Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

KÍSSIA FERREIRA

VETORES E MATRIZES NO ENSINO MÉDIO COM O USO DE MATERIAL CONCRETO

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
Maio/2023

Kíssia Ferreira

Vetores e Matrizes no Ensino Médio com o uso de Material Concreto

Dissertação apresentada por **Kíssia Ferreira** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a Obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Niterói
2023

F383v Ferreira, Kíssia.
Vetores e Matrizes no Ensino Médio com o uso de Material Concreto / Kíssia Ferreira. - 2023.
75 f.: il

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2023.

1. Matriz. 2. Material Concreto. 3.Vetor. 4. BNCC. 5. Produção intelectual. I. Martelo, Mitchael Alfonso Plaza, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD: XXX

Kíssia Ferreira

Vetores e Matrizes no Ensino Médio com o uso de Material Concreto

Dissertação apresentada por **Kíssia Ferreira** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.
Linha de Pesquisa: Álgebra Linear, Educação Matemática.

Banca Examinadora

Aprovada em:

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Andrés Maurício López Barragan
Doutor - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Profaª. Miriam del Milagro Abdon
Doutora - Universidade Federal Fluminense

Prof. Omar Javier Solano Albornoz
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Niterói
2023

DEDICATÓRIAS

Dedico este trabalho ao meu filho, Adriano Expedito e à minha mãe, Luzia.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao meu filho Adriano Expedito, que me fortalece e me motiva a cada dia.

A minha mãe Luzia, por todo apoio e paciência.

Ao meu namorado, Adney, por todo companheirismo, por não me deixar desanimar na reta final e colaborar com a confecção do material.

Ao meu professor orientador Mitchael, primeiramente por aceitar o meu convite e também pela paciência, dedicação e apoio.

A todos os professores do PROFMAT.

Aos meus colegas de turma, em especial Clarissa, Carlos Henrique e Luiz Felipe pelas trocas de experiência e amizade construída.

Aos amigos que colaboraram com doação de caixinhas para confecção do material.

Aos colegas de trabalho do Colégio Estadual Raul Vidal e do Colégio Lazares, por todo incentivo.

Aos meus eternos alunos Guilherme Bandeira e Victor Hugo Lazarini que contribuíram indiretamente com esse trabalho.

E aos meus alunos da terceira e segunda séries do Colégio Lazares por toda palavra positiva e por acreditarem no sucesso de sua professora.

RESUMO

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma sequência didática referente ao ensino de matrizes para o Ensino Médio, iniciando com um breve histórico sobre surgimento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e apresentação das competências e habilidades da Área de Matemática e suas Tecnologias, seguindo para análise de alguns livros didáticos destinados às escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro, com relação ao ensino de matrizes e, as competências e habilidades associadas a esta aprendizagem. Adentrando à teoria, expomos sobre matrizes, definições, operações e matrizes especiais e, concluímos a parte teórica com determinantes, ambos os assuntos com abordagem vetorial. Ao longo do texto será tratada a importância do uso do material concreto no ensino e, com essa metodologia juntamente com a motivação da Copa do Mundo de futebol masculino realizada no Catar no ano de 2022, são propostas atividades com materiais confeccionados, para definir matriz e suas operações.

Palavras-chave: Matriz , Material Concreto, BNCC, Ensino Público, Copa do Mundo.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present a didactic sequence related to the teaching of matrices for High School, starting with a brief history about the incorporated National Common Curricular Base (BNCC*) and presentation of the competences and abilities of the Area of Mathematics and its Technologies, following for analysis of some textbooks intended for public schools in the State of Rio de Janeiro, regarding the teaching of matrices and the skills and abilities associated with this learning. Moving on to the theory, we expose on matrices, definitions, operations and special matrices, and we conclude the theoretical part with determinants, both subjects with a vectorial approach. Throughout the text, the importance of using concrete material in teaching will be addressed and, with this methodology together with the motivation of the men's soccer World Cup held in Qatar in the year 2022, activities are proposed with materials made, to define matrix and its operations. .

Keywords: Matrix, Concrete Material, BNCC*, Public Education, World Cup.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

De um modo geral, o ensino de matriz é associado à determinantes e sistemas lineares e tradicionalmente os livos didáticos adotados nas escolas públicas e privadas utilizam matriz como pré-requisito para introdução dos outros dois assuntos. O desenvolvimento deste trabalho transcorreu a partir dos seguintes tópicos: surgimento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), análise de livros didáticos com relação aos conceitos ditos anteriormente, introdução do conceito de matriz e determinantes, e proposta de atividade sobre operações de matrizes com uso de material concreto.

Iniciaremos portanto, o capítulo 2, discutindo a implementação da BNCC. Neste capítulo será possível compreender como surgiu essa base e qual o propósito da sua criação. Recordamos que a elaboração de uma base nacional comum não é algo tão recente como muitos imaginam, essa prospota está embasada no Artigo 210 da Constituição de 1988 e no Artigo 26 da Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). Em uma exibição cronológica, o capítulo inicia com a ideia de uma unificação curricular proposta pelo governo em 2014. Em seguida apresentaremos a versão de 2016 e a versão final de 2017. Com um destaque para a parte do Ensino Médio que apenas foi homologada em 2018. Segundo [5], a BNCC possui uma sequência de aprendizagem organizada por códigos, conforme o exemplo abaixo:

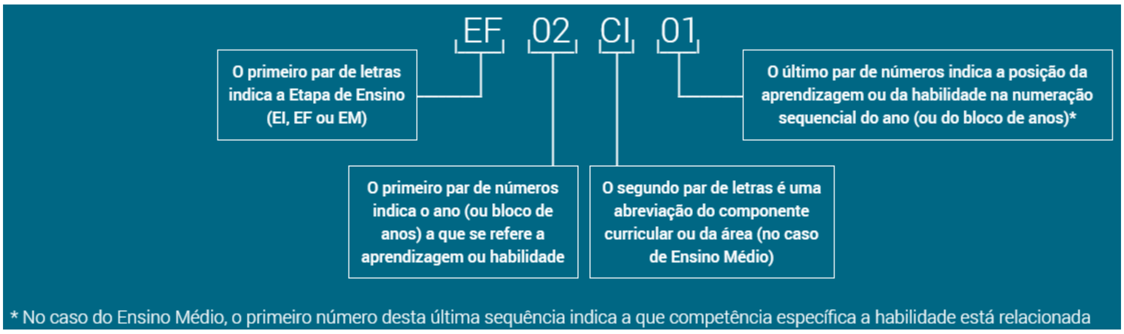


Figura 1.1: Exemplo de código da BNCC.

Como este trabalho aborda um tema do Ensino Médio, destacamos que esta etapa da aprendizagem tem por objetivo elevar a qualidade do ensino e formar cidadãos aptos a lidar com as exigências da vida pessoal e futura vida profissional. Mas, observando esta etapa até o final de 2021, o ensino não estava adequado para suprir as necessidades e cobiças dos jovens estudantes. Pensando então nessa evolução, acredita-se que a BNCC contribuirá com o seu desenvolvimento e maturidade para entrar no mercado de trabalho.

O capítulo 3 trata de um levantamento de cinco coleções com seis livros didáticos, oferecidos à rede estadual do Rio de Janeiro. Essas coleções chegaram às escolas no segundo semestre de 2021 para análise e escolha dos docentes e, diferente dos livros utilizados até aquele ano, as coleções não foram organizadas por série escolar mas sim por assuntos. O levantamento se apoiou em analisar quais habilidades e competências o autor diz abordar e comparar como matriz é apresentada a partir dos conceitos que estão embutidos em seu ensino .

Seguindo o capítulo 4 com o conceito de matriz, optamos por trazer o máximo de informações possíveis para engrandecer a base matricial junto ao que tipicamente é apresentado aos alunos. Para uma melhor complementação teórica, faremos um paralelo dos conceitos estudados no Ensino Médio com uma aplicação vetorial, desde a representação de vetores linha e coluna, passando pelas operações e finalizando com o estudo de determinante de uma matriz. Com relação ao determinante, apresentaremos o caso 2×2 a partir da área do paralelogramo envolvendo produto vetorial (por consequência, área do triângulo) e o caso 3×3 com base no volume do paralelepípedo envolvendo produto misto.

Em busca de interesse e motivação por parte dos alunos, o capítulo 5 foi desenvolvido pensando especialmente em alunos de escolas públicas onde a maior parte é de baixa renda, ou seja, alunos que possuem dificuldades de acesso à informação e tecnologia. Assim como propõe a BNCC, acreditamos que utilizar recursos tecnológicos como softwares, aplicativos, mídias, faz com que o aluno se torne mais engajado às necessidades atuais. Em contra partida, na prática não é algo tão simples de introduzir.

Portanto, ao compreender a dificuldade não só do aluno, mas da turma em que está inserido, cabe ao professor encontrar meios de tornar a aula mais atrativa e cativante, contudo sem esquecer o objetivo principal da atividade: fazer com que o aluno aprenda e evolua. Pensando nisso, desenvolvemos aqui atividades para aprendizagens do conceito de matriz e suas operações (adição, subtração e multiplicação de matrizes) com uso de material concreto confeccionado a partir de caixas de leite fermentado, folha A4, cartolina, palito de dente, fita dupla face e fita adesiva. Como tema motivacional para elaboração da sequência didática, utilizamos a Copa do Mundo de 2022 realizada no Catar. Acreditamos que a abordagem de um assunto de interesse mundial, faz com que o aluno sinta-se mais incluído na sociedade a ponto de comentar, argumentar, debater diferentes tipos pensamentos e logicamente concluir com sucesso a atividade proposta e, ter assim, um melhor conhecimento sobre matriz.

Capítulo 2

A implementação da BNCC

No ano de 2014 iniciou-se uma discussão governamental a respeito de um currículo unificado para escolas públicas e privadas no Brasil. Esse currículo foi intitulado Base Nacional Comum Curricular, com BNC como abreviatura primitiva. Logo no ano seguinte foi apresentado ao público a sua primeira versão, com uma estrutura inovadora subdividida em áreas: Área de Linguagens (componentes curriculares de língua portuguesa, língua estrangeira moderna, arte e educação física); Área de Matemática; Área de Ciências da Natureza (componentes curriculares de ciências, biologia, física e química) e Área de Ciências Humanas (componentes curriculares de história, geografia, ensino religioso, filosofia e sociologia). No que diz respeito ao ensino de Matemática, este currículo apresenta os conceitos divididos em cinco eixos: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções.

Em sequência, no ano de 2016, foi publicada a segunda versão e o novo currículo recebe a abreviatura conhecida atualmente, BNCC, na qual nele se mantém a divisão por áreas de conhecimento. Segundo essa versão, a BNCC tem como finalidade "orientar os sistemas na elaboração de suas propostas curriculares" e como fundamento "o direito à aprendizagem e ao desenvolvimento". Assim como a primeira, esta traz alguns conceitos matemáticos ligados aos eixos de aprendizagem que melhor se enquadram, porém a apresentação dos eixos no Ensino Médio na edição inicial aborda os conceitos separadamente para primeira, segunda e terceira séries, enquanto na edição de 2016, de acordo com [3] os eixos passam a ser generalizados, isto é, não há separação por fase escolar.

A terceira e última versão, foi homologada em dezembro de 2017, contudo a referência do Ensino Médio somente foi entregue ao Conselho Nacional de Educação (CNE) em abril de 2018. De modo similar à anterior, as áreas não são relacionadas às fases escolares, elas foram organizadas em competências gerais e específicas que indicam quais habilidades o aluno será capaz de desenvolver frente a esse conhecimento que irá adquirir. Sobre a Área de Matemática (a partir desse instante renomeada por Matemática e suas Tecnologias) na etapa do Ensino Médio, a BNCC entende que cabe ao aluno não apenas resolver problemas, mas também criá-los a partir de conceitos, estratégias e procedimentos desenvolvidos no Ensino Fundamental. Além disso, para tal resolução e criação, o aluno deverá ser capaz de "descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área".

A BNCC está estruturada da seguinte maneira:

- Textos introdutórios (geral, por etapa e por área);
- Competências gerais que os alunos devem desenvolver ao longo de todas as etapas da Educação Básica;
- Competências específicas de cada área do conhecimento e dos componentes curriculares;
- Direitos de Aprendizagem ou Habilidades relativas à diversos objetos de conhecimento (conteúdos, conceitos e processos) que os alunos devem desenvolver da Educação Infantil ao Ensino Médio.

2.1 Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio

Como dito anteriormente, o ensino de Matemática foi dividido em cinco eixos, contudo em 2018 foram excluídos os termos "Operações"e "Funções", ficando então do seguinte modo: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Álgebra. Esses eixos são abordados e desenvolvidos gradativamente no Ensino Fundamental e, ao chegar no Ensino Médio, a vivência cotidiana do aluno é levada em consideração buscando uma continuidade do aprendizado adquirido na base do Ensino Fundamental. Vale ressaltar que a BNCC tem como objetivo unificar o modelo de educação, portanto ao tratar do cotidiano do aluno deve-se observar com cautela a realidade em que ele vive: as condições socioeconômicas, o avanço tecnológico em seu entorno, dentre outros.

Nos tópicos abaixo será possível compreender o que cada unidade de conhecimento apresenta como essência no ensino:

1. **Geometria**: Neste eixo, o pensamento geométrico é desenvolvido de modo que o aluno fique habilitado para uma boa interpretação, localização de pontos e deslocamento de uma figura plana no eixo cartesiano. Além do mais, é possível adentrar nos conceitos de semelhança e congruência.
2. **Grandezas e Medidas**: Neste momento, o aluno lida com medições e conversões de unidades na aplicação de expressões relacionadas ao estudo de áreas e volumes. O aluno será capaz de desenvolver o pensamento proporcional aprendendo a identificar o comportamento de grandezas perante as suas variações e situações-problema que abordam a representação no sistema de coordenadas cartesianas.
3. **Estatística e Probabilidade**: O primeiro contato do aluno com esse eixo no Ensino Fundamental discorre do estudo da Probabilidade, a partir da árvore de possibilidades e princípio multiplicativo para uma primeira estimativa da chance de ocorrer um evento. Simultaneamente, a Estatística traz a oportunidade de uma organização, levantamento de dados em uma pesquisa amostral, compreensão das medidas de tendência central para finalmente exibição dos resultados através de gráficos e relatórios. Visando um crescimento nesse estudo, o aluno é instigado ao uso tecnológico por meio de planilhas eletrônicas e, ao ingressar no Ensino Médio, o pensamento computacional torna-se algo motivador com elaboração de algoritmos e fluxogramas.

