



Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Sistemas Dinâmicos e Caos

Bruno da Silva Cabral

São Cristóvão - SE
Maio, 2023

Bruno da Silva Cabral

Sistemas Dinâmicos e Caos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DMA-UFS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Salviano Veiga

Universidade Federal de Sergipe

Maio, 2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

C117s Cabral, Bruno da Silva.
Sistemas dinâmicos e caos / Bruno da Silva Cabral ; orientadora Ana Cristina Salviano Veiga. – São Cristóvão, SE, 2023.
67 f.; il.

Dissertação (mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2023.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Modelos matemáticos. 3. Matemática financeira. 4. Estabilidade. 5. Astronomia, I. Veiga, Ana Cristina Salviano, orient. II. Título.

CDU 517.938

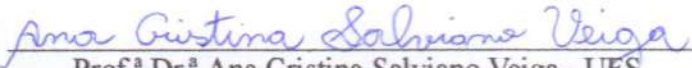
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

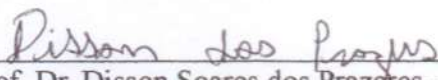
Sistemas Dinâmicos e Caos

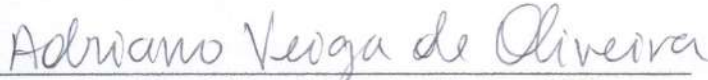
por

Bruno da Silva Cabral

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof.^a Dr.^a Ana Cristina Salviano Veiga - UFS
Orientadora


Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Adriano Veiga de Oliveira - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 26 de Maio de 2023.

*À minha família e minha
namorada, eu dedico.*

Agradecimentos

Primeiramente e acima de tudo agradeço a Deus pelo dom da vida e em segundo aos meus pais, Djalma e Jarina, por me colocarem no mundo. Agradeço de modo mais carinhoso ainda a minha aguerrida mãe, que cuidou e cuida de mim com tanto amor.

Aos meus irmãos (Sandro, Kleber, Claudia, Delman, Kledja, Neto e Delma) e sobrinhos(as), por sempre acreditarem em mim, e além disso, pela confiança e ombro amigo todas as vezes que precisei.

Agradeço a minha querida orientadora, Ana Cristina Salviano Veiga, que de prontidão aceitou esse desafio e de forma veemente me conduziu na elaboração desse trabalho, saiba que suas orientações foram mais que cruciais e espero que esse laço permaneça como forma de amizade.

Aos professores membros das bancas de qualificação e avaliadora, pelas importantes contribuições prestadas a este trabalho.

A todos os professores do Departamento de Matemática que passaram de forma majestosa todo conhecimento ao longo desses dois anos de estudos, em especial ao Professor Evilson, que mesmo nas noites de sábado conseguia tornar as aulas instigantes e desafiadoras. Saiba que para mim você é um dos caras mais inteligentes que já conheci.

Aos meus colegas de curso (Antônio, Carlos, Erivaldo, Renato, Robson, Wallisson), em particular a Marcia Oliveira Viera, por toda disponibilidade e troca de conhecimento, e em especial a Michel Ronaldo Souza Reis, por todo companheirismo, não somente nos momentos de estudos, mas também nas diversas semanas em que ficamos almoçando e proseando juntos. Sei que você é um baiano pé firme e disposto a ajudar a qualquer momento.

À minha amada e linda companheira de longa data, minha namorada Cleane, que esteve e está ao meu lado, sempre muito compreensível e disposta a me apoiar no que preciso for. Te amo!

Aos colegas do Colégio Gracinha, principalmente pelos momentos que seguraram o barco nas minhas ausências, especialmente a diretora Graça, que me ajudou cedendo um dia para estudos.

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e peço desculpas àqueles que não foram citados neste momento por mera limitação da minha memória. Estarão para sempre guardados no meu coração.

Resumo

Foi por meio do desenvolvimento histórico da astronomia que se surgiu a Teoria dos Sistemas Dinâmicos, cuja área de estudo é aberta e recente. Nesse trabalho, entenderemos esse surgimento, tomando conhecimento sobre conceitos importantes inerentes a essa área. Consideramos sistemas dinâmicos definidos por aplicações sucessivas de uma função que aplica um intervalo de números reais nele mesmo e estudamos a dinâmica de alguns modelos matemáticos. Dentre os quais podemos destacar exemplos simples de matemática financeira, que é um ramo muito próximo da nossa realidade, e o estudo da função tenda. Introduzimos a noção de equivalência entre sistemas dinâmicos definidos por iteração de funções e, por meio dessa noção, passamos a conhecer a dinâmica de novos sistemas. Estudamos ainda estabilidade assintótica de um ponto fixo e de um ponto periódico de um sistema dinâmico. Apresentamos a definição topológica de caos e discutimos algumas características essenciais desse importante conceito. Analisamos novamente a função tenda e apresentamos, por meio da expansão binária de números reais no intervalo $[0, 1]$, uma prova que o sistema dinâmico definido por essa função e, conseqüentemente, qualquer outro equivalente a ele, é caótico. Por fim, examinamos o “modelo de população logística” discutido por May([6]), destacando algumas de suas características.

Palavras-chave Sistemas dinâmicos; iteração de funções; estabilidade; conjugação; função tenda; caos

Abstract

It was through the historical development of astronomy that the Theory of Dynamical Systems, whose field of study is open and recent, emerged. In this work, we will understand this emergence, learning about important concepts concerning the area. We consider dynamical systems defined by successive applications of a function that maps an interval of real numbers to itself and we study the dynamics of some mathematical models. Among which we can highlight simple examples of financial mathematics, which is a branch very close to our reality, and the study of the tent function. We introduce the notion of equivalence between dynamical systems defined by iteration of functions and, through this notion, we get to know the dynamics of new systems. We also study asymptotic stability of a fixed point or periodic point of a dynamical system. We present the topological definition of chaos and discuss some essential features of this important concept. We analyze again the tent function and present, through the binary expansion of real numbers in the interval $[0, 1]$, a proof that the dynamical system defined by this function and, consequently, any other equivalent to it, is chaotic. Finally, we examine the “logistic population model” discussed by May ([6]), highlighting some of its features.

keywords Dynamical systems; iterating functions; stability; conjugation; tent function; chaos

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Dos Prelúdios da Astronomia ao Surgimento dos Sistemas Dinâmicos | 6 |
| 2 | Iteração de Funções | 17 |
| 3 | Estabilidade | 30 |
| 4 | Caos | 36 |
| 5 | Um Modelo de População Simples com Dinâmica Complicada | 50 |
| | Referências Bibliográficas | 58 |

Introdução

Este trabalho nasceu da necessidade de se difundir a Teoria dos Sistemas Dinâmicos, que apesar de ter seus primeiros registros datados de mais de 100 anos, ainda é um campo de estudo muito aberto e pouco conhecido, principalmente no âmbito da Educação Básica.

Reconhecemos que não é tão viável propor disciplinas no ensino médio com tal abordagem, pois possui uma abrangência matemática que muitos alunos do ensino fundamental e médio não possuem, mas seria ideal, haja visto ser um campo de estudo tão amplo, o que poderia num primeiro contato motivar os jovens a seguirem nessa área de pesquisa. Dessa forma, objetivamos aqui fazer uma abordagem mais suave do ponto de vista teórico, mas sem renunciar ao rigor matemático que o tema exige.

No primeiro capítulo, fazemos uma abordagem histórica do surgimento da área de Sistemas Dinâmicos e mostramos que ao longo da linha do tempo surgiram cientistas que lançaram teorias extremamente importantes para a evolução da Astronomia.

Alguns cientistas elaboraram modelos e teorias com o intuito de explicar o formato e o movimento de astros, como a Terra, o Sol e a Lua. É evidente que nem todas as teorias foram confirmadas, mas mesmo aquelas que foram refutadas e comprovadas que estavam erradas, tiveram seu papel fundamental na evolução, pois serviram de base para grandes avanços. Nas figuras [1](#) e [2](#) apresentamos um infográfico que mostra essa linha do tempo e os principais acontecimentos astronômicos, até chegar no primeiro contato com os sistemas dinâmicos.

Por diversas vezes foi necessário fazer estudo de situações reais para solucionar problemas ligados principalmente à natureza, como situações astronômicas, fenômenos meteorológicos, mercado financeiro e evolução populacional dos mais diversos tipos (bacteriana, virais etc.),

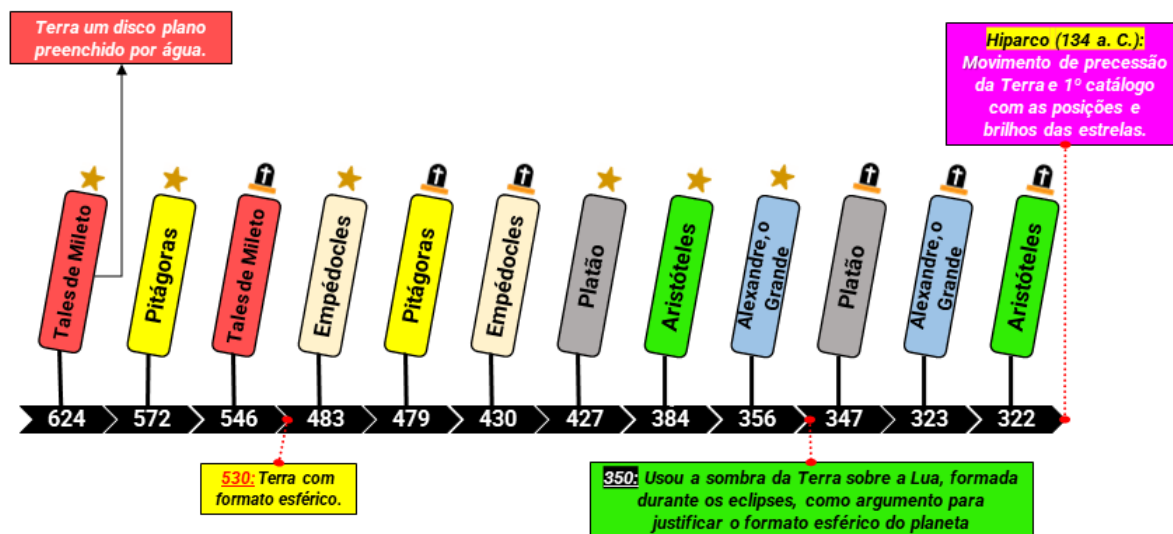


Figura 1: Era antes de Cristo

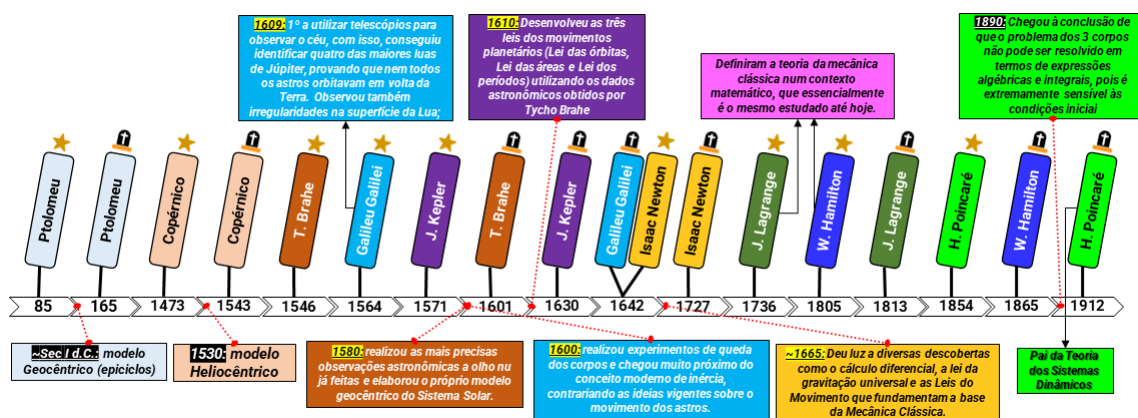


Figura 2: Era depois de Cristo

assim foi se desenvolvendo uma teoria para simular sistemas complexos, não-lineares, e que contêm órbitas.

Dessa forma, a história conta que já no século XVI, com os trabalhos sobre a mecânica celeste dos contemporâneos Kepler e Galileu, de-se origem aos sistemas dinâmicos, e este foi pensado originalmente naquele momento para tratar de sérios problemas como os movimentos planetários, mas atualmente é utilizado principalmente na modelagem matemática em diversas áreas, como por exemplo as pandemias, como a da covid 19, e vários outros problemas naturais.

Newton admitia não compreender a natureza da gravidade; entretanto, foi capaz de deduzir a lei que rege o comportamento dos corpos sob sua ação. Foi ele que trouxe luz a muitos questionamentos à época, com isso, sua contribuição na história científica é inestimável, contribuindo indiretamente ao longo do tempo com a evolução dos sistemas dinâmicos.

Define-se então que um sistema dinâmico é um conjunto de estados possíveis, e o seu estudo nasceu da necessidade em se construir de forma geral uma modelagem matemática para estudar o comportamento de situações físicas reais cujos sistemas evoluem no tempo, segundo uma estruturação algébrica (regra) que liga o momento atual com o passado, isto é, estado presente aos estados passados, onde a saída da regra é usada como valor de entrada para o próximo momento (tempo).

Dessa forma, objetiva-se definir um modelo matemático de previsibilidade que seja possível capturar por meio de sua dinâmica alguma característica do processo físico, onde a sua evolução se dá por iterações de uma função.

Existem muitos tipos de sistemas dinâmicos, no entanto, neste trabalho, consideraremos somente sistemas dinâmicos discretos em dimensão um, mais especificamente, sistemas dinâmicos definidos por aplicações sucessivas de uma dada função f sobre um intervalo I de números reais nele mesmo.

A função real $f(x) = 2x$ por exemplo, é uma regra que associa a cada número real x o seu dobro. Suponha que x denota uma população de bactérias e que $f(x)$ denota a população uma hora depois. Se a cultura de bactérias tem uma população inicial de 10000 bactérias, então depois de uma hora haverá $f(10000) = 20000$ bactérias, depois de duas horas, haverá $f(f(10000)) = 40000$ bactérias, e assim por diante. O **sistema dinâmico** definido por f consiste de um conjunto de possíveis estados, junto com uma regra que determina o presente estado em termos dos estados passados. No nosso exemplo, os estados representam uma população de bactérias por hora, que muda segundo a regra $x_n = f(x_{n-1}) = 2x_{n-1}$, onde n representa o tempo, em horas, e x_n representa a população no tempo n .

Para motivar ainda sistemas dinâmicos definidos por aplicações sucessivas de uma função f e algumas das principais definições que apresentaremos no texto, listamos a seguir mais alguns exemplos.

Escolha um número real qualquer x , calcule e^x , a seguir e^{e^x} , e assim por diante, ou seja,

forme a sequência de iteradas da função exponencial $f(x) = e^x$:

$$\{x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots\}.$$

Observe que depois de um número suficiente de iterações, os números da sequência acima tornam-se cada vez maiores, ou seja, a sequência tende a infinito. Na verdade, essa é uma das perguntas que gostaríamos de responder adiante sobre aplicações sucessivas de uma mesma função: dada uma função f e um valor inicial x , qual o comportamento da sequência

$$\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots\}?$$

Considere agora a sequência de iteradas de $f(x) = \text{sen}(x)$:

$$\{x, \text{sen}(x), \text{sen}(\text{sen}(x)), \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(x))), \dots\},$$

onde x é um número real qualquer. Observe que essa sequência tende a zero, qualquer que seja o valor inicial x .

Para a sequência de iteradas de $f(x) = \text{cos}(x)$:

$$x, \text{cos}(x), \text{cos}(\text{cos}(x)), \text{cos}(\text{cos}(\text{cos}(x))), \dots$$

por sua vez, não será difícil verificar que para qualquer valor inicial x a sequência dada rapidamente convergirá para 0,73908... radianos.

