



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO ARTHUR MAXIMIANO ALBUQUERQUE

O NÚMERO DE PRATA E A SEQUÊNCIA DE PELL:
UM ESTUDO COMPARATIVO COM O NÚMERO DE OURO E A
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

REDENÇÃO

2023

JOÃO ARTHUR MAXIMIANO ALBUQUERQUE

O NÚMERO DE PRATA E A SEQUÊNCIA DE PELL:
UM ESTUDO COMPARATIVO COM O NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE
FIBONACCI

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

REDENÇÃO - CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Albuquerque, Joao Arthur Maximiano.

A345n

O número de prata e a sequência de Pell: um estudo comparativo com o número de ouro e a sequência de Fibonacci / Joao Arthur Maximiano Albuquerque. - Redenção, 2023.
65fl: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Número de prata. 2. Número de ouro. 3. Sequência de Pell.
4. Sequência de Fibonacci. I. Diógenes, Rafael Jorge Pontes. II. Título.

CE/UF/BSCA

CDD 510.7

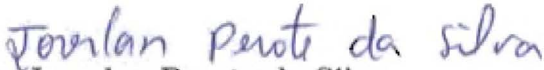
O NÚMERO DE PRATA E A SEQUÊNCIA DE PELL:
UM ESTUDO COMPARATIVO COM O NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE
FIBONACCI


Dissertação apresentada ao como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. Unilab - Campus Auroras.

Aprovada em: 27/03/2023.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)


Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)


Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho ao meu irmão Victor e em memória de minha mãe Erenilda e de minha vó Cristina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por sempre me sustentar. Como diz em Josué 1:9: “Não fui eu que ordenei a você? Seja forte e corajoso! Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar.”

Ao meu irmão Victor, por ter me ajudado em todos os aspectos da minha vida, tudo o que eu sou e conquistei foi graças a ele.

À minha família, pelo apoio e ensinamentos ao longo de minha vida. Em especial, minha querida mãe Nilda, minha amada vó Novinha e meu adorado pai Jô.

Ao meu cachorro Lion, companheiro de todos os dias de estudo e dedicação.

À minha esposa Jéssica, por todo companheirismo, paciência e ajuda na confecção deste trabalho.

À minha sogra Leonete, por sempre me tratar como um filho e sempre me ajudar.

À minha cunhada Riane, por me ajudar nas disciplinas do mestrado e facilitar o meu trabalho como docente.

Aos meus amigos do mestrado, por todo apoio e troca de experiências, em especial, aos meus amigos Jefferson Mascaranheas, Ricardo Sandro, Ênio Sá e Alneyr Gomes.

A todos os docentes do PROFMAT-UNILAB que por mim passaram e compartilharam seus conhecimentos e metodologias.

A banca examinadora deste trabalho, o Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva e o Prof. Dr. João Luzeilton de Oliveira, pela disponibilidade e pelas considerações na ajuda da confecção deste trabalho.

Por fim, agradeço ao meu grande orientador, Prof. Dr. Rafael Diógenes, por toda paciência, apoio e dedicação, sempre no intuito de extrair o melhor de mim. Meu muito obrigado.

“A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo.” (Galileu Galilei)

RESUMO

Este trabalho apresenta um comparativo entre os números de ouro e de prata, bem como entre as sequências de Fibonacci e de Pell. Sabendo da importância do número de ouro e da sua íntima relação com a sequência de Fibonacci, não só para a Matemática, mas para outros campos do conhecimento humano. O presente trabalho tem como objetivo mostrar resultados semelhantes para o número de prata e a sequência de Pell, elencando propriedades e resultados que mostram quão significativo esse número também pode ser. Será mostrado que é possível obter retângulos, razões, proporções, espirais, sequências e resultados transcendentais à Matemática envolvendo o número de prata de forma análoga ao número de ouro, obtendo outro número que pode despertar a curiosidade e o interesse em estudar essa ciência. Até mesmo pessoas que creem existir muitas barreiras na aquisição de conhecimentos matemáticos ou não consigam identificar sua aplicabilidade, podem se sentir interessadas no assunto. O referido trabalho também serve como uma ferramenta para os docentes no desenvolvimento e enriquecimento de suas aulas, visto que muitos resultados presentes nesta dissertação podem ser abordados em várias áreas do conhecimento matemático, como a Álgebra, Aritmética, Matrizes e Recorrências, além da sugestão de atividade presente no final do trabalho. Discentes também podem usar este trabalho como fonte de consulta e motivação em busca de novos resultados para o número de prata ou até mesmo encontrar novos números com características semelhantes.

Palavras-chave: Número de prata. Número de ouro. Sequência de Pell. Sequência de Fibonacci.

ABSTRACT

This study presents a comparison between the Golden Number and the Silver Number, as well as between Fibonacci and Pell sequences. Knowing the importance of the Golden Number and its intimate association with the Fibonacci sequence, not only with Mathematics, but with other fields of knowledge, this work aims to indicate similar results for the Silver Number and the Pell sequence, listing properties and results that express how significant this number can also be. It will be shown that it is possible to obtain rectangles, ratios, proportions, spirals, mathematically transcendent sequences and results involving the Silver Number in similar effect to the Golden Number, procuring another number that may arouse curiosity and interest during the study of this science. Even people who believe that there are many barriers in the acquisition of mathematical knowledge or do not consider its applicability in their routine may feel interested in the subject. This study also provides a tool for teachers that aspire to develop and enrich their classes, since many of the results present in this dissertation can be implemented in several of the mathematical knowledge, such as Algebra, Arithmetic, Matrices and Mathematical Recursion; beyond the suggestion of activity presented in the end of the work. Students can also use this work as a source of research and motivation in finding new results for the Silver Number or even finding new numbers with similar features.

Keywords: Silver Number. Golden Number. Pell sequence. Fibonacci sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Retângulo de prata	16
Figura 2 – Retângulo de prata II	17
Figura 3 – Construção do retângulo de prata	20
Figura 4 – Segmento na razão de prata	21
Figura 5 – Construção do segmento na razão de prata	22
Figura 6 – Divisão do segmento na razão de prata	24
Figura 7 – Escadas em espiral no museu do Vaticano	25
Figura 8 – Encontro das diagonais de um retângulo áureo	26
Figura 9 – Espiral no retângulo áureo	26
Figura 10 – Polo da espiral no retângulo de prata	27
Figura 11 – Espiral no retângulo de prata	27
Figura 12 – Construção do corte sagrado	28
Figura 13 – Octógono regular originado pelo corte sagrado.	29
Figura 14 – “The Shitenno-Ji Temple”, Japão, 2018	32
Figura 15 – Números de Fibonacci no triângulo de Pascal	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Avaliação das atividades realizadas pelos alunos	61
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	NÚMERO DE PRATA	15
2.1	RETÂNGULO DE PRATA	15
2.2	A RAZÃO DE PRATA EM UM SEGMENTO DE RETA	21
2.3	A ESPIRAL DE PRATA	25
2.4	O OCTÓGONO REGULAR E RAZÃO DE PRATA	27
3	SEQUÊNCIA DE PELL	33
3.1	PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE PELL	33
3.2	SEQUÊNCIA DE PELL E O NÚMERO DE PRATA	37
3.3	SEQUÊNCIA DE PELL NA ARITMÉTICA	43
3.4	SEQUÊNCIA DE PELL EM COMBINATÓRIA	47
3.5	SEQUÊNCIA DE PELL E AS MATRIZES	51
4	PROPOSTA DE ATIVIDADE	58
4.1	PROPOSTA 1: SEGMENTO NA RAZÃO DE PRATA	58
4.2	PROPOSTA 2: CONHECENDO A SEQUÊNCIA DE PELL	59
4.3	RESULTADOS DAS APLICAÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS	60
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo traçar um paralelo entre os números de ouro e de prata e, também, entre as sequências de Fibonacci e de Pell, mostrando que é possível usar outros números, proporções e sequências para despertar o interesse e a curiosidade não só dos amantes da Matemática, mas também de admiradores de outras áreas de estudo.

O número de ouro, costumeiramente representado pela letra grega ϕ , é um número irracional amplamente conhecido pelos estudantes da Matemática e de outras ciências, pois temos vários conteúdos e resultados que comprovam toda sua importância no mundo científico. Vera W. Spinadel (2003), na busca de outros números semelhantes ao Número de Ouro e análise da importância destes no meio matemático, inseriu uma nova família de números, batizando-a de números metálicos. Um dos objetos centrais desse trabalho é um número pertencente à essa família, o chamado número de prata. A motivação para o estudo desse número é compará-lo com resultados que o número de ouro apresenta em diversas áreas do conhecimento humano. A partir disso, o trabalho irá observar, verificar, definir, criar e expor resultados comprovando a importância do número de prata, evidenciando o fato que seu estudo pode ajudar docentes a fomentar suas aulas ou motivar os alunos a buscarem mais resultados em ambientes ainda não tão explorados.

A estreita relação e os fascinantes resultados entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci nos permite pensar em determinar uma sequência relacionada com o número de prata. A sequência de Pell será abordada nesse sentido, expondo que assim como a sequência de Fibonacci está para o número de ouro, a sequência de Pell estará para o número de prata, elucidando resultados aplicáveis em várias áreas do conhecimento humano, além da própria Matemática, aumentando o leque de opções entre maneiras de estudar assuntos como Álgebra, Aritmética, Matrizes, e Recorrências de uma maneira geral.

Sabemos que um dos principais desafios dos professores de Matemática do ensino básico é despertar nos alunos a motivação e o desejo em aprender e aplicar os conhecimentos matemáticos ao seu cotidiano. Vários fatores dificultam o processo de ensino e aprendizagem da disciplina em questão, sendo um deles o preconceito por muitos alunos, considerando a Matemática como algo difícil ou muitas vezes sem aplicabilidade. Esses conceitos precipitados, muitas vezes, acontecem pelo fato de o aluno não encontrar elementos que o envolvam, ou não ser exposto à Matemática de uma maneira interdisciplinar, adentrando em assuntos de seu interesse. Esta dissertação poderá servir como uma ferramenta de uso do professor para incrementar suas aulas, fazendo com que o docente possa abordar conteúdos aplicáveis de maneira concreta e interdisciplinar.

O intuito desse trabalho não é findar e exibir todos os conteúdos e resultados

referentes ao número de prata ou da sequência de Pell, mas sim mostrar que esses dois objetos de estudo podem ser tão atrativos e admiráveis quanto o número de ouro e a sequência de Fibonacci. A curiosidade do leitor até mesmo pode ser despertada ao perceber como se comportam os outros números pertencentes à família dos números metálicos e às outras sequências relacionadas com eles.

Veremos, no decorrer deste trabalho, que o número de prata, muitas vezes representado pela letra grega δ , é um número pertencente ao conjunto dos números irracionais, assim como ϕ . Este conjunto durante muito tempo foi motivo de uma crise filosófica entre os matemáticos por conta da falta da periodicidade dos números pertencentes a ele, não conseguindo representar, por exemplo, a razão entre a diagonal de um quadrado e seu lado, ou a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

Muitos consideravam os números irracionais como algo místico e enigmático, outros os consideravam até como algo divino. O fato é que ainda existem muitos resultados que ainda não podem ser explicados, até o momento, sobre esse conjunto e, mesmo resultados comprovados podem ser contraintuitivos ao entendimento humano. Por exemplo, saber que há uma infinidade de números decimais que se comportam de uma maneira não regular no número δ e, mesmo assim, conseguir realizar operações matemáticas com ele, além de poder encontrá-lo (ainda que possuindo uma representação infinita), limitado por outros dois números inteiros. Isso pode intrigar qualquer pessoa, fazendo-a se questionar como isso é possível. Buscar conhecer como números com essas características podem existir e dar sentido às nossas vidas de modo geral, tendo presença em obras de arte, na natureza, na arquitetura, em finanças, em objetos geométricos, na Biologia, é um convite a desafiar até que ponto vai a compreensão humana e qual é o verdadeiro significado dos números perante à vida.

O presente trabalho está dividido em três partes. Na primeira parte, apresentaremos resultados sobre o número de ouro e o retângulo áureo através de outros trabalhos que tratam do tema, expondo que ϕ é solução de uma equação do tipo $x^2 - px - q = 0$, como p e $q \in \mathbb{N}$. Trataremos também o que caracteriza os números pertencentes à família dos números metálicos. Através desses resultados, sempre será feita uma analogia com o número de ouro, definindo o que é um retângulo de prata, a razão de prata (ou número de prata) e como é determinado um segmento nessa razão. A construção geométrica, tanto do retângulo de prata, como do segmento na razão de prata, também será exibida.

Mostraremos a incomensurabilidade da razão entre os lados de um retângulo de prata e, com isso, vamos constatar que δ é irracional. Analisaremos a similaridade entre a espiral de ouro e a espiral definida como de prata, além de fazer um paralelo com a parte da Arquitetura que usa o ϕ como proporção em suas edificações e quais usam o δ no mesmo sentido.

Na segunda parte, vamos destacar a importância da sequência de Pell para o número de prata, comparando-os com a sequência de Fibonacci e o número de ouro,

elencando propriedades importantes e, geralmente, válidas para as duas sequências. Findada a semelhança entre a sequência de Fibonacci e Pell, vamos mostrar onde podemos encontrar resultados da sequência de Pell em outras áreas da Matemática e não somente no estudo de sequências e recorrências. É nesse sentido que poderemos usar este trabalho para enriquecer aulas de Matemática de diversos temas.

Na terceira parte, ainda buscando usar este trabalho como uma ferramenta auxiliar para o docente, explicitaremos algumas sugestões de atividades relacionando o número de prata e a sequência de Pell possivelmente aplicáveis em sala de aula com os alunos.

Este trabalho foi influenciado por várias pesquisas bibliográficas, dentre elas, destacamos as obras de Oliveira (2022), Lívio (2006), Spinadel (2003) e Almeida (2014), que serviram não só de referência, mas também foram fonte de inspiração para a produção desta dissertação.

Vale salientar que a maioria dos resultados referentes ao Número de Ouro e da sequência de Fibonacci não foram provados neste trabalho. Os dois foram apenas citados através de consultas de outros trabalhos, como por exemplo, Santos (2017), Ramos (2013) Caldeira (2015), deixando como parte principal desta obra as provas e demonstrações sobre o número de prata e da sequência de Pell. O objetivo foi dar início à exploração de um novo número e despertar no leitor a vontade de obter ainda mais resultados semelhantes ao número de ouro e à sequência de Fibonacci, ou até mesmo obter resultados inéditos.

2 NÚMERO DE PRATA

Desde a Grécia Antiga, tivemos muitos resultados relacionados ao número de ouro ou à razão áurea que por muitas vezes apresentaram uma certa misticidade, principalmente, quando não se conhecia a presença dos números irracionais. Tentativas de perceber a presença da razão áurea aconteceu (e acontece) em várias áreas de estudo, como já mencionando por Muniz (2015):

O número dourado ϕ , o número 1,618, é muitas vezes encontrado na natureza como por exemplo nas características faciais e corporais humanas, em flores e outras plantas, na arte, na maioria dos organismos vivos na Terra, em escudos, em colmeias, entre muitas outras coisas, mas mais importante, é muitas vezes associada com a estrutura do universo e da órbita planetária em nosso sistema solar. Além disso, na ciência estética a Proporção Áurea é considerada o padrão mais preciso para a expressão da perfeição. (MUNIZ, 2015, p. 1).

Na própria Matemática percebeu-se que o número de ouro era uma das raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$ e ainda pode-se observar a aparição da razão áurea, na parte da Geometria, em retângulos e segmentos de reta que possuem tal proporção. Vera W. de Spinadel (2003), realizando um estudo sobre as características do número de ouro e a sua relação com a sequência de Fibonacci, estabeleceu uma nova família de números nos quais são soluções positivas de equações do tipo $x^2 - px - q = 0$, com p e $q \in \mathbb{N}$. A esses números que gozam de tal propriedade foi atribuído o nome de números metálicos em alusão ao metais conhecidos, como por exemplo, ouro, prata e bronze (SPINADEL, 2003).

Em particular, faremos um paralelo entre o número de ouro que é considerado um dos números mais conhecidos e mais importante dessa família (SPINADEL, 2003), com o número de Prata, que é a raiz positiva da equação $x^2 - 2x - 1 = 0$, ou seja, $1 + \sqrt{2}$.

O número de prata também tem sua importância no meio matemático e há evidências do aparecimento do mesmo em outras áreas do conhecimento, como na arquitetura asiática e romana, na natureza, em estruturas de minerais como o magnésio e zinco, e até mesmo no corpo humano, onde o número de prata se faz presente nas estruturas das células do fígado (BASU; BHATTASHARYYA, 2019).

