



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática



Uma abordagem geométrica para as equações cúbicas

por

Fábio Nicácio Barbosa de Souza

Orientadora

Prof.^a Dr.^a Maria Eulália de Moraes Melo

2013

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Uma abordagem geométrica para as equações cúbicas

Dissertação de Mestrado apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Fábio Nicácio Barbosa de Souza

Recife
2013

Orientadora

Prof.^a Dr.^a

Maria Eulália de Moraes Melo

DM/UFRPE

Banca Examinadora

Prof.^a Dr.^a

Bárbara Costa Da Silva

DM/UFRPE

Prof. Dr.

Thiago Dias Oliveira Silva

DM/UFRPE

Prof. Dr.

Eudes Naziazeno Galvão

DMat/UFPE

Dedico este trabalho a todos os professores deste país, especialmente aos que contribuíram com minha formação. Aos meus pais com quem aprendi a dar os primeiros passos, falar as primeiras palavras, compreender os primeiros ensinamentos. A minha esposa, que me acompanha e me fortalece nos momentos difíceis de minha caminhada. E, enfim, aos meus preciosos filhos, presente que Deus me deu a missão de cuidar e que, assim, me motivam a estar sempre olhando para o horizonte e a planejar os futuros passos.

“Daria tudo que sei pela metade do que ignoro.”

René Descartes

Agradecimentos

Aos meus companheiros e companheiras da primeira turma do PROFMAT/UFRPE que tanto me ajudaram a superar dificuldades.

Ao Professor e amigo Tetsuo Usui, sempre me apoiando com livros e assumindo sozinho em alguns momentos, tarefas que deveriam ser mais equitativamente distribuídas no nosso dia a dia de trabalho para que eu pudesse me dedicar um pouco mais ao mestrado.

Ao Professor Gutemberg Antônio Alves, que tanto me incentivou com livros e importantes momentos de estudos durante o início deste curso.

Ao meus irmãos e amigos que tanto torceram pelo meu sucesso e pela minha felicidade.

À minha orientadora, Prof.^a Maria Eulália que tão atenciosamente me guiou na construção desse trabalho.

Aos demais professores da UFRPE que contribuem tão significativamente para a realização desse programa de mestrado, especialmente, Rodrigo Gondim, Jorge Hinojosa, Paulo Santiago, Adriano Regis, Maité Kulesza, Márcia Pragana além de Leon Denis e Teófilo Viturino.

Ao IFPE – Campus Recife, que me permitiu redução de carga horária em sala de aula.

À UFRPE que disponibilizou recursos para que diversos professores tivessem no estado de Pernambuco a oportunidade de se qualificar e obter o grau de mestre em Matemática através do PROFMAT.

À CAPES que permitiu através de financiamento de bolsas que pudéssemos adquirir livros e custear todas as despesas necessárias durante o curso.

À SBM e ao IMPA que idealizaram e, junto com as universidades parceiras, implementaram o PROFMAT - mestrado profissionalizante em rede nacional – dando substancial contribuição à educação matemática no Brasil.

E, principalmente, a Deus, aquele em quem deposito minha fé e que tudo ordenou para a realização dessa conquista.

Resumo

Por muito tempo a busca para solucionar equações instigou brilhantes mentes da história humana. Mecanismos aritméticos, geométricos e algébricos foram desenvolvidos trazendo avanços ao conhecimento matemático. Muitos desses recursos foram “simplificados” e hoje são abordados nas salas de aula, prevalecendo, dentre eles, a manipulação algébrica.

Este trabalho apresenta o estudo para uma abordagem geométrica das equações cúbicas no ensino médio, fazendo um estudo do discriminante e sua relação com as raízes reais, acompanhada da construção de seu gráfico.

Palavras-chave: Álgebra; Equações Cúbicas; Raízes; Discriminantes; Curva Gráfico.

Abstract

For a long time the search to solve equations pushed the brilliant minds in the human History. Arithmetical, geometric and algebraic mechanisms ere developed bringing advance to the mathematics knowledge. A lot of these resources were "simplified" and nowadays they're handled in the classroom overruling among them the algebraic manipulation.

This work shows the study to a geometric approach of the cubic equations in the High School doing a decriminalizing studies and its relationship with the real roots accompanied its graphic construction.

Key words: Algebra, Cubic Equations, Roots, Decriminalizing, Graphic Curve.

Lista de figuras

Figura 1.1	Segmentos de medidas a e b	9
Figura 1.2	Solução geométrica para $x^2 = a \times b$	10
Figura 1.3	Paralelogramo $AEFD$ aplicado ao segmento AB	10
Figura 1.4	Segmentos AB e CD	11
Figura 1.5	Solução da equação $ax - x^2 = b^2$ (com $a > 2b$) pelo método da aplicação de áreas: 1º passo	11
Figura 1.6	Solução da equação $ax - x^2 = b^2$ (com $a > 2b$) pelo método da aplicação de áreas: 2º passo	11
Figura 1.7	Solução da equação $ax - x^2 = b^2$ (com $a > 2b$) pelo método da aplicação de áreas: 3º passo	11
Figura 1.8	Solução da equação $x^2 + 10x = 39$ pelo método da complementação de quadrados: 1º passo	12
Figura 1.9	Solução da equação $x^2 + 10x = 39$ pelo método da complementação de quadrados: 2º passo	13
Figura 1.10	Segmentos de medidas a, b, c	15
Figura 1.11	(A) Solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$: 1º passo	15
Figura 1.11	(B) Solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$: 1º passo	16
Figura 1.12	Solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$: 2º passo	16
Figura 1.13	(A) Solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$: 3º passo	16
Figura 1.13	(B) Solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$: 3º passo	17
Figura 1.14	Solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$: 4º passo	17
Figura 1.15	Solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$: 5º passo	17
Figura 1.16	Demonstração da solução geométrica para a equação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$	18
Figura 2.1	Gráfico da função $F(x) = 4(x - 2)^3 + 1/2$	25
Figura 2.2	Gráfico das funções $P_1(x) = x^3$, $P_2(x) = x^5$ e $P_3(x) = x^7$	27
Figura 2.3	Gráfico das funções $P_1(x) = x^2$, $P_2(x) = x^4$ e $P_3(x) = x^6$	27
Figura 2.4	Gráfico da função $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$	28
Figura 2.5	Gráfico da função $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$	28
Figura 2.6	Gráfico da função $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^2 \cdot (x + 2)$	29
Figura 2.7	Gráfico da função $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^2$	29
Figura 2.8	Gráfico da função $P(x) = (x - 1)^3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$	30
Figura 2.9	Gráfico da função $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^3 \cdot (x + 1)$	30
Figura 2.10	Gráfico da função $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^3$	31
Figura 2.11	Gráfico da função $P(x) = (x - 1)^4 \cdot (x - 2)$	31
Figura 2.12	Gráfico da função $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^4$	32

Figura 2.13	Gráfico da função $P(x) = (x - 1)^3 \cdot (x - 2)^2$	32
Figura 2.14	Gráfico da função $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^3$	33
Figura 2.15	Gráfico da função $P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 2)^3$	33
Figura 2.16	Gráfico da função $P(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot (x - 2)$	34
Figura 4.1	Gráfico da função $y = x^3 + px + q$ para $p > 0$	45
Figura 4.2	Gráfico da função $y = x^3 + px + q$ para $p < 0$	46
Figura 4.3	Gráfico da função $y = x^3 + px + q$ para $p = 0$	47
Figura 4.4	Gráfico da função $F(x) = x^3 + 3x + 4$	48
Figura 4.5	Gráfico da função $F(x) = x^3 + 3x$	49
Figura 4.6	Gráfico da função $F(x) = x^3 + 3x - 4$	49
Figura 4.7	Gráfico da função $F(x) = x^3 - 3x + 4$	50
Figura 4.8	Gráfico da função $F(x) = x^3 - 3x + 2$	50
Figura 4.9	Gráfico da função $F(x) = x^3 - 3x$	51
Figura 4.10	Gráfico da função $F(x) = x^3 - 3x - 2$	51
Figura 4.11	Gráfico da função $F(x) = x^3 - 3x - 4$	52
Figura 4.12	Gráfico da função $F(x) = x^3 + 4$	52
Figura 4.13	Gráfico da função $F(x) = x^3$	53
Figura 4.14	Gráfico da função $F(x) = x^3 - 4$	53
Figura 4.15	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p < 0$ e três raízes reais distintas.....	54
Figura 4.16	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p < 0$ e uma raiz real simples outra dupla (caso 1)	56
Figura 4.17	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p < 0$ e uma raiz real simples e outra dupla (caso 2)	56
Figura 4.18	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p < 0$ e uma raiz real e duas complexas não reais (caso 1)	57
Figura 4.19	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p < 0$ e uma raiz real e duas complexas não reais (caso 2)	57
Figura 4.20	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p > 0$ e uma raiz real e duas complexas não reais	58
Figura 4.21	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p = 0, q \neq 0$ e uma raiz real tripla	59
Figura 4.22	Gráfico da função $f(x) = x^3 + px + q$ para $p = 0, q = 0$ e uma raiz real e duas complexas não reais	59
Figura B.1	Gráfico da função $F(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$	68
Figura B.2	Gráfico da função $F(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$	68
Figura B.3	Gráfico da função $F(x) = ax^2 + bx + c$ com $\Delta > 0$ e $a > 0$	69
Figura B.4	Gráfico da função $F(x) = ax^2 + bx + c$ com $\Delta = 0$ e $a > 0$	69
Figura B.5	Gráfico da função $F(x) = ax^2 + bx + c$ com $\Delta < 0$ e $a > 0$	69

Sumário

INTRODUÇÃO

Motivação.....	4
Estrutura do Trabalho.....	5

CAPÍTULO 1

A SOLUÇÃO DAS QUADRÁTICAS E CÚBICAS NA HISTÓRIA.....	6
1.1. Resolução das Equações quadráticas no decorrer do tempo.....	7
1.2. Resolução das Equações cúbicas no decorrer do tempo.....	13

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES POLINOMIAIS E SUAS RAÍZES.....	20
2.1. Dos polinômios e funções polinomiais.....	20
2.2. Raízes.....	21
2.3. Decomposição de um polinômio $P \in \mathbb{C}[x]$ em fatores de grau 1.....	23
2.4. Gráficos das funções polinomiais.....	25

CAPÍTULO 3

DISCRIMINANTE PARA POLINÔMIOS DO GRAU n.....	35
3.1. Definição.....	35
3.2. Relação entre a natureza das raízes e o sinal do discriminante <i>Abordagem algébrica</i>	36

CAPÍTULO 4

DAS EQUAÇÕES CÚBICAS.....	38
4.1. Forma reduzida da equação cúbica.....	38
4.2. Expressão do discriminante em termo dos coeficientes.....	39
4.3. Gráfico das funções polinomiais cúbicas.....	42
4.4. A equação $x^3 + px + q = 0$ observada no gráfico da função polinomial F	47
4.5. Relação entre a natureza das raízes e o sinal do discriminante <i>Abordagem geométrica</i>	54

CAPÍTULO 5

EXERCÍCIOS.....	61
------------------------	-----------

APÊNDICE A.....	63
FÓRMULA RESOLVENTE DE CARDANO.....	63

APÊNDICE B.....	65
DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS.....	65

APÊNDICE C.....	71
RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS.....	71

BIBLIOGRAFIA.....	74
--------------------------	-----------

Introdução

Motivação.

A interpretação gráfica das funções polinomiais é um recurso que ajuda bastante na compreensão do seu comportamento uma vez que é a maneira mais natural de se visualizar, se houver, seus intervalos de crescimento e/ou decrescimento, intersecção com o eixo OY, pontos de inflexão e suas raízes reais.

Essa interpretação gráfica já é abordada a partir do ensino fundamental quando são apresentadas em sala de aula as parábolas para as equações do 2º grau. Nesse momento percebe-se o significado de, conforme o valor obtido para o discriminante, que a equação do 2º grau pode ter duas raízes reais e distintas, duas raízes reais e iguais ou não ter raízes reais.

A questão é:

E para as equações de grau maior que dois? É apropriada uma abordagem geométrica? Há discriminante para que, sem calcular as raízes, possa se dizer quantas são e qual a natureza delas?

As equações polinomiais de grau três (ou maior), só abordadas no terceiro ano do ensino médio, não vêm acompanhadas dessa interpretação geométrica e se limitam à utilização de teoremas e dispositivos para a determinação das raízes da equação.

Essa limitação na abordagem para as equações polinomiais no ensino médio é a motivação para a realização desse trabalho. Contudo, não é ambição deste fazer um aprofundamento das equações com grau superior a três. Portanto, o propósito deste trabalho se limita a uma abordagem feita às equações polinomiais do terceiro grau.

Estrutura do Trabalho

No capítulo 1 deste trabalho é feito um breve relato histórico a respeito das descobertas de métodos aplicados na resolução das equações algébricas de 2º e 3º graus. Desde os babilônios, passando pelas engenhosas maneiras geométricas de determinar as raízes positivas das equações quadráticas e cúbicas até a polêmica descoberta na Itália da solução algébrica para as cúbicas.

No capítulo 2 é introduzida a definição para as funções polinomiais e raízes. Nele são feitas algumas considerações sobre as raízes reais e complexas não reais. Também é tratado neste capítulo da decomposição de um polinômio em fatores do 1º grau com o de se fazer uma interpretação geométrica dos polinômios e suas raízes.

No capítulo 3 é apresentada a definição de discriminante para polinômio de grau n culminando com a determinação do discriminante da equação do 3º grau.

No capítulo 4 é feito um estudo das equações cúbicas. Iniciamos encontrando a equação reduzida na forma $x^3 + px + q = 0$. Em seguida determinamos o discriminante desta equação em função de seus coeficientes p e q . Prosseguimos com a construção do gráfico e uma análise da equação neste gráfico. Finalizamos este capítulo fazendo uma relação entre o discriminante e as raízes da equação.

No capítulo 5 são apresentados alguns exercícios.

Complementando o trabalho são acrescentados três apêndices. No apêndice A apresentamos os procedimentos para determinarmos a fórmula resolvente de Cardano. No apêndice B, fazemos uma abordagem, semelhantemente ao que foi feito com as equações cúbicas, sobre as equações quadráticas. Por fim, no apêndice C, apresentamos as resoluções das questões propostas no capítulo 5.

Capítulo 1

A solução das quadráticas e cúbicas na História

Várias civilizações, de diferentes lugares e diferentes épocas, colaboraram com o desenvolvimento da álgebra. Esse desenvolvimento passou por três estágios quanto à linguagem adotada na resolução de problemas. Nesselmann, em 1842, as diferenciou da seguinte forma:

- Álgebra retórica;
- Álgebra sincopada;
- Álgebra simbólica.

A primeira delas trata-se de linguagem que se utiliza apenas de palavras sem abreviações ou símbolos específicos. Já usada pelos babilônios, permaneceu em vigor até o século XV na Europa Ocidental. Apesar desse longo período de utilização da álgebra retórica, a linguagem sincopada foi introduzida por Diofanto aos 250 anos da era cristã e considerada uma importante contribuição à matemática. Essa linguagem consiste na utilização de abreviações para algumas quantidades e operações que se repetem com frequência. Por exemplo, para se denotar “uma incógnita ao cubo” usam-se as duas primeiras letras da palavra grega kubos (KYBOΣ) da seguinte forma: K^Y . Para “o quadrado de uma incógnita” são usadas as duas primeiras letras da palavra dunamis (ΔΥΝΑΜΙΣ) que significa “potência”: Δ^Y . Assim, $x^3 + 13x^2 + 5x$, por exemplo, se escreveria da seguinte maneira:

$$K^Y \alpha \Delta^Y \iota \psi \epsilon$$

que literalmente significa “incógnita ao cubo 1, incógnita ao quadrado 13, incógnita 5”.

Já a álgebra simbólica surgiu na Europa no século XVI, mas só veio se estabelecer em meados do século XVII. Ela consiste na adoção de símbolos. O maior impulso à evolução dessa linguagem moderna é creditado aos franceses René Descartes e Pierre de Fermat.

1.1. Resolução das Equações quadráticas no decorrer do tempo.

Registros mais antigos mostram que problemas envolvendo equações já eram objetos de estudos em tempos bastante remotos. Desde os babilônios, civilização fundada cerca de 2.300 a.C., que já se expressam problemas algébricos utilizando terminologia geométrica.

Exemplos:

1) “Uma determinada área A , que é a soma de dois quadrados, tem o valor 1000. O lado de um dos quadrados é igual a $2/3$ do lado do outro menos 10. Quanto mede os lados dos quadrados?” (STRUICK, 1992, p. 58)

2) “Qual o lado de um quadrado se a diferença entre área desse quadrado e seu lado é o número (sexagesimal) 14,30?” (HOWARD EVES, 2004, P.78)

Evidentemente, que as soluções para problemas desse tipo não usavam a linguagem adotada em nossos dias. A solução, por exemplo, para o segundo problema dado logo acima é:

Tome a metade da unidade. Multiplique essa metade por ela mesma. Some o resultado à diferença entre a área e o lado (14,30). O número obtido é o quadrado de 29;30 (base sexagesimal) que somado com a metade da unidade torna-se igual a medida do lado procurado do quadrado.

Trazendo para a linguagem moderna da matemática e utilizando o sistema decimal de numeração, esse problema consiste em resolver a equação quadrática

$$x^2 - px = q$$

pela fórmula

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}.$$

Nesse caso, a solução é encontrada com $p = 1$ e $q = 870$.

Detalhando um pouco mais, observe que $870 = 14 \times 60^1 + 30 \times 60^0$. Então, convertendo 870 para a base sexagesimal obtemos 14,30, onde a vírgula é utilizada para separar as posições sexagesimais. Agora, vamos fazer passo-a-passo a resolução dada acima.

1º passo –

Tome a metade de 1:

Representamos a metade de um na base decimal por 0,5 e na base sexagesimal por 0;30 onde o ponto e vírgula é usado para separar a parte inteira da parte decimal.

2º passo –

Multiplique esse número (a metade de 1) por ele mesmo:

Ao multiplicarmos a metade de 1 por ele mesmo, encontramos a quarta parte da unidade. Na base decimal representamos por 0,25 e na base sexagesimal por 0;15.

3º passo –

Some o resultado obtido à diferença entre a área e o lado (870 na base decimal e 14,30 na base sexagesimal):

A soma na base decimal é: $870 + 0,25 = 870,25$.

Na base sexagesimal é: $14,30 + 0;15 = 14,30;15$.

4º passo –

O número obtido é o quadrado de 29;30:

De fato. Na base decimal 870,25 é o quadrado de 29,5 ($29,5^2 = 870,25$) que na base sexagesimal é o mesmo que 29;30.

5º passo –

Some o último resultado à metade da unidade:

Somando esse último resultado com metade da unidade, obtemos o lado do quadrado. Na base decimal temos $29,5 + 0,5 = 30$. Na base sexagesimal obtemos $29;30 + 0;30 = 30$.

Na verdade, os babilônios tratavam com certa eficiência problemas de equações quadráticas que eram reduzidos a três casos gerais:

- $x^2 + px = q$
- $x^2 - px = q$
- $x^2 + q = px$

Não obstante à importância das grandes contribuições dos babilônios à Matemática, o vigor da atividade intelectual dessa civilização (e de outras que compunham a civilização potâmica) foi

perdendo força. Com esse declínio a efervescência cultural foi sendo paulatinamente transferida para outros centros.

Mas essa mudança não se deu de forma abrupta, como relatado em *História da Matemática* por Carl B. Boyer (1996, p. 30).

“Para indicar essa mudança nos centros de civilização, o intervalo entre aproximadamente 800 a.C. e 800 d.C. é às vezes chamado Idade Talássica (isto é, “idade do mar”). Não houve, é claro, uma quebra brusca marcando a transição da liderança intelectual dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates para a beira do Mediterrâneo, pois o tempo e a história fluem continuamente, e as causas em variação são associadas a causas antecedentes.”

Ainda neste mesmo parágrafo, relata:

“Os estudiosos egípcios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 a.C.; mas, enquanto isso, uma nova civilização se preparava rapidamente para assumir a hegemonia cultural, não só na região mediterrânea mas, finalmente, também nos principais vales fluviais.”

Então, nesse primeiro momento da transição, os gregos assumiram o papel de maior importância.

Dos babilônios os pitagóricos herdaram a “álgebra aritmética”. Mas ela foi, em algum momento da história grega, substituída pela “álgebra geométrica”. Os métodos das proporções e o da aplicação das áreas, provavelmente originário dos pitagóricos, eram os métodos utilizados na álgebra geométrica para a resolução de equações lineares e quadráticas.

Do método das proporções vem:

$a : x = x : b \Rightarrow x^2 = a \cdot b$, onde a e b são as medidas de segmentos. Essa resolução é feita a partir da seguinte construção:

Tomamos os segmentos de medidas a e b .

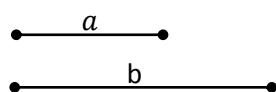


Figura 1.1

Traçamos os segmentos de medidas a e b numa mesma reta de forma que tenham um único ponto comum. Em seguida encontramos o ponto médio do segmento formado entre os extremos não comuns dos segmentos de medidas a e b e traçamos uma circunferência por essas extremidades e centro no ponto médio determinado. Construimos uma perpendicular pelo ponto comum dos segmentos até atingir a circunferência. Esse segmento tem medida x .