Finalmente, consideramos a função quadrática $f(x) = 4x(1 - x)$ sobre o intervalo $[0, 1]$, aparentemente bem mais simples que as funções citadas anteriormente. Escolhendo um número x entre 0 e 1 e observando o comportamento da sequência de iteradas, diferentemente das funções anteriores, observamos comportamentos completamente diferentes a depender do valor inicial x . Algumas vezes os valores se repetem, outras vezes não se repetem e na maioria das vezes não apresentam nenhum padrão. O sistema dinâmico definido por essa função quadrática é um exemplo de um fenômeno, que definiremos formalmente no texto, chamado de caos.

Percebemos a partir dos exemplos acima que sistemas dinâmicos definidos por iterações

sucessivas de funções reais mudam completamente a depender da função e das condições iniciais, conforme veremos no texto.

No capítulo 2, examinamos definições e propriedades básicas de sistemas dinâmicos. Apresentamos, dentre outros exemplos, a dinâmica de um modelo de matemática financeira, a definição de uma função que desempenha um papel central em todo o texto, a saber, a função tenda, e, por fim, a definição de conjugação topológica, que representa a noção de equivalência para sistemas dinâmicos definidos por iteração de funções.

Em muitos modelos matemáticos é possível observar comportamentos de convergência em direção a um estado fixo ou periódico. No capítulo 3, estudamos esses comportamentos através do conceito conhecido como estabilidade assintótica de um ponto fixo ou periódico de um sistema dinâmico.

No capítulo 4, apresentamos a definição topológica de caos e discutimos algumas características essenciais desse importante conceito. Analisamos novamente a função tenda e apresentamos, por meio da expansão binária de números reais no intervalo $[0, 1]$, uma prova que o sistema dinâmico definido por essa função e, conseqüentemente, qualquer outro equivalente a ele, é caótico.

Por fim, no capítulo 5, examinamos o “modelo de população logística” discutido por Robert May, um físico e biólogo matemático que publicou na revista Nature em 1976, o artigo intitulado “Simple mathematical models with very complicated dynamics” ([6]), um marco na revolução do caos. Ele apresentou resultados matemáticos interessantes com possíveis conseqüências aplicadas, onde percebeu-se que equações não lineares simples podem possuir um amplo espectro de comportamentos de ponto fixo a periódico a caótico.

Ao longo de todo o texto usamos [1], [2] e [3] como principais referências.

Capítulo 1

Dos Prelúdios da Astronomia ao Surgimento dos Sistemas Dinâmicos

Nesse primeiro momento, nosso principal personagem nessa história é o filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), o principal representante da terceira fase da história da filosofia grega, “a fase sistemática”.

Muitos filósofos gregos elaboraram modelos com o intuito de explicar o formato da Terra, as estações do ano, bem como os movimentos do Sol, da Lua e dos outros planetas visíveis a olho nu.

Um desses filósofos foi Tales de Mileto (624-546 a.C.), que considerava a Terra um disco plano preenchido por água. Pitágoras de Samos (572-479 a.C.), por sua vez, acreditava que a Terra apresentava formato esférico. Já Aristóteles explicou que as fases da Lua dependiam da iluminação solar, ao observar a formação de sombras durante os eclipses, e também defendia a hipótese de que o Universo fosse finito e esférico e que, juntamente aos astros, fosse imutável: sempre existira e existiria.

Discípulo de Platão (427-347 a.C.), Aristóteles escreveu uma série de obras que falavam sobre política, ética, moral e outros campos de conhecimento. Além disso, foi professor de Alexandre, o Grande (356-323 a.C.).

Pode-se ver como uma das diferenças entre Platão e Aristóteles o fato de que o segundo promove uma *desmatematização* da filosofia e da natureza em detrimento do valor que seu

mestre Platão dava à matemática. Segundo nos lembra Zingano, Aristóteles diria que:

A matemática é o instrumento científico utilizado para examinar o mundo do ponto de vista de sua quantidade, mas ela não é capaz de nos dar por si só a natureza do mundo. (2005, p.65)

Aristóteles teve mais mérito na física e na astronomia. Suas teorias no campo da Física envolviam o que ele descreveu como os **quatro elementos**, onde Aristóteles descreve detalhadamente uma relação entre esses elementos, sua dinâmica, como eles uniam a Terra e como eram, em muitos casos, atraídos um pelo outro por forças não especificadas.

Ele tinha um vigor mais “qualitativo” do que “quantitativo”, como vigora na modernidade. Assim, a visão de Aristóteles sobre o sistema solar não se utilizava de aparatos matemáticos para justificar seu modelo. Sua interpretação tornou-se aceita, acolhida e difundida por séculos, contribuindo para a propagação de conceitos físicos e astronômicos equivocados. Entre esses equívocos, podemos ressaltar o éter: a substância proposta por Aristóteles que comporia os corpos celestes, cuja existência foi investigada até meados do século XIX.

A visão aristotélica sobre mecânica celeste é bastante incompleta pela sua natureza qualitativa, dessa forma, Aristóteles obteve mais destaque por tentar responder algumas questões sobre o funcionamento do Universo do que por suas respostas propriamente ditas. Sem comprovações matemática, defendia que as leis que governam o movimento do firmamento são diferentes das leis que governam o movimento da Terra. Seu modelo astronômico pode ser assim resumido:

Aristóteles acreditava que cada um dos quatro elementos sub-lunares possuía seu “lugar natural”. Quando tirado desse lugar, o elemento tende a voltar a ele, deslocando-se em linha reta. Assim, a terra e água movem-se naturalmente para o centro da Terra; ar e fogo caminham naturalmente no sentido oposto. O movimento dos corpos depende da sua composição, ou seja, é função da proporção dos naturais. Tal movimento é classificado como misto. O éter e os corpos celestes movem-se naturalmente em circunferências, a figura geométrica perfeita.

Essa natureza qualitativa, de certo modo falho, nada dizia sobre quando e onde achar os corpos celestes, mas serviram de base para C. Ptolomeu (85 – 165 d.C.) propor seu modelo

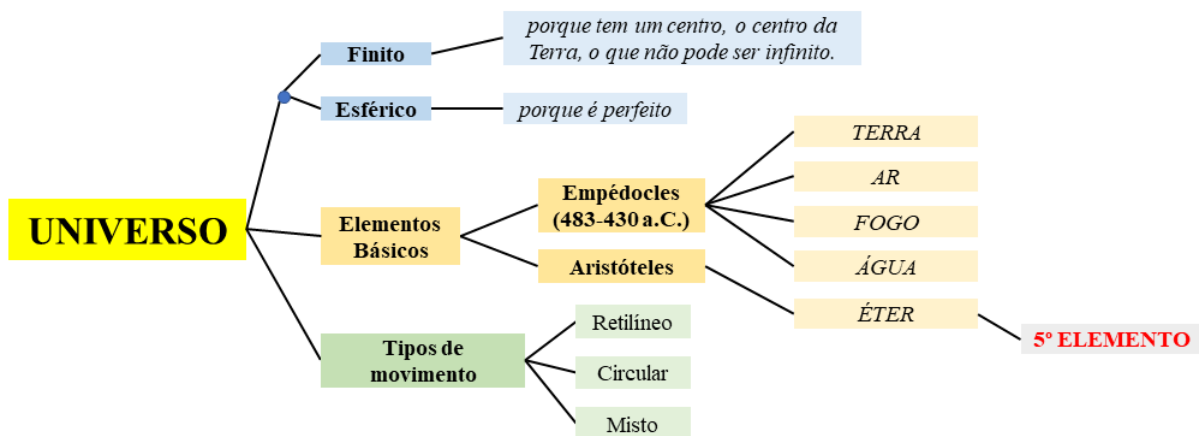


Figura 1.1: Modelo astronômico de Aristóteles

geocêntrico.

Para Ptolomeu, a Terra ocupa o centro do Universo, e os demais astros estão dispostos na seguinte ordem: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno e estrelas fixas. Urano, Netuno e Plutão não haviam sido descobertos ainda. Esse modelo segue a ideia de que um pequeno círculo formado por um astro em torno de um ponto imaginário descreve, a partir de seu novo ponto, um outro círculo. Assim, para Ptolomeu cada planeta percorre uma órbita circular – chamada de epiciclo – em torno da Terra. As previsões quantitativas à época atendiam aos dados observados, e tal modelo foi aceito durante 14 séculos.

O modelo dos epiciclos passou a ser reelaborado de modo mais preciso com o avanço do tempo. Assim, para preservar essa ideia, conjecturou-se que um planeta girava em torno de um ponto, que girava em torno de um ponto, que girava em torno de um ponto ... que girava em torno da Terra. Assim, notou-se que determinar a posição de cada planeta era bastante trabalhoso, pois cada planeta possuía um número muito grande de epiciclos.

Aproximadamente 14 séculos depois, o astrônomo e matemático Nicolau Copérnico (1473 – 1543) desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar, onde tinha como base os estudos dos precedentes Aristóteles e Ptolomeu. Assim, em um manuscrito de 1530, chamado *Revolutionibus Orbium Coelestium* (“A Revolução dos Esferas Celestes”), Copérnico afirma que a Terra não está fixa no centro do universo, e sim girando em uma órbita circular ao redor do Sol, assim como os demais planetas. ⁽¹⁾

⁽¹⁾A palavra revolução que aparece no título da obra de Nicolau Copérnico se refere a variação cíclica.

Mesmo conceitualmente mais simples, o sistema de Copérnico não era melhor que o de Ptolomeu, e apesar do erro com relação à órbita circular dos planetas, a sua teoria heliocêntrica abalou o mundo acadêmico e abriu caminho para a busca de uma maior compreensão do Universo.

Copérnico deduziu, após sucessivos cálculos matemáticos, que é a Terra o corpo celeste que executa um movimento completo em torno do próprio eixo, explicando o porquê do dia e da noite. Copérnico também ordenou os planetas por suas distâncias em relação ao Sol e concluiu que quanto menor a órbita, maior a velocidade orbital.

Pouco tempo depois o astrônomo dinamarquês Tyge Brahe (1546 – 1601) conseguiu fazer observações astronômicas abrangentes e precisas sem precedentes, corrigindo os registros existentes. Ficou conhecido durante sua vida como astrônomo, astrólogo e alquimista. Ele foi o último grande astrônomo antes da invenção do telescópio, cujas observações a olho nu eram muito precisas e ajudaram a consolidar o modelo planetário proposto por Copérnico.

Em 1572, Brahe notou uma estrela completamente nova (uma supernova) que era mais brilhante do que qualquer estrela ou planeta, o que contrariava a concepção de um céu imutável. Espantado com a existência de uma estrela que não deveria estar ali, dedicou-se à criação de instrumentos de medição cada vez mais precisos nos quinze anos seguintes (1576-91).

Cinco anos depois, ele faz uma observação que violava a perfeição do mundo aristotélico. Brahe especulou que o cometa que ele havia visualizado em 1577 podia percorrer um caminho não-circular.

No final de sua carreira, Brahe ganha um discípulo que viria a ser um dos mais importantes astrônomos da história. Aqui surge o importantíssimo astrônomo, astrólogo e matemático alemão Johannes Kepler (1571 – 1630).

A relação entre os dois não foi fácil, mas esse contato foi importante para a evolução dos conhecimentos astronômicos e astrológicos de Kepler. Dois dias após a morte de Brahe, Kepler tomou posse dos importantes dados astronômicos do seu mestre e iniciou uma revolução na forma de pensar astronomia, respeitando os dados observacionais anteriores, trabalhou duramente até obter um modelo cujas previsões iam de acordo com as observações de Brahe. A ideia de um caminho não-circular proposto por Brahe foi reforçada por Kepler em 1604

quando observou outra supernova.

Partindo do modelo de Copérnico, cujas ideias aristotélicas ainda estavam imbuídas, Kepler percebeu que a órbita de Marte, até então considerada circular, desvia-se cerca de 8 minutos de arco, comparando-se com as medidas de Brahe, discrepância não observada por Copérnico, que possuía baixa precisão de dados. Diante disso, Kepler teve que abandonar esses conceitos pré-conhecidos.

Assim, em relação à astronomia, Kepler provou que além de Marte, todos os demais planetas percorrem orbitas elípticas e em 1609, no livro *Astronomia Nova, Aitiologetos seu Physica Coelestis* (“Uma Nova Astronomia, Causalmente Explicada, ou Física Celeste”), ele propôs que:

- i) Os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol num foco;
- ii) Uma reta imaginária ligando um planeta ao Sol percorre áreas iguais durante intervalos iguais de tempo.

Essas duas descrições ficaram conhecidas até hoje como a primeira e segunda lei de Kepler, e com elas ele concluiu que as ideias de movimentos celestes circulares defendidas por Copérnico eram erradas e que os movimentos celestes não são uniformes, já que ela implica que um planeta altera sua velocidade de acordo com sua distância em relação ao sol.

Após o surgimento das frações decimais em 1585 e a divulgação da primeira tabela de logaritmos desenvolvida por J. Napier (1550 – 1617) em 1614, a astronomia deu passos importantes, pois em 1619, no livro *Harmonices Mundi* (“Harmonias do Mundo), após exaustivos cálculos, Kepler divulgou sua terceira lei, chamada de “Lei dos Períodos”, onde ele aponta a existência da relação entre a distância de cada planeta e seu período de Translação.

As leis de Kepler podem ser consideradas como as últimas contribuições para a Mecânica Celeste de caráter puramente cinemático, isto é, sem levar em consideração as forças que governam os movimentos.

Contemporâneo de Kepler, o considerado revolucionário italiano Galileu Galilei (1564 – 1642) fez importantes contribuições para áreas como a Física, a Matemática e a Astronomia, sendo assim referenciado como o “pai da ciência moderna”.

Galileu interessou-se pela teoria do movimento ao ficar desconfiado das conclusões feitas por Aristóteles, uma vez que para ele não havia uma Terra fixa no centro do Universo (Geocentrismo). Adotou uma abordagem inédita que consistia em criar procedimentos experimentais para medir determinadas grandezas dos corpos em movimento, com a finalidade de verificar a validade das proposições teóricas. Essa técnica atualmente lhe rende o título de o “pai do método científico”.

Em meados de 1609 tomou conhecimento sobre instrumentos que permitia observar objetos a longas distâncias, e de forma genial criou o seu próprio equipamento para explorar o Universo. Com uma versão bem mais potente, tornou-se pioneiro no uso do telescópio. Dentro de um ano, com seu aparelho em mãos, fez estudos científicos de objetos celestiais conduzindo-lhe a observar as fases de Vênus, os quatro maiores satélites de Júpiter, os anéis de Saturno, uma infinidade de estrelas visíveis a olho nu, e fez importantes análises da rotação das manchas solares e as irregularidades na superfície lunar.

Tais constatações viria a fazer comprovações como:

- i) As manchas solares mostravam que o sol não era uma esfera homogênea, e em decorrência do movimento dessas manchas, concluía-se que a Terra girava em torno de si.
- ii) Vênus possuía fases como a Lua., contrariando o modelo de epiciclos defendido por Ptolomeu.
- iii) Os satélites de Júpiter mostravam a existência de outros centros de movimento celestes, o que levava a concluir que pequenos corpos podiam orbitar em torno de um maior.

A constatação 1 foi publicada em 1632 no *Diálogo sobre os dois principais sistemas mundiais*, que comprovava o modelo heliocêntrico defendido por Copérnico. Contudo, Galileu sofreu demérito, pois suas observações iam de encontro com o modelo geocêntrico ao qual a igreja Católica acreditava ser a verdade sobre o sistema solar, levando-o a ser considerado um herege pelo Tribunal da Santa Inquisição, fazendo-o passar por um cansativo processo de perseguição, o levou a negar suas teorias, afirmando serem somente hipóteses.

Galileu foi um grande inventor. Suas análises quantitativas realizadas com invenções

que teve sua total ou parcial participação (telescópio astronômico, o relógio de pêndulo, o binóculo, a balança hidrostática etc.) refutaram as leis da física de Aristóteles.

Seus conceitos introdutórios foram fundamentais para a formulação das leis de Isaac Newton (1642 – 1727), pois foi Galileu que introduziu conceitos de Dinâmica, teoria que trata das causas dos movimentos, analisando-os e descrevendo-os de acordo com as forças responsáveis por produzi-lo. Dentre tantas análises, foi o primeiro a perceber que a ação de uma força é necessária para mudar o movimento de um corpo, mas não para mantê-lo deslocando-se em linha reta e com velocidade constante (lei da inércia).

