Bruno Salgado Cole

Polígonos Estrelados Regulares

Recife
2013

Bruno Salgado Cole

Polígonos Estrelados Regulares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rodrigo José Gondim Neves

Recife
2013

C689p Cole Salgado, Bruno
Polígonos Estrelados Regulares-Bruno Salgado Cole-Recife,2013.
29 f.: il.

Orientador: Rodrigo José Gondim Neves.

Trabalho de Conclusão(Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Matemática, Recife, 2013.

Referências:

1. Polígonos estrelados regulares.
2. Construção.
3. Demonstração combinatória do Teorema de Wilson.

I. Neves, Rodrigo José Gondim, orientador II. Título CDD510.

Comissão Julgadora:

Prof^{a}. Dra.
Anete Soares Cavalcanti
DM/UFRPE

Prof. Dr.
Airton Temistocles Gonçalves de Castro
DMat/UFPE

Prof. Dr.
Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva
DM/UFRPE

Prof. Dr.
Rodrigo José Gondim Neves
DM/UFRPE

A minha mulher e filho, minhas forças, Patrícia Cole e Arthur Cole

Do it

Tá cansada senta
Se acredita tenta
Se tá frio esquenta
Se tá fora entra
Se pediu aguenta

Se sujou cai fora
Se da pé namora
Tá doendo chora
Tá caindo escora
Não tá bom melhora

...

Se é do mato amanse
Trabalhou descanse
Se tem festa dance
Se tá longe alcance
Use sua chance

Se tá puto quebre
Tá feliz requebre
Se venceu celebre
Se tá velho quebre
Corra atrás da lebre

Se perdeu procure
Se é seu segure
Se tá mal se cure
Se é verdade jure
Quer saber apure

Se sobrou congele
Se não vai cancele
Se é inocente apele
Escravo se rebele
Nunca se atropele

Se escreveu remeta
Engrossou se meta
Quer prevê corneta
Pra moldar derreta
Não se submeta

Lenine

Agradecimentos

À minha mulher que me incentivou e me deu forças para chegar até o final, nas horas em que eu achei que não dava foi ela quem segurou a minha mão e me levantou. Aos meus pais, Eduardo e Ana Carmem, pelo apoio e amor incondicional e por nunca duvidarem de mim, a meus irmãos Lucas e Leonardo pela paciência e apoio, e, finalmente a meu filho Arthur, pois mesmo sem saber foi minha alegria e inspiração nas horas mais difíceis.

Também a meu Orientador Rodrigo, sem o qual nada disso seria possível, um cara genial, o melhor professor que já tive a oportunidade de ter. Sempre paciente com as minhas dificuldades e sempre acessível.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFRPE, em especial a Adriano Regis, Jorge Hinojosa, Maria Eulália, Maité Kulesza, Paulo Santiago, Márcia Pragana, Leon Denis e Teófilo Viturino.

Aos meus amigos feitos durante este curso, em especial ao grupo de estudos que me engrandeceu como pessoa e como estudante, principalmente a Gilder e a Wagner que passaram junto comigo pela parte mais difícil deste curso.

Aos meus amigos-irmãos Jefferson e Ana Cláudia que compreenderam as minhas falhas, não só compreenderam mas me supriram quando não pude estar lá.

E finalmente a Deus por tudo.

Resumo

O presente trabalho trata da construção dos polígonos estrelados regulares sobre dois pontos de vista: do ponto de vista geométrico, que está ligado ao problema de ciclotomia e do ponto de vista algébrico, ligado às raízes complexas da unidade e ao polinômio ciclotômico. Estudamos também o problema de contagem que implica numa demonstração combinatória do Teorema de Wilson.

Palavras-chave: polígonos estrelados regulares, construção, Demonstração combinatória do teorema de Wilson.

Abstract

The present work deals with the construction of regular stared polygons under two points of view: the first one is geometric and is connected with the problem of *ciclotomia* and the other one is algebric connected with the complex roots of unit and the ciclotomic polinomial. We study else the counting problem that implies a combinatorial proof of Wilson's theorem.

Keywords: regular polygons starred, construction, Combinatorial proof of Wilson's theorem.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Neste trabalho iremos construir polígonos estrelados regulares através da divisão do círculo em arcos congruentes. Apresentamos uma definição destes polígonos que aparece de forma natural. Abordamos várias perspectivas desde a construção com régua e compasso ou no Geogebra, até a construção utilizando a forma trigonométrica dos números complexos.

As primeiras contribuições matemáticas no estudo dos polígonos estrelados são do século XIV, devidas a Thomas Bradwardine Kepler, no século XVII, deu também contribuições sobre o tema, entretanto foi o matemático suiço Ludwing Schlafli, no século XIX, quem introduziu um símbolo numérico que identifica o polígono regular estrelado. O símbolo de Schlafli indica o que chamamos gênero e espécie de um polígono estrelado, a espécie é também chamada densidade por alguns autores, ver (COXETER,1969) e (FREDERICKSON,1997). A nomenclatura de Schlafli pode ser usada também para politopos, objetos multidimensionais por ele estudados que generalizam os polígonos e os poliedros, ver (COXETER,1969). Coxeter em (COXETER,1969) descreve os polígonos estrelados regulares a partir de seu grupo de simetrias. A construção de Schlafli de polígonos estrelados regulares, que inspira a nossa, está naturalmente relacionado com o problema clássico de *ciclotomia* que consiste em dividir o círculo em partes iguais e em geral não é possível com régua e compasso, ver (,) . Observamos porém que o mesmo não se limitava as possibilidades de construção utilizando régua e compasso, pelo contrário assumia uma postura teórica sem se preocupar como a construção poderia ser efetivamente feita.

Aqui, esta problemática será abordada seguindo uma sequência didática dividida entre os três anos do ensino médio. Para o 1° ano, escolhemos tratar da construção destes polígonos e chegar a uma definição clara de como os construímos tendo como base para este processo conceitos aritméticos abordados nesta série e em séries anteriores. Para o 2º ano, escolhemos trabalhar com a contagem destes polígonos, mas não só isso, contar também polígonos estrelados não regulares. Essas contagens dão origem à uma demonstração combinatória do teorema de Wilson e finalmente para o 3° ano resolvemos o problema de ciclotomia através dos números complexos, construindo as arestas do nosso polígono com a mesma ideia.

Acreditamos que hoje em dia a educação caminha para uma interação entre os vários conhecimentos, um bom exemplo é o ENEM, avaliação do Sistema de seleção unificada (SISU), esta avaliação em larga escala do governo federal oportuniza a entrada dos alunos ao ensino superior público. Acompanhando este desenvolvimento, estamos neste trabalho conectando conteúdos das diferentes séries do ensino médio através de uma mesma problemática.

A Matemática está toda entrelaçada, assim o ensino da mesma deve ser feito através de temas, e sobre estes, dar diferentes abordagens e resoluções, pois assim conquistamos de maneira mais efetiva o principal objetivo da Matemática: "o desenvolvimento do raciocínio e a autonomia do aluno".

O objetivo geral deste trabalho é a construção de polígonos estrelados regulares, por outro lado , aprendemos a contá-los e apresentamos outra perspectiva do ponto de vista dos números complexos para a construção das mesmas. Aparecendo aqui outros problemas como achar as raízes primitivas da unidade para podermos construir os lados dos nossos polígonos, algebrizamos também este problema indicando um polinômio que nos fornece tais raízes. Além de darmos uma pincelada histórica sobre este problema.

Capítulo 1

Polígonos estrelados regulares

1.1 Construindo polígonos estrelados regulares.

Primeiramente, vamos observar como são formados polígonos estrelados regulares inscritos em uma circunferência. Tomemos uma circunferência e a dividamos em n partes iguais, cada ponto da divisão da circunferência será chamado nó. Vamos verificar o que ocorre ao fazermos saltos de k em k entre os nós.