2.1 RETÂNGULO DE PRATA

Na Geometria, como já foi dito acima, é conhecida a presença de retângulos nos quais apresentam razão áurea:

O retângulo áureo é uma figura esteticamente agradável aos olhos. Ele apresenta seus lados na razão áurea $\frac{a}{b} = \phi = 1,618$. Acredita-se que muitos pintores e arquitetos do período do Renascimento utilizaram esse

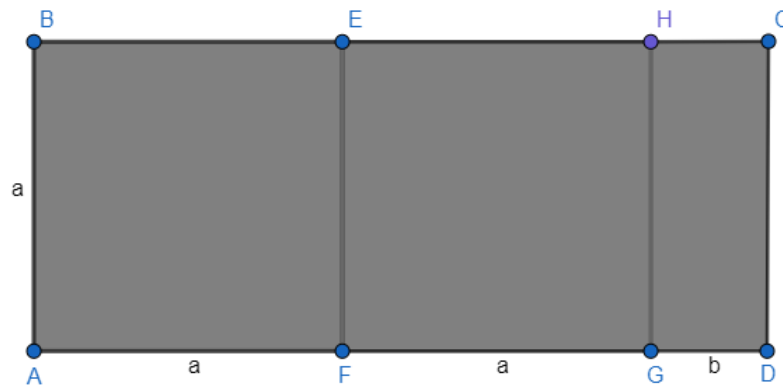
retângulo em suas obras e trabalhos. Só para citar alguns exemplos, temos: O Nascimento de Vênus, quadro de Botticelli, em que Afrodite está na proporção áurea. Essa proporção estaria ali aplicada pelo motivo do autor representar a perfeição da beleza. Em O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí, as dimensões do quadro [...] estão numa razão áurea entre si. Um dos mais famosos são a Mona Lisa de Leonardo da Vinci e a Catedral de Notredame. (BELINI, 2015, p. 23).

Veremos que é possível encontrar retângulos que possuem o número de prata como a razão entre seus lados e que após a extração de uma certa quantidade de quadrados de dentro dele, obtemos outro retângulo também tendo como razão entre seus lados o número de prata (OLIVEIRA,2022).

Definição 2.1 Dizemos que um retângulo $ABCD$ é de prata, se dele retirarmos dois quadrados, como $ABEF$ e $EFGH$, restando apenas um retângulo $HGDC$, semelhante ao retângulo $ABCD$. Ou seja, considerando as medidas dos lados do retângulo como sendo $2a + b$ e a (os quadrados também tem lados medindo a), com $a > b$, então:

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} \iff a^2 - 2ab - b^2 = 0. \quad (1)$$

Figura 1 – Retângulo de prata



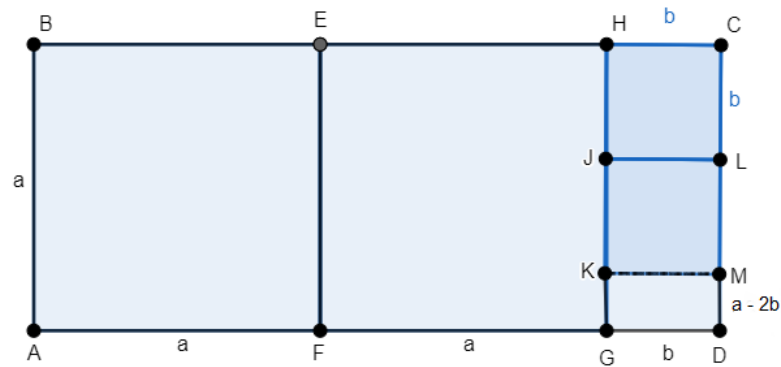
Fonte: Autoria Própria

Note que, com a extração dos dois quadrados do retângulo, origina-se um novo retângulo que também possui as propriedades de um retângulo de prata. Veremos isto na proposição seguinte:

Proposição 2.1 Seja $ABCD$ um retângulo de prata como na Definição 2.1. Então, $HGDC$ também é um retângulo de prata.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que é possível retirar dois quadrados do retângulo $HGDC$ de lados a e b , com $a > b$. Fixando b e resolvendo a equação (1), temos:

Figura 2 – Retângulo de prata II



Fonte: Autoria própria

$$\begin{aligned} a &= \frac{-(-2b) + \sqrt{(-2b)^2 - 4(-b^2)}}{2} = \frac{2b + \sqrt{4b^2 + 4b^2}}{2} \\ &= \frac{2b + 2b\sqrt{2}}{2} = b(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} 2 < 1 + \sqrt{2} < 3 &\implies 2b < (1 + \sqrt{2})b < 3b \implies \\ &\implies 2b < a < 3b. \end{aligned} \quad (2)$$

Assim, de (2) $a > 2b$ e portanto, podemos retirar dois quadrados de lado b , restando um retângulo de lados b e $a - 2b$, com $a - 2b < b$. Resta mostrarmos que os retângulos $HGDC$ e $GKMD$ da Figura 2 são semelhantes. Ou seja,

$$\frac{b}{a - 2b} = \frac{a}{b}.$$

Ainda de (1), temos

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

e por uma propriedade das proporções, constatamos que

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} \iff \frac{a + b}{a - b} = \frac{a}{b} \iff \frac{b}{a - 2b} = \frac{a}{b}.$$

■

“Portanto, o processo de retirar quadrados de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.” (ÁVILA, 1985). Vejamos, também que no retângulo de prata, após a extração de quadrados do mesmo, obtêm-se outros retângulos de prata com áreas cada vez menores, isto é, áreas cada vez mais próximas de zero.

Corolário 2.1 *Existem infinitos retângulos de prata em um retângulo de prata.*

Demonstração: Considerando um retângulo de prata da Proposição 2.1, ao retirar dois quadrados do mesmo, obtemos um novo retângulo, que também é um retângulo de prata. Para este novo retângulo de prata, novamente, pela Proposição 2.1, podemos retirar dois quadrados para obter outro retângulo de prata. O processo poderá ser feito infinitas vezes, de tal modo que os retângulos seguintes, também serão de prata. ■

A Proposição 2.1 e o Corolário 2.1 geram a sequência $(2a + b, a, b, a - 2b, 5b - 2a, \dots)$ em que quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência são lados de um retângulo de prata. Note também que

$$\begin{aligned} a_0 &= 2a + b \\ a_1 &= a \\ a_n &= a_{n-2} - 2a_{n-1}; \forall n \geq 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Os termos da sequência (3) são todos positivos, pois são lados de um retângulo e ainda, cada termo, é originado pela extração de dois quadrados desse retângulo. Portanto, $a_{n-1} > a_n$. Como a sequência é limitada por o zero e monótona decrescente, então, o limite dessa sequência existe, isto é, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim a_n = l.$$

Por recorrência, temos

$$l = l - 2l \implies 2l = 0 \implies l = 0.$$

Portanto,

$$\lim a_n = 0.$$

Com isso, verificamos que os lados do retângulo de prata tendem a zero e consequentemente sua área também tende a zero.

Como já definido por Spinadel (2003), vários números presentes na família dos números metálicos são irracionais, assim como o próprio número de ouro ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Esses números que não podiam ser representados por frações, intrigaram os matemáticos em meados do século V A.C.:

A descoberta de que existiam números como a Razão Áurea que continuam para sempre sem exibir qualquer repetição ou padrão causou uma verdadeira crise filosófica. [...] A data exata da descoberta de números que não são inteiros nem frações, conhecidos como números irracionais, não é conhecida com grau algum de certeza. Mesmo assim, alguns pesquisadores situam a descoberta no século V a.C. [...] O que é claro é que os pitagóricos basicamente acreditavam que a existência de tais números

era tão horrível que devia (a existência) representar algum tipo de erro cósmico, algo que deveria ser suprimido e guardado em segredo. (LIVIO, 2006, p. 15).

A seguir, veremos porque os lados do retângulo de prata são segmentos incomensuráveis. Para isso, veremos uma propriedade entre a soma de números racionais e irracionais e o conceito de incomensurabilidade entre segmentos, pois até então a razão entre dois segmentos era determinada por um número inteiro ou fracionário.

Proposição 2.2 *Se q é um número racional e r é um número irracional, então $q \pm r$ é um número irracional.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, admita que $q + r$ é um número racional (para $q - r$, o processo é análogo). Logo: $q + r = p$, com $p \in \mathbb{Q}$. Sabendo que a soma (ou a diferença) de dois racionais também é um número racional, temos que

$$q + r = p \iff r = p - q \iff r \in \mathbb{Q},$$

o que é um absurdo. Logo, se q é racional e r é irracional, segue que $q \pm r$ é irracional. ■

Definição 2.2 *Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são comensuráveis se existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m}{n}$. Caso contrário, esses segmentos serão incomensuráveis.*

Os lados do retângulo áureo são incomensuráveis, visto que o Número de Ouro é um número irracional e ele é a razão entre os lados do retângulo. Conforme mencionado por Lívio (2006, p.15), “A descoberta de que a Razão Áurea é um número irracional, portanto, era, ao mesmo tempo, a descoberta da incomensurabilidade.” A seguir, vejamos que os lados do retângulo de prata são incomensuráveis, visto que não conseguimos determinar uma unidade de medida inteira ou fracionária para esta razão.

Proposição 2.3 *Os lados do retângulo de prata são incomensuráveis.*

Demonstração: Sendo os lados do retângulo iguais a $2a + b$ e a , e por (1), temos

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} \iff a^2 - 2ab - b^2 = 0 \iff \frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2},$$

ou seja

$$\frac{2a + b}{a} = 1 + \sqrt{2}.$$

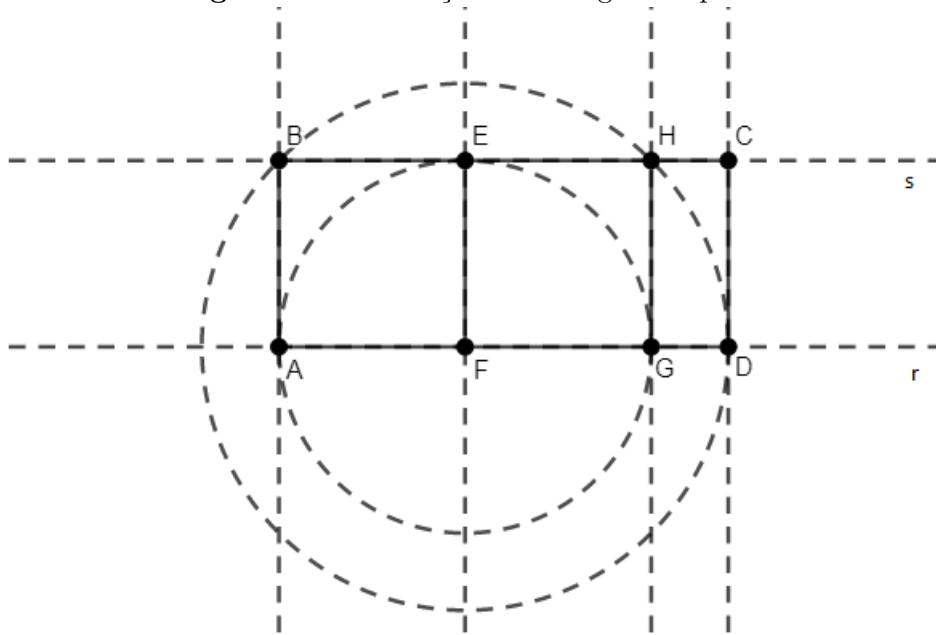
Como, pela Proposição 2.2, $1 + \sqrt{2}$ é irracional, temos que os lados de um retângulo de prata são incomensuráveis. ■

Vejamos, agora, a construção do retângulo de prata e a justificava geométrica da existência do mesmo, bem como suas propriedades.

Construção 2.1 *Construção geométrica do retângulo de prata.*

Demonstração: Dada a reta r , marque dois pontos A e G sobre a mesma. Trace a mediatriz de \overline{AG} que intercepta a reta r no ponto F . Com centro em F e abertura \overline{AF} , marque o ponto E sobre a mediatriz de \overline{AG} . Por E , trace uma reta s paralela a r . Por A e por G trace retas perpendiculares a reta r , interceptando por s , respectivamente, nos pontos B e H . Com centro em F e abertura \overline{FH} , marque o ponto D (à direita de G) sobre a reta r . Por D , trace uma reta perpendicular a r , interceptando por s no ponto C . O retângulo $ABCD$ é de prata.

Figura 3 – Construção do retângulo de prata



Fonte: Autoria Própria

Justificativa: Como F é ponto médio de \overline{AG} , segue que $\overline{AF} = \overline{FG}$. Por construção, $\overline{AF} = \overline{FE} = \overline{FG}$, e $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$ e $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$. Como $\overline{AF} = \overline{EF} = \overline{BE} = \overline{BA} = \overline{FG} = \overline{HG} = \overline{EH} = \overline{EF} = a$, Segue que $ABEF$ e $FEHG$ são quadrados de lado a . Como \overline{FH} é diagonal do quadrado $FEHG$, segue que, $\overline{FH} = \sqrt{2}a$. Por construção, $\overline{FH} = \overline{FG} + \overline{GD}$. Fazendo $\overline{GD} = b$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{2}a = a + b &\implies (\sqrt{2}a)^2 = (a + b)^2 \implies 2a^2 = a^2 + 2ab + b^2 \implies \\ &\implies a^2 - 2ab - b^2 = 0 \iff \frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Portanto, no retângulo $ABCD$ há dois quadrados de lado a e ainda há a semelhança entre $ABCD$ e $GHCD$. Logo, o retângulo $ABCD$ é de prata. ■

2.2 A RAZÃO DE PRATA EM UM SEGMENTO DE RETA

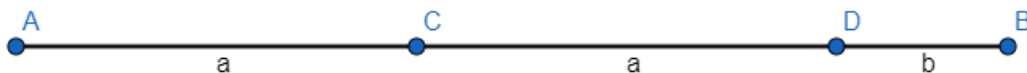
O número de ouro também pode ser observado em segmentos que são divididos em uma determinada proporção. Conforme mencionado por Santos (2003, p. 13), “Uma referência muito antiga ao número ϕ ou ao número de ouro aparece no livro Os Elementos VI, de Euclides. Em seu livro, Euclides trata do problema de cortar (ou seccionar) um segmento em extrema e média razão.” Após o corte, a razão que era apresentada entre o segmento primitivo e parte dele, originado após a secção, era a razão áurea ou o número de ouro. Continuando com comparativo entre o número de ouro e o número de prata, podemos fazer um estudo apenas de um dos lados do retângulo de prata e verificar se de forma unidimensional, podemos encontrar a razão de prata em um segmento. Para facilitar o entendimento dos resultados que serão demonstrados nesse trabalho, usaremos a letra Grega “ δ ” para nos referirmos à razão de prata (ou número de prata, $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$), assim como também foi usada por Oliveira (2022).

Definição 2.3 Um segmento \overline{AB} está dividido na razão de prata, se dele conseguirmos marcar dois pontos C e D , tais que $\overline{AC} = \overline{CD} > \overline{BD}$ e ainda:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}.$$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ é chamado de razão de prata (ou número de prata).

Figura 4 – Segmento na razão de prata



Fonte: Autoria Própria

Fazendo $\overline{AC} = \overline{CD} = a$ e $\overline{BD} = b$, temos $\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b}$, uma expressão equivalente à razão entre os lados do retângulo de prata de lados $2a + b$ e a . Logo, o maior lado de todo retângulo de prata está dividido na razão de prata.

Com a definição acima e já sabendo que o retângulo de prata primitivo dá origem a outros retângulos de prata que terão como maior lado, o menor lado do retângulo primitivo, podemos verificar que o outro lado do retângulo inicial também poderá ser dividido na razão de prata.

Proposição 2.4 Se \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos como na Definição 2.3, então \overline{DB} também poderá ser dividido na razão de prata.

Demonstração: Sejam $\overline{AB} = 2a + b$ com $\overline{AC} = \overline{CD} = a$ e $\overline{DB} = b$. Como \overline{AB} é um segmento que está dividido na razão de prata, sabemos que é possível obter um retângulo de prata a partir dele, com dimensões $2a + b$ e a . Da Proposição 2.1, o retângulo de dimensões a e b , com $a > b$, também é de prata, bem como o retângulo de dimensões b e $a - 2b$, com $b > a - 2b$. Logo, b é o maior dos lados desse retângulo de prata e, portanto, b também é um segmento que apresenta a razão de prata. ■

Como já conhecemos a infinidade dos retângulos de prata a partir de um retângulo de prata primitivo, podemos estabelecer também a infinidade de segmentos que estão divididos na razão de prata.

Corolário 2.2 *Há infinitos segmentos que estão divididos na razão de prata.*

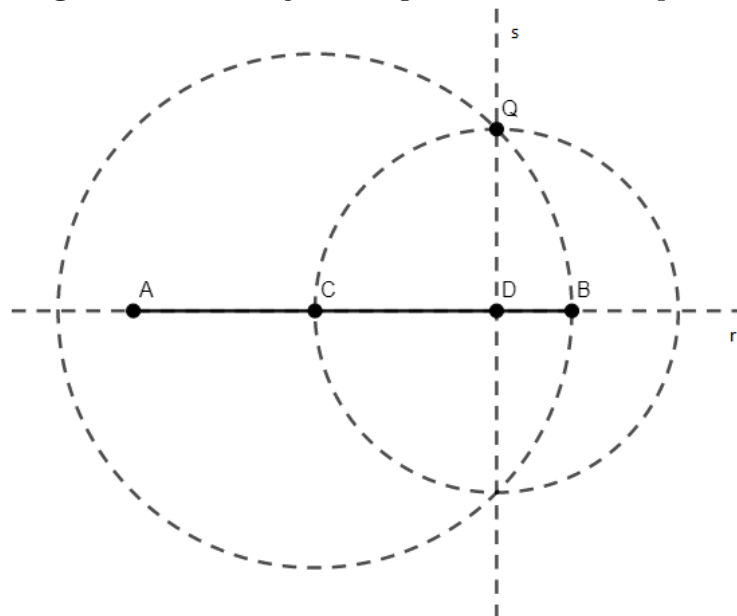
Demonstração: Basta seguir o processo da demonstração da proposição acima, infinitas vezes. ■

Podemos garantir a existência desses pontos que dividem um segmento na razão de prata através de uma construção geométrica.