Conforme Galilei, todos os corpos caem segundo uma mesma aceleração gravitacional, na ausência da resistência do ar (comprovado, em 1971, diretamente da lua pelo astronauta David Scott na missão Apolo-XV), isto é, corpos em queda livre, mesmo os de massas diferentes, chegariam ao chão ao mesmo tempo, pois estariam sujeitos à mesma aceleração (queda livre).

E nesse momento chegamos ao ponto chave do nosso estudo, pois acredita-se que Galileu Galilei para mostrar a validade de suas conclusões soltou corpos de massas diferentes do alto da Torre de Pisa, onde certamente seus resultados constituem o ponto de partida da **Teoria de Sistemas Dinâmicos** (mais conhecido atualmente como **Caos**).

Galileu disse: “Meu objetivo é expor uma ciência muito nova que trata de um tema muito antigo. Talvez nada na natureza seja mais antigo que o movimento...”

Newton, uma figura multifacetada, entusiasmado por conceitos já concebidos, interessou-se em estudar os movimentos, e durante 18 meses confinado em sua casa, numa fazenda em Lincolnshire (interior da Inglaterra), devido a peste bubônica de 1665, deu luz a diversas descobertas como o cálculo diferencial, a lei da gravitação universal concebida a partir das leis de Kepler do movimento planetário, e para o nosso contexto, o mais importante, propôs as três leis a respeito dos efeitos de uma força sobre o movimento de um corpo, conhecida simplesmente por Leis do Movimento e fundamentam a base da Mecânica Clássica, que são:

- i)* Lei da Inércia;
- ii)* Lei do Princípio Fundamental da Dinâmica;
- iii)* Lei da Ação e Reação.

Essas formulações abriram espaço para uma sofisticação crescente do aparato matemático que modela fenômenos mecânicos, culminando nos trabalhos de Joseph Lagrange (1736 – 1813) e Willian Hamilton (1805 – 1865), que definiram a teoria da mecânica clássica num contexto matemático, que essencialmente é o mesmo estudado até hoje.

Tais leis tornou possível responder diversos questionamentos em aberto, como “se a Terra realmente atrai a Lua, e vice-versa, então porque as duas não estão em rota de colisão?”, que é muito bem respondida pela segunda lei.

Newton encontrou que a força que a Lua em órbita em torno da Terra, ou os planetas em órbita em torno do Sol, diminui com o quadrado da distância entre os centros de massa dos corpos, tal constatação levou a concluir a fórmula da chamada **Lei da Gravitação Universal**, onde Newton escreveu:

“[...] toda matéria atrai outra matéria com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas”

Matematicamente denotada por:

$$F_1 = F_2 = G \cdot \frac{(m_1 \cdot m_2)}{r^2}$$

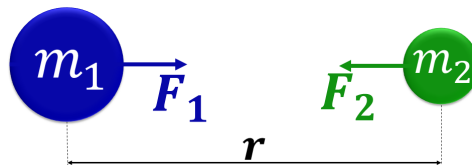


Figura 1.2: Ilustração gráfica da Lei da Gravitação Universal

Isto é, dois corpos puntiformes m_1 e m_2 atraem-se exercendo entre si forças de mesma intensidade F_1 e F_2 , proporcionais ao produto das duas massas e inversamente proporcionais ao quadrado da distância (r) entre elas, onde G é a constante gravitacional.

Essa lei é considerada universal porque explica o movimento da Terra em torno do Sol, da Lua em torno da Terra ou a queda de uma maçã. Tal lei trata da interação entre dois corpos, mas pode ser utilizada para se calcular as interações gravitacionais entre vários corpos, o que deu origem ao **problema dos n-corpos**.

Esse problema trata da predição da movimentação de um grupo de corpos celestiais que interagem entre si gravitacionalmente. A resolução deste problema foi motivada pela necessidade de se compreender o movimento do sol, planetas e estrelas. A sua primeira formulação matemática foi dada por Newton, na obra *Principia*, de 1687, que também trazia provas das leis de Kepler.

Desde que a gravidade é responsável pelo movimento das estrelas e planetas, Newton tentou expressar as interações gravitacionais em termo de equações diferenciais. Neste livro, Newton provou que corpos com simetria esférica podem ser modelados como se sua massa se concentrasse em um ponto.

O problema dos n -corpos, mais especificamente para $n = 2$, é interessante para a astronomia pois pares de corpos celestes se movem rapidamente em direções arbitrárias e amplamente separados um do outro, e mais distante ainda de outros objetos, se assemelhando as condições do problema de Kepler, o que é possível ser resolvido desmembrando-o como dois problemas de um corpo.

Já para $n = 3$ não era tão “simples” àquela época. Resolver o chamado “problema dos três corpos” exige uma quantidade impensável de cálculos, pois é necessário prever como três corpos celestes orbitam um ao outro. As interações gravitacionais entre os três objetos resultam em um sistema caótico e complexo, contudo, muito sensível às posições iniciais de cada corpo, pois dependem das massas, das suas posições e suas velocidades iniciais.

Newton resolvera o problema dos dois corpos interagentes. As gerações seguintes de físicos e matemáticos tentaram aplicar o método de Newton para o problema dos três corpos. Foi a partir de trabalho de 1887 de Heinrich Bruns (1848 – 1919) e do matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912) em 1890, que se chegou à conclusão de que o problema não pode ser resolvido em termos de expressões algébricas e integrais, pois é extremamente sensível às condições iniciais. Portanto, não se pode obter fórmulas analíticas exatas que descrevam a trajetória de cada um dos três corpos interagentes.

Assim ocorre uma revolução científica após um episódio histórico envolvendo os matemáticos Poincaré, o sueco Mittag-Leffler, além do monarca da Suécia e Noruega, rei Oscar II. Na origem de tudo: o aniversário de um monarca; um erro de proporções históricas; e muitos, muitos problemas.

Primo do presidente que governou a França durante a Primeira Guerra Mundial, Poincaré ficou famoso ao conquistar o prêmio oferecido pelo rei Oscar II na festa de seu aniversário de 60 anos. O prêmio, lançado em 1886, seria entregue para quem desse uma prova matemática rigorosa a respeito da estabilidade (ou não) do Sistema Solar. Ao estudar esse problema, Poincaré elaborou um texto de quase 300 páginas, no qual desenvolve vários teoremas. Ele acabou ganhando o prêmio em 1889, embora sua solução fosse apenas parcial.

Poincaré percebeu que as propriedades qualitativas das soluções podiam ser investigadas, sem que tais soluções precisassem ser determinadas explicitamente. Assim, em vez de procurar por fórmulas, ele partiu para uma abordagem qualitativa, utilizando técnicas geométricas e topológicas.

Em 1890, Henri Poincaré publicou na revista sueca *acta mathematica* um artigo de 270 páginas intitulado “*sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*”. Seu trabalho teve um papel fundador, pois é o primeiro sobre teoria qualitativa de sistemas dinâmicos e provavelmente, ele também foi o primeiro a vislumbrar a existência de “caos” no problema dos três corpos.

Na década seguinte, Poincaré iria expandir esse artigo num livro em três volumes (mais de 1300 páginas) que revolucionou esta área da ciência: *les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.

Combinando Mecânica Quântica com a Teoria do Caos, Heisenberg (1901 – 1976) afirma que medidas de posição e momento, em qualquer instante, são sempre incertas; Poincaré observa que há sistemas dinâmicos em que minúsculas incertezas na condição inicial afetam drasticamente a previsão para uma escala de tempo longa, pois por mais que os erros iniciais sejam infinitesimalmente pequenos, eles crescem rapidamente (exponencialmente) com o tempo.

Costuma-se dizer que um sistema determinístico, que exibe comportamento caótico, é imprevisível num sentido prático, já que não se pode conhecer sua condição inicial com erro nulo.

Considera-se que o primeiro livro publicado na área de sistemas dinâmicos é a obra *Dynamical Systems*, escrita pelo matemático estado-unidense George Birkhoff (1884 – 1944), e publicada em 1927.

Hoje, graças às suas contribuições, Poincaré é considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, tendo introduzido muitos dos aspectos do estudo qualitativo das equações diferenciais que permitiram estudar propriedades assintóticas das soluções (ou da maior parte das soluções) de uma equação diferencial, como estabilidade e periodicidade, sem ser necessário resolver explicitamente a equação diferencial.

Capítulo 2

Iteração de Funções

A área de matemática conhecida como sistemas dinâmicos tem sido de grande interesse nos últimos quarenta anos. Um sistema dinâmico é um tipo particular de função usada para modelar processos que variam com o tempo. Exemplos de tais processos aparecem em mecânica dos fluidos, crescimento populacional, mecânica celeste, cardiologia, dinâmica de partículas e em muitas outras situações.

Existem muitos tipos de sistemas dinâmicos, no entanto, conforme mencionado na introdução, neste trabalho, consideraremos somente sistemas dinâmicos definidos por iterações de uma dada função f sobre um intervalo I de números reais nele mesmo.

Um intervalo é um subconjunto conexo de \mathbb{R} da forma $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$, ou $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ ou $[a, b)$ ou $(a, b]$ (definidos de forma análoga), para quaisquer $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $a < b$. Quando nos referirmos a noções topológicas em um intervalo, iremos sempre nos referir à topologia induzida no intervalo ambiente. Por exemplo, $[0, \frac{1}{2})$ é um intervalo aberto no intervalo $[0, 1]$.

Seja I um intervalo de números reais e $f : I \rightarrow I$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ definimos

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-vezes}}(x)$$

a composição de n -cópias da função f .

Definição 2.1. O sistema dinâmico definido por $f : I \rightarrow I$ é a família de funções $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, com $f^n : I \rightarrow I$.

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{3}$. O sistema dinâmico definido por f é a família de funções dada por $f^n(x) = \frac{x}{3^n}$.

Definição 2.2. Seja $f : I \rightarrow I$, e assuma que $x \in I$.

i) A órbita de um ponto $x \in I$ sobre f , denotada por $O(x)$, é a sequência

$$O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

ii) Dizemos que $x \in I$ é um ponto fixo de f se $f(x) = x$. Em particular, a órbita de um ponto fixo é a sequência constante $O(x) = \{x, x, x, \dots, x, \dots\}$.

iii) Dizemos que $x \in I$ é um ponto fixo eventual de f se x não é ponto fixo de f , mas $f^n(x)$ é um ponto fixo de f , para algum $n \in \mathbb{Z}_+$.

iv) Assuma que $m \in \mathbb{Z}_+$. Dizemos que $x \in I$ é um ponto periódico ou um ponto m -periódico de f se $f^m(x) = x$ e $f^j(x) \neq x$ para $j = 1, \dots, m - 1$. Nesse caso, a órbita de x é dita ser uma órbita periódica ou uma órbita m -periódica. Dizemos ainda que m é o período do ponto periódico ou da órbita periódica.

v) Dizemos que $x \in I$ é um ponto periódico eventual de f se x não é ponto periódico de f , mas $f^n(x)$ é um ponto periódico de f , para algum $n \in \mathbb{Z}_+$.

Observe que se x é um ponto m -periódico de f , então os pontos $x, f(x), \dots, f_{m-1}(x)$ são todos m -periódicos e todos distintos.

Exemplo 2.2. Considere as quatro seguintes funções definidas sobre \mathbb{R} :

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x$,

(ii) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}x$,

(iii) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = -x$,

(iv) $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $k(x) = 0$.

Observe que $f(0) = g(0) = h(0) = k(0) = 0$. Portanto, 0 é um ponto fixo das quatro funções definidas acima.

Consideremos agora a função f . Tomando $x_0 \in \mathbb{R}$, temos $f^n(x_0) = (-2)^n x_0 \neq x_0$, para todo $x_0 \neq 0$. Assim, f não possui pontos periódicos. A órbita de $x_0 \neq 0$ consiste de valores que se afastam cada vez mais do ponto fixo 0, através de valores positivos e negativos. A dinâmica de f é ilustrada na figura [2.1](#), a qual chamamos de diagrama de fase do sistema dinâmico $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

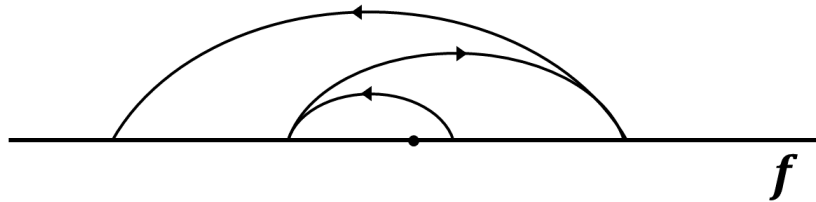


Figura 2.1: Diagrama de fase de f

Consideremos agora a função g . Tomando $x_0 \in \mathbb{R}$, temos $g^n(x_0) = \frac{x_0}{2^n} \neq x_0$, para todo $x_0 \neq 0$. Assim, g também não possui pontos periódicos. A órbita de $x_0 \neq 0$ consiste de valores que se aproximam cada vez mais do ponto fixo 0. A dinâmica de g é ilustrada na figura [2.2](#).

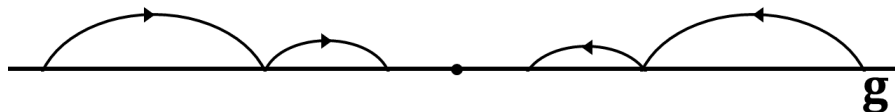


Figura 2.2: Diagrama de fase de g

Analisemos agora a dinâmica da função h . Observe que a órbita de qualquer ponto $x_0 \neq 0$ é dada por $O(x_0) = \{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots\}$, isto é, $h^2(x_0) = x_0$ e $h(x_0) \neq x_0$. Portanto, cada $x_0 \neq 0$ é um ponto fixo 2-periódico de h . A dinâmica de h é ilustrada na figura [2.3](#).

Por fim, analisamos a dinâmica de k . Observe que cada $x_0 \neq 0$ é um ponto fixo eventual de k , visto que x_0 não é ponto fixo de k , isto é, $k(x_0) \neq x_0$, porém, $k(x_0) = 0$ é ponto fixo de k . A dinâmica de k é ilustrada na figura [2.4](#).

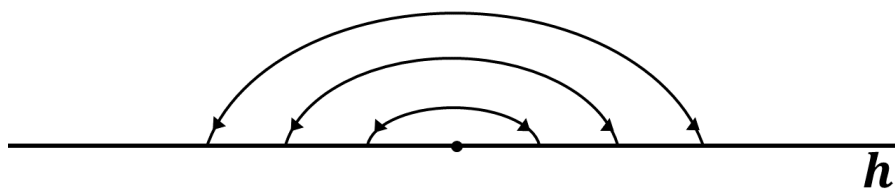


Figura 2.3: Diagrama de fase de h

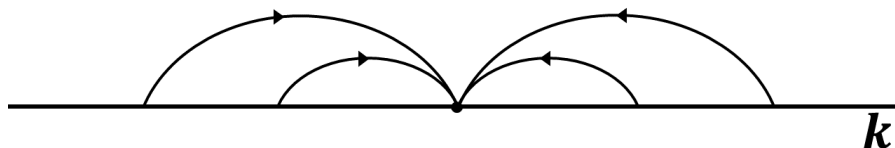


Figura 2.4: Diagrama de fase de k

Exemplo 2.3. Considere a função real $l(x) = x^2 - 1$. Resolvendo a equação $x^2 - 1 = x$, obtemos dois pontos fixos de l :

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ e } b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Note que $O(0) = \{0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$ e $O(1) = \{1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots\}$. Como $l(0) = -1$, $l^2(0) = 0$, $l(-1) = 0$ e $l^2(-1) = -1$, concluímos que 0 e -1 são pontos 2-periódicos de l . Além disso, como $l(1) = 0$, e 1 não é ponto periódico de l , temos que 1 é ponto periódico eventual de l .