Exemplo 1.1. Vamos dividir o círculo em 10 partes iguais e escolher $k = 3$ para os saltos e ver o que acontece:

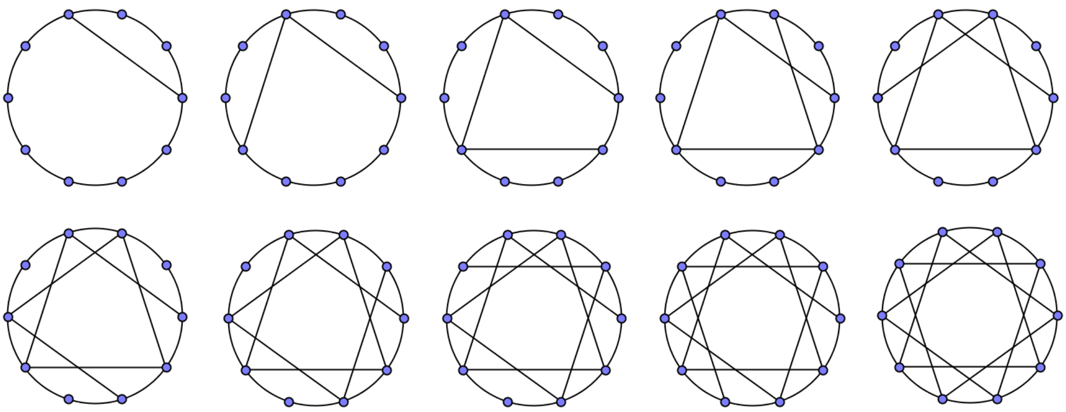

Figura 1.1: Circulo dividido em 10 nós e saltos de 3 em 3

Observe que na figura 1.1 os saltos são no sentido anti-horário.

Note que k e $n - k$ formam um polígono congruente, construído no sentido oposto.

Exemplo 1.2. $n = 10$ e $k = 7$

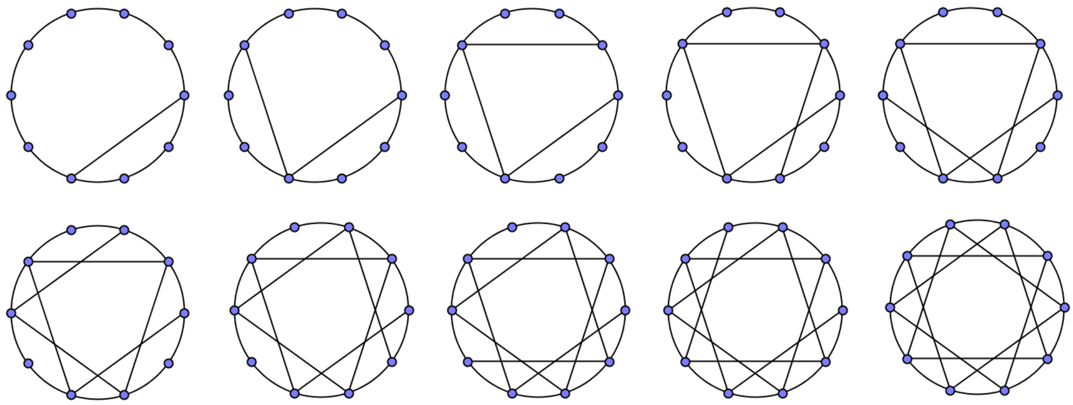

Figura 1.2: Circulo dividido em 10 nós e saltos de 7 em 7.

Note que a figura 1.2 é uma reflexão da figura 1.1 com relação ao eixo horizontal, ou de outra forma, 7 saltos no sentido anti-horário correspondem a 3 saltos no sentido horário.

Exemplo 1.3. Dividamos agora a circunferência em 10 partes, e façamos saltos de 2 em 2, conforme as figuras abaixo:

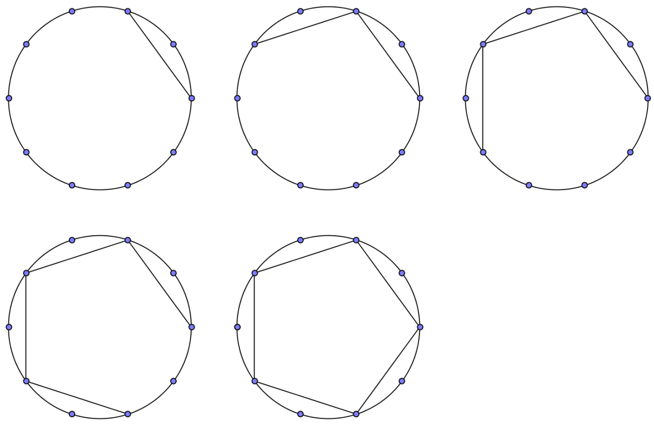

Figura 1.3: Circulo dividido em 10 partes com saltos de 2 em 2 nós

Observe que se prosseguirmos, na figura 1.3 os nós irão se repetir e as linhas se sobrescrever, sem que passemos por todos os nós.

Mas por que isso acontece? Por que quando seguimos com saltos de dois em dois em uma circunferência dividida em dez partes, iremos retornar ao ponto inicial sem percorrer todos os nós? Poderíamos pensar que é porque 2 divide 10. Realmente essa é uma condição suficiente, mas o que acontece se escolhermos um número para os saltos que não divida 10?

Exemplo 1.4. Seja $n = 10$ e $k = 6$; note que $n - k = 4$, logo nem k nem $n - k$ dividem n.

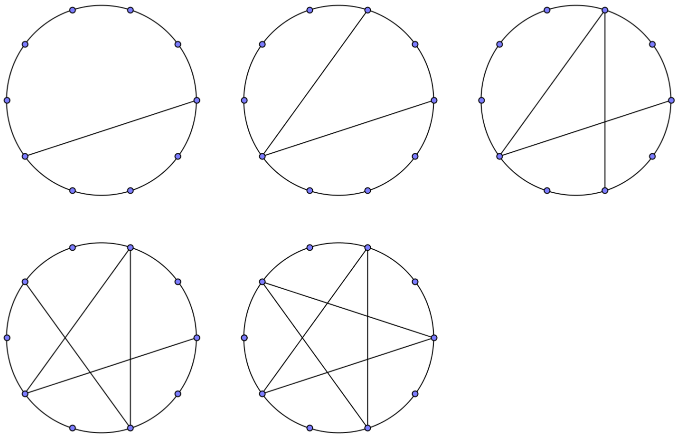

Figura 1.4: Circulo dividido em 10 nós com saltos de 6 em 6

A figura 1.4 nos mostra que k divide n não é condição necessária para que o polígono não percorra todos os nós.

Formamos um polígono "estrelado", mas neste caso não existem vértices do polígono em todos os nós, isso ocorre, de fato, porque n e k não são primos entre si, nos dois primeiros exemplos n e k são primos entre si. Vamos fazer a seguinte identificação: cada nó representará um resto possível na divisão por n condizente com a ordem cíclica. Ao fazer m saltos de k em k somos levados ao ponto que coincide com o resto de $k \cdot m$ na divisão por n. Temos assim o seguinte

Observação 1. Iremos utilizar a notação (a,b) para o *mdc* entre a e b.

