UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

A função exponencial e sua importância na compreensão de modelos com fenômenos de variação acentuada

Edrick Sitrangulo Brandeburgo

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Edrick Sitrangulo Brandeburgo

A função exponencial e sua importância na compreensão de modelos com fenômenos de variação acentuada

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Américo Lopez Galvez

USP – São Carlos
Junho de 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

Brandeburgo, Edrick Sitrangulo
B817f A função exponencial e sua importância na compreensão de modelos com fenômenos de variação acentuada / Edrick Sitrangulo Brandeburgo; orientador Américo Lopez Galvez. -- São Carlos, 2023.
98 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Função Exponencial. 2. Fenômenos Naturais. 3. Modelagem. 4. Matemática. I. Galvez, Américo Lopez, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Edrick Sitrangulo Brandeburgo

The exponential function and its importance in understanding models with highly variable phenomena

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Américo Lopez Galvez

USP – São Carlos
June 2023

Este trabalho é dedicado a todos professores que, depois de muito tempo lecionando, ainda procuram se aprimorar apesar de todo esforço exigido, garantindo à rede pública de educação a qualidade no ensino que nossas crianças tanto merecem e têm direito.

Em especial, a todos pesquisadores do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus primeiramente por conceder-me forças para chegar até aqui, por me fazer paciente e ter a sabedoria necessária para trilhar meus caminhos.

Agradecimento especial a CAPES pelo investimento financeiro concedido, sem ele não seria possível, a meus pais José Mario Brandeburgo de Oliveira e Regina Maria Sitrangulo Brandeburgo e a toda minha família pelo apoio e ajuda, fazendo-me jamais desistir dos sonhos independentemente dos obstáculos que a vida em certas ocasiões nos impõe.

O meu muito obrigado à minha amada esposa Regina Valente Sitrangulo Brandeburgo e amado filho Logan José Brandeburgo, pelo suporte e dedicação quando mais precisei, de estarem sempre comigo e serem tão compreensivos.

Aos amigos(as) e companheiros(as) agradeço pelo incentivo no decorrer de meus estudos. A meus professores(as) pela imensa colaboração durante todo curso.

Agradeço, especialmente, ao Professor Dr. Américo Lopez Galvez pela paciência, incentivo e colaboração na realização deste trabalho, que agora disponho e compartilho com prazer a quem interessar, assim finalizo deixando meu muito obrigado a todos.

"Por uma questão de brevidade, nós sempre representaremos o número 2.718281828459…
pela letra e"
(Leonhard Euler)

RESUMO

BRANDEBURGO, E.S. **A função exponencial e sua importância na compreensão de modelos com fenômenos de variação acentuada**. 2023. 98 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

Quando pensamos em conceitos elementares da matemática que se relacionam com fatos do dia a dia, a função exponencial tem uma importância bastante clara. Diversos fenômenos relacionados com a variação acentuada podem ser modelados utilizando uma função exponencial. Neste trabalho destacamos uma situação que, devido ao nosso progresso linear cotidiano, faz com que um evento com desenvolvimento acentuado seja mal-interpretado, com isso subestimando seus efeitos. Dessa forma, com a intenção de apresentar um trabalho para um público mais amplo, esclarecer melhor os conceitos envolvidos, contextualizamos a ideia de crescimento linear e acentuado utilizando um modelo financeiro em duas situações distintas, mostramos seus desenvolvimentos em tabelas e gráficos, como são representadas por funções e a consequência dos efeitos de cada uma delas. Para isso, pretendemos caracterizar de modo adequado as funções lineares e exponenciais, bem como suas taxas de variações. Comparamos as funções exponenciais com outros tipos de funções e demonstramos como elas são difíceis de se superar em termos de seu crescimento ou decrescimento. Veremos que, de uma situação financeira peculiar pode surgir o número e, muito comum em funções que representam fenômenos de ordem natural, presentes em diversas situações de nossas vidas. Fazemos uma análise simplificada entre a pandemia de Covid-19 e as funções exponenciais, sugerimos alguns questionamentos para reflexão do tema, além de trazer duas atividades práticas voltadas a alunos do ensino médio, tudo com a intenção do leitor entender melhor o fenômeno de variação acentuada.

Palavras-chave: Função Exponencial, Fenômenos Naturais, Modelagem, Matemática.

ABSTRACT

BRANDEBURGO, E.S. **The exponential function and its importance in understanding models with highly variable phenomena**. 2023. 98 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2023.

When we think of elementary mathematical concepts that relate to everyday facts, the exponential function has a very clear importance. Several phenomena related to sharp variation can be modeled using an exponential function. In this work we highlight a situation that, due to our daily linear progress, causes an event with accentuated development to be misinterpreted, thereby underestimating its effects. In this way, with the intention of presenting a work to a wider audience, better clarifying the concepts involved, we contextualize the idea of linear and accentuated growth using a financial model in two different situations, we show its developments in tables and graphs, as they are represented by functions and the consequence of the effects of each one of them. For this, we intend to properly characterize the linear and exponential functions, as well as their rates of change. We compare exponential functions with other types of functions and demonstrate how difficult they are to overcome in terms of their growth or decrease. We will see that, from a peculiar financial situation, the number e can arise, very common in functions that represent phenomena of a natural order, present in different situations of our lives. We make a simplified analysis between the Covid-19 pandemic and exponential functions, we suggest some questions to reflect on the theme, in addition to bringing two practical activities aimed at high school students, all with the intention of the reader to better understand the phenomenon of accentuated variation .

Keywords: Exponential Function, Natural Phenomena, Modeling, Mathematic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Atualmente os fenômenos naturais têm recebido atenção especial, seja pelo surgimento de novas doenças ou desastres de proporções históricas, que causam tragicamente a perda de vidas e recursos, pela mudança de tendências que geram aumentos e diminuições no consumo de bens e serviços ou nas atividades financeiras, entre outros. Em muitos casos a dinâmica de um dado fenômeno pode ser representada graficamente por uma curva (trajetória do fenômeno), logo este tipo de percurso nunca foi tão aplicado ou exaustivamente debatido como agora, assim fixando atentamente nossos olhares a eventos com variação acentuada, nos deparamos com as funções exponenciais, pois são a representação matemática de eventos, fatos ou acontecimentos dessa natureza, por sua vez, a base para inúmeros estudos e pesquisas.

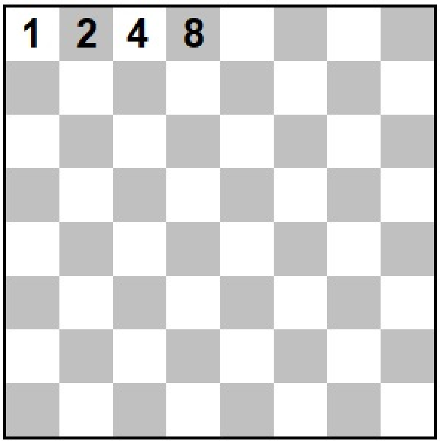
Através da observação e coleta de informações, pesquisadores ao redor do mundo, formam bases de dados relacionadas a mais variada gama de grandezas físicas. Quando analisamos a relação de interdependência entre duas ou mais delas, sendo que em muitos casos a grandeza tempo está envolvida, após a aplicação de uma modelagem nos dados obtidos surge o que na Matemática chamamos de função. Dessa forma, grandezas físicas relacionadas a fenômenos, seja de ordem natural ou não, onde sua principal característica é uma variação acentuada, são representadas por funções exponenciais.