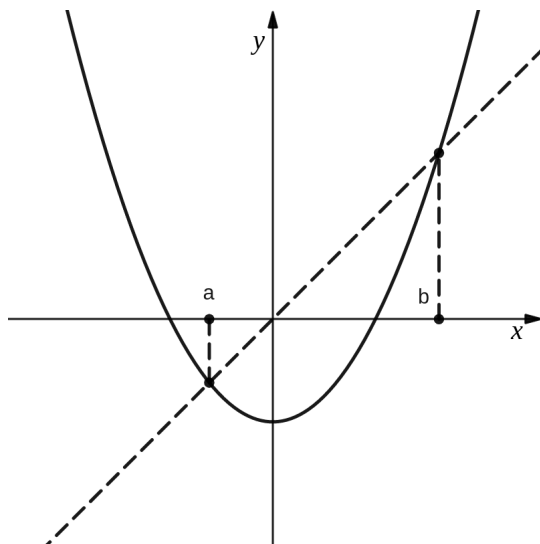


Figura 2.5: Ilustração dos pontos fixos de l juntamente com os gráficos de $y = l(x)$ e $y = x$

Consideramos agora dois exemplos de matemática financeira.

Exemplo 2.4. Suponha que depositamos dinheiro em uma conta poupança que rende juros de 5%, capitalizados anualmente. Depois do depósito inicial, não fazemos nenhum depósito adicional à conta e nem sacamos nenhum dinheiro. Nós simplesmente deixamos a quantia na conta acumulando juros. A função $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $f(x) = 1,05x$ define um sistema dinâmico que fornece a quantia na conta poupança a cada ano. A dinâmica de f é bastante simples: existe apenas um ponto fixo, $x = 0$, e qualquer outro $x_0 \neq 0$ tem uma órbita que se afasta de 0 após iterações sucessivas de f . A dinâmica de f é ilustrada na figura [2.6](#).



Figura 2.6: Diagrama de fase de f

Exemplo 2.5. Assumimos agora que depois dos juros aplicados a cada ano, nós ou sacamos 1000,00 reais (se houver pelo menos esse valor na conta) ou todo o saldo da conta (se for menos de 1000,00 reais). Neste caso, a função $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$g(x) = \begin{cases} 1,05x - 1000, & \text{se } 1,05x \geq 1000, \\ 0, & \text{se } 1,05x \leq 1000, \end{cases} \quad (2.1)$$

define um sistema dinâmico que modela como a quantia muda na conta poupança. Aqui também, $x = 0$ é um ponto fixo de g . Além desse, resolvendo a equação $g(x) = x$, também encontramos $x = 20000$ como ponto fixo de g . Para valores de x maiores que 20000, os juros sobre x garantem uma quantia suficiente para a retirada anual de 1000,00 reais. Dessa forma, aplicações sucessivas de g irão crescer indefinidamente. Se, no entanto, $x < 20000$, então a quantia na conta eventualmente será o ponto fixo 0. Dessa forma, valores $x \neq 0$ que são menores que 20000 são pontos fixos eventuais de g . A dinâmica de g é ilustrada na figura [2.7](#).

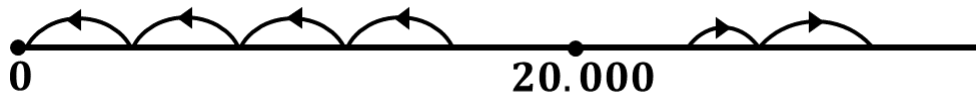


Figura 2.7: Diagrama de fase de g

Definimos agora uma função sobre o intervalo $[0, 1]$ que terá um papel relevante neste trabalho: a **Função Tenda**. Esta terminologia se deve ao formato do seu gráfico (veja figura [2.8](#)).

Exemplo 2.6. A Função Tenda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Na figura [2.8](#) apresentamos o gráfico da função tenda T .

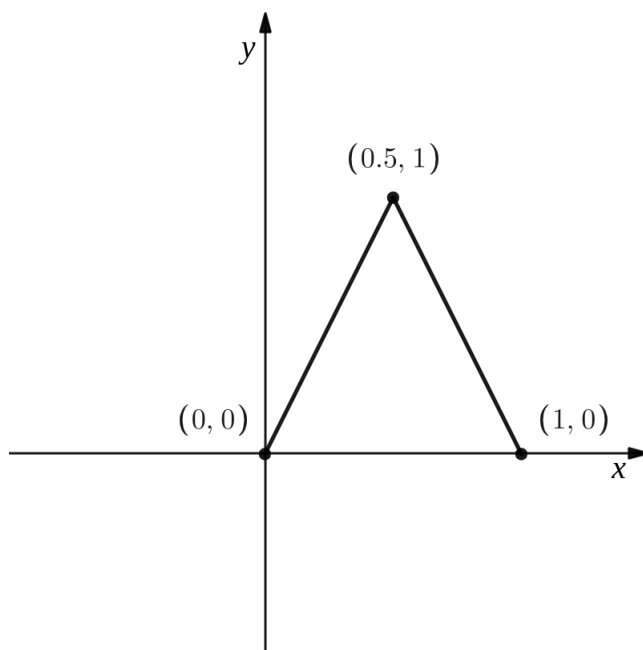


Figura 2.8: Gráfico da Função Tenda

Para encontramos os pontos fixos de T resolvemos a equação $T(x) = x$, onde obtemos $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$. Geometricamente, estes valores correspondem às abscissas dos pontos de

interseção do gráfico de T com o reta identidade $y = x$ (veja figura [2.9](#))

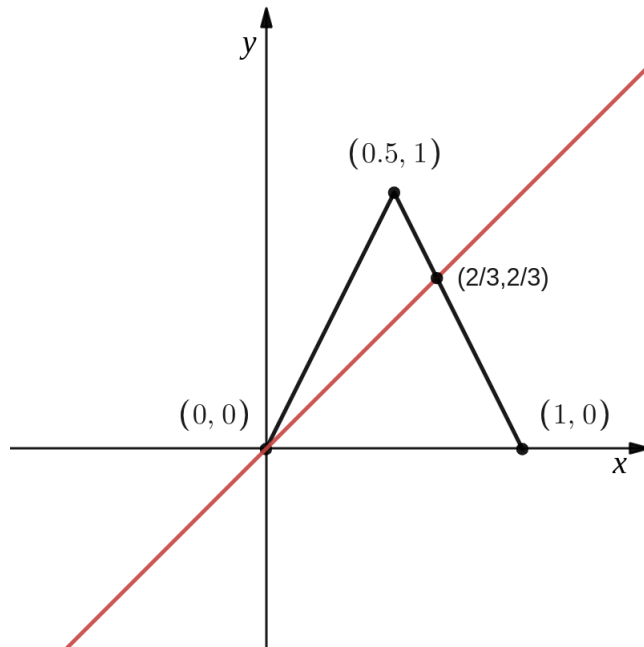


Figura 2.9: Pontos fixos de T

É fácil verificar que $x = 1$ e $x = \frac{1}{2}$ são pontos fixos eventuais de T , mas existem muitos outros, conforme veremos mais adiante.

Exemplo 2.7. Consideramos agora a função $T^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$T^2(x) = T(T(x)) = \begin{cases} 4x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ 2 - 4x, & \text{se } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 4x - 2, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 2 - 4x, & \text{se } x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Os pontos fixos de T^2 , ou seja, as soluções da equação $T^2(x) = x$, são pontos periódicos de T (veja figura [2.10](#)). São eles: $x = 0, x = \frac{2}{3}$ (que também são pontos fixos de T , ou seja, pontos 1-periódicos), $x = \frac{2}{5}$ e $x = \frac{4}{5}$. Como estes últimos não são pontos fixos de T , eles são pontos 2-periódicos de T .

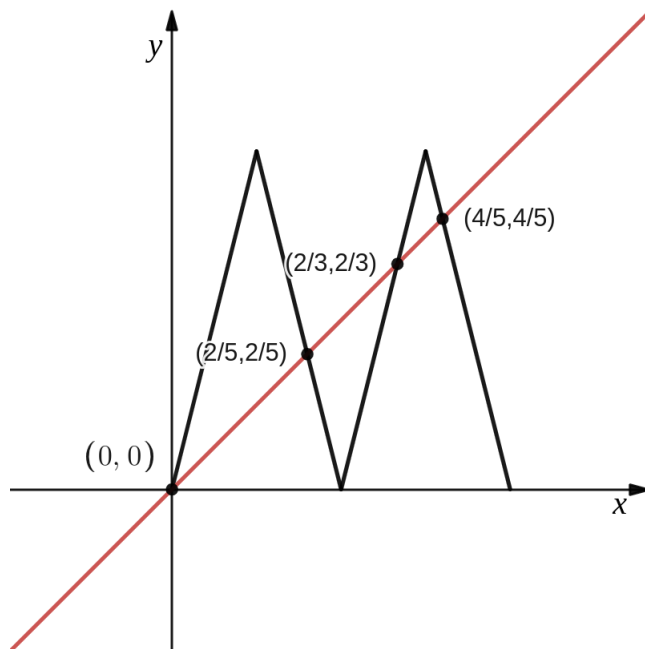


Figura 2.10: A função T^2

Definição 2.3. Dados I, J intervalos de números reais, uma bijeção contínua $f : I \rightarrow J$, cuja inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ também é contínua, chama-se um homeomorfismo entre I e J .

A definição a seguir estabelece a noção de equivalência para sistemas dinâmicos definidos por iteração de funções.

Definição 2.4. Sejam I e J intervalos de números reais. As funções $f : I \rightarrow I$ e $g : J \rightarrow J$ (e os sistemas dinâmicos definidos por elas), são ditas topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : I \rightarrow J$ tal que

$$g \circ h = h \circ f.$$

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{f} & I \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 J & \xrightarrow{g} & J
 \end{array}$$

A função h é chamada de conjugação topológica entre f e g .

Exemplo 2.8. As funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 2x \text{ e } g(x) = 3x$$

são topologicamente conjugadas, pois $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x^{\log_2(3)}$, é um homeomorfismo que satisfaz

$$g \circ h = h \circ f$$

visto que

$$(2x)^{\log_2(3)} = 3x^{\log_2(3)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Do ponto de vista da teoria de sistemas dinâmicos, isso quer dizer que f e g são equivalentes, ou seja, possuem dinâmicas “iguais”. De fato, em ambos os casos existe um único ponto fixo $x = 0$, todas as órbitas ficam ou à direita de 0 ou à esquerda de 0 e se afastam de 0 à medida que aumentamos o número de iterações.

Apresentamos agora duas funções com dinâmicas menos óbvias, como veremos no próximo capítulo, que são topologicamente conjugadas.

Exemplo 2.9. A função quadrática $Q : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $Q(x) = 4x(1 - x)$ é topologicamente conjugada à função tenda [2.6](#). De fato, o homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por $h(x) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ é uma conjugação topológica entre f e g . Primeiro observe que

$$\begin{aligned} Q(h(x)) &= 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \\ &= 4\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= \left(2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \\ &= \text{sen}^2(\pi x), \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} h(T(x)) &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}T(x)\right) \\ &= \begin{cases} \operatorname{sen}^2(\pi x), & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \operatorname{sen}^2(\pi - \pi x), & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \operatorname{sen}^2(\pi x), & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \operatorname{sen}^2(\pi x), & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \\ &= \operatorname{sen}^2(\pi x), \end{aligned}$$

para todo $x \in [0, 1]$. Portanto, $Q \circ h = h \circ T$.

Na figura [2.11](#) temos o gráfico da função Q . Observe a semelhança, a menos da forma, com o gráfico da função tenda T .

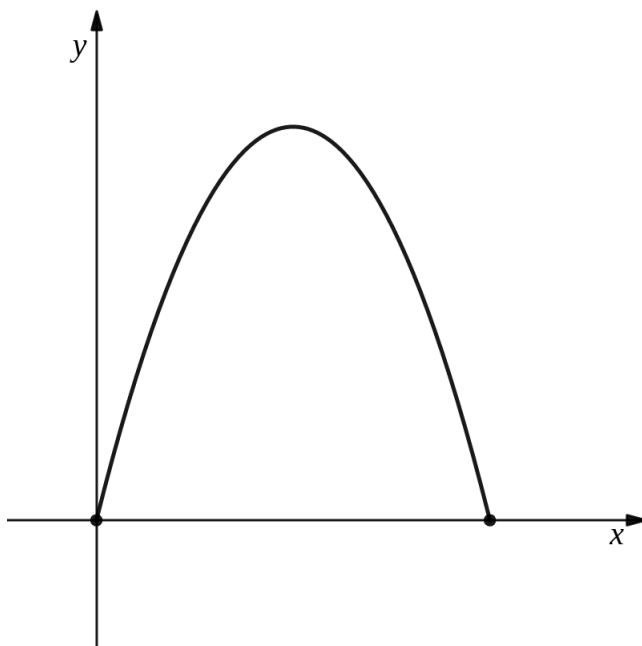


Figura 2.11: Gráfico da Função $Q(x) = 4x(1 - x)$

Um fato bastante importante e esperado sobre uma conjugação topológica h entre duas funções f e g é que h transforma órbitas de f em órbitas de g , conforme mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.1. Seja h uma conjugação topológica entre $f : I \rightarrow I$ e $g : J \rightarrow J$. Para cada $x \in I$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)),$$

assim h leva a órbita de x sobre f na órbita de $h(x)$ sobre g .

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n . Para $n = 1$, o resultado segue por definição de conjugação topológica. Suponhamos agora que o resultado vale para $n - 1$, ou seja,

$$h(f^{n-1}(x)) = g^{n-1}(h(x)), \quad \forall n \geq 2 \tag{2.4}$$

Então

$$\begin{aligned} h(f^n(x)) &= h(f^{n-1}(f(x))) \\ &= g^{n-1}(h(f(x))) \\ &= g^{n-1}(g(h(x))) \\ &= g^n(h(x)), \end{aligned}$$

Logo, $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ sempre que $h(f^{n-1}(x)) = g^{n-1}(h(x))$. Portanto, segue por indução sobre n que

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x))$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. □

O corolário a seguir mostra que propriedades importantes da dinâmica de uma função f são naturalmente transferidas para a dinâmica de uma função g por meio de uma conjugação topológica. Ratificando a afirmação de que funções topologicamente conjugadas são “iguais” do ponto de vista de sistemas dinâmicos.

Corolário 2.1. Seja h uma conjugação topológica entre $f : I \rightarrow I$ e $g : J \rightarrow J$, e assumamos que $x \in I$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- i) Se x é um ponto fixo de f , então $h(x)$ é um ponto fixo de g .
- ii) Se x é um ponto m -periódico de f , então $h(x)$ é um ponto m -periódico de g .
- iii) Se x é um ponto fixo eventual de f , então $h(x)$ é um ponto fixo eventual de g .
- iv) Se x é um ponto periódico eventual de f , então $h(x)$ é um ponto periódico eventual de g .

Demonstração. (i) Seja $x \in I$ um ponto fixo de f . Como h é uma conjugação topológica entre f e g , temos

$$g(h(x)) = h(f(x)).$$

Como x é ponto fixo de f , temos $f(x) = x$. Logo

$$g(h(x)) = h(x),$$

o que mostra que $h(x)$ é ponto fixo de g .

(ii) Seja $x \in I$ um ponto m -periódico de f , então

$$f^m(x) = x \text{ e } f^j(x) \neq x,$$

para $j = 1, \dots, m - 1$. Pelo teorema [2.1](#),

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x))$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Assim,

$$g^m(h(x)) = h(f^m(x)) = h(x)$$

e

$$g^j(h(x)) = h(f^j(x)) \neq h(x),$$

para $j = 1, \dots, m - 1$. Portanto, $h(x)$ é um ponto m -periódico de g .

(iii) Seja x um ponto fixo eventual de f , temos que $f(x) \neq x$, porém,

$$f(f^n(x)) = f^n(x)$$

para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Temos então, pelo [2.1](#) e pela definição de conjugação topológica que

$$\begin{aligned} g^n(h(x)) &= h(f^n(x)) \\ &= h(f(f^n(x))) \\ &= g(h(f^n(x))) \\ &= g(g^n(h(x))), \end{aligned}$$

para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, $h(x)$ é ponto fixo eventual de g .