Teorema 1. *Sejam n o número de divisões congruentes feitas em uma circunferência, k o números de saltos escolhidos, satisfazendo $(n,k) = 1$ e r um resto possível na divisão por n representando um nó. Então existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $k \cdot m$ deixa resto r na divisão por n com $0 \leq r \leq n - 1$. Ou seja, o conjunto dos vértices externos do polígono estrelado coincide com o conjunto dos nós.*

Demonstração: O que devemos mostrar é que qualquer que seja r existe m pertencente aos $\mathbb{N}$ tal que o resto de $k \cdot m$ na divisão por n é r, ou em outras palavras, $km - nq = r$. Como

$(n,k) = 1$, então existem m e q soluções naturais da equação diofantina, $kx - ny = 1$, ver (HEFEZ, 2011). Portanto, multiplicando ambos os membros por qualquer r variando entre os nós existirão m' e $q' \in \mathbb{N}$, que irão satisfazer a equação. Assim o conjunto dos vértices externos do polígono estrelado coincide com o conjunto dos nós.

Observação 2. Quando n e k não são coprimos, seja $d = (n,k)$ e escrevamos $k = dq$. Os saltos de k em k só visitarão os nós que forem múltiplos de d, esses restos podem ser identificados com os restos da divisão por $\frac{n}{d}$.

Notemos ainda que para $k = 1$ os segmentos não se cruzarão, formando, portanto, polígonos estrelados de primeira espécie que são os polígonos regulares de gênero n. Dito isto, observemos que até $n = 4$ só formaríamos polígonos estrelados de espécie 1, pois só teríamos coprimos com 4 os números 3 e 1 que formariam o mesmo polígono estrelado de espécie 1.

Como observado a construção destes polígonos requer alguns cuidados pedindo assim uma definição mais clara do que seriam polígonos estrelados.

Definição 1. Um polígono estrelado regular de gênero n e espécie k é um polígono obtido a partir da divisão em n partes congruentes do círculo, ligando estas divisões em saltos de k em k, em que $(n,k) = 1$.

1.2 Contando polígonos estrelados regulares

A fim de contar o número de polígonos estrelados regulares de gênero n, observamos, como já visto, que os casos de espécie k e $n - k$ são análogos, pois dividem a circunferência sucessivamente em partes iguais. Sabemos ainda que os polígonos de gênero n e espécie k devem satisfazer $(n,k) = 1$. Portanto devemos contar quantos são os números coprimos com n. Vamos considerar uma função, chamada função de Euler $\varphi(n) = \#\{k \in \{1,...,n\} | (k,n) = 1\}$. Comecemos demostrando o seguinte lema:

Lema 1. *Se* $(a,b) = 1$*, então* $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$*.*

Demonstração: Separemos os números de 1 a $a \cdot b$ de acordo com a tabela abaixo:

$0 \cdot b + 1$	$0 \cdot b + 2$	...	$0 \cdot b + k$	...	$0 \cdot b + b$
$b + 1$	$b + 2$	...	$b + k$	...	$1 \cdot b + b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(a-1)b + 1$	$(a-1)b + 2$	...	$(a-1)b + k$	...	$(a-1) \cdot b + b$

Sabemos que se $(k, a \cdot b) = 1$, então $(k,a) = (k,b) = 1$ e reciprocamente

Observe agora que b divide a primeira parcela de todas as colunas e obviamente divide a última coluna, portanto, basta analisar se b é ou não coprimo com a segunda parcela de cada soma em cada coluna, tirando a última coluna, pois como já dito b a divide toda, mas como temos b colunas, então teremos exatamente $\varphi(b)$ colunas com números coprimos com b.(HEFEZ, 2011)

Agora vamos analisar quais dos elementos em cada coluna dessas são coprimos com a.

Peguemos uma coluna k qualquer:

k, $b + k$, ..., $(a-1) \cdot b + k$. Como $(a,b) = 1$ então esta coluna forma um sistema completo de resíduos módulo a, suponhamos que não, peguemos dois elementos quaisquer desta coluna, temos que $(a-n) \cdot b + k \equiv (a-m) \cdot b + k \mod a \Leftrightarrow (a-n) \cdot b \equiv (a-m) \cdot b \mod a \Leftrightarrow (a-n) \equiv (a-m) \mod a \Leftrightarrow m = n$, além disso sabemos que $(a,m) = (a,r)$ onde r é o resto na divisão de m por a, logo se em cada coluna todos os seus elementos perpassam por todos os restos de a e temos exatamente a elementos em cada coluna, então teremos extamente $\varphi(a)$ elementos coprimos com a em cada coluna, concluindo que $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Agora vamos provar este outro lema:

Lema 2. $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = p^r(1 - \frac{1}{p})$ *onde* p *é primo.*

Demonstração: Observe que de 1 até p^r, temos p^r números naturais. Temos que excluir destes os números que não são primos com p^r, ou seja, todos os múltiplos de p, que são $p, 2p, ..., p^{r-1} \cdot p$, totalizando p^{r-1} divisores de p^r. Portanto, $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

Pelo teorema fundamental da aritmética temos que n pode ser fatorado em números primos de forma única, seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ...p_n^{\alpha_n}$ e utilizando os resultados dos lemas 1 e 2 podemos contar os múltiplos de cada primo na decomposição de n, assim teremos que $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ...p_n^{\alpha_n} \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_2}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{p_n})$ esta é a quantidade de números coprimos com n que formam polígonos estrelados.

Mas, como já mostrado, dois a dois formam casos análogos e que se k é primo com n, então

$n-k$ também o é, concluindo então que o número de polígonos estrelados regulares se resumem a $\frac{\varphi(n)}{2}$.

Notemos que para $n > 2$, $\varphi(n)$ é sempre par, pois se n é primo, então $\varphi(n) = n-1$, e se n é composto, então $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} \cdot ...p_n^{\alpha_n-1} \cdot (p_1-1) \cdot (p_2-1) \cdot ... \cdot (p_n-1)$.

Se n for par, então aparecerá o 2 dentre os números primos e se n for ímpar, então sua decomposição em fatores primos são todos ímpares, portanto $p_i - 1$ é par.

Desta forma provamos o seguinte:

Teorema 2. *O número de polígonos regulares de gênero n é $\frac{\varphi(n)}{2}$.*

Esta forma de vermos e contarmos polígonos estrelados nos dá ainda uma demonstração combinatória do teorema de Wilson, aqui seguimos de perto as ideias de (SANTOS, 2010):

Definição 2. Considere n pontos sobre uma circunferência, P_1,P_2, . . . ,P_n que chamaremos nós. Um polígono estrelado de gênero n é a linha poligonal determinada por uma sequência de vértices distintos P_{m_1},P_{m_2}, . . . ,P_{m_n}.

Exemplo 1.5. Para exemplificar, seja $n = 7$, na figura 1.5 construímos um polígono estrelado não regular

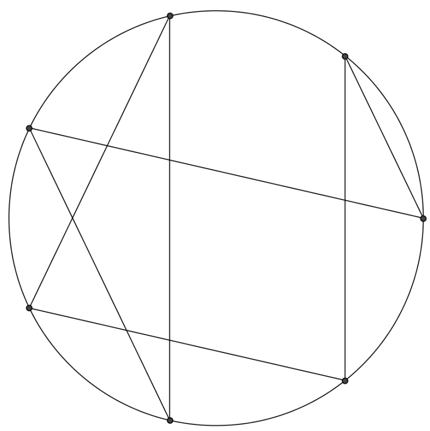

Figura 1.5: Círculo com 7 nós e saltos aleatórios

Observação 3. Observe que podemos obter, a partir destes, exatamente 7 polígonos congruentes fazendo rotações de $\frac{2\pi}{7}$ radianos, observe a figura 1.6.