Construção 2.2 *Construção de um segmento dividido na razão de prata.*

Demonstração: Dada a reta r , marque dois pontos A e D sobre a mesma. Determine o ponto $C \in \overline{AD}$ tal que C é o ponto médio de \overline{AD} . Por D , trace uma reta s , perpendicular a r . Com centro em D e abertura igual a \overline{AC} , marque o ponto Q tal que $Q \in s$. Com centro em C e abertura \overline{CQ} , marque o ponto B tal que $B \in r$. Os pontos C e D dividem o segmento \overline{AB} na razão de prata.

Figura 5 – Construção do segmento na razão de prata



Fonte: Autoria própria

Justificativa: Como C é ponto médio de \overline{AD} (por construção), temos que $\overline{AC} = \overline{CD}$. Como $\overline{DQ} = \overline{CD}$ (por construção), então o triângulo CDQ é isósceles de base \overline{CQ} . Fazendo $\overline{CD} = a$, temos pelo teorema de Pitágoras que $\overline{CQ} = \sqrt{2}a$. Por outro lado, $\overline{CQ} = \overline{CD} + \overline{BD}$. Fazendo $\overline{BD} = b$, temos:

$$\sqrt{2}a = a + b \implies 2a^2 = a^2 + 2ab + b^2 \implies a^2 - 2ab - b^2 = 0 \iff \frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}.$$

Como $\frac{a}{b} > 0$, mostramos também que $\overline{AC} = \overline{CD} > \overline{BD}$. ■

Em função da infinidade de segmentos que contém a razão de prata e da construção geométrica da divisão de um segmento na razão de prata, é intuitivo pensar que qualquer segmento pode apresentar tal razão, bastando apenas escolhermos um corte (secção) conveniente para que tal proporção ocorra.

Proposição 2.5 *Todo segmento pode ser dividido na razão de prata.*

Demonstração: Seja o segmento $\overline{AB} = m$. Para que o segmento m apresente a razão de prata, precisamos que

$$\begin{cases} 2a + b = m \\ \frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}, \quad (4)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, com $a > b$. Resolvendo o sistema (4), temos que

$$\begin{aligned} 2(b + \sqrt{2}b) + b = m &\implies 2b + 2\sqrt{2}b + b = m \implies 3b + 2\sqrt{2}b = m \implies b(3 + 2\sqrt{2}) = m \implies \\ \implies b &= \frac{m}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{m}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{(3 - 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})} = 3m - 2\sqrt{2}m = m(3 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} 2a + b = m &\implies 2a + 3m - 2\sqrt{2}m = m \implies 2a = m + 2\sqrt{2}m - 3m \implies \\ \implies 2a &= 2m(\sqrt{2} - 1) \implies a = m(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Logo, dado um segmento de tamanho m , basta tomarmos os segmentos a e b de tamanhos mencionados acima. Note que $\delta^{-1} = \sqrt{2} - 1$ e $\delta^{-2} = 3 - 2\sqrt{2}$, isso mostra que podemos determinar os tamanhos do segmentos a e b em função do número de prata. ■

Exemplo 2.1 *Dividir o segmento $\overline{AB} = 5u$ na razão de prata.*

Tome

$$a = 5(\sqrt{2} - 1) \implies a = 5\sqrt{2} - 5$$

$$b = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 2\sqrt{2} \implies b = 15 - 10\sqrt{2}.$$

Veja que

$$2a + b = 10\sqrt{2} - 10 + 15 - 10\sqrt{2} = 5$$

e ainda

$$\frac{5\sqrt{2} - 5}{15 - 10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - 2\sqrt{2}} \frac{(3 + 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})} = 3\sqrt{2} + 4 - 3 - 2\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

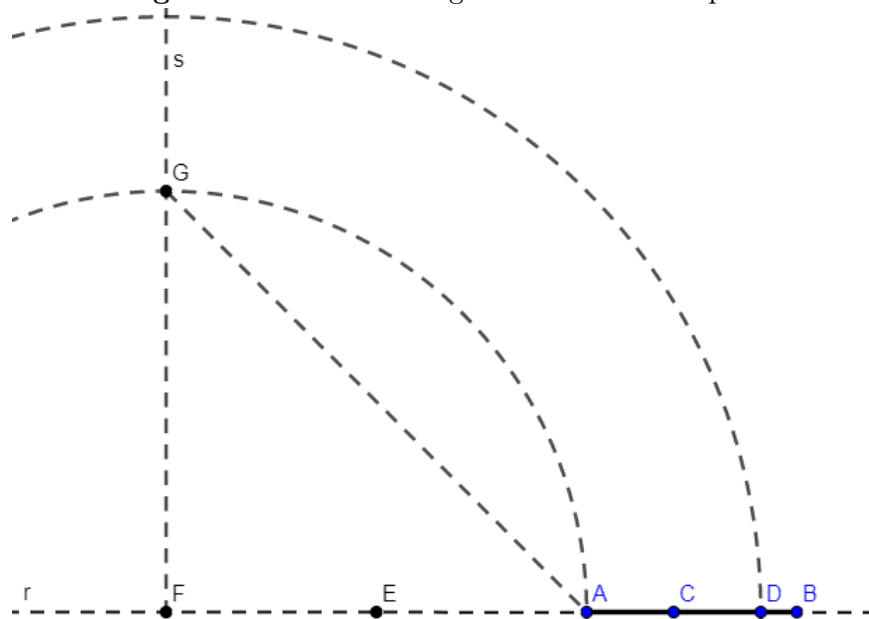
A próxima construção mostra que é possível dividir um segmento de qualquer tamanho na razão de prata. Diferentemente da construção [2.2](#), que mostra a existência de um segmento na razão de prata, veremos que é possível encontrar dois pontos sobre qualquer segmento, tais que dividem o mesmo na razão de prata.

Construção 2.3 (Divisão do segmento na razão de prata) *Dado um segmento de tamanho $\overline{AB} = m$, marcar os pontos C e D sobre \overline{AB} tais que $\overline{AC} = \overline{CD} > \overline{BD}$ e ainda:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}.$$

Demonstração: Sobre uma reta r , marque o segmento $\overline{AB} = m$. Marque os pontos E e F sobre a reta r , à esquerda de A , de modo que $\overline{FE} = \overline{EA} = \overline{AB}$. Trace uma reta s , passando por F e perpendicular à reta r . Com centro em F e abertura \overline{FA} , marque o ponto G sobre a reta s . Com centro em F e abertura \overline{GA} , marque o ponto D sobre o segmento \overline{AB} . Marque o ponto C sobre \overline{AB} , de modo que C seja ponto médio do segmento \overline{AD} . Os pontos C e D dividem o segmento \overline{AB} na razão de prata.

Figura 6 – Divisão do segmento na razão de prata



Fonte: Autoria própria

Justificativa: O triângulo FAG é retângulo e isósceles de base \overline{GA} , pois $\overline{FA} = \overline{FG}$ e as retas r e s são perpendiculares (ambos por construção). Como $\overline{FE} = \overline{EA} = \overline{AB} = m$, temos que os lados iguais do triângulo FAG medem ambos $2m$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, segue que $\overline{AG} = 2m\sqrt{2}$. Note que $\overline{FB} = 3m$ e $\overline{FD} = \overline{AG} = 2m\sqrt{2}$ (por construção) e como $\overline{DB} = \overline{FB} - \overline{FD}$, segue que $\overline{DB} = 3m - 2m\sqrt{2} = m(3 - 2\sqrt{2})$. Por outro lado, como $\overline{AC} = \overline{CD}$ (por construção), temos que $m = 2\overline{AC} + \overline{DB} \implies 2\overline{AC} = m - 3m + 2m\sqrt{2} \implies \overline{AC} = m(\sqrt{2} - 1)$. Pela Proposição 2.5, o segmento \overline{AB} está dividido na razão de Prata. ■

2.3 A ESPIRAL DE PRATA

A espiral é um fascinante símbolo (ou desenho) geométrico que vem sendo usado por diversas tribos e povos ao longo dos anos e também está presente na natureza na forma de alguns animais (como o caracol) e até mesmo no formato de algumas galáxias. Como menciona Lívio (2006) “A natureza ama espirais [...]”. De girassóis, conchas do mar e redemoinhos a furacões e galáxias espirais gigantes, parece que a natureza escolheu esta forma magnífica como seu ‘ornamento’ favorito”. As espirais são definidas por Silva (2015, p.13) do seguinte modo: “De maneira geral, uma espiral pode ser descrita como sendo uma linha curva plana formada por um ponto móvel que gira em torno de um ponto central chamado polo, dele se afastando ou se aproximando segundo uma determinada lei.” Não só a simbologia do desenho de uma espiral é usada no cotidiano, como também a própria trajetória do movimento das curvas que originam uma espiral são frequentemente utilizadas no campo da arte e da arquitetura, como por exemplo, a escada em espiral do museu do Vaticano.

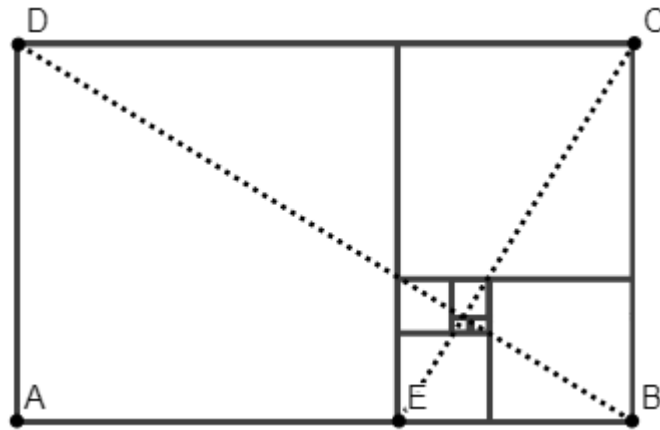
Figura 7 – Escadas em espiral no museu do Vaticano



Fonte: (EIFFERT, 2019)

Já mencionamos que um retângulo áureo dá origem a infinitos retângulos áureos. Pelo menos uma das diagonais desses retângulos se encontram em um único ponto que foi batizado pelo matemático Clifford A. Pickover como o “Olho de Deus”, em virtude de toda misticidade envolvendo o retângulo áureo e o próprio número de ouro (LÍVIO, 2006).

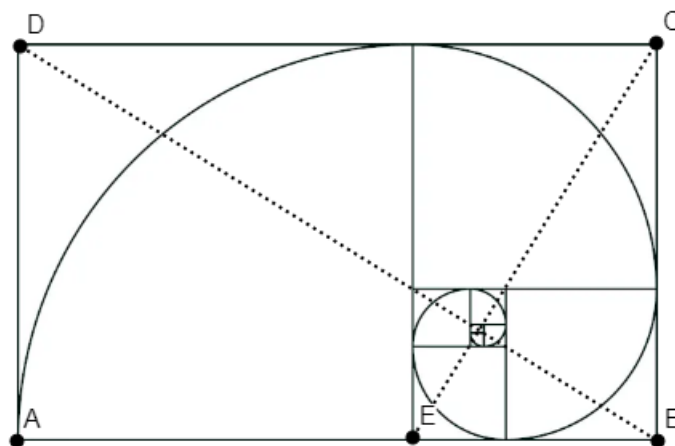
Figura 8 – Encontro das diagonais de um retângulo áureo



Fonte: Autoria própria

Podemos obter uma espiral no retângulo áureo tendo como o ponto central da mesma, o chamado “Olho de Deus”. Os arcos que dão origem à espiral tem medida de raio igual ao tamanho de cada lado dos quadrados pertencentes aos retângulos. Fazendo a concordância desses arcos (sempre no sentido horário), podemos obter a espiral do retângulo de ouro.

Figura 9 – Espiral no retângulo áureo

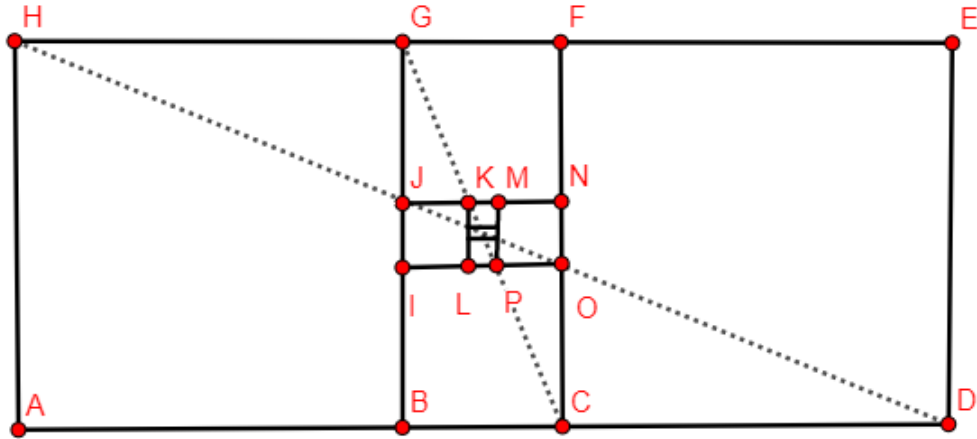


Fonte: Autoria própria

Um resultado semelhante poderá ser obtido no retângulo de prata. Primeiramente, precisamos determinar quem será o polo da espiral. Para isso, sabendo da infinidade de retângulos contidos em um retângulo de prata, precisamos efetuar o movimento de translação do retângulo menor para que o mesmo fique sempre entre os dois

quadrados que caracterizam um retângulo de prata. Com isso, uma das diagonais de cada retângulo de prata se encontrará em um único ponto, de maneira análoga ao chamado “Olho de Deus”, como mostra a Figura 10:

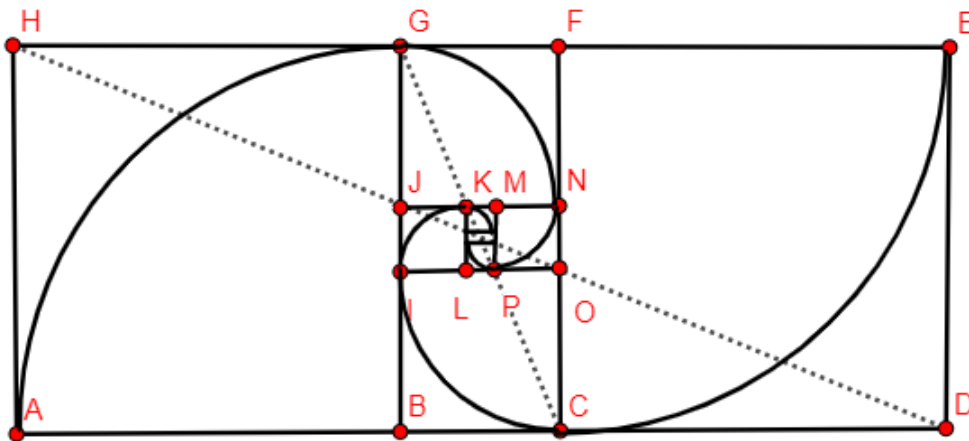
Figura 10 – Polo da espiral no retângulo de prata



Fonte: Autoria própria

Dando continuidade ao desenvolvimento da construção da espiral no retângulo de prata, começaremos um processo de construção de arcos a partir dos vértices dos quadrados contidos no retângulo de prata. Traçaremos os arcos \widehat{AG} , \widehat{GN} , \widehat{NP} , \widehat{EC} , \widehat{CI} , e \widehat{IK} com os respectivos centros B , J , M , F , O e L . Esse processo poderá ser repetido infinitas vezes nos outros retângulos (que não foram representados, mas que estão contidos no retângulo de prata) dando origem a espiral desejada como mostra a imagem abaixo:

Figura 11 – Espiral no retângulo de prata



Fonte: Autoria própria

2.4 O OCTÓGONO REGULAR E RAZÃO DE PRATA

Continuando ainda na Geometria, o número de ouro surge também em figuras geométricas planas conhecidas como pentagramas, que são formadas pela junção de todas

as diagonais de um pentágono regular. O pentagrama foi símbolo da Escola Pitagórica (LIVIO, 2006) e a razão áurea, surge na divisão entre as diagonais, conforme mencionado no texto:

Traçando as diagonais de uma das faces pentagonais do dodecaedro obtemos a estrela de cinco pontas, também conhecida como pentagrama, que era utilizada como símbolo e emblema da Sociedade Pitagórica. [...] O pentagrama é uma das construções geométricas que mais fascinou os estudiosos. Nele há muitas razões áureas. No pentagrama, as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono. (QUEIROZ, 2017, p. 11).