4. **Números**: O aluno é capaz de desenvolver o pensamento numérico compreendendo amplamente o significados das operações. A base de aprendizagem é a resolução de problemas utilizando os conjuntos numéricos, em diferentes cenários.

5. **Álgebra**: Ao longo do Ensino Médio, o aluno tem que interpretar questões que o levam a reconhecer grandezas e identificar a relação entre elas. Para o bom desenvolvimento desse eixo, a BNCC enfatiza o desenvolvimento do pensamento algébrico. Pensamento este, também utilizado na resolução de equações e inequações em situações-problema.

A partir da aprendizagem no Ensino Fundamental, o Ensino Médio sintetiza os eixos através de situações-problema reais à vida do aluno de modo que este venha a evoluir como estudante e como cidadão. A BNCC no Ensino Médio traz como diferencial a ênfase no poder de criação, onde tal criação pode ser tanto de elaboração de problemas contextualizados como exercícios técnicos focados em teoremas e propriedades com aplicações aritméticas e algébricas.

Na Área de Matemática e suas Tecnologias são designadas competências específicas e habilidades que o aluno deve alcançar em seu aprendizado. As habilidades engrandecem o aluno no que diz respeito ao letramento matemático, pois ele irá aprofundar seu conhecimento do Ensino Fundamental. Segundo [4]:

> o letramento matemático está assim definido: competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. O letramento deve também assegurar que todos os estudantes reconheçam que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo e para que também percebam o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e que pode também ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p.522)

As habilidades atribuídas ao Ensino Médio devem ser aplicadas ainda que o aluno não venha a desenvolver de maneira esperada os conceitos do Ensino Fundamental. Mesmo com essa possível defasagem, o aluno é capaz de evoluir.

2.2 As Competências específicas e Habilidades matemáticas do Ensino Médio

A divisão curricular para ensino de Matemática foi estrategicamente dividida em cinco competências específicas, onde cada uma apresenta um aglomerado de habilidades a serem desenvolvidas. O principal destaque desse modelo é a não formulação a partir de conteúdos organizados por períodos (bimestre, trimestre). Portanto, buscando uma melhor compreensão da nova proposta, abaixo é possível conhecer e entender a organização das competências e suas habilidades de acordo com [4].

- **Competência específica 1 (E1)**: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
  - **(EM13MAT101)** Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
  - **(EM13MAT102)** Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
  - **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.
  - **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.
  - **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.
- **Competência específica 2 (E2)**: Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
  - **(EM13MAT201)** Propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes dentre outras, envolvendo cálculos das medidas de área, de volume, de capacidade ou de massa, adequados às demandas da região.
  - **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão.
  - **(EM13MAT203)** Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.
- **Competência específica 3 (E3)**: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos: Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas,

Geometria, Probabilidade e Estatística, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

- **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.
- **(EM13MAT302)** Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.
- **(EM13MAT303)** Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.
- **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
- **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, PH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
- **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
- **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes, etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT308)** Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.
- **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.
- **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.
- **(EM13MAT311)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

- **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- **(EM13MAT313)** Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação científica.
- **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica, etc.
- **(EM13MAT315)** Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.
- **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

• **Competência específica 4 (E4)**: Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

- **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- **(EM13MAT403)** Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.
- **(EM13MAT404)** Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT405)** Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás, etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento.
- **(EM13MAT406)** Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

- **(EM13MAT407)** Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas.
- **(EM13MAT408)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
- **(EM13MAT409)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (box-plot), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

- **Competência específica 5 (E5)**: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

  - **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
  - **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y $= ax^2$.
  - **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática Financeira ou da Cinemática, entre outros.
  - **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
  - **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.
  - **(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
  - **(EM13MAT507)** Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
  - **(EM13MAT508)** Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
  - **(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

- **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
- **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.
- **(EM13MAT512)** Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos.

O capítulo seguinte trará uma breve análise de alguns materiais didáticos fornecidos aos docentes da rede estadual do Rio de Janeiro para avaliação e escolha da coleção a ser trabalhada em sua escola. A análise é referente às competências e habilidades que cada livro aborda referente à matriz.

Capítulo 3

A BNCC nos livros didáticos

Em 2021 as escolas estaduais do Rio de Janeiro receberam coleções onde os conteúdos foram reorganizados de modo a contemplar algumas habilidades apresentadas em [4]. Segundo [5], o Ensino Médio diurno sofreu uma alteração de 2400 horas para 3000 horas, de modo que 1800 horas são referentes às habilidades e 1200 aos itinerários formativos. Para uma melhor compreensão dos itinerários formativos, leia [4] e [6].

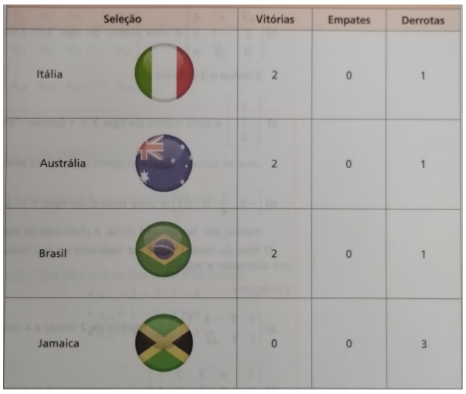
A principal proposta desse trabalho é apresentar uma sequência didática sobre o conceito de matriz, portanto é preciso compreender como este conceito é explorado na BNCC, isto é, quais competências e habilidades os autores do novo modelo de material julgam necessárias para esse aprendizado. Vale destacar que visando um modelo currícular único, os docentes da rede estadual receberam da Secretaria de Educação um formulário a ser preenchido no mês de julho de 2022 sobre em qual bimestre acham mais coerente que certa habilidade seja aplicada. A partir dessa visão, define-se quais conteúdos se aplicam a essas habilidades.

Este capítulo apresentará uma breve análise entre cinco coleções do PNLD (Programa Nacional do Livro e do Material Didático) 2021, ofertadas ao Estado do Rio de Janeiro para o ensino público, na forma como cada uma apresenta matriz e determinante, isso juntamente às competências específicas e habilidades que cada autor destacou.

As coleções serão apresentadas em ordem alfabética e, três delas fazem menção à Área de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias, que deixa claro a importância da interdisciplinaridade em sala de aula.

3.1 Coleção Conexões. Matemática e suas tecnologias: matrizes e geometria analítica

O livro inicia com o capítulo "Matriz e Determinantes" com uma referência ao futebol feminino brasileiro, onde após o texto base sobre a Copa do Mundo de 2019 é exibido uma tabela do Grupo C, o qual o Brasil fez parte naquele ano. As linhas informam as seleções daquele grupo e as colunas o número de vitórias, empates e derrotas, respectivamente.



Seleção	Vitórias	Empates	Derrotas
Itália	2	0	1
Austrália	2	0	1
Brasil	2	0	1
Jamaica	0	0	3

Figura 3.1: Grupo C - Copa do mundo de futebol feminino 2019.

Esta coleção atribui como casos especiais as matrizes quadrada, nula e identidade. Já na próxima seção as operações e suas respectivas propriedades são introduzidas de forma contextualizada. Inicialmente, adição e subtração trazem como assunto base um curso de idiomas, a saber "O dono de uma rede de escolas de idiomas fez um levantamento para saber a quantidade total de alunos matriculados nos meses de março e abril de 2020" para apresentar adição e, buscando comparar a quantidade de matriculados nos meses mencionados o autor traz a noção da subtração. Ambas as operações são trabalhadas em forma de tabela, posteriormente em forma matricial.

Multiplicação por um número real é abordada de forma teórica, enquanto multiplicação de matrizes traz um assunto bem importante para a sociedade: reciclagem. A partir de duas tabelas a multiplicação é introduzida segundo a quantidade de materiais reciclados (em toneladas) e o preço por tonelada de cada material.

Determinante de uma matriz (aqui de ordens 2 e 3) é conceituado de modo técnico, isto é, a partir da definição que o determinante de uma matriz é um número real associado a ela. Porém uma das principais características da BNCC é observada nesse livro: o uso da tecnologia no ensino. Há uma seção exclusiva para uso de planilhas eletrônicas no cálculo do produto de matrizes e cálculo de determinantes.

As competências específicas e habilidades atribuídas a este capítulo são competências 1, 2, 3 e 4, dando um destaque para a habilidade EM13MAT315. Com exceção dessa habilidade, os exercícios aplicados com relação aos tópicos mencionados acima não fazem jus ao que a coleção diz abordar da BNCC.

3.2 Coleção Diálogo. Matemática e suas tecnologias: geometria analítica, sistemas e transformações geométricas

Três capítulos são destinados ao estudo de matriz. Com um assunto bem atrativo para os jovens, o capítulo 2 inicia com um texto sobre pixels e [18] afirma que matriz pode ser utilizada em "assuntos que estão diretamente relacionados à análise de imagens digitais e aos demais contextos cujos valores são dispostos em uma grande quantidade de linhas e de colunas". Mas não há essa disposição exibida com relação ao texto aplicado, sendo assim, logo em seguida a definição matricial é iniciada.

Esse livro é bem detalhado no que diz respeito aos tipos de matrizes. Neste são apresentadas as matrizes: quadrada, diagonal, identidade, nula, linha, coluna, transposta e simétrica. Além disso, igualdade de matrizes é vista como um modelo de matriz e não como uma relação entre matrizes.

Em seguida, o capítulo 3 é reservado exclusivamente para as operações. Nele, as quatro operações aparecem em sequência não apenas com exercícios padrões mas o aluno também é instigado a operacionar com planilhas eletrônicas (com exceção da multiplicação de um número real por uma matriz), nesse caso é utilizada a planilha Calc (planilha eletrônica do pacote LibreOffice).

Finalmente no capítulo 4, é introduzida criptografia como assunto motivador da matriz inversa e, na sequência, são explorados equação matricial e determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3. Além disso, [18] destaca ainda como propriedades importantes o Teorema de Jacobi e o Teorema de Binet. Novamente utilizando a planilha eletrônica Calc, é proposta uma atividade com abordagem de matriz inversa e determinante.

As competências específicas 1 de Matemática e suas Tecnologias e 3 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias são as referências da BNCC apresentadas e, de fato, essas competências se fazem presentes.

3.3 Coleção Prisma. Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas

O capítulo 1 deste livro é intitulado "Matrizes e Sistemas Lineares", no qual inicialmente os autores conceituam matriz a partir de uma situação-problema envolvendo uma tabela de alimentos consumidos por uma família, em quilograma, durante um trimestre. A organização dessa tabela foi estruturada de modo que a linha representa o alimento consumido e a coluna, o mês do trimestre.

Mês / Alimento	Abril	Maio	Junho
Arroz	10 kg	11,5 kg	9 kg
Feijão	4 kg	5 kg	6 kg
Carne	8,5 kg	7 kg	10 kg
Legumes	12 kg	11 kg	16,5 kg

Figura 3.2: Consumo de alimentos - 2º trimestre.

A primeira matriz especial apresentada é a matriz quadrada, sendo sua abordagem bem simplificada exibindo apenas matriz identidade como caso particular.

As operações de igualdade, adição (noção de matriz oposta), subtração, multiplicação por um número real e multiplicação de matrizes vêm logo em sequência com todas as propriedades apresentadas. Seguindo com matriz inversa e equações matriciais, terminando assim o conceito de matriz. Mais a frente, os autores apresentam Sistema Linear, que pode ser analisado em [1].

Segundo [1], a coleção Prisma trabalha neste capítulo as competências específicas 1, 3 (EM13MAT301) e 4, além de retratar as competências específicas 1 e 3 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, mas até o final de equações lineares não houve exercícios que fizessem aplicações das competências mencionadas, apenas exercícios técnicos.

3.4 Coleção Quadrante. Matemática e suas tecnologias: sistemas lineares e geometria analítica

Com o panorama tecnológico da BNCC o capítulo 2 desse livro inicia com um texto base sobre planilhas eletrônicas e informando que essa disposição de informações é relativa à noção de matriz. Após definida, a matriz é aplicada em um contexto de pixels, onde faz referência à terna que representa as cores em um sistema RGB (do ingês Red, Green e Blue - Vermelho, Verde e Azul, respectivamente).

Com um destaque para os tipos de matrizes, assim como [18], [7] também traz de forma bem completa a noção de matriz quadrada, triangular, diagonal, identidade, linha, coluna e nula. Igualdade e transposta (com simétrica incorporada) são vistas como tópicos separados.

As operações vêm em continuidade com adição, subtração, multiplicação entre matrizes e multiplicação de uma matriz por um número real. Adição e multiplicação de matrizes possuem uma apresentação contextualizada, porém de forma tradicional, sem muita ligação com as indicações da BNCC. A adição aborda a faixa etária de alunos matriculados em um curso de idiomas que oferta Inglês e Espanhol enquanto a multiplicação é introduzida a partir da quantidade e valores dos três sucos mais vendidos em uma lanchonete, a saber que são vendidos copos de 300ml (4 reais) e 500ml (6 reais).

O capítulo é encerrado com matriz inversa e matriz associada a um sistema linear (assunto este do primeiro capítulo) e também com uma breve alusão à criptografia. Esta coleção diz abordar apenas a competência específica 3 junto à habilidade EM13MAT315 e isso pode ser verificado.

A noção de determinantes é estudada no capítulo 3. É desenvolvida a teoria para determinantes de ordens 1, 2 e 3, sem fazer nenhuma referência a Área de Matemática e suas Tecnologias.

3.5 Coleção Ser protagonista. Matemática e suas tecnologias: pensamento computacional e fluxogramas

A coleção “Ser protagonista” traz no capítulo 3, “Sistemas Lineares” como título que, de modo bem incomum comparado aos livros didáticos em geral, contém matriz como um tópico a ser explorado após introdução de sistemas 2×2, 3×3 e suas respectivas classificações.

No início da seção é destacada a habilidade EM13MAT301 que tem como objetivo resolver e elaborar problemas que envolvam situações cotidianas a partir de equações lineares. De fato, há propostas de problemas a serem resolvidos, contudo a parte da elaboração não foi sugerida.

A definição é introduzida de forma bem direta, sem uma pequena contextualização como feita nos livros analisados anteriomente e por meio de um breve exemplo se apresentam matriz quadrada e igualdade. Partindo para as operações, é possível observar a ausência da multiplicação de uma matriz por um número real e a subtração de matrizes é apresentada de um modo atípico: ela faz sua primeira aparição nos exercícios por meio da operação $A + (-B)$. Sendo assim, [9] destaca que “A matriz $-B$ é a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos da matriz B por -1”, contudo, não é explicitado $(-1) \cdot B$. E por fim, o capítulo é concluído com matriz identidade e inversa.