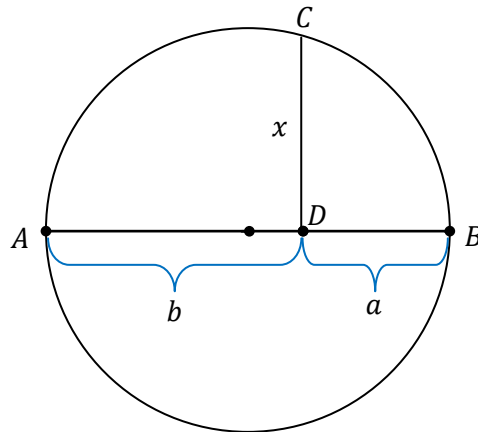


Figura 1.2

A demonstração é simples. Basta observar que o triângulo ABC , inscrito na semicircunferência, é um triângulo retângulo e utilizar a seguinte relação métrica:

Dado um triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Ou seja, $x^2 = a \times b$.

Já o método da aplicação das áreas resolve equações quadráticas da forma $x^2 + ax + b^2 = 0$ ou $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Esse método é encontrado no livro VI dos *Elementos* de Euclides, mais particularmente nas proposições 28 e 29. Para exemplificar, tomemos um caso particular das resoluções obtidas das construções mais gerais dos *Elementos*. Para tanto, façamos algumas considerações:

Seja um paralelogramo $ABCD$ e um ponto E entre A e B . Por E traçamos uma paralela aos lados AD e BC de forma que intercepte CD em F . Dizemos que o paralelogramo $AEDF$ está *aplicado ao segmento AB* ficando aquém pelo paralelogramo $EBCF$.

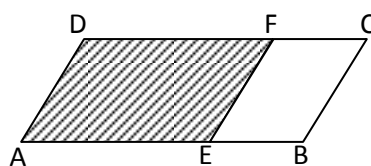


Figura 1.3

Tomemos, então, o caso particular de construir um retângulo aplicado a um segmento $AB = a$ cuja área é igual à área de um quadrado de lado b com $a > 2b$.

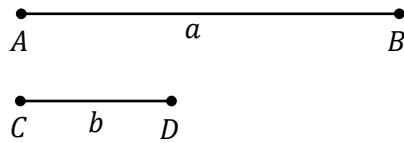


Figura 1.4

1º passo:

Determinamos o ponto médio C do segmento AB . Em seguida traçamos uma perpendicular à AB por C , e nela marcamos o ponto D de forma que $CD = b$.

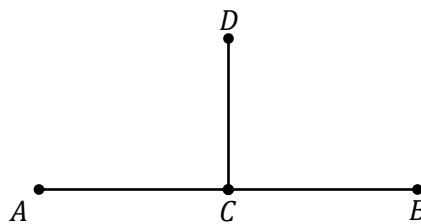


Figura 1.5

2º Passo:

Com centro em D e raio $\frac{a}{2}$ traçamos um arco de circunferência que intercepte o segmento AB no ponto E . Com isso determinamos o segmento $EB = x$, a medida procurada.

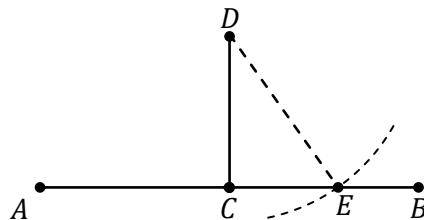


Figura 1.6

3º Passo:

Sobre AB construímos o retângulo $AEGH$ e o quadrado $EBFG$. Dizemos que o retângulo $AEGH$ está aplicado ao segmento AB aquém pelo quadrado $EBFG$.

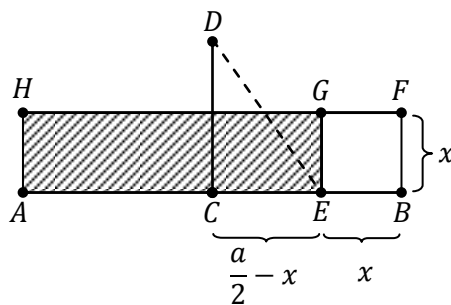


Figura 1.7

Observe que $EB = EG = x$ e $AE = a - x$, portanto o retângulo $AEGH$ tem área $(a - x)x$. Veja que essa área é igual à área do quadrado de lado b , ou seja, $ax - x^2 = b^2$. De fato, do triângulo CDE , retângulo em C , temos:

$$\begin{aligned} (DE)^2 &= (DC)^2 + (CE)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2 \\ &\Rightarrow \quad 0 = b^2 - ax + x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{ax - x^2 = b^2} \end{aligned}$$

A contribuição grega para a matemática também influenciou outras culturas. O árabe al-Khwarizmi, por exemplo, influenciado pela álgebra geométrica dos gregos, resolveu, metodicamente, equações do segundo grau. Alguns, inclusive, acham-no merecedor do título de “pai da álgebra” ao invés do grego Diofante. Em sua obra *Al-Jabr*, em clara organização sistemática, apresenta resolução de equações, especialmente do segundo grau com a complementação de quadrados. Veja como exemplo, a solução da equação $x^2 + 10x = 39$:

1º Passo:

Para resolver a equação $x^2 + 10x = 39$, adota-se um quadrado de lado x cercado por quatro retângulos de área $\frac{10x}{4}$ conforme a figura abaixo. A soma dessas áreas corresponde a seguinte representação algébrica: $x^2 + 4\frac{10}{4}x = x^2 + 10x$.

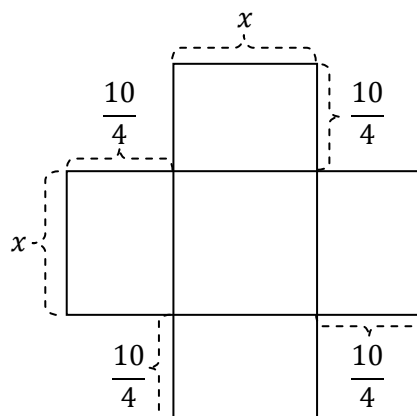


Figura 1.8

2º Passo:

Em seguida, adicionam-se quatro quadrados de lado $\frac{10}{4}$ completando o quadrado maior de lado $x + 5$.

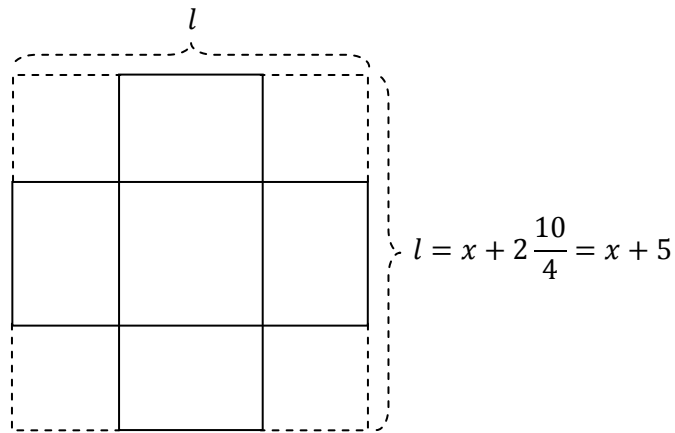


Figura 1.9

O que temos então é:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 10x = 39 & \Rightarrow x^2 + 10x + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = 39 + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 \\
 & \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \\
 & \Rightarrow (x + 5)^2 = 64 \\
 & \Rightarrow x = \sqrt{64} - 5 \quad \Rightarrow \boxed{x = 3}
 \end{aligned}$$

As soluções aceitas eram as positivas.

Mais tarde, soluções para equações do segundo grau puderam ser obtidas a partir da generalização da ideia adotada acima. Ou seja, dada uma equação da forma $x^2 + px + q = 0$, com p e q reais quaisquer, ela pode ser escrita como $(x + p/2)^2 = q + p^2/4$, ou ainda, $x = -p/2 \pm \sqrt{q + p^2/4}$.

1.2. Resolução das Equações cúbicas no decorrer do tempo.

Da mesma forma que as quadráticas, os babilônios também esboçaram interesse pelas cúbicas. Eles usavam uma tábua com os valores de $n^3 + n^2$ para n variando de 1 a 30. Ela era aplicada para resolver equações da forma $x^3 + px^2 = q$. Por exemplo:

1) Resolver a equação $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$.

Consultando a sequência de números $n^3 + n^2$, observamos que para $n = 14$ temos $n^3 + n^2 = 2744 + 196 = 2940$. Fazendo uma pequena variação na expressão $n^3 + n^2$ obtemos $n^3 + 2n^2 = 2744 + 392 = 3136$.

Talvez os babilônios não fizessem qualquer variação em $n^3 + n^2$ e possivelmente adotassem outro procedimento, como segue:

Tomando $x = 2n$, temos:

$x^3 + 2x^2 = 3136 \quad \Rightarrow \quad 8n^3 + 8n^2 = 3136 \quad \Rightarrow \quad n^3 + n^2 = 392$. Consultando a tabela com os valores de $n^3 + n^2$ obtemos $n = 7$. Dai que $x = 14$.

De qualquer maneira a tábua contendo a expressão $n^3 + n^2$ era útil para resolver alguns tipos especiais de equações cúbicas.

Dos gregos vem o problema da duplicação do cubo, ou seja, determinar a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado. Quem deu o primeiro passo na resolução desse problema foi Hipócrates (400 a.C.) reduzindo-o à construção de duas médias proporcionais entre segmentos de medidas s e $2s$:

$$s : x = x : y = y : 2s$$

Eliminando y , obtém-se:

$$x^3 = 2s^3$$

Mas quem deu uma das soluções mais interessantes foi Arquitas, geômetra do séc. IV a.C., encontrando a intersecção entre uma cone circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cilindro reto.

Apesar dessas contribuições, foi Omar Khayyam (1050 - 1122), um árabe tido como cientista por uns e poeta por outros, o primeiro a trabalhar com todas as equações cúbicas que tivessem apenas raízes positivas. Ele acreditava que não era possível encontrar soluções aritméticas para as equações cúbicas gerais. Seu método de resolução das equações de terceiro grau consistia em construir cônicas que se intersectassem. Esses pontos comuns eram as raízes positivas das equações. Em *História da Matemática* de Carl B. Boyer (1996, p. 164) encontramos:

“Como seus predecessores árabes, Omar Khayyam dava para as equações do 2º grau tanto soluções aritméticas quanto soluções geométricas: para as equações cúbicas gerais, ele acreditava (erradamente, como se demonstrou

mais tarde no século dezesseis) que soluções aritméticas eram impossíveis; por isso deu apenas soluções geométricas. A ideia de usar cônicas que se cortam para resolver cúbicas tinha sido usada antes por Menaecmus, Arquimedes e Alhazen, mas Omar Khayyam deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau (que tinham raízes positivas). Quando numa obra anterior encontrou uma equação cúbica ele observou especificamente: ‘Isso não pode ser resolvido por geometria plana – isto é, usando apenas régua e compasso – pois contém um cubo. Para a solução precisamos de secções cônicas’ ”.

Para exemplificar vejamos o problema encontrado em *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves (2007, p. 278) que, em suma, generaliza através de métodos geométricos a solução das cúbicas na forma $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.

Problema:

Dados a , b e c como comprimentos de segmentos de reta, determine o comprimento x de um segmento para o qual a seguinte relação $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ esteja satisfeita.

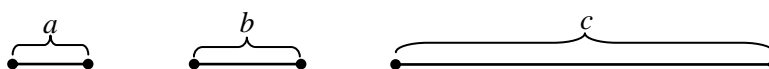


Figura 1.10

1º Passo:

Inicialmente vamos construir um segmento AB cujo comprimento é $\frac{a^3}{b^2}$. Para tanto precisamos determinar um segmento z de modo que a seja a média geométrica de b e z , ou seja, $z = \frac{a^2}{b}$.

- Constrói-se o triângulo retângulo de catetos $MN = b$ e $NP = a$;
- Traça-se a mediatriz da hipotenusa de forma que intercepte um dos catetos em Q ;
- Do triângulo isósceles MQP ($MQ \equiv QP$) traça-se uma semicircunferência interceptando em R o prolongamento do cateto contendo Q . O segmento NR é igual a z como se vê logo abaixo:

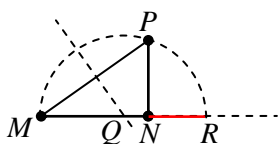


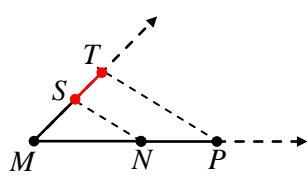
Figura 1.11 (A)

Observe que o triângulo retângulo MPR está inscrito na semicircunferência de raio MQ . Então, $NP^2 = MN \times NR$. Daí que:

$$a^2 = b \times z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a^2}{b}.$$

Agora podemos determinar o segmento $AB = m$ tal que $b \times m = a \times z$.

- Numa mesma semirreta traçamos os segmentos consecutivos $MN = b$ e $NP = a$;
- Numa outra semirreta com origem em M , traçamos o segmento $MS = z$;
- Por P passamos uma paralela ao segmento NS interceptando a semirreta MS em T . O segmento ST é igual a m .



Observe que $\frac{MN}{MS} = \frac{NP}{ST}$.

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{b}{z} = \frac{a}{m} \Rightarrow b \times m = a \times z \Rightarrow m = \frac{a^3}{b^2}$$

Figura 1.11 (B)

2º Passo:

Construir uma semicircunferência de diâmetro $m + c$ e traçar um segmento perpendicular ao diâmetro pelo ponto comum de m e c que intercepte a semicircunferência em D . Em BD marque $BE = b$ e trace uma paralela à reta AC interceptando o ponto E . Denominemos de F um ponto qualquer dessa paralela, desde que diferente do ponto E , e chamemos a paralela de EF .

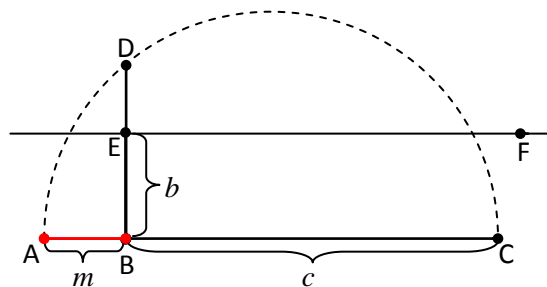
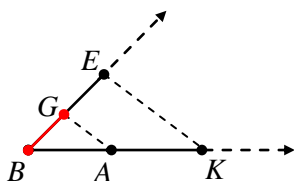


Figura 1.12

3º Passo:

Determinar em BC o ponto G tal que $(BG)(ED) = (BE)(AB)$

- Inicialmente construímos o segmento $BA = m$;
- Na semirreta BA marcamos o ponto K de forma que $BK = ED$;
- Por um ponto E , fora de BK , construímos a semirreta $BE = b$;
- Pelo ponto A traçamos uma paralela à EK encontrando BE em G .



Observe que

$$\frac{BG}{BA} = \frac{BE}{BK} \Rightarrow \frac{BG}{AB} = \frac{BE}{ED}$$

Dai que:

$$(BG)(ED) = (BE)(AB)$$

Figura 1.13 (A)

Então, com um compasso marcamos o segmento BG em BC .

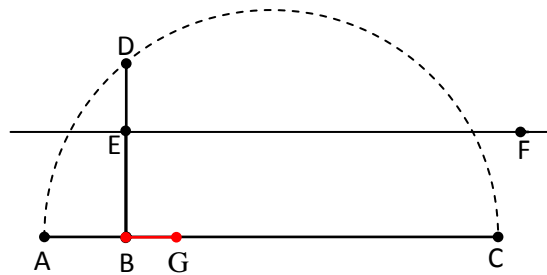


Figura 1.13 (B)

4º Passo:

Construímos o retângulo $BGHD$ e determinamos o ponto N da intersecção entre os segmentos GH e EF . Pelo ponto H traçamos uma hipérbole equilátera com assíntotas \overrightarrow{BD} e \overrightarrow{EF} interceptando a semicircunferência em J .

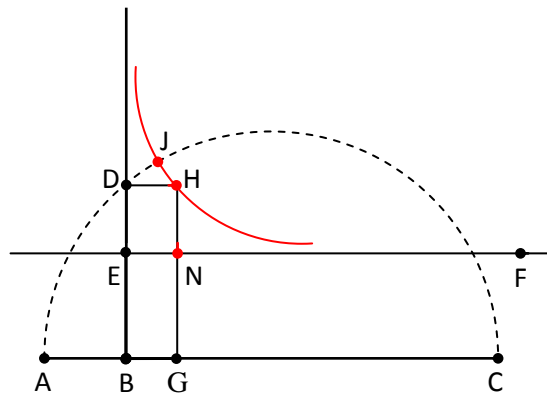


Figura 1.14

5º Passo:

Pelo ponto J traçamos uma paralela ao segmento BD interceptando as paralelas EF no ponto K e AC no ponto L . O segmento $BL = x$.

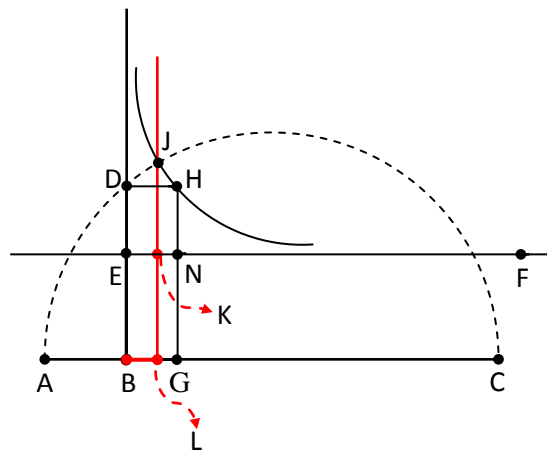


Figura 1.15

Vamos demonstrar que, de fato, $BL = x$.

Demonstração:

Primeiro determinamos os retângulos $ENHD$ e $EKJQ$. Como os pontos J e H pertencem à hipérbole equilátera, o produto de suas distâncias às assíntotas é uma constante. Isso quer dizer que $(EK) \times (KJ) = (EN) \times (NH)$. Ocorre que $EN = BG$ e $NH = ED$, então temos a seguinte igualdade: $(EK) \times (KJ) = (BG) \times (ED)$. Como, por construção, $(BG) \times (ED) = (BE) \times (AB)$, podemos concluir dessas duas últimas igualdades que:

$$\boxed{(EK) \times (KJ) = (BE) \times (AB)} \quad (I)$$

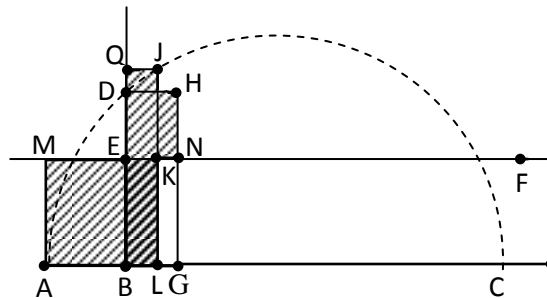


Figura 1.16

Observe ainda que o retângulo $BLKE$ é uma área comum aos retângulos $ALKM$ e $BLJQ$. Mas, pela igualdade (I), $ABEM$ e $EKJQ$ são retângulos de mesma área. Então determinamos que:

$$(AL) \times (BE) = (BL) \times (LJ), \text{ ou ainda, } \boxed{\frac{(BE)}{(BL)} = \frac{(LJ)}{(AL)}} \quad (II)$$

Do triângulo retângulo AJC (inscrito numa semicircunferência) temos:

$$\boxed{(LJ)^2 = (AL) \times (LC)} \quad (III)$$

Elevando a igualdade (II) ao quadrado e nela substituindo a igualdade (III), obtemos:

$$\frac{(BE)^2}{(BL)^2} = \frac{(LJ)^2}{(AL)^2} = \frac{(AL) \times (LC)}{(AL)^2} = \frac{(LC)}{(AL)}$$

Ou seja,

$$\boxed{(BE)^2 \times (AL) = (BL)^2 \times (LC)} \quad (IV)$$

Mas,

- $BE = b$;
- $BL = x$
- $AL = AB + BL = m + x = \frac{a^3}{b^2} + x$;
- $LC = BC - BL = c - x$

Então, substituindo em (IV):

$$b^2 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2} + x \right) = x^2 \cdot (c - x) \Rightarrow a^3 + b^2x = cx^2 - x^3 \Rightarrow \boxed{x^3 + b^2x + a^3 = cx^2}$$

Apesar do brilhantismo necessário para desenvolver uma solução tão bela, apenas séculos depois, em 1545, é que, através da publicação de *Ars magna* de Girolamo Cardano (1501 - 1576), a resolução das cúbicas torna-se um conhecimento comum. Porém, não foi este autor o descobridor da solução algébrica das cúbicas. Scipione del Ferro (1465 - 1526) foi o primeiro a obter uma solução não-geométrica para as equações da forma $x^3 + px = q$. Não chegou a publicar sua descoberta, mas antes de falecer revelou sua brilhante descoberta a um de seus discípulos, Antônio Maria Fior. Este, ciente da importância do que tinha em mãos, tentou tirar proveito para se autopromover em uma competição travada com um dos maiores matemáticos italianos da época, Niccolo Fontana (1500 - 1557), conhecido como Tartaglia, que conseguiu obter uma solução mais geral sem que seu oponente tivesse conhecimento. O resultado desse embate foi o triunfo de Tartaglia ao resolver todas as questões propostas por Fior enquanto este não resolveu nenhuma das questões propostas pelo vencedor. A questão é que Cardano sob juramento de não publicar a solução algébrica encontrada por Tartaglia conseguiu convencê-lo a revelar sua descoberta e, pouco tempo depois, quebrar o juramento e publicá-la em *Ars magna*. E assim, a solução algébrica que Tartaglia ficou conhecida como fórmula de Cardano.