(iv) Seja x um ponto periódico eventual de f , então x não é ponto periódico de f , porém, $f^n(x)$ é ponto periódico de f , para algum $n \in \mathbb{Z}_+$, ou seja, existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$f^m(f^n(x)) = f^n(x)$$

e

$$f^j(f^n(x)) \neq f^n(x),$$

para $j = 1, \dots, m - 1$. Assim, pelo teorema [2.1](#)

$$\begin{aligned} g^n(h(x)) &= h(f^n(x)) \\ &= h(f^m(f^n(x))) \\ &= g^m(h(f^n(x))) \\ &= g^m(g^n(h(x))), \end{aligned}$$

e

$$g^j(g^n(h(x))) \neq g^n(h(x)),$$

para $j = 1, \dots, m - 1$. Portanto, $h(x)$ é um ponto periódico eventual de g . □

Capítulo 3

Estabilidade

Os modelos matemáticos de um sistema dinâmico são obtidos a partir da aplicação de Leis da Natureza e suas equações essenciais, cujos elementos são parâmetros de funções que se remetem, normalmente, a equações diferenciais e/ou algébricas.

Fazer o estudo da dinâmica desses tipos de funções nem sempre é tão simples, haja visto que chegar a uma solução em longo prazo se torna algo humanamente inviável se feito de forma “braçal”. Dessa forma, o uso de tecnologias como o computador é imprescindível. Contudo, subjetivamente não nos interessa tais soluções, pois mesmo com recursos avançados muitas vezes não chegaremos a uma conclusão evidente sobre as soluções desses tipos de funções. Assim, é mais crucial fazer o estudo qualitativo do comportamento das funções por meio da sua *estabilidade* a partir de n interações.

Assim, o estudo da estabilidade de funções é melhor interpretado por meios geométricos, onde é mais evidente a visualização dos comportamentos das modelagens matemáticas, que por vezes convergem para estados fixos ou periódicos. Como exemplo podemos citar a órbita dos planetas, que seguem uma trajetória periódica e, de modo mais didático, imaginemos um bolo retirado de um forno, onde sua temperatura esfria em direção à temperatura ambiente fixa, isto é, estável.

Algebricamente, vemos, por exemplo, que para $f(x) = \frac{1}{2}x$ cada ponto tem uma órbita que converge para o ponto fixo em 0, e para $g(x) = -x^{\frac{1}{3}}$ todo ponto, exceto 0, tem uma órbita que converge para a órbita periódica $\{-1, 1\}$.

Nessa seção, capturamos esses comportamentos por meio do conceito que é conhecido como a **estabilidade assintótica de um ponto fixo ou ponto periódico** de um sistema dinâmico.

Começamos com as definições associadas à estabilidade. Analisamos à seguir, alguns resultados e definições sobre estabilidade dos pontos fixos de uma função.

Definição 3.1. Sejam $f : I \rightarrow I$ uma função e x^* um ponto fixo de f .

- i) Dizemos que x^* é estável se para todo conjunto aberto U contendo x^* existe um conjunto aberto V contendo x^* tal que para todo $x \in V$, a órbita de x está contida em U .
- ii) Dizemos que x^* é assintoticamente estável se x^* é estável e se existe um conjunto aberto U contendo x^* tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*, \quad \forall x \in U$$

- iii) Dizemos que x^* é um ponto neutralmente estável se x^* é estável, mas não é assintoticamente estável.
- iv) Dizemos que x^* é instável se x^* não é estável.

Definição 3.2. Sejam $f : I \rightarrow I$ uma função e x^* um ponto m -periódico de f . Dizemos que x^* é um ponto periódico estável, ou tem órbita periódica estável, se x^* é estável como um ponto fixo de f^m . Analogamente, podemos definir ponto periódico assintoticamente estável, ponto periódico neutralmente estável e ponto periódico instável.

Exemplo 3.1. Consideramos novamente as quatro funções do exemplo [2.2](#):

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x$,

(ii) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}x$,

(iii) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = -x$,

(iv) $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $k(x) = 0$.

Conforme visto anteriormente, $x = 0$ é um ponto fixo de cada uma dessas funções.

(i) No caso de f observe que se tomarmos $U = (-1, 1)$ contendo 0, então, com exceção da órbita de 0, toda órbita que começa em U eventualmente deixa U , portanto $x = 0$ é um ponto fixo instável de f .

(ii) No caso da função g , dado um conjunto aberto qualquer U contendo 0, seja $V = (-\epsilon, \epsilon)$ um intervalo aberto contido em U . Observe que se $x \in V$, então $f^n(x) = \frac{x}{2^n} \in V \subset U$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$. Portanto, $x = 0$ é um ponto fixo assintoticamente estável de g .

(iii) Analisamos agora $x = 0$ como fixo de h . Como no item anterior, tomando um aberto qualquer U que contém 0 e $V = (-\epsilon, \epsilon)$ um aberto contido em U , se $x \in V$, então também temos $f^n(x) = (-1)^n x \in V \subset U$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, porém, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ não existe. Assim, $x = 0$ é estável, mas não é assintoticamente estável, ou seja, $x = 0$ é um ponto fixo neutralmente estável de h .

(iv) O ponto $x = 0$ é claramente um ponto assintoticamente estável de k .

Exemplo 3.2. Consideremos novamente o exemplo [2.4](#), onde o sistema dinâmico é definido por $f(x) = 1,05x$, onde $x \in [0, +\infty)$. Nesse caso, $x = 0$ é um ponto fixo instável de f , pois por menor que seja a quantia inicial x , o saldo na conta irá se afastar de 0.

Já no caso da função $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ do exemplo [2.5](#) definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1,05x - 1000, & \text{se } 1,05x \geq 1000, \\ 0, & \text{se } 1,05x \leq 1000, \end{cases} \quad (3.1)$$

temos que $x = 0$ é um ponto fixo assintoticamente estável, dado que se começarmos com o saldo da conta com um valor x próximo de 0, então teremos saldo 0 imediatamente. No entanto, $x = 20.000$ é um ponto fixo instável de g , visto que se começarmos com um valor inicial x maior que 20.000, como vimos anteriormente, aplicações sucessivas de g irão crescer indefinidamente e, assim, se afastar do ponto fixo $x = 0$.

Apresentamos a seguir um teorema que será bastante útil para o estudo da estabilidade de um ponto fixo.

Teorema 3.1. Seja $f : I \rightarrow I$ uma função definida sobre um subconjunto I de \mathbb{R} . Assuma que x_0 é um ponto fixo de f e que f é diferenciável em x_0 .

i) Se $|f'(x_0)| < 1$, então x_0 é assintoticamente estável.

ii) Se $|f'(x_0)| > 1$, então x_0 é instável.

Demonstração. (i) Seja a um número qualquer entre $|f'(x_0)|$ e 1. Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = |f'(x_0)|,$$

existe um aberto $V = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$, de x_0 , tal que

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} < a < 1$$

para $x \in V$, com $x \neq x_0$. Assim, $f(x)$ está mais próximo de x_0 do que x . Dessa forma, se $x \in V$, então $f(x) \in V$. Repetindo o mesmo argumento, concluímos que $f^2(x), f^3(x), \dots$ estão todos em V . Temos ainda

$$|f^n(x) - x_0| \leq a^n |x - x_0|,$$

para todo $n \geq 1$. Como $0 < a < 1$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0,$$

para todo $x \in V$. Logo, x_0 é assintoticamente estável.

(ii) Consideramos agora a um número qualquer entre 1 e $|f'(x_0)|$. Novamente, como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = |f'(x_0)|,$$

agora encontramos um aberto $V = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$, de x_0 , tal que

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} > a > 1$$

para $x \in V$, com $x \neq x_0$. Se encontrarmos algum $k \in \mathbb{Z}_+$ para o qual se tenha $f^k(x) \notin V$, então concluímos que x_0 não é assintoticamente estável. Se para n suficientemente grande ainda tivermos $f^n(x) \in V$, obtemos

$$|f^n(x) - x_0| > a^n|x - x_0|.$$

Como $a > 1$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty.$$

Logo, a órbita de $x \in V$ não está contida em nenhum aberto U de x_0 . Portanto, x_0 é um ponto instável de f . \square

Exemplo 3.3. Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = 2x(1 - x)$. Observe que $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ são os pontos fixos de f . Como $f'(0) = 2 > 1$ e $f'(\frac{1}{2}) = 0 < 1$, o ponto fixo $x = 0$ é instável e o ponto fixo $x = \frac{1}{2}$ é assintoticamente estável. Portanto, pontos próximos de 0 se afastam de 0 após aplicações sucessivas de f , enquanto que pontos $x \in (0, 1)$ são levados pelo sistema a pontos próximos de $\frac{1}{2}$ ou fixados em $\frac{1}{2}$.

Um método bastante conveniente para visualizar o comportamento de um sistema dinâmico definido em um domínio em \mathbb{R} é conhecido como **diagrama web**. Ilustramos este método com a função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ do exemplo [3.3](#).

Para começar, desenhamos os gráficos da função $f(x) = 2x(1 - x)$ e da reta identidade $y = x$. Então pegamos um valor inicial $a \in [0, 1]$, digamos $a = 0,1$. Começamos com o ponto $A(0, 1; 0, 1)$ na reta $y = x$. Movemos verticalmente até o ponto $B(0, 1; f(0, 1))$ no gráfico de $y = f(x)$ e então horizontalmente até o ponto $C(f(0, 1); f(0, 1))$ na reta $y = x$.

Repetindo os mesmos passos marcamos os pontos $D(f(0, 1); f^2(0, 1))$ no gráfico de $y = f(x)$, $E(f^2(0, 1), f^2(0, 1))$ na reta $y = x$, $F(f^2(0, 1), f^3(0, 1))$ no gráfico de $y = f(x)$ e $G(f^3(0, 1), f^3(0, 1))$ na reta $y = x$.

Repetindo indefinidamente o processo descrito acima obtemos a órbita de $x = 0, 1$ sobre a reta identidade $y = x$. Observe que por meio deste diagrama visualizamos geometricamente a convergência da órbita $O(0, 1)$ de $0, 1$ sobre f para o ponto fixo assintoticamente estável $x_0 = \frac{1}{2}$. Ver figura 3.1.

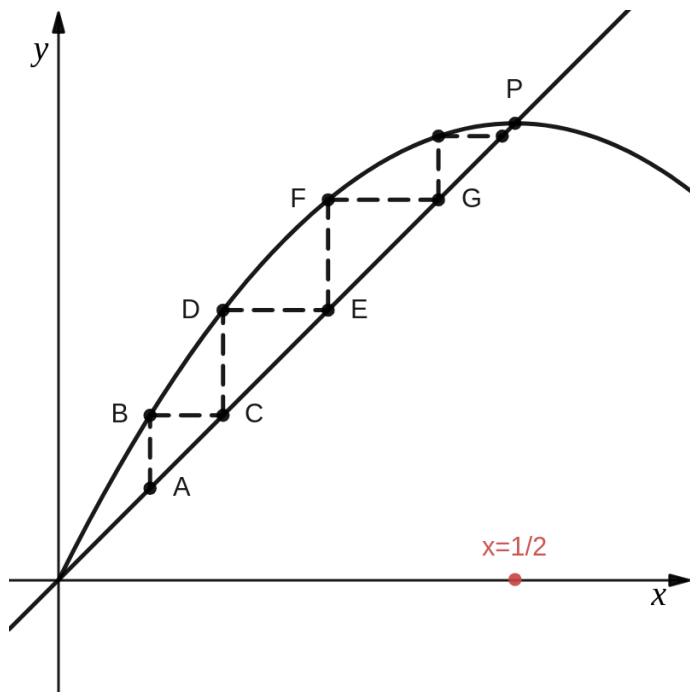


Figura 3.1: Diagrama web para $f(x) = 2x(1 - x)$

Exemplo 3.4. Consideremos novamente a função tenda T . Vimos que $x = 0$ e $x = 2/3$ são os pontos fixos de T . Como $T'(0) = 2$ e $T'(2/3) = -2$, segue do teorema 3.1 que ambos são pontos fixos instáveis de T . Vimos ainda que os pontos fixos $x = 2/5$ e $x = 4/5$ de T^2 são pontos 2–periódicos de T . Como $|(T^2)'(2/5)| = |(T^2)'(4/5)| = 4 > 1$, segue que ambos são pontos periódicos instáveis. Prosseguindo com T^3, T^4 e as demais iterações de T , percebemos que a função tenda não se estabiliza em direção a um ponto fixo ou ponto periódico. Na verdade, veremos no próximo capítulo que o conjunto de pontos periódicos de T é denso sobre o intervalo $[0, 1]$ e que eles são todos instáveis. Dessa forma, o sistema não apresenta um comportamento simples.

Capítulo 4

Caos

Imagine que seja 09h e você esteja se deslocando pela estrada no ônibus da escola indo fazer a prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). De repente, atravessa um cachorro e o ônibus o atinge. O motorista para, desce e percebe que o impacto foi forte, causando inclusive a morte do animal. Ao voltar para o ônibus não consegue ligá-lo, pois o veículo apresentou um problema mecânico, logo é necessário verificar o que houve.

O tempo vai passando e a hora da prova chegando. Você começa a ficar cada vez mais nervoso, com medo de não chegar no horário e perder esse tão esperado momento.

O motorista percebe que não conseguirá resolver o problema ali, logo decide entrar em contato com seus superiores para mandar um outro veículo, mas a rede de telefonia está sem sinal no local em que estão.

Já são 11h00 e o pânico entre os presentes só aumenta. Alguém decide se deslocar para uma outra região para conseguir sinal e fazer a ligação. Consegue. O secretário de transporte manda outro veículo, que chegou ao local às 12h.

O portão do local de prova fecha às 13h e de onde estão até lá gasta-se em média 1h10. O motorista precisará correr muito para chegar em tempo hábil.

O ônibus para em frente à escola, mas já são 13h01. Os portões já estão fechados. Todos os alunos no ônibus perderam a prova e com isso sonhos são completamente interrompidos. Você, que sonha em ser médico, precisará estudar mais um ano pois não tem condições de

pagar uma faculdade privada. Seu colega de mesma turma, que sonhava em fazer faculdade em outro estado, já não poderá ir mais. Tantos e tantos outros jovens se frustram por perderam essa oportunidade tão esperada. O secretário de transporte, depois de muita pressão foi demitido, pois não procedeu rapidamente.

Percebeu o caos que você se envolveu causado pelo atravessar de rodovia do cachorro?

Esse detalhe, muitas vezes inesperado e aparentemente insignificante, de perceber um animal numa estrada, justamente naquele momento e naquele local, ocasionou uma série de eventos muito diferentes do esperado por diversas pessoas.

Tais acontecimentos que dizemos ser “obra do acaso”, são na verdade explicados pela teoria do caos e sensibilidade de condições iniciais. Esses dois conceitos estão inerentes no nosso cotidiano e nos ajudam a compreender como o universo funciona, levando-nos a desenvolver novas tecnologias. É justamente sobre “caos” que iremos abordar nesse capítulo.

Iniciamos o capítulo enfatizando a importância do contexto histórico acerca do surgimento da teoria do caos e elucidando o real sentido da palavra caos, para que dessa forma possamos compreender as características mais importantes dos sistemas caóticos.

O primeiro ponto importante é a complexidade no uso da palavra caos. Esse termo nos remete a ideia de desorganização e irregularidade, o que de modo popular chamamos de bagunça. Contudo, na ciência assume um papel totalmente diferente do senso comum. O estudo da teoria do caos nem sempre vai nos remeter ao fato de se ter ou não um paradigma, isto é, uma oposição entre ordem e desordem.

Pelas leis newtonianas da física, se conhecidas as condições iniciais de um objeto, é previsível o seu comportamento em estados futuros, ou seja, conseguimos determinar o que acontecerá. É o que ocorre por exemplo com os corpos celestes, onde é possível prever as suas trajetórias.

Desse modo, se temos os dados perfeitos, a previsibilidade se torna possível. Mas não é isso que ocorre na prática, o que torna tais previsões inviáveis.

