escolhendo a função

$$\begin{aligned} h&: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow h(x) = c; \text{com } c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

vale que $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x); \forall\, x \in \mathbb{R}$, mesmo que tenhamos $g(x) \neq h(x)$. Isso mostra que não vale o cancelamento à esquerda. Argumentos parecidos mostram que também não vale o cancelamento à direita.

Encerramos as discussões deste capítulo com o exemplo 17 acima. Acreditamos que a ideia de herança de propriedades, de uma operação definida em um conjunto $A \neq \emptyset$, tenha sido passada de maneira que o leitor possa estar mais seguro ao argumentar com temas relacionados com as estruturas mínimas de um conjunto. Que também, as funções que agem sobre essas estruturas recebem uma influência direta dessa álgebra, ao passo que, também, determina alguns resultados que podem ser observáveis no nível do estudo que desenvolvemos.

Considerações finais

Acreditamos que este trabalho trouxe exemplos, definições e proposições interessantes de como certas propriedades de um conjunto $A \neq \emptyset$ podem ser observadas como heranças para seus subconjuntos próprios.

É claro que as ideias descritas aqui deixam dicas para que o leitor entenda que outras "heranças" podem ser observadas e para ele registre comparações entre determinadas estruturas de conjuntos, muitas vezes um construído a partir do(s) outro(s).

A não existência de divisores de zero em $\mathbb{Z}$, não pode ser observada em $\mathbb{Z}_n$, desde que $2 < n$ seja um número par. Então, o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação $\equiv$ (mod n), pode ser visto como um conjunto que "perdeu" uma importante propriedade (veja o exemplo 7, no capítulo 1).

Supondo que um conjunto $\emptyset \neq A \in \mathfrak{X}$ e que um conjunto $B \neq \emptyset \in \mathfrak{Y}$, o conjunto $A \times B$, produto cartesiano de A por B, nessa ordem, além de conter uma cópia de A e de B, "herda", em cada uma dessas componentes, as propriedades de A e de B, respectivamente, podendo transferir para $A \times B$ uma determinada propriedade. Por exemplo, o conjunto $M_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_4$ tem como elemento neutro da "adição", definida pela soma coordenada a coordenada, a dupla $\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x2}, \bar{0}\right)$, isso porque $M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{Z}_4$ possuem, com relação às respectivas operações de adição, elemento neutro.

Existência de cadeias em um conjunto $A \neq \emptyset$, induz existência de cadeias em $P(A)$, cadeias que podemos dizer, especiais (veja o Item b), no exemplo 13, no capítulo 2).

Perguntamos: É possível, a partir de $P(A)$, portanto, a partir de $A \neq \emptyset$, induzir cadeias em $\mathbb{F}(P(A))$?

Certamente, depois de definir $f \cup g$ e $f \cap g$, conforme a definição em 1.2.5, você pode tentar responder essa pergunta definindo algum tipo de inclusão $f \subset g$.

Perguntamos: Sendo $\emptyset \neq A \in \mathfrak{X}$, é possível estabelecer para subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{F}(P(A))$ que $\mathcal{A} \in \mathfrak{X}$?

Por exemplo, se A é enumerável, então podemos definir para $f \in \mathbb{F}(P(A))$ que f é uma função enumerável? Se $f, g \in \mathbb{F}(P(A))$ são enumeráveis, então $f \cup g$ é enumerável?

Que questões mais podem ser levantadas sobre esse assunto? Certamente a experiência do leitor fará com que ele avance nessas questões e suas respostas darão mais sentido à possível aceitação de nosso trabalho e valorização de nosso estudo.

Referências Bibliográficas

[1] Bezerra, Marcos V. A.; Funções Pares e Ímpares (Generalização de Conceitos); TCC - PROFMAT (Mestrado em Mestrado em Rede Nacional em Matemática); SBM; 2016;

[2] Domingues, Hygino H. e Iezzi, Gelson. Álgebra Moderna; 4ª Edição; Ed. Atual; 2003.

[3] Gonçalves, A.; Introdução à álgebra; Projeto Euclides; IMPA; Rio de Janeiro; 2001.

[4] GONÇALVES, Adilson e SOUZA, Rita M.L de. Introdução à Álgebra linear. Ed. Bücher LTDA, São Paulo, 1977.

[5] Hefez, Abramo. Curso de álgebra vol. 1; IMPA; Rio de Janeiro; 2016.

[6] Lima, Elon Lages; Análise Real Vol. 1; 8ª edição; IMPA; Rio de Janeiro; 2006.