Capítulo 2

Funções polinomiais e suas raízes.

Neste capítulo trataremos das funções polinomiais reais. Começamos recordando a definição dos polinômios P com coeficientes complexos e suas raízes. Em seguida fazemos algumas considerações sobre as raízes reais e as raízes complexas. Para finalizar, tratamos da decomposição do polinômio em fatores irredutíveis e apresentamos um roteiro para a construção do gráfico de uma função polinomial real.

2.1. Dos polinômios e funções polinomiais

Tomemos um conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e um símbolo x chamado indeterminada para o qual x^j , com $j \in \mathbb{N}$, representa o produto $x \cdot x \cdot x \cdots x$ com j fatores. Também convencionamos que $x^0 = 1$ e $x^1 = x$.

Dado o conjunto $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, chamamos de polinômio P , a expressão como segue abaixo:

$$P = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0, \quad \text{com } a_n \neq 0.$$

As parcelas $a_j x^j$ são os termos do polinômio e dizemos que tem grau j . O termo de maior grau com $a_j \neq 0$ determina o grau de P e a_j como seu coeficiente líder. Vamos denotar o grau de P por $gr(P)$. Dizemos que o polinômio é nulo se todo a_j de P é igual a zero e, nesse caso, não se define o grau do polinômio. Além disso, denotamos por $\mathbb{C}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes em \mathbb{C} .

Definiremos operações de adição e multiplicação entre os polinômios em $\mathbb{C}[x]$.

$$\text{Para } P = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad \text{e} \quad T = \sum_{j=0}^m b_j x^j \quad \text{ambos em } \mathbb{C}[x], \quad \text{com } m \leq n \text{ temos:}$$

$$\text{Adição: } P + T = \sum_{j=0}^n c_j x^j, \quad \text{com } c_j = a_j + b_j \text{ e } 0 \leq j \leq n.$$

Multiplicação: $P \cdot T = \sum_{j=0}^n c_j x^j$, com $c_j = \sum_{\alpha+\beta=j} a_\alpha \cdot b_\beta$ sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ e $0 \leq j \leq n$.

Para essas operações, valem as seguintes propriedades:

$$gr(P + T) \leq \max\{gr(P), gr(T)\};$$

$$gr(P \times T) = gr(P) + gr(T).$$

Consideremos também todos os polinômios em $\mathbb{R}[x]$. Como $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, todas as referências feitas acima para $P \in \mathbb{C}[x]$ são válidas para $P \in \mathbb{R}[x]$.

Tomemos então o polinômio $P \in \mathbb{C}[x]$ tal que

$$P = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0.$$

A este polinômio iremos associar, como é costume, a função polinomial definida em \mathbb{C} , com valores em \mathbb{C} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto P(z) \end{aligned}$$

onde

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z^1 + a_0.$$

Iremos sempre distinguir o polinômio P da função polinomial \mathcal{P} associada a ele. As vezes, por conveniência, escreveremos $P(x)$ ressaltando a indeterminada x .

2.2. Raízes

Seja um polinômio $P \in \mathbb{C}[x]$ tal que

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

e seja $r \in \mathbb{C}$. Dizemos que r é raiz do polinômio P se o número complexo

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \dots + a_1 r^1 + a_0$$

é igual a zero.

Se tomarmos $r \in \mathbb{R}$, temos que r é uma raiz real de P . Caso contrário, r é uma raiz complexa não real de P e escrevemos $r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Suponhamos que todos os coeficientes a_j sejam reais, isto é, suponhamos $P \in \mathbb{R}[x]$.

Consideremos, então, dois números complexos não reais r e \bar{r} conjugados entre si. Vamos mostrar que se r é raiz de um polinômio P , seu conjugado \bar{r} também é.

Partimos inicialmente da hipótese:

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \dots + a_1 r^1 + a_0 = 0$$

Tomemos $r = \alpha + \beta i$ com α e β reais, $\beta \neq 0$. Teremos, portanto, $\bar{r} = \alpha - \beta i$. Como os coeficientes de P são reais,

$$P(r) = 0 \Leftrightarrow P(\alpha + \beta i) = \overline{P(\alpha - \beta i)} = \overline{P(\alpha - \beta i)} = 0 \Leftrightarrow \overline{P(\alpha - \beta i)} = 0$$

Ou seja,

$$P(\alpha - \beta i) = 0.$$

Portanto,

$$P(\bar{r}) = 0.$$

Dessa forma podemos concluir que se um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$ tem raízes complexas não reais, estas serão sempre em número par.

Do Teorema Fundamental da Álgebra vem que todo polinômio em $\mathbb{C}[x]$ de grau n possui pelo menos uma raiz complexa, e conseqüentemente terá exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas.

Vemos também que em função das raízes complexas não reais de um polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$ surgirem sempre em dupla, necessariamente pelo menos uma delas é real quando o grau n do polinômio é ímpar. Uma demonstração desse fato segue do Teorema do Valor Intermediário que afirma:

Dados $a < b$, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número real com $f(a) < d < f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Deveras. Consideremos uma função polinomial $\mathcal{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $a_j \in \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0, \text{ com } n \text{ ímpar.}$$

Para $x \neq 0$ podemos escrever

$$\mathcal{P}(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

Dai resulta que:

- Se $a_n > 0$ temos as seguintes igualdades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty$$

- Se $a_n < 0$ temos as seguintes igualdades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) = -\infty$$

Como, para $a_n > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) = -\infty$ implica que existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) < 0$ e

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty$ implica que existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_2) > 0$, com $x_2 > x_1$, é certo que $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Da mesma maneira essa conclusão é obtida para $a_n < 0$.

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, haverá pelos menos uma raiz real no intervalo $]x_1, x_2[$.

Assim, podemos garantir que, para polinômios com coeficientes reais, temos:

- Se o polinômio tem grau 1, sua única raiz é real;
- Se o polinômio tem grau 2, então suas raízes podem ser duas raízes reais (distintas ou não), ou duas raízes complexas não reais conjugadas;
- Se o polinômio é de grau 3, então suas raízes podem ser três raízes reais (simples ou múltiplas) ou podem ser duas raízes complexas não reais conjugadas e uma raiz real.
- Se o polinômio é de grau $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, então dentre suas raízes, pelo menos uma raiz será real.

2.3. Decomposição de um polinômio $P \in \mathbb{C}[x]$ em fatores de grau 1

Seja um polinômio $P \in \mathbb{C}[x]$ de grau $n \geq 1$ e $r \in \mathbb{C}$. Da divisão euclidiana de P por $x - r$, existem polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, com coeficientes em \mathbb{C} , tais que

$$P(x) = Q(x)(x - r) + R(x).$$

Note que o grau de $R(x)$ é menor que o grau de $x - r$ que tem grau 1. Dessa forma $R(x)$ tem grau zero e escreveremos $R(x) = R$. Dai anotaremos $P(x)$ da seguinte maneira:

$$P(x) = Q(x)(x - r) + R.$$

Já sabemos do item 2.2 que se r é uma raiz do polinômio $P(x)$, $P(r) = 0$. Então, substituindo r em $P(x)$, encontramos

$$P(r) = Q(r)(r - r) + R \quad \Rightarrow \quad 0 = Q(r) \cdot 0 + R \quad \Rightarrow \quad R = 0.$$

Disso, resulta que se r é uma raiz do polinômio $P(x)$, ele é divisível por $x - r$.

Por outro lado, se $P(x)$ é divisível por $x - r$, temos

$$P(x) = Q(x)(x - r).$$

Substituindo r em $P(x)$, temos:

$$P(r) = Q(r)(r - r) \quad \Rightarrow \quad P(r) = Q(r) \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad P(r) = 0.$$

Disso resulta que r é raiz do polinômio $P(x)$.

Na verdade o que acabamos de fazer foi a demonstração do Teorema do Resto que nos ajudará com o discorrer desse item. Para tanto, vamos ainda estabelecer que será denominado *polinômio irredutível* aquele que não é divisível por nenhum outro de grau positivo inferior ao dele.

Pois bem, consideremos, então, o polinômio $P(x)$ de grau n . Se $n = 1$, o polinômio $P(x)$ é irredutível. Entretanto, se $n > 1$, podemos expressar $P(x)$ como o seguinte produto:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot Q_1(x),$$

onde r_1 é uma raiz de $P(x)$.

Mas $Q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$. Então, se $n > 2$, o polinômio $Q_1(x)$ pode ser escrito como o seguinte produto:

$$Q_1(x) = (x - r_2) \cdot Q_2(x),$$

onde r_2 é uma raiz de $Q_1(x)$ e

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot Q_2(x).$$

Dando prosseguimento a esse processo até a n -ésima raiz de P , encontramos

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \dots (x - r_n) \cdot Q_n(x)$$

onde o polinômio Q_n tem grau zero. Observe que durante as sucessivas divisões de $P(x)$ por $x - r_i$, com $1 < i < n$, o coeficiente dominante de $P(x)$, o a_n , se preserva como coeficiente dominante dos Q_i 's. Logo, como Q_n tem grau zero, $Q_n = a_n$.

Assim,

$$P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \dots (x - r_n).$$

Lembre que os coeficientes a_i e as raízes r_i são números complexos.

2.4. Gráficos das funções polinomiais

Seja dado o polinômio P com coeficientes reais.

Consideremos $\mathcal{P}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função polinomial definida pelo polinômio

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

Quer dizer,

$$\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aqui temos $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

Como \mathcal{P} é uma função contínua, (aliás, de classe C^∞), seu gráfico é uma linha “sem interrupções”. Vamos aqui neste tópico apresentar uma ideia de como se comporta o gráfico de uma função polinomial real de grau n . Para tanto, vamos considerar o que acabamos de ver na seção anterior. Tomemos, portanto, $\mathcal{P}(x)$ como produto de fatores do 1º grau:

$$\mathcal{P}(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \dots (x - r_n).$$

Consideremos inicialmente o caso particular no qual todas as raízes $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ da função polinomial \mathcal{P} são reais.

Já vimos que as raízes são os valores do domínio que anulam a função. Isso significa que as coordenadas de um ponto que tem como abscissa uma raiz de \mathcal{P} , está localizada no eixo OX.

O gráfico a seguir exemplifica esse fato.

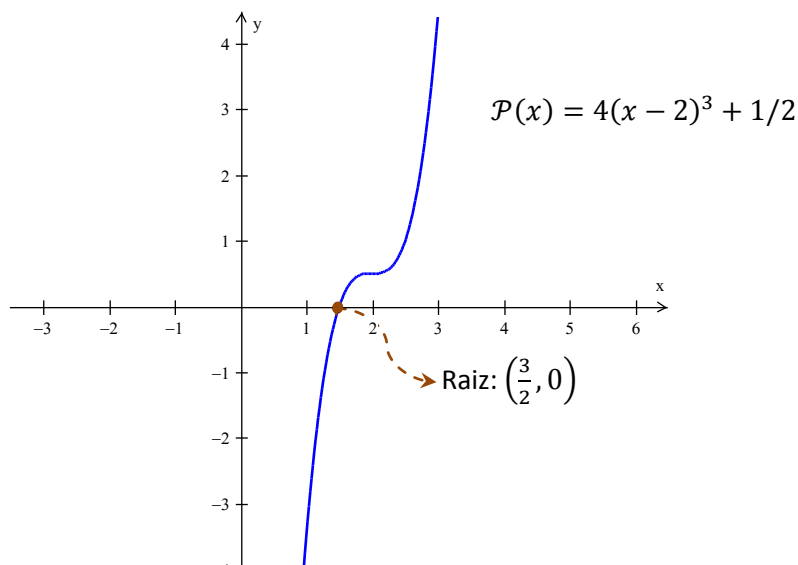


Figura 2.1

Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes complexos e seja r uma de suas raízes. Dizemos que $k \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade da raiz r se $P(x)$ é divisível por $(x - r)^k$ mas não é divisível por $(x - r)^{k+1}$. Então, se para as n raízes da função polinomial \mathcal{P} tivermos $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_k$, com $k \leq n$, e $r_j \neq r_1$ para $k < j \leq n$, a raiz r_k tem multiplicidade k . Isso quer dizer que o mesmo valor r se repete k vezes como raiz de \mathcal{P} . Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que a função polinomial \mathcal{P} e suas sucessivas derivadas até a k -ésima ordem se anulem em r . Ou seja:

$$\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}'(r) = \mathcal{P}''(r) = \dots = \mathcal{P}^{(k)}(r) = 0$$

A partir disso vamos observar dois casos.

Se $k = n$, isto é, r_n tem multiplicidade n , a função tem raiz única e se reduz à forma

$$\mathcal{P}(x) = a_n(x - r_n)^n$$

Por outro lado, se $k < n$, a função polinomial terá a forma

$$\mathcal{P}(x) = a_n \cdot (x - r_1)^{k_1} \cdot (x - r_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - r_m)^{k_m}$$

com $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Nesta última representação k_1, k_2, \dots, k_m são as respectivas multiplicidades das raízes $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$.

Para exemplificar, considerando $a_n > 0$, vamos analisar alguns casos em que todas as raízes são reais.

1º caso: A raiz da função é única e $\mathcal{P}(x) = a_n(x - r_n)^n$.

Se o grau da função é ímpar, então podemos generalizar que:

a) $\lim_{n \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) = -\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty$

b) Se $x < r_n$, então $\mathcal{P}(x) < 0$. Por outro lado, se $x > r_n$ temos $\mathcal{P}(x) > 0$.

c) Para $\mathcal{P}'(x) = 0$ observamos que $na_n(x - r_n)^{n-1} = 0$. Daí que $x = r_n$. $\mathcal{P}(x)$ tem ponto crítico com coordenadas $(r_n, 0)$.

d) Como o grau de \mathcal{P}' , $n - 1$, é par, então $\mathcal{P}'(x) > 0$ e a função é estritamente crescente.

e) Se $\mathcal{P}''(x) = 0$, então $n(n - 1)a_n(x - r_n)^{n-2} = 0$. Neste caso, o sinal de \mathcal{P}'' depende apenas de $(x - r_n)^{n-2}$, pois $n(n - 1)a_n > 0$. Então, como $n - 2$ é ímpar, temos:

- $x < r_n \Rightarrow \mathcal{P}''(x) < 0$ e a função tem concavidade para baixo;
- $x > r_n \Rightarrow \mathcal{P}''(x) > 0$ e a função tem concavidade para cima;

f) Esboço do gráfico de algumas funções na forma $\mathcal{P}(x) = a_n(x - r_n)^n$ e n ímpar:

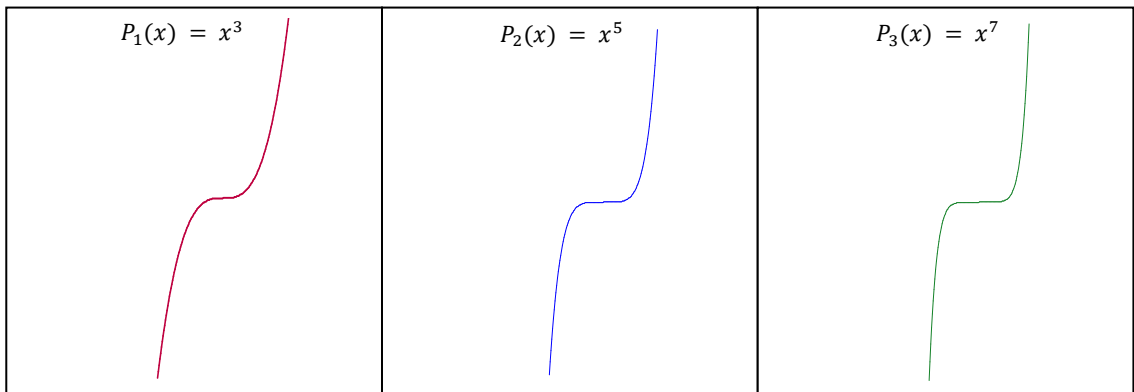


Figura 2.2

Semelhantemente, se o grau da função é par, podemos fazer as seguintes generalizações:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) = +\infty$
- $\mathcal{P}(x) > 0$ para todo x .
- $\mathcal{P}'(x) = 0$ implica em $na_n(x - r_n)^{n-1} = 0$. Então $x = r_n$.
 $\mathcal{P}(x)$ tem ponto crítico com coordenadas $(r_n, 0)$.
- Como o grau de \mathcal{P}' , $n - 1$, é ímpar, então
 $\mathcal{P}'(x) < 0$ se $x < r_n$, e a função é decrescente neste intervalo.
 $\mathcal{P}'(x) > 0$ se $x > r_n$, e a função é crescente neste intervalo.
- $\mathcal{P}''(x) = 0$ implica em $n(n - 1)a_n(x - r_n)^{n-2} = 0$. Neste caso, o sinal de \mathcal{P}'' é sempre positivo, pois $n - 2$ é par. Assim, a concavidade é sempre pra cima.
- Esboço do gráfico de algumas funções na forma $\mathcal{P}(x) = a_n(x - r_n)^n$ e n ímpar:

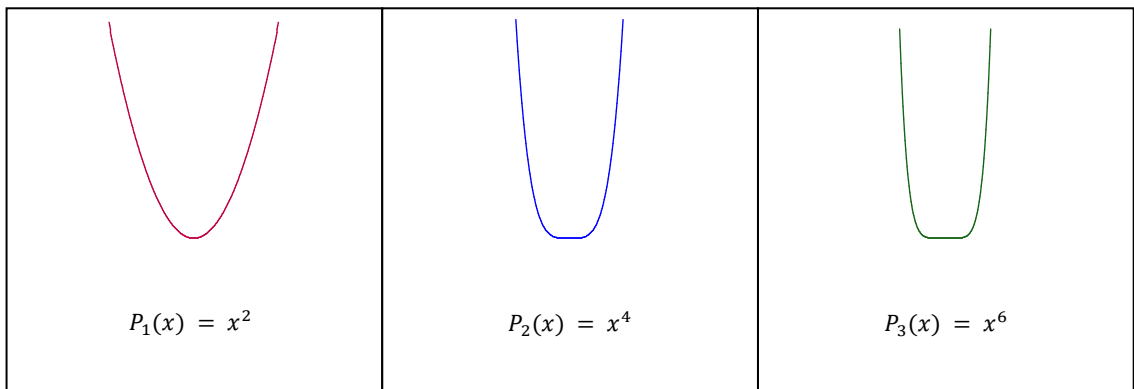


Figura 2.3

2º caso: A função é da forma

$$\mathcal{P}(x) = a_n \cdot (x - r_1)^{k_1} \cdot (x - r_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - r_m)^{k_m}$$

Neste caso não vamos generalizar, pois a depender do grau, da quantidade de pontos críticos e da multiplicidade de cada raiz a diversidade de formas do gráfico é demasiadamente ampla. Por exemplo, tomemos algumas funções de grau 5 cujas raízes são todas reais.