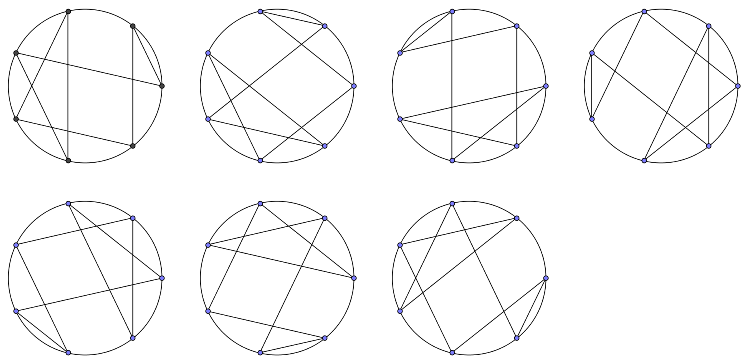

Figura 1.6: Figuras obtidas através de rotações de ângulo $\theta = \frac{2\pi}{7}$

Antes de seguirmos adiante devemos provar os seguinte lemas:

Lema 3. Considre um polígono estrelado inscrito em um círculo com p nós, com p primo. Se uma rotação deixa o polígono invariante, então a rotação $\frac{2\pi}{p}$ também o deixará invariante.

Demonstração: numerando os vértices em uma ordem cíclica, no sentido anti-horário, desta forma cada vértice corresponde a um resto na divisão por p e será representado por $\overline{x} \in \mathbb{Z}_p$. Com essa notação, toda rotação é da forma $\sigma(\overline{x}) = \overline{x+k}$ com $0 < k < p$ e k fixo, como $(k,p) = 1$ e como já foi provado no teorema 1 que existe um múltiplo de k, $m \cdot k$, $m > 0$ tal que $m \cdot k$ deixa resto 1 na divisão por p, então compondo m vezes obtemos $\sigma^{(m)}(\overline{x}) = \overline{x + m \cdot k} = \overline{x+1}$ que é a rotação de $\frac{2\pi}{p}$ e também deixará o polígono invariante.

Lema 4. Seja p um número primo e considere umm polígono estrelado inscrito em um círculo dividido igualmente em p nós e suponha que tal polígono seja invariante por alguma rotação. Então o polígono é regular.

Demonstração: Dado um polígono estrelado inscrito em um círculo com p nós, escolhemos um vértice em um nó qualquer V_i, digamos que o salto deste vértice, no sentido anti-horário, seja um determinado $s_i = k$, ligando portanto, os vértices V_i e V_{i+k}, vamos rotacionar o vértice V_i em $\frac{2\pi}{p}$, ligando agora os vértices V_{i+1} e V_{i+k+1}. Como provado no lema anterior, o polígono estrelado obtido nesta rotação permanece invariante, portanto, o vértice antes da rotação, V_{i+1}, com salto

s_{i+1}, também dava um salto de k, já que a aresta $\overline{V_iV_{i+k}}$, irá sobrepo-la após a rotação, assim $s_i = s_{i+1} = k$. Demosntrando assim a consistência dos saltos.

Eliminando assim a invariância para um círculo dividido em p nós, p primo, o que não aconteceria para um n composto qualquer como no exemplo abaixo:

Exemplo 1.6. Podemos facilmente verificar a invariância do polígono estrelado não-regular, quando rotacionado, na figura:

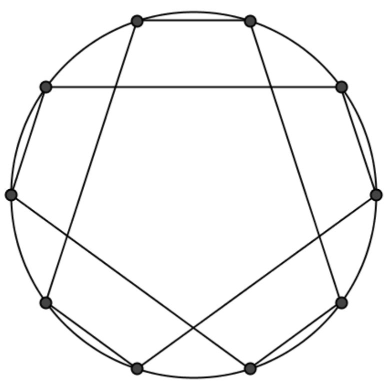

Figura 1.7: Polígono estrelado não-regular invariante ao ser rotacionado

Podemos agora partir para o teorema de Wilson:

Teorema 3. *(Teorema de Wilson)*

Se p é primo, então $p|(p-1)!+1$

Demonstração: É fácil ver que para o caso $p = 2$ é verdade. Podemos assumir então p primo ímpar. Dividindo nosso circulo em p nós, quantos são os polígonos estrelados que podemos formar dando saltos entre os nós, passando por todos os nós? Observe que se temos p nós, poderíamos pensar (erroneamente) que formaríamos $p!$ polígonos estrelados (regulares ou não) distintos, pois poderíamos escolher qualquer um dos p vértices para para iniciar a sequência, em seguida qualquer um dos $(p-1)$ vértices que sobraram e assim por diante. Contudo o polígono será o mesmo independente do nó inicial escolhido, desde que respeitemos a ordem cíclica da sequência, assim obtemos $\frac{p!}{p}$ polígonos. Além disso, escolhido um nó como ponto inicial do polígono estrelado podemos escolher entre duas arestas para começarmos a traçar este polígono, em outras palavras há dois sentidos possíveis da sequência cujo efeito geométrico é o mesmo. Assim obtemos, na realidade, $\frac{p!}{2p}$ polígonos estrelados de gênero p. Destes $\frac{p!}{2p}$ polígonos estrelados, exatamente $\frac{\varphi(p)}{2}$ ficam inalterados quando submetidos a uma rotação de $\frac{2\pi}{p}$ radianos, estes são os polígonos estrelados regulares, como p é primo sabemos que $\varphi(p) = p-1$. Os polígonos estrelados restantes são $\frac{p!}{2p} - \frac{p-1}{2}$, esses polígonos podem ser agrupados em classes de p em p quando submetidos a rotações de $\frac{2\pi}{p}$ radianos. Desta forma, o número total de classes é $\frac{\frac{p!}{2p} - \frac{p-1}{2}}{p} = \frac{(p-1)!-(p-1)}{2p}$. Como $2p$ divide $[(p-1)!-p+1]$, isso implica que p divide $[(p-1)!+1]-p$. Portanto p divide $[(p-1)!+1]$.

Capítulo 2

Raízes primitivas da unidade

2.1 Raízes primitivas da unidade.

O problema de construção de polígonos estrelados pode ser visto por outra perspectiva, sob o ponto de vista dos números complexos, e como seria esta ideia? Antes de se esclarecer isto, devemos pincelar um pouco sobre a forma trigonométrica dos números complexos.

A ideia aqui é dividir a circunferência em partes iguais e depois escolhermos os saltos com as exigências já enunciadas, mas agora sobre uma outra visão.

Sabemos que a forma trigonométrica dos números complexos é $z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, contudo neste trabalho iremos considerar pontos sobre a circunferências de raio igual a unidade, assim teríamos somente $z = \cos\theta + i\text{sen}\theta$, nossa circunferência também fica muito bem definida por $S = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$. Vamos, inicialmente, analisar o que é um produto de dois complexos desta forma, sejam $z_1 = \cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2$ teríamos então $z_1 \cdot z_2 = (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2)$, logo $z_1 \cdot z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$. Para maiores detalhes ver (WAGNER, MORGADO, CARMO, 2010)

Uma primeira conclusão sobre isto é que a multiplicação de dois complexos em S é também um complexo em S. Uma interpretação geométrica disto é a seguinte: Fixado z_1, $z_1 \cdot z_2$ é uma rotação no sentido antihorário no círculo unitário de um ângulo θ_2 a partir de z_1 , permanecendo, o produto, no círculo.