As funções são definidas posteriormente, porém têm o importante papel de nos ajudar a prever como determinados fenômenos irão se comportar ao longo de um percurso ou de sua ocorrência. Desde a antiguidade poder controlar e prevenir os efeitos das ações de fenômenos era imprescindível, porque o prejuízo causado trazia sofrimento e dor. Nos dias atuais não é diferente, por exemplo, saber previamente o possível número de infectados em uma epidemia, salvaria vidas, pois poderíamos acelerar a produção de remédios e equipamentos necessários ao combate ou erradicação do malefício.

Quando tratamos com as funções exponenciais, ou seja, lidamos com eventos cuja principal característica é evoluir rapidamente, vemos que há uma grande dificuldade na interpretação do problema e, consequentemente, sobre as ações adotadas em conclusão das análises feitas a partir desse tipo de caso.

Existe um antigo conto sobre o jogo de xadrez (TAHAN; LINHARES, 2010) que retrata bem o que dissemos, ele nos diz que um imperador estava triste e entediado, ficou tão agradecido por receber o jogo que ofereceu a recompensa que desejasse o sábio inventor. Ciente de que se recusasse o presente seria uma grave ofensa, pede humildemente ao soberano que fosse pago em grãos de trigo relativos a cada uma das 64 casas do tabuleiro de seu jogo. Porém, que a cada quadrícula do tabuleiro o número de grãos fosse dobrado, de forma que teria 1 grão na primeira casa, 2 grãos na segunda, 4 grãos na terceira, 8 grãos na quarta e, assim por diante, até a última quadrícula. (c.f. 1)

Figura 1 – Tabuleiro de Xadrez



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em meios a gargalhadas, o imperador zombando do humilde desejo do inventor, determina que fossem separados e entregues os tais grãos de trigo. Algum tempo depois os calculistas do monarca retornam pálidos e espantados, pois a conclusão que chegaram era de que mesmo se plantassem em todo seu reino, ainda não seria possível atender a demanda do sábio. Para sorte do inventor, o embaraçoso equívoco na interpretação do rei, lhe garantiu o cargo de conselheiro real.

Na série de números dos grãos de trigo: 1, 2, 4, 8,..., cujas quantidades serão dobradas a cada posição do tabuleiro de xadrez, assim como o rei, um leitor desavisado poderia cometer o engano de pensar que a quantidade de trigo não passariam de alguns milhares de grãos, sendo que na realidade haveriam, apenas na última casa, milhões de trilhões de grãos.

Entender de forma equivocada o tratamento dado a um evento como o do conto acima é mais comum do que parece, pois lidamos rotineiramente com problemas cujo desenvolvimento tem características lineares como: fazer compras, tomar remédios, transitar, entre outros, logo somos tendenciosos com este tipo de modelo matemático. Ao deparar-se com a situação onde uma série numérica parece seguir um padrão linear pode confundir até os mais astutos, pois como no caso do jogo de xadrez não estamos apenas somando quantidades, estamos na realidade multiplicando quantidades, ou seja, adicionando somas.

Logo, a diferença entre os dois modelos matemáticos, durante a análise do desenvolvimento de um fenômeno, está na chamada *taxa de variação*, pois na função linear é constante enquanto que na função exponencial é variada ou acentuada.

A medida em que nos aprofundamos neste assunto, percebe-se que ao tratar de eventos com taxa de variação acentuada, como aqueles modelados a partir de uma função exponencial qualquer, natural ou não, normalmente existirá um fator limitante, ou seja, haverá momentos durante seu desenvolvimento em que o fenômeno ficará impedido de crescer ou decrescer indefinidamente devido a fatores externos a ele, a quem em vários casos somos muito gratos. No conto do xadrez o fator limitante é a superfície terrestre que forma o reino, porém ao analisarmos uma infecção bacteriana, em termos do seu número de indivíduos, este fator seria o número de células do corpo humano ou mesmo o tratamento com medicamento.

Dessa maneira, este trabalho apresenta situações em que se pode observar fenômenos com taxas de variações distintas, buscando e apresentando ferramentas com o intuito de simplificar formas de diferenciá-las. Assim, contextualizamos e adaptamos o conto do jogo de xadrez para uma versão voltada à Matemática Financeira utilizando como comparação tabelas e gráficos das situações propostas. Definimos as funções matemáticas, bem como conceitos necessários para caracterizar tanto as funções lineares, quanto as funções exponenciais. Apresentamos o possível modo de definir o número e, como caso especial de função exponencial, além de um breve relato histórico sobre ele. Destacamos alguns fenômenos com variação significativa representados por funções exponenciais e finalizamos com duas atividades práticas, voltadas a alunos do ensino médio, que mostra de uma maneira simples e lúdica a diferença entre crescimento exponencial e linear.

CAPÍTULO

2

CONTEXTUALIZANDO UMA SITUAÇÃO

Existem muitas situações de nosso cotidiano que poderiam ser remediadas ou melhoradas se soubéssemos prever como elas se desdobrarão, entretanto esta em várias ocasiões, não é uma tarefa trivial. Saber determinar como um evento ou fenômeno se comportará ao longo de sua ocorrência, 0pode ser o fator mais importante na vida de uma pessoa, pois, com isso, somos capazes de nos preparar para o futuro.

Temos visto como a falta de previsão afeta a vida de muitos, seja pelo esgotamento de sua reserva financeira, pela falta de medicamentos, materiais de consumo, equipamentos, entre outros, assim fica claro que isso gera uma grande instabilidade econômica, política e social. Talvez, se a sociedade estivesse mais familiarizada com o desenvolvimento de fenômenos com variação acentuada, muito sofrimento poderia ter sido evitado com planejamento adequado.

Dessa forma, com base no conto do xadrez, analisemos a situação do pagamento feito com trigo pelo imperador, apresentada no Capítulo 1 de duas maneiras, porém considerando que, tal monarca fosse um agente financeiro desatento, o inventor do jogo um investidor e o investimento feito em reais:

1ª - O retorno do investimento seja sempre o dobro do valor inicial investido;

2ª - O retorno do investimento seja sempre o dobro do retorno do período anterior.