Observe que só nesse caso, pode a função ter inúmeras combinações quanto às raízes e multiplicidades. Tomemos alguns exemplos.

a)
$$\mathcal{P}(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$$

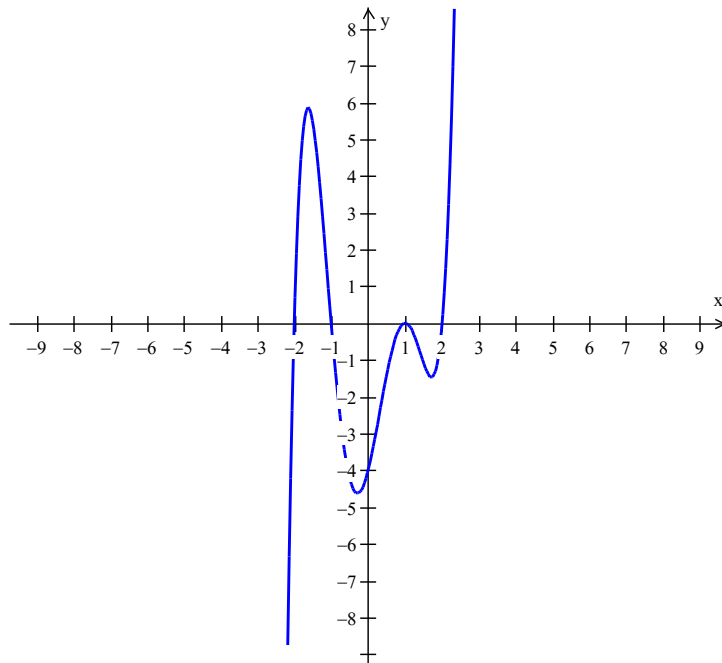


Figura 2.4

b)
$$\mathcal{P}(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$$

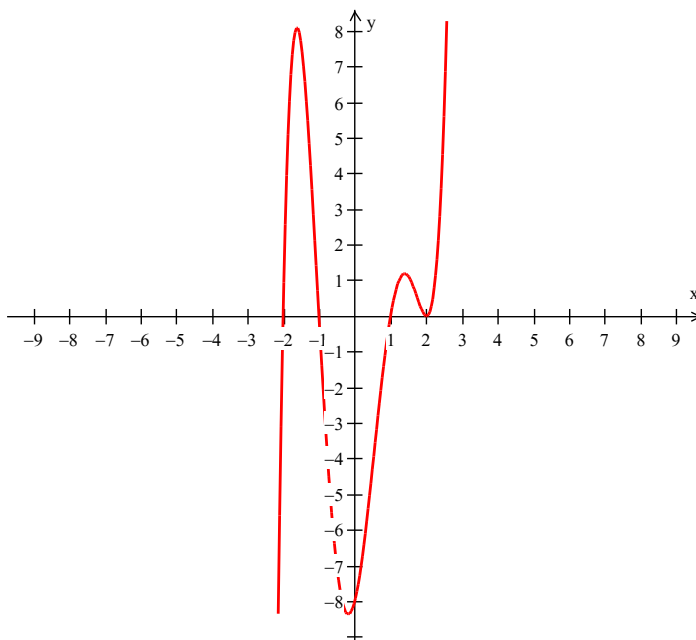


Figura 2.5

c) $\mathcal{P}(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^2 \cdot (x + 2)$

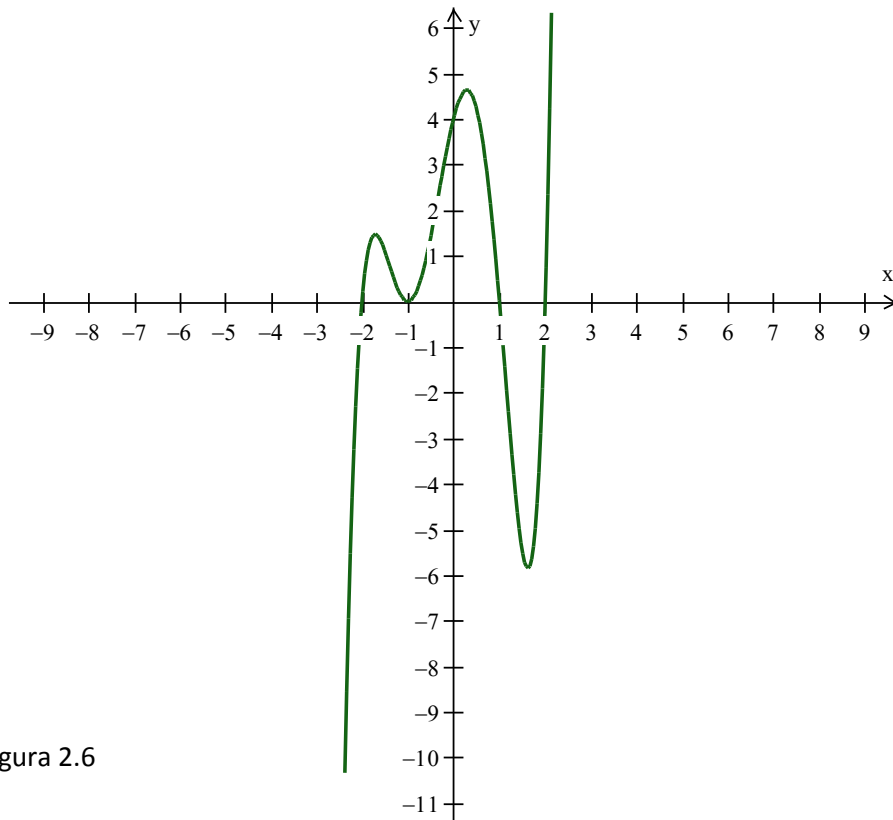


Figura 2.6

d) $\mathcal{P}(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^2$

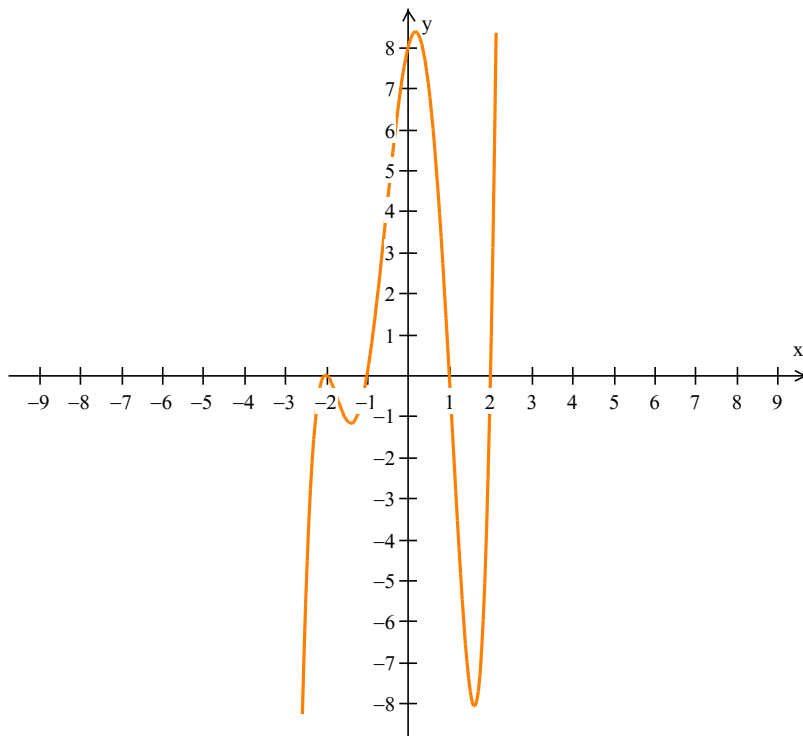


Figura 2.7

e) $\mathcal{P}(x) = (x - 1)^3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

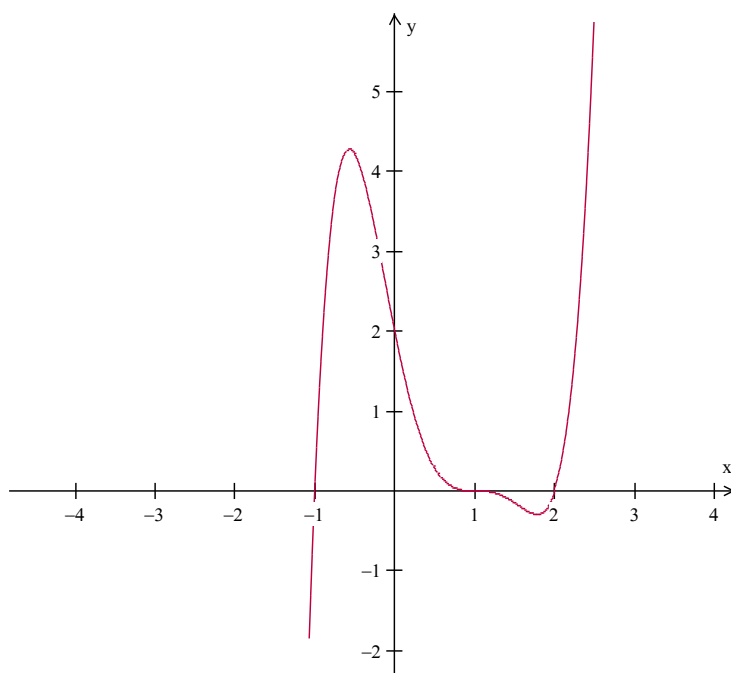


Figura 2.8

f) $\mathcal{P}(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^3 \cdot (x + 1)$

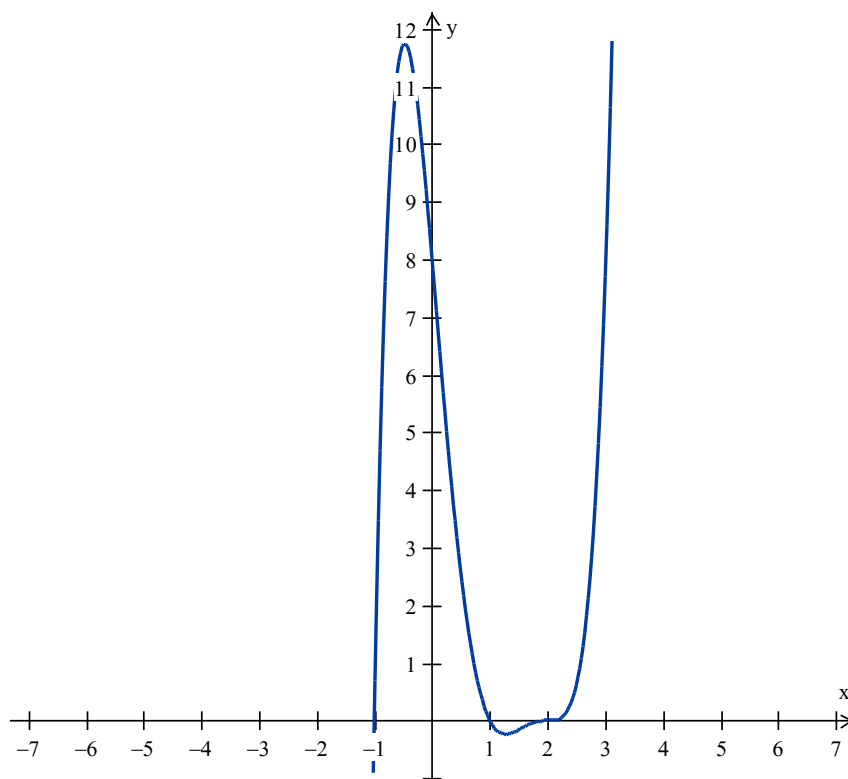


Figura 2.9

g) $\mathcal{P}(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^3$

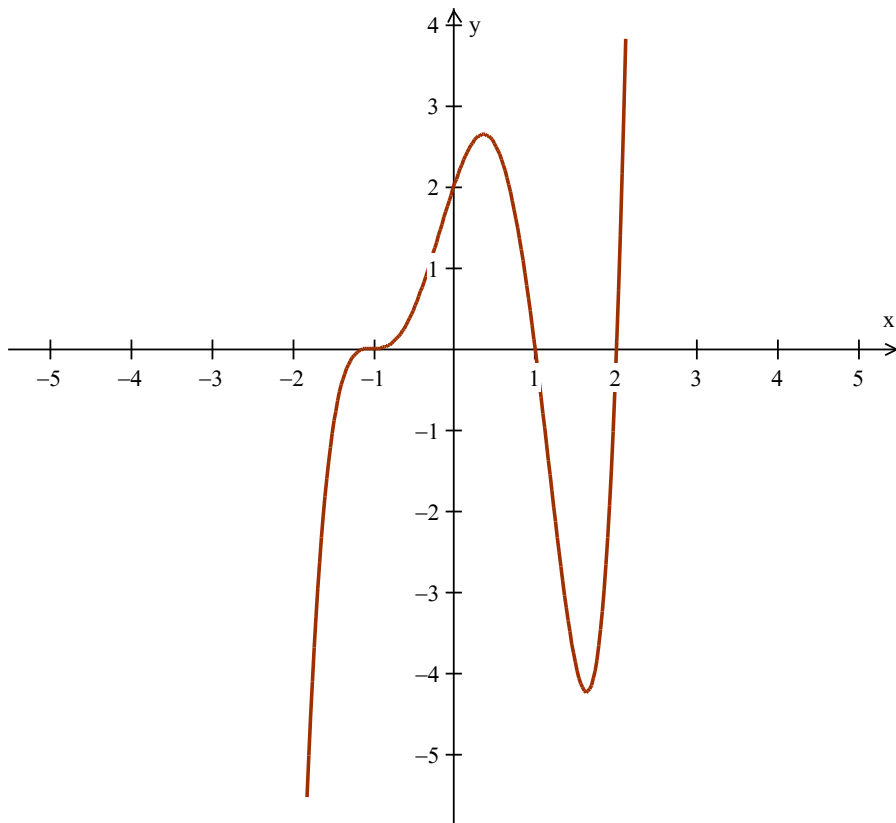


Figura 2.10

h) $\mathcal{P}(x) = (x - 1)^4 \cdot (x - 2)$

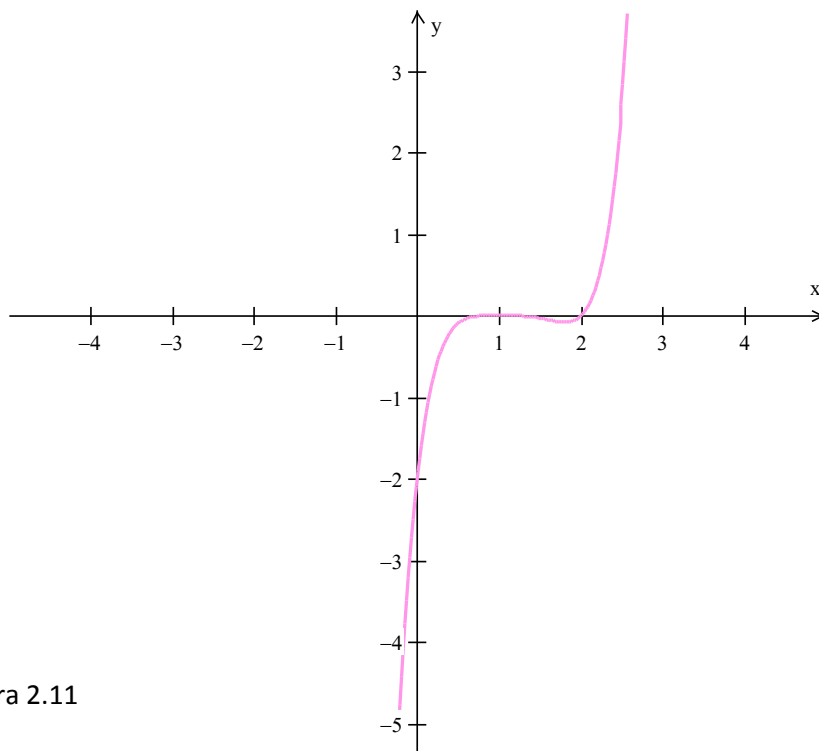


Figura 2.11

i) $\mathcal{P}(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^4$

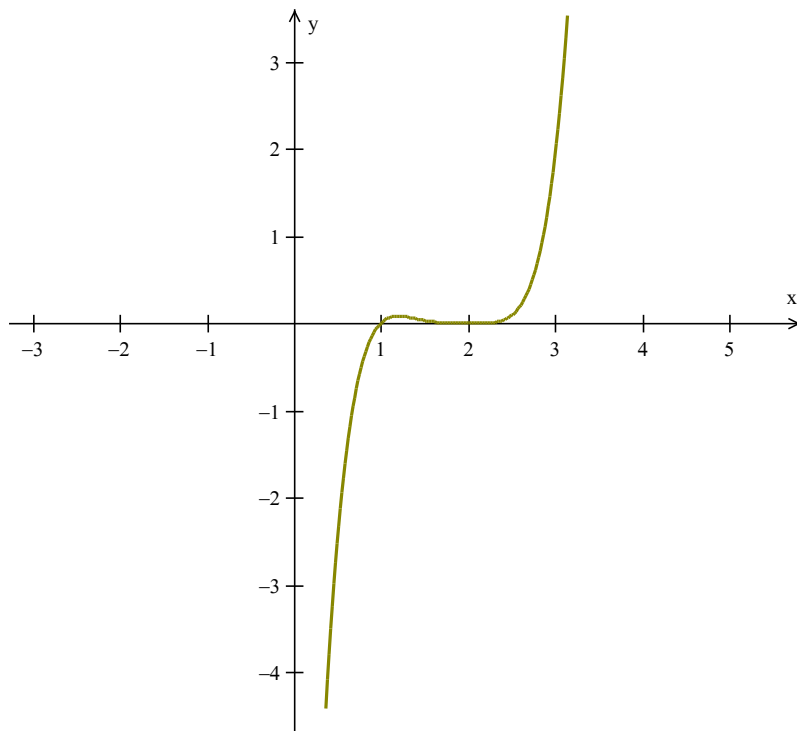


Figura 2.12

j) $\mathcal{P}(x) = (x - 1)^3 \cdot (x - 2)^2$

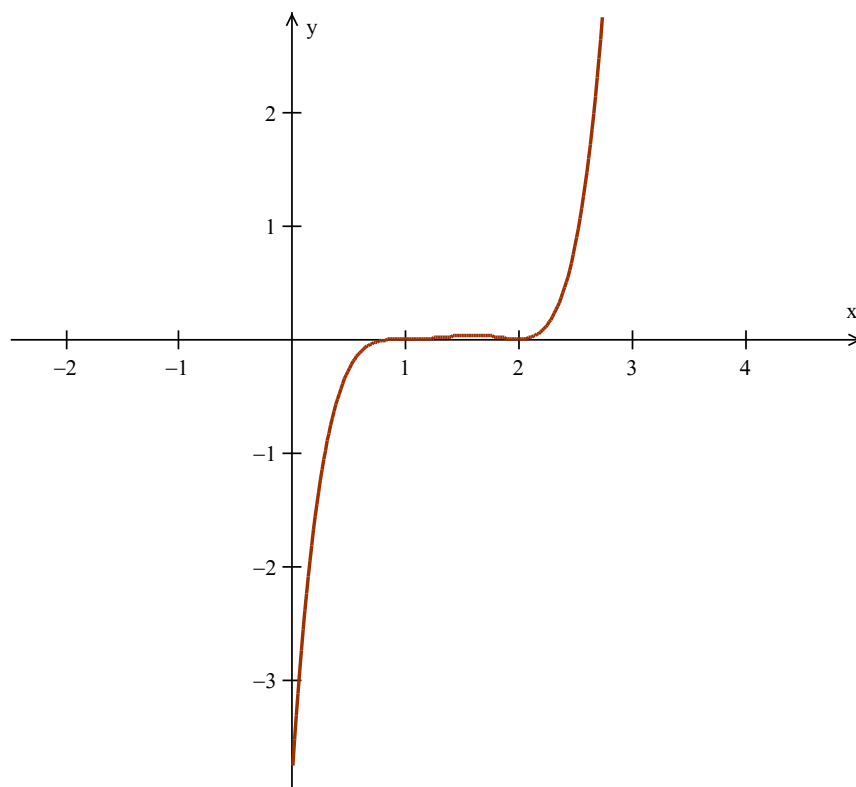


Figura 2.13

k) $\mathcal{P}(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^3$

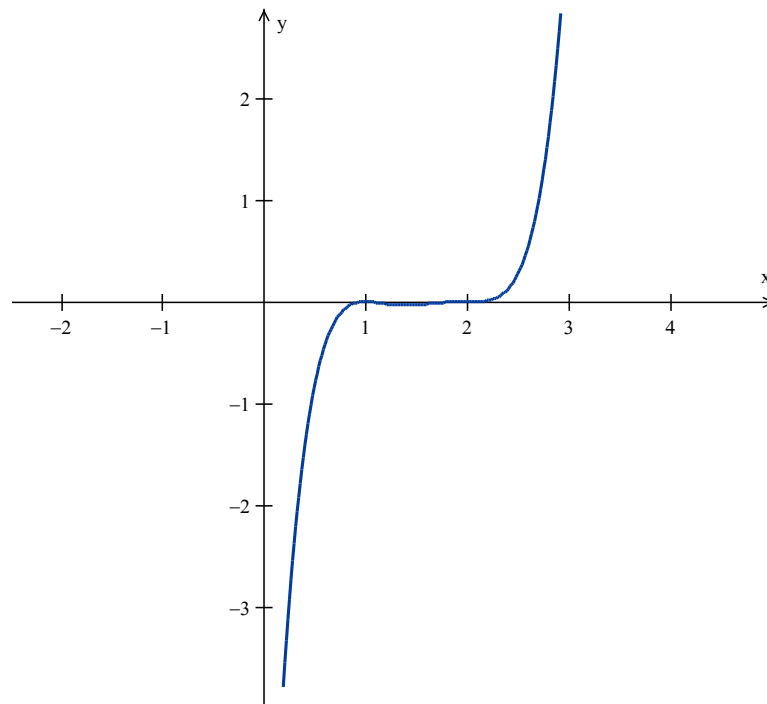


Figura 2.14

Em todos esses casos devemos lembrar que ao multiplicarmos \mathcal{P} por um inteiro $m < 0$, obtemos um polinômio com coeficiente líder negativo e o seu gráfico é obtido por uma reflexão em torno do eixo OX .