Uma segunda conclusão seria a conhecida fórmula de Moivre, basta tomar $z_1 = z_2$, assim $z^2 = \cos 2\theta + i\text{sen}2\theta$, multiplicando novamente por z , encontraríamos $z^3 = \cos(2\theta + \theta) + i\text{sen}(2\theta + \theta) = \cos 3\theta + i\text{sen}3\theta$, continuando este processo por n vezes finalmente teríamos $z^n = \cos n\theta + i\text{sen}n\theta$, geometricamente esta fórmula significa que multiplicarmos z por ele mesmo iremos fazer n

rotações sucessivas de ângulo θ, veja a figura abaixo:

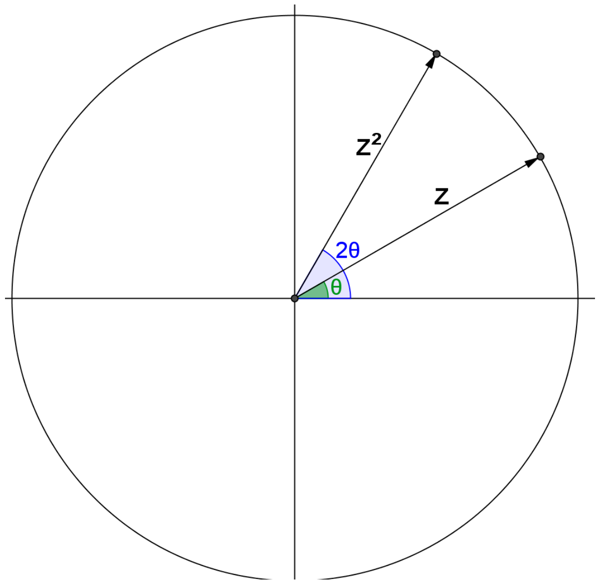

Figura 2.1: Círculo de raio unitário, mostrando que o produto de um complexo por ele mesmo permanece no círculo rotacionando θ

Antes de proseguirmos devemos definir:

Definição 3. Seja

$$U_n = \{w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}\}$$

o conjunto de todas as raízes complexas n-ésimas da unidade.

Podemos agora voltar ao nosso problema inicial devemos, primeiramente, dividir a nossa circunferência em nós. Note que a fórmula de Moivre nos fornece uma descrição das raizes n-ésimas da unidade, $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, pois $(w_k)^n = \cos 2k\pi + i\text{sen}2k\pi = 1$, essa segunda maneira de olhar para a fórmula de Moivre resolve este problema de ciclotomia, dividindo a circunferência na quantidade n que quisermos, perceba que, por exemplo se quisermos dividir nossa circunferência em 3 nós, basta $n = 3$:

$$w_0 = \cos 0 + i\text{sen}0,$$

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3},$$

$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3},$$

$$w_3 = \cos 2\pi + i\text{sen}2\pi,$$

Repare que $w_3 = w_0$, e se proseguirmos $w_4 = w_1$ e assim por diante. Isso ocorre, pois se $m = qn + r$ então

$$w_m = \cos\frac{2m\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2m\pi}{n} =$$

$$\cos\frac{2(nq+r)\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2(nq+1)\pi}{n} =$$

$$\cos(2q\pi + \frac{2r\pi}{n}) + i\text{sen}(2q\pi + \frac{2r\pi}{n}) =$$

$$\cos\frac{2r\pi}{n} + i\text{sen}\frac{2r\pi}{n}$$

mostrando então que $w_n = w_r$ com $r \in \mathbb{Z}$, pois, por exemplo, se $r = -1$ é o mesmo que $r = n - 1$.

Concluímos, então que escolhido n construíremos exatamente n nós. No exemplo $n = 3$ teríamos a seguinte figura:

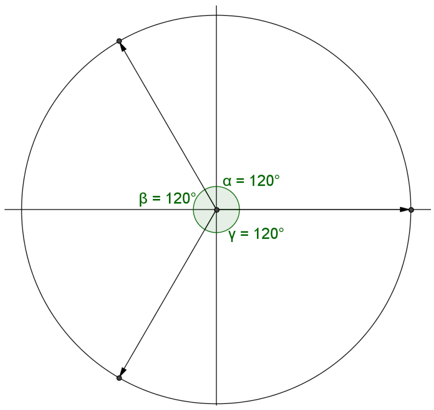

Figura 2.2: Círculo dividido a partir de U_3.

Podemos agora partir para a escolha dos saltos para formamos o nosso polígono estrelado regular. A construção de um polígono regular fica determinada pela seguinte dinâmica: iniciamos no nó que corresponde ao número complexo $1 = 1 + 0i$ e escolhemos uma raíz da unidade w, então a sequência ordenada dos vértices a se construir é

$$1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}, w^n = 1$$

Devemos escolher um $w_k \in U_n$ tal que $(n,k) = 1$, pois como já sabemos se faz necessária esta condição para que nosso polígono tenha vértices em todos os nós (teorema 1 página 10), escolhido nosso w_k devemos multiplicá-lo por ele mesmo n vezes, passando por todos os n nós e voltando ao nó inicial.

Vamos escolher um exemplo para ficar claro o processo.

Exemplo 2.1. Para $n = 8$, pela fórmula de Moivre teremos os seguintes nós:

$$w_0 = \cos 0 + i\text{sen}0$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$w_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$w_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\text{sen}\frac{3\pi}{4}$$

$$w_4 = \cos\pi + i\text{sen}\pi$$

$$w_5 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\text{sen}\frac{5\pi}{4}$$

$$w_6 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\text{sen}\frac{3\pi}{2}$$

$$w_7 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\text{sen}\frac{7\pi}{4}$$

formando esta figura:

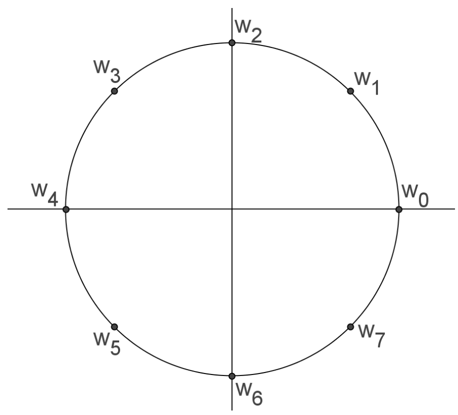

Figura 2.3: Círculo dividido a partir de U_8.

Formado os nós agora devemos escolher os saltos, mas se escolhermos w_1 ou w_7 formaríamos polígonos regulares, não podemos escolher w_2, w_4 *e* w_6 pois 2, 4 e 6 não são coprimos com 8, portanto nos resta w_3 que forma o mesmo polígono de w_5. Fazendo os cáculos temos:

$$w_3^2 = w_{2\cdot 3} = w_6$$

$$w_3^3 = w_{3\cdot 3} = w_9 = w_1$$

$$w_3^4 = w_{4\cdot 3} = w_{12} = w_4$$

$$w_3^5 = w_{5\cdot 3} = w_{15} = w_7$$

$$w_3^6 = w_{6\cdot 3} = w_{18} = w_2$$

$$w_3^7 = w_{7\cdot 3} = w_{21} = w_5$$

$$w_3^8 = w_{8\cdot 3} = w_{24} = w_0$$

$$w_3^9 = w_{9\cdot 3} = w_{27} = w_3$$

A figura 2.4 sintetiza a construção

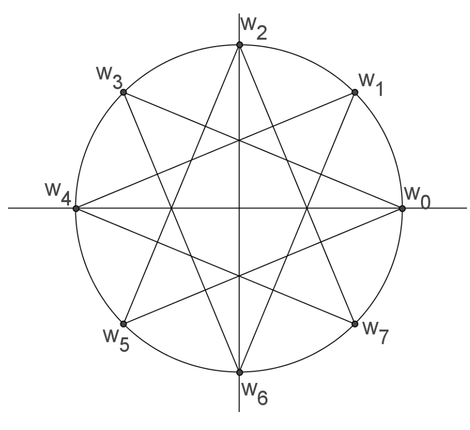

Figura 2.4: Polígono estrelado regular formado a partir de U_8 com saltos de 3 em 3.