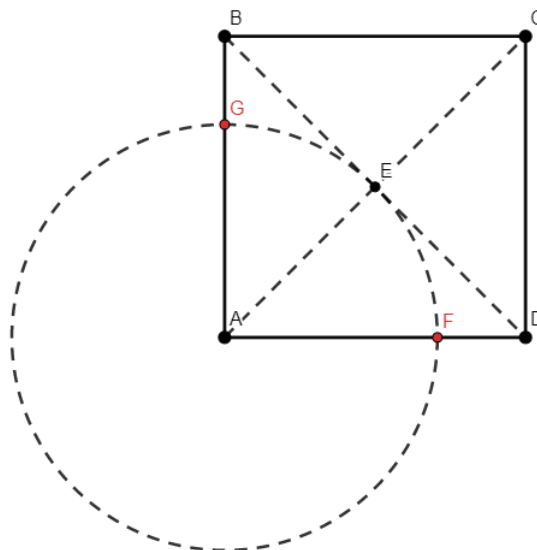
Em contrapartida, a figura plana que se relaciona com a razão de prata é o octógono regular, pois podemos obter um octógono inscrito em um quadrado no qual a razão entre o lado desse quadrado e o lado do octógono é a razão de prata. A partir desse octógono, podemos obter um quadrado inscrito nele e novamente repetir o processo para gerar outros octógonos. Para garantir essa proporção com o número de prata, devemos fazer uma secção no quadrado chamado de corte sagrado (OLIVEIRA, 2022).

Definição 2.4 *O corte sagrado é a divisão de um dos lados do quadrado em duas partes, de modo que a razão entre a parte maior (originada pela divisão) e o lado do quadrado é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Construção 2.4 *Construção do corte sagrado em um quadrado de lado l .*

Demonstração: Dado um quadrado $ABCD$ de lado l , trace suas diagonais \overline{AC} e \overline{BD} . Marque o ponto E , ponto de interseção das diagonais do quadrado. Com centro em A e abertura \overline{AE} , marque os pontos F e G , onde $F \in \overline{AD}$ e $G \in \overline{AB}$. Os pontos F e G são cortes sagrados dos lados \overline{AD} e \overline{AB} , respectivamente.

Figura 12 – Construção do corte sagrado



Fonte: Autoria Própria

Justificativa: O segmento $\overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$, pois \overline{AE} é a metade da diagonal do quadrado. Por construção, $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{AG}$. Fazendo a razão entre $\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}}$ e $\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}$, temos

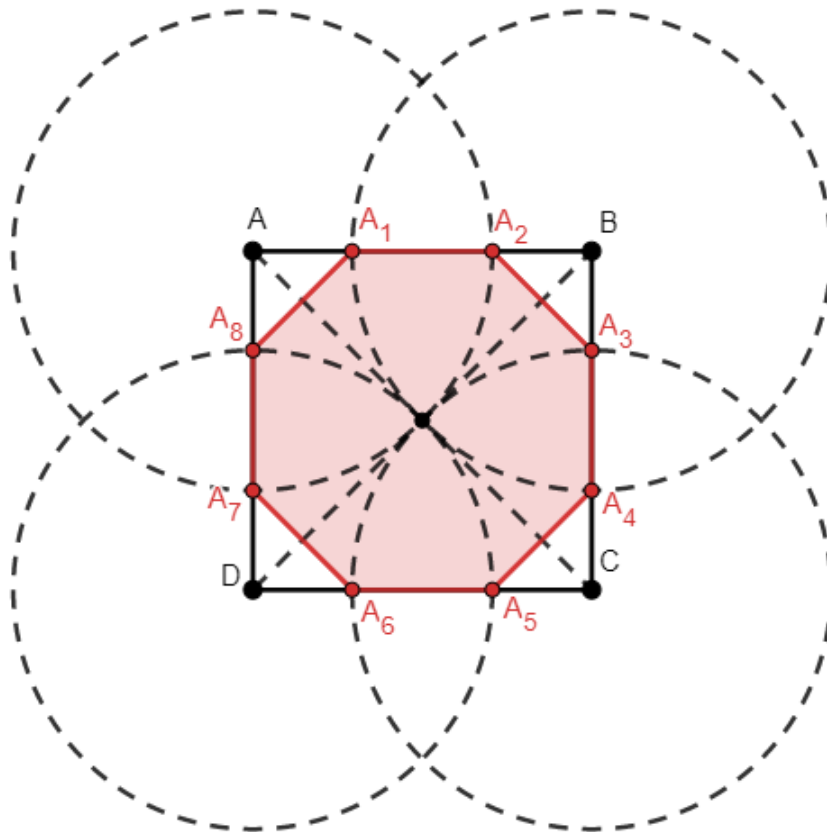
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Vejam como podemos obter um octógono regular a partir de vários cortes sagrados sobre os lados de um quadrado de tamanho l .

Proposição 2.6 *Dado um quadrado $ABCD$ de lado l e os pontos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ e A_8 , onde $A_1, A_2 \in \overline{AB}$, $A_3, A_4 \in \overline{BC}$, $A_5, A_6 \in \overline{CD}$ e $A_7, A_8 \in \overline{AD}$. Se A_1, A_2, \dots, A_8 são cortes sagrados, então, o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ é um octógono regular.*

Figura 13 – Octógono regular originado pelo corte sagrado.



Fonte: Autoria Própria

Demonstração: Considerando os segmentos $\overline{AB} = l$; $\overline{AA_1} = a$; $\overline{A_1A_2} = x$ e $\overline{A_2B} = l - a - x$, temos o sistema

$$\begin{cases} a + x = \frac{\sqrt{2}l}{2} \\ l - a = \frac{\sqrt{2}l}{2} \end{cases}.$$

Somando as equações, temos

$$x + l = \sqrt{2}l \implies x = (\sqrt{2} - 1)l \implies a = \frac{\sqrt{2}}{2}l - \frac{2\sqrt{2}l}{2} + l = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l,$$

ou seja, $\overline{A_1A_2} = (\sqrt{2} - 1)l$. De maneira análoga, $\overline{A_3A_4} = \overline{A_5A_6} = \overline{A_7A_8} = (\sqrt{2} - 1)l$. Considerando o Teorema de Pitágoras no triângulo AA_1A_8 , temos que $\overline{A_1A_8} = \sqrt{2}a$, ou seja,

$$\overline{A_1A_8} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)l \implies \overline{A_1A_8} = (\sqrt{2} - 1)l.$$

De maneira análoga, temos: $\overline{A_2A_3} = \overline{A_4A_5} = \overline{A_6A_7} = (\sqrt{2} - 1)l$. Portanto, o polígono $A_1A_2 \dots A_8$ é um octógono regular. ■

Observe que a razão entre o lado do quadrado e o lado do octógono regular gerado pelos cortes sagrados é igual ao número de prata, pois:

$$\frac{\text{Lado do quadrado}}{\text{Lado do octógono}} = \frac{l}{(\sqrt{2} - 1)l} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2} = \delta.$$

Podemos obter quadrados com lados iguais aos lados dos octógonos gerados pelo Corte Sagrado do quadrado anterior. Fazendo $l = 1$, temos:

Ordem do quadrado	Lado do quadrado	Lado do Octógono
Quadrado ₁	1	$\sqrt{2} - 1$
Quadrado ₂	$\sqrt{2} - 1$	$3 - 2\sqrt{2}$
Quadrado ₃	$3 - 2\sqrt{2}$	$5\sqrt{2} - 7$
⋮	⋮	⋮

Note que a sequência formada pelos lados do quadrado (ou pelos lados do octógono) formam uma P.G. de razão igual ao inverso do número de prata, pois,

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 3\sqrt{2} + 3 - 4 - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 = \delta^{-1}.$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{5\sqrt{2} - 7}{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = 15\sqrt{2} + 20 - 21 - 14\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 = \delta^{-1}.$$

Note, também, que as sequências acima satisfazem a seguinte recorrência: $a_n + 2a_{n-1} =$

a_{n-2} . De fato, considerando que $a_n = a_1q^{n-1}$, $a_{n-1} = a_1q^{n-2}$ e $2a_{n-1} = 2a_1q^{n-2}$; temos,

$$\begin{aligned}
 a_n + 2a_{n-1} &= a_1qq^{n-2} + 2a_1q^{n-2} = a_1q^{n-2}(q + 2) \\
 &= a_1q^{n-2} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 2 \right) = a_1q^{n-2} \left(\frac{(3 + 2\sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} \right) \\
 &= a_1q^{n-2}(3\sqrt{2} + 4 - 3 - 2\sqrt{2}) = a_1q^{n-2}(1 + \sqrt{2}) \\
 &= a_1q^{n-2}q^{-1} = a_1q^{n-3} \\
 &= a_{n-2}.
 \end{aligned}$$

Colocando a recorrência em função de $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta^{-1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, temos,

$$a_n + 2a_{n-1} = a_{n-2} \implies a_1\delta^{-n} + 2a_1\delta^{-n+1} = a_1\delta^{-n+2} \implies \delta^n + 2\delta^{n+1} = \delta^{n+2}.$$

Arquiteturas envolvendo o corte sagrado e, conseqüentemente, o octógono regular e o octógono estrelado, estão presentes em construções realizadas pelos romanos no século I e II (OLIVEIRA, 2022). Essas construções evidenciam o uso do número de prata pelos romanos em seus sistemas de proporções, fazendo com que a razão de prata, assim como a razão áurea, fossem proporções usadas no intuito de garantir beleza e harmonia em determinadas obras e edificações. Oliveira (2022), elenca umas das antigas construções que foram usadas o número de prata nesse sentido:

A Arquitetura baseia-se em sistemas de proporções que têm sido usados ao longo dos tempos, na construção de templos, tendo também como base a Matemática, principalmente, a Geometria e, no caso, de sistemas usados pelos romanos, nos séculos 1 e 2 da era Cristã, através do corte sagrado. [...] Um exemplo que será mencionado aqui, é o cimborrio da Catedral de Burgos, na Espanha, que tem a forma de um octógono regular que contém vários octógonos regulares estrelados, inclusive, vários quadrados, construídos a partir do corte sagrado. Esse cimborrio é uma das mais belas cúpulas de Renascimento espanhol, um dos elementos mais importantes da catedral. Além de sua forma octogonal estrelada (Geometria), destacam-se ainda duas características, sua originalidade arquitetônica (Arquitetura) e sua abundância escultural (arte e beleza). (OLIVEIRA, 2022, p. 165).

Há também indícios do uso da razão de prata na arquitetura asiática, principalmente no Japão. Para os japoneses, a razão de prata era mais atraente do que a razão áurea, tanto é que atribuíram o nome para a mesma, chamando-a de “yamato-hi” que significa “razão japonesa” (BASU; BHATTASHARYYA, 2019). Conseguimos perceber a presença da razão de prata em construções japonesas, como por exemplo, no “Shitenno-Ji Temple”, um dos mais antigos templos budistas localizado no Japão e que mostra na sua arquitetura vários retângulos de prata, além de apresentar a razão de prata entre o comprimento do primeiro e o quinto telhado de sua estrutura (BASU; BHATTASHARYYA,

2019), como mostra a Figura 14.

Figura 14 – “The Shitenno-Ji Temple”, Japão, 2018



Fonte: Adaptado de POSTIAUX
(2018)

3 SEQUÊNCIA DE PELL

Uma sequência bastante conhecida e que tem relação com o número de ouro é a sequência de Fibonacci. Essa sequência é formada pela sucessão de números inteiros de maneira infinita, na qual, a partir do terceiro termo, cada termo, é obtido pela soma dos dois termos anteriores. A razão entre quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência se aproxima do número de ouro à medida que escolhermos termos cada vez mais próximos do infinito (RAMOS, 2013). Por outro lado, o número de prata também possui relação com uma sequência, que recebe o nome do matemático John Pell (1611-1685), talvez não tão conhecida como a de Fibonacci, mas que possui propriedades semelhantes à mesma. Para estudarmos essas propriedades, vamos definir qual é a recorrência da sequência intitulada como sequência de Pell.

Definição 3.1 *Uma sequência é dita de Pell, quando $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ e ainda satisfaz a recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$, com $n \geq 2$. Os termos pertencentes a essa sequência são chamados de números de Pell, ou seja, os números $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70 \dots$ são ditos de Pell.*

Essa sequência também teve sua importância no meio matemático como sendo parte de um antigo algoritmo que criava sucessivas aproximações da raiz quadrada de dois (NORONHA; ALVES, 2018). O algoritmo conhecido como escada de Theon, relacionava, através de uma razão, os termos positivos da sequência de Pell $(P_n)_{n \geq 1} = (1, 2, 5, 12 \dots)$ com os termos da sequência $(Y_n)_{n \geq 1} = (1, 3, 7, 17 \dots)$. A sequência $(Q_n)_{n \geq 1} = \frac{Y_n}{P_n}$ converge para $\sqrt{2}$ (CAMPOS, 2014). Um fato curioso é que as sequências P_n e Y_n são formadas pela mesma recorrência, diferindo entre si apenas pelos termos iniciais.

A escolha dos termos iniciais $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$ citadas na Definição 3.1, tem como referência a maioria das obras consultadas e citadas neste trabalho, nas quais também usaram esses números como os seus termos iniciais. Vale salientar que muitos resultados mostrados nesta dissertação independem do valor numérico desses dois termos.

3.1 PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE PELL

Nesta seção, mostraremos algumas propriedades da sequência de Pell afim de estabelecermos uma similaridade com as propriedades que a sequência de Fibonacci apresenta. A seguir, apresentaremos propriedades referentes às somas de determinadas quantidades de termos da sequência de Pell. As propriedades que serão exibidas e demonstradas, são válidas não só para a sequência de Pell da Definição 3.1, mas para toda recorrência do tipo $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$ independente dos termos iniciais. Essas propriedades são importantes para conseguirmos verificar uma certa similaridade com as propriedades da sequência de Fibonacci e até mesmo com outras sequências que se relacionam

com os outros números metálicos.

Em relação a uma certa quantidade finita de termos de Fibonacci, Jesus (2013) mostra que:

“A soma de todos os números de Fibonacci do primeiro ao enésimo é simplesmente igual ao $(n + 2)$ -ésimo número menos 1. Por exemplo, a soma dos 10 primeiros números, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143$, é igual ao décimo segundo número (144) menos 1. A soma dos primeiros 78 números de Fibonacci é igual ao 80º menos 1, e assim por diante.” (JESUS, 2013, p.7)

Vejamos como podemos determinar a soma dos n primeiros termos da sequência de Pell.

Proposição 3.1 *A soma dos n primeiros termos da recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$ é dada por*

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} = \frac{P_{n+1} - P_n + P_0 - P_1}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da recorrência, vamos provar por indução. Para o caso base no qual $n = 1$, temos $S_1 = P_{1-1} = P_0$ e por outro lado temos $\frac{P_2 - P_1 + P_0 - P_1}{2} = \frac{P_0 + 2P_1 - P_1 + P_0 - P_1}{2} = \frac{2P_0}{2} = P_0$ (validado). Agora, admitindo que para algum n , a hipótese de indução para $S_n = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} = \frac{P_{n+1} - P_n + P_0 - P_1}{2}$ é verdadeira, vamos mostrar que o caso $S_{n+1} = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \frac{P_{n+2} - P_{n+1} + P_0 - P_1}{2}$ também é verdadeiro. De fato, usando a hipótese de indução em: $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1}$, temos

$$\begin{aligned} P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + P_n &= \frac{P_{n+1} - P_n + P_0 - P_1}{2} + \frac{2P_n}{2} \\ &= \frac{P_{n+1} + P_0 - P_1 + P_n}{2} \\ &= \frac{P_n + 2P_{n+1} - P_{n+1} + P_0 - P_1}{2} \\ &= \frac{P_{n+2} - P_{n+1} + P_0 - P_1}{2} \\ S_{n+1} &= \frac{P_{n+2} - P_{n+1} + P_0 - P_1}{2}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.1 *A soma dos n primeiros termos da sequência de Pell é dada por*

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} = \frac{P_{n+1} - P_n - 1}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Sendo S_n a soma dos n primeiros termos e considerando a Definição 3.1 da sequência de Pell, onde os termos $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, temos pela Proposição 3.1 o

resultado imediato

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{P_{n+1} - P_n + 0 - 1}{2} \\ &= \frac{P_{n+1} - P_n - 1}{2}. \end{aligned}$$

■

Podemos estabelecer também uma relação entre a soma dos n primeiros termos que ocupam posições ímpares na sequência de Fibonacci. Caldeira (2015), mostra que a soma desses números de Fibonacci é dada por F_{2n} . Vejamos como podemos determinar a soma dos n primeiros termos de ordem ímpar da sequência de Pell.