Vejamos, ainda, algumas funções de grau 5 em que algumas raízes são complexas não reais.

l) $\mathcal{P}(x) = (x^2 + 1) \cdot (x - 2)^3$

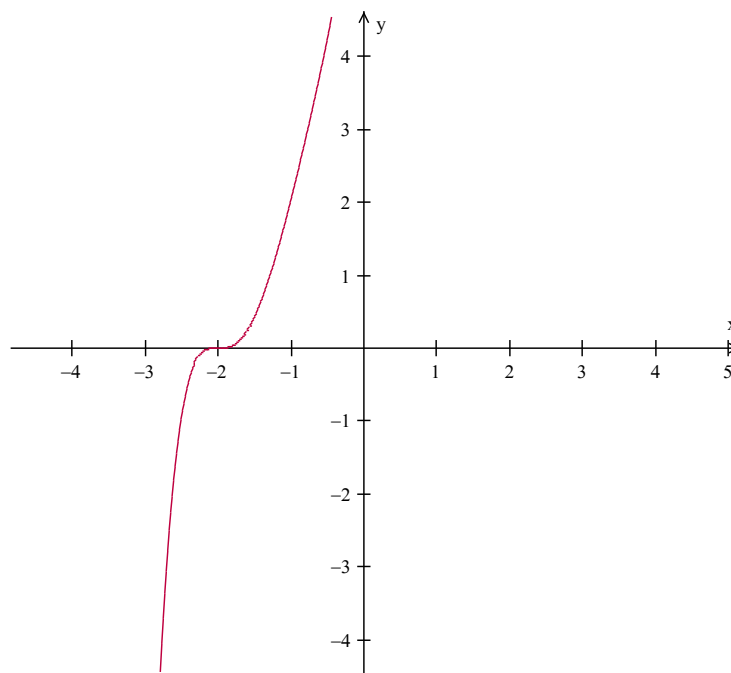


Figura 2.15

m) $\mathcal{P}(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot (x - 2)$

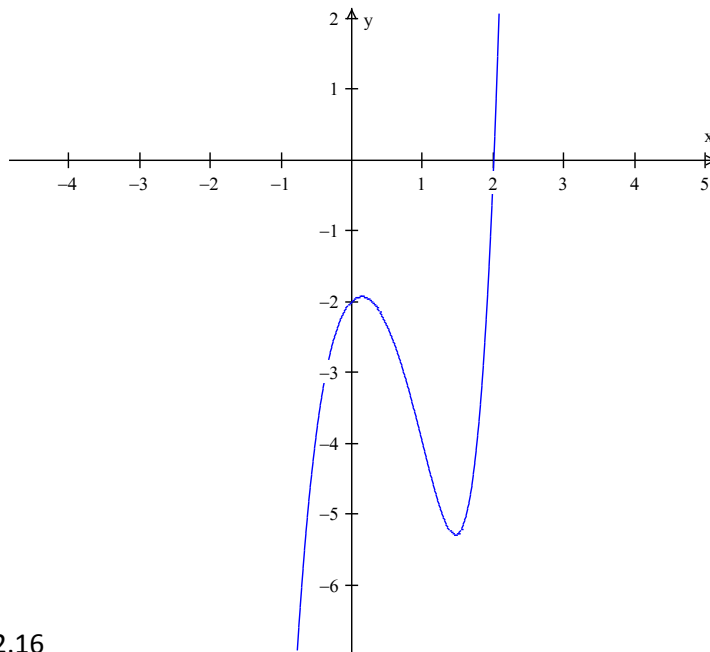


Figura 2.16

Apesar da não generalização, tal qual fizemos com as funções da forma $\mathcal{P}(x) = a_n(x - r_n)^n$, esclarecemos que todos os gráficos acima podem ser obtidos pelo procedimento padrão segundo os passos seguintes:

- Cálculo dos limites infinitos;
- Análise do sinal da função polinomial $\mathcal{P}(x)$;
- Determinação dos pontos críticos de $\mathcal{P}(x)$;
- Análise do sinal de $\mathcal{P}'(x)$ para determinação dos intervalos de crescimento e decréscimo da função;
- Análise do sinal de $\mathcal{P}''(x)$ para determinação dos intervalos em que a concavidade do gráfico da função é para cima ou para baixo.

Quanto ao desenho dos gráficos desta secção, usamos o software *Winplot* inserindo as equações fornecidas.

Capítulo 3

Discriminante para polinômios do grau n .

Seguindo a ordem dos conteúdos de matemática apresentados em nossas escolas, é ao final do ensino fundamental que os alunos têm a oportunidade de seu primeiro contato com o discriminante que, para muitos, trata-se apenas de um número (o *delta*) que será aplicado na *fórmula de Bhaskara* para a resolução de uma equação de grau 2.

Nesta parte do trabalho vamos apresentar a definição formal para os discriminantes das equações polinomiais de grau n e apresentar, especificamente, o discriminante para um polinômio de grau três. Finalizamos o capítulo com a relação entre a natureza das raízes e o sinal do discriminante.

3.1. Definição

Seja $P \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ de grau $n \geq 2$. Sejam x_i as suas n raízes complexas. Chamamos de discriminante do polinômio $P(x)$, e representamos pela letra maiúscula grega Δ (delta), a expressão

$$\Delta = (-1)^n \prod_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^n (x_i - x_j)^2$$

Portanto, para $n = 3$, temos

$$\Delta = (-1)^3 \prod_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^3 (x_i - x_j)^2 = (-1)^3 \cdot (x_3 - x_2)^2 \cdot (x_3 - x_1)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2$$

E, daqui por diante vamos nos ater aos polinômios de grau 3.

3.2. Relação entre a natureza das raízes e o sinal do discriminante

Abordagem algébrica

Como vimos anteriormente, todo polinômio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grau $n = 3$ tem três raízes. Estas raízes podem ser:

1. Uma raiz real tripla x_1 (de multiplicidade 3).
2. Uma raiz real dupla x_1 (de multiplicidade 2) e uma raiz real simples x_2 , sendo $x_1 \neq x_2$.
3. Duas raízes complexas não reais conjugadas (distintas, portanto) e uma raiz real.
4. Três raízes reais distintas x_1, x_2, x_3 .

Neste item vamos fazer uma análise do que ocorre com o sinal do discriminante Δ em função da natureza das raízes do polinômio P . Mais precisamente, iremos verificar que se há raízes múltiplas, então $\Delta = 0$. Se há raízes complexas não reais, $\Delta > 0$. E, se há três raízes reais distintas, então $\Delta < 0$.

Vejamos, então, cada caso.

1º caso – O polinômio tem pelo menos duas raízes reais iguais:

Vê-se que nesse caso $x_i = x_j$ para algum par $i, j, i \neq j$, e, portanto,

$$\Delta = (-1)^3 \prod_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^3 (x_i - x_j)^2 = 0.$$

2º caso – O polinômio tem duas raízes complexas não reais:

Para este caso vamos tomar $x_1 = \alpha - \beta i$ e $x_2 = \alpha + \beta i$ e $x_3 = \gamma$ com α, β e $\gamma \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Dai que:

$$(x_2 - x_1)^2 = [(\alpha + \beta i) - (\alpha - \beta i)]^2 = [2\beta i]^2 = -4\beta^2$$

$$(x_3 - x_1)^2 = [\gamma - (\alpha - \beta i)]^2 = [(\gamma - \alpha) + \beta i]^2$$

$$(x_3 - x_2)^2 = [\gamma - (\alpha + \beta i)]^2 = [(\gamma - \alpha) - \beta i]^2.$$

Logo:

$$\Delta = (-1) \cdot [-4\beta^2] \cdot [(\gamma - \alpha) - \beta i]^2 \cdot [(\gamma - \alpha) + \beta i]^2.$$

Isso resulta em:

$$\Delta = 4\beta^2 \cdot \{[(\gamma - \alpha) - \beta i] \cdot [(\gamma - \alpha) + \beta i]\}^2 = 4\beta^2 \cdot \{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2\} > 0.$$

3º caso – O polinômio tem raízes reais distintas:

Vê-se que nesse caso

$$\Delta = (-1)^3 \prod_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^3 (x_i - x_j)^2 = (-1) \cdot (x_3 - x_2)^2 \cdot (x_3 - x_1)^2 \cdot (x_2 - x_1)^2 < 0$$

Dessa forma, podemos expressar esses resultados pelo seguinte teorema:

Teorema 1

Seja $P \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau 3, tal que

$$P = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ com } a_i \in \mathbb{R}, \text{ e } a_3 \neq 0.$$

Seja Δ o seu discriminante. Podemos afirmar que:

- Se P tem raízes múltiplas, então $\Delta = 0$.
- Se P tem três raízes reais distintas, então $\Delta < 0$.
- Se P tem duas raízes complexas não reais conjugadas e uma raiz real, então $\Delta > 0$.

Observação:

É imediato, da própria análise realizada, que são verdadeiras as seguintes afirmações, recíprocas das anteriores:

- Se $\Delta = 0$, então P tem raízes múltiplas.
- Se $\Delta < 0$, então P tem três raízes reais distintas.
- Se $\Delta > 0$, então P tem duas raízes complexas não reais conjugadas e uma raiz real.

Capítulo 4

Das equações cúbicas

Assim como no tópico anterior, estaremos fazendo um estudo das equações cúbicas. Para tanto, seguiremos um roteiro de estudo que culmina com uma análise da relação entre o discriminante da equação cúbica e suas raízes. Portanto, iniciamos com a apresentação da forma reduzida da equação cúbica. Em seguida expressamos o discriminante em termo dos coeficientes e damos continuidade com a construção do gráfico. É oportuno esclarecer que o gráfico da função cúbica na forma reduzida é uma transladação do gráfico da função cúbica na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

4.1. Forma reduzida da equação cúbica

A partir de uma equação cúbica, escrita na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, podemos obter a forma dita reduzida das equações polinomiais de grau 3.

Vejamos passo-a-passo:

1º) Inicialmente dividimos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ por a . Isso é possível, pois $a \neq 0$.

Então obtemos $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$;

2º) Tomemos $\frac{b}{a} = A$, $\frac{c}{a} = B$ e $\frac{d}{a} = C$ e temos: $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$.

Esta equação tem as mesmas raízes que a equação cúbica inicial $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

3º) Façamos $x = y + m$ e anulemos o termos de grau 2 da equação em y .

$$(y + m)^3 + A(y + m)^2 + B(y + m) + C = 0$$

$$y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3 + Ay^2 + 2Aym + Am^2 + By + Bm + C = 0$$

$$y^3 + (3m + A)y^2 + (3m^2 + 2Am + B)y + (m^3 + Am^2 + Bm + C) = 0$$

Então, com $m = -\frac{A}{3}$, anulamos o termo de grau 2 em y :

$$y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0$$

4º) Tomando $B - \frac{A^2}{3} = p$ e $\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C = q$ obtemos a equação reduzida:

$$\boxed{y^3 + py + q = 0}$$

Na qual o coeficiente do termo y^2 é zero.

Observe que, como fizemos $x = y + m$, as raízes x_i da equação original $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ são obtidas das raízes y_i da equação reduzida.

4.2. Expressão do discriminante em termo dos coeficientes

Seja o polinômio $P(x) = x^3 + px + q$. Considerando x_1, x_2 e x_3 suas raízes complexas, temos a seguinte igualdade:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + px + q.$$

Derivando os dois lados da igualdade, segue:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3) = 3x^2 + p.$$

Substituímos as raízes de $P(x)$ na última igualdade. Assim, obtemos:

$$P'(x_1): (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 3(x_1)^2 + p.$$

Isso implica que para $P'(x_1)$ temos: $\boxed{(-1)^2 (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) = 3(x_1)^2 + p}$

$$P'(x_2): (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) = 3(x_2)^2 + p$$

Isso implica que para $P'(x_2)$ temos: $\boxed{(-1)(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) = 3(x_2)^2 + p}$

Já para $P'(x_3)$ temos: $\boxed{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 3(x_3)^2 + p}$

Daí que o produto $P'(x_1) \times P'(x_2) \times P'(x_3)$ é igual a:

$$(-1)^3(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2 = [3(x_1)^2 + p] \times [3(x_2)^2 + p] \times [3(x_3)^2 + p]$$

Mas recordando o que vimos em 3.1, o discriminante para as equações de grau 3 é:

$$\Delta = (-1)^3(x_2 - x_1)^2(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2$$

Então, trocando o primeiro membro do que foi obtido no produto $P'(x_1) \times P'(x_2) \times P'(x_3)$ encontramos:

$$\Delta = [3(x_1)^2 + p] \times [3(x_2)^2 + p] \times [3(x_3)^2 + p]$$

$$\Delta = 27(x_1x_2x_3)^2 + 9p(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 3p^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + p^3$$

Temos as Relações de Girard para o polinômio $P(x) = x^3 + px + q$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 & \text{(I)} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p & \text{(II)} \\ x_1x_2x_3 = -q & \text{(III)} \end{cases}$$

Elevando (I), (II) e (III) ao quadrado encontramos as relações seguintes:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0 & \text{(IV)} \\ x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2(x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2) = p^2 & \text{(V)} \\ x_1^2x_2^2x_3^2 = q^2 \end{cases}$$

Substituindo (II) em (IV):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2p} \quad \text{(VI)}$$

Agora, substituindo (I) e (III) em (V):

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + 2(x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2) = p^2 \quad \Rightarrow$$

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = p^2 \quad \Rightarrow$$

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + 2(-q)(0) = p^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 = p^2} \quad (\text{VII})$$

Então, substituimos (III), (VI) e (VII) em Δ .

$$\Delta = 27(x_1 x_2 x_3)^2 + 9p(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) + 3p^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + p^3$$

$$\Delta = 27q^2 + 9p(p^2) + 3p^2(-2p) + p^3$$

$$\Delta = 27q^2 + 9p^3 - 6p^3 + p^3$$

Finalmente,

$$\boxed{\Delta = 27q^2 + 4p^3}$$

4.3. Gráfico das funções polinomiais cúbicas

Consideremos

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = x^3 + px + q \end{aligned}$$

Façamos um estudo elementar do gráfico de F , seguindo o roteiro usual já mencionado.

4.3.1. Crescimento

Primeiro temos que $F'(x) = 3x^2 + p$.

Observe que se $p \geq 0$, $F'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ real. Resulta que a função $F(x)$ é estritamente crescente em todo seu domínio \mathbb{R} .

Por outro lado, se $p < 0$, $-p = |p|$. Assim, os pontos críticos de F são soluções da equação quadrática $F'(x) = 3x^2 + p = 0$:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{|p|}{3}} \quad \text{e} \quad x_2 = +\sqrt{\frac{|p|}{3}}.$$

Teremos, então, que:

- $F'(x) > 0$, para $x < -\sqrt{\frac{|p|}{3}}$ ou $x > \sqrt{\frac{|p|}{3}}$
- $F'(x) < 0$, no intervalo $-\sqrt{\frac{|p|}{3}} < x < \sqrt{\frac{|p|}{3}}$.

Segue então que:

- $F(x)$ é crescente nos intervalos abertos $\left] -\infty, -\sqrt{\frac{|p|}{3}} \right[$ e $\left] +\sqrt{\frac{|p|}{3}}, +\infty \right[$.
- $F(x)$ é decrescente no intervalo aberto $\left] -\sqrt{\frac{|p|}{3}}, \sqrt{\frac{|p|}{3}} \right[$.

4.3.2. Pontos de máximo e mínimo

Observe que para $p \geq 0$ não haverá ponto máximo nem ponto mínimo, pois a função é estritamente crescente em todo seu domínio.

Para $p < 0$, tomemos a segunda derivada de $F(x)$, que é dada por $F''(x) = 6x$.

Avaliando $F''(x)$ em $x_1 = -\sqrt{\frac{|p|}{3}}$, obtemos:

$$F''(x_1) = -6\sqrt{\frac{|p|}{3}} < 0$$

e, portanto, x_1 é um ponto de máximo local da função F .

Observe que no ponto de máximo o valor atingido é

$$F\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) + q$$

$$F\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)^2 \left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) - p\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q$$

$$F\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = -\frac{|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + |p|\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q$$

$$F\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = \frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q.$$

Avaliando, agora, $F''(x)$ em $x_2 = +\sqrt{\frac{|p|}{3}}$, obtemos:

$$F''(x_2) = 6\sqrt{\frac{|p|}{3}} > 0$$

logo, x_2 é um ponto de mínimo local da função F . Dai que o valor atingido no ponto de mínimo é:

$$F\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)^3 + p\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q$$

$$F\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right)^2 \sqrt{\frac{|p|}{3}} + p\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q$$

$$F\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = \frac{|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} - |p|\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q$$

$$F\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}\right) = -\frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q.$$

Destaquemos que os pontos $\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}, \frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}, -\frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q\right)$ do gráfico de F são importantes para o traçado a seguir.

4.3.3. Ponto de inflexão e concavidade

Os possíveis pontos de inflexão da função F são obtidos da equação $F''(x) = 6x = 0$. Então há um único ponto de inflexão, que é o ponto $x = 0$. Neste ponto o valor de F é $F(0) = q$.

Façamos um estudo de sinal da função $F''(x) = 6x$.

Percebemos que quando $x < 0$ a segunda derivada de $F(x)$ é negativa ($F''(x) < 0$). Portanto, no intervalo $]-\infty, 0[$ a curva gráfico de $F(x)$ tem concavidade voltada para baixo.

No entanto, temos $F''(x) > 0$ quando $x > 0$ e segue que no intervalo $]0, +\infty[$ a curva gráfico de $F(x)$ tem concavidade voltada para cima.

Temos $F(0) = q$. O ponto $(0, q)$ do gráfico de F é essencial para realizar o traçado do gráfico (veja item 4.3.5).

4.3.4. Comportamento no infinito

Façamos o limite de $F(x)$ quando x tende ao infinito. Lembramos que estamos fazendo um estudo da função $y = x^3 + px + q$ para a construção de seu gráfico. Nesse caso o coeficiente do termo de maior grau é positivo. Vamos, entretanto, também analisar o caso em que o coeficiente do termo de maior grau é negativo:

1ª situação: coeficiente do termo de maior grau sendo positivo.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + px + q) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}\right) = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + px + q) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}\right) = -\infty.$

2ª situação: coeficiente do termo de maior grau sendo negativo.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + px + q) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}\right) = -\infty.$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + px + q) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} \right) = +\infty.$

Observe que se tratando de uma função polinomial não há nenhum $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ para os quais temos:

- $\lim_{x \rightarrow (x_0)^-} F(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow (x_0)^+} F(x) = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow (x_0)^-} F(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow (x_0)^+} F(x) = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = y_0$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = y_0.$

Logo não há assíntotas verticais nem horizontais no traçado do gráfico.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F'(x) = +\infty$, o gráfico de F não apresenta assíntotas oblíquas.

4.3.5. Traçado do gráfico

Vamos agora dar início ao traçado do gráfico da função polinomial cúbica a partir das informações já obtidas. Então, retomemos a função F definida abaixo.

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = x^3 + px + q \end{aligned}$$

Para executar o traçado da curva gráfico de F iniciamos com o desenho do eixo OY e marcando nele o ponto onde ocorre inflexão, $(0, q)$. Daí por diante precisamos distinguir os casos $p > 0$, $p < 0$ e $p = 0$, pois a forma da curva a esboçar varia em conformidade com estes casos.

1º caso: $p > 0$.

Conforme visto nos itens anteriores, essa função é estritamente crescente, não tem máximos ou mínimos, e tem $x = 0$ como único ponto de inflexão. Observe, ainda, que neste ponto de inflexão a derivada $F'(0) = p$. Logo a tangente ao gráfico de F neste ponto de inflexão tem declividade positiva, pois $p > 0$. Portanto, o gráfico da função polinomial F é uma curva como a representada na figura abaixo.

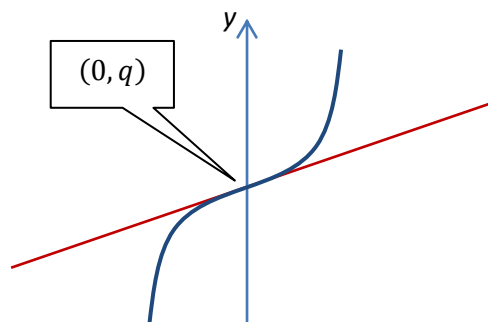


Figura 4.1

2º caso: $p < 0$.

Se $p < 0$, como visto no item 4.3.2, há pontos de máximo e mínimo locais, que são as abscissas dos pontos do gráfico de F cujas coordenadas são, respectivamente, $\left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}, \frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}, -\frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q\right)$. Pelo item 4.3.3, o ponto de inflexão tem $(0, q)$ como suas coordenadas no gráfico. Além disso, o gráfico da função polinomial F tem concavidade voltada para baixo quando $x < 0$ e concavidade voltada para cima quando $x > 0$. Para iniciar o traçado do gráfico de F , desenhamos o eixo vertical dos y . Reunindo as informações já obtidas, e sem traçar o eixo horizontal, temos a figura logo abaixo.

Logo:

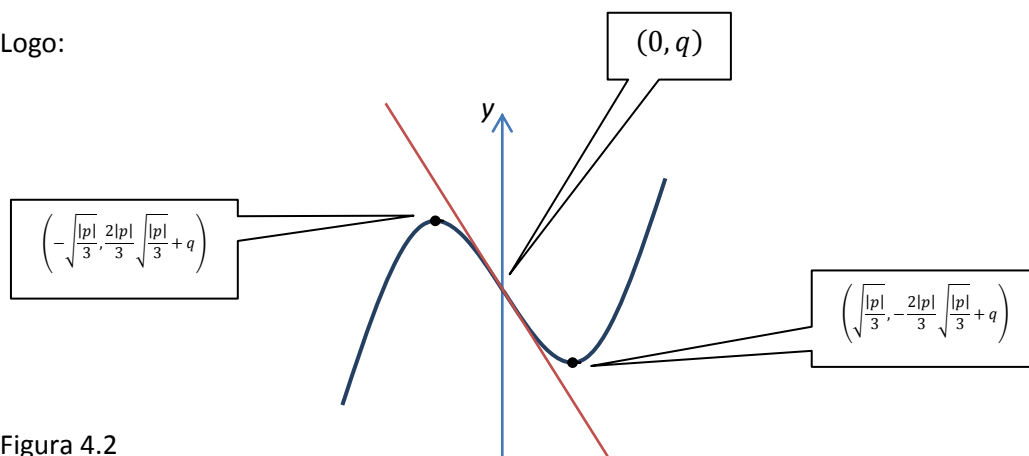


Figura 4.2

É importante observar que a forma da curva, e as coordenadas dos pontos assinalados são como se apresentam neste desenho, independentemente dos valores que possam ter os números reais q e p , desde seja $p < 0$. A esta altura passamos a compreender que a mudança de variável que produziu a forma reduzida da equação polinomial inicial de grau 3 trasladou o eixo vertical OY para que ele passasse pelo ponto onde a curva muda de concavidade (o ponto cuja abscissa é o ponto de inflexão da função F).