Dito isto sobre a análise do ponto de vista dos complexos podemos enunciar um teorema que nos mostra que as nossas condições iniciais para a construções de polígonos estrelados são equivalentes, veja:

Teorema 4. (Caracterização das raízes primitivas da unidade)

Considere $U_n = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ o conjunto das raízes n-ésimas da unidade. As seguintes condições sobre um elemento $w_k \in U_n$ são equivalentes:

(i) $(k,n) = 1$;

(ii) As potências w_k^s, com $s \in \mathbb{N}$ geram todas as raízes n-ésimas da unidade

(iii) Não existe $m \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$, tal que $w_k^m = 1$;

(iv) As potências $w_k^0 = 1, w_k^1 = w_k, w_k^2, \ldots, w_k^{n-1}$ são todas distintas.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$

Como $(k,n) = 1$ então existem $x,y \in \mathbb{Z}$, tais que $kx + ny = 1$, portando podemos afrimar que $w^{kx} \cdot w^{ny} = w$, assim sendo $w_k^x = w_1$, pois $w^{ny} = 1$, concluindo que $w_k^{mx} = (w_k^x)^m = w_m$, ou seja, as potências de w_k geram todas as raízes n-ésimas da unidade.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Suponha, por absurdo, que existe $0 < m < n$ e $w_k^m = 1$, então as potências de w_k só irão gerar as seguintes raízes $w_k^0 = 1, w_k^1 = w_k, \ldots, w_k^{m-1}$, uma vez que $w_k^m = 1, w_k^{m+1} = w_k, \ldots$, que é uma contradição.

$(iii) \Rightarrow (iv)$

Suponha $a > b$, naturais menores que n, tais que $w^a = w^b$, então $w^{a-b} = 1$ teríamos então $m = a - b$, $m < n$ tal que $w^m = 1$, que é uma contradição. Concluímos então que todas as potências com expoente menor que n são diferentes.

$(iv) \Rightarrow (i)$

Suponha por absurdo que $(k,n) \neq 1$, então existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $k = k' \cdot d$ e $n = n' \cdot d$

Afirmação: $w_k^{n'} = 1$, de fato $w_k = w_{dk'} = w_{k'}^d$, isso implica $w_k^{n'} = w_{k'd}^{n'} = w_{k'}^{dn'} = w_{k'}^n = 1$. Isto é uma contradição uma vez que $n' < n$ e nossa hipótese é que tais potências são distintas. Portanto $(k,n) = 1$.

Definição 4. Uma raíz n-ésima da unidade é chamada raíz primitiva da unidade se satisfizer uma (todas) as condições do teorema 4.

2.2 Polinômios ciclotômicos.

Consideremos a equação $x^n = 1$ no corpo dos números complexos. Repare que se

$$U_n = \{w_1,w_2,w_3,...,w_n\}$$

é o conjunto de todas as raízes de $x^n - 1$ e se x_i não é raiz primitiva desta, é porque ela é raiz primitiva de $x^m - 1$ para algum $m < n$. Isso nos leva ao seguinte pensamento: Se acharmos todas as raizes não primitivas de $x^n - 1$, ou seja todas as raízes que já foram primitivas para algum $m < n$, então o restante será raiz primitiva de $x^n - 1$

Agora observemos o seguinte:

I. Se w é raiz n-ésima da unidade e $m = n \cdot q$, então w é raiz m-ésima da unidade. De fato, pois $w^m = w^{n \cdot q} = (w^n)^q = 1$.

II. Se w é raiz n-ésima não primitiva da unidade e m-ésima primitiva, então m divide n. De fato, vamos supor por absurdo que m não divida n, portanto pelo algoritmo de Euclides temos que $n = mq + r$ $(r \neq 0)$, pois se $r = 0$ teríamos que $m \mid n$, teríamos então $mq = n - r \Rightarrow (w^m)^q = w^{n-r} \Rightarrow 1 = \frac{w^n}{w^r} \Rightarrow w^n = w^r = 1$ contradição, pois $r < n$ e como já demonstrado no (iii) no teorema 3 da seção anterior, não existe $r < n$ onde $w^n = 1$ e $w^r = 1$.

Feitas estas observações perceba que se w_i não é raiz primitiva de $x^n - 1$ então ela será raiz primitiva de algum $x^m - 1$ tal que m é divisor de n, então se fatorarmos completamente o polinômio $x^n - 1$ e encontrarmos todas as raízes primitivas dos divisores de n o restante será raiz primitiva de $x^n - 1$. Vamos a um exemplo da ideia aqui colocada:

Exemplo 2.2. Exemplo: $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. Repare que 1 é sempre raiz, encontramos também -1 que não é raiz primitiva de $x^4 - 1$, pois já era de $x^2 - 1$, portanto como 3 não divide 4, encontramos já todas as raízes que já apareceram antes de $n = 4$ e que aparecem de novo aqui, nos restanto portanto, $\pm i$ como raízes primitivas de $x^4 - 1$.

Vamos definir então, indutivamente, os polinômios ciclotômicos de ordem d, $\phi_d(x)$ da seguinte maneira:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x)$$

Observe que $\phi_1(x) = x - 1, \phi_2(x) = x + 1, \phi_3(x) = x^2 + x + 1$ e $\phi_4(x) = x^2 + 1$, de modo geral se p é primo então os únicos divisores de p são p e 1, então $x^p - 1 = \phi_1(x) \cdot \phi_p(x)$, donde concluímos que:

$\phi_p(x) = \frac{x^p-1}{x-1} = x^{p-1} + ... + 1$. Quando n é composto é um pouco mais difícil encontrar os polinômios ciclotômicos, mas pode ser encontrada, pela fórmula indutiva, por exemplo $\phi_6(x)$ será obtido a partir de: $x^6 - 1 = \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) \cdot \phi_3(x) \cdot \phi_6(x)$ e como conhecemos todos os outros encontramos, fatorando $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ que $\phi_6(x) = (x^2 - x + 1)$.

O fato interessante é que tais polinômios tem coeficientes racionais e da definição vemos que suas raízes são as raízes primitivas n-ésimas da unidade.

2.3 Polígonos regulares construtíveis com régua e compasso.

Vamos começar esta seção enunciando o número de lados dos polígonos regulares, com menos de 100 lados, que podem ser construídos com régua e compasso: 3, 4, 5, 6, 8, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85 e 96. Note que se provado a construtíbilidade de um polígono qualquer sempre poderemos dobrá-lo cosntruindo as mediatrizes, por exemplo se sabemos construir o triângulo equilátero então sabemos construir o polígono de 96 lados, pois $96 = 3 \cdot 2^5$. A condição necessária e suficiente afim de um polígono de gênero n ser construtível com régua e compasso é $\varphi(n) = 2^r$ ver (STEWART, 1995).

Se faz necessário lembrar que com o uso de outras ferramentas alguns polígonos não construtíveis com régua e compasso poderiam ser construídos, como por exemplo Arquimedes, no século III a.C., construiu um heptágono com compasso e régua graduada. Mesmo assim a construção não é precisa, o mesmo acontece com construções realizadas em programas computacionais, como o geogebra por exemplo, pois o computador para trabalhar com números irracionais faz arredondamentos, tornando assim as construções imprecisas.

A construção do triângulo equilátero e do pentágono regular era conhecida, pelos gregos desde a antiguidade. Algebricamente podemos entender a partir de um simples argumento algébrico que são possíveis as construções dos polígonos regulares de 3 e 5 lados com régua e compasso, assim como a impossibilidade da construção do heptágono regular somente utilizando estes instrumentos.