Nas situações acima, quando falamos em retorno de investimento, nos referimos ao valor recebido ou ganho no final do prazo estipulado, assim na primeira situação considere que, o agente financeiro entendeu que a solicitação do inventor seria de investir 1 real (1 grão) por um período de tempo fixo e o valor final que obteria são 3 reais (3 grãos), no período seguinte investiria 3 reais e obteria 5 reais (5 grãos), dessa forma, mantendo o processo para intervalos de tempo iguais, ou seja, dobrando o valor inicial investido no mesmo período de tempo, temos:

Tabela 1 – Evolução da primeira situação de investimento

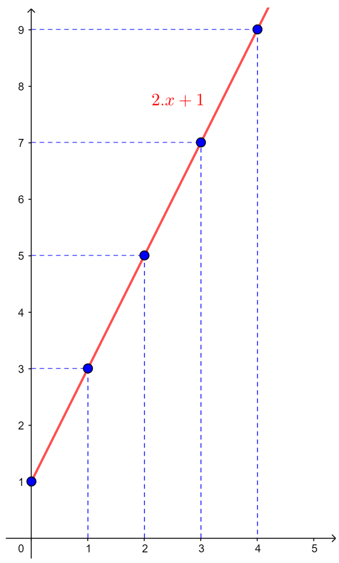
períodos de investimento	*valor final de cada período*
início	1
fim do 1º período	$1+2\cdot 1=3$
fim do 2º período	$3+2\cdot 1=5$
fim do 3º período	$5+2\cdot 1=7$
$\vdots$	$\vdots$
fim do período x	$(2\cdot x-1)+2\cdot 1=2\cdot x+1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando tratamos com uma base de dados numérica, ou seja, uma sequência composta por muitos valores, é comum o uso de uma representação visual, pois com ela podemos observar informações e propriedades que, normalmente, não ficam evidentes, além de simplificar a compreensão das informações apresentadas. Na Matemática utilizamos gráficos baseados no sistema de coordenadas cartesianas, pois esta ferramenta representa a melhor expressão de dois importantes ramos desta área de conhecimento, sendo eles a Álgebra e a Geometria.

Este método, como veremos no próximo capítulo, foi elaborado para mapear o espaço a partir de um *ponto referencial* adotado, seja em duas, três ou mais dimensões, o sistema, como o próprio nome já diz, consiste em localizar determinados objetos, no caso *pontos*, a partir de suas coordenadas. As coordenadas, por sua vez, podem ser obtidas de modelagens matemáticas que representam os fenômenos, eventos ou acontecimentos e são organizadas como na Tabela 1, na qual os *períodos de investimento* são posicionados no eixo horizontal e o *retorno no final de cada período*, no eixo vertical, ambos apresentados na Figura 2.

Figura 2 – Gráfico da primeira situação de investimento



Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo análogo, na segunda situação considerada, o investidor intervém junto ao agente financeiro informando que seu desejo é que a aplicação pretendida seja de 1 real (1 grão), investido a uma taxa de juros de 100% (retorno em dobro) e que o período de tempo varie linearmente. Portanto, o valor final do período de investimento seria de 2 reais (2 grãos), assim no segundo período de aplicação investiria os 2 reais do valor final da vez anterior e obteria 4 reais (4 grãos), dessa forma continuassem com o mesmo tipo de capitalização, ou seja, investindo o valor final de cada período a uma taxa de juros de 2, logo temos:

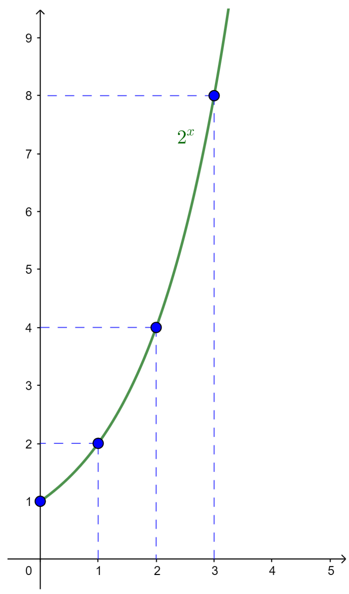
Tabela 2 – Evolução da segunda situação de investimento

períodos de investimento	*valor final de cada período*
início	1
fim do 1º período	$1 \cdot (1+1) = 2$
fim do 2º período	$1 \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4$
fim do 3º período	$1 \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 8$
$\vdots$	$\vdots$
fim do período x	$1 \cdot (1+1)^x = 2^x$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, representa-se graficamente a Tabela 2, onde os *períodos de investimento* são posicionados no eixo horizontal e seus respectivos *valores finais de cada período*, no eixo vertical, como apresentados na Figura 3.

Figura 3 – Gráfico da segunda situação de investimento

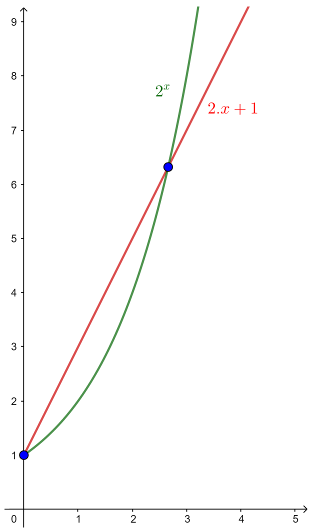


Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao analisar as situações apresentadas pode-se notar que existe uma similaridade nos instantes iniciais das aplicações, porém a partir deste momento as quantias começam a divergir consideravelmente, visto que na primeira estamos somando 2 reais (2 grãos) ao valor final da aplicação anterior, enquanto que na segunda multiplicamos por 2 o valor final obtido anteriormente. Outra semelhança está no fato de que ambos investimentos são crescentes, entretanto o crescimento do retorno no final de cada período de investimento da primeira situação é constante (c.f. 5a), mas o da segunda é variado (c.f. 5b), sendo esta última o que pretendemos caracterizar ao longo deste trabalho.

Como em ambas situações os períodos de investimento crescem linear e unitariamente, pode-se comparar gráficamente as situações propostas dada pela Figura 4 abaixo:

Figura 4 – Gráfico comparativo das situações



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 – Evolução das taxas de crescimento

períodos de investimento	*valores finais*	
	1ª situação	*2ª situação*
início	1	1
fim do 1º período	3	2
fim do 2º período	5	4
fim do 3º período	7	8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
fim do período x	$2 \cdot x + 1$	$1 \cdot 2^x = 2^x$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4 vê-se claramente como os valores relativos ao retorno no final de cada período de investimento de cada situação, ambos posicionados no eixo vertical do gráfico, vão divergindo ou se afastando, isto se dá pelo fato de que suas *taxas de variação* são distintas.

Para entender tais variações, cuja notação matemática é Δ (lê-se *delta*), tomemos as sequências formadas a partir do cálculo das diferenças entre o sucessor e antecessor, ou seja, dois valores consecutivos, do eixo vertical ou, como é conhecido na Matemática, eixo das ordenadas em cada situação proposta.

- Para a primeira situação denotanos a sequência de retornos de investimento, dos valores da Tabela 1, por $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 5$, $y_4 = 7$, ... , $y_i = 2 \cdot i + 1$ e por Δy_1, Δy_2, Δy_3, ... , Δy_i, respectivamente, a variação entre o retorno do investimento do 2º período para o período inicial, do 3º período para o 2º período, ..., do período $i+1$ para o período i. Mais precisamente,

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

Nessas condições temos que, como $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 5$, $y_4 = 7$, ... , $y_i = 2 \cdot i + 1$, então $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = ... = \Delta y_i = 2$, como podemos observar graficamente na Figura 5a.