3º caso: $p = 0$.

Assim como ocorre para $p > 0$, quando $p = 0$ a função é estritamente crescente, não tem máximos ou mínimos, e tem $x = 0$ como único ponto de inflexão. Também temos que em seu ponto de inflexão a derivada $F'(0) = p$. Logo a tangente ao gráfico de F neste ponto de inflexão tem declividade nula, pois $p = 0$. Portanto, o gráfico da função polinomial F é uma curva como a representada na figura abaixo.

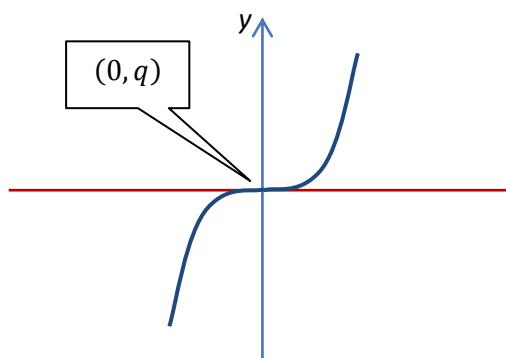


Figura 4.3

Observe que nos casos em que $p \geq 0$ para a equação $x^3 + px + q = 0$, independente da multiplicidade, haverá uma única raiz real. Vamos demonstrar essa unicidade logo a seguir:

Já vimos no item 2.3 que toda função de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real. Para mostrar a unicidade desta raiz quando $p > 0$ para a equação $x^3 + px + q = 0$, vamos usar o Teorema de Rolle que diz:

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um número $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Suponhamos que essa raiz não seja única. Tomamos $x_1 < x_2$ como as raízes da função $f(x) = x^3 + px + q$ na qual $p > 0$. Então $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = 0$. Mas ocorre que $f'(x) = 3x^2 + p$ e $p > 0$. Logo $f'(x) > 0$ para todo \mathbb{R} . Daí que é um absurdo considerar a existência de duas raízes reais distintas, pois contradiz a afirmação do teorema anunciado.

4.4. A equação $x^3 + px + q = 0$ observada no gráfico da função polinomial F

Voltemos ao estudo das raízes da equação $x^3 + px + q = 0$.

Como foi mencionado no item 2.4, os pontos do eixo OX que pertencem ao gráfico da função F são soluções da equação $F(x) = 0$, ou seja, suas raízes.

Na secção anterior, detectamos alguns fatos sobre a geometria da curva gráfico da função polinomial F onde,

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } F(x) = x^3 + px + q \text{ e } p, q \in \mathbb{R}.$$

- Vimos como o eixo OY se posiciona em relação à curva gráfico da função F , passando pelo ponto $(0, q)$ do plano.
- Vimos que a forma da curva gráfico da função F depende essencialmente de termos $p > 0$, $p < 0$ ou $p = 0$.

Podemos então intuir, observando estes gráficos, que o número e a multiplicidade das raízes reais da equação $x^3 + px + q = 0$ serão determinados pela combinação dos seguintes fatores:

- Pela forma da curva do gráfico de F a qual depende de ser $p > 0$, $p < 0$ ou $p = 0$.
- De como o eixo OX, traçado perpendicularmente ao eixo OY, intercepta a curva gráfico da função F .

Em suma:

- A.** Quando $p > 0$, vemos que qualquer que seja a distância do eixo OX em relação à q , só há um ponto de intersecção. Disso concluímos que, neste caso, a equação terá uma única solução real.

Exemplos:

1A) $F(x) = x^3 + 3x + 4$

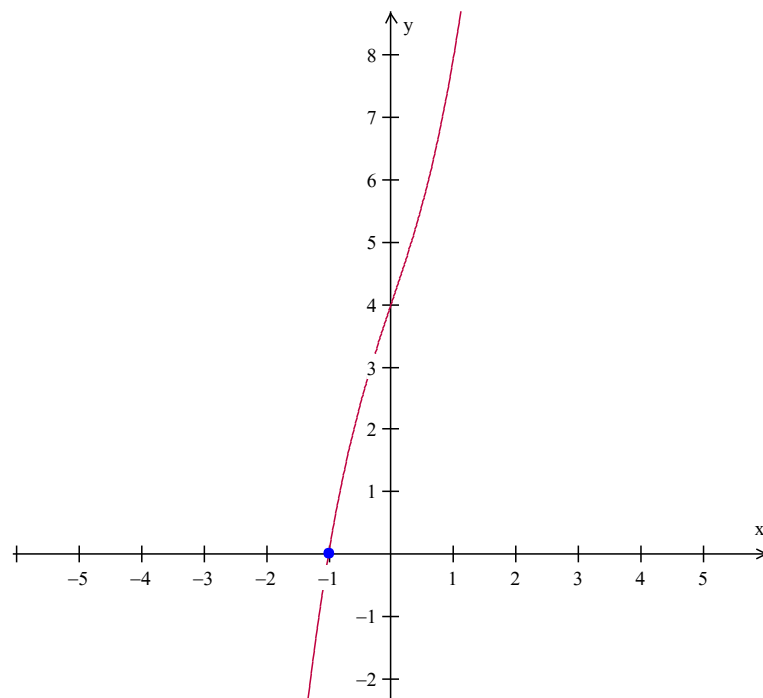


Figura 4.4

2A) $F(x) = x^3 + 3x$

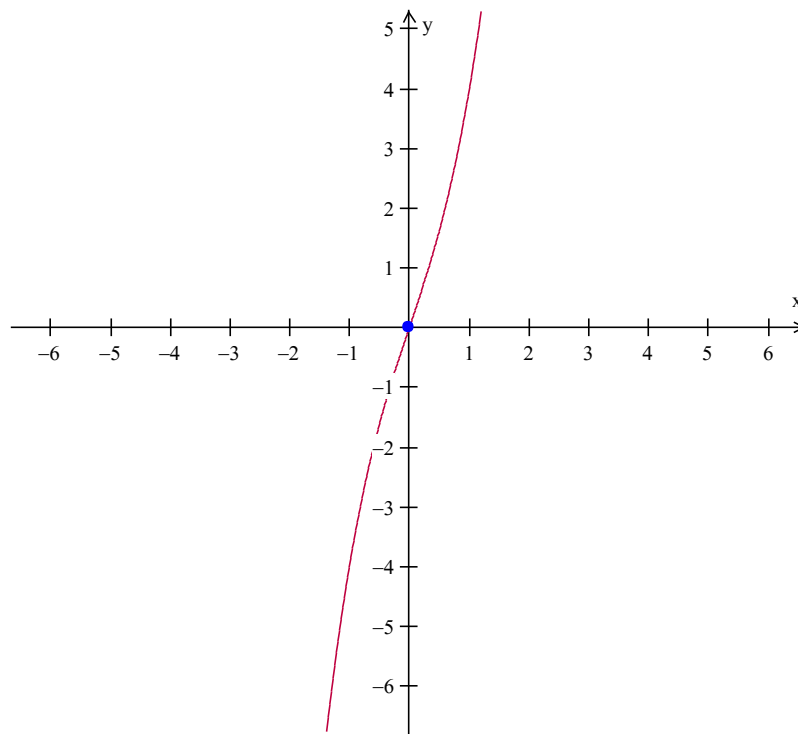


Figura 4.5

3A) $F(x) = x^3 + 3x - 4$

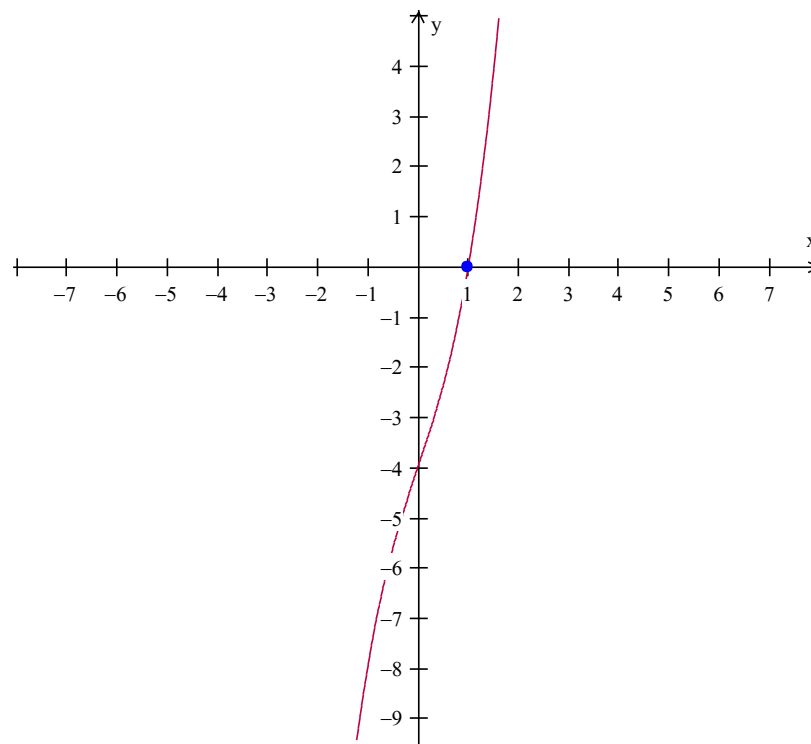


Figura 4.6

B. No caso $p < 0$, poderemos ter uma, duas ou três soluções reais distintas, como observado nos desenhos abaixo.

Exemplos:

1B) $F(x) = x^3 - 3x + 4$

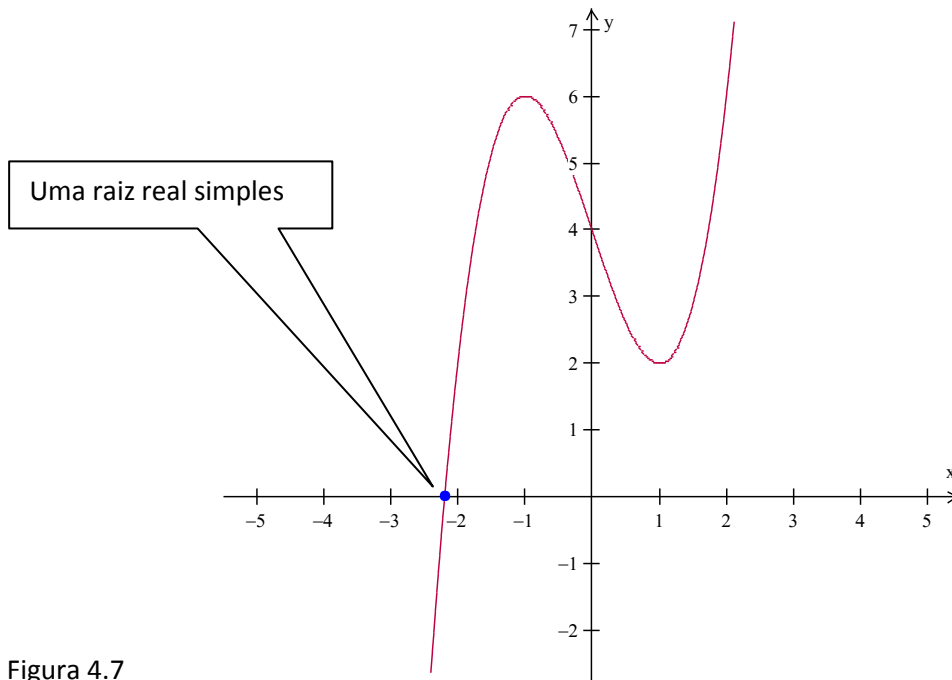


Figura 4.7

2B) $F(x) = x^3 - 3x + 2$

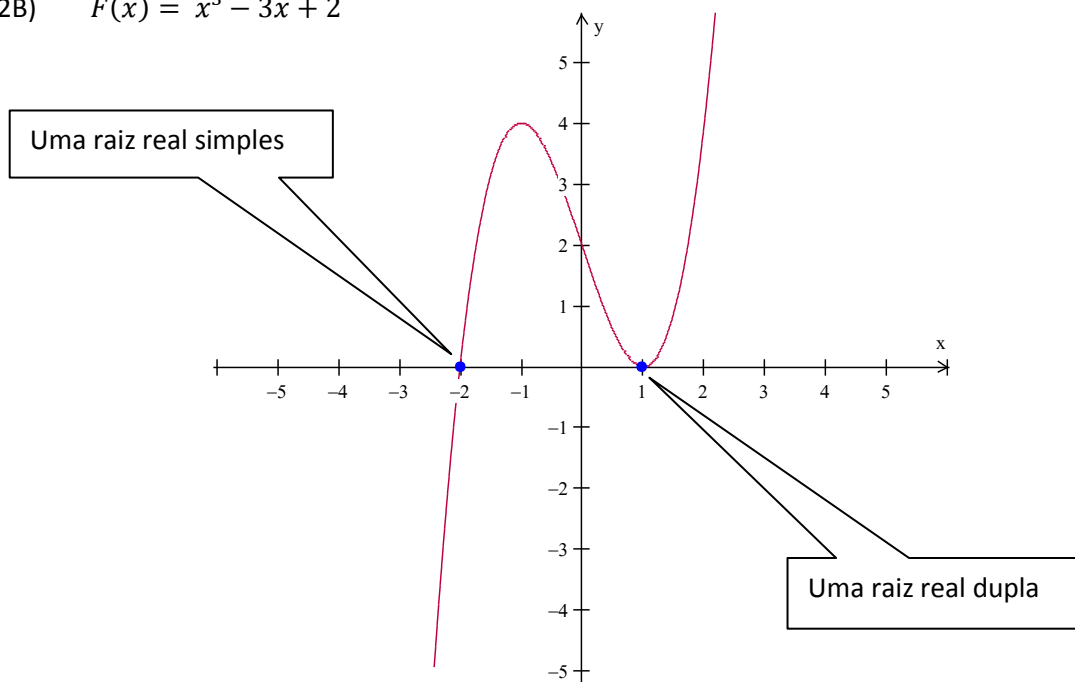


Figura 4.8

3B) $F(x) = x^3 - 3x$

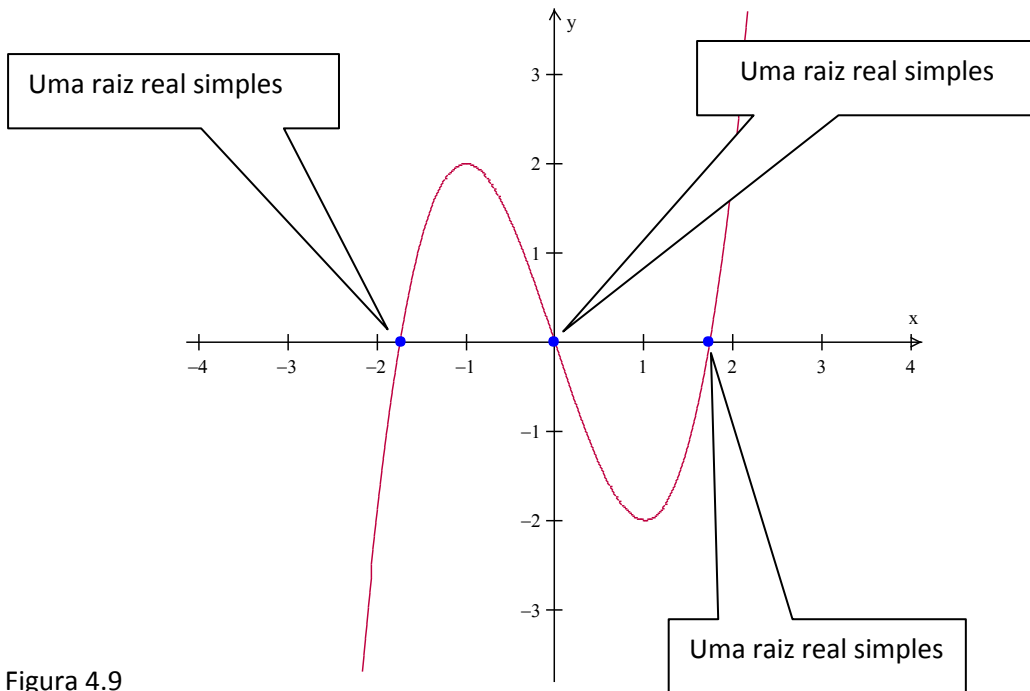


Figura 4.9

4B) $F(x) = x^3 - 3x - 2$

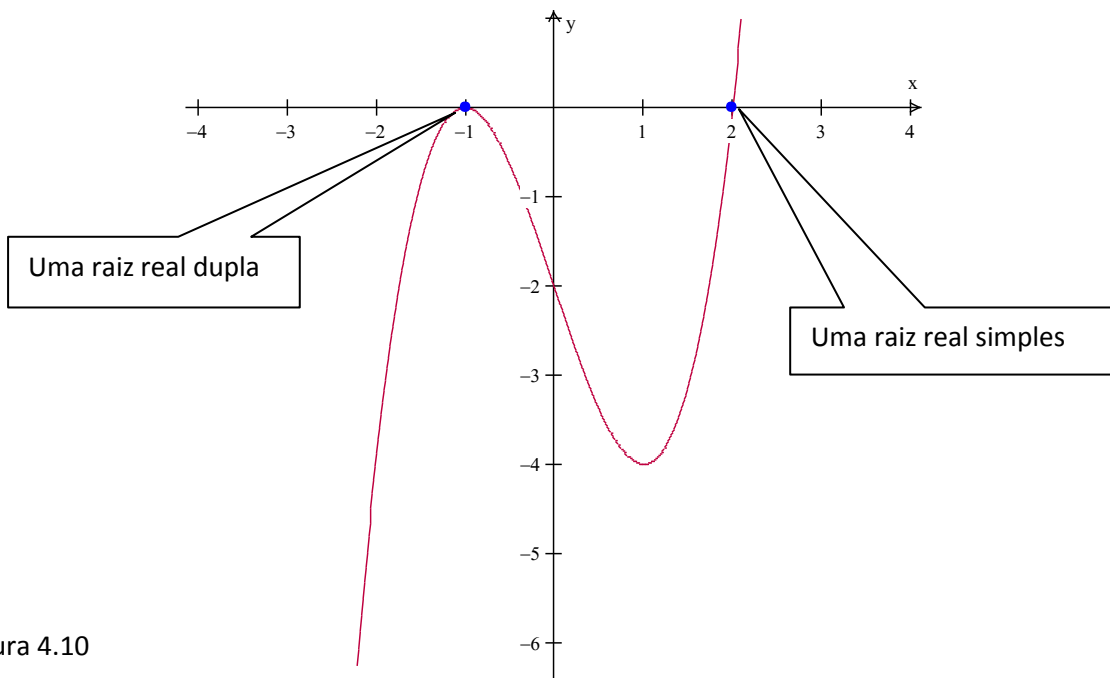


Figura 4.10

5B) $F(x) = x^3 - 3x - 4$

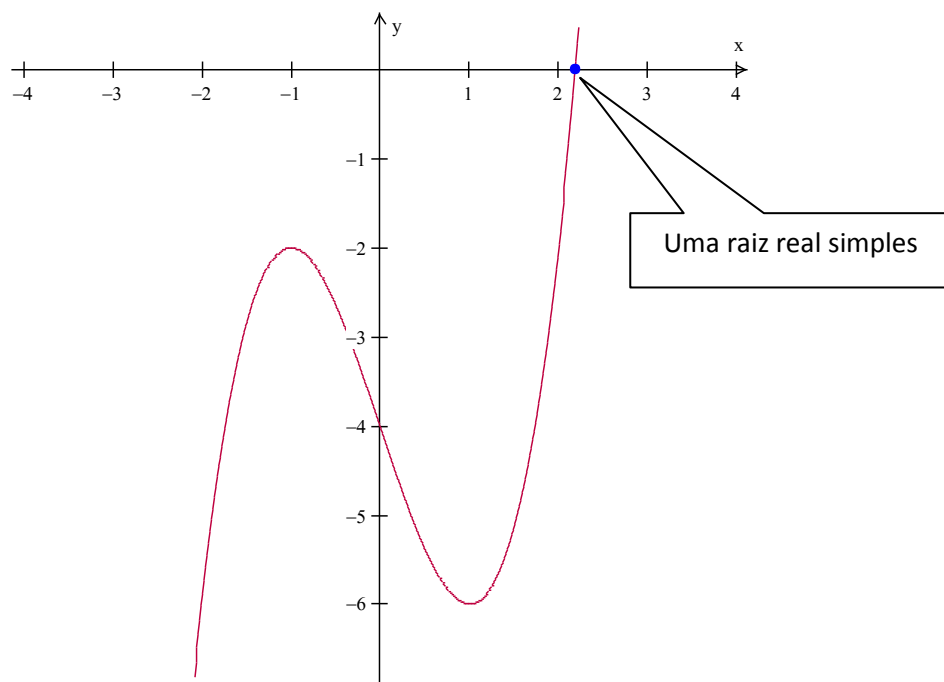


Figura 4.11

- C. Por fim, quando $p = 0$ há sempre uma única solução. No entanto, há uma situação ($q = 0$) em que a solução é uma raiz de multiplicidade 3.