A habilidade citada no início desta seção, é a única que envolve a Área de Matemática e suas Tecnologias e, o autor destaca também para o capítulo a competência específica 3 da Área de Ciências da Natureza e Suas Tecnologias.

Para relacionar o estudo de matrizes com sistemas lineares uma aplicação em planilha eletrônica também é sugerida, especificamente o autor recomenda o LibreOffice como software a ser utilizado e apresenta o “QR code” abaixo para download.

Figura 3.3: QR code - LibreOffice.

3.6 Conclusão das análises

Feita essa breve análise do material disponibilizado, é possível concluir que de modo unânime todas as coleções têm omissões de alguns conceitos, mas todas trazem as operações entre matrizes. Com a liberdade de modelagem perante a BNCC, os autores julgaram como relevante tópicos específicos referentes à certas competências e habilidades, mas foi evidente o não cumprimento total do que foi proposto. De modo bem particular, cada coleção trouxe organizações diferentes envolvendo matriz, determinantes e sistemas lineares.

A coleção que se apresentou de forma mais simplificada, foi a coleção Prisma. Esta não abordou conceitos importantes como matriz linha, coluna e transposta, por exemplo. Como o capítulo é dividido com Sistema Linear, o foco da BNCC talvez esteja referente a esta parte.

A coleção Conexões, assim como a Prisma pouco trata de matriz e também, dentro desse assunto, não apresenta as competências mencionadas. Conexões e Prisma não fazem uso da tecnologia no estudo de matriz. Portanto, com esse diferencial, há um destaque positivo para as coleções Ser protagonista, Diálogo e Quadrante.

Ser protagonista apresenta matriz, apenas como parte de uma seção de sistema linear, e ainda não apresenta uma boa quantidade de exercícios como um capítulo exclusivo traria. Diálogo e Quadrante são as mais completas conceitualmente além de fazer abordagem tecnológica. Além disso, vale um destaque especial para a coleção Diálogo, pois é a única que cumpre a competência da BNCC apresentada.

Capítulo 4

O conceito de Matriz

A seguir, vamos utilizar a definição de matriz apresentada em [16].

Definição 4.0.1 *Chama-se matriz de ordem $m \times n$ a um conjunto de mn elementos dispostos em uma tabela com m linhas n colunas. Se $m = 1$ a matriz é dita matriz linha ou vetor linha e se $n = 1$ ela será dita matriz coluna ou vetor coluna. Os elementos de uma matriz podem ser números reais ou complexos, polinômios, funções, vetores, etc.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2i & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 6+i \end{pmatrix}$$

A matriz A é de ordem 2×2 e a matriz B é de ordem 2×3.

Atribuimos a representação a_{ij} para identificar os elementos dessa matriz, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A lista ordenada $(a_{i1},a_{i2},a_{i3},...,a_{in})$ é chamada i-ésima linha ou i-ésimo vetor linha enquanto $(a_{1j},a_{2j},a_{3j},...,a_{mj})$ é a j-ésima coluna ou o j-ésimo vetor coluna.

4.1 Representação genérica

Dada A uma matriz de ordem $m \times n$, genericamente será representada assim:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Algumas matrizes apresentam particularidades e possuem uma utilidade maior em determinadas aplicações, além da matriz linha e matriz coluna apresentadas no início deste capítulo, são elas:

- **Martiz nula**: É a matriz que possui todos os elementos iguais a zero. Indicamos por $0_{m\times n}$.

Exemplo 1 $0_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz quadrada de ordem n**: É toda matriz do tipo $n \times n$, ou seja, toda matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas. Isto é:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 2 $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & -8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Chamamos de **diagonal principal** a diagonal de uma matriz quadrada formada pelos elementos com índice iguais. A outra diagonal é denominada **diagonal secundária**.

Dizemos que duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in 1, 2, 3, ..., m$ e todo $j \in 1, 2, 3, ..., n$. Significa que, para duas matrizes serem iguais é necessário que ambas sejam de mesma ordem e, além disso, elas devem apresentar todos os elementos correspondentes (mesmos índices) iguais.

Exemplo 3 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$*, então:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Onde $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

Exemplo 4 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$*, então:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Onde $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} \neq b_{21}$, $a_{22} \neq b_{22}$, $a_{31} = b_{31}$ e $a_{32} = b_{32}$.

4.2 Operações matriciais

Neste tópico apresentaremos as seguintes operações: adição (incluindo a noção de matriz oposta), produto por um número real e produto de matrizes. Destacamos que adição, subtração e produto por um número real são operações fechadas, isto é, geram uma nova matriz e de mesma ordem. Vale ressaltar que a divisão de matrizes não é definida, contudo, é possível fazê-la, em certos casos, a partir da definição de matriz inversa. Ou seja "dividir"uma matriz A pela matriz B significa multiplicar a matriz A pela inversa da matriz B. Apresentaremos essa noção mais a frente juntamente com matriz inversa.

4.2.1 Adição

Definição 4.2.1 *Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, definimos a soma de A e B como a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Exemplo 5 *Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, então:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+5 \\ 1+(-2) & 3+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades

A adição de matrizes possui quatro propriedades, para mais detalhes ver [12].

- **Associativa**: $(A+B)+C = A+(B+C)$, para quaisquer A, B e C de ordem $m\times n$;
- **Comutativa**: $A + B = B + A$, para quaisquer A e B, de ordem $m \times n$.
- **Elemento neutro**: Existe M tal que $A + M = A$, para quaisquer A de ordem $m \times n$.
- **Simétrica ou oposta**: Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denomina-se matriz simétrica ou oposta de A a matriz $-A$ tal que $A + (-A) = 0_{m\times n}$.

Exemplo 6 *Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -9 \end{pmatrix}$. A e B são opostas, pois:*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A adição de matrizes é análoga à soma de vetores. Observe que as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são formadas por m vetores linha, ou seja, ao somar os elementos correspondendes estamos realizando a soma vetorial entre dois vetores.

Diferença

Definição 4.2.2 *Dadas duas matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{m\times n}$*, definimos a diferença de A e B como a matriz* $C = (c_{ij})_{m\times n}$ *onde* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$*. A matriz diferença é a matriz soma de A com a oposta de B.*

Exemplo 7 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$*. Então:*

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Produto de um número real por uma matriz

Definição 4.2.3 *Dado um número k e uma matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n}$*, definimos o produto entre k e A como a matriz* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *onde* $b_{ij} = k.a_{ij}$ *para todo i e j.*

Exemplo 8 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ *e* $k = 4$*, então:*

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 & 4\cdot 3 \\ 4\cdot 5 & 4\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 20 & -8 \end{pmatrix}$$

Propriedades

Sejam x e y números reais e $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes, temos que:

- $x(yA) = (xy)A$;
- $x(A + B) = xA + xB$;
- $(x + y)A = xA + yA$;
- $1 \cdot A = A$;
- $(-1) \cdot A = -A$;
- $0 \cdot A = 0_{m\times n}$.

4.2.3 Produto de matrizes

Considere a seguinte situação:

Guilherme foi ao médico e ele receitou 3 tipos de medicamentos a serem ingeridos da seguinte forma: 30 comprimidos do medicamento A, 10 do medicamento B e 15 do medicamento C, sendo que o custo de cada comprimido é, respectivamente, 4, 1 e 3 reais. Qual o valor total que Guilherme gastou ao comprar seus remédios?

De forma breve é possível organizar os dados e então responder a pergunta, observe:

$$(30 \times 4) + (10 \times 1) + (15 \times 3) = 175$$

Porém, esse mesmo raciocínio pode ser escrito em forma matricial, onde a quantidade de comprimidos de cada medicamento representam juntos e na ordem dada, um vetor linha e o valor unitário um vetor coluna, assim sendo:

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A partir desta ideia , vamos então definir o produto de matrizes.

Definição 4.2.4 *Sejam as matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, definimos o produto de A e B como a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, onde cada elemento c_{ij} é dado por:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Exemplo 9 *Sejam $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, então:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Propriedades

Sejam as matrizes A, B e C compatíveis com a multiplicação, temos que:

- **Associativa**: $A(BC) = (AB)C$;
- **Distributiva**: $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$;
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, para k um número.

As demonstrações podem ser encontradas em [12].

O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, existem matrizes A e B tais que $AB \neq BA$.

Exemplo 10 *Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, então:*

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 + 0.0 & 1.3 + 0.2 \\ 2.2 + 1.0 & 2.3 + 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
- $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 + 3.2 & 2.0 + 3.1 \\ 0.1 + 2.2 & 0.0 + 2.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

4.3 Matriz transposta

Definição 4.3.1 *Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se **matriz transposta de A** a matriz $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$ onde $a_{ji} = a_{ij}$.*

Propriedades

- $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$;
- Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, então $(A+B)^t = A^t + B^t$;
- Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e k um número, então $(kA)^t = kA^t$.
- Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times p}$, então $(AB)^t = B^tA^t$.

A demonstração das propriedades acima encontra-se em [12].

Exemplo 11 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, *então* $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Definição 4.3.2 *Uma matriz quadrada A é dita* ***simétrica*** *se* $A^t = A$ *e* ***antissimétrica*** *se* $A^t = -A$.

4.4 Matriz triangular

Definição 4.4.1 *Uma matriz quadrada será chamada de* ***triangular superior*** *se* $a_{ij} = 0$ *para todo* $i > j$ *e* ***triangular inferior*** *se* $a_{ij} = 0$ *para todo* $i < j$.

Exemplo 12 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(Matriz triangular superior)*

Exemplo 13 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ *(Matriz triangular inferior)*

4.5 Matriz diagonal

Definição 4.5.1 *Uma matriz quadrada será chamada de* ***matriz diagonal*** *se* $a_{ij} = 0$ *para todo* $i \neq j$, *ou seja, triangular superior e inferiror ao mesmo tempo.*

Exemplo 14 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definição 4.5.2 *Uma matriz diagonal em que* $a_{ij} = 1$ *para todo* $i = j$, *é chamada de* ***matriz identidade****. Identificamos por* I_n *onde* n *é a ordem da matriz.*

Exemplo 15 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 16 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.6 Matriz inversa

Definição 4.6.1 *Seja A uma matriz quadrada. A é dita **matriz inversível** se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, então A é dita **matriz singular**.*

Definição 4.6.2 *Seja A uma matriz inversível , chama-se **inversa de A** a matriz A^{-1} (única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

Exemplo 17 *A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, pois:*

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = I_2$$

Vale uma atenção especial para a matriz inversível, pois observe que o produto entre uma matriz dada e sua inversa é igual a uma matriz identidade, e esta por sua vez, é sempre uma matriz quadrada. Contudo, isso não é suficiente para garantir que uma matriz possua inversa, até porque o produto entre uma matriz $m \times n$ e $n \times m$ resulta em uma matriz quadrada.

4.6.1 A divisão por trás da matriz inversa

Como mencionado na introdução das operações, não há uma definição formal para divisão de matrizes, portanto após definirmos matriz inversa, é possível entender que existem casos em que a ideia da divisão é um produto entre duas matrizes. A saber que, esse produto é definido por AB^{-1} (lembrando que o produto de matrizes não é comutativo), onde B^{-1} é a matriz inversa de B.

Sabemos que nem toda matriz possui inversa, sendo assim não é possível realizar esse tipo de operação a partir de qualquer matriz dada.

Exemplo 18 *Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Para obter o resultado do produto AB^{-1}, inicialmente é preciso calcular a inversa de B, caso exista.*

Sabendo que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, então:

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{2}{3} \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

É importante observar que a "divisão" de A por B fica subentendida quando existe uma matriz B, inversível, Neste caso o resultado será AB^{-1}. Assim, não é possível generalizar esse modelo operacional.

Capítulo 5

Determinantes e vetores

O surgimento dos determinantes antecede o estudo de matrizes com a resolução de sistemas lineares $n \times n$, isto é, o número de equações é igual ao número de incógnitas. E essa resolução constitui a regra de Cramer, vide [16]. Além disso, a prática do determinante se estende para visão geométrica quando se trata de área de paralelogramos e triângulos (determinantes 2×2) e volume de paralelepípedos (determinantes 3×3).

5.1 Determinantes de matrizes de ordem 1 e 2

Definição 5.1.1 *Dada a matriz* 1×1, $A = (a_{11})$, *o seu determinante é o próprio elemento* a_{11}.

Exemplo 19 *Se* $A = (4)$ *então* $detA = 4$.

Definição 5.1.2 *Dada a matriz* 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, *então seu determinante é:*

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 20 *Se* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow detA = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5$

- **Área do parelogramo:** Seja $ABCD$ o paralelogramo de área A_p, sabemos que $A_p = b \cdot h$ onde b é a base (neste caso representado pela distância entre A e C $d(A, C)$) e h é a altura desse paralelogramo. Considere o paralelogramo abaixo, onde os lados são indicados por vetores.

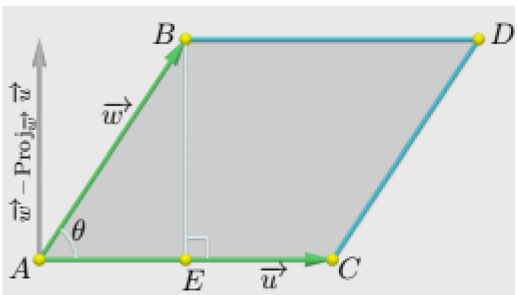


Figura 5.1: Paralelogramo de área A_p.

Observe que ao traçar a altura do paralelogramo, obtemos um triângulo retângulo de hipotenusa $\vec{w}$, e os catetos sendo a altura $\vec{h}$ (cujo comprimento será h) e a projeção ortogonal de $\vec{w}$ em relação a $\vec{u}$. Sabendo que $\|\vec{u}\| = d(A, C)$ e $\|\vec{w}\| = d(A, B)$ são as normas de u e w, respectivamente $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ é o produto interno entre u e w, temos:

$$\|\vec{w}\|^2 = h^2 + \|Proj_{\vec{u}}\vec{w}\|^2$$

$$h^2 = \|\vec{w}\|^2 - \|Proj_{\vec{u}}\vec{w}\|^2$$

$$= \|\vec{w}\|^2 - \left\| \left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \right) \cdot \vec{u} \right\|^2$$

$$= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \vec{u} \cdot \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \vec{u} \right\rangle$$

$$= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

Como $A_p = b \cdot h$, temos que $A_p^2 = b^2 \cdot h^2$, então:

$$A_p^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \left(\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \right)$$

$$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2$$

Logo temos que:

$$A_p = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2}$$

Por outro lado, temos que:

$$A_p^2 = \ det \begin{pmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2$$

$$= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2$$

Usando as fórmulas para área obtidas acima e considerando que $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{w} = (c, d)$, temos que $A_p^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2acbd - b^2d^2$, daí:

$$A_p^2 = (ad - bc)^2$$

$$A_p = \mid ad - bc \mid$$

$$= \left| \; det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \; \right|$$

Logo, concluímos que a área do paralelogramo $A_p = b \cdot h$ é igual ao produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ que, por sua vez é igual módulo do determinante cujas colunas (ou linhas) são as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

- **Área do triângulo:** Agora tome um triângulo ABC e o paralelogramo $ABCD$ de lados adjacentes a AB e AC.