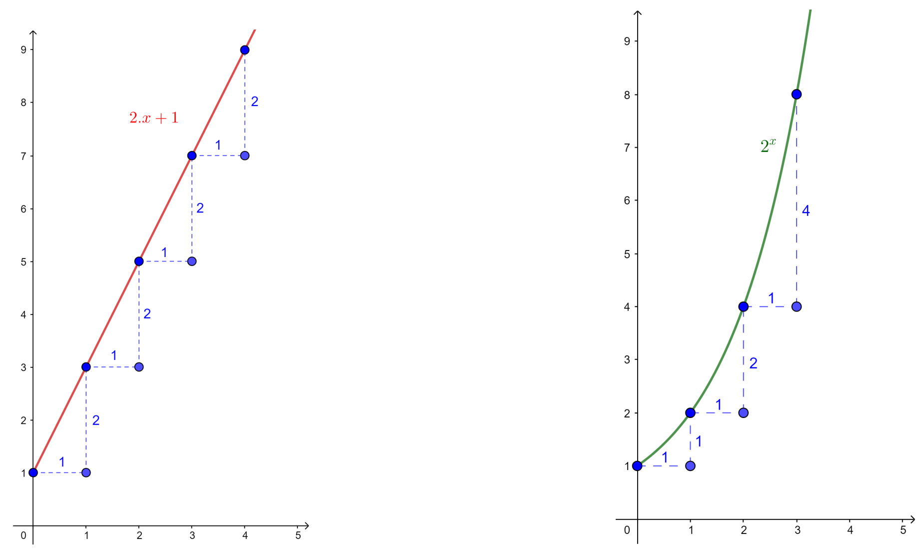
- Para a segunda situação, de forma similar ao item anterior, denotanos a sequência de retornos de investimento, dos valores da Tabela 2, por $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$, $y_4 = 8$, ... , $y_i = 2^i$, então $\Delta y_1 = 1$, $\Delta y_2 = 2$, $\Delta y_3 = 4$, ... , $\Delta y_i = 2^{i-1}$.

  Contudo, uma *taxa de variação* é definida matematicamente pela razão expressa por:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

  mas, como no exemplo, a variação Δx_i é padronizada em uma unidade a diferença obtida de Δy_i é mantida.

Figura 5 – Diferenças entre as taxas de variação



(a) taxa de variação constante (b) taxa de variação acentuada

Fonte: Elaborada pelo autor.

Perceba que, mesmo sem uma representação gráfica, na primeira situação proposta todas taxas de variação são iguais, isso acontece devido ao crescimento constante dos dados, conferindo-lhe um aspecto *retilíneo* ou *linear* (c.f. 2). Porém, na segunda situação as taxas de variação mudam em consequência ao crescimento acentuado, característica esta vista na Figura 3, que resultará em um aspecto *curvelíneo* acentuado.

Como a sequência resultante da segunda situação pode ser convertida em *potências de base 2* e o elemento da função que sofre variação é o *expoente*, esta recebe a designação de *curva exponencial*. Motivados por este fato, na Seção 3.4 do Capítulo 3 começaremos estudar com mais detalhes o que seria uma evolução linear e exponencial.

No conto a solicitação feita pelo inventor era com relação as 64 quadrículas do tabuleiro do jogo e considerando que tais quadrículas fossem os períodos de investimento (t), temos:

Tabela 4 – Evolução dos retornos de investimentos

períodos	0	1	2	3	4	...	64	...	t
retorno na 1ª situação	1	3	5	7	9	...	129	...	$2 \cdot t + 1$
retorno na 2ª situação	1	2	4	8	16	...	18.446.744.073.709.551.616	...	2^t

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Tabela 4 nota-se a real consequência da evolução em cada situação considerada. No conto o inventor do jogo de xadrez (investidor) ainda receberia a quantia acumulada dos ganhos de cada quadrícula, logo ele teria o direito a somatória desses valores, ou seja,

- na 1ª situação: $1+3+5+7+9+...+129$,
- na 2ª situação: $1+2+4+8+16+...+18.446.744.073.709.551.616$.

Podemos observar que o valor acumulado na primeira situação atingiria milhares de reais (grãos), enquanto que na segunda situação *quintilhões* de reais (grãos) e tal quantia de dinheiro não existe mesmo reuníssemos a riqueza de toda humanidade, sendo estimada, até o ano de 2021, em aproximadamente 2,65 quatrilhões de reais (ver link no Apêndice C). Assim, era de se esperar que tanto o imperador, quanto seus calculistas se espantassem com a incontável quantia que deveriam desembolsar, pois dada a variação significativa deste fenômeno, em um curto espaço de tempo, consumiria todo recurso do reino e muito mais, visto que seu desenvolvimento não foi previsto desde o início.

Dessa forma, este trabalho apresenta ao leitor, nos próximos capítulos, recursos que os farão capazes de identificar propriedades e características de fenômenos dessa natureza, para que no futuro estejam munidos de informações suficientes para lidar com este tipo de eventualidade de forma segura, com o mínimo de sofrimento e imprevistos.

CAPÍTULO 3

POR TRÁS DO FENÔMENO

Na Matemática chama-se *grandeza física* todo fenômeno, fato, evento ou acontecimento que pode ser medido ou contado. Como vimos no Capítulo 1, quando duas ou mais grandezas físicas se relacionam e, dessa relação, surge uma expressão que a descreve, dizemos então que uma grandeza está em *função* da outra, ou seja, existe uma relação de interdependência entre elas.

O conceito de função surgiu na Matemática de forma intuitiva desde a antiguidade e, sua definição, vem se adequando desde então. Podemos dizer que é uma das ideias mais importantes da Matemática, pois tornou-se muito conveniente para expressar fenômenos físicos, sociais, biológicos, entre outros. Porém, devemos ser capazes de identificar se uma série de valores, obtidos das observações desses fenômenos, podem ou não ser modelados a partir de funções, além disso, quais as consequências do seu desenvolvimento em nosso cotidiano.

Imagine que temos séries de dados como as apresentadas nas tabelas abaixo, onde a primeira linha representa, por exemplo, o instante da medição e a segunda linha a resposta à medição, responda:

Tabela 5 – Exemplo 1

0	1	2	3	4	5	6	...
0	2	4	6	8	10	12	...

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6 – Exemplo 2

1	1	2	3	4	5	5	...
31	32	33	34	29	28	27 ...	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 7 – Exemplo 3

1	2	3	4	5	6	7	...
4	10	28	82	244	730	2188	...

Fonte: Elaborada pelo autor.

1- Quais dentre as séries de dados podem ser consideradas como funções?

2- Qual apresenta um crescimento acentuado?

As questões colocadas acima exigem a necessidade de formalizar o conceito de função, definir adequadamente o entendimento de crescimento acentuado, assim veremos isso nas seções seguintes.

3.1 Definindo uma função

No século XIX o matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) escreveu a primeira definição de função da seguinte forma: (DANTE, 2016)

"Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por uma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se *variável independente* e y, *variável dependente*."

Tomando a Tabela 5 como exemplo, imagine que uma criança quer guardar moedas de um real num cofrinho, inicialmente não há moedas no cofre. Ela decide que deverá colocar sempre duas moedas a mais do que a quantidade guardada no dia anterior, assim no primeiro dia optou por guardar duas moedas, no segundo dia quatro moedas, no terceiro dia seis moedas e, assim sucessivamente. Denotamos por x o número do dia de armazenamento e por y o número de moedas que ela deverá guardar, assim como o número de moedas a serem armazenadas depende do número do dia em que elas serão guardadas e, mais importante, dias diferentes têm quantidades únicas de moedas guardadas. Como podemos estabelecer uma lei de formação, concluímos que este exemplo é representado por uma função.