Exemplos:

1C) $F(x) = x^3 + 4$

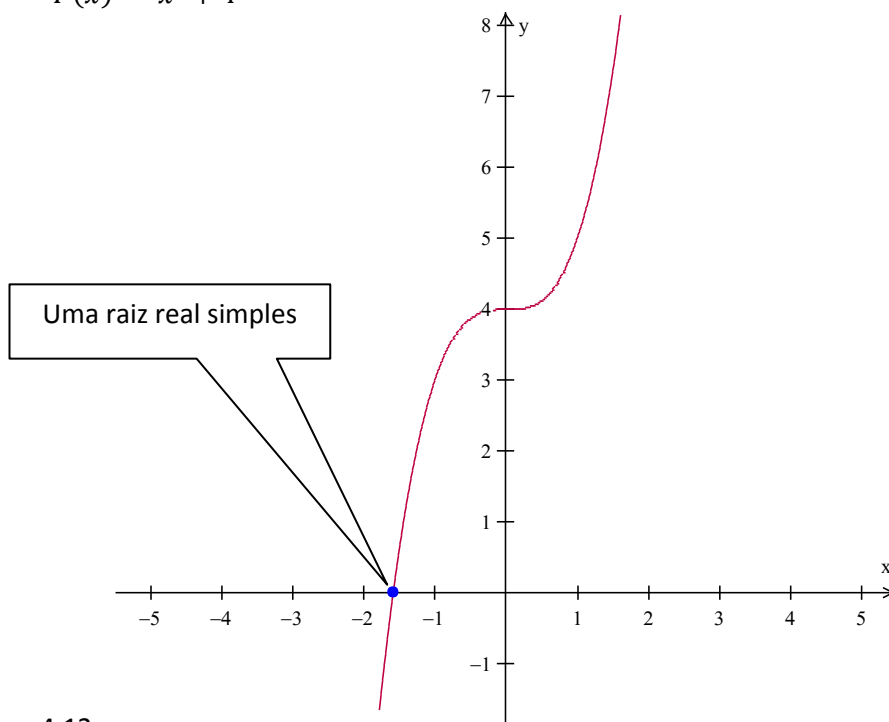


Figura 4.12

2C) $F(x) = x^3$

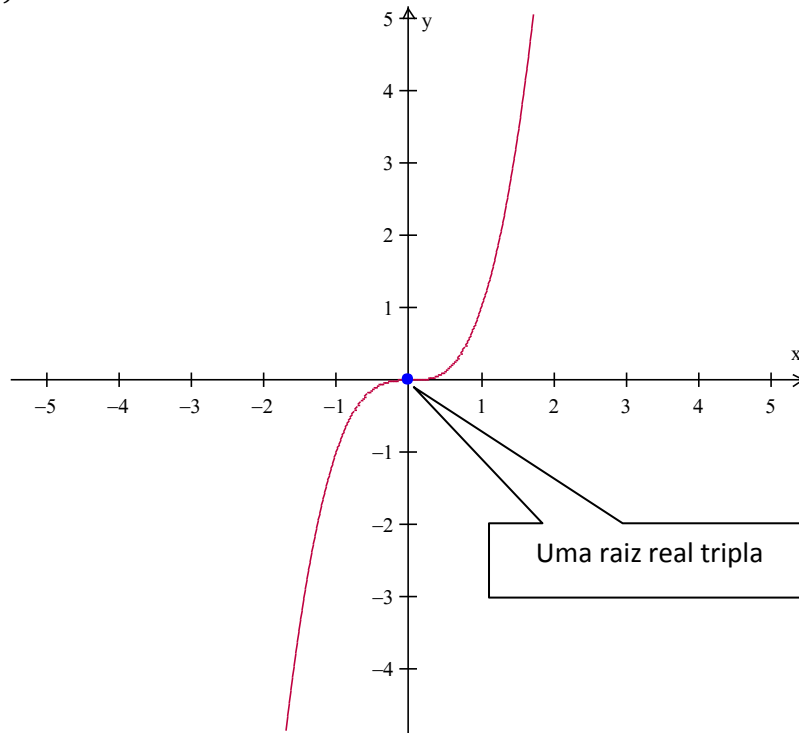


Figura 4.13

3C) $F(x) = x^3 - 4$

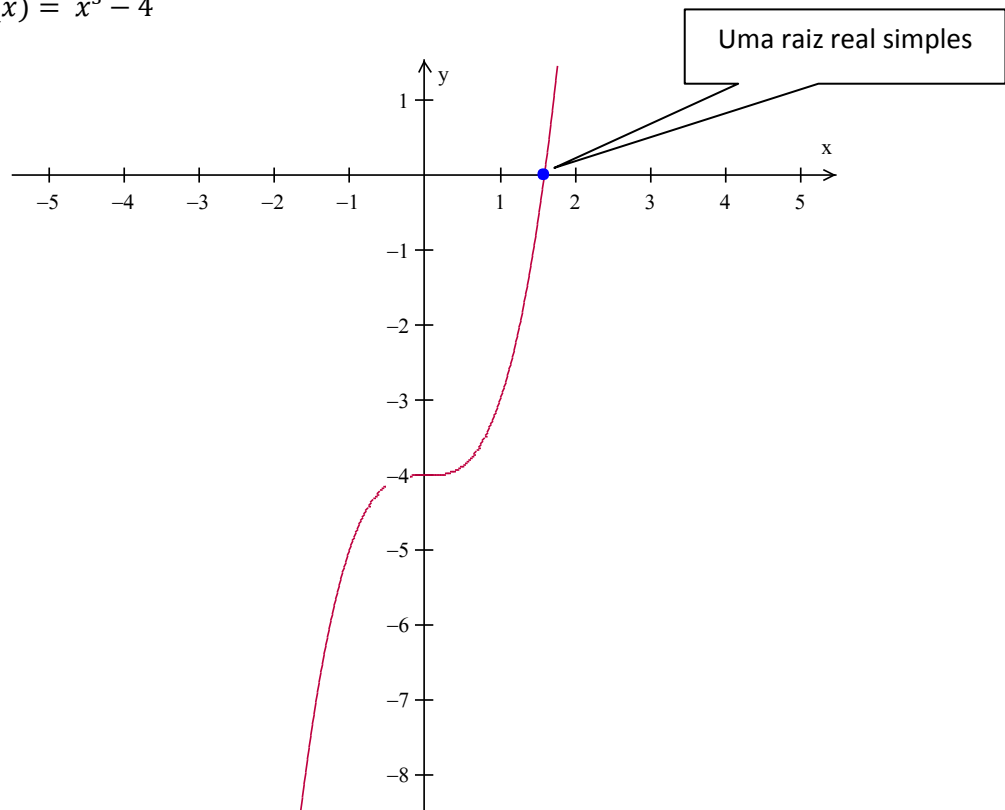


Figura 4.14

4.5. Relação entre a natureza das raízes e o sinal do discriminante

Abordagem geométrica

O que vimos no item anterior sugere que a geometria da cúbica $y = x^3 + px + q$ (seu formato, sua posição relativamente aos eixos coordenados) deve ser conectada ao seu discriminante já que ambos nos falam do número e da natureza das raízes da equação cúbica. É esta conexão é o principal objetivo dessa dissertação.

1. Suponhamos inicialmente que $p < 0$ na equação $x^3 + px + q = 0$.

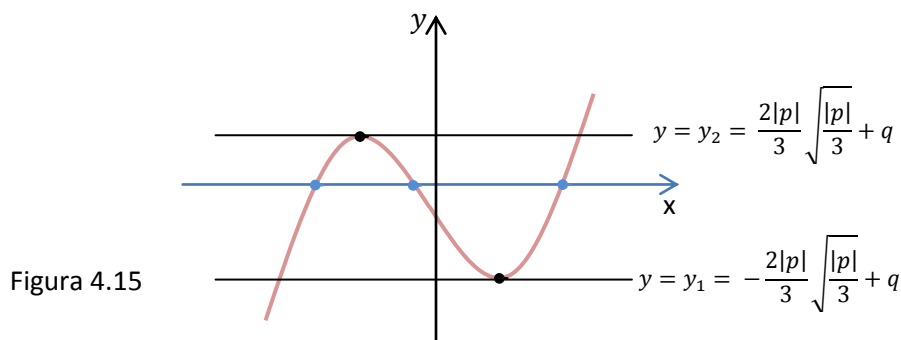
Já observamos no item 4.3.2 que quando $p < 0$ a função $f(x) = x^3 + px + q$ terá seus mínimo e máximo locais nas abscissas dos pontos

$$\left(\sqrt{\frac{|p|}{3}}, -\frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q \right) \quad \text{e} \quad \left(-\sqrt{\frac{|p|}{3}}, \frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q \right).$$

Tomemos, então

$$y_1 = -\frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q.$$

Consideremos as retas horizontais l_1 e l_2 definidas respectivamente pelas equações cartesianas $y = y_1$ e $y = y_2$.



Daí que a equação $x^3 + px + q = 0$ terá três raízes reais e distintas se, e somente se, o eixo OX estiver entre as retas l_1 e l_2 , ou seja, se $y_1 < 0 < y_2$. Então,

$$-\frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q < 0 < \frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q.$$

Adicionando-se $(-q)$ à desigualdade acima, obtemos:

$$-\frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} < -q < \frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}}$$

Mas a desigualdade obtida é equivalente a

$$|-q| < \frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}}$$

Elevando ao quadrado

$$|-q|^2 < \frac{4|p|^2}{9} \times \frac{|p|}{3}$$

Dai que obtemos

$$|q|^2 < \frac{4|p|^3}{27}$$

Ou seja,

$$27|q|^2 < 4|p|^3$$

Como $-p = |p|$, então $-p^3 = |p|^3$. Então, da última desigualdade, obtemos:

$$27q^2 < -4p^3$$

Ou ainda,

$$4p^3 + 27q^2 < 0$$

Por outro lado, vemos que se $4p^3 + 27q^2 < 0$, necessariamente teremos $p < 0$. Assim, como $4p^3 + 27q^2 = \Delta$, encontramos o seguinte resultado:

Se a equação $x^3 + px + q = 0$ tem três raízes reais distintas, então $\Delta < 0$.

Ainda supondo $p < 0$, se o eixo OX coincidir com uma das retas horizontais l_1 ou l_2 , ou seja, se $y_1 = 0$ ou $y_2 = 0$, a equação $x^3 + px + q = 0$ terá três raízes reais, sendo uma simples e uma dupla. Vejamos:

Se $y_2 = 0$

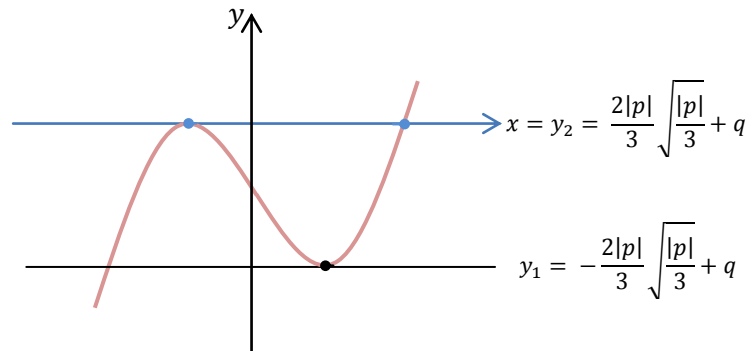


Figura 4.16

Se $y_1 = 0$

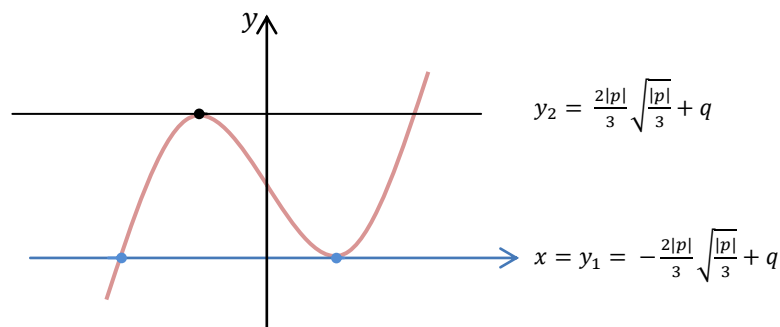


Figura 4.17

Se $y_1 = -\frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}} + q = 0$, temos $q = \frac{2|p|}{3}\sqrt{\frac{|p|}{3}}$.

Elevando a última igualdade ao quadrado, vamos obter:

$$q^2 = \frac{4|p|^2}{9} \times \frac{|p|}{3} \quad \Rightarrow \quad q^2 = \frac{4|p|^3}{27}$$

Como $-p = |p|$, então $-p^3 = |p|^3$. Logo:

$$27q^2 = -4p^3 \quad \Rightarrow \quad 4p^3 + 27q^2 = 0$$

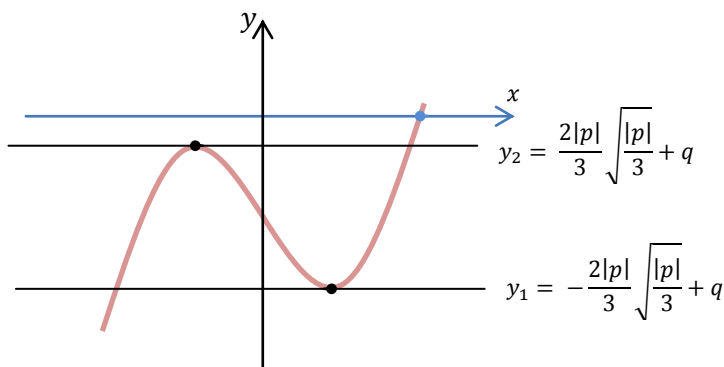
Por outro lado, vemos que se $4p^3 + 27q^2 = 0$, necessariamente teremos $p < 0$. Assim, como $4p^3 + 27q^2 = \Delta$, encontramos o seguinte resultado:

Se a equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma raiz real simples e uma outra raiz real dupla, então $\Delta = 0$.

Por fim, se o eixo OX estiver acima do valor de máximo local ou abaixo do valor de mínimo local, a função $f(x) = x^3 + px + q$ terá uma única raiz real (e resulta que as duas raízes restantes são complexas conjugadas).

$$y_1 < y_2 < 0$$

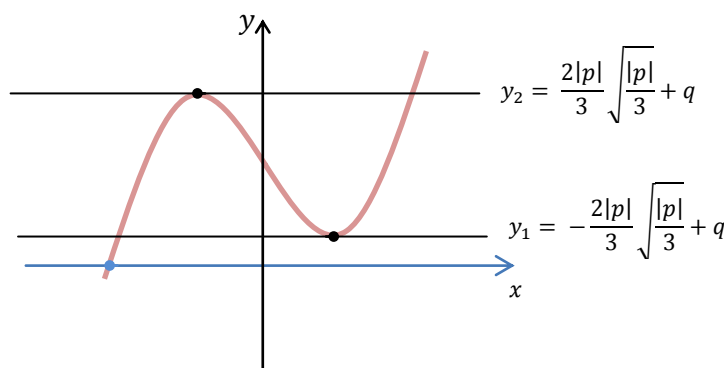
Figura 4.18



ou

$$0 < y_1 < y_2$$

Figura 4.19



Vejamos esses dois casos.

$$y_1 < y_2 < 0:$$

$$\frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q < -\frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} \quad (1)$$

$$0 < y_1 < y_2:$$

$$-\frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} + q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q > \frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}} \quad (2)$$

Das duas últimas desigualdades, (1) e (2), podemos concluir que:

$$|q| > \frac{2|p|}{3} \sqrt{\frac{|p|}{3}}$$

Elevando ao quadrado

$$|q|^2 > \frac{4|p|^2}{9} \times \frac{|p|}{3} \quad \Rightarrow \quad |q|^2 > \frac{4|p|^3}{27}$$

Como $-p = |p|$, então $-p^3 = |p|^3$

$$27q^2 > -4p^3 \quad \Rightarrow \quad 4p^3 + 27q^2 > 0$$

Por outro lado, vemos que se $4p^3 + 27q^2 > 0$, poderemos ter $p < 0$. Assim sendo, encontramos o seguinte resultado quando $4p^3 + 27q^2 = \Delta$:

Se $p < 0$ e se a equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma única raiz real, então $\Delta > 0$

2. Suponhamos agora o caso em que $p > 0$ na equação $x^3 + px + q = 0$.

Do item 4.4 vemos que para $p > 0$ a equação terá apenas uma raiz real. Também temos que se $p > 0$, teremos $\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$. Agora consideremos a reta definida pela equação $y = q$.

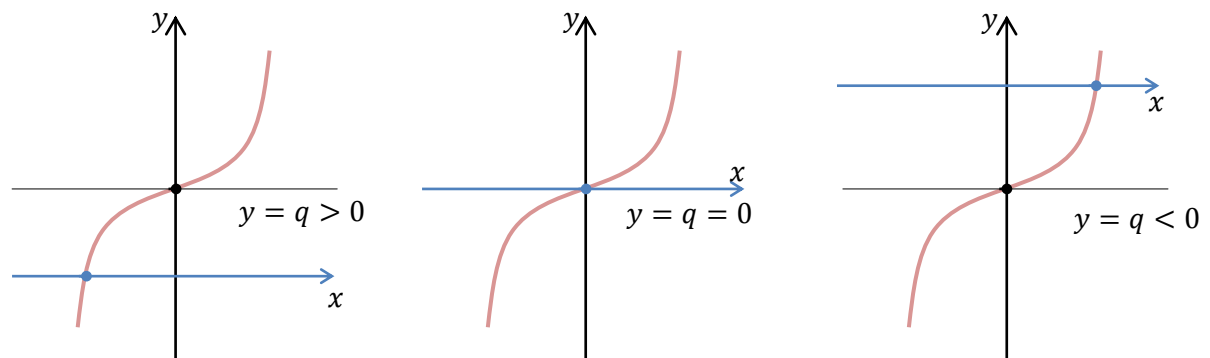


Figura 4.20

A equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma única raiz real quando $p > 0$. Neste caso $\Delta > 0$

3. O último caso a examinar é o caso $p = 0$ para a equação $x^3 + px + q = 0$. Do item 4.3.5, percebemos que a curva gráfico de $F = x^3 + q$ será interceptado pelo eixo OX uma única vez. Porém, a depender do valor de q , a equação tem como solução uma raiz real simples ou uma raiz real tripla.

Observe que para $p = 0$ e $q \neq 0$, temos $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 27q^2 > 0$. Como o ponto de inflexão ocorre em $x = 0$, então o eixo OX não intercepta o gráfico neste ponto e a equação tem uma raiz real simples.

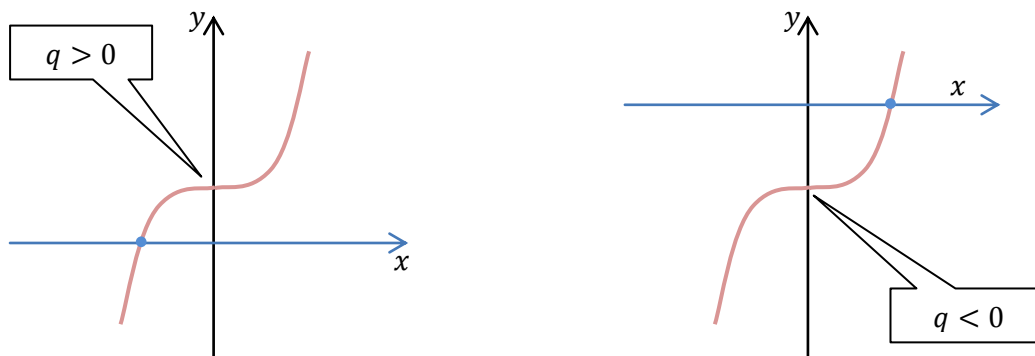


Figura 4.21

Se $p = 0$, $q \neq 0$ e a equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma única raiz real, então $\Delta > 0$.

Por outro lado, para $p = 0$ e $q = 0$, temos $\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 0$. Como o ponto de inflexão ocorre em $x = 0$, então o eixo OX intercepta o gráfico neste ponto e a equação tem uma raiz real tripla.

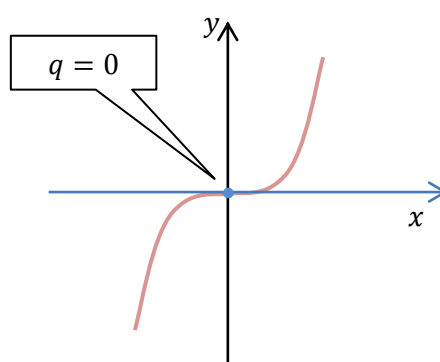


Figura 4.22

Se $p = 0$, $q = 0$ e a equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma raiz real tripla, então, $\Delta = 0$.

Finalizando, podemos enunciar o seguinte teorema obtido da geometria da curva gráfico da função P :

Teorema 2

Seja $P \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau 3, (p e q reais), tal que

$$P = x^3 + px + q$$

Seja $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ o discriminante do polinômio P .

- Se o polinômio $P = x^3 + px + q$ tem três raízes reais distintas, então $\Delta < 0$.
- Se o polinômio P tem raízes múltiplas, então $\Delta = 0$.
Se há uma raiz real de multiplicidade dois e outra raiz real simples, então
$$\Delta = 0, \quad p < 0 \text{ e } q \neq 0$$

Se há uma raiz real tripla, então
$$\Delta = 0, \quad p = 0 \text{ e } q = 0$$
- Se o polinômio $P = x^3 + px + q$ tem uma raiz real e duas complexas não reais conjugadas, então $\Delta > 0$.