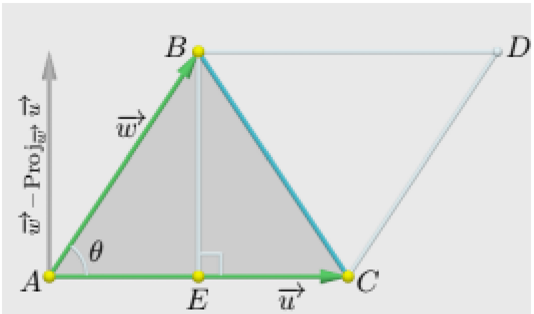


Figura 5.2: Triângulo ABC e paralelogramo ABCD.

Observe na figura que ABC e DCB são congruentes. Denotando por A_t a área do triângulo, temos:

$$A_p = 2 \cdot A_t$$

$$A_t = \tfrac{1}{2} \cdot A_p$$

$$A_t = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \; det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \; \right|$$

5.2 Determinante de matrizes de ordem 3

Definição 5.2.1 *Dada a matriz* 3×3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, *seu determinante é:*

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo 21 *Se* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *então:*

$$detA = 0 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 4 = -12$$

Este processo de cálculo de um determinante de ordem 3, é conhecido como regra de Sarrus. Afim de evitar uma memorização desse desenvolvimento, podemos utilizar a seguinte organização:

1. Ao lado da terceira coluna, repete-se, em ordem, as duas primeiras colunas;
2. Seguindo a direção da diagonal principal, multiplica-se cada três elementos conservando o sinal de cada produto, depois, seguindo a direção da diagonal secundária, multiplica-se cada três elementos invertendo o sinal de cada produto.

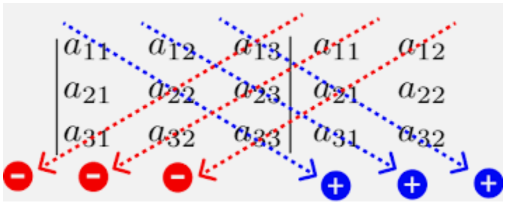


Figura 5.3: Regra de Sarrus.

- **Área da base do paralelepípedo**

  Se assumirmos que a base do paralelogramo está no plano xy, então $\vec{u} = (a, b, 0)$ e $\vec{v} = (c, d, 0)$. Sendo assim, qualquer outro caso é equivalente por translação. Então:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = |ad - bc|$$

$$= A_p$$

- **Volume do paralelepípedo:**

  O determinante de uma matriz 3×3 é atribuída à interpretação geométrica do produto misto entre três vetores $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (d, e, f)$ e $\vec{w} = (g, h, i)$ no espaço, a saber que o produto misto é dado por $\left[\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \right] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$, onde $\vec{u} \times \vec{v} = (bf - ec, -(af - dc), ae - db)$ é o produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e representa a área da base desse paralelepípedo.

  Em [8] é mostrado que o produto misto também representa o determinante da matriz 3×3 em que as linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na ordem em que são dados. O produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é:

$$\left[\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \right] = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

  Considere então, quatro pontos A, B, C e D não coplanares e P o paralelepípedo que apresenta os segmentos $AB = \vec{u}$, $AC = \vec{v}$ e $AD = \vec{w}$ como arestas adjacentes.

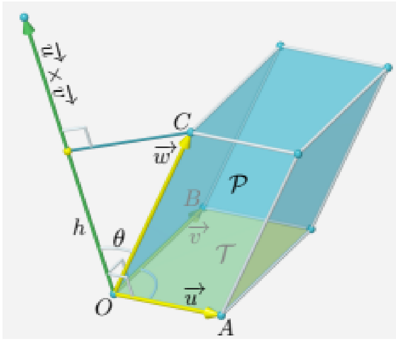


Figura 5.4: Interpretação geométrica do produto misto.

O volume de P (denotaremos por Vol_P) é dado por $Vol_P = \left|\left[\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \right]\right|$. Concluíremos então que Vol_P pode ser representado a partir do determinante da matriz 3×3 formado por esses vetores:

$$Vol_P = A_b \cdot h$$

$$= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|Proj_{\vec{u}\times\vec{v}}\vec{w}\|$$

$$= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \left\|\left(\frac{\langle\vec{w}, \vec{u}\times\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{u} \times \vec{v}\right\|$$

$$= |\langle\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}\rangle|$$

$$= \left|\left[\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ \right]\right|$$

$$= |\langle(bf - ec, -af + dc, ae - db), (g, h, i)\rangle|$$

$$= |bfg - ceg - afh + cdh + aei - bdi|$$

$$= |aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg|$$

$$= \left|\ det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\ \right|$$

Capítulo 6

Materiais concretos no ensino de matemática

6.1 Metodologia

Como visto no capítulo 3, o ensino de matriz nos livros didáticos está relacionado à determinantes e sistemas lineares e, mesmo antes da implementação da BNCC, essa prática já era comum. Infelizmente, com essa relação, a aprendizagem de cada um desses conceitos é apresentada de forma totalmente abstrata tirando a motivação do aluno. Porém, o envolvimento dos conceitos pode se tornar algo mais interessante se o professor estiver disposto a inovar sua prática docente.

Apesar de entendermos que a BNCC valoriza a prática tecnológica nas escolas, entendemos também a dificuldade que a maioria das escolas públicas apresentam em inserir um modelo de ensino que faça uso de computadores e celulares. Pensando nisso, acreditamos que o uso do material concreto ainda é o modelo de ensino mais acessível que agrega não somente o conhecimento teórico que o aluno precisa adquirir mas também colabora na socialização, interação e relação entre aluno e professor. Segundo [17]:

> A utilização de materiais concretos como estratégia didática permite que as aulas diárias muitas vezes chatas, áridas e sem interesse tornem-se interessantes com novas abordagens e procedimentos. No processo de aprendizagem, a fase concreta dá ao aluno a oportunidade de manipular objetos, formar esquemas, conhecer melhor o objeto, relacionar e estabelecer relações entre objetos, o que abre as portas para uma aprendizagem mais bem-sucedida.(QUINTERO, 2021, p.2)[1]

Pensando nessas novas abordagens e procedimentos, o docente deve atentar-se ao que será proposto para não passar a ideia que é apenas uma aula de brincadeiras e lazer. É importante também mostrar ao aluno que trabalhar com material concreto, como [10] apresenta, colabora com seu desenvolvimento em vários aspectos, tais como:

[1]El uso de materiales concretos como estrategia didáctica permite que las clases cotidianas muchas veces aburridas, áridas y sin interés se conviertan en interesantes con nuevos enfoques y procedimientos. En el proceso de aprendizaje la fase concreta da al estudiante la oportunidad de manipular objetos, formar esquemas, conocer mejor el objeto, relacionar y establecer relaciones entre objetos, lo cual abre las puertas a un aprendizaje más exitoso.

- Comunicação verbal e não verbal;
- Habilidades de pensamento;
- Expressividade e pronúncia;
- Criatividade e imaginação;
- Escuta;
- Raciocínio lógico;
- Trabalho ordenado;
- Integração do aluno com o seu ambiente;
- Tolerância entre as pessoas;
- Unir de forma lúdica o concreto e o abstrato.

Ressaltamos que a BNCC trata com muita importância a prática tecnológica em sala de aula, mas analisando a realidade de grande parte das escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro essa aula tecnológica está muito longe de acontecer. Laboratório de informática é um ambiente que muitas escolas desconhecem, nem todos os alunos possuem aparelho celular (sendo este algo que não pode ser exigido que todos tenham), então pensando em alcançar todo público discente das escolas públicas, este trabalho apresentará uma sequência didática que engrandecerá o conhecimento inicial de matriz e assim o aluno será capaz de apresentar uma grande evolução nas operações relacionadas.

O material concreto traz consigo a motivação da aplicação a partir de um assunto estimulante, por conta disso, as atividades apresentadas na seção a seguir abordam como tema a Copa do Mundo de futebol masculino, realizada no Catar no ano de 2022.

6.2 Sequência didática

A Copa do Mundo de 2022 contou com a participação de 32 países que foram organizados em oito grupos com quatro seleções cada um, definidos a partir de um sorteio ocorrido em 01 de abril de 2022 pela FIFA (Federação Internacional de Futebol Associado). A sequência didática foi dividida em seis partes, elaborada com base no resultado da fase de grupos que ocorreu de 20 de novembro a 02 de dezembro. Ressaltamos que não será utilizada a tabela completa, para este trabalho foram utilizados determinados dados convenientes à prática de cada atividade proposta. Mas, caso o professor ache interessante trabalhar com uma matriz mais ampliada, é válido utilizar todos os elementos de uma vez. O chaveamento completo pode ser encontrado em [11].

Iniciamos a primeira parte com uma atividade sobre a interpretação de uma tabela, nesta sequência utilizaremos as informações do Grupo G (grupo do Brasil), podendo utilizar qualquer outra. Já na segunda parte, o objetivo é localizar informações a partir das orientações referentes à linhas e colunas. Nesta parte utilizaremos todos os grupos da Copa. A terceira parte apresenta uma atividade referente à matriz genérica com auxílio do Grupo C. Seguindo com as operações, a quarta e quinta parte, respectivamente, trazem uma atividade sobre soma (Grupos A e F) e subtração (Grupos D e H) de matrizes. E para finalizar, a sexta parte introduz produto de matrizes a partir das cores das bandeiras das seleções participantes.

As atividades foram desenvolvidas a partir das competências específicas 1, 3 e 4 da BNCC.

6.2.1 1ª parte - Interpretação de tabelas

Objetivo: Leitura de tabelas.

Material necessário: Folha de atividade com uma tabela da Copa do Mundo.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 1 aula de 50 minutos.

Atividade 1: Observe a tabela abaixo referente a um determinado grupo da Copa do Mundo, onde P = total de pontos, J = quantidade de jogos, V = quantidade de vitórias, E = quantidade de empates e D = quantidade de derrotas.

GRUPO G					
Classificação	P	J	V	E	D
Brasil	6	3	2	0	1
Suiça	6	3	2	0	1
Camarões	4	3	1	1	1
Sérvia	1	3	0	1	2

Figura 6.1: Grupo G da Copa do Mundo 2022.

Você consegue identificar a quantidade de vitórias da seleção de Camarões? E a quantidade de empates da seleção da Suíça?

Atividade 2: Localize na tabela os pontos obtidos ao final da última rodada de cada seleção. Há alguma seleção com 5 pontos? E com 1 ponto?

Atividade 3: Quais informações você consegue identificar sobre a seleção brasileira?

Atividade 4: Qual foi o total de derrotas obtidas nesse grupo?

Essa primeira parte é de extrema importância, pois se o aluno não souber realizar uma leitura tabular, ele não será capaz de dar continuidade à proposta didática. Sendo assim, o professor deve orientá-lo para que compreenda bem o que está exposto, desde o título e legenda da tabela até o significado de cada linha e coluna. A proposta inicial é que as atividades dessa parte sejam individuais, porém, se o professor achar que os alunos estão com algum tipo de dificuldade (algo bem comum de ocorrer neste momento), deixe a turma a vontade para formar grupos. Afinal, o ambiente deve ser satisfatório para realização de uma atividade.

Caso haja necessidade, o professor pode em seguida, repetir a atividade com uma tabela de um outro grupo, observando se o aluno consegue responder com sucesso sem o seu auxílio.

6.2.2 2ª parte - Definição de matriz

Objetivo: Compreender a noção inicial de matriz como uma tabela $m \times n$, onde m é o total de linhas e n é o total de colunas. Cada linha i representa o grupo em que a seleção pertence e cada coluna j representa sua posição ao final da última rodada.

Material necessário: Material lúdico como representação da matriz, peças numeradas representando as pontuações, bandeirinhas de cada país participante da Copa, folha de atividade com tabelas da classificação da fase de grupos e peças de identificação das linhas e colunas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 0: Vocês receberam um material contendo 8 espaços, posicione-o de frente para vocês de modo que apresente 4 linhas (horizontal) e 2 colunas (vertical). Utilizando as peças numéricas, preencha corretamente este material, sabendo que a primeira coluna representa a posição de cada seleção do grupo G (retorne à tabela da 1ª parte) ao final da fase de grupos, ou seja, números de 1 a 4. Agora, observando a tabela deste grupo, preencha a segunda coluna com as bandeirinhas de acordo com a posição de cada país.

Observação: Esta atividade foi elabora após a aplicação da atividade, em vista da dificuldade apresentada no desenvolvimento da Atividade 1.

Atividade 1: O material que vocês receberam apresenta 16 espaços contendo números que representam as pontuações de cada seleção ao final da última rodada da fase de grupos. Pegue as peças que vocês receberam e identifique cada linha (horizontal, de cima para baixo) como os quatro primeiros grupos em ordem alfabética e cada coluna (vertical, da esquerda para a direita) como a posição que um determinado país ficou em seu grupo. Analise o material que receberam e observem as tabelas, vocês conseguem identificar qual seleção possui cada uma das pontuações? Coloque as bandeirinhas nos espaços correspondentes.

GRUPO A					
Classificação	P	J	V	E	D
Holanda	7	3	2	1	0
Senegal	6	3	2	0	1
Equador	4	3	1	1	1
Catar	0	3	0	0	3

GRUPO B					
Classificação	P	J	V	E	D
Inglaterra	7	3	2	1	0
Estados Unidos	5	3	1	2	0
Irã	3	3	1	0	2
País de Gales	1	3	0	1	2

Figura 6.2: Grupos A e B da Copa do Mundo 2022.