Contextualizando os valores da Tabela 6 poderíamos ter a seguinte situação, uma pessoa dentro de um ônibus observa um painel de temperatura presente na plataforma de embarque, ele registra naquele momento 31ºC (31 graus Celsius), pouco tempo depois a pessoa, ainda sozinha no interior do ônibus, nota que o termômetro registra 32ºC. Ao entrar naquele veículo uma segunda pessoa, o primeiro indivíduo percebe que a temperatura marcada na plataforma mudou para 33ºC, pouco tempo depois ao entrar uma terceira pessoa vê que a temperatura é de 34ºC, entretanto quando a quarta pessoa entra no transporte a temperatura no painel sofre outra mudança, cujo registro era de 29ºC, com a entrada do quinto passageiro a temperatura externa cai para 28ºC e, em outro breve momento, muda para 27ºC. Neste exemplo, chegasse a conclusão de que tal série de dados, que associa o número de indivíduos com a temperatura marcada no painel, não pode ser caracterizada como função, pois denotando por x o número de pessoas dentro do ônibus e por y a temperatura externa marcada no painel, podemos ver que a situação não respeita a definição de função, pois para um mesmo número de pessoas dentro do veículo (x) as relaciona com temperaturas (y) diferentes.

Para os valores apresentados na Tabela 7 imagine a seguinte situação, um sitiante possui um lago em sua propriedade, em uma manhã qualquer nota que nele há flutuando na superfície quatro vitórias-régias, no dia seguinte no mesmo lago agora há dez dessas plantas, no terceiro dia observa que a quantidade das vitórias-régias aumentou para vinte e oito indivíduos e que, com o passar dos dias, a quantidade só aumenta. Denotando por x o número de dias de observação e por y o número de indivíduos dessa vegetação aquática, podemos notar que dias diferentes são relacionados a quantidades únicas de plantas, como podemos determinar uma lei de formação para o caso, então o exemplo tem a característica de função.

Atualmente, utilizamos a linguagem dos *conjuntos* para definir formalmente o conceito de função. De forma simplificada dizemos que um *conjunto* é a *reunião* de elementos, no nosso caso números, que possuem características ou propriedades semelhantes, assim uma função é definida como:

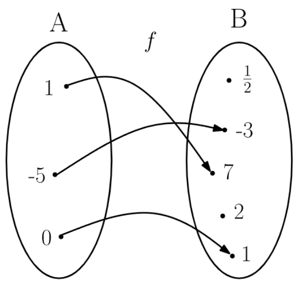
"Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$." (c.f. 6)

Usamos neste trabalho a notação:

$$f : A \to B$$

Onde, lê-se: f é uma função de A em B, sendo que f "transforma" x de A em y de B. Os elementos de A são chamados de *domínio* da função enquanto que os elementos de B são chamados de *contradomínio* da função.

Figura 6 – Diagrama da relação entre os conjuntos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Atribuímos a representação, dada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), de uma função com a seguinte notação:

$$y = f(x)$$

Lê-se: y é igual a f de x, onde x denomina-se *variável independente* e y, *variável dependente*.

Devemos observar que, funções são leis de associação entre elementos de dois dados conjuntos que satisfazem a fundamental propriedade de associar cada elemento do primeiro conjunto, com um único elemento do segundo conjunto. Essa associação não tem que ser necessariamente dada por uma expressão algébrica, quando ela é dada, naturalmente o potencial de uma análise matemática fica evidente.

Dizemos que uma função f é *injetiva*, ou *injetora*, quando transforma os diferentes elementos do seu domínio (conjunto A) em distintos elementos do contradomínio (conjunto B). Contudo, uma função é dita *sobrejetiva*, ou *sobrejetora*, quando todos os elementos do seu contradomínio estão relacionados a, pelo menos, um elemento do seu domínio. Além disso, se f é injetiva e sobrejetiva, simultaneamente, dizemos que f é uma função *bijetiva* ou *bijetora*.

Como vimos no Capítulo 2, ao analisar fenômenos, aqui chamados de *grandezas físicas* e as funções que os definem, seria mais vantajoso com o auxílio de uma representação gráfica (c.f. 4), entretanto este assunto está intimamente relacionado ao que chamamos de *produto cartesiano*.

3.2 Produto cartesiano e gráficos de função

Nesta seção faremos uma breve abordagem sobre este tema com o intuito de proporcionar ao leitor o embasamento para prossegirmos, porém este assunto que embora seja de outro ramo da Matemática, a *Geometria Analítica*, é essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

Seja um *par ordenado*, $a = (x, y)$, composto por um elemento x, denominado *primeira coordenada* de a e um elemento y, denominado *segunda coordenada* de a, assim como o próprio nome já diz, *par* por ter duas *coordenadas* e *ordenado* por suas coordenadas serem apresentadas sempre na mesma *ordem*. (LAGES, 2017)

Podemos definir dois pares ordenados, $a = (x, y)$ e $b = (r, s)$, como *iguais* quando $x = r$ e $y = s$, além disso, podemos considerar o par ordenado (x, x), no qual as duas coordenadas são coincidentes. O par ordenado $a = (x, y)$ não é o mesmo que conjunto $\{x, y\}$, pois $\{x, y\} = \{y, x\}$ sempre ocorrerá, enquanto que $(x, y) = (y, x)$ apenas quando $x = y$.

O *produto cartesiano*, $A \times B$, de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a A e cuja segunda coordenada y pertence a B, representado da seguinte maneira:

$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$$

Se $A = \{x_1, ..., x_m\}$ e $B = \{y_1, ..., y_n\}$ são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, logo o produto cartesiano $A \times B$ é finito com $m \cdot n$ elementos, em outras palavras, o número de elementos de $A \times B$ é igual ao número de elementos de A vezes o número de elementos de B. Mais precisamente,

$$A \times B = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), ..., (x_1, y_n), (x_2, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_m, y_n)\}$$

O *gráfico* de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto que podemos denotar por $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ composto por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um elemento de A e $y = f(x)$. Assim, tem-se:

$$G(f) = \{(x,y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

Dessa forma, para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja gráfico de alguma função $f : A \to B$ é necessário e suficiente que G atenda as seguintes condições:

G.1 - Para todo $x \in A$ existe um par ordenado $(x,y) \in G$ cuja primeira coordenada é x;

G.2 - Se $p = (x,y)$ e $q = (x,w)$ são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x, então $y = w$, ou seja, $p = q$.

De modo geral, podemos resumir as condições acima da seguinte maneira:

Para cada $x \in A$ existe um, e somente um, $y \in B$ tal que $(x,y) \in G$.

Logo, são gráficos de uma função os seguintes exemplos:

$$G = \{(x,x^2); x \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{(1,2),(2,4),(3,8),...,(x,2^x),...\}$$

O produto cartesiano $A \times B$ está profundamente ligado ao conceito de relação, ou melhor dizendo, *relação binária*. Dizemos que R é uma relação de A em B se R é um subconjunto de $A \times B$. Mais ainda, dados $x \in A$ e $y \in B$, se $(x,y) \in R$ então dizemos que x está em relação com y via a relação (ou segundo) R e escrevemos xRy.