Proposição 3.2 *A soma dos n primeiros termos de ordem ímpar da recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$ é dada por*

$$P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} = \frac{P_{2n} - P_0}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: A prova será dada por indução. Para o caso base onde $n = 1$, temos $P_{2 \cdot 1 - 1} = P_1$, por outro lado, $\frac{P_2 - P_0}{2} = \frac{P_0 + 2P_1 - P_0}{2} = \frac{2P_1}{2} = P_1$ (validado). Agora, admitindo que para algum n , a hipótese de indução $P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} = \frac{P_{2n} - P_0}{2}$ é verdadeira, vamos mostrar que o caso $P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} + P_{2n+1} = \frac{P_{2n+2} - P_0}{2}$, também é verdadeiro. De fato, usando a hipótese de indução em $P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1}$, temos

$$\begin{aligned} P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} + P_{2n+1} &= \frac{P_{2n} - P_0}{2} + P_{2n+1} \\ &= \frac{P_{2n} + 2P_{2n+1} - P_0}{2} \\ &= \frac{P_{2n+2} - P_0}{2}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.2 *A soma dos n primeiros termos de ordem ímpar da sequência de Pell é dada por*

$$P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} = \frac{P_{2n}}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Considerando a Definição [3.1](#) da sequência de Pell, onde o termo $P_0 = 0$, temos pela Proposição [3.2](#) o resultado imediato

$$P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} = \frac{P_{2n} - 0}{2} = \frac{P_{2n}}{2}.$$

■

Caldeira (2015) também mostrou que a soma dos n primeiros termos de ordem

par da sequência de Fibonacci é dado pelo termo que ocupa a posição $F_{2n+1} - 1$. Vejamos o que acontece com a soma dos n primeiros termos de ordem par da sequência de Pell.

Proposição 3.3 *A soma dos n primeiros termos de ordem par da recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$ é dada por*

$$P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n-2} = \frac{P_{2n-1} + 2P_0 - P_1}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: A prova será dada por indução. Para o caso base onde $n = 1$, temos $P_{2n-2} = P_{2 \cdot 1 - 2} = P_0$, por outro lado, $\frac{P_1 + 2P_0 - P_1}{2} = \frac{2P_0}{2} = P_0$ (validado). Agora, admitindo que para algum n , a hipótese de indução $P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n-2} = \frac{P_{2n-1} + 2P_0 - P_1}{2}$ é verdadeira, vamos mostrar que o caso $P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n-2} + P_{2n} = \frac{P_{2n+1} + 2P_0 - P_1}{2}$, também é verdadeiro. De fato, usando a hipótese de indução em $P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n-2}$, temos

$$\begin{aligned} P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n-2} + P_{2n} &= \frac{P_{2n-1} + 2P_0 - P_1}{2} + P_{2n} \\ &= \frac{P_{2n-1} + 2P_{2n} + 2P_0 - P_1}{2} \\ &= \frac{P_{2n+1} + 2P_0 - P_1}{2}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.3 *A soma dos n primeiros termos de ordem par da sequência de Pell é dada por*

$$P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n-2} = \frac{P_{2n-1} - 1}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Considerando a Definição [3.1](#) da sequência de Pell, onde os termos $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, temos pela Proposição [3.3](#) o resultado imediato

$$P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n-2} = \frac{P_{2n-1} + 2 \cdot 0 - 1}{2} = \frac{P_{2n-1} - 1}{2}.$$

■

Por fim, temos mais uma propriedade em relação à soma de termos da sequência de Pell. Dessa vez, veremos que a soma dos quadrados dos n primeiros termos das sequências de Fibonacci e de Pell são bem semelhantes, uma vez que a soma desses termos na sequência de Fibonacci é dada por $F_n \cdot F_{n+1}$ (CALDEIRA, 2015). Em contrapartida mostraremos como a soma dos quadrados dos números de Pell poderá ser obtida.

Proposição 3.4 *A soma dos quadrados dos n primeiros termos da recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$ é dada por*

$$P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_{n-1}^2 = \frac{P_{n-1}P_n + P_0(2P_0 - P_1)}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: A prova será dada por indução. Para o caso base onde $n = 1$, temos $P_{1-1}^2 = P_0^2$, por outro lado, $\frac{P_0P_1+P_0(2P_0-P_1)}{2} = \frac{2P_0^2}{2} = P_0^2$ (validado). Agora, admitindo que para algum n , a hipótese de indução $P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{n-1}^2 = \frac{P_{n-1}P_n+P_0(2P_0-P_1)}{2}$ é verdadeira, vamos mostrar que o caso $P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{n-1}^2 + P_n^2 = \frac{P_nP_{n+1}+P_0(2P_0-P_1)}{2}$, também é verdadeiro. De fato, usando a hipótese de indução em $P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{n-1}^2$, temos

$$\begin{aligned} P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{n-1}^2 + P_n^2 &= \frac{P_{n-1}P_n + P_0(2P_0 - P_1)}{2} + P_n^2 \\ &= \frac{P_{n-1}P_n + P_0(2P_0 - P_1) + 2P_n^2}{2} \\ &= \frac{P_n(P_{n-1} + 2P_n) + P_0(2P_0 - P_1)}{2} \\ &= \frac{P_nP_{n+1} + P_0(2P_0 - P_1)}{2}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.4 *A Soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Pell é dada por*

$$P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{n-1}^2 = \frac{P_{n-1}P_n}{2}; \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Considerando a Definição [3.1](#) da sequência de Pell, onde os termos $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, temos pela Proposição [3.4](#) o resultado imediato

$$P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_{n-1}^2 = \frac{P_{n-1}P_n + 0(2 \cdot 0 - 1)}{2} = \frac{P_{n-1}P_n}{2}.$$

■

3.2 SEQUÊNCIA DE PELL E O NÚMERO DE PRATA

Considerando a íntima relação da sequência de Pell com o número de prata, veremos que é possível relacionar os números Pell com a sequência a_n obtida em [3](#) formada pelos lados de um retângulo de prata. Tendo em conta o retângulo de prata inicial como sendo de lados a e b , o termo que ocupa a posição n na sequência a_n é o menor lado do retângulo de prata em questão e, conseqüentemente, o maior lado do próximo retângulo de prata originado pelo retângulo de prata primitivo. Os números de Pell que estão nas ordens n e $n + 1$, ajudam a determinar quem é esse lado do retângulo. A proposição a seguir, está presente no artigo de Oliveira (2022), enfatizando a estreita relação entre o número de prata e a sequência de Pell .

Proposição 3.5 *Se a e b , com $a > b$, são lados de um retângulo de prata, P_n e P_{n+1} são*

dois termos consecutivos da sequência de Pell, então:

$$a_n = (-1)^{n+1}(P_n a - P_{n+1} b), \forall n \geq 0.$$

Demonstração: Considerando a sequência formada pelos lados dos retângulos de prata $(a_n)_{n \geq 0} = (b, a-2b, 5b-2a, 5a-12b, \dots)$ e pela sequência de Pell $(P_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 2, 5, \dots)$, vamos provar a relação $a_n = (-1)^{n+1}(P_n a - P_{n+1} b)$ por indução completa.

Verificando para o caso base $n = 0$ e $n = 1$, temos: $a_0 = (-1)^1(0 \cdot a - 1 \cdot b) = -(-b) = b$ e para $n = 1$, temos $a_1 = (-1)^2(1 \cdot a - 2 \cdot b) = a - 2b$ (validado).

Agora, admitindo que para algum n , o resultado é válido para os casos $a_n = (-1)^{n+1}(P_n a - P_{n+1} b)$ e $a_{n+1} = (-1)^{n+2}(P_{n+1} a - P_{n+2} b)$, vamos provar que o resultado também é válido para o caso $a_{n+2} = (-1)^{n+3}(P_{n+2} a - P_{n+3} b)$. Veja que por (3), $a_{n+2} = a_n - 2a_{n+1}$. Usando a hipótese de indução em a_n e a_{n+1} , temos

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (-1)^{n+1}(P_n a - P_{n+1} b) - 2(-1)^{n+2}(P_{n+1} a - P_{n+2} b) \\ &= (-1)^{n+3}(P_n a - P_{n+1} b) + 2(-1)^{n+3}(P_{n+1} a - P_{n+2} b) \\ &= (-1)^{n+3}[a(P_n + 2P_{n+1}) - b(P_{n+1} + 2P_{n+2})] \\ &= (-1)^{n+3}[P_{n+2} a - P_{n+3} b]. \end{aligned}$$

■

Veremos algumas observações referente ao número de prata, enunciadas por Oliveira (2022) (aqui, serão enunciadas como Lema) que facilitarão as próximas demonstrações. Verificaremos o motivo da validade de cada item do Lema, a seguir.

Lema 3.1 Sendo $\delta = 1 + \sqrt{2}$ e $\delta' = 1 - \sqrt{2}$ valem as seguintes relações:

- (1) $\delta \cdot \delta' = -1$;
- (2) $(\delta - (\delta'))^2 = 2 + \delta^2 + (\delta')^2$;
- (3) $1 + 2\delta = \delta^2$;
- (4) $1 + 2(\delta') = (\delta')^2$.
- (5) $1 + \delta^2 = \frac{4\delta}{\sqrt{2}}$;
- (6) $1 + (\delta')^2 = \frac{-4\delta'}{\sqrt{2}}$;

Demonstração:

- (1) $\delta \cdot \delta' = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = -1$.
- (2) $(\delta - (\delta'))^2 = \delta^2 - 2\delta\delta' + (\delta')^2 = 2 + \delta^2 + (\delta')^2$
- (3) $1 + 2\delta = 1 + 2(1 + \sqrt{2}) = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = \delta^2$
- (4) $1 + 2\delta' = 1 + 2(1 - \sqrt{2}) = 1 + 2 - 2\sqrt{2} = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (1 - \sqrt{2})^2 = (\delta')^2$.
- (5) $1 + \delta^2 = 1 + (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 4 + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot (4 + 2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2} + 4}{\sqrt{2}} = \frac{4(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{4\delta}{\sqrt{2}}$.

$$(6) \quad 1 + (\delta')^2 = 1 + (1 - \sqrt{2})^2 = 1 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 4 - 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot (4 - 2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = \frac{-4\delta'}{\sqrt{2}}.$$

■

Da Definição 3.1, é possível obter todos os números dessa sequência, de uma maneira recursiva, conhecendo sempre os dois termos anteriores antes de determinar o próximo. Podemos nos indagar e verificar se é possível determinar qualquer termo dessa sequência sem conhecer os termos anteriores, pois, conforme já enunciado por Santos e Alves (2017), o teorema de Binet nos mostra que há uma possibilidade de encontrarmos qualquer termo da sequência de Fibonacci sem a necessidade de termos anteriores:

[...] A fórmula de Binet apresenta a possibilidade de obtenção dos termos inteiros da sequência de Fibonacci, de maneira explícita, sem utilizarmos a ideia da recursividade, sendo assim, um modelo de generalização da sequência de Fibonacci. (SANTOS; ALVES, 2017, p. 6).

Vamos mostrar que essa generalização também é válida para a sequência de Pell.

Proposição 3.6 (Teorema de Binet para a sequência de Pell) *Considere a sequência de Pell P_n como na Definição 3.1, temos que*

$$P_n = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'}; \forall n \geq 0.$$

Demonstração: A prova será dada por indução completa. Para o caso base onde $n = 0$, temos $P_0 = 0$, por outro lado, $\frac{\delta^0 - (\delta')^0}{\delta - \delta'} = \frac{1 - 1}{\delta - \delta'} = 0$. Para o segundo caso base no qual $n = 1$, temos $P_1 = 1$, por outro lado, $\frac{\delta^1 - (\delta')^1}{\delta - \delta'} = \frac{\delta - \delta'}{\delta - \delta'} = 1$. (validado). Agora, admitindo que para algum n , os casos $P_n = \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'}$ e $P_{n+1} = \frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'}$ são verdadeiros, vamos mostrar que o caso $P_{n+2} = \frac{\delta^{n+2} - (\delta')^{n+2}}{\delta - \delta'}$, também é verdadeiro. Veja que $P_{n+2} = P_n + 2P_{n+1}$. Usando a hipótese de indução em P_n e P_{n+1} ,

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} + 2 \left(\frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'} \right) \\ &= \frac{\delta^n - (\delta')^n + 2\delta^{n+1} - 2(\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'} \\ &= \frac{\delta^n(1 + 2\delta) - (\delta')^n(1 + 2\delta')}{\delta - \delta'}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, itens (3) e (4), deduzimos

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= \frac{\delta^n \delta^2 - (\delta')^n (\delta')^2}{\delta - \delta'} \\ &= \frac{\delta^{n+2} - (\delta')^{n+2}}{\delta - \delta'}. \end{aligned}$$

■

Apesar de não fazer muito sentido utilizar os números inteiros negativos para fazer uma ordenação de termos, a título de curiosidade, podemos determinar os termos da sequência de Pell com índices negativos, usando o Teorema de Binet, semelhante ao trabalho realizado por Alves (2016, apud HARODAM, 1971). De fato, considerando o 2º membro da equação do Teorema de Binet (Proposição 3.6), é válido usar um $n' = -n$ que nos proporciona a seguinte expressão:

$$\frac{\delta^{-n} - (\delta')^{-n}}{\delta - \delta'} = \frac{1}{\delta^n} - \frac{1}{(\delta')^n} = \frac{(\delta')^n - \delta^n}{(\delta\delta')^n}.$$

Usando o Lema 3.1, item (1), temos

$$\frac{\frac{(\delta')^n - \delta^n}{(-1)^n}}{\delta - \delta'} = \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{-(\delta^n - (\delta')^n)}{\delta - \delta'} = \frac{-P_n}{(-1)^n} = (-1)^{1-n} P_n.$$

Com isso, podemos definir os números de Pell para índices negativos da seguinte maneira.

Definição 3.2 *O número de Pell que ocupa uma posição de ordem negativa é dado por:*

$$P_{-n} = (-1)^{1-n} P_n.$$

Isto significa que, considerando a Definição 3.1 para termos de índices positivos da sequência de Pell, os termos de índices negativos são $P_{-1} = 1, P_{-2} = -2, P_{-3} = 5, P_{-4} = -12, \dots$

Veja que $P_1 = P_{-1} + 2P_0$ e $P_0 = P_{-2} + 2P_{-1}$ permitindo-nos conjecturar que os termos da definição acima satisfazem a recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$ que origina a sequência de Pell, não contrariando a Definição 3.1.

Proposição 3.7 *Os termos que ocupam posições de ordem negativa na sequência de Pell satisfazem a recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$, ou seja,*

$$P_{-m} = P_{-m-2} + 2P_{-m-1}.$$

Demonstração: Considerando a Definição [3.2](#) para P_{-m-2} e P_{-m-1} , temos

$$\begin{aligned}
P_{-m-2} + 2P_{-m-1} &= (-1)^{1-m+2}P_{m+2} + 2(-1)^{1-m+1}P_{m+1} \\
&= (-1)^{-m+3}P_{m+2} + 2(-1)^{-m+2}P_{m+1} \\
&= (-1)^{-m}[-P_{m+2} + 2P_{m+1}] \\
&= (-1)^{-m}[-P_m] = (-1)^{1-m}P_m \\
&= P_{-m}.
\end{aligned}$$

■

Note que o número de prata é usado no teorema de Binet para obtermos termos da sequência de Pell sem o uso da recorrência, enfatizando assim, a estreita relação entre δ e a sequência estudada. Outra forma de encontrarmos números pertencentes à sequência de Pell sem conhecermos os termos imediatamente anteriores, é através de uma relação que envolve a soma de índices da sequência. Essa mesma identidade que será apresentada abaixo, também é válida para a sequência de Fibonacci, como já foi demonstrada por Caldeira (2015, p. 11).

Proposição 3.8 $P_{n+m} = P_n P_{m-1} + P_{n+1} P_m, \forall m, n \geq 1$.

Demonstração: Da Proposição [3.6](#), temos:

$$\begin{aligned}
P_n P_{m-1} + P_{n+1} P_m &= \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'} \cdot \frac{\delta^{m-1} - (\delta')^{m-1}}{\delta - \delta'} + \frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1}}{\delta - \delta'} \cdot \frac{\delta^m - (\delta')^m}{\delta - \delta'} \\
&= \frac{\delta^{n+m-1} - \delta^n (\delta')^{m-1} - \delta^{m-1} (\delta')^n + (\delta')^{n+m-1}}{(\delta - \delta')^2} + \\
&\quad + \frac{\delta^{n+m+1} - \delta^{n+1} (\delta')^m - \delta^m (\delta')^{n+1} + (\delta')^{n+m+1}}{(\delta - \delta')^2} \\
&= \frac{\delta^{n+m}(\delta^{-1} + \delta) + (\delta')^{n+m}((\delta')^{-1} + \delta')}{(\delta - \delta')^2} \\
&\quad - \frac{\delta^n (\delta')^m ((\delta')^{-1} + \delta) + (\delta')^n \delta^m (\delta^{-1} + \delta')}{(\delta - \delta')^2}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema [3.1](#), item (1), tem-se $\delta^{-1} = -\delta'$ e $(\delta')^{-1} = -\delta$. Substituindo essas informações na expressão acima tem-se

$$\begin{aligned}
P_n P_{m-1} + P_{n+1} P_m &= \frac{\delta^{n+m}(-\delta' + \delta) + (\delta')^{n+m}(-\delta + \delta')}{(\delta - \delta')^2} \\
&\quad - \frac{\delta^n (\delta')^m (-\delta + \delta) + (\delta')^n \delta^m (-\delta' + \delta')}{(\delta - \delta')^2} \\
&= \frac{\delta^{n+m} - (\delta')^{n+m}}{\delta - \delta'} = P_{n+m}.
\end{aligned}$$

■

Com o resultado da Proposição 3.8, podemos encontrar, de uma maneira simplificada, qualquer termo da sequência de Pell que ocupe uma posição par ou ímpar em relação à ordenação dos termos.