GRUPO C					
Classificação	P	J	V	E	D
Argentina	6	3	2	0	1
Polônia	4	3	1	1	1
México	4	3	1	1	1
Arábia Saudita	3	3	1	0	2

GRUPO D					
Classificação	P	J	V	E	D
França	6	3	2	0	1
Austrália	6	3	2	0	1
Tunísia	4	3	1	1	1
Dinamarca	1	3	0	1	2

Figura 6.3: Grupos C e D da Copa do Mundo 2022.

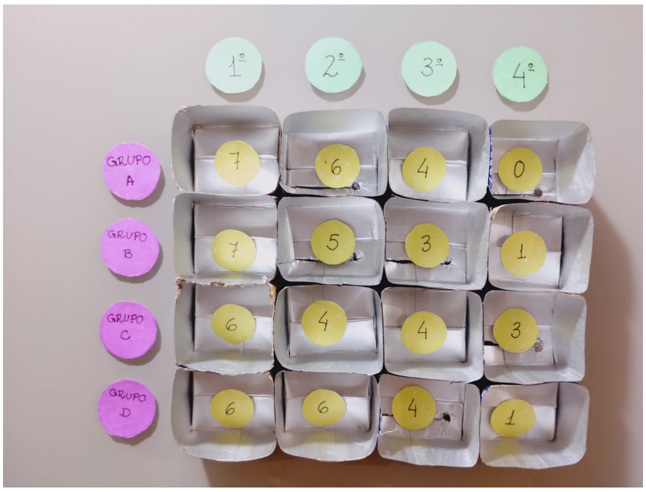


Figura 6.4: Material da atividade 1.

Atividade 2: Retire as peças que foram entregues de dentro da caixa. Agora, observando as tabelas abaixo, tente preencher a caixa com a pontuação final de cada seleção. Neste caso, cada linha representa o grupo ao qual a seleção pertence, segundo a ordem alfabética E, F, G e H, isto é, a primeira linha representa o Grupo E.

GRUPO E					
Classificação	P	J	V	E	D
Japão	6	3	2	0	1
Espanha	4	3	1	1	1
Alemanha	4	3	1	1	1
Costa Rica	3	3	1	0	2

GRUPO F					
Classificação	P	J	V	E	D
Marrocos	7	3	2	1	0
Croácia	5	3	1	2	0
Bélgica	4	3	1	1	1
Canadá	0	3	0	0	3

Figura 6.5: Grupos E e F da Copa do Mundo 2022.

GRUPO G					
Classificação	P	J	V	E	D
Brasil	6	3	2	0	1
Suiça	6	3	2	0	1
Camarões	4	3	1	1	1
Sérvia	1	3	0	1	2

GRUPO H					
Classificação	P	J	V	E	D
Portugal	6	3	2	0	1
Coreia do Sul	4	3	1	1	1
Uruguai	4	3	1	1	1
Gana	3	3	1	0	2

Figura 6.6: Grupos G e H da Copa do Mundo 2022.

As atividades 0, 1 e 2, são suficientes para o professor introduzir matriz no Ensino Médio. É o momento de dizer aos alunos que o material que eles receberam é um modelo de representação física de uma organização tabular denominada matriz. Também já é válido o professor introduzir a definição de matriz mostrando a representação escrita, logo, também é o momento do professor apresentar a matriz genérica.

Atividade 3: Nas atividades anteriores trabalhamos com matrizes de quatro linhas e quatro colunas. Na folha que vocês receberam, ainda no contexto das linhas representarem os grupos e, as colunas, as posições (apenas quatro), mantendo a ordem alfabética dos grupos vocês conseguiriam criar uma matriz com cinco linhas? E com oito?

Atividade 4: Com base nas atividades anteriores, onde cada linha representa um grupo e, cada coluna representa a posição de uma seleção, responda: Qual o máximo de linhas que uma matriz pode ter dentro dessa problemática da Copa do Mundo?

Finalizando as atividades 3 e 4, o professor encerra a 2ª parte. Complementando o que foi construído com os alunos nas duas primeiras atividades, é importante o professor comentar que a ordem de uma matriz é representada pela quantidade de linhas e colunas, nesta ordem. Comentar especificamente sobre as atividades 0, 1 e 2, que são as atividades introdutórias. Isto é, que o material da atividade 0 representa uma matriz "4 por 2", representada por 4×2, assim como as atividades 1 e 2 é representada por matriz matriz "4 por 4", cuja a representação é 4×4.

Já em relação as duas últimas, seria interessante o professor criar um momento de discussão com a turma para começar a perceber o primeiro entendimento dos alunos. Espera-se que os alunos consigam criar as matrizes propostas na atividade 3, afinal, há um total de oito grupos. Entretanto, na atividade 4 é onde ficará bem claro para o professor se a turma conseguiu compreender a abordagem da Copa com a modelagem matricial, pois nesse instante os alunos deverão concluir que o máximo de linhas possíveis são oito, e a quantidade de colunas se mantém fixa já que cada grupo possui igualmente quatro seleções.

6.2.3 3ª parte - Matriz genérica

Objetivo: Fixar a noção de matriz genérica.

Material necessário: Folha de atividades contendo os jogos da primeira fase de um grupo, material lúdico representativo da matriz, peças numeradas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 1: Vocês receberam na folha de atividades os placares das três rodadas do Grupo C. Pegue o material lúdico que receberam e preencha-o com as peças numeradas, de modo que cada espaço a_{ij} desse material represente quantos gols a seleção i fez sobre a seleção j.

Observação: Considere 1 = Argentina, 2 = Polônia, 3 = México, 4 = Arábia Saudita.

Figura 6.7: Jogos do Grupo C da Copa do Mundo 2022.

Atividade 2: Observe que os dados informados na folha de atividades não foram suficientes para preencher todos os espaços do material. Responda na folha de atividades: Qual peça vocês colocariam em cada espaço que ficou vazio? Justifique.

As atividades 1 e 2 têm por objetivo reforçar a aprendizagem da parte 2 sobre matriz genérica. Com essas atividades os alunos mostrarão se compreenderam a representação a_{ij}. Entretanto, tão importante quanto a leitura dos resultados dos jogos para preencher o material, é perceber que espaços a_{ij} e a_{ji}, apresentam juntos o placar do jogo entre a seleção i e a seleção j.

Destacamos que as matrizes especiais como matriz quadrada, matriz nula, identidade, dentre outras, devem ser apresentadas antes de iniciar a 3ª parte. Com relação à atividade 2, o aluno deve observar que os espaços vazios representam a diagonal principal da matriz (a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44}) devem ser preenchidos por zero, afinal esses espaços representam um suposto jogo entre uma seleção e ela mesma. Isto exemplifica a necessidade da realização de convenções na matemática.

O professor deve também ser mediador dessas atividades, afinal não se pode esperar que tudo seja respondido com sucesso. Sempre mantendo o cuidado para não responder diretamente, cabe ao professor instigar e despertar o interesse dos alunos.

6.2.4 4ª parte - Soma de matrizes

Objetivo: Introduzir soma de matrizes correlacionando tabelas da Copa do Mundo.

Material necessário: Folha de atividades contendo duas tabelas, quatro materiais lúdicos representativos da matriz, peças numeradas e bandeirinhas de cada seleção participante da Copa.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 1: Observe as tabelas dos Grupos A e F que receberam. Para cada tabela, primeiramente, construa na folha de atividade uma matriz do tipo 4×3 onde cada linha i representa a seleção dos grupos informados, em ordem de classificação e, cada coluna j, representa na seguinte ordem: quantidade de vitórias, derrotas e empates desses grupos.

GRUPO A			
Classificação	V	D	E
Holanda	2	0	1
Senegal	2	1	0
Equador	1	1	1
Catar	0	3	0

GRUPO F			
Classificação	V	D	E
Marrocos	2	0	1
Croácia	1	0	2
Bélgica	1	1	1
Canadá	0	3	0

Figura 6.8: Grupos A e F Copa do Mundo 2022.

Atividade 2: Queremos descobrir quantas vitórias as seleções de uma mesma posição possuem juntas. De que modo vocês podem organizar e informar essas quantidades? Desenvolva o raciocínio na folha de atividades.

Atividade 3: Faça o mesmo para a quantidade de derrotas e empates.

Com a atividade 1, o professor identificará se ainda há alguma dificuldade na contrução de uma matriz. Caso haja, esse é o instante do professor dar uma pausa nessa sequência didática e fixar a definição com auxílio do material didático.

Nas atividades 2 e 3 espera-se que o aluno compreenda que a quantidade total de cada situação pedida é a soma das colunas correspondente, por exemplo: ao somar os elementos da primeira coluna referente a matriz A com os elementos correspondentes na primeira coluna referente a matriz F, o aluno deverá obter o total de vitórias dos primeiros colocados, até o total de vitória dos quartos colocados. Aqui, o importante não é a formalização da matriz resultante mas a interpretação do que está sendo pedido e a identificação dos dados que devem ser utilizados nas matrizes.

Atividade 4: Vocês receberam três materiais representativos para as matrizes. Pegue dois materiais e com as peças que também receberam, preencha dois materias de acordo com as matrizes criadas na atividade citada, isto é, uma referente ao Grupo A e outro referente ao Grupo F. Compare com seus colegas e observe se todos chegaram nas mesmas representações.

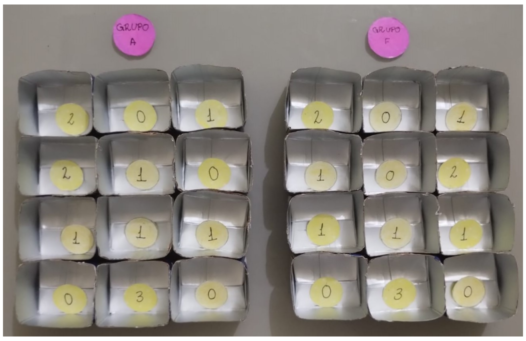


Figura 6.9: Materiais preenchidos conforme os grupos A e F da Copa.

Atividade 5: Observe os materias que vocês preencheram e pegue o terceiro que ainda se encontra vazio. Esse último material representa a matriz resultante da soma das matrizes obtidas nas atividades 2 e 3. Preencha esse material utilizando as peças dos dois materiais que estão completos. Ou seja transfira as peças dos dois primeiros materiais para o terceiro a fim de que cada espaço correspondente contenha o resultado encontrado nas atividades 2 e 3.

Figura 6.10: Transferência das peças para o material resultante.

Com as atividades 4 e 5 o professor apresenta a noção de soma de matrizes. Observe que na atividade 5 os alunos não recebem uma orientação direta sobre como organizar os resultados no material, apenas são informados a utilizar as peças dos outros materiais. Espera-se que a partir das matrizes construídas na atividade 1, o aluno compreenda que a matriz resultante, A + F, deve apresentar o mesmo padrão das matrizes A e F que foram somadas: linhas representam as seleções em ordem das posições como dadas nas tabelas e as colunas a quantidade de vitórias, empates e derrotas.

Atividade 6: Separe as bandeirinhas das seleções dos Grupos A e F, posicione o meterial 4×1 a esquerda do material representante da soma (atividade 5) e adicione estas bandeirinhas nos espaços correspondentes dessa matriz coluna.

Figura 6.11: Posicionamento das bandeirinhas.

Na atividade 6, espera-se que os alunos compreendam, por exemplo, que no espaço a_{11} deve conter as bandeirinhas da Holanda e do Marrocos pois, esse espaço representa o primeiro colocado do grupo A mais primeiro colocado do grupo F.

6.2.5 5ª parte - Subtração de matrizes

Objetivo: Introduzir subtração de matrizes correlacionando tabelas da Copa do Mundo.

Material necessário: Folha de atividades contendo duas tabelas, três materiais lúdicos representativos da matriz, peças numeradas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 1: Em sua folha de atividades é possível analisar as informações como gols pró (GP), gols contra (GC) e saldo de gols (SG), com relação aos Grupos D e H da Copa do Mundo.

Peguem dois materias lúdicos que receberam e posicionem um ao lado do outro da forma 4×3. Utilizando as peças numeradas, preencha o material da esquerda com as informações do Grupo D e o da direita com as informações do Grupo H segundo os dados das tabelas.

GRUPO D				GRUPO H			
Classificação	GP	GC	SG	Classificação	GP	GC	SG
França	6	3	3	Portugal	6	4	2
Austrália	3	4	-1	Coreia do Sul	4	4	0
Tunísia	1	1	0	Uruguai	2	2	0
Dinamarca	1	3	-2	Gana	5	7	-2

Figura 6.12: Dados sobre gols dos Grupos D e H.

Atividade 2: Qual a diferença de gols sofridos (gols contra) entre os primeiros colocados, os segundos, os terceiros e os quartos colocados dos grupos D e H? Registrem o raciocínio em sua folha de atividades.

Atividade 3: Com organização similar, se calcularmos a diferença de gols sofridos, desta vez, entre H e D, o resultado é o mesmo da atividade anterior? Justifique.

Atividade 4: Segundo a resposta da sua dupla na atividade 3, a matriz resultante da diferença entre D e H é a mesma entre H e D? Discuta com as demais duplas.

Atividade 5: Agora, fazendo o devido preenchimento do último material e a partir das peças já posicionadas nos outros dois materiais, calculem a diferença entre D e H de gols pró e saldo de gols. Para esse preenchimento, utilize também a resposta da atividade 2.

Nesta quinta parte, além de apresentar a diferença entre matrizes, o professor tem uma grande oportunidade de comentar que esta operação não é comutativa. Nesta fase escolar, os alunos já conhecem as propriedades da adição e subtração, então não deve haver dificuldades em entender esse termo.

Unindo as partes 4 e 5 dessa sequência didática o professor pode apresentar a partir do material didático as demais propriedades da adição e consequentemente da subtração. Aconselhável também realizar uma pausa na sequência para exercitar os deveres do livro e tirar todas as dúvidas que ainda possam existir.

6.2.6 6ª parte - Produto de matrizes

Objetivo: Apresentar a noção de produto de matrizes a partir da combinação das cores das bandeiras das seleções.

Material necessário: Folha de atividades contendo as bandeiras das seleções da Copa do Mundo. Cinco materiais lúdicos representativos da matriz, peças coloridas e numeradas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Observação: Para estas atividades consideramos apenas as listras coloridas que as bandeiras apresentam, isto, é, não utilizaremos os detalhes como brasões e demais desenhos presentes em algumas bandeiras. Vide a imagem a seguir.

Figura 6.13: Bandeiras dos países da Copa do Mundo de 2022.

Atividade 1: Vocês receberam três materiais lúdicos, peças coloridas e numeradas, e uma folha contendo as bandeiras das seleções participantes. Preencha o material 2×2 da seguinte maneira:

- $a_{11} = 1$ peça vermelha; $a_{12} = 1$ peça amarela;
- $a_{21} = 1$ peça azul; $a_{22} = 1$ peça branca.