O gráfico de uma relação R entre os conjuntos A e B é o subconjunto $G(R)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares (x,y) tais que xRy. Dessa forma,

$$G(R) = \{(x,y) \in A \times B; xRy\}$$

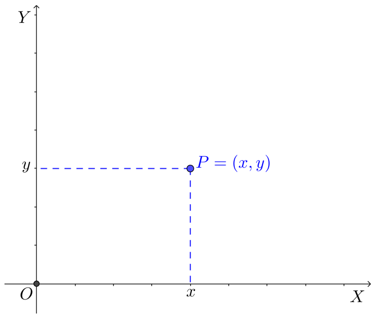
e, nesta noção, inclui-se o caso particular do gráfico de uma função.

Para concluir, nota-se que se um subconjunto qualquer de $A \times B$ é o gráfico de uma relação de A para B e, se esse conjunto cumpre as condições $G.1$ e $G.2$ apresentadas, então é o gráfico de uma função.

3.3 Plano numérico $\mathbb{R}^2$

O produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o mais importante, pois trata-se do caso particular que fundamentou a ideia geral. Os elementos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ são os pares ordenados de números reais, eles aparecem como as coordenadas cartesianas de um ponto P do plano, digamos β, quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY que se intersectam num ponto, digamos O, chamado *origem* ou *referencial* do sistema de coordenadas. (LAGES, 2017)

Figura 7 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dado o ponto $P \in \beta$, a chamada *abcissa* de P é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OX, enquanto a chamada *ordenada* de P é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OY. Diz-se então que (x,y) é o par de coordenadas do ponto P relativo ao sistema de eixos OXY (c.f. 7). Os eixos OX e OY dividem o plano em quatro regiões, denominadas *quadrantes*, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos.

A relação que associa a cada ponto P do plano β seu par de coordenadas relativas ao sistema de eixos OXY, é uma correspondência biunívoca (Seção 3.1). Ela transcreve conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpreta geometricamente relações entre números reais. Dessa forma, pode-se dizer que $\mathbb{R}^2$ é o modelo aritmético do plano β, enquanto β é o modelo geométrico de $\mathbb{R}^2$.

Nas próximas seções apresentamos as diferentes características das funções afim e exponencial, bem como o desenvolvimento de seus crescimentos de modo a entender melhor em que, os exemplos propostos nas situações apresentadas no Capítulo 2, se diferem.

3.4 Função afim e linear

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a \cdot x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, porém quando $b = 0$ é conhecida como função *linear*. (LAGES, 2017)

Nas funções afim podemos dizer que b é o valor da função quando $x = 0$, ou seja, $b = f(0)$, ele também é conhecido como *termo independente* ou *valor inicial* de f. Nota-se que, para este tipo especial de função, o coeficiente a pode ser determinado conhecendo-se os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos e arbitrários x_1 e x_2. Veja, se são conhecidos $f(x_1) = a \cdot x_1 + b$ e $f(x_2) = a \cdot x_2 + b$, então temos:

$$b = f(x_1) - a \cdot x_1 \tag{3.1}$$

$$b = f(x_2) - a \cdot x_2 \tag{3.2}$$

Comparando o termo b de 3.1 e 3.2, temos que $f(x_1) - a \cdot x_1 = f(x_2) - a \cdot x_2$, portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{3.3}$$

Dados digamos x e $x+h$, com $h \neq 0$, o coeficiente $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se *taxa de variação* da função f no intervalo cujos extermos são x e $x+h$. Dessa forma, pode-se notar que se tomássemos um outro ponto arbitrário x_3, cujo valor de sua ordenada é $f(x_3) = a \cdot x_3 + b$ e determinar a taxa de variação entre ele e quaiquer dos dois pontos x_1 ou x_2, obteríamos a mesma variação a ou proporcional a ela. (LAGES, 2017)

Portanto, em resumo podemos dizer:

"Nas funções afim a taxa de variação é constante."

Uma função f entre dois conjuntos ordenados é chamada de *monótona* quando ela preserva ou inverte a relação de ordem. Se f presevar a relação de ordem é chamada de *função crescente*, porém se inverter tal relação é chamada de *função decrescente*.

Devemos lembrar que uma função $f: X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$ e $I \subset X$, chama-se:

- ***crescente*** em I, quando $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$;
- ***decrescente*** em I, quando $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$;
- ***monótona não-decrescente*** em I, quando $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- ***monótona não-crescente*** em I, quando $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Tomemos, por exemplo, uma situação como o início de uma epidemia, conforme o tempo aumenta (ou passa), o número de infectados também aumenta sendo esta uma característica de função crescente durante um dado intervalo de tempo. Porém, quando são tomadas medidas para a erradicação do agente infeccioso, conforme o tempo aumenta, o número de infectados diminui caracterizando uma função decrescente naquele período.

3.5 Caracterização de uma função afim

Podemos pensar que taxa de variação é uma medida de quanto a função mudou por unidade nesse intervalo. Ao estudarmos as funções chamadas *afim*, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou seja, aquelas cuja taxa de variação é constante, podemos perceber que o acréscimo $f(x+h) - f(x)$ que ocorre com f quando se passa de x para $x+h$, depende apenas do acréscimo h e não do próprio x. De fato, uma vez que $f(x) = a \cdot x + b$ implica que $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$, para todo x.

A importância, tendo em vista suas aplicações, é que quando f é monótona, vale a reciprocidade: se $f(x+h) - f(x)$ não depende de x, então f é *função afim*. Nota-se que esta afirmação permite caracterizar quando uma dada função é afim, isto é mostrado nos seguintes teorema.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Logo, $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$, para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$.)

(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (LAGES, 2017) Provaremos que cada uma das implicações resulta na outra, ou seja, $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$. Faremos a prova para f crescente, sendo que para f decrescente é similar.

Dessa forma, para demonstrar que $(1) \Rightarrow (2)$, provemos inicialmente que, para todo número racional $r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, a hipotese (1) determina que $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, como $p = r \cdot q$, temos:

$$q \cdot f(r \cdot x) = f(q \cdot r \cdot x) = f(p \cdot x) = p \cdot f(x),$$

logo,

$$f(r \cdot x) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = r \cdot f(x),$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, a monotonicidade de f implica que $a = f(1) > f(0) = 0$. Portanto, a é positivo, além do mais temos que $f(r) = f(1 \cdot r) = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostraremos agora que se tem $f(x) = a \cdot x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponhemos, por absurdo, existir algum número real x (obrigatoriamente irracional) tal que $f(x) \neq a \cdot x$. Por conveniência, podemos admitir que $f(x) < a \cdot x$. (Para $f(x) > a \cdot x$ pode-se utilizar a mesma abordagem.) Temos,

$$\frac{f(x)}{a} < x,$$

pois, provamos que $a > 0$.

Admitamos um número racional r dentro do intervalo de extremos $\frac{f(x)}{a}$ e x (Sabe-se que em qualquer intervalo aberto eles existem). Dessa forma,

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Portanto, $f(x) < a \cdot r < a \cdot x$ (pois, sabemos que $a > 0$), ou seja, $f(x) < f(r) < a \cdot x$. Porém, isto é um absurdo, pois f é crescente, logo como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição implica que, necessariamente, $f(x) = a \cdot x$ e completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$. As implicações $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$ são evidentes. □

O teorema 1 auxilia na demonstração para se caracterizar as funções afim, utilizando-se para isso o seguinte teorema:

Teorema 2 (Caracterização de uma função afim)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva, ou seja, crescente ou decrescente. O acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depende apenas de h, mas não de x se, e somente se f é uma função afim.