Corolário 3.5 $P_{2n} = \frac{1}{2}(P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2), \forall n \geq 1.$

Demonstração: Usando a Proposição 3.8, basta considerar $m = n$, e daí

$$P_{2n} = P_{n+n} = P_n P_{n-1} + P_{n+1} P_n = P_n(P_{n-1} + P_{n+1}),$$

como

$$P_{n+1} = P_{n-1} + 2P_n \implies P_n = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_{n-1}),$$

concluimos que

$$P_{2n} = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_{n-1})(P_{n-1} + P_{n+1}) = \frac{1}{2}(P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2)$$

■

Corolário 3.6 $P_{2n+1} = P_n^2 + P_{n+1}^2, \forall n \geq 1.$

Demonstração: Fazendo $m = n + 1$ e $n' = n$ na Proposição 3.8, temos

$$P_{2n+1} = P_n \cdot P_n + P_{n+1} \cdot P_{n+1} = P_n^2 + P_{n+1}^2.$$

■

Um dos resultados que mais desperta a curiosidade dos amantes da Matemática envolvendo o número de ouro e a sequência de Fibonacci, é o fato que a razão entre quaisquer dois termos consecutivos dessa sequência se aproximam de ϕ à medida que tomamos termos cada vez mais próximos ao infinito.

Existe uma conexão surpreendente entre estes dois conceitos: o limite de razões sucessivas dos termos da Sequência de Fibonacci é o Número de Ouro. E o que ainda mais nos fascina é o fato deste resultado valer para uma sequência de Fibonacci qualquer. (RAMOS, 2013, p. 89).

Com δ e a sequência de Pell também temos um resultado admirável, uma vez que a razão entre os termos consecutivos dessa sequência, se aproxima do número de prata.

Proposição 3.9 *O limite entre a razão de dois termos consecutivos da sequência de Pell é igual ao número de prata, isto é*

$$\delta = \lim \frac{P_n}{P_{n-1}}.$$

Demonstração: Da Proposição [3.6](#), temos

$$\begin{aligned} \lim \frac{P_n}{P_{n-1}} &= \lim \frac{\frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta - \delta'}}{\frac{\delta^{n-1} - (\delta')^{n-1}}{\delta - \delta'}} = \lim \frac{\delta^n - (\delta')^n}{\delta^{n-1} - (\delta')^{n-1}} \\ &= \lim \frac{\delta^n (1 - (\frac{\delta'}{\delta})^n)}{\delta^{n-1} (1 - (\frac{\delta'}{\delta})^{n-1})} = \lim \frac{\delta^n (1 - (\frac{\delta'}{\delta})^n)}{\delta^{n-1} (1 - (\frac{\delta'}{\delta})^{n-1})} \\ &= \lim \frac{\delta (1 - (\frac{\delta'}{\delta})^n)}{1 - (\frac{\delta'}{\delta})^{n-1}}. \end{aligned}$$

Note que: $\frac{\delta'}{\delta} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3 \approx -0,17$, logo $\left| \frac{\delta'}{\delta} \right| < 1$ e portanto

$$\lim \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim \frac{\delta (1 - (\frac{\delta'}{\delta})^n)}{1 - (\frac{\delta'}{\delta})^{n-1}} = \frac{\delta (1 - 0)}{1 - 0} = \frac{\delta}{1} = \delta.$$

■

Outro método de relacionarmos dois números consecutivos de Pell com o número de prata é verificado na seguinte igualdade:

Proposição 3.10 $\delta^n = P_n \delta + P_{n-1}, \forall n \geq 1$.

Demonstração: A prova será dada por indução. Para o caso base em que $n = 1$, temos $\delta^1 = \delta$ e por outro lado $P_1 \delta + P_0 = \delta$ (validado). Agora, admitindo que para algum n , $\delta^n = P_n \delta + P_{n-1}$ é verdadeiro, vamos provar que $\delta^{n+1} = P_{n+1} \delta + P_n$ também vale. Sabendo que $\delta^{n+1} = \delta^n \cdot \delta$ e usando a hipótese de indução, temos

$$\delta^{n+1} = (P_n \delta + P_{n-1}) \delta = P_n \delta^2 + P_{n-1} \delta.$$

Usando o Lema [3.1](#), item (3), segue que

$$\begin{aligned} \delta^{n+1} &= P_n (2\delta + 1) + P_{n-1} \delta = 2P_n \delta + P_{n-1} \delta + P_n \\ &= (2P_n + P_{n-1}) \delta + P_n = P_{n+1} \delta + P_n. \end{aligned}$$

■

3.3 SEQUÊNCIA DE PELL NA ARITMÉTICA

Uma vez exibidas as evidências da relação entre a sequência de Pell e o número de prata, podemos verificar outras propriedades análogas entre os termos das recorrências de Pell e Fibonacci em vários outros ramos da Matemática. Por exemplo, podemos percorrer para a parte da Aritmética e verificar o máximo divisor comum entre dois termos consecutivos das duas sequências. Na sequência de Fibonacci, é sabido que dois

termos consecutivos são coprimos (ALMEIDA, 2014, p.5). Vejamos o resultado com a sequência de Pell.

Proposição 3.11 *Dada a recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$, com $P_n \neq 0$, se $(P_0, P_1) = m$ (ou $(P_1, P_2) = m$ caso $P_0 = 0$), então $\forall n \geq 1$ (ou $\forall n \geq 2$ se $P_0 = 0$) tem-se*

$$(P_n, P_{n+1}) = m.$$

Demonstração: Temos que

$$(P_n, P_{n+1}) = (P_{n+1}, P_n) = (P_{n-1} + 2P_n, P_n).$$

Usando o algoritmo de Euclides, com $P_n \neq 0$, temos

$$(P_{n-1} + 2P_n, P_n) = (P_{n-1} + 2P_n - 2P_n, P_n) = (P_{n-1}, P_n).$$

Usando a recorrência e o algoritmo de Euclides n vezes, temos:

$$(P_n, P_{n+1}) = (P_{n-1}, P_n) = (P_{n-2}, P_{n-1}) = \dots = (P_1, P_2) = (P_0, P_1) = m.$$

Ou seja, $(P_n, P_{n+1}) = m$. ■

Pela Definição [3.1](#), temos que $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$. Esses números são coprimos. Com isso, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.7 *Dois termos consecutivos da sequência de Pell são coprimos, ou seja,*

$$(P_n, P_{n+1}) = 1, \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Sabemos que $(P_1, P_2) = (1, 2) = 1$. Pela Proposição [3.11](#), concluímos que $(P_n, P_{n+1}) = 1$. ■

Almeida (2014) também traz alguns critérios de divisibilidade na sequência de Fibonacci, como por exemplo, a soma de quaisquer 6 termos consecutivos é divisível por 4 e a soma de quaisquer 10 termos consecutivos é divisível por 11 (ALMEIDA, 2014). Tais critérios serviram de inspiração para demonstrarmos alguns outros critérios de divisibilidade para os termos da sequência de Pell. As próximas três proposições (resultado inédito), reforçam mais uma vez o quão similar essas duas sequências são.

Proposição 3.12 *A soma de 6 termos consecutivos da recorrência $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$, em particular da sequência de Pell, é um número divisível por 7.*

Demonstração: Vamos mostrar que podemos representar a soma $P_n + P_{n+1} + P_{n+2} + P_{n+3} + P_{n+4} + P_{n+5} = 7k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Veja que:

$$\begin{aligned}
P_n + P_{n+1} + \cdots + P_{n+5} &= P_n + P_{n+1} + P_n + 2P_{n+1} + P_{n+1} \\
&\quad + 2P_{n+2} + P_{n+2} + 2P_{n+3} + P_{n+3} + 2P_{n+4} \\
&= 2P_n + 4P_{n+1} + 3P_{n+2} + 3P_{n+3} + 2P_{n+4} \\
&= 2(P_n + 2P_{n+1}) + 3P_{n+2} + 3P_{n+3} + 2P_{n+4} \\
&= 2P_{n+2} + 3P_{n+2} + 3P_{n+3} + 2P_{n+4} \\
&= 5P_{n+2} + 3P_{n+3} + 2(P_{n+2} + 2P_{n+3}) \\
&= 5P_{n+2} + 3P_{n+3} + 2P_{n+2} + 4P_{n+3} \\
&= 7P_{n+2} + 7P_{n+3} = 7(P_{n+2} + P_{n+3}) = 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.13 *Seja (P_n) a seqüência de Pell. Se $a \mid P_n$, então $a \mid P_{nk}$; $\forall k \geq 1$, $a \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: A prova será dada por indução em k . Para o caso base em que $k = 1$, é a hipótese da proposição. Agora, admitindo que $a \mid P_{nk}$, para algum k , vamos mostrar que $a \mid P_{n(k+1)}$. Veja que $P_{n(k+1)} = P_{nk+n}$. Usando a Proposição 3.8, temos

$$P_{n(k+1)} = P_{nk+n} = P_n P_{nk-1} + P_{n+1} P_{nk}.$$

Temos que $a \mid P_n P_{nk-1}$ pelo caso base e $a \mid P_{n+1} P_{nk}$ pela hipótese de indução. Logo, $a \mid (P_n P_{nk-1} + P_{n+1} P_{nk})$. Ou seja, $a \mid P_{n(k+1)}$. ■

Com a Proposição 3.13 podemos obter algumas observações interessantes sobre os números de Pell na Definição 3.1:

- Todo número de Pell que ocupa uma posição par é um número par, pois sendo $P_2 = 2$, conseqüentemente $2 \mid P_{2k}$.
- Todo número de Pell que ocupa uma posição cujo índice é múltiplo de 3, é divisível por 5, pois sendo $P_3 = 5$, conseqüentemente $5 \mid P_{3k}$.
- Todo número de Pell que ocupa uma posição cujo índice é múltiplo de 10, é divisível por 41, pois sendo $P_{10} = 2378 = 41 \cdot 58$, conseqüentemente $41 \mid P_{10k}$.

Podemos verificar também que, curiosamente, o número 41 divide a soma de 10 números consecutivos da seqüência de Pell.

Proposição 3.14 *A soma de quaisquer 10 termos consecutivos da seqüência de Pell, é um número divisível por 41, ou seja,*

$$P_n + P_{n+1} + \cdots + P_{n+9} = 41k, \forall n \geq 0.$$

Demonstração: Vamos mostrar por indução em n . Para o caso base em que $n = 0$, temos

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_9 = 0 + 1 + 2 + 5 + 12 + 29 + 70 + 169 + 408 + 985 = 1681 = 41 \cdot 41 = 41k.$$

Agora, admitindo que para algum n , o caso $P_n + P_{n+1} + \cdots + P_{n+9} = 41k'$ com $k' \in \mathbb{Z}$ é verdadeiro, vamos mostrar que o caso $P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots + P_{n+10} = 41k''$ com $k'' \in \mathbb{Z}$ também é verdadeiro. Temos $P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots + P_{n+10} = [P_n + P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots + P_{n+9}] + P_{n+10} - P_n$. Usando a hipótese de indução, temos $P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots + P_{n+10} = 41k' + P_{n+10} - P_n$. Usando a Proposição [3.8](#), obtemos

$$\begin{aligned} P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots + P_{n+10} &= 41k' + P_{10} \cdot P_{n-1} + P_{11} \cdot P_n - P_n \\ &= 41k' + 2378P_{n-1} + 5741P_n - P_n \\ &= 41k' + 2378P_{n-1} + 5740P_n \\ &= 41k' + 41 \cdot 58P_{n-1} + 41 \cdot 140P_n \\ &= 41(k' + 58P_{n-1} + 140P_n) = 41k''; k'' \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

Outro resultado importante que o Teorema de Binet (e, conseqüentemente o número de prata) nos ajuda a demonstrar, é a obtenção de quadrados perfeitos que são encontrados através de uma soma de uma determinada quantidade de números de Pell.

Proposição 3.15 *Para todo $n \geq 1$, $S_{4n+2} = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{4n+1}$ é um quadrado perfeito.*

Demonstração: Primeiramente, veja que podemos usar o Teorema de Binet (Proposição [3.6](#)) e o Corolário [3.1](#) para expressar a soma dos n primeiros termos da sequência de Pell da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_n = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} &= \frac{P_{n+1} - P_n - 1}{2} \\ &= \frac{\frac{\delta^{n+1} - (\delta')^{n+1} - \delta^n + (\delta')^n - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\delta^n(\delta - 1) + (\delta')^n(1 - \delta') - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\delta^n + \sqrt{2}(\delta')^n - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\delta^n + (\delta')^n - 2}{4}. \end{aligned} \tag{5}$$

Assim, para a soma dos $4n + 2$ primeiros termos, temos:

$$S_{4n+2} = \frac{\delta^{4n+2} + (\delta')^{4n+2} - 2}{4}. \quad (6)$$

Pelo Lema 3.1, item (1), temos que $\delta \cdot \delta' = -1$, logo

$$\begin{cases} \delta^m \cdot (\delta')^m = 1, \text{ se } m \text{ for par, } m \in \mathbb{Z} \\ \delta^m \cdot (\delta')^m = -1, \text{ se } m \text{ for ímpar, } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como $4n + 2 = 2(2n + 1) = 2k$; com k ímpar e $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$S_{4n+2} = \frac{(\delta^k)^2 + ((\delta')^k)^2 - 2}{4}.$$

Daí

$$\begin{aligned} S_{4n+2} &= \frac{(\delta^k)^2 + ((\delta')^k)^2 + 2\delta^k(\delta')^k}{4} \\ &= \frac{[\delta^k + (\delta')^k]^2}{2^2} \\ &= \left[\frac{\delta^k + (\delta')^k}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Nos resta mostrar que $\frac{\delta^k + (\delta')^k}{2}$ é um número inteiro. Para isso, veja que por (5), $S_n = \frac{\delta^n + (\delta')^n - 2}{4}$ é um número inteiro, pois os números da sequência de Pell são todos inteiros. Fazendo $n = k$, temos:

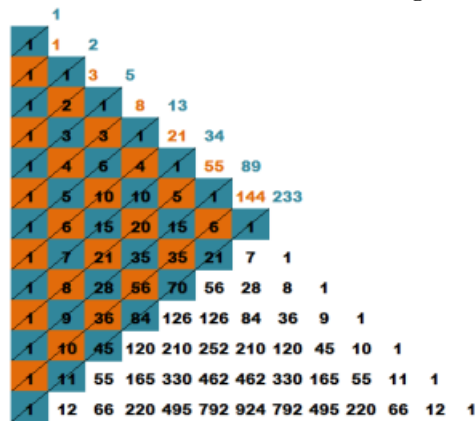
$$S_k = \frac{\delta^k + (\delta')^k - 2}{4} \implies 2S_k + 1 = \frac{\delta^k + (\delta')^k}{2}.$$

Como $2S_k + 1$ é um inteiro (pois, temos um produto e uma soma de inteiros), segue que $\frac{\delta^k + (\delta')^k}{2}$ também é um inteiro. Logo, S_{4n+2} é um quadrado perfeito. ■

3.4 SEQUÊNCIA DE PELL EM COMBINATÓRIA

Caminhando por outra área da Matemática, temos resultados notáveis da sequência de Fibonacci na área de combinatória, onde podemos perceber a presença dos números de Fibonacci no triângulo de Pascal:

Ao examinar o Triângulo Chinês (conhecido como Triângulo de Pascal) dos anos 1300, Fibonacci observou que a sequência (de Fibonacci) aparecia naquele documento. O aparecimento se dava através da soma de vários números binomiais localizados (em diagonal) acima e ao lado direito do número anterior (TOFFOLI, SODRÉ, 2020, p.1).