Do lado direito do material preenchido, posicione o material 2×1, e preencha-o segundo as seguintes orientações:

- $a_{11} = 1$ peça com número 2;
- $a_{21} = 1$ peça com número 1.

Figura 6.14: Material da atividade 1.

Observe então que colocamos lado a lado uma matriz 2×2 seguida de uma 2×1, desse modo, encontraremos uma matriz 2×1 como solução da atividade. O material restante, representa a matriz resultante do produto que irão realizar, posicione corretamente esse material ao lado do segundo.

Atividade 2: Ao multiplicar os elementos da primeira linha da matriz 2×2 com os elementos da matriz coluna 2×1, encontraremos o elemento a_{11}, assim como multiplicando os elementos da segunda linha com a matriz coluna, descobriremos o elemento a_{21}. Seguindo os passos abaixo, preencha a matriz resultante com as combinações de cores geradas pelos produtos:

- a_{11} = vermelho vezes 2 e amarelo vezes 1 (preencha o material com a quantidade correta de cada cor);
- a_{21} = azul vezes 2 e branco vezes 1 (preencha o material com a quantidade correta de cada cor).

Segundo a combinação encontrada em cada espaço e a relação das bandeiras dos países participantes da Copa do Mundo que receberam, vocês conseguiriam responder qual país cada espaço representa? Coloque a bandeirinha correspondente no lugar correto.

Acreditamos que estas atividades da sexta parte necessitem de mais hora aula para desenvolvimento, pois diferente da soma e da subtração, o produto de matrizes exige um olhar mais cauteloso sobre a estratégia de organização, neste caso relacionar linhas com colunas. Sendo assim, cabe ao professor iniciar essa atividade de modo mais detalhado e orientado como a sugestão acima.

Possivelmente os alunos apresentarão muita dificuldade em primeiro instante, então se necessário o professor pode rever a duração prevista. Desse modo, a primeira atividade foi desenvolvida com o intuito de o aluno conhecer e montar o material que utilizará na operação. Assim como algumas atividades anteriores, o professor pode distribuir o material preenchido, porém ao aluno ser orientado sobre como organizar, possivelmente despertará nele curiosidades sobre a posição da matriz 2×1, por exemplo. Acredita-se que em um primeiro momento o aluno até manipule o material posicionando na forma 1×2, buscando compreender o porquê dessa colocação ser adequada para o desenvolvimento.

A seguir será proposta uma atividade para debater quando é possível multiplicar matrizes.

Atividade 3: Após realizar as atividades 1 e 2 e esclarecer suas dúvidas com o professor, agora vocês estão recebendo dois materiais com novas matrizes já representadas, efetue o produto entre elas, na ordem em que foram distribuídas e responda:

Figura 6.15: Material da atividade 3.

- (a) Qual será o tamanho da matriz resultante? Por quê? (Professor, entregue o material representativo da matriz reultante somente após a discussão deste item).
- (b) Quais países cada espaço dessa matriz representa?
- (c) Coloquem as peças nos materiais conforme foram entregues e, agora troque as duas matrizes preenchidas de posição? Como vocês realizariam este produto?

Observe que até esse instante não foi informado aos alunos sobre a condição necessária para a realização do produto de matrizes (a primeira matriz deve possuir a quantidade de colunas igual a quantidade de linhas da segunda) e também que o produto de matrizes não é comutativo. Esses dados devem ser apresentados gradativamente a medida que os alunos tentam responder os itens acima.

Ao realizar a atividade proposta, espera-se que os alunos se atentem que cada elemento de uma linha da matriz 2×3 é relacionado com um elemento da matriz 3×1. E, em conjunto com a compreensão obtida nas atividades 1 e 2, conclua no item a que a matriz resultante deste produto será de ordem 2×1. Já no item b, ao realizar corretamente o produto o aluno deve encontrar Costa Rica e Canadá como solução. Seguindo os itens, ao tentar desenvolver o item c, acredita-se que os alunos apresentem dúvidas. Ao tentar resolver este item o professor pode levantar alguns questionamentos para induzí-los a resposta esperada: que não é possível realizar o produto entre uma matriz 3×1 e uma 2×2, nesta ordem.

Finalizando as atividades de produto, o professor deve apresentar formalmente o conceito e destacar que este não é apenas o único modelo de produto existente envolvendo matrizes, mostrando assim o produto de uma matriz por um número real.

Capítulo 7

Aplicação das atividades em sala de aula

A fim de investigar a eficácia do material elaborado junto às atividades anteriores, colocamos em prática a sequência didática proposta e mostraremos alguns pontos de destaque em seu desenvolvimento.

Inicialmente a intenção era aplicar as atividades em uma turma da rede pública, porém devido a alocação estabelecida no ano de 2023, isso não foi possível, em vista de não possuir a turma adequada à aplicação. Entretanto, foi realizável na rede privada. Ao todo foram utilizadas doze aulas de cinquenta minutos (como proposto) em uma turma da segunda série do Ensino Médio do Colégio Lazares, colégio este localizado no bairro de Maria Paula no município de São Gonçalo/RJ.

A professora e a turma já possuíam uma interação, pois a mesma também foi professora deles na primeira série do Ensino Médio. Portanto, este fator colaborou para uma boa organização e desenvolvimento do trabalho. A turma de 21 foi dividida em 7 grupos com 3 alunos. Foi dada liberdade à turma para a escolha dos grupos, mas com a condição de que houvesse 7 grupos com 3 alunos cada.

7.1 1ª parte - Interpretação de tabelas

A primeira parte possui quatro atividades relacionadas à interpretação da tabela do Grupo G e uma duração prevista de uma aula de cinquenta minutos. A turma não apresentou dificuldades e todos os grupos a realizaram em um tempo menor. Logo, as atividades propostas podem ser aplicadas no tempo sugerido. Ressaltamos que, na atividade 4 (Qual foi o total de derrotas obtidas nesse grupo?) um dos grupos, o "Grupo 2", respondeu de forma errada "1". Ao serem questionados sobre essa resposta, os alunos responderam que associaram esta atividade como continuação da atividade 3, que perguntava exclusivamente sobre a seleção brasileira.

7.2 2ª parte - Definição de matriz

Esta parte também conta com quatro atividades e uma previsão de duas aulas de cinquenta minutos e, envolve todos os oito grupos da Copa do Mundo de 2022. Na atividade 1 a professora entrega o material preenchido aos alunos e pede para identificarem com as bandeirinhas qual seleção possui as pontuações apresentadas.

O "Grupo 1" foi o que apresentou a maior facilidade e compreensão, mas o entusiasmo com o material prejudicou o desenvolvimento da atividade, com isso, algumas vezes era necessário interromper as atividades para contê-los.

Com exceção do grupo acima, os demais mostraram muita dificuldade na interpretação do enunciado. Somente com interferência da professora e leitura em voz alta que entenderam o que estava sendo pedido. Entretanto a maioria dos grupos não identificou as linhas e colunas com as peças conforme solicitado, focaram apenas nas peças numéricas que representavam as pontuações. Por este motivo, estamos propondo uma Atividade 0, com a qual pretendemos introduzir o aluno na construção das matrizes com o uso das bandeirinhas.

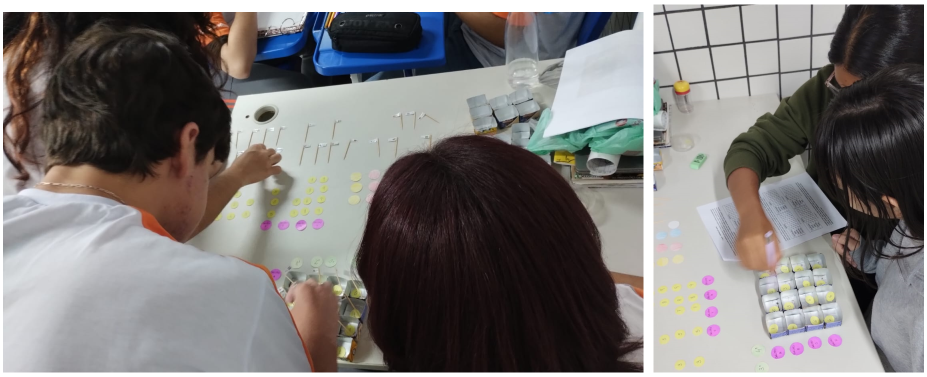


Figura 7.1: Alunos realizando atividades da 1ª parte.

O "Grupo 4" encontrou muita dificuldade em todo o desenvolvimento da sequência, porém o que chamou mais atenção foi o fato do grupo não saber argumentar as suas ideias. Por várias vezes a única colocação feita, foi do tipo "Não sei", "Não entendi" ou "Não faço ideia". Com a proposta similar, a atividade 2 pede ao aluno para preencher o material com as pontuações das demais seleções não trabalhadas na atividade 1. Não houve dificuldades nessa atividade.

Após a definição ser apresentada, a professora dá sequência ao trabalho com as atividades 3 e 4. A atividade 3 foi realizada com sucesso por todos os grupos, porém a atividade 4 apresentou três respostas incoerentes. A saber: O "Grupo 3" achou 16 linhas, o "Grupo 4" achou 32 linhas e o "Grupo 7" achou 4 linhas. A resposta esperada era 8 linhas, em vista da questão informar que as linhas representam os grupos da Copa. Esta atividade foi respondida corretamente por três grupos, enquanto um grupo não realizou esta atividade.

As atividades da 2ª parte foram desenvolvidas dentro do tempo previsto.

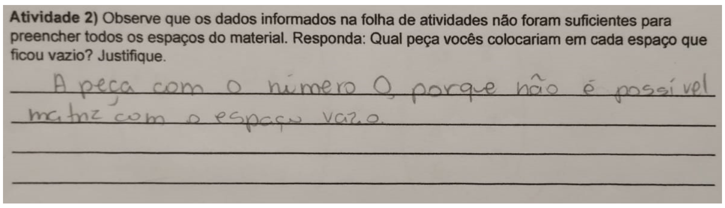
7.3 3ª parte - Matriz genérica

A 3ª parte conta com apenas duas atividades, mas como a primeira demanda mais cautela na interpretação e raciocínio, foi programado dois tempos de cinquenta minutos para o desenvolvimento desta parte e, este tempo foi suficiente para a realização. A atividade 1 exibe os placares das três rodadas do Grupo C da Copa e pede ao aluno que preencha o material recebido (4×4) a partir dos resultados de cada jogo. A saber que cada termo a_{ij} (notação apresentada ao final da 3ª parte pela professora) desse material representa quantos gols a seleção i fez sobre a seleção j.

Antes da aplicação da atividade 1, os alunos foram submetidos a exercícios técnicos propostos no livro para treino e compreensão da matriz genérica, entretanto, a primeira atividade contextualizada foi esta. Como esperado, de um modo geral os alunos não reagiram positivamente para atividade, novamente por conta da leitura do enunciado mas também por confundirem i e j .

Apenas o "Grupo 1", compreendeu a estratégia sem necessitar de uma explicação direcionada. Para os demais foi necessário exemplificar a partir de um outro Grupo da Copa. Os "Grupos 2 e 4" ainda apresentaram falhas no preenchimento do material mesmo após a explicação.

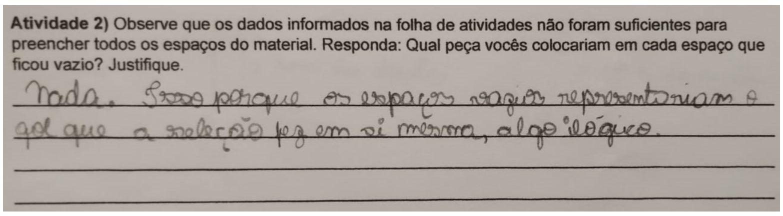
A atividade 2 chamava atenção para a diagonal principal que não foi preenchida. Ao serem questionados sobre o significado de cada espaço dessa diagonal, e como preencheriam, os "Grupos 3, 6 e 7" obtiveram sucesso ao responderem que a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44} representam uma possível disputa entre uma seleção e ela mesma e que deveriam ser preenchidos com a peça 0. Sobre as demais respostas, destacamos a do "Grupo 1" (que até está atividade não havia cometido erro) e a do "Grupo 5".



Atividade 2) Observe que os dados informados na folha de atividades não foram suficientes para preencher todos os espaços do material. Responda: Qual peça vocês colocariam em cada espaço que ficou vazio? Justifique.

A peça com o número 0, porque não é possível matriz com o espaço vazio.

Figura 7.2: Grupo 1 - Resposta da Atividade 2.



Atividade 2) Observe que os dados informados na folha de atividades não foram suficientes para preencher todos os espaços do material. Responda: Qual peça vocês colocariam em cada espaço que ficou vazio? Justifique.

Nada. Isso porque os espaços vazios representariam o gol que a seleção fez em si mesma, algo ilógico.

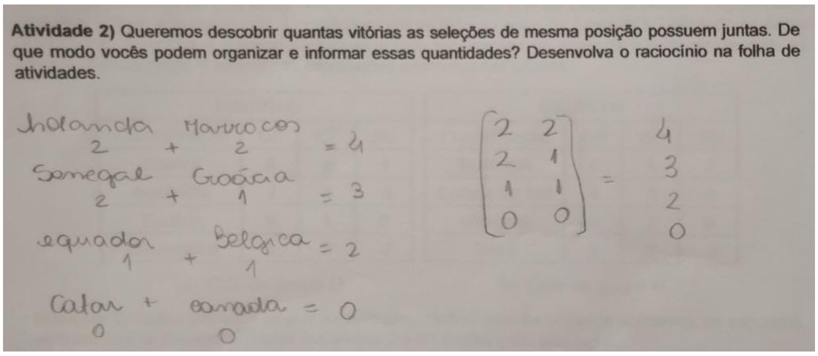
Figura 7.3: Grupo 5 - Resposta da Atividade 2.

7.4 4ª parte - Soma de matrizes

A 4ª parte é a que possui mais atividades, um total de seis a serem realizadas em dois tempos de cinquenta minutos, onde as três primeiras foram realizadas na folha de atividade com a escrita matricial. A realização das atividades dessa parte, ocorreu de modo significativo, o que mostrou que o tempo previsto foi suficiente.

A partir das tabelas dos Grupos A e F com informações sobre a quantidade de vitórias, derrotas e empates das seleções, na atividade 1 era solicitado aos alunos que construíssem as duas matrizes 4×3 que representavam esses grupos. O "Grupo 2" foi o único que expôs dificuldade e escreveu a matriz genérica 3×4 como solução.