Mas antes temos que fazer a seguinte observação seja $w \in S$, $S = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$, temos então $w = a + bi$ logo seu conjugado é $\overline{w} = a - bi$, portanto, o produto $w \cdot \overline{w}$ é igual a $a^2 + b^2 = 1$

mas já sabemos que este produto se encontra no círculo unitário de acordo com este exemplo mostrado na figura abaixo:

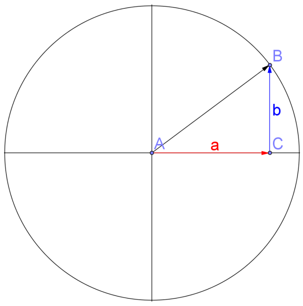

Figura 2.5: A figura mostra um exemplo gráfico de que $a^2 + b^2$ é igual ao raio, neste caso igual a 1.

Podemos então afirmar que $w \cdot \overline{w} = 1 \Leftrightarrow w^{-1} = \overline{w}$.

Agora vamos ao que foi proposto no início,

$(p = 3)$

$z^3 = 1 \Rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$ retirando a raiz unitária teremos:

$z^2 + z + 1 = 0$ teríamos as raízes $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$(p = 5)$

$z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$ (tirando a raiz unitária) dividindo tudo por z^2 termos, $z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} = 0$, fazendo $x = z + \frac{1}{z} \Rightarrow x^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$, logo obtemos $x^2 + x - 1 = 0$ chegando, portanto, nas raízes $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Por outro lado, como $z \in S$, então $x = z + \frac{1}{z} = 2a$, logo $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} = 2a$, portanto $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, mas $a^2 + b^2 = 1$ então se $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ou $b = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ e se $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $b = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Gostaríamos de lembrar que extração de raíz quadrada de um segmento que sabemos construir é sempre possível com régua e compasso, ver (GONÇALVES,2009)e(STEWART,1995)

$(p = 7)$

Já retirando a raiz untária termos $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ dividindo por z^3 teremos $(z^3 + \frac{1}{z^3}) + (z^2 + \frac{1}{z^2}) + (z + \frac{1}{z})$ mas fazendo $x = z + \frac{1}{z}$, teremos como consequênca $x^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$ e $x^3 = (z^3 + \frac{1}{z^3}) + 3(z + \frac{1}{z}) \Rightarrow x^3 - 3x + x^2 - 2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ Pode-se provar que as raízes desta cúbica não são construtíveis com régua e compasso ver (MOREIRA, 1990)

Os gregos antigos tinham uma obseção pelas construções realizadas com régua e compasso, somente aceitando como puras e verdadeiras as construções deste tipo. Desde a antiguidade eles sabiam construir o triângulo equilátero e o pentágono regular, e também o pentágono estrelado. Depois de milênios, Gauss, no século XIX, provou em sua obra prima *Disquisitiones Arithmeticae* ser possível a construção com régua e compasso do polígono de 17 lados, fato até então, inimaginável. Primeiro Gauss demostrou que as raízes da equação $x^p = 1$, com p primo, podem ser determinadas a partir das raízes de uma sequência de equações cujos graus são fatores primos de $p-1$. Se $p = 2^m + 1$, então $p - 1 = 2^m$, o que implica no único fator primo de $p-1$ ser 2, portanto, todas as equações obtidas a partir de $x^p = 1$ serão do 2º grau, o que garante que o polígono seja construtível. Repare por outro lado que m, tem que ser, também uma potência de 2, pois caso contrário então m teria pelo menos um fator primo ímpar, por exemplo se $m = r \cdot t$, com t ímpar e $r \in \mathbb{N}$, então teríamos $2^m + 1 = 2^{r \cdot t} + 1 = (2^r)^t + 1$ que é sempre divisível por $2^r + 1$, portanto não sendo primo. Os primos da forma $F_k = 2^{2^k} + 1$ são chamados primos de Fermat, os únicos primos de Fermat conhecidos são $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$. Fermat conjecturou que esses números seriam primos para todo k, entretanto Euler mostrou que 641 divide F_5 não sendo assim primo. Claramente os polígonos de gênero um primo de Fermat são construtíveis, pois $\varphi(F_k) = 2^{2^k}$. Em geral temos o seguinte resultado:

Teorema 5. *(Gauss) Um polígono regular de n lados é construtível euclidianamente se, e somente se, $n = 2^r \cdot p_1 \ldots p_k$ onde $r \in \mathbb{N}$ e $p_1, \ldots, p_k$ são distintos primos ímpares na forma $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1, 1 \leq i \leq k$, $s_i \in \mathbb{N}$.*

Foi assim que Gauss solucionou de maneira euclidiana, um problema que perdurava a séculos e séculos, o próprio uma vez disse:

"O dia foi 29 de março de 1796 e o acaso não teve qualquer participação. Antes disto, em verdade, durante o inverno de 1796 (meu primeiro semestre em Gottigen), eu já havia descoberto tudo relativamente à separação das raízes da equação $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$ em dois grupos. Após intensas considerações sobre o relacionamento de todas as raízes umas com as outras, em bases aritméticas, eu consegui." ver (GARBI, 2007) A demonstração moderna desse resultado utiliza a Teoria de Galois e pode ser encontrada em (STEWART,1995).

Capítulo 3

Sequência didática

Objetivos

Temos como objetivo deste trabalho fazer uma conexão entre vários conteúdos do ensino médio, tendo como inovador a sua característica continua.

Abordamos aqui conteúdos do 1° ano até conteúdos do 3° ano, desde construções até a forma trigonométrica dos números complexos, abordando também o caráter histórico do problema, fazendo não só com que o aluno sinta continuidade no processo, mas também se sinta parte da história da matemática.

Começamos o trabalho construindo polígonos estrelados regulares, usando uma abordagem aritmética como base para esta construção, aprofundando conceitos como números primos, números primos entre si, mdc e o algoritmo de Euclides. Todos conteúdos abordados no 1º ano do ensino médio.

Após isso, seguimos com problemas de contagem, todos abordados no 2º ano do ensino médio, aprendemos a contar números coprimos com n, desenvolvendo uma função que fica altamente contextualizada pela forma como o problema é apresentado e, por o aluno já ter conhecimento básico sobre o assunto, continuamos apresentando o teorema de Wilson provando-o a partir de um problema de contagem.

Dando seguimento à conexão dos conteúdos, no 3º do ensino médio, aprofundamos os números complexos despertando o aluno para um problema abordado por grandes matemáticos na história, como Gauss, por exemplo, analisando as raízes primitivas da unidade no circulo unitário a partir da forma trigonométrica dos números complexos, abordando também o produto de complexos e a fórmula de Moivre. Vemos também como encontrar as raízes primitivas da unidade a partir de um algoritmo puramente algébrico gerado através de uma ideia simples, aprofundando os conhecimentos algébricos dos alunos.

E encerramos este trabalho com a ideia por trás da construção de polígonos regulares com régua e compasso, dando aos alunos um contexto histórico sobre o que eles passaram três anos estudando, fazendo aqui, com que ele se sinta parte integrante da história da Matemática.

Público Alvo

Dentro dos objetivos já fica claro que este trabalho sugere ser desenvolvido ao longo dos 3 anos do ensino médio assim como sua justificativa didática, vamos agora justificar, portanto, os conteúdos escolhidos dentro de cada ano.

Tomando como base os conteúdos pedidos pelo vestibular seriado da UPE (SSA), que divide os conteúdos do ensino médio entre 1° ano, 2° ano e 3° ano, temos que neste trabalho abordamos os conteúdos: Números primos e compostos, maior divisor comum, decomposição em fatores primos, teorema fundamental da aritmética e polígonos regulares inscritos na circunferência (exigidos pelo SSA para o vestibular do 1° ano e aplicado neste trabalho para esta mesma turma), Combinatória: Estratégia básica de contagem (exigidos pelo SSA para o vestibular do 2° ano e aplicado neste trabalho para esta mesma turma), já no 3° colocamos os números complexos, que apesar de não fazerem mais parte de muitos vestibulares, acreditamos serem de extrema importância na grade curricular.