Demonstração. (LAGES, 2017) A prova da ida deste teorema é uma consequência do teorema 1. Vejamos isto supondo que a função f seja crescente (caso f seja decrescente a demonstração é análoga). Então, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente, com $\varphi(0) = 0$, além disso, para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x) = f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) = \varphi(h) + \varphi(k)$$

Logo, pelo teorema 1, colocando-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto significa que $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$. Chamando $f(0)$ de b, conclui-se que $f(h) = a \cdot h + b$, ou seja, $f(x) = a \cdot x + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Agora veremos que a volta do teorema 2 é verdadeira, pois se $f(x) = a \cdot x + b$, então $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$ não depende de x. A condição de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x, vez ou outra, se explica dizendo que "acréscimos iguais de x equivalem a acréscimos iguais para $f(x)$". Outra forma de falar esta suposição consiste em dizer que os acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x. □

O exemplo seguinte, encontrado no livro *Números e funções reais*, página 87 (LAGES, 2017), ilustra como o teorema pode ser empregado.

Suponhamos que fazendo o investimento financeiro padrão tipo renda fixa, num prazo fixo, de um valor x reais, depois de um ano obtemos um capital que denotamos por $f(x)$. Claramente, f é uma função crescente de x, pois quanto mais se aplica, mais se recebe ao final. Além disso, não é difícil verificar que o capital que se obterá satisfaz $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo x. Com efeito, esta igualdade quer dizer que não importa investir um capital inicial $x' = n \cdot x$ ou fazer n investimentos com capital inicial x reais, a resultante será a mesma.

Logo, pelo *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* (teorema 1), podemos concluir que $f(x)$ é proporcional a x, isto é, o capital final é proporcional ao capital inicial investido. Assim, se um investimento financeiro de 1,00 real resultar em um retorno de a reais no final de um ano, então o capital inicial x reais se transformará em $f(x) = a \cdot x$ no final de um ano.

No exemplo anterior, se a quantia x é investida durante um prazo determinado, gerando ao final deste período de aplicação o valor $f(x)$, constatou-se que $f(x)$ é uma *função afim*. Logo, para a primeira situação apresentada no Capítulo 2, cuja expressão resultante é $f(x) = 2 \cdot x + 1$ tem que o capital final do investimento terá característica de uma função *afim*.

A seção seguinte explicará a evolução da segunda situação apresentada no conto do jogo de xadrez.

3.6 Função exponencial

Para entender as *funções exponenciais* considere uma quantia C_0, aplicada a *juros* fixos, capitalizados continuamente. Chamando $c(t)$ de capital, gerado a partir desta quantia após decorrido o tempo t, certamente $c(t)$ é uma função crescente. (LAGES, 2017)

Nota-se ainda que se $t < t'$, então o acréscimo $c(t' + h) - c(t')$ sentido pelo capital após decorrido o tempo h, a partir do instante t', é maior do que o rendimento $c(t + h) - c(t)$ após decorrido o mesmo tempo h, porém a partir do instante t, pois o capital acumulado $c(t')$, visto que é maior de que $c(t)$, produzirá mais renda. Assim, $c(t)$ não é *função afim* de t, sendo que $c(t+h) - c(t)$ não depende unicamente de h, mas também de t, logo esta conclusão indica que precisamos de uma outra função matemática que descreva esta situação.

Mantendo a análise deste problema, nota-se que a diferença $c(t+h) - c(t)$ pode ser considerada como o *lucro* ganho quando foi investida a quantia $c(t)$ durante o prazo h. Assim, como visto, $c(t+h) - c(t)$ deve ser *diretamente proporcional* à quantia $c(t)$, ou seja, $c(t+h) - c(t) = \varphi \cdot c(t)$, onde a constante de proporcionalidade $\varphi = \varphi(h)$, depende do prazo h. Dessa forma, temos:

$$c(t+h) - c(t) = \varphi(h) \cdot c(t),$$

ou, de outro modo,

$$\varphi(h) = \frac{c(t+h) - c(t)}{c(t)} \tag{3.4}$$

A alegação de que, na Equação 3.4, $\varphi(h)$ depende apenas de h e não de t vem do fato de que a taxa de juros é fixa. Como, $\frac{c(t+h)-c(t)}{c(t)} = \frac{c(t+h)}{c(t)} - 1$, pode-se afirmar que a razão $\frac{c(t+h)}{c(t)}$ não depende de t.

Portanto, quando a taxa de juro é fixa, se $\frac{c(t_1+h)}{c(t_1)} = 2$, por exemplo, logo $\frac{c(t_2+h)}{c(t_2)} = 2$ para todo t_2 e mesmo h. Em resumo, quer dizer que o tempo h necessário para um capital *dobrar* é o mesmo em todos os momentos e a qualquer quantia de investimento.

Podemos concluir que a modelagem matemática que melhor descreve um capital aplicado a juros contínuos fixos, em função do tempo, deverá ser uma função *crescente* $c(t)$ cujo acréscimo $\frac{c(t+h)}{c(t)}$ dependa exclusivamente de h. Como veremos mais adiante, as únicas funções que possuem estas propriedades são as do tipo:

$$c(t) = C_0 \cdot a^t, \tag{3.5}$$

onde, C_0 e a são constantes, com a positiva distinta de um.

3.7 As características da função exponencial

Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$: (LAGES, 2017)

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;

Podemos observar que, se uma função f tem a propriedade 1), ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. De fato, pois se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

logo, f será identicamente nula.

Além disso, se f tem a propriedade 1) e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Assim, frente às propriedades 1) e 2), tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$, como dizer que é $\mathbb{R}^+$. É mais vantajoso tomar $\mathbb{R}^+$ como contradomínio, pois se terá f sobrejetiva, como veremos.

Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tem as propriedades 1) e 2), então para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + ... + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(1) = a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n.$$

Usando a propriedade 1), resulta das potências de expoente racional que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$. Portanto, $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade 3) fala que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Disso resultará, como veremos, que existe uma única forma de definir o valor $f(x) = a^x$, quando x é *irracional*. Dessa forma, supondo $a > 1$, então a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s$$

Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, para assumir o valor de a^x, com a propriedade anterior. Se existirem tais A e B, teríamos

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s$$

e, então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o Lema que diz:

Lema 1. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$. (LAGES, 2017)

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são potências a^s, com s racional maior do que x.

Ou seja, se uma função f possui as propriedades 1), 2) e 3), acima estipuladas para ser uma função exponencial, então o valor $f(x)$ com x irracional é dado por $f(x) = \lim f(r_n)$, onde (r_n) é uma sequência (crescente ou decrescente) de números racionais tais que $\lim r_n = x$.