Assim, o ponto chave da teoria do caos é entender que essa ciência, coberta de incertezas, possui profundas estruturas de ordem. Dessa forma, tem tido aplicabilidades em diversas áreas como: modificações econômicas, epidemiologia, dinâmica não-linear e meteorologia.

Segundo James Gleick (1989), o lado incerto, irregular da natureza sempre foi um enigma para a ciência e, por este motivo, relegado ao desconhecimento. A desordem na atmosfera, a turbulência no mar, as variações de populações animais, começaram a despertar o interesse de matemáticos, físicos, biólogos e químicos que tentavam entender e reconhecer elos entre diferentes tipos de irregularidade. Surgiam nesse momento expressões como: sistemas dinâmicos, sistemas complexos, formas emaranhadas, estilhaçadas, enroscadas, fragmentadas e atratores estranhos.

É considerado que o “*insight*” de toda evolução foi a área da meteorologia, tendo em vista que os fragmentos da história, no início dos anos 1960, nos mostram que Edward Lorenz (1917 – 2008) por meio de seus trabalhos no Massachusetts Institute of Technology (MIT) elucidou, ao tentar explicar a complexidade em se obter boas previsões do tempo, que o clima exibe um fenômeno não linear conhecido como dependência sensível das condições iniciais, o que acabou desencadeando uma revolução científica ao reconhecer o comportamento caótico na modelagem matemática de sistemas climáticos.

Para o cientista, o caos demanda não-linearidade, mas a não-linearidade não garante o caos. Um fenômeno linear seria aquele que, em qualquer variável, pode ser verificado sempre o mesmo padrão de mudança. Nas palavras do pesquisador (ver [5](#)):

Um processo linear é aquele no qual uma mudança em qualquer variável em algum instante inicial produz uma mudança nela mesma ou em outra variável em algum instante posterior, uma mudança duas vezes maior, no mesmo instante inicial, irá produzir uma mudança duas vezes maior no mesmo instante posterior. Você pode substituir “duas vezes” por “metade” ou por “cinco vezes” ou “cem vezes” e a definição continuará válida. Segue-se que se os valores posteriores de qualquer variável forem postos em função de valores iniciais respectivos de qualquer variável em um gráfico, os pontos ficarão sobre uma linha reta, daí o nome. Um processo não-linear é simplesmente aquele que não é totalmente linear.

Ao tentar simular padrões climáticos em um computador usando um modelo derivado de doze equações relativamente complicadas, Lorenz, em vez de repetir a totalidade de um

computador executado no dia anterior, ele decidiu começar o cálculo novamente usando a saída de dados da metade da execução anterior. No entanto, em vez de inserir os dados com a precisão de seis casas decimais retida pelo computador, ele utilizou a precisão de três casas decimais que a impressão do computador forneceu. Para sua surpresa, os resultados do processo eram totalmente diferentes do que eram antes, ele estava vendo sensibilidade às condições iniciais.

Com isso, Lorenz construiu um modelo meteorológico com fundamentos matemáticos do sistema de equações mostrando que quaisquer dois pontos de partida próximos, indicando o clima atual, rapidamente divergem em trajetórias e frequentemente terminam em diferentes “lóbulos”, que correspondem a clima calmo ou tempestuoso. A esse comportamento Lorenz deu o nome de **atrator estranho**, que consiste em um mapa caótico que mostra como o estado de um sistema dinâmico evolui no tempo num padrão complexo, não-repetitivo e cuja forma é conhecida por se assemelhar a uma borboleta.

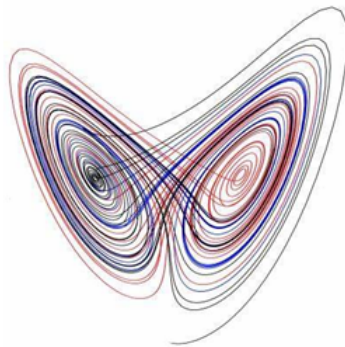


Figura 4.1: Atrator de Lorenz

Em 1972, Lorenz escreveu em um de seus trabalhos:

“Quando uma borboleta bate as asas em Hong Kong pode mudar as condições o suficiente para eventualmente causar um tornado em Texas.”

Em outras palavras, pequenas mudanças podem ter um impacto dramático. Tal indagação tão conhecida e ao mesmo tempo incompreendida ficou conhecida como “efeito borboleta”. Por conta disso, a previsão do tempo a longo prazo é tão difícil, pois estão sujeitas a maiores erros e incertezas. De forma mais concisa, o efeito borboleta relaciona-se com pequenas mudanças em condições iniciais que resultam em grandes catástrofes.

Relata-se que o mau tempo era atribuído a divindades irritadas ou malévolas. Com os estudos de Lorenz essa variabilidade dos fenômenos climáticos foram se elucidando e dando lugar a uma preocupação humana de longa data com previsões de condições climáticas futuras e previsão do tempo.

Desse modo, desde meados do século XIX, a previsão científica do tempo evoluiu, usando a medição precisa da pressão do ar, temperatura, umidade e direção e velocidade do vento para prever mudanças no clima. A astronomia aqui teve também seu papel importante, pois com o desenvolvimento de satélites meteorológicos desde a década de 1980 foi possível rastrear o movimento de ciclones, anticiclones, suas frentes associadas e tempestades em todo o mundo.

Nesse intento, Lorenz observava um fenômeno que Henri Poincaré havia descrito intuitivamente sessenta anos antes, como resultado de seu estudo do problema dos três corpos. Em um artigo de 1903, "Ciência e Método", Poincaré sugeriu,

Se soubéssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente a situação desse mesmo universo em um momento sucessivo. Mas... nós poderíamos ainda só conhecer aproximadamente a situação inicial. Se isso nos permitisse prever a situação seguinte com a mesma aproximação, isso é tudo que exigimos... Mas nem sempre é assim; pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes impactos nos fenômenos finais.

Entre os tempos de Poincaré e Lorenz, outros também vislumbraram esse fenômeno intrigante, mas precisou da introdução do computador como ferramenta experimental na matemática e nas ciências para que fosse visto e compreendido amplamente o suficiente para ser reconhecido como uma parte robusta de muitos sistemas físicos e matemáticos.

Nasceu uma revolução matemática e científica, e ao longo das décadas muitos cientistas e matemáticos trabalharam para identificar, descrever e definir esse fenômeno, suas propriedades e suas consequências. Caos é o nome que é amplamente utilizado para a estrutura geral e comportamentos que resultam em dependência sensível das condições iniciais.

Juntamente com a imprevisibilidade da dependência sensível das condições iniciais, o

caos também inclui um elemento de regularidade, isto é, uma ordem oculta. Órbitas em um sistema caótico podem parecer periódicas ao longo de um período de tempo (possivelmente muito longo), mas eventualmente elas divergem em outro tipo de comportamento, talvez uma periodicidade aparente diferente. A regularidade da Terra orbitando o Sol pode ser uma aproximação de periodicidade de longo prazo em um sistema caótico geral.

Nesse capítulo, apresentamos a definição topológica de caos e discutimos algumas características essenciais desse fenômeno. Revisitamos a função tenda e apresentamos, por meio da expansão binária de números reais no intervalo $[0, 1]$, uma prova que o sistema dinâmico definido por essa função e, conseqüentemente, qualquer outro equivalente a ele, é caótico.

Definição 4.1. *Sejam X e Y conjuntos de números reais, com $X \subset Y$. Dizemos que X é denso em Y se para todo $y \in Y$ e todo $\epsilon > 0$ tem-se $(y - \epsilon, y + \epsilon) \cap X \neq \emptyset$.*

Definição 4.2. *Seja I um intervalo de \mathbb{R} . Uma função $f : I \rightarrow I$ é dita ser caótica ou que possui caos se,*

- i) O conjunto dos pontos periódicos de f é denso em I .
- ii) Para todo U, V abertos em I , existem $x \in U$ e $n \in \mathbb{Z}_+$ tais que $f^n(x) \in V$.

A primeira condição nos diz que existe um comportamento periódico denso distribuído por todo o domínio, ou seja, independentemente do ponto que escolhermos no domínio, há pontos periódicos arbitrariamente próximos a ele.

A segunda condição, conhecida como transitividade topológica, nos diz que todo par de regiões no domínio é “misturado” pelo sistema. Em outras palavras, dado qualquer par de conjuntos abertos, existe pelo menos um ponto em um desses conjuntos que por meio de alguma iteração, é levado ao outro conjunto.

Agora consideramos novamente a função tenda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

No capítulo anterior apresentamos os gráficos de $y = T(x)$ e de $y = T^2(x)$. Abaixo (figura 4.2) apresentamos o gráfico de $y = T^3(x)$. Note que o padrão é sempre o mesmo.

O gráfico de $y = T^n(x)$ é uma “tenda” sobre um intervalo da forma $[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}]$, para cada $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$.

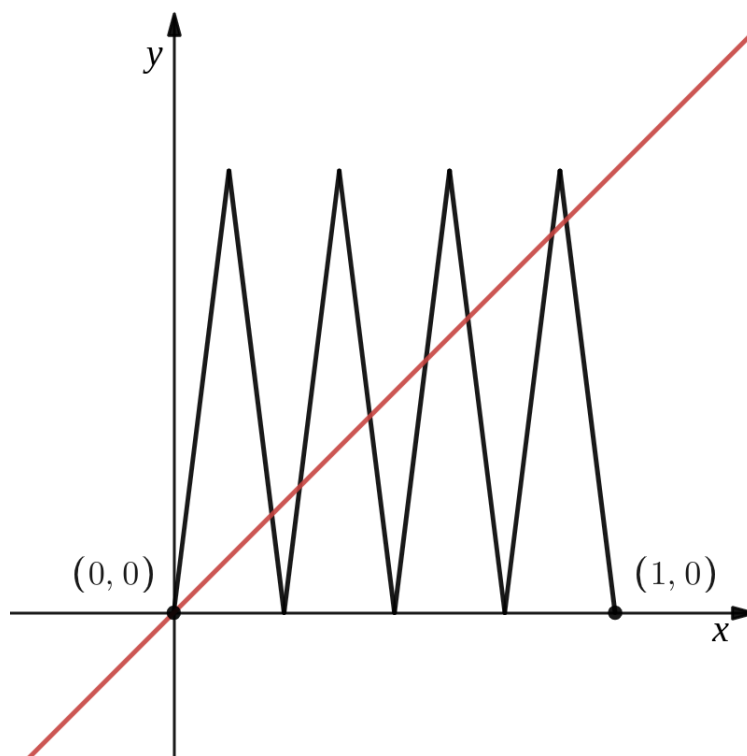


Figura 4.2: Gráfico de $y = T^3(x)$

Observamos ainda que sobre cada um desses 2^{n-1} intervalos obtemos duas interseções do gráfico de $y = T^n(x)$ com a reta identidade $y = x$. As abscissas desses pontos de interseção são os pontos periódicos da T^n . À medida que aumentamos n , os intervalos $\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$ particionam, portanto, o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos cada vez menores, cada um dos quais contém 2 pontos periódicos. Intuitivamente, isso nos diz que os pontos periódicos de T estão “espalhados” por todo o intervalo $[0, 1]$, ou seja, dado qualquer ponto $x \in [0, 1]$, existem pontos periódicos de T suficientemente próximos de x . Adicionalmente, temos que a imagem de cada intervalo da forma $\left[\frac{j-1}{2^{n-1}}, \frac{j}{2^{n-1}}\right]$, por T^n , é todo o intervalo $[0, 1]$. Dessa forma, à medida que n aumenta, intervalos cada vez menores do domínio são “misturados” pelo sistema. Isso sugere que as duas condições da definição de caos são satisfeitas pela função T . Nosso principal objetivo nesse capítulo é justamente mostrar que a função tenda T é caótica. Para tal, usaremos expansões binárias de números reais no intervalo $[0, 1]$.

Na construção a seguir, usaremos o fato de que todo número real $x \in [0, 1]$ pode ser escrito na forma:

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_m}{2^m} + \cdots$$

onde, cada a_i é igual a 0 ou a 1. Para cada $x \in [0, 1]$, expressamos sua expansão binária por

$$x = \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots a_m \cdots$$

Se $a = 0$ ou 1 , escrevemos $a^* = 1 - a$. Dessa forma, $(a^*)^* = (1 - a)^* = 1 - (1 - a) = a$.

Observamos ainda que se x tem expansão binária $x = \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots a_m \cdots$, então

$$\begin{aligned} 1 - x &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \right) - \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots \right) \\ &= \frac{(1 - a_1)}{2} + \frac{(1 - a_2)}{2^2} + \frac{(1 - a_3)}{2^3} + \cdots \\ &= \frac{a_1^*}{2} + \frac{a_2^*}{2^2} + \frac{a_3^*}{2^3} + \cdots, \end{aligned}$$

ou seja, $1 - x$ tem expansão binária $\cdot a_1^* a_2^* a_3^* \cdots a_m^* \cdots$

Seja agora $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, em particular, $x \leq \frac{1}{2}$. Logo podemos escrever $x = .0a_2a_3 \cdots a_m \cdots$,
 donde

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \cdot \left(\frac{0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_m}{2^m} + \cdots \right) \\ &= \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_m}{2^{m-1}} + \cdots \right) \\ &= .a_2a_3 \cdots a_m \cdots \end{aligned}$$

Se $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, em particular, $x \geq \frac{1}{2}$. Então, podemos escrever $x = .1a_2a_3 \cdots a_m \cdots$.
 Assim obtemos

$$\begin{aligned} 2 - 2x &= 1 - \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \right) - \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \cdots \right) \\ &= \frac{(1 - a_2)}{2} + \frac{(1 - a_3)}{2^2} + \frac{(1 - a_4)}{2^3} + \cdots \\ &= .a_2^*a_3^* \cdots a_m^* \cdots, \end{aligned}$$

Note que expansões binárias não são únicas. Por exemplo, $x = \frac{1}{2}$ pode ser expresso como
 $.10000\dots$ ou $.01111\dots$, por esse motivo, incluímos $x = \frac{1}{2}$ em cada uma das possibilidades
 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ou $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ apresentadas aqui.

Podemos, portanto, usando expansões binárias, reescrever a função tenda
 $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (2.6) na forma

$$T(.a_1a_2 \cdots a_m \cdots) = \begin{cases} a_2a_3 \cdots a_m \cdots, & \text{se } a_1 = 0, \\ a_2^*a_3^* \cdots a_m^* \cdots, & \text{se } a_1 = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Observe que $T(.00000 \cdots) = .00000 \cdots$, confirmando a existência de um ponto fixo em
 $x = 0$. A expansão binária de 1 é $.11111 \cdots$, então $T(.11111 \cdots) = .00000 \cdots$, conforme
 esperado pela função T . A expansão binária de $\frac{2}{3}$ é $.101010 \cdots$. Como $T(.101010 \cdots) =$
 $.101010 \cdots$, concluímos que $.101010 \cdots$ é um ponto fixo de T , informação já conhecida à
 respeito da função T .

Com essa reformulação da função T , obtemos uma expressão simples para as iteradas T^n de T , como mostra o lema a seguir.

Lema 4.1. Para $\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots) = \begin{cases} \cdot a_{n+1} a_{n+2} \cdots, & \text{se } a_n = 0, \\ \cdot a_{n+1}^* a_{n+2}^* \cdots, & \text{se } a_n = 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Demonstração. Provamos o lema por indução sobre n . Para $n = 1$, o resultado segue da definição de T por meio de expansões binárias (4.1). Assumimos agora que o resultado vale para $n - 1$. Então

$$\begin{aligned} T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots) &= T(T^{n-1}(\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots)) \\ &= \begin{cases} T(\cdot a_n a_{n+1} \cdots), & \text{se } a_{n-1} = 0, \\ T(\cdot a_n^* a_{n+1}^* \cdots), & \text{se } a_{n-1} = 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde a segunda igualdade segue da hipótese de indução.

Se $a_n = 0$, temos

$$T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots) = T(\cdot 0 a_{n+1} a_{n+2} \cdots)$$

ou

$$T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots) = T(\cdot 1 a_{n+1}^* a_{n+2}^* \cdots)$$

Em qualquer caso, obtemos, pela definição de T ,

$$T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_n) = \cdot a_{n+1} a_{n+2} \cdots$$

conforme desejado.