A atividade 2, pede a quantidade de vitórias que as seleções de mesma posição possuem juntas e fornece uma liberdade de organização para a resposta. Os alunos não apresentaram dificuldades nesta atividade e vale um destaque para o "Grupo 4" que exibiu corretamente o resultado a partir de uma soma simples de valores mas se equivocou ao tentar reproduzir em forma matricial.


Atividade 2) Queremos descobrir quantas vitórias as seleções de mesma posição possuem juntas. De que modo vocês podem organizar e informar essas quantidades? Desenvolva o raciocínio na folha de atividades.

Holanda 2 + Marrocos 2 = 4
Senegal 2 + Croácia 1 = 3
equador 1 + Belgica 1 = 2
Catar 0 + canada 0 = 0

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

Figura 7.4: Resolução do Grupo 4.

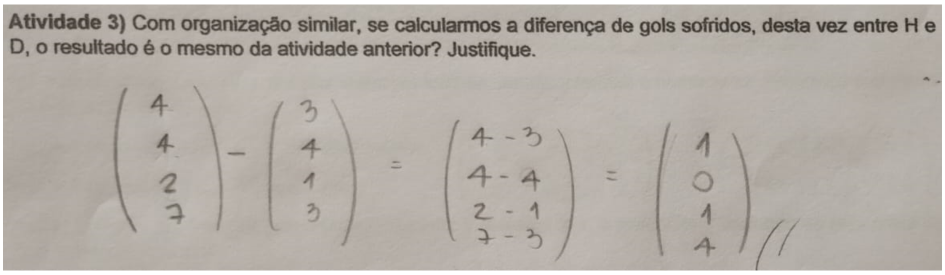
A atividade 4 consistia em preencher dois materiais recebidos a partir das matrizes da atividade 1, e a atividade 5 orienta a preencher o terceiro material, que representa a matriz soma das duas anteriores. Esta deveria ser preenchida com a movimentação das peças dos dois primeiros para o terceiro, de modo que duas peças colocadas em um espaço representam a soma que efetuaram nas atividades 2 e 3. Por fim, a atividade 6 pede aos alunos que separem as bandeirinhas das seleções referentes aos Grupos A e F e as coloquem no material representativo da matriz soma, corretamente. Essas atividades, de um modo geral, foram desenvolvidas com exito, apenas no início da atividade 5 que o "Grupo 6" cogitou colocar peças com o número da resposta da soma ao invés de transportar as peças como foi solicitado.

Foi possível notar que os alunos realizaram essas atividades de forma mais proveitosa, pois já estavam mais familiarizados com o material. Assim, como as primeiras atividades não demandaram muito tempo, as seis atividades foram realizadas em torno de 70 minutos, bem menos que o previsto.

7.5 5ª parte - Subtração de matrizes

As cinco atividades da 5ª parte foram programadas para aplicação em dois tempos de cinquenta minutos. Envolvendo agora informações como gols pró, gols contra e saldo de gols dos Grupos D e H, a atividade 1 pede que preencham corretamente os materiais 4×3 referente a cada um dos grupos a posicionar o material da esquerda sendo do Grupo D e o da direita, do Grupo H. Em seguida, a atividade 2, pede para realizar na folha de atividades a diferença de gols contra entre as seleções de mesma posição. Essas duas primeiras atividades não apresentaram dificuldades.

Seguindo para a atividade 3, que os questionam sobre o cálculo da diferença entre H e D, nesta ordem, os grupos argumentaram bem em voz alta e mostraram o raciocínio corretamente na folha de atividades. Mas vale o destaque para o “Grupo 1” que além de responder corretamente mostrou o raciocínio através da diferença entre as matrizes colunas (vetores colunas) que cada uma representa ao tratar de gols contra.


Atividade 3) Com organização similar, se calcularmos a diferença de gols sofridos, desta vez entre H e D, o resultado é o mesmo da atividade anterior? Justifique.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 4-4 \\ 2-1 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} //$$

Figura 7.5: Resolução do Grupo 1.

Os alunos não apresentaram dúvidas em responder as atividades 4 e 5, inclusive na atividade 5, ao tentar preencher o material resultante conforme a atividade da soma, observaram que isso não era possível e imediatamente pegaram as peças numéricas fora dos materiais e utilizaram para representar o resultado da diferença.

Assim como a atividade da soma, a da subtração também foi realizada em um tempo menor do que o programado.

7.6 6ª parte - Produto de matrizes

Finalizando a aplicação das atividades, a 6ª parte traz uma aplicação envolvendo produto de matrizes segundo as cores das bandeiras das seleções em três atividades. Inicialmente são propostas três aulas de cinquenta minutos, lembrando que na sequência didática há uma orientação para o professor, enfatizando que talvez haja necessidade de mais tempo. Em uma aula normal de produto de matrizes, esse assunto já exige mais cautela na sua explicação e prática. Com o uso do material não seria diferente.

Diferente dos outros materiais que os alunos preencheram no decorrer das atividades, na atividade 1 eles são orientados sobre como preencher os materiais recebidos com as cores e números indicados a partir da representação a_{ij}. Para esta atividade foram utilizados um material 2×2 com cores e outro 2×1 com números (este posicionado à direita do anterior).

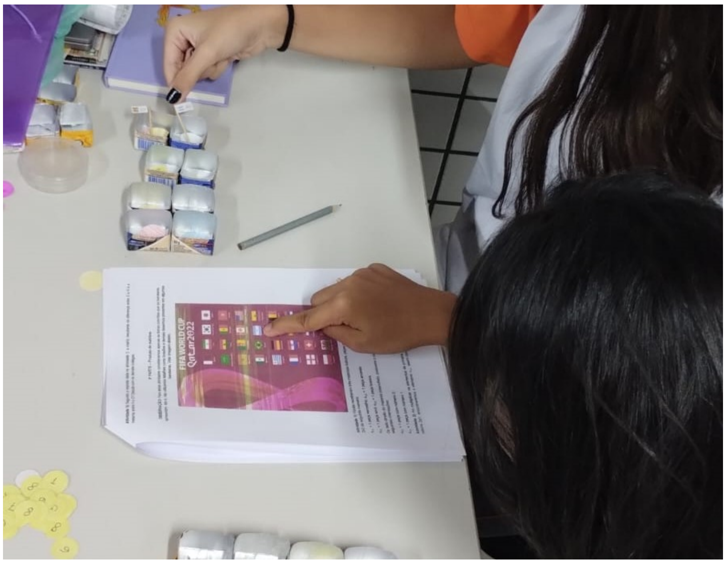


Figura 7.6: Resolução do Grupo 7.

Com as orientações da atividade 2, os alunos são capazes de preencher a matriz 2×1 que representa o produto das duas matrizes preenchidas anteriormente e assim, a partir das cores combinadas, identificar com as bandeirinhas qual país está representado em cada espaço. No começo, todos os grupos apresentaram algum tipo de dificuldade, inclusive se questionavam sobre a matriz solução ser 2×1. Porém, esta explicação viria mais a frente.

A última atividade já apresenta dois materiais preenchidos aos alunos para eles somente realizarem o produto e descobrir quais seleções os resultados representam, desta vez entre uma matriz 2×3 e uma 3×1. Diferente das atividades anteriores, esta apresenta três itens a serem respondidos, onde a primeira é justamente quantas linhas e colunas terá a matriz resultante deste produto. Mesmo observando novamente a resolução da atividade anterior, nenhum grupo conseguiu responder com sucesso a esta pergunta.

Após explicação da professora e apresentar o material 2×1 que também equivale ao produto dessas matrizes, o segundo item perguntava quais países estão representados nesta matriz. Aqui, com o material resultante em mãos, todos os grupos realizaram o produto de forma positiva e concluíram o esperado.

Instigando os alunos a raciocinarem, o último item propõe aos grupos preencher novamente os materiais entregues no início da atividade 3 e trocá-los de posição entre si. Ao serem questionados sobre como realizariam o produto nessa situação, todos compreenderam que não seria possível, pois não havia peças suficientes para serem relacionadas.

Capítulo 8

Conclusão

Levando em consideração os aspectos apresentados, entendemos que a educação vem em constante processo de mudança, o que acarreta um estudo e conhecimento ainda maior do professor. Esse conhecimento não tem como fundamento apenas a estrutura conceitual que irá ensinar, é importante também conhecer a proposta curricular que a BNCC abrange.

Entendemos que há três vieses de professores: aquele que já atua no ensino básico há alguns anos, aquele recém formado e licenciandos. Todos apresentam um nível diferente de adequação ao novo currículo. No que diz respeito ao professor do Ensino Médio, o que já atua no ensino básico possui um planejamento totalmente teórico, onde o maior objetivo é a preparação do aluno para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) . Em contrapartida, os recém formados e licenciandos possuem um desafio ainda maior. Estes vêm de uma formação que não foi reformulada com apresentação prévia da BNCC, então além da nova experiência de iniciar sua carreira são instigados a pesquisar e compreender o que é a BNCC e como iniciar sua prática docente de acordo com essa base.

A análise dos livros realizada neste trabalho mostra o quão diferente pode ser a forma de ensinar determinado assunto, em vista disso, é muito importante o diálogo entre o professor e a escola em que atua para assim fazer a escolha adequada de material didático segundo o programa de ensino que a instituição acredita ser o ideal para seus alunos.

A sequência didática elaborada e aplicada mostrou-se bastante eficiente não só com relação à apresentação do conceito mas também trouxe uma perspectiva muito positiva sobre relação professor-aluno e aluno-aluno.

Matriz é um conceito sempre presente em vestibulares e concursos públicos, pensando em um ensino de qualidade esperamos que a sequência didática proposta traga motivação não só aos alunos mas também ao professor. Que ele possa repensar sobre a sua metodologia, se está adequada às necessidades da sua classe e de que modo as atividades propostas podem contribuir para o desenvolvimento das suas aulas. Nenhum assunto deve ser ensinado por si só, importante fazer o aluno compreender a teoria e sua prática em exercícios porém exibindo também a importância do assunto no mundo real. Essa prática colabora com o crescimento e interesse escolar e também amplia a sua visão de mundo ajudando na sua futura escolha profissional.

Referências Bibliográficas

[1] BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G; SOUSA, P. R. C. *Prisma matemática: sistemas, matemática financerira e grandezas.* 1.ed. São Paulo: FTD, 2020.

[2] BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2015.

[3] BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2016.

[4] BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

[5] BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.* Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base - Acesso em: 02 de ago. de 2022.

[6] BRASIL. *Câmara dos Deputados. Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017.* Disponível em http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/2017/lei-13415-16-fevereiro-2017-784336-publicacaooriginal-152003-pl.html. Acesso em 02 ago. 2022

[7] CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *Quadrante matemática e suas tecnologias: sistemas lineares e geometria analítica.* 1.ed. São Paulo: SM, 2020.

[8] DELGADO, J.; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica.* Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[9] FERREIRA, F. E.; SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ser protagonista: matemática e suas tecnologias: pensamento computacional e fluxogramas.* 1.ed. São Paulo: SM, 2020.

[10] FRANCO, F. L. F.; SOLIS, M. M. S. *Materiales Didácticos Innovadores - Estrategia Lúdica en el Aprendizaje. Revista Ciencia UNEMI.* Milagro, nº10, p. 25 - 34, dezembro 2013.Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/5826/582663862005.pdf. Acesso em: 14 dez. 2022.

[11] GLOBO. *Globo Esporte: Copa do Mundo FIFA, 2022.* Disponível em: https://ge.globo.com/futebol/copa-do-mundo/2022/. Acesso em: 15 dez. 2022.

[12] IEZZI, G; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar, volume 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas.* 8.ed. São Paulo: Atual, 2013.

[13] LEONARDO, F. M. (Ed). *Conexões: matemática e suas tecnologias: matrizes e geometria analítica.* 1.ed. São Paulo: Moderna, 2020.

[14] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - volume 3.* 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[15] MAGALU. *Magazine Luiza.* Disponível em http:
http://www.magazineluiza.com.br. Acesso em: 18 de fev. de 2023.

[16] OLIVEIRA, M. R.; PRINHEIRO, M. R. R. *Coleção elementos da matemática, volume 3: sequências, análise combinatória, matriz.* 3.ed. Fortaleza: VestSeller, 2010.

[17] QUINTERO, M. C. B. *El uso de material concreto como estrategia didáctica para favorecer el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de 4º2 del Instituto Técnico Alfonso López, sede IV Centenario, de Ocaña. Profundización: Práctica e Investigación Pedagógica. Escuela de Ciencias de la Educación, UNAD.* : Ocaña, 2021.

[18] TEIXEIRA, L. A. (Ed). *Diálogo: matemática e suas tecnologias: geometria analítica, sistemas e transformações geométricas.* 1.ed. São Paulo: Moderna, 2020.

Capítulo 9

Apêndice - Produto Educacional

PRODUTO EDUCACIONAL

Sequência didática para o ensino de operações matriciais no Ensino Médio

KÍSSIA FERREIRA

Maio
2023

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este Produto Educacional é referente à dissertação intitulada “Vetores e Matrizes no Ensino Médio com o uso do Material Concreto” e é composto de uma sequência didática com atividades referentes às seguintes operações:

- Interpretação de matrizes;
- Definição de matriz;
- Matriz genérica;
- Adição;
- Subtração;
- Produto de matrizes.

Buscando concretizar as operações matriciais, foram elaboradas seis partes de atividades segundo os tópicos acima que possuem como motivação a Copa do Mundo de 2022, realizada no Catar. A Copa do Mundo contou com a participação de 32 países que foram divididos em oito grupos com quatro seleções cada um, definida a partir de um sorteio ocorrido em 01 de abril de 2022 pela FIFA (Federação Internacional de Futebol Associado). Para este trabalho foram utilizados determinados dados conveniente a prática de cada atividade proposta. Mas, caso o professor ache interessante trabalhar com uma matriz mais ampliada, é válido utilizar todos os elementos de uma vez.

A primeira parte introduz a interpretação de uma tabela, nesta sequência utilizaremos as informações do Grupo G (grupo do Brasil). Já na segunda parte, o objetivo é localizar informações a partir das orientações referentes à linhas e colunas. Nesta parte utilizaremos todos os grupos da Copa. A tericeira parte apresenta uma atividade referente à matriz genérica com auxílio do Grupo C. Adentrando nas operações, a quarta e quinta parte, respectivamente, trazem uma atividade sobre soma (grupos A e F) e subtração (grupos D e H) de matrizes. E para finalizar, a sexta parte introduz produto de matrizes a partir das cores das bandeiras. Informações das tabelas e das bandeiras podem ser encontradas em [1] e [2].