Figura 15 – Números de Fibonacci no triângulo de Pascal

Fonte: (SANTOS, 2017)

Também temos identidades que envolvem expressões binomiais e que nos fazem obter os termos da sequência, tanto de Fibonacci como de Pell, sem o uso propriamente da recorrência. O Teorema de Binet (Proposição 3.6) e o fato do número de prata ser igual a $\delta = 1 + \sqrt{2}$, nos possibilita a usar o Teorema Binomial, facilitando os cálculos presentes nas demonstrações. Como resultado imediato da soma S_{4n+2} , na Proposição 3.15, podemos estabelecer a seguinte identidade:

Proposição 3.16 Sendo $S_{4n+2} = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{4n+1}, \forall n \geq 1$, então

$$S_{4n+2} = \frac{1}{4} \left[\sum_{r=1}^{2n+1} \binom{4n+2}{2r} \cdot 2^{r+1} \right], \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Do Teorema de Binet (Proposição 3.6) e da equação (6), podemos escrever a soma S_{4n+2} como sendo:

$$\begin{aligned} S_{4n+2} &= \frac{\delta^{4n+2} + (\delta')^{4n+2} - 2}{4} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{4n+2} + (1 - \sqrt{2})^{4n+2} - 2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left[(1 + \sqrt{2})^{4n+2} + (1 - \sqrt{2})^{4n+2} \right] - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema Binomial, temos:

$$\begin{aligned} S_{4n+2} &= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^{4n+2} \binom{4n+2}{k} \cdot (\sqrt{2})^k + \sum_{t=0}^{4n+2} \binom{4n+2}{t} \cdot (-\sqrt{2})^t \right] - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left[\binom{4n+2}{0} (\sqrt{2})^0 + \binom{4n+2}{1} (\sqrt{2})^1 + \dots + \binom{4n+2}{4n+2} (\sqrt{2})^{4n+2} \right. \\ &\quad \left. + \binom{4n+2}{0} (\sqrt{2})^0 - \binom{4n+2}{1} (\sqrt{2})^1 + \dots + \binom{4n+2}{4n+2} (\sqrt{2})^{4n+2} \right] - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Note que os termos de potência ímpar irão se cancelar, restando apenas os termos de potência par, originados dos dois desenvolvimentos binomiais.

$$\begin{aligned}
S_{4n+2} &= \frac{1}{4} \left[1 + \binom{4n+2}{2} 2 + \binom{4n+2}{4} 2^2 + \binom{4n+2}{6} 2^3 + \dots + \binom{4n+2}{4n+2} 2^{2n+1} \right. \\
&\quad + \\
&\quad \left. 1 + \binom{4n+2}{2} 2 + \binom{4n+2}{4} 2^2 + \binom{4n+2}{6} 2^3 + \dots + \binom{4n+2}{4n+2} 2^{2n+1} \right] - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} \left[2 + \binom{4n+2}{2} 2^2 + \binom{4n+2}{4} 2^3 + \dots + \binom{4n+2}{4n+2} 2^{2n+2} \right] - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\sum_{r=1}^{2n+1} \binom{4n+2}{2r} 2^{r+1} \right] - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} \left[\sum_{r=1}^{2n+1} \binom{4n+2}{2r} \cdot 2^{r+1} \right].
\end{aligned}$$

■

Seguindo o mesmo raciocínio da proposição acima, podemos usar os números binomiais para determinar um número de Pell que ocupa uma posição par ou ímpar, na sequência, sem a necessidade de conhecer os termos anteriores. Para os termos de ordem ímpar, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.17 $P_{2n+1} = \sum_{r=0}^n \binom{2n+1}{2r+1} \cdot 2^r, \forall n \geq 0.$

Demonstração: Usando o Teorema de Binet (Proposição [3.6](#)), podemos expressar P_{2n+1} da seguinte maneira:

$$P_{2n+1} = \frac{\delta^{2n+1} - (\delta')^{2n+1}}{\delta - \delta'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^{2n+1} - (1 - \sqrt{2})^{2n+1} \right].$$

Usando o Teorema Binominal na expressão acima, temos:

$$\begin{aligned}
P_{2n+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cdot (\sqrt{2})^k - \sum_{t=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{t} \cdot (-\sqrt{2})^t \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\binom{2n+1}{0} (\sqrt{2})^0 + \binom{2n+1}{1} (\sqrt{2})^1 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} (\sqrt{2})^{2n+1} \right. \\
&\quad - \\
&\quad \left. \binom{2n+1}{0} (-\sqrt{2})^0 - \binom{2n+1}{1} (-\sqrt{2})^1 - \dots - \binom{2n+1}{2n+1} (-\sqrt{2})^{2n+1} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\binom{2n+1}{0} (\sqrt{2})^0 + \binom{2n+1}{1} (\sqrt{2})^1 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} (\sqrt{2})^{2n+1} \right. \\
&\quad - \\
&\quad \left. \binom{2n+1}{0} (\sqrt{2})^0 + \binom{2n+1}{1} (\sqrt{2})^1 - \dots + \binom{2n+1}{2n+1} (\sqrt{2})^{2n+1} \right].
\end{aligned}$$

Note que os termos de potência par irão se cancelar, restando apenas os termos de potência ímpar, originados dos dois desenvolvimentos binomiais.

$$\begin{aligned}
P_{2n+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\binom{2n+1}{1} (\sqrt{2})^1 + \binom{2n+1}{3} (\sqrt{2})^3 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} (\sqrt{2})^{2n+1} \right. \\
&\quad + \left. \binom{2n+1}{1} (\sqrt{2})^1 + \binom{2n+1}{3} (\sqrt{2})^3 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} (\sqrt{2})^{2n+1} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2 \binom{2n+1}{1} (\sqrt{2})^1 + 2 \binom{2n+1}{3} (\sqrt{2})^3 + \dots + 2 \binom{2n+1}{2n+1} (\sqrt{2})^{2n+1} \right] \\
&= \binom{2n+1}{1} (\sqrt{2})^0 + \binom{2n+1}{3} (\sqrt{2})^2 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} (\sqrt{2})^{2n} \\
&= \binom{2n+1}{1} 2^0 + \binom{2n+1}{3} 2 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} 2^n \\
&= \sum_{r=0}^n \binom{2n+1}{2r+1} \cdot 2^r.
\end{aligned}$$

■

Os termos que ocupam uma posição par na sequência de Pell também possuem uma expressão binomial que será demonstrada logo abaixo. Com isso, mostraremos que podemos exibir todos os números de Pell com o uso do triângulo de Pascal, semelhante o que ocorre com a sequência de Fibonacci.

Proposição 3.18 $P_{2n} = \sum_{r=1}^n \binom{2n}{2r-1} \cdot 2^{r-1}, \forall n \geq 1.$

Demonstração: Usando o Teorema de Binet (Proposição [3.6](#)), podemos expressar P_{2n} da seguinte maneira:

$$P_{2n} = \frac{\delta^{2n} - (\delta')^{2n}}{\delta - \delta'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \right].$$

Usando o Teorema Binominal na expressão acima, temos:

$$\begin{aligned}
P_{2n} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot (\sqrt{2})^k - \sum_{t=0}^{2n} \binom{2n}{t} \cdot (-\sqrt{2})^t \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\binom{2n}{0} (\sqrt{2})^0 + \binom{2n}{1} (\sqrt{2})^1 + \binom{2n}{2} (\sqrt{2})^2 + \dots + \binom{2n}{2n} (\sqrt{2})^{2n} \right. \\
&\quad \left. - \binom{2n}{0} (-\sqrt{2})^0 - \binom{2n}{1} (-\sqrt{2})^1 - \binom{2n}{2} (-\sqrt{2})^2 - \dots - \binom{2n}{2n} (-\sqrt{2})^{2n} \right]
\end{aligned}$$

$$P_{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\binom{2n}{0}(\sqrt{2})^0 + \binom{2n}{1}(\sqrt{2})^1 + \binom{2n}{2}(\sqrt{2})^2 + \cdots + \binom{2n}{2n}(\sqrt{2})^{2n} \right. \\ \left. - \binom{2n}{0}(\sqrt{2})^0 + \binom{2n}{1}(\sqrt{2})^1 - \binom{2n}{2}(\sqrt{2})^2 + \cdots - \binom{2n}{2n}(\sqrt{2})^{2n} \right].$$

Note que os termos de potência par irão se cancelar, restando apenas os termos de potência ímpar, originados dos dois desenvolvimentos binomiais.

$$P_{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\binom{2n}{1}(\sqrt{2})^1 + \binom{2n}{3}(\sqrt{2})^3 + \binom{2n}{5}(\sqrt{2})^5 + \cdots + \binom{2n}{2n-1}(\sqrt{2})^{2n-1} \right. \\ \left. + \binom{2n}{1}(\sqrt{2})^1 + \binom{2n}{3}(\sqrt{2})^3 + \binom{2n}{5}(\sqrt{2})^5 + \cdots + \binom{2n}{2n-1}(\sqrt{2})^{2n-1} \right] \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2\binom{2n}{1}(\sqrt{2})^1 + 2\binom{2n}{3}(\sqrt{2})^3 + \cdots + 2\binom{2n}{2n-1}(\sqrt{2})^{2n-1} \right] \\ = \binom{2n}{1}(\sqrt{2})^0 + \binom{2n}{3}(\sqrt{2})^2 + \cdots + \binom{2n}{2n-1}(\sqrt{2})^{2n-2} \\ = \binom{2n}{1}2^0 + \binom{2n}{3}2 + \cdots + \binom{2n}{2n-1}2^{n-1} \\ = \sum_{r=1}^n \binom{2n}{2r-1} \cdot 2^{r-1}.$$

■

3.5 SEQUÊNCIA DE PELL E AS MATRIZES

Podemos construir a sequência de Pell (e de Fibonacci) usando Álgebra Matricial, relacionando os resultados sobre os números de Pell com algumas propriedades de matrizes. Para isso, considere a matriz A quadrada, de ordem 2, formada pelos primeiros três números de Pell da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso, podemos fazer uma ordenação das potências da Matriz A da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
A_1 = A^1 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \\
A_2 = A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \\
A_3 = A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}. \\
A_4 = A^4 &= A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}. \\
A_5 = A^5 &= A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Escrevendo os termos das matrizes como números de Pell, temos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix}; A^4 = \begin{pmatrix} P_5 & P_4 \\ P_4 & P_3 \end{pmatrix}; A^5 = \begin{pmatrix} P_6 & P_5 \\ P_5 & P_4 \end{pmatrix}.$$

De maneira geral, tem a seguinte proposição:

Proposição 3.19 $A_n = A^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}; \forall n \geq 1.$

Demonstração: Vamos provar por Indução. Para o caso base no qual $n = 1$, já foi verificado. Agora, admitindo que para algum n , a igualdade $A_n = A^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}$ é verdadeira, vamos mostrar que a igualdade $A_{n+1} = A^{n+1} = \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix}$ também é válida. Veja que $A_{n+1} = A^{n+1} = A \cdot A^n$. Usando a Hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
A_{n+1} = A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P_{n+1} + P_n & 2P_n + P_{n-1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Observe que para $n = 0$, a matriz A_0 também está bem definida e satisfaz a Proposição [3.19](#), pois pela definição da matriz A_n e com a ajuda da Definição [3.2](#), temos

$$A_0 = A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_{-1} \end{pmatrix}.$$

Uma identidade bastante conhecida e que é válida tanto para a sequência de Fibonacci (Jesus, 2013) como para a sequência de Pell, é a chamada Fórmula de

Cassini. A importância dessa identidade vem do fato que podemos generalizar os termos das seqüências, nos permitindo assim, encontrar valores numéricos para índices negativos, como já foi demonstrado pelo o Teorema de Binet (Proposição 3.6). Vamos verificar a validade dessa fórmula via matrizes, fazendo o uso de propriedades e de operações com determinantes que posteriormente nos ajudarão a definir a matriz A_n , $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 3.20 (Fórmula de Cassini) *Para a seqüência de Pell*

$$P_n^2 - P_{n-1} \cdot P_{n+1} = (-1)^{n+1}; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Calculando o determinante da matriz A , temos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Calculando, agora, o determinante da matriz A^n , tem que

$$\det(A^n) = \begin{vmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{vmatrix} = -P_n^2 + P_{n+1} \cdot P_{n-1}.$$

Considerando a seguinte propriedade de determinantes $\det(A^n) = [\det(A)]^n$, deduzimos que

$$-P_n^2 + P_{n+1} \cdot P_{n-1} = \det(A^n) = [\det(A)]^n = (-1)^n.$$

Multiplicando por -1 em ambos os lados, concluimos

$$P_n^2 - P_{n+1} \cdot P_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

■

Com a ajuda da proposição 3.20 e sabendo que a matriz inversa de uma matriz de segunda ordem pode ser determinada por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \det(M) \neq 0,$$

podemos verificar que para n negativo, a matriz A_n também está bem definida, satisfazendo a Proposição 3.19, pois como A é invertível, temos que

$$\begin{aligned} A^{-n} = (A^n)^{-1} &= \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A_n)} \cdot \begin{pmatrix} P_{n-1} & -P_n \\ -P_n & P_{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(-1)^n} \cdot \begin{pmatrix} P_{n-1} & -P_n \\ -P_n & P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{-n} \cdot P_{n-1} & (-1)^{1-n} \cdot P_n \\ (-1)^{1-n} \cdot P_n & (-1)^{-n} \cdot P_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Com o auxílio da Definição 3.2, podemos ver os elementos da última matriz da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_{-n+1} &= (-1)^{1-n+1} \cdot P_{n-1} = (-1)^{-n} \cdot P_{n-1} \\ P_{-n-1} &= (-1)^{1-n-1} \cdot P_{n+1} = (-1)^{-n} \cdot P_{n+1} \\ P_{-n} &= (-1)^{1-n} \cdot P_n. \end{aligned}$$

Reescrevendo $(A^n)^{-1}$, usando a Definição 3.2, tem

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n-1} \end{pmatrix}.$$

Com isso, concluímos que

$$A_n = A^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Podemos estender outros resultados da sequência de Pell, para o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} , usando as matrizes. A Proposição 3.8 que envolve soma de índices e os termos da sequência de Pell, demonstrada apenas para o conjunto dos naturais \mathbb{N} , poderá ser demonstrada matricialmente conforme a próxima proposição.

Proposição 3.21 *Considerando a sequência de Pell (Definição 3.1) e a matriz A_n conforme a Proposição 3.19, temos*

$$P_{n+m} = P_n P_{m-1} + P_{n+1} P_m, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Da Proposição 3.19, segue

$$A_{n+m} = \begin{pmatrix} P_{n+m+1} & P_{n+m} \\ P_{n+m} & P_{n+m-1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Por outro lado, $A_{n+m} = A^{n+m} = A^n \cdot A^m$, ou seja,

$$\begin{aligned} A_{n+m} &= \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{m+1} & P_m \\ P_m & P_{m-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{n+1}P_{m+1} + P_nP_m & P_{n+1}P_m + P_nP_{m-1} \\ P_nP_{m+1} + P_{n-1}P_m & P_nP_m + P_{n-1}P_{m-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Comparando os elementos da diagonais secundárias das matrizes (7) (8), concluímos que $P_{n+m} = P_n P_{m-1} + P_{n+1} P_m$. ■

Conseguimos obter a representação da matriz A_n como uma recorrência igual à recorrência que origina a sequência de Pell, isto é, podemos obter não só os termos da sequência de Pell como também toda a sequência de matrizes A_n , com a mesma recorrência.

Proposição 3.22 *Considerando a sequência de Pell (Definição 3.1) e as matrizes $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ como sendo os termos iniciais, temos a seguinte recorrência matricial:*

$$A_n = A_{n-2} + 2A_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Demonstração: Usando a Proposição 3.19 e a operação de adição de matrizes, temos

$$\begin{aligned} A_{n-2} + 2A_{n-1} &= \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-3} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2P_n & 2P_{n-1} \\ 2P_{n-1} & 2P_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{n-1} + 2P_n & P_{n-2} + 2P_{n-1} \\ P_{n-2} + 2P_{n-1} & P_{n-3} + 2P_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} = A_n. \end{aligned}$$

■

Um dos resultados mais surpreendentes para sequência de Pell, é o fato de a razão entre dois termos consecutivos convergir para o número de prata, como já foi demonstrado na Proposição 3.9. Considerando o universo das matrizes e, ainda, usando a matriz A , podemos obter um resultado semelhante para a sequência: $B_n = \frac{A^n}{P_n}$. De fato, calculando o limite da mesma, temos

$$\begin{aligned} \lim \frac{A^n}{P_n} &= \lim \begin{pmatrix} \frac{P_{n+1}}{P_n} & \frac{P_n}{P_n} \\ \frac{P_n}{P_n} & \frac{P_{n-1}}{P_n} \end{pmatrix} = \lim \begin{pmatrix} \frac{P_{n+1}}{P_n} & 1 \\ 1 & \frac{P_{n-1}}{P_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & \delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & -\delta' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Outro resultado notável no universo das Matrizes, é a obtenção do termo geral da sequência de Fibonacci usando diagonalização de matrizes. Todo o processo para conseguir a fórmula fechada de Fibonacci é mostrada por Cattai (2002) e enfatiza a importância da diagonalização de um operador como ferramenta. Neste trabalho, mostraremos a obtenção da fórmula fechada de Pell através da diagonalização de operadores.

Proposição 3.23 Os autovalores associados à matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, são os números δ e δ' .

Demonstração: Veja que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1,$$

cujas raízes de $p(\lambda)$ são δ e δ' . ■

Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores. Para $\lambda_1 = \delta$, temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \delta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x + y = \delta x \\ x = \delta y \end{cases}.$$

Temos $W = (\delta y, y) \implies W = y(\delta, 1)$. Fazendo $y = 1$, temos $W_1 = (\delta, 1)$. Para $\lambda_2 = \delta'$, temos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \delta' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2x + y = \delta' x \\ x = \delta' y \end{cases}.$$

Temos $W = (\delta' y, y) \implies W = y(\delta', 1)$. Fazendo $y = 1$, temos: $W_2 = (\delta', 1)$.