Por outro lado, se $a_n = 1$. Então,

$$T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots) = T(\cdot 1 a_{n+1} a_{n+2} \cdots)$$

ou

$$T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots) = T(\cdot 0 a_{n+1}^* a_{n+2}^* \cdots)$$

Novamente, em qualquer caso, obtemos

$$T^n(\cdot a_1 a_2 \cdots a_n) = \cdot a_{n+1} a_{n+2} \cdots$$

Portanto, segue por indução sobre n , que o resultado vale para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. □

Para mostrar que a função tenda T é caótica, usaremos, ainda, o lema a seguir, que nos diz que se dois números do intervalo $[0, 1]$ possuem expansões binárias com as primeiras n entradas todas iguais, então a distância entre esses dois números é no máximo $\frac{1}{2^n}$.

Lema 4.2. Sejam $x, y \in [0, 1]$ com expansões binárias $\cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots$ e $\cdot b_1 b_2 \cdots b_m \cdots$, respectivamente. Se $a_i = b_i$ para $i = 1, \dots, n$, então $|x - y| \leq \frac{1}{2^n}$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{a_j - b_j}{2^j} \right| \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \left| \frac{a_j - b_j}{2^j} \right| \end{aligned}$$

Como $a_j - b_j \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

□

Mostraremos agora que a função tenda (2.6) é caótica.

Teorema 4.1. A função tenda (2.6) é caótica.

Demonstração. Provaremos primeiramente que os pontos periódicos de T formam um conjunto denso em $[0, 1]$. Para isso, é suficiente mostrarmos que se $x \in [0, 1]$ e $\epsilon > 0$, então existe um ponto periódico p de T tal que $|x - p| < \epsilon$. Seja $x \in [0, 1]$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. Assuma que $x = \cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots$ é uma expansão binária de x e $n \in \mathbb{Z}_+$ é grande o suficiente de forma que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Seja agora

$$p = \cdot a_1 a_2 \cdots a_n 0 a_1 a_2 \cdots a_n 0 a_1 a_2 \cdots a_n 0 \cdots$$

Pelo lema (4.1), temos que

$$T^{n+1}(p) = T^{n+1}(\cdot a_1 a_2 \cdots a_n 0 a_1 a_2 \cdots a_n 0 \cdots) = \cdot a_1 a_2 \cdots a_n 0 \cdots$$

Assim, p é um ponto periódico de T que, pelo lema (4.2), satisfaz $|x - p| < \epsilon$. Concluimos assim, que o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0, 1]$.

Sejam agora U e V abertos em $[0, 1]$ e $x = \cdot a_1 a_2 \cdots a_m \cdots \in U$ um ponto arbitrário. Como U é aberto, $\exists \delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \cap [0, 1] \subset U$. Seja $n \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$. Tome $y = \cdot b_1 b_2 \cdots b_m \cdots \in V$ e considere o ponto

$$q = \cdot a_1 a_2 \cdots a_n 0 b_1 b_2 \cdots b_n 0 b_1 b_2 \cdots b_n 0 \cdots$$

Pelo lema (4.2), temos

$$|x - q| \leq \frac{1}{2^n} < \delta.$$

Portanto, $q \in U$. Pelo lema (4.1),

$$T^{n+1}(q) = y \in V.$$

Dessa forma, a segunda condição da definição de caos também é satisfeita pela função T . Com isso, concluimos que T é caótica. \square

O próximo teorema nos mostra que caos é preservado por conjugação topológica. Em outras palavras, se f é uma função caótica, então toda função topologicamente conjugada a f também é caótica. Dessa forma, a partir do teorema [4.1](#) conseguimos construir novos exemplos de sistemas caóticos.

Teorema 4.2. Se f e g são topologicamente conjugadas e f é caótica, então g também é caótica.

Demonstração. Sejam $f : I \rightarrow I$ e $g : J \rightarrow J$ funções topologicamente conjugadas e $h : I \rightarrow J$ uma conjugação topológica entre f e g . Sejam $y \in J$ e $\epsilon > 0$. Como h é um homeomorfismo, existe $x \in I$ tal que $y = h(x)$. Como f é caótica, para todo $\delta_1 > 0$, existe um ponto periódico $p \in I$ de f tal que $|x - p| < \delta_1$. Pela continuidade de h , existe $\delta_2 > 0$ tal que $|h(x) - h(p)| < \epsilon$ sempre que $|x - p| < \delta_2$. Usando o corolário [2.1](#) concluímos que para todo $y \in J$ e $\epsilon > 0$ existe um ponto periódico $\bar{p} = h(p)$ de g tal que $|y - \bar{p}| < \epsilon$. Dessa forma, o conjunto dos pontos periódicos de g é denso em J .

Sejam agora U e V abertos quaisquer em J . Como h é um homeomorfismo, $\bar{U} = h^{-1}(U)$ e $\bar{V} = h^{-1}(V)$ são abertos em I . Como f é caótica, existem $x \in \bar{U}$ e $n \in \mathbb{Z}_+$ tais que $f^n(x) \in \bar{V}$. Pelo teorema [2.1](#) temos que

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)).$$

Fazendo $y = h(x)$, concluímos que existem $y \in U$ e $n \in \mathbb{Z}_+$ tais que $g^n(y) \in V$.

Portanto, g é uma função caótica. □

Vimos no Exemplo [2.9](#) que a função quadrática $Q : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$Q(x) = 4x(1 - x)$$

é topologicamente conjugada à função tenda T . Logo, pelos teoremas [4.1](#) e [4.2](#) concluímos que Q tem caos.

Observe que os gráficos das funções T e Q (ver figura [4.3](#)) apresentam várias propriedades semelhantes. Ambas as funções podem ser vistas como funções que “esticam” o intervalo $[0, 1]$ até dobrar o seu comprimento, então pegam o intervalo aumentado e dobram-o ao

meio de forma que ele é mapeado novamente no próprio intervalo $[0, 1]$. Esses comportamentos de “esticar” e “dobrar” presentes nas funções T e Q são típicos de sistemas caóticos. “Esticar” afasta as órbitas enquanto que “dobrar” mantém a dinâmica presa a um domínio compacto.

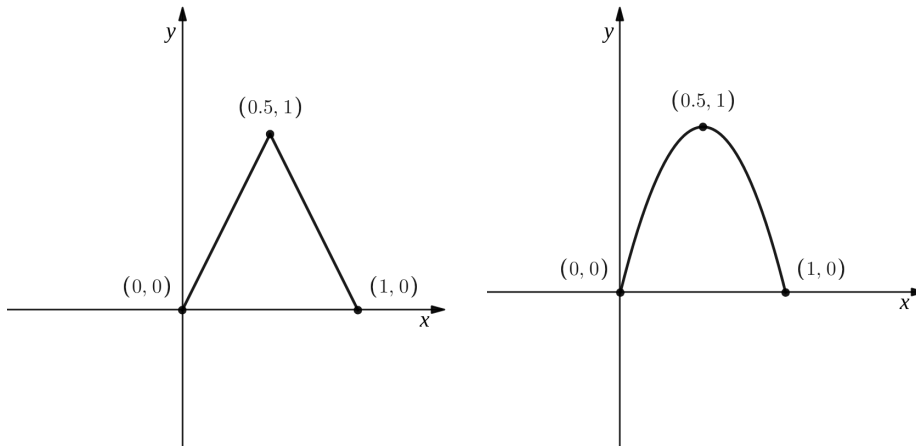


Figura 4.3: Gráficos de T e Q

Capítulo 5

Um Modelo de População Simples com Dinâmica Complicada

Por vezes nos deparamos com padrões matemáticos de fácil modelação e entendimento, mas que ao estudarmos a sua dinâmica percebemos que não é tão simples quanto as suas equações.

O físico e biólogo matemático Robert May, publicou na revista *Nature* em 1976, o artigo intitulado “Simple mathematical models with very complicated dynamics” que foi um marco na revolução do caos. Ele apresentou resultados matemáticos interessantes com possíveis consequências aplicadas, onde percebeu-se que equações não lineares simples podem possuir um amplo espectro de comportamentos de ponto fixo a periódico a caótico. O que se imaginava ser uma interferência externa, como um “ruído”, proveniente do ambiente, poderia ser um resultado interno ao sistema, decorrente de um comportamento caótico no modelo matemático.

Vamos examinar o modelo de população logística discutido por May. Assuma que temos uma espécie cuja população de geração a geração é dada por uma função F , onde $F(p)$ representa a população na próxima geração resultando de uma população p na geração atual. Assumimos que a população da próxima geração é diretamente proporcional a dois fatores: a população na geração atual e a quantidade de espaço no ambiente em que a população pode crescer. Assim, o modelo matemático será dado por $F(p) = kpR(p)$, onde $R(p)$ é uma função que reflete o espaço no qual a população pode crescer. Assumimos que o ambiente

pode conter uma população máxima de M e que $R(p)$ é a diferença entre a população máxima e a população atual, ou seja, $R(p) = M - p$.

Dessa forma, simplificadamente, tem-se que:

$$F(p) = kp(M - p)$$

Fazendo $x = \frac{p}{M}$, que representa a fração da população máxima possível representada por p , e trabalhando agora com a variável x , obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= kxM(M - xM) \\ &= kM^2x(1 - x) \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = kM^2$, o modelo assume a forma $f(x) = \alpha x(1 - x)$, com domínio $[0, 1]$.

A função f é chamada de **função de crescimento logístico**. Pensamos no parâmetro α como uma **taxa de crescimento**. Valores distintos de α dão origem a funções diferentes. Denotamos, portanto, por f_α a função com taxa de crescimento α .

Para esse estudo só nos interessa as taxas de crescimento α tais que f_α mapeia $[0, 1]$ de volta para $[0, 1]$. Dessa forma, devemos ter $0 \leq \frac{\alpha}{4} \leq 1$, ou seja, $\alpha \in [0, 4]$. Chamamos de **família logística** a família de funções logísticas f_α para as quais se tem $\alpha \in [0, 4]$. Para ilustrar, esboçamos os gráficos de f_0, f_1, f_2, f_3 e f_4 , como mostram as figuras [5.1](#) e [5.2](#).

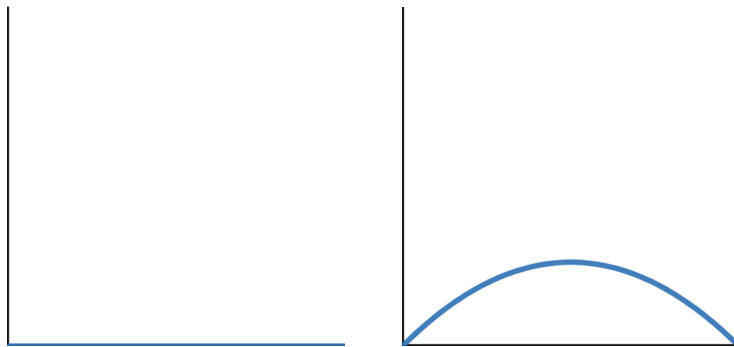


Figura 5.1: Funções logísticas f_0 e f_1 , respectivamente

A dinâmica de f_0 é bastante simples, uma vez que não importa qual seja a população em uma geração, ela vai imediatamente para 0 na próxima. Analogamente, para pequenos

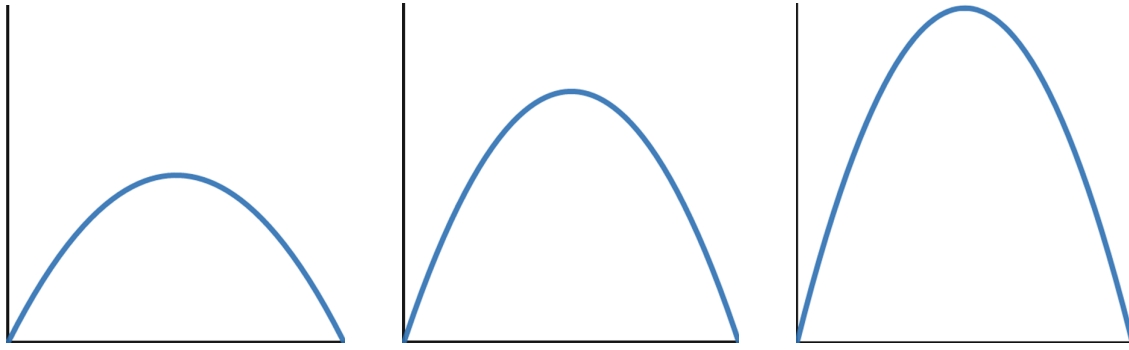


Figura 5.2: Funções logísticas f_2 , f_3 e f_4 , respectivamente

valores de α , a taxa de crescimento não é grande o suficiente para sustentar uma população diferente de zero, e as populações iniciais diferentes de zero vão para 0 no limite. Em outras palavras, para valores de α próximos de 0, f_α tem um ponto fixo assintoticamente estável em 0, e toda órbita em $[0, 1]$ se aproxima de 0 no limite. No outro extremo, temos para $\alpha = 4$, a função $f_4 = 4x(1 - x)$, que mostramos no capítulo 4 ser caótica.

Dessa forma, ficamos com a questão: como a dinâmica de f_α muda de um extremo para o outro no nosso domínio de parâmetros $[0, 4]$? Isto é, como saímos da função f_0 , onde todos os pontos são mapeados imediatamente para 0, para a função f_4 , que é caótica? Esse questionamento é muito amplo e não dá para ser analisado de forma sucinta, mas podemos dizer que **a estrada para o caos é longa e fascinante**. Nesse capítulo, apresentaremos algumas considerações, sem preencher todos os detalhes, sobre essa mudança na dinâmica da família logística f_α quando α varia de 0 a 4.

Para começar, considere a figura [5.3](#), chamada de **diagrama de órbita**; ela descreve como o comportamento esperado a longo prazo das funções f_α evolui quando α varia de 0 a 4. No diagrama, o eixo horizontal representa o parâmetro α , e o eixo vertical representa a variável x no domínio, $[0, 1]$, de cada uma das funções f_α .

O diagrama é gerado definindo α igual a cada um dos 9601 valores, $0, \frac{1}{2400}, \frac{2}{2400}, \dots, \frac{9599}{2400}, 4$, e fazendo o seguinte para cada um:

- (i) Cálculo dos primeiros 2075 pontos na órbita de 0,5 sob f_α ; isto é, cálculo de

$$f_\alpha(0, 5), f_\alpha^2(0, 5), \dots, f_\alpha^{2075}(0, 5).$$

(ii) No diagrama, plotamos os seguintes pontos correspondentes aos últimos 75 dos 2075 pontos da órbita em questão:

$$(\alpha, f_\alpha^{2001}(0, 5)), \dots, (\alpha, f_\alpha^{2075}(0, 5)).$$

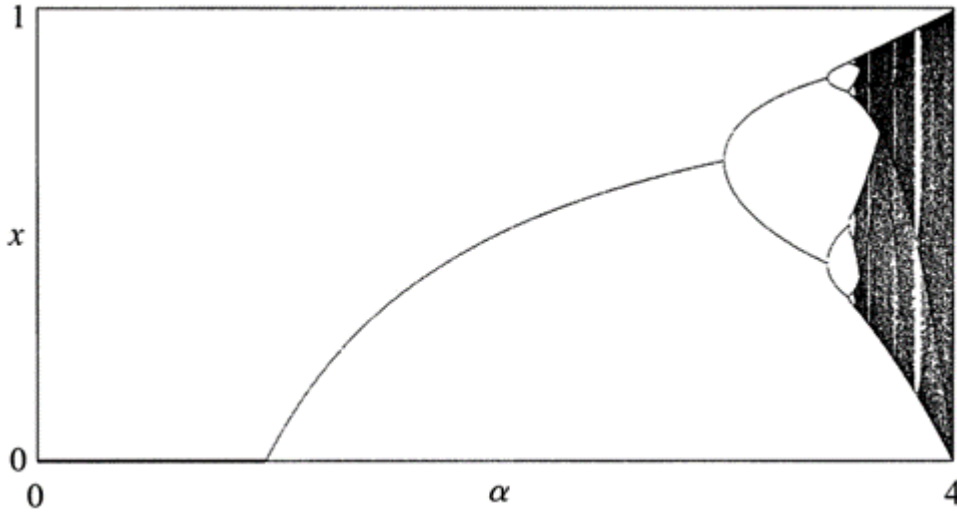


Figura 5.3: O diagrama de órbita para a família logística. (Cortesia de Chip Ross.) Fonte: [1]

Assim, para cada $\alpha \in [0, 4]$, na fatia vertical em α no diagrama, vemos uma estimativa do comportamento a longo prazo de f_α . Por exemplo, em $\alpha = 1$, apenas o valor 0 é plotado. Portanto, para f_1 , o comportamento esperado a longo prazo é aproximar-se de um ponto fixo em 0. Para $\alpha = 2$, um único ponto em 0,5 é plotado. Assim, para f_2 , o comportamento esperado a longo prazo é aproximar-se de um ponto fixo em 0,5. Além disso, para $\alpha = 3, 4$, valores de aproximadamente 0,45 e 0,85 são plotados. Isso reflete o fato de que para $f_{3,4}$, o comportamento esperado a longo prazo é aproximar-se de uma órbita periódica oscilando entre aproximadamente 0,45 e 0,85. Vamos verificar essas observações analiticamente e explorar mais o comportamento representado no diagrama de órbita.