Como a proposta da sequência didática é introduzir o conceito de matriz e suas operações, é indicado que a mesma seja aplicada em turmas da 2ª série do Ensino Médio. E ao final de cada parte, deixamos como sugestão ao professor, conceituar formalmente aquele tópico que foi apresentado com auxílio do material didático.

Capítulo 2

Sequência didática

2.1 1ª parte - Interpretação de tabelas

Objetivo: Leitura de tabelas.

Material necessário: Folha de atividade com uma tabela da Copa do Mundo.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 1 aula de 50 minutos.

Atividade 1: Observe a tabela abaixo referente a um determinado grupo da Copa do Mundo, onde P = total de pontos, J = quantidade de jogos, V = quantidade de vitórias, E = quantidade de empates e D = quantidade de derrotas.

GRUPO G					
Classificação	**P**	**J**	**V**	**E**	**D**
Brasil	**6**	**3**	**2**	**0**	**1**
Suiça	**6**	**3**	**2**	**0**	**1**
Camarões	**4**	**3**	**1**	**1**	**1**
Sérvia	**1**	**3**	**0**	**1**	**2**

Figura 2.1: Grupo G da Copa do Mundo 2022.

Você consegue identificar a quantidade de vitórias da seleção de Camarões? E a quantidade de empates da seleção da Suíça?

Atividade 2: Localize na tabela os pontos obtidos ao final da última rodada de cada seleção. Há alguma seleção com 5 pontos? E com 1 ponto?

Atividade 3: Quais informações você consegue identificar sobre a seleção brasileira?

Atividade 4: Qual foi o total de derrotas obtidas nesse grupo?

2.2 2ª parte - Definição de matriz

Objetivo: Compreender a noção inicial de matriz como uma tabela $m \times n$, onde m é o total de linhas e n é o total de colunas. Cada linha i representa o grupo em que a seleção pertence e cada coluna j representa sua posição ao final da última rodada.

Material necessário: Material lúdico como representação da matriz, peças numeradas representando as pontuações, bandeirinhas de cada país participante da Copa, folha de atividade com tabelas da classificação da fase de grupos e peças de identificação das linhas e colunas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 1: Vocês receberam um material contendo 8 espaços, posicione-o de frente para vocês de modo que apresente 4 linhas (horizontal) e 2 colunas (vertical). Utilizando as peças numéricas, preencha corretamente este material, sabendo que a primeira coluna representa a posição de cada seleção do grupo G (retorne à tabela da 1ª parte) ao final da fase de grupos, ou seja, números de 1 a 4. Agora, observando a tabela deste grupo, preencha a segunda coluna com as bandeirinhas de acordo com a posição de cada país.

Atividade 2: O material que vocês receberam apresenta 16 espaços contendo números que representam as pontuações de cada seleção ao final da última rodada da fase de grupos. Pegue as peças que vocês receberam e identifique cada linha (horizontal, de cima para baixo) como os quatro primeiros grupos em ordem alfabética e cada coluna (vertical, da esquerda para a direita) como a posição que um determinado país ficou em seu grupo. Analise o material que receberam e observem as tabelas, vocês conseguem identificar qual seleção possui cada uma das pontuações? Coloque as bandeirinhas nos espaços correspondentes.

GRUPO A					
Classificação	P	J	V	E	D
Holanda	7	3	2	1	0
Senegal	6	3	2	0	1
Equador	4	3	1	1	1
Catar	0	3	0	0	3

GRUPO B					
Classificação	P	J	V	E	D
Inglaterra	7	3	2	1	0
Estados Unidos	5	3	1	2	0
Irã	3	3	1	0	2
País de Gales	1	3	0	1	2

Figura 2.2: Grupos A e B da Copa do Mundo 2022.

GRUPO C					
Classificação	P	J	V	E	D
Argentina	6	3	2	0	1
Polônia	4	3	1	1	1
México	4	3	1	1	1
Arábia Saudita	3	3	1	0	2

GRUPO D					
Classificação	P	J	V	E	D
França	6	3	2	0	1
Austrália	6	3	2	0	1
Tunísia	4	3	1	1	1
Dinamarca	1	3	0	1	2

Figura 2.3: Grupos C e D da Copa do Mundo 2022.

Atividade 3: Retire as peças que foram entregues de dentro da caixa. Agora, observando as tabelas abaixo, tente preencher a caixa com a pontuação final de cada seleção. Neste caso, cada linha representa o grupo ao qual a seleção pertence, segundo a ordem alfabética E, F, G e H, isto é, a primeira linha representa o Grupo E.

GRUPO E					
Classificação	P	J	V	E	D
Japão	6	3	2	0	1
Espanha	4	3	1	1	1
Alemanha	4	3	1	1	1
Costa Rica	3	3	1	0	2

GRUPO F					
Classificação	P	J	V	E	D
Marrocos	7	3	2	1	0
Croácia	5	3	1	2	0
Bélgica	4	3	1	1	1
Canadá	0	3	0	0	3

Figura 2.4: Grupos E e F da Copa do Mundo 2022.

GRUPO G					
Classificação	P	J	V	E	D
Brasil	6	3	2	0	1
Suiça	6	3	2	0	1
Camarões	4	3	1	1	1
Sérvia	1	3	0	1	2

GRUPO H					
Classificação	P	J	V	E	D
Portugal	6	3	2	0	1
Coreia do Sul	4	3	1	1	1
Uruguai	4	3	1	1	1
Gana	3	3	1	0	2

Figura 2.5: Grupos G e H da Copa do Mundo 2022.

Atividade 4: Nas atividades anteriores trabalhamos com matrizes de quatro linhas e quatro colunas. Na folha que vocês receberam, ainda no contexto das linhas representarem os grupos e, as colunas, as posições (apenas quatro), mantendo a ordem alfabética dos grupos vocês conseguiriam criar uma matriz com cinco linhas? E com oito?

Atividade 5: Com base nas atividades anteriores, onde cada linha representa um grupo e, cada coluna representa a posição de uma seleção, responda: Qual o máximo de linhas que uma matriz pode ter dentro dessa problemática da Copa do Mundo?

2.3 3ª parte - Matriz genérica

Objetivo: Fixar a noção de matriz genérica.

Material necessário: Folha de atividades contendo os jogos da primeira fase de um grupo, material lúdico representativo da matriz, peças numeradas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 1: Vocês receberam na folha de atividades os placares das três rodadas do Grupo C. Pegue o material lúdico que receberam e preencha-o com as peças numeradas, de modo que cada espaço a_{ij} desse material represente quantos gols a seleção i fez sobre a seleção j.

Observação: Considere 1 = Argentina, 2 = Polônia, 3 = México, 4 = Arábia Saudita.

Figura 2.6: Jogos do Grupo C da Copa do Mundo 2022.

Atividade 2: Observe que os dados informados na folha de atividades não foram suficientes para preencher todos os espaços do material. Responda na folha de atividades: Qual peça vocês colocariam em cada espaço que ficou vazio? Justifique.

2.4 4ª parte - Soma de matrizes

Objetivo: Introduzir soma de matrizes correlacionando tabelas da Copa do Mundo.

Material necessário: Folha de atividades contendo duas tabelas, quatro materiais lúdicos representativos da matriz, peças numeradas e bandeirinhas de cada seleção participante da Copa.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 1: Observe as tabelas dos Grupos A e F que receberam. Para cada tabela, primeiramente, construa na folha de atividade uma matriz do tipo 4×3 onde cada linha

i representa a seleção dos grupos informados, em ordem de classificação e, cada coluna j, representa na seguinte ordem: quantidade de vitórias, derrotas e empates desses grupos.

GRUPO A			
Classificação	V	D	E
Holanda	2	0	1
Senegal	2	1	0
Equador	1	1	1
Catar	0	3	0

GRUPO F			
Classificação	V	D	E
Marrocos	2	0	1
Croácia	1	0	2
Bélgica	1	1	1
Canadá	0	3	0

Figura 2.7: Grupos A e F Copa do Mundo 2022.

Atividade 2: Queremos descobrir quantas vitórias as seleções de uma mesma posição possuem juntas. De que modo vocês podem organizar e informar essas quantidades? Desenvolva o raciocínio na folha de atividades.

Atividade 3: Faça o mesmo para a quantidade de derrotas e empates.

Atividade 4: Vocês receberam três materiais representativos para as matrizes. Pegue dois materiais e com as peças que também receberam, preencha dois materias de acordo com as matrizes criadas na atividade citada, isto é, uma referente ao Grupo A e outro referente ao Grupo F. Compare com seus colegas e observe se todos chegaram nas mesmas representações.

Atividade 5: Observe os materias que vocês preencheram e pegue o terceiro que ainda se encontra vazio. Esse último material representa a matriz resultante da soma das matrizes obtidas nas atividades 2 e 3. Preencha esse material utilizando as peças dos dois materiais que estão completos. Ou seja transfira as peças dos dois primeiros materiais para o terceiro a fim de que cada espaço correspondente contenha o resultado encontrado nas atividades 2 e 3.

Atividade 6: Separe as bandeirinhas das seleções dos Grupos A e F, posicione o meterial 4×1 a esquerda do material representante da soma (atividade 5) e adicione estas bandeirinhas nos espaços correspondentes dessa matriz coluna.

2.5 5ª parte - Subtração de matrizes

Objetivo: Introduzir subtração de matrizes correlacionando tabelas da Copa do Mundo.

Material necessário: Folha de atividades contendo duas tabelas, três materiais lúdicos representativos da matriz, peças numeradas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Atividade 1: Em sua folha de atividades é possível analisar as informações como gols pró (GP), gols contra (GC) e saldo de gols (SG), com relação aos Grupos D e H da Copa do Mundo.

Peguem dois materias lúdicos que receberam e posicionem um ao lado do outro da forma 4×3. Utilizando as peças numeradas, preencha o material da esquerda com as informações do Grupo D e o da direita com as informações do Grupo H segundo os dados das tabelas.

GRUPO D			
Classificação	GP	GC	SG
França	6	3	3
Austrália	3	4	-1
Tunísia	1	1	0
Dinamarca	1	3	-2

GRUPO H			
Classificação	GP	GC	SG
Portugal	6	4	2
Coreia do Sul	4	4	0
Uruguai	2	2	0
Gana	5	7	-2

Figura 2.8: Dados sobre gols dos Grupos D e H.

Atividade 2: Qual a diferença de gols sofridos (gols contra) entre os primeiros colocados, os segundos, os terceiros e os quartos colocados dos grupos D e H? Registrem o raciocínio em sua folha de atividades.

Atividade 3: Com organização similar, se calcularmos a diferença de gols sofridos, desta vez, entre H e D, o resultado é o mesmo da atividade anterior? Justifique.

Atividade 4: Segundo a resposta da sua dupla na atividade 3, a matriz resultante da diferença entre D e H é a mesma entre H e D? Discuta com as demais duplas.

Atividade 5: Agora, fazendo o devido preenchimento do último material e a partir das peças já posicionadas nos outros dois materiais, calculem a diferença entre D e H de gols pró e saldo de gols. Para esse preenchimento, utilize também a resposta da atividade 2.

2.6 6ª parte - Produto de matrizes

Objetivo: Apresentar a noção de produto de matrizes a partir da combinação das cores das bandeiras das seleções.

Material necessário: Folha de atividades contendo as bandeiras das seleções da Copa do Mundo. Cinco materiais lúdicos representativos da matriz, peças coloridas e numeradas.

Tipo de atividade: Mínimo dupla.

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Observação: Para estas atividades consideramos apenas as listras coloridas que as bandeiras apresentam, isto, é, não utilizaremos os detalhes como brasões e demais desenhos presentes em algumas bandeiras. Vide a imagem a seguir.

Figura 2.9: Bandeiras dos países da Copa do Mundo de 2022.

Atividade 1: Vocês receberam três materiais lúdicos, peças coloridas e numeradas, e uma folha contendo as bandeiras das seleções participantes. Preencha o material 2×2 da seguinte maneira:

- $a_{11} = 1$ peça vermelha; $a_{12} = 1$ peça amarela;
- $a_{21} = 1$ peça azul; $a_{22} = 1$ peça branca.

Do lado direito do material preenchido, posicione o material 2×1, e preencha-o segundo as seguintes orientações:

- $a_{11} = 1$ peça com número 2;
- $a_{21} = 1$ peça com número 1.

Observe então que colocamos lado a lado uma matriz 2×2 seguida de uma 2×1, desse modo, encontraremos uma matriz 2×1 como solução da atividade. O material restante, representa a matriz resultante do produto que irão realizar, posicione corretamente esse material ao lado do segundo.

Atividade 2: Ao multiplicar os elementos da primeira linha da matriz 2×2 com os elementos da matriz coluna 2×1, encontraremos o elemento a_{11}, assim como multiplicando os elementos da segunda linha com a matriz coluna, descobriremos o elemento a_{21}. Seguindo os passos abaixo, preencha a matriz resultante com as combinações de cores geradas pelos produtos:

- a_{11} = vermelho vezes 2 e amarelo vezes 1 (preencha o material com a quantidade correta de cada cor);
- a_{21} = azul vezes 2 e branco vezes 1 (preencha o material com a quantidade correta de cada cor).

Segundo a combinação encontrada em cada espaço e a relação das bandeiras dos países participantes da Copa do Mundo que receberam, vocês conseguiriam responder qual país cada espaço representa? Coloque a bandeirinha correspondente no lugar correto.

Atividade 3: Após realizar as atividades 1 e 2 e esclarecer suas dúvidas com o professor, agora vocês estão recebendo dois materiais com novas matrizes já representadas, efetue o produto entre elas, na ordem em que foram distribuídas e responda:

- (a) Qual será o tamanho da matriz resultante? Por quê? (Professor, entregue o material representativo da matriz reultante somente após a discussão deste item).
- (b) Quais países cada espaço dessa matriz representa?
- (c) Coloquem as peças nos materiais conforme foram entregues e, agora troque as duas matrizes preenchidas de posição? Como vocês realizariam este produto?

Referências Bibliográficas

[1] GLOBO. *Globo Esporte: Copa do Mundo FIFA, 2022*. Disponível em: https://ge.globo.com/futebol/copa-do-mundo/2022/. Acesso em: 15 dez. 2022.

[2] MAGALU. *Magazine Luiza*. Disponível em http: http://www.magazineluiza.com.br. Acesso em: 18 de fev. de 2023.