Temos as matrizes $P = \begin{pmatrix} \delta & \delta' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-\delta'}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e ainda $D = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$. Sabemos que a matriz A é diagonalizável, pois seus autovetores são L.I. Como $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ temos que $A^n = (P \cdot D \cdot P^{-1})^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$.

Proposição 3.24 (Teorema de Binet para seqüência de Pell via matrizes) Considerando P_n a seqüência de Pell (Definição [3.1](#)), tem-se:

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\delta^n - (\delta')^n), \forall n \geq 0.$$

Demonstração: Dada a seqüência de Pell $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$, considerem as matrizes $V_n = \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_n \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Veja que

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{n+2} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n + 2P_{n+1} \\ P_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ P_n \end{pmatrix} = A \cdot V_n.$$

Note que $V_n = A \cdot V_{n-1} = A^2 \cdot V_{n-2} = A^3 \cdot V_{n-3} = \dots = A^n \cdot V_0$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 V_n &= A^n \cdot V_0 = P \cdot D^n \cdot P^{-1} \cdot V_0 \\
 &= \begin{pmatrix} \delta & \delta' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta^n & 0 \\ 0 & (\delta')^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-\delta'}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \delta^{n+1} & (\delta')^{n+1} \\ \delta^n & (\delta')^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\delta' \\ -1 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \delta^{n+1} & (\delta')^{n+1} \\ \delta^n & (\delta')^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \delta^{n+1} - (\delta')^{n+1} \\ \delta^n - (\delta')^n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo, $P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\delta^n - (\delta')^n)$. ■

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE

Nesta seção, encontram-se duas sugestões de atividades que poderão ser desenvolvidas em sala de aula do ensino básico. Os principais tópicos dessas atividades tem o intuito de aproveitar o conteúdo estudado neste trabalho sobre o número de prata e a sequência de Pell, além de familiarizar os alunos com novas sequências, razões e números irracionais.

O primeiro contato e o saber da existência de números que aparecem em várias situações do cotidiano, como também em várias áreas de estudo e da própria Matemática, podem instigar o aluno a querer conhecer mais a respeito sobre os números metálicos e até mesmo sobre os números irracionais. A execução dessas propostas de atividade é importante para que o discente possa aprender de forma prazerosa e autônoma sobre esses números, tornando o seu desempenho mais eficiente.

As propostas de atividades servem também como uma orientação para os docentes de como os conteúdos deste trabalho podem ser abordados no ambiente escolar, excluindo a obrigatoriedade da aplicação dessa proposta da maneira que está sendo exibida, deixando o professor à vontade para fazer adaptações e correções, sempre respeitando e estando de acordo com as competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) vigente.

4.1 PROPOSTA 1: SEGMENTO NA RAZÃO DE PRATA

- PÚBLICO ALVO
 - Alunos do ensino médio.
- TEMPO PREVISTO
 - 3 aulas.
- OBJETO DE CONHECIMENTO
 - Frações.
 - Conjuntos numéricos.
 - Razões e Proporções.
 - Sistema de equações.
- DESENVOLVIMENTO
 - Na primeira aula, poderá ser feito uma revisão sobre números inteiros e sobre o uso de frações para a representações de não inteiros, mostrando, no final, que alguns números não podem ser representados dessa maneira. A partir daí, será introduzido o conjunto dos números irracionais com exemplificações de alguns números bastante conhecidos, como o π . Também poderá ser dada uma pequena noção do conceito de segmentos incomensuráveis.
 - Na segunda aula, poderão ser exibidos alguns conceitos sobre o número de ouro (ϕ),

como ele aparece ao longo da história e sua diversidade em diferentes áreas do conhecimento. Nessa conjuntura, será apresentada a razão áurea, trazendo exemplos, curiosidades e onde ela pode ser encontrada. A partir daí será exibida a razão de prata ou número de prata (δ), enfatizando também a sua importância e mostrando como um segmento poderá ser dividido nessa proporção.

- Na terceira aula, será dado um pedaço de barbante com tamanhos diferentes a cada um dos alunos. Será pedido para os alunos tentarem dividir os segmentos na razão de prata. Poderá ser usada uma régua para auxílio na execução da tarefa. Para que o aluno tenha êxito na atividade, é necessário que ele tenha Noção da definição [2.3](#) e também entenda que está diante de um sistema de equação semelhante ao da Proposição [2.5](#). Para determinar os tamanhos corretos da divisão, é preciso que o discente consiga resolver esse sistema. Os alunos poderão se reunir em grupo para socializarem os resultados obtidos com suas respectivas divisões de segmento.

- RECURSOS

- Lousa, projetor de vídeo, barbante, régua e calculadora.

- METODOLOGIA

- Aula expositiva, apresentação de vídeo, atividade em grupo.

- AVALIAÇÃO

- A avaliação será a própria atividade do barbante. É importante verificar se os alunos conseguiram chegar à conclusão que estavam diante de um sistema de equação. Poderá ser realizada a correção do sistema de cada aluno, verificando se eles conseguiram boas aproximações com a régua na marcação dos pontos que dividem o segmento (barbante) na razão proposta. Repassar o sistema da Proposição [2.5](#) para que os alunos resolvam, concluindo que qualquer segmento pode ser dividido na razão de prata.

4.2 PROPOSTA 2: CONHECENDO A SEQUÊNCIA DE PELL

- PÚBLICO ALVO

- Alunos do 3° ano do ensino médio.

- TEMPO PREVISTO

- 2 aulas.

- OBJETO DE CONHECIMENTO

- Sequências.

- Noções básicas de Limite.

- DESENVOLVIMENTO

- Na primeira aula, é possível trabalhar o conceito de sequências, com exemplos e atividades sobre o tema. O conceito de sequências dependentes de termos anteriores (recorrências) poderá ser exibida com o exemplo da sequência de Fibonacci, elen-

cando sua estreita relação com o número de ouro, lembrando que a razão entre dois termos consecutivos se aproximam de ϕ .

- Na segunda aula, pretendemos mostrar outros tipos de sequências formadas por recorrências, dentre elas, a sequência de Pell, trazendo a Definição 3.1, os números de Pell e algumas semelhanças de resultados com a sequência de Fibonacci. Será pedido aos alunos para criarem sua própria recorrência do tipo $P_n = P_{n-2} + 2P_{n-1}$, onde os termos iniciais serão o dia e o mês de aniversário de cada um, prevalecendo o P_0 como sendo o menor dentre esses dois números. Será pedido para os discentes determinarem os 10 primeiros termos de suas sequências.

- RECURSOS

- Lousa, projetor de vídeo e calculadora.

- METODOLOGIA

- Aula expositiva, apresentação de vídeo, atividade individual.

- AVALIAÇÃO

Realizar uma atividade pedindo aos alunos para que verifiquem quais semelhanças suas recorrências e a sequência de Pell apresentam. Pedir aos alunos para realizarem várias divisões entre um termo de sua sequência e o seu antecessor, sempre dando o resultado com a aproximação de pelo menos 4 casas decimais. Após a execução da tarefa, os alunos devem compartilhar seus resultados, concluindo que o número obtido será algo próximo de 2,4142. Após a exibição dos resultados poderá ser mencionado que o número em questão é $\delta = 1 + \sqrt{2}$, o chamado número de prata. Poderá ser requisitado aos alunos a realização de uma pesquisa sobre esse número bem como seus resultados.

4.3 RESULTADOS DAS APLICAÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Para verificar a efetividade e os resultados das propostas em questão, as atividades foram aplicadas em uma escola da rede pública, com uma amostra de, aproximadamente, 60 alunos do 3º ano do ensino médio regular, sem que houvesse nenhum tipo de distinção ou seleção prévia dos participantes.

A aplicação atendeu à quantidade de aulas sugeridas em cada proposta e também foram usados os recursos mencionados em cada atividade. Os principais resultados e conclusões obtidas foram:

- Os alunos, no geral, gostaram das atividades realizadas, visto que muitos não conheciam os números de ouro e de prata, e se encantaram com a presença desses números em várias situações do cotidiano. A sequência de Pell e a recorrência que a origina também instigaram os alunos a encontrar quais seriam os termos de suas sequências, conforme a proposta 2.
- Os conteúdos matemáticos abordados nas atividades foram sobre sequências, frações,

sistema de equações e proporções. Todos os alunos já estavam habituados aos assuntos abordados e conseguiram verificar suas aplicabilidades.

- Na proposta 1, os alunos tiveram dificuldade em resolver o sistema de equações para encontrar o tamanho dos segmentos. Na proposta 2, os alunos enfrentaram problemas para realizar as divisões entre os termos consecutivos das suas recorrências, mostrando uma certa deficiência em realizar divisões quando o quociente não é um número inteiro.
- Em resumo, as atividades alcançaram o objetivo de apresentar para o alunos a importância do número de prata e da sequência de Pell, principais objetos de estudo abordados neste trabalho. Foi exposta a possibilidade do uso dos números metálicos e das sequências como ferramentas para trabalhar conteúdos matemáticos em sala de aula de forma mais atraente, divertida e efetiva.

A Tabela 1 mostra o resultado do questionário repassado aos alunos sobre a avaliação da proposta de atividade com as respectivas respostas dos mesmos em termos de porcentagem, considerando a mesma amostra de 60 alunos.

Tabela 1 – Avaliação das atividades realizadas pelos alunos

QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES		
Questionário	Sim	Não
Você se considera um aluno que tem afinidade com a matemática ou outra ciência exata	26,6%	73,4%
Você já conhecia o número de ouro?	18,3%	81,7%
Você já conhecia o número de prata ou outro número metálico?	5%	95%
Você já conhecia a sequência de Fibonacci?	58,3%	41,7%
Você já conhecia a sequência de Pell?	3,3%	96,7%
Você teve dificuldades em realizar as atividades propostas?	86,7%	13,3%
Você acha que o conteúdo estudado pode ser útil e aplicado em seu cotidiano?	61,6%	38,4%
Você tem interesse em estudar sobre o número de ouro e outros números metálicos?	60%	40%

Fonte: Autoria própria.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos neste trabalho que o número de prata e a razão de prata estão presente em várias situações do cotidiano e no próprio meio matemático. Sua semelhança com o número de ouro, um número já bastante conhecido e com inúmeros resultados, motivou a busca e a constatação de resultados significativos e expressivos também para δ . Com a criação da família dos números metálicos por Spinadel (2006), O número de prata é apenas um dos diversos números que são soluções de equações do tipo $x^2 - px - q = 0$ com $p, q \in \mathbb{N}$. Estudos e pesquisas semelhantes a esta dissertação poderá ser realizado com os outros números pertencentes a essa família.

A sequência de Pell que também foi objeto de estudo desse trabalho devido a sua estreita relação com o número de prata, nos mostrou resultados equivalentes e pertinentes a tão conhecida sequência de Fibonacci. Foram exibidas propriedades e identidades que evidenciam a presença dessa sequência em várias áreas do conhecimento matemático, como Aritmética, Combinatória e Matrizes. A convergência para o número de prata (δ), entre a razão de dois termos consecutivos de Pell, foi um resultado muito expressivo e que mostrou que a sequência de Pell está para o número de prata, assim como a sequência de Fibonacci está para o número de Ouro.

Por fim, diante da importância do número de prata e de toda sua aplicabilidade juntamente com a sequência de Pell, vimos que é possível usar esses dois objetos de estudo como ferramentas para conteúdos do ensino básico, ampliando as possibilidades do docente de enriquecer suas aulas e fazer com que o aluno aprenda de forma mais efetiva e que consiga notar a presença da matemática em outros ambientes do conhecimento científico, como muito já tem sido feito com o número de ouro e a sequência de Fibonacci.

Os resultados tanto do número de prata quanto para a sequência de Pell, não estão findados neste trabalho. Esta dissertação apenas mostrou o quão significativo, importante e intrigante eles são, fazendo com que essa curiosidade desperte o desejo e a busca por mais resultados consideráveis.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Edjane Gomes dos Santos. **Propriedades e Generalizações dos Números de Fibonacci** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7658/2/arquivototal.pdf> Acesso em 25 nov. 2022.
- ALVES, Francisco Régis Vieira. Sequência generalizada de pell - SGP: Aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. **Revista Thema**. [S.I.], v.13, n.2, p. 27-41, 2016.
- ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. **RPM**. São Paulo. V.6, 1985.
- BASU, Snigdha; BHATTACHARYYA, Rupak. The Golden and Silver Ratio: An Overview. **BKGC**. West Bengal, IN, v.2, n.1, p. 14-39, 2019. Disponível em: https://bkgc.in/ejournal/paper_list/14%20-%2039-iss2.pdf. Acesso em: 10 jan. 2023.
- BELINI, Marcelo Manechine. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2015. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06012016-161056/publico/MarceloManechineBelini_dissertacao_revisada.pdf Acesso em 14 nov. 2022.
- CALDEIRA, Jhone. A Aritmética da Sequência de Fibonacci. In: WORKSHOP DE ÁLGEBRA DA UFG-CAC, IV. 2015, Goiânia, GO. **Anais...** Goiânia: UFG, 2015. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/615/o/Texto_Minicurso_Workshop_CAC_Maio_2015_Fibonacci.pdf Acesso em 22 nov. 2022.
- CAMPOS, Danilo Pereira. **Algoritmos de aproximações de raízes quadradas** 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2014. Disponível em: <http://tede2.ufrpe.br:8080/tede/handle/tede2/6699> Acesso em 7 abr. 2023.
- CATTAI, Adriano P. Termo geral da Sequência de Fibonacci através da Diagonalização de Operadores [S.I.], 2002. Disponível em: <http://www.alunospgmat.ufba.br/adrianocattai/construcoes/maple/seq-fibonacci/seq-fibonacci.html> Acesso em 4 Dez. 2022.

EIFFERT, Frank. Escadas em espiral no museu do Vaticano, Vaticano, VA, 2019. Disponível em: <https://unsplash.com/pt-br/fotografias/cHvWMMkET1A> Acesso em 14 nov. 2022.

JESUS, Márcio Santana dos Santos de. **Os Números de Fibonacci**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2013. Disponível em: <http://institutofatimazanetti.com/pdfs/ciencia-exatas/o-numero-de-fibonaci.pdf> Acesso em 19 nov. 2022.

LÍVIO, Mario. **Razão áurea**: A história de Fi, um número surpreendente. Rio de Janeiro. Record, 2006.

MUNIZ, Paula. O Partenon de Atenas: Um monumento épico e o mistério das medidas [S.I.], 2015. Disponível em: <https://www.oversodoinverso.com.br/o-partenon-de-atenas-um-monumento-epico-e-o-misterio-das-medidas/> Acesso em 14 nov. 2022.

NORONHA, Wedson Francelino Ribeiro; ALVES, Francisco Régis Vieira. Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. Bauru, v.13, p. 1-30, dez. 2018. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/>. Acesso em: 7 abr. 2022.

OLIVEIRA, João Luzeilton de. O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell. **PMO**. [S.I.], v.10, n.2, p. 163-181, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1011>. Acesso em: 10 nov. 2022.

POSTIAUX, Charles. The Shitenno-Ji Temple, Japão, JP, 2018. Disponível em: <https://unsplash.com/pt-br/fotografias/0ifF1UFAdC0> Acesso em 14 nov. 2022.

QUEIROZ, Rosania Maria. **Razão Áurea: A beleza de de uma razão surpreendente**. 2017. Trabalho apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional, Secretaria do Estado da Educação, Universidade Estadual de Londrina, PR, 2017. Disponível em: <https://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf> Acesso em 12 fev. 2023.

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, 2013. Disponível em: <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277d.pdf> Acesso em 18 nov. 2022.

SANTOS, Arlem Atanazio dos; ALVES, Francisco Régis Vieira. A fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibo-

nacci a outros conceitos matemáticos. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática.** Bauru, v.9, p. 4-22, jul. 2017. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v09a01-a-formula-de-binet-como-modelo.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2022.

SANTOS, Gilberto Viera dos. **Explorando a Matemática do Número ϕ , o número de Ouro** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92414/santos_gv_me_rcla.pdf Acesso em 12 nov. 2022.

SANTOS, Natânia Laine Paglione. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Instituto de Biociências, Letras e Ciências exatas. Universidade Estadual Paulista, São Carlos, SP, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152385> Acesso em 15 fev. 2023.

SILVA, Felipe Olavo. **Espiral Logarítmica: Da natureza para a sala de aula** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio-bc.unirio.br:8080/xmlui/bitstream/handle/unirio/11911/MMat%2006-2015.pdf> Acesso em 6 jan. 2023.

SPINADEL, Vera Martha Winitzky de. La Familia de numeros metalicos. **Cuadernos del CIMBAGE.** Buenos Aires, n.6, p. 17-44, 2003. Disponível em: <https://ojs.econ.uba.ar/index.php/CIMBAGE/article/view/317/576>. Acesso em: 8 nov. 2022.

TOFFOLI, Sônia Ferreira L.; SODRÉ, Ulysses. Aplicações das Sequências de Fibonacci. Londrina, 2020. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/alegria/seqfib2.html#sec12> Acesso em 29 nov. 2022.