Como no caso do Teorema 1, são válidas as recíprocas dessas afirmações e sugerimos a prova dessas recíprocas como exercício.

Note que o Teorema 2 contém mais informações que o Teorema 1 porque, além da natureza das raízes, a possível multiplicidade fica também determinada pelos coeficientes da equação cúbica em forma reduzida.

Capítulo 5

Exercícios

Neste capítulo trazemos alguns exercícios para fixação do que vimos em nossos estudos sobre as equações cúbicas. Sugerimos a sua resolução após estudar também os apêndices A e B. No apêndice C, apresentamos todas as resoluções.

1) As equações apresentadas nesta questão são exemplos retirados do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770, o qual serviu de modelo para os compêndios utilizados por sucessivas gerações de estudantes. Determine quantas soluções reais tem cada uma delas.

a) $x^3 - 6x - 9 = 0$

b) $x^3 - 6x - 4 = 0$

c) $x^3 + 3x + 2 = 0$

d) $x^3 - 3x - 2 = 0$

e) $x^3 - 6x - 40 = 0$

2) Suponha que o polinômio $P = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$, pode ser fatorado da seguinte maneira:

$2x^3 + 3x^2 - x - 1 = (ax + b)(x^2 + cx + d)$. Determine se o discriminante de $x^2 + cx + d$ é $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$.

3) Se um polinômio mônico P tem grau 3, ele se fatora $P = (x + a)(x^2 + bx + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, uma vez que ele necessariamente tem uma raiz real. Relacione o discriminante $\Delta' = b^2 - 4c$ do polinômio $Q = x^2 + bx + c$ com o discriminante Δ do polinômio

$$P = x^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + ac$$

4) Fibonacci, em seu livro de álgebra intitulado *Flos*, conta que um tal de Magister Johannes Ihe desafiou a encontrar a solução para o seguinte problema:

“Encontre um cubo que, com dois quadrados e dez coisas, valha 20”.

Ou seja, Ihe desafiou a resolver a cúbica, que chamaremos de cúbica de Fibonacci:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

A partir desse enunciado, responda as questões:

a) Prove que a equação acima tem uma raiz real positiva e ela está no intervalo $[1, 2]$.

5) Em “Mémoire sur la résolution des équations numériques”, Sturm, exemplificando seu Teorema, encontra as seguintes condições necessárias pra que a equação cúbica

$$x^3 + px + q = 0$$

tenha todas as suas raízes em \mathbb{R} :

$$p < 0$$

$$4p^3 + 27q^2 < 0$$

Refaça este resultado.

6) Este exemplo também figura no “Mémoires”. Determine a natureza das raízes da equação

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

Apêndice A

Fórmula resolvente de Cardano.

Seja a equação cúbica reduzida $y^3 + py + q = 0$. Considere u e v não nulos de forma que $y = u + v$. Então,

$$\begin{aligned}(u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ (u^3 + v^3) + 3uv(u + v) &= -q - p(u + v)\end{aligned}$$

Para esta última igualdade encontramos uma solução quando resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

Das relações de Girard temos que a soma e o produto de u^3 e v^3 são soluções da equação, conhecida como fórmula resolvente de Cardano,

$$z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3 v^3 = 0$$

Ou seja

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

Aplicando à resolvente a fórmula conhecida como fórmula de Bhaskara, determinamos:

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

e

$$v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Dai que

$$y = u + v \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Ou ainda,

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

Apêndice B

Das equações quadráticas

Neste tópico iremos apresentar um estudo das equações quadráticas. Começamos com a apresentação da forma canônica da equação polinomial do segundo grau. Posteriormente fazemos a determinação de seu discriminante, em termos de seus coeficientes, a partir da definição dada em 3.1. Em seguida partimos para a construção do gráfico. Para isso verificamos a variação da função, ponto de máximo ou de mínimo, concavidade e comportamento no infinito. Concluímos com uma análise na qual associamos o sinal do discriminante com a quantidade e a natureza das raízes da equação.

B.1 Forma canônica

Podemos escrever a equação $ax^2 + bx + c = 0$ na forma conhecida como forma canônica da equação polinomial do segundo grau. Essa forma conduz imediatamente à fórmula que nos permite determinar, se houver, as suas raízes reais.

Vejam, então, passo a passo, a construção da forma canônica a partir da equação geral.

1º) Tomemos o trinômio com o coeficiente a em evidência: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$.

2º) Em seguida, completemos o quadrado da expressão entre parênteses adicionando o termo nulo $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}$. Assim temos:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] = 0.$$

Como $a \neq 0$, a igualdade acima implica que:

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Caso o segundo membro seja maior ou igual a zero teremos:

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Essa última fórmula é conhecida como fórmula de *Bhaskara*.

B.2 Expressar o discriminante em termos dos coeficientes.

Tomemos a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Pelo que vimos no item 3.2, seu discriminante é:

$$(I) \quad \Delta = (-1)^2 \prod_{i,j=1}^2 (x_i - x_j)^2 = (x_2 - x_1)^2 = x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2.$$

Das relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Elevando-se a soma das Raízes ao quadrado:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 \times x_2) = \frac{b^2}{a^2} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \frac{2c}{a} = \frac{b^2}{a^2} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$\Delta = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} - \frac{2c}{a} \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$$

B.3 Gráfico das funções quadráticas.

Considerar

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Façamos um estudo do comportamento do gráfico de $F(x) = ax^2 + bx + c$.

B.3.1 Variação (crescimento/decrescimento) –

Primeiro temos que $F'(x) = 2ax + b$. Fazendo $F'(x) = 0$, encontramos $x = \frac{-b}{2a}$.

Analisemos dois casos:

1º caso: $a > 0$.

Conforme o estudo de sinal de $F'(x)$, observamos que:

$F(x)$ é decrescente para $x < \frac{-b}{2a}$.

$F(x)$ é crescente para $x > \frac{-b}{2a}$.

2º caso: $a < 0$.

Conforme o estudo de sinal de $F'(x)$, observamos que:

$F(x)$ é decrescente para $x > \frac{-b}{2a}$.

$F(x)$ é crescente para $x < \frac{-b}{2a}$.

B.3.2 Ponto mínimo ou ponto máximo

Fazendo a segunda derivada de $F(x)$, temos $F''(x) = 2a$. Com $a > 0$, $F''\left(\frac{-b}{2a}\right) > 0$ e o ponto de abscissa $\frac{-b}{2a}$ é mínimo. Com $a < 0$, $F''\left(\frac{-b}{2a}\right) < 0$ e o ponto de abscissa $\frac{-b}{2a}$ é máximo. Independentemente de ser máximo ou mínimo generalizamos esse ponto como vértice do gráfico de $F(x)$ e determinamos esse ponto por (x_v, y_v) . Suas coordenadas são:

$$y_v = F\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

B.3.3 Concavidade –

Vamos usar a segunda derivada de $F(x)$ para analisar o comportamento da concavidade do gráfico. Temos que $F''(x) = 2a > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se $a > 0$. Logo o gráfico terá sua concavidade voltada para cima em todo seu domínio. Entretanto, para $a < 0$, $F''(x) = 2a < 0$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí que, nesse caso, a concavidade do gráfico é para baixo em todo o seu domínio.

B.3.4 Comportamento no infinito –

Para podermos concluir a construção do gráfico vamos fazer a análise a respeito do comportamento da função quando os valores de x crescem indefinidamente e quando decrescem indefinidamente.

Vamos considerar dois casos:

$a > 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + Bx + C) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \right) = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + Bx + C) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \right) = +\infty$

$a < 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + Bx + C) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-1 + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \right) = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + Bx + C) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(-1 + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \right) = -\infty$

B.3.5 Construção do gráfico –

Adotando $a > 0$, temos que o ponto de abscissa $\frac{-b}{2a}$ é mínimo e que para valores de x menores que $\frac{-b}{2a}$ a função é decrescente enquanto que para valores de x maiores que $\frac{-b}{2a}$ a função é crescente. Já sabemos também que o gráfico sempre terá concavidade para cima. Entretanto, se $a < 0$, o gráfico da função sempre terá concavidade para baixo.

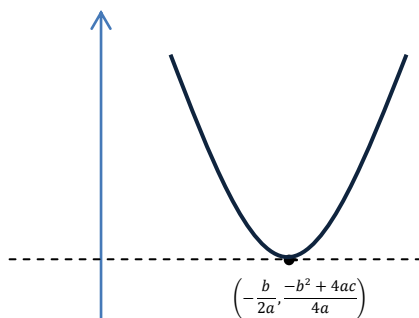


Figura B.1

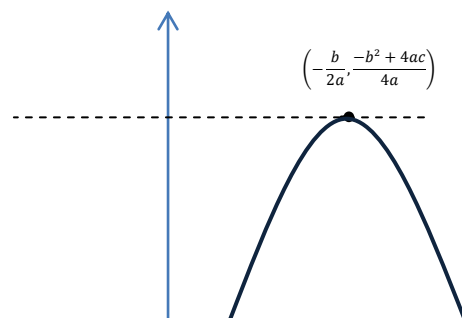


Figura B.2

B.4 Relação entre discriminantes e raízes

Há de se observar que o vértice do gráfico de $F(x) = ax^2 + bx + c$ poderá ocupar uma dentre três posições em relação ao eixo OX. Poderá estar acima se $y_v > 0$, estar no eixo OX se $y_v = 0$ ou abaixo se $y_v < 0$. Analisando essas possibilidades vemos que elas estão diretamente ligadas ao sinal do discriminante.

$$\Delta = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4ac = \Delta a^2 \quad (\text{I})$$

Mas determinamos em B.3.2 que $y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. Fazendo um pequeno ajuste no numerador desta igualdade e substituindo (I) encontramos:

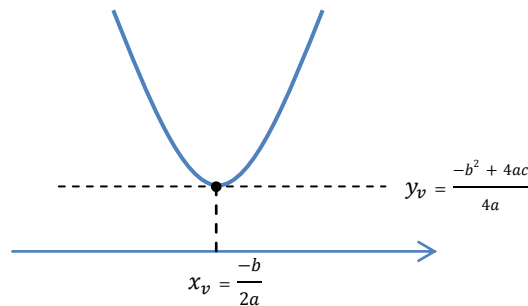
$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad \Rightarrow \quad y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \quad \Rightarrow \quad y_v = \frac{-\Delta a^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_v = -\frac{\Delta a}{4}}$$

Dado que $y_v = -\frac{\Delta a}{4}$, fazemos uma localização do ponto mínimo da função em relação ao eixo OX.

Então, para $a > 0$, vemos que:

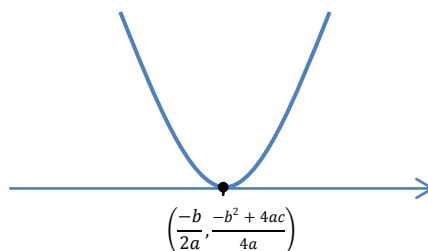
- Se $\Delta < 0$, teremos $y_v > 0$ e o ponto mínimo estará acima do eixo OX.

Figura B.3



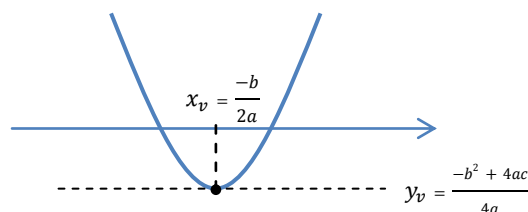
- Se $\Delta = 0$, então $y_v = 0$ e o ponto mínimo estará exatamente no eixo OX.

Figura B.4



- Se $\Delta > 0$, então $y_v < 0$ e o ponto mínimo estará abaixo do eixo OX.

Figura B.5



Ou seja,

- Se o ponto mínimo estiver acima do eixo das abscissas, ou seja, se $y_v > 0$, o gráfico não intercepta o eixo OX e a função $F(x) = ax^2 + bx + c$ não tem raízes reais. Para que isso ocorra temos:

$$y_v > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\Delta a}{4} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta < 0}$$

- Se o ponto mínimo estiver no eixo das abscissas, ou seja, se $y_v = 0$, o gráfico intercepta o eixo OX em um único ponto e a função $F(x) = ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e iguais. Mas para isso, temos:

$$y_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\Delta a}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta = 0}$$

- Se o ponto mínimo estiver abaixo do eixo das abscissas, ou seja, se $y_v < 0$, então o gráfico intercepta o eixo OX em dois pontos distintos e a função $F(x) = ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e diferentes. Isto quer dizer que:

$$y_v < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\Delta a}{4} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta > 0}$$

Analogamente, as mesmas conclusões são obtidas considerando $a < 0$.

Apêndice C

Resolução dos Exercícios.

1) As equações apresentadas nesta questão são exemplos retirados do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770, o qual serviu de modelo para os compêndios utilizados por sucessivas gerações de estudantes. Determine quantas soluções reais tem cada uma delas.

a) $x^3 - 6x - 9 = 0$

Vemos que $p = -6$ e $q = -9$. Então, $\Delta = 4(-6)^3 + 27(-9)^2 < 0$ e a equação acima tem três raízes reais e distintas.

b) $x^3 - 6x - 4 = 0$

Vemos que $p = -6$ e $q = -4$. Então $\Delta = 4(-6)^3 + 27(-4)^2 = 0$. Como $\Delta = 0$, $p < 0$ e $q \neq 0$, a equação acima tem uma raiz real simples e duas raízes reais de multiplicidade dois.

c) $x^3 + 3x + 2 = 0$

Vemos que $p = 3$ e $q = 2$. Então, $\Delta = 4 \cdot 3^3 + 27 \cdot 2^2 > 0$. Dai que a equação acima tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

d) $x^3 - 3x - 2 = 0$

Vemos que $p = -3$ e $q = -2$. Então $\Delta = 4(-3)^3 + 27(-2)^2 = 0$. Como $\Delta = 0$, $p < 0$ e $q \neq 0$, a equação acima tem uma raiz real simples e duas raízes reais de multiplicidade dois.

e) $x^3 - 6x - 40 = 0$

Vemos que $p = -6$ e $q = -40$. Então $\Delta = 4(-6)^3 + 27(-40)^2 > 0$. Logo, a equação acima tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

2) Suponha que o polinômio $P = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$, pode ser fatorado da seguinte maneira:

$2x^3 + 3x^2 - x - 1 = (ax + b)(x^2 + cx + d)$. Determine se o discriminante de $x^2 + cx + d$ é $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$.

Observe que

$$P = 2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 2 \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) = 2P' \text{ com } P' = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Comparando $P' = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ com $T = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ encontramos $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = -\frac{1}{2}$.

Assim, podemos determinar p e q tais que:

$$\bullet \quad p = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^3}{27} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\bullet \quad q = B - \frac{A^2}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3} = -\frac{5}{4}$$

Daí que a forma reduzida do polinômio é $P = x^3 - \frac{5}{4}$

Como $q \neq 0$ e $p = 0$, então a equação $x^3 - \frac{5}{4} = 0$ tem uma única raiz real.

Mas $P = (ax + b)(x^2 + cx + d)$, então a única raiz real de P vem de $ax + b = 0$. Logo a equação $x^2 + cx + d = 0$ tem raízes complexas conjugadas. Então, $\Delta < 0$.

- 3) Se um polinômio mônico P tem grau 3, ele se fatora $P = (x + a)(x^2 + bx + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, uma vez que ele necessariamente tem uma raiz real. Relacione o discriminante $\Delta' = b^2 - 4c$ do polinômio $Q = x^2 + bx + c$ com o discriminante Δ do polinômio

$$P = x^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + ac$$

1º caso:

Se duas das três raízes de P são complexas conjugadas, ou seja, $\Delta' < 0$, então P tem uma única raiz real e $\Delta > 0$.

2º caso:

Se as duas raízes de $x^2 + cx + d$ forem reais e iguais, ou seja, $\Delta' = 0$, então P tem uma única raiz real e $\Delta < 0$.

3º caso:

Se duas das três raízes de P são complexas conjugadas, ou seja, $\Delta' < 0$, então P pode ter uma raiz real simples e uma raiz real dupla. Nesse caso, $\Delta = 0$. Por outro lado, P pode ter uma raiz real tripla. Nesse caso $\Delta < 0$.

- 4) Fibonacci, em seu livro de álgebra intitulado *Flos*, conta que um tal de Magister Johannes lhe desafiou a encontrar a solução para o seguinte problema:

“Encontre um cubo que, com dois quadrados e dez coisas, valha 20”.

Ou seja, lhe desafiou a resolver a cúbica, que chamaremos de cúbica de Fibonacci:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

A partir desse enunciado, responda:

- a) Prove que a equação acima tem uma raiz real positiva e ela está no intervalo $[1, 2]$.

Para mostrar que a equação cúbica de Fibonacci tem apenas uma raiz real, usaremos o teorema obtido da geometria da curva gráfico da cúbica e apresentado no capítulo 5 deste trabalho. Para isso, analisemos o seu discriminante.

$$p = 10 - \frac{2^2}{3} = \frac{26}{3} \quad e \quad q = \frac{2 \cdot 2^3}{27} - \frac{2 \cdot 10}{3} - 20 = \frac{16}{27} - \frac{20}{3} - 20 = -\frac{704}{27}$$

Logo, o discriminante é:

$$\Delta = 4\left(\frac{26}{3}\right)^3 + 27\left(-\frac{704}{27}\right)^2 > 0.$$

Como o discriminante $\Delta > 0$, a cúbica de Fibonacci tem apenas uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Temos ainda que substituindo 1 em x , encontramos

$$1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 20 = 1 + 2 + 10 - 20 < 0 \quad e$$

substituindo 2 em x , encontramos

$$2^3 + 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 20 = 8 + 8 + 20 - 20 > 0.$$

Dai que, pelo Teorema do valor intermediário, existe um número real c , com $c \in [1, 2]$, para o qual a equação se anula.

- 5) Em “Mémoire sur la résolution des équations numériques”, Sturm, exemplificando seu Teorema, encontra as seguintes condições necessárias pra que a equação cúbica

$$x^3 + px + q = 0$$

tenha todas as suas raízes em \mathbb{R} :

$$p < 0$$

$$4p^3 + 27q^2 < 0$$

Refaça este resultado.

Ver item 4.5 na página 54.

- 6) Este exemplo também figura no “Mémoires”. Determine a natureza das raízes da equação

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$$

Para determinar a natureza das raízes da equação cúbica de $x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$, analisemos seu discriminante.

$$p = -102 - \frac{11^2}{3} = -\frac{427}{3} \quad e \quad q = \frac{2 \cdot 11^3}{27} - \frac{11 \cdot (-102)}{3} + 181 = \frac{2662}{27} + \frac{1122}{3} + 181 = \frac{17647}{27}.$$

Logo, o discriminante é:

$$\Delta = 4\left(-\frac{427}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{17647}{27}\right)^2 = -49 < 0.$$

Como o discriminante $\Delta < 0$, a cúbica $x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0$ tem três raízes reais distintas.

Bibliografia

- [1] Bastos, G.G. *Resolução de Equações Algébricas por Radicais*. Disponível em <<http://www.bienasbm.ufba.br/02.htm>>. Acesso em 07/02/2013.
- [2] Lima, E. et al. *A Equação do Terceiro Grau*. Revista Matemática Universitária, nº 5, junho de 1987. <https://mailattachment.googleusercontent.com/attachment/u/0/?ui=2&ik=be58aa5cc5&view=att&th=1406454f4d8b9f5a&attid=0.1&disp=inline&realattid=fhk5q5m580&safe=1&zw&saduie=AG9B_P_SWaJ1V1_aG0dfcfCDPQTt&sadet=1376614495806&sads=Kpw_pZOMO_G2NP4G_jC9E4vWQSc>. Rio de Janeiro. SBM – 2006.
- [3] Milies, César Polcino. *A Solução de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau*. Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1º semestre de 1994. São Paulo – 1994.
- [4] Birkhoff, G.; Maclane, S. *Álgebra Moderna Básica*. Tradução Carlos Alberto Aragão de Carvalho. 4ª edição. Rio de Janeiro. Editora Guanabara Dois S.A – 1980.
- [5] Boyer, C.B. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide. 2ª Edição. São Paulo. Editora Edgard Blücher – 1996.
- [6] Eves, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução Higyno H. Domingues. São Paulo – 2007.
- [7] Garbi, G.G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo. MAKRON Books do Brasil Editora Ltda – 1997.
- [8] Hefez, A.; Villela, M.L.T; *Polinômios e Equações Algébricas*. 1ª edição. Rio de Janeiro. SBM – 2012.
- [9] Lima, E. et al. *Matemática do Ensino Médio*, volume 3, 6ª edição. Rio de Janeiro. SBM – 2006.
- [10] Paiva, M.R. *Matemática*, volume 3. São Paulo. Ed. Moderna – 2002.
- [11] Ribeiro, A.J. *Multisignificados de Equação e o Ensino de Matemática: desafio e possibilidades*. São Paulo. Editora Blucher Acadêmico – 2008.
- [12] Ripoll, Jaime Bruck; Ripoll, Cydara Cavedon; Silveira, José F. P. *Números Racionais, Reais e Complexas*. 2ª edição. Porto Alegre - RS. Editora UFRGS - 2011.
- [13] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. *Fundamento de Cálculo*. Editora SBM. Rio de Janeiro.
- [14] Gondim, Rodrigo; Moraes, Maria Eulalia; Russo, Francesco. *Equações Algébricas e a Teoria de Galois*. 29º Colóquio de Matemática. Rio de Janeiro. IMPA – 2013.