Para determinar os pontos fixos para f_α , resolvemos a equação $f_\alpha(x) = x$. Encontramos as soluções em $x = 0$ e $x = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$. Observe que $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ está fora do nosso domínio $[0, 1]$ para $\alpha \in [0, 1]$, mas dentro do domínio para $\alpha \in [1, 4]$. Usando o teorema [3.1] para analisar a estabilidade dos pontos fixos, vemos que 0 é assintoticamente estável para $\alpha \in [0, 1)$ e instável para $\alpha \in (1, 4]$, enquanto que $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ é assintoticamente estável para $\alpha \in (1, 3)$ e instável para $\alpha \in (3, 4]$. Na Figura [5.4], plotamos esses pontos fixos em um sistema de coordenadas x

versus α semelhante ao usado no diagrama de órbita. Usamos uma curva sólida para indicar os valores onde o ponto fixo é assintoticamente estável e uma curva tracejada para indicar os valores onde o ponto fixo é instável.

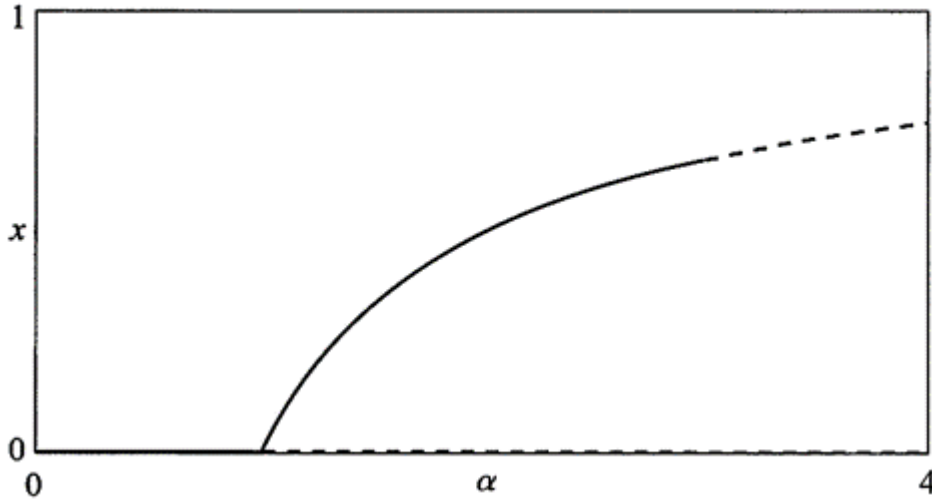


Figura 5.4: Os pontos fixos da família logística e sua estabilidade. Fonte: [1]

Note que o valor de α onde o ponto fixo 0 perde sua estabilidade é exatamente o valor de α onde o ponto fixo $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ se funde com o ponto fixo 0 e entra no nosso domínio. Além disso, o ponto fixo $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ parece perder sua estabilidade aproximadamente no mesmo local onde a órbita de período 2 aparece no diagrama de órbita da figura [5.3]. Exploramos o surgimento da órbita de período 2 a seguir. As mudanças na estabilidade que vimos aqui são exemplos de mudanças de comportamento conhecidas como **bifurcações**.

Para encontrar pontos 2-periódicos para f_α , resolvemos a equação $f_\alpha^2(x) = x$. Juntamente com os pontos fixos de f_α , também encontramos as soluções

$$x = \frac{1 + \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 3}}{2\alpha}$$

Esses são pontos de período 2 e, para cada α , eles formam uma órbita de período 2. Os pontos do período 2 estão definidos para $\alpha \in (3, 4]$, e eles surgem em nosso domínio exatamente onde pensávamos que eles estariam: no valor de α onde o ponto fixo $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ perde sua estabilidade. Em $\alpha = 3$, o ponto fixo $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ passa pelo processo conhecido como **bifurcação de duplicação de período**; ele deixa sua estabilidade e passa a ter

uma órbita de período 2. Se usarmos o teorema 3.1 para determinar a estabilidade desses pontos de período 2, concluímos que eles são assintoticamente estáveis para $\alpha \in (3, 1 + \sqrt{6})$ e instáveis para $\alpha \in (1 + \sqrt{6}, 4)$. Na figura 5.5 expandimos a figura 5.4 para incluir os pontos de período 2. Observe a semelhança entre a figura 5.5 e o diagrama de órbita da figura 5.3 sobre os valores dos parâmetros $0 \leq \alpha \leq 1 + \sqrt{6}$.

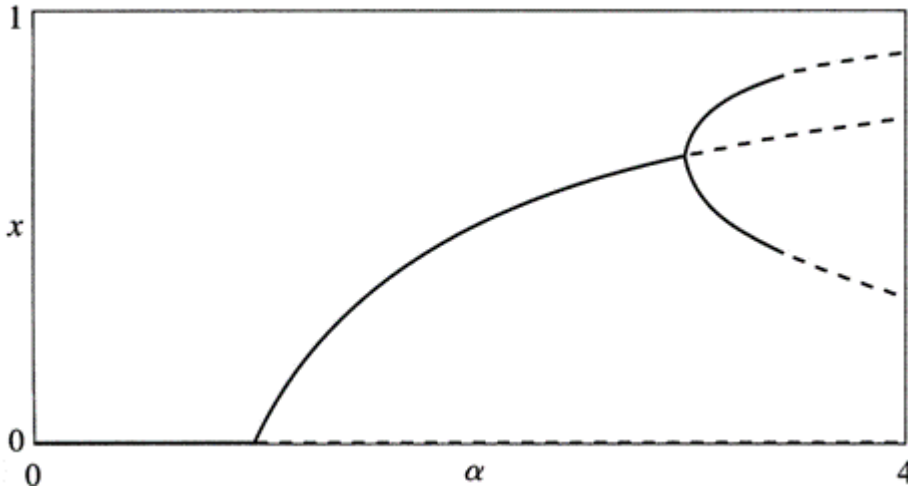


Figura 5.5: Os pontos fixos e os pontos de período 2 da família logística. Fonte: [1]

Como observamos anteriormente, os pontos do período 2 perdem sua estabilidade em $1 + \sqrt{6}$. O que acontece lá? Na figura 5.6 ampliamos o diagrama de órbita da figura 5.3, considerando apenas os valores dos parâmetros $3, 4 \leq \alpha \leq 3, 6$. Examinando esse diagrama, aparentemente uma órbita assintoticamente estável de período 4 nasce no ponto onde a órbita de período 2 perde sua estabilidade. Assim, tivemos outra duplicação de período. É difícil verificar essa afirmação analiticamente resolvendo a equação $f_\alpha^4(x) = x$, porque envolve a resolução de uma equação polinomial de grau 16. Entretanto, a duplicação do período pode ser verificada examinando as equações $f_\alpha^4(x) = x$ com o auxílio de um programa de computação gráfica para valores α próximos de $1 + \sqrt{6}$.

Ainda estamos apenas no começo da história por trás do diagrama de órbita. À medida que o parâmetro α aumenta, a órbita de período 4 se bifurca para uma órbita de período 8 que bifurca para uma órbita de período 16, e assim por diante. Esses intervalos de parâmetros entre duplicações de período ficam cada vez mais curtos, e os valores de parâmetros associados às duplicações de período aproximam-se de um limite $L \approx 3, 57$.

No limite de duplicação de período L , temos infinitas órbitas periódicas e entramos em

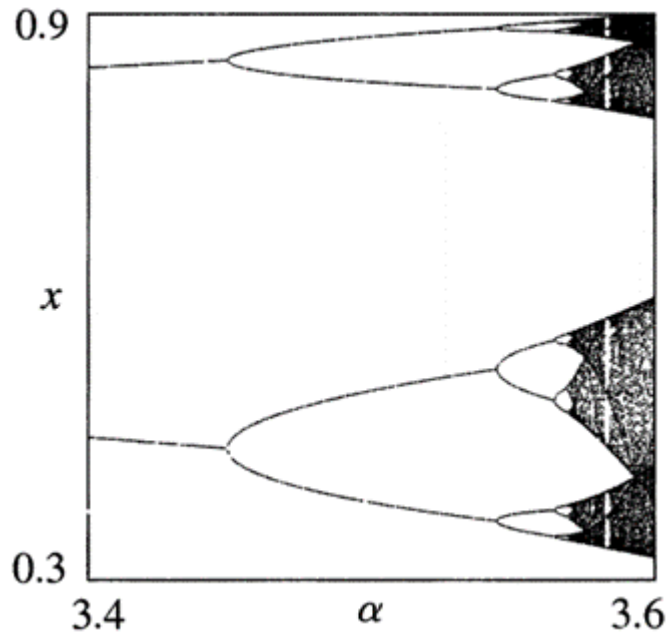


Figura 5.6: O diagrama de órbita para f_α com $3,4 \leq \alpha \leq 3,6$. (Cortesia de Chip Ross.)
 Fonte: [1]

uma região do domínio de parâmetros onde uma variedade de comportamentos interessantes são vistos. Novamente, não iremos fornecer todos os detalhes, mas aqui estão alguns dos destaques:

(i) Existem infinitos valores de parâmetro α onde f_α é caótico em um subconjunto infinito de $[0, 1]$.

(ii) Para cada $\alpha \in [L, 4]$, f_α tem infinitos pontos periódicos.

(iii) Existe um subconjunto aberto denso P de $[L, 4]$ tal que para todo $\alpha \in P$, f_α tem exatamente uma órbita periódica assintoticamente estável. Para todos os outros $\alpha \in [L, 4]$, não há órbitas periódicas assintoticamente estáveis de f_α .

(iv) Para cada n ímpar, existe um intervalo aberto de valores de parâmetros onde existe uma órbita n -periódica assintoticamente estável.

(v) Cada uma das órbitas de período n mencionadas acima surgem de um processo que é conhecido como bifurcação tangente e eventualmente perdem sua estabilidade no início de uma cascata de duplicações de período semelhantes às observadas anteriormente.

No diagrama de órbita, podemos ver "janelas" onde existem as órbitas com período ímpar assintoticamente estáveis e onde ocorrem suas subseqüentes duplicações de período. Por exemplo, na Figura 5.7 examinamos mais de perto a parte do diagrama de órbita correspondente a $3,8 \leq \alpha \leq 3,9$. Podemos ver que a órbita de período 3 aparece aproximadamente em $\alpha = 3,83$ e então se bifurca para uma órbita de período 6 em aproximadamente $\alpha = 3,84$.

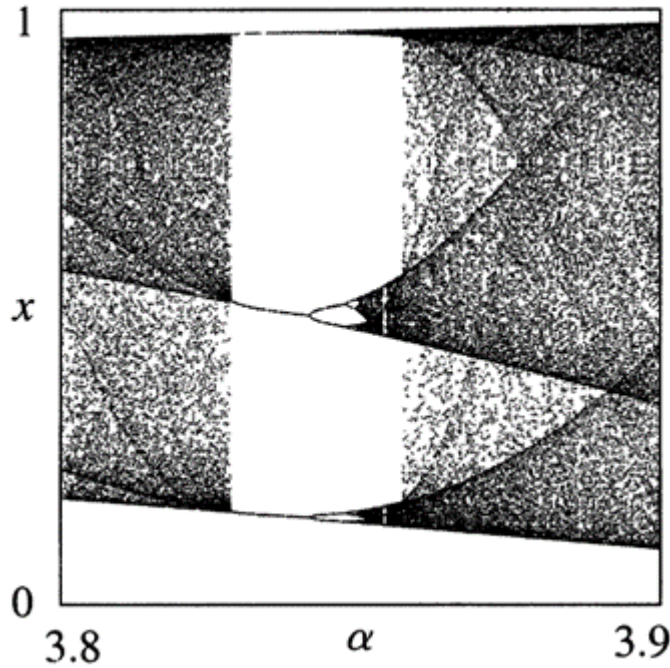


Figura 5.7: O diagrama de órbita para f_α com $3,8 \leq \alpha \leq 3,9$, mostrando o surgimento de uma órbita de período 3. (Cortesia de Chip Ross.) Fonte: [1]

A família logística e outras semelhantes foram amplamente estudadas para descobrir a história da dinâmica por trás do diagrama de órbita (veja [3]). Um resultado fascinante é que o espectro de comportamentos que descrevemos não é exclusivo da família logística, mas pode ser visto em outras famílias de funções definidas em um intervalo onde a família surge através de uma coleção de funções que variam sua dinâmica da mais simples possível até uma que preencha o intervalo com caos. A família de funções $s_\alpha(x) = \alpha \sin(\pi x)$, definida em $[0, 1]$, com $\alpha \in [0, 1]$ é um exemplo de uma tal família.

Agora, o que tudo isso diz sobre a população que foi modelada pela equação logística? Um tema central do artigo de May [6] era que mesmo funções muito simples podem exibir dinâmicas complicadas e, portanto, os comportamentos complexos observados em sistemas naturais simples podem ser inerentes aos sistemas, e não resultado de influências externas a

eles. Pontos fixos, pontos periódicos e caos são fenômenos esperados em sistemas naturais e, à medida que os parâmetros mudam nos sistemas, podemos esperar transições exóticas entre esses fenômenos, semelhantes às observadas na família logística.

À medida que a revolução do caos se instalava, muitos matemáticos e cientistas começaram a examinar os sistemas para os comportamentos observados na família logística. A dinâmica neste modelo simples ajudou a aprofundar a compreensão de fenômenos como turbulência no fluxo de fluidos, movimentos de corpos celestes, surtos de doenças e vibrações em máquinas.

O caos não é a única fonte de comportamento complicado e imprevisível, mas a identificação do caos e de suas estruturas associadas ajudou matemáticos e cientistas a entender melhor a dinâmica de sistemas não lineares. E, claro, os conceitos topológicos desempenharam um papel importante ao longo do caminho.

Bibliografia

- [1] ADAMS, C., FRANZOSA, R., Introduction to Topology Pure and Applied: Pearson, 2009;
- [2] ALLIGOOD, K., SAUER, T., YORKE, J., CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems: Springer, 1996;
- [3] DEVANEY, R.L., A First Course in Chaotic Dynamical Systems: CRC Press Taylor and Francis Group, 2020;
- [4] LIMA, E.L., Curso de Análise volume 1: IMPA, 2019;
- [5] LORENZ, E.N., Deterministic nonperiodic flow: Journal of Atmospheric Sciences 20, 1963, 130-141;
- [6] MAY, R.M., Simple mathematical models with very complicated dynamics: Nature 261, 1976, 459-467;
- [7] MONTEIRO, L.H.A., Sistemas Dinâmicos: Editora Livraria da Física, segunda edição, 2006.
- [8] MUNKRES, J.R., Topology: Pearson, second edition, 2000