Pré-requisitos

Para os conteúdos apresentados ao 1º ano do ensino médio é necessário que o estudante já tenha estudado: Algoritmo de Euclides, números primos e compostos, teorema fundamental da aritmética, números coprimos, mdc, polígonos regulares e polígonos inscritos. Para os estudantes do 2° seria necessário ter como conhecimento prévio o conceito de função, princípio fundamental da contagem e fatorial. E finalmente para o último ano do ensino médio seria necessário o aluno já ter estudado trigonometria (seno, cosseno e relações trigonométricas), funções, números complexos (principalmente sua forma trigonométrica), operações algébricas, fatoração, produtos notáveis,

Materiais e tecnologias

Para este trabalho iremos precisar de régua não graduada, régua graduada e compasso para podermos fazer as construções dos polígonos estrelados assim como verificar que as construções com a régua graduada faz aproximações para as construções impossíveis sem a mesma.

De recursos tecnológicos iremos precisar do Geogebra também para as construções, mas aqui construindo através das raízes primitivas da unidade, as quais encontraremos no decorrer das aulas.

Recomendações metodológicas

Para a abordagem no 1° ano recomendamos que seja feita de forma prática, fazendo com que os alunos construam cada exemplo dado neste trabalho e encarando cada problema que aparecerá na construção dos exemplos ou os problemas levantados por questionamentos e interferências feitas pelo professor e assim ir construindo os conceitos propostos neste trabalho.

Seguindo para o segundo ano, recomendamos que os problemas sejam propostos como exercícios, enquanto o professor esteja abordando combinatória, este problema já vai estar contextualizado, pois o aluno já vai ter esmiuçado e conhecido bem a construção de polígonos estrelados, podendo agora contá-los.

Para o último ano do ensino médio é recomendado, primeiramente a apresentação da construção dos polígonos estrelados enquanto o professor estiver ensinando a representação trigonométrica dos números complexos, indo então para o geogebra e construí-los, após isso sugerimos uma pesquisa histórica sobre o problema de construções de polígonos regulares com régua e compasso e juntos chegarmos a Gauss e suas descobertas sobre este problema.

Dificuldades previstas

Podem surgir alunos com dificuldades na construção com régua e compasso, pois muitas escolas não trabalham com desenho geométrico, este problema pode ser solucionado dividindo a turma em duplas.

Como este projeto indica uma continuidade, podem existir alunos que entrem no decorrer dos anos sem o conhecimento prévio, assim se faz necessário que no 2° ano e no 3°, quando existirem alunos novatos, uma recapitulação, que pode ser feita pelos próprios alunos que vem acompanhando o processo, fazendo com que os mesmos se sintam parte do processo, relembrem e aprofundem o aprendizado.

Um problema que pode ser evitado pelo professor é antes das construções no Geogebra, dar uma aula introdutória sobre este programa ou utilizá-lo periodicamente em outras aulas, pois este programa é muito útil, principalmente na visualização de gráficos.

Ademais, qualquer dificuldade sobre o conteúdo, é um excelente momento para o professor revisitá-lo, passar exercícios, lembrar conceitos, etc.

Descrição Geral(Planejamento)

Na primeira parte do trabalho apresentaremos ao aluno do primeiro ano do ensino médio os exemplos de 1 à 3 propostos neste trabalho, para que eles possam, individualmente ou em dupla, construir tais exemplos com régua e compasso, tempo estimado 50 minutos ou uma aula.
Ao final desta aula apresenretamos os questionamentos necessários para que eles possam refletir a respeito da problemática e norteamos o caminho a ser seguido. Na aula seguinte apresentaremos uma nova construção que induz ao teorema 1 proposto neste trabalho, apresentaremos então o teorema, o provamos e encerramos a segunda aula apresentando uma definição que é consequência dos questionamentos levantados a partir de todos os exemplos construídos.

Já na segunda parte do trabalho para o 2° ano do ensino médio iremos apresentar como um problema de contagem, após abordarmos o princípio fundamental da contagem, lembrando aos alunos a definição que construímos no 1° ano.

Apartir de então quando os alunos encontrarem a dificuldade de contar quantos são os números coprimos com n, introduziremos a $\varphi(n)$ de Euler(a função de Euler), e a partir daí descobriremos como contar os polígonos estrelados regulares, em um segundo momento pediremos então para contarmos polígonos estrelados quaisquer, aqui com mais ação do professor provaremos então o Teorema de Wilson. Tempo previsto para este processo 3 aulas.

E na última etapa no 3° ano do ensino médio, para complementar a forma trigonométrica dos números complexos, iremos construir os polígonos estrelados regulares no círculo unitário utilizando o Geogebra, encontrando as raízes de $z^n = 1$.

Mostraremos também que as condições estabelecidas na definição, onde devemos dividir o círculo em n arcos congruentes e os saltos e o número de nós devem ser coprimos, se fazem necessárias aqui, não só isso, mostraremos também que são equivalentes. Após isso construiremos junto com os alunos um polinômio para encontrar as raízes primitivas da unidade. Duração estimada 3 aulas.

Pediremos então que os alunos pesquisem sobre a construção de polígonos regulares com régua e compasso e faremos junto com eles uma contextualização histórica sobre o que foi estudado nestes três anos, chegando a Gauss e como ele provou que alguns poderiam ser construídos e outros não, trabalhando com os alunos polinômios e suas raízes, assunto trabalhado com os alunos do 3º ano do ensino médio.

Possíveis continuações ou desdobramentos

É possível começar este assunto já no ensino fundamental II na disciplina de desenho geométrico, utilizando esta disciplina para introduzir as construções de polígonos estrelados regulares, familiarizando o aluno desde cedo com estas figuras tornando-as mais naturais para os mesmos.

Poderíamos também mudar a ordem da nossa sequência didática iniciando já no 1° ano do ensino médio com uma pesquisa histórica, sobre o problema aqui apresentado, e continuarmos esta pesquisa ao longo dos 3 anos do ensino médio.

Poderiam ser abordados outros assuntos do ensino médio como os ângulos formados em cada vértice, o polígono regular formado no centro do polígono estrelado de espécie maior que 1, números irracionais, etc. Poderiam ainda ser aprofundados assuntos como os números complexos e a trigonometria neste tipo de abordagem aqui apresentada, ficando então aberto para várias possibilidades dependendo apenas da criatividade do professor.

Referências Bibliográficas

Referências

[1] Hefez, A. - *Elementos de Aritimética* Coleção Textos Universitários SBM, 2011.

[2] Santos, J. - *Introdução a teoria dos números* Coleção Matemática Universitária SBM, 2010.

[3] Wagner, E., Morgado, A., Carmo, M. - *Trigonometria e números complexos* Coleção do Professor de Matemática SBM, 2010.

[4] Garbi, G. - *O romance das equações algébricas* Editora Livraria da Física, 2009.

[5] Stewart, I. - *Galois Theory* Chapman & Hall, 1995.

[6] Moreira, G. - *Um teorema sobre Solubilidade de Equações Polinomiais por radicais Reais* Matemática Universitária, 1990.

[7] Coxeter, H. - Coxeter, Harold Scott Macdonald, et al. *Introduction to geometry.* Vol. 6. No. 6.8. New York: Wiley, 1969.

[8] Coxeter, H. - *Regular Polytopes*, 3rd. ed., Dover Publications, 1973.

[9] Fejes Tóth, L. - *Regular Figures*, Oxford, England: Pergamon Press, 1964.

[10] Frederickson, G. - *Dissections: Plane and Fancy* New York: Cambridge University Press, 1997.

[11] Gonçalves, A. - *Introdução à álgebra* IMPA, 2009.