Na prática, escrevendo $f(x) = a^x$ (onde $a = f(1)$), tomamos a expressão decimal $x = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ e temos $a^x = \lim a^{r_n}$, onde $r_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, não há maiores dificuldades para verificar que, de fato, as propriedades 1), 2) e 3) são válidas e é possível verificar também que:

4) A *função exponencial* é ilimitada superiormente;

5) A *função exponencial* é *contínua*;

6) A *função exponencial* é *sobrejetiva*.

As características anteriores são apresentadas no Apêndice A, pois estas não são relevantes a este trabalho. Retomando o exemplo, se a sequência formada pelos elementos do conjunto C, representado por

$$C = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\},$$

obtida na segunda situação apresentada no Capítulo 2, podem ser consideradas como conjunto imagem de uma função exponencial. De fato, o conjunto pode ser escrito da seguinte maneira:

$$C = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ...\}$$

Podemos notar imediatamente que os elementos do conjunto C seguem uma sequência de progressão geométrica de razão igual a dois.

3.8 Caracterização da Função Exponencial

Ao estudar fenômenos que impactam diretamente nossas vidas como, por exemplo, o número de indivíduos contaminados por uma doença, o crescimento populacional mundial, o retorno de um investimento financeiro, entre outros, faz-se necessário o planejamento ou mesmo um controle adequado. Dessa maneira, é essêncial conhecer as características inerentes às sequências de valores obtidos das pesquisas de tais eventos.

Para decidir se o modelo matemático a ser adotado é adequado para determinada situação, como no caso da segunda situação apresentada no Capítulo 2, devemos verificar se a função obtida tem características de uma função exponencial, ou seja, para que a escolha seja feita de modo apropriado, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função que, no nosso caso, serão expressas pelos teoremas que se seguem:

Teorema 3 (Caracterização da função exponencial)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (i.e., crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(n \cdot x) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (LAGES, 2017) Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. Para mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$ observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(r \cdot x) = f(x)^r$. Com efeito, como $m = n \cdot x$, podemos escrever

$$f(r \cdot x)^n = f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) = f(x)^m$$

logo, $f(r \cdot x) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Dessa forma, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(1 \cdot r) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Completando a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$ suponhamos, para fixar as ideias, que f seja crescente (para f decrescente é similar), logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitindo, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$, sendo que o caso de $f(x) > a^x$ seria tratado de maneira similar. Então, pelo Lema 1, exista um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ podemos concluir que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição finaliza a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$. As outras implicações $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$ são evidentes. $\square$

Nota-se que no teorema 3 a hipótese de monotonicidade pode ser substituída pela condição de f ser contínua. De fato, como sempre podemos aproximar um número real por números racionais, então se $x = \lim_{n\to\infty} r_n$, com $r_n \in \mathbb{Q}$, logo pela continuidade de f, deve ser

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$$

.

Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas.

Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Nota-se também que se a função g é do tipo exponencial, então para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. A recíproca é demonstrada a seguir.

Teorema 4 (Primeira caracterização das funções de tipo exponencial)**.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona e injetiva (i.e., crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{[g(x+h)-g(x)]}{g(x)}$ depende apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (LAGES, 2017) Como vimos, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde $b = g(0)$, obtemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ monótona e injetiva, com $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona e injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Segue-se então do Teorema 3 que $f(x) = a^x$, logo

$$g(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x.$$

□

Verifiquemos se o Teorema 4 é confirmado baseado no modelo da segunda situação apresentada e representada pela função

$$c(t) = 2^t,$$

para isso, fazemos $c(t+h) = 2^{t+h}$ e subtraindo $c(t)$ de ambos os lados da expressão anterior obtemos $c(t+h) - c(t) = 2^{t+h} - c(t)$, aplicando novamente a propriedade 1) da Seção 3.7

temos $c(t+h) - c(t) = 2^t \cdot 2^h - c(t)$, assim $c(t+h) - c(t) = c(t) \cdot 2^h - c(t)$, então temos que $c(t+h) - c(t) = c(t) \cdot (2^h - 1)$, logo

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{c(t)} = 2^h - 1.$$

Como vimos $\varphi(h) = \frac{c(t+h)-c(t)}{c(t)}$, assim conclui-se que $\varphi(h) = 2^h - 1$ depende exclusivamente de h. Dessa forma, a primeira caracterização dada no Teorema 4 se confirma para a função obtida da segunda situação do Capítulo 2.

Assim, podemos concluir que a função, obtida na segunda situação apresentada no Capítulo 2, é caracterizada por uma função exponencial, onde $C_0 = 1$ é o capital inicial de 1 real (1 grão de trigo). Logo, temos:

$$c(t) = C_0 \cdot 2^t = 1 \cdot 2^t$$

ou, simplesmente:

$$c(t) = 2^t \tag{3.6}$$

3.9 Comparando a Exponencial com Outras Funções

Quando tratamos com fenômenos cuja evolução é acentuada poucas funções conseguem superar as exponenciais. Como o próprio nome da função já diz "*exponencial*" é sinônimo de *enorme*, *imenso*, *descomunal*, *gigantesco*, entre outros. Assim, esta seção tem como objetivo mostrar que o crescimento exponencial é mais acentuado, é maior, que cresce mais rápido de que em outras funções. Observe as tabelas, elaboradas pelo autor, a seguir:

Tabela 8 – Caso 1

x	$2 \cdot x^5$
1	2
2	64
3	486
4	2048
⋮	⋮

Tabela 9 – Caso 2

x	$2 \cdot x^3$
1	2
2	16
3	54
4	128
⋮	⋮

Tabela 10 – Caso 3

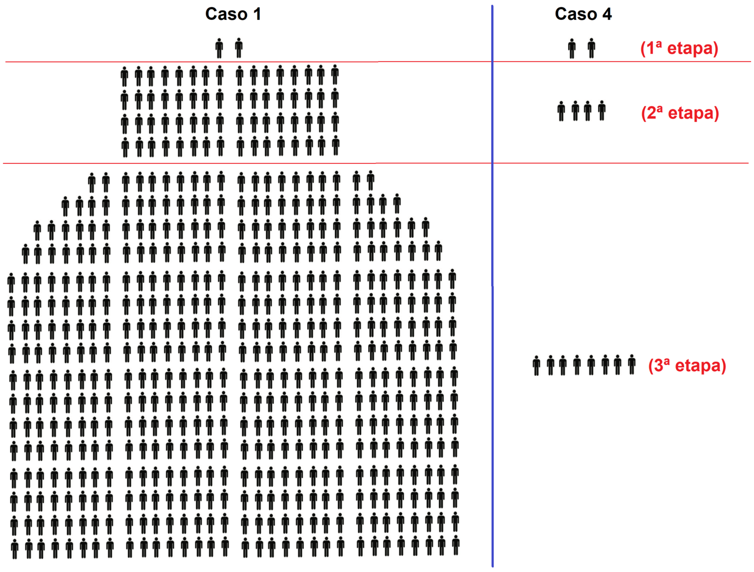
x	$(1,1)^x$
1	1,1
2	1,21
3	1,331
4	1,4641
⋮	⋮

Tabela 11 – Caso 4

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
⋮	⋮

As tabelas 8 e 9 representam funções chamadas *polinomiais*, enquanto que as tabelas 10 e 11 representam as funções exponenciais. Quando comparamos as funções polinomiais e também as exponenciais entre si, chegamos a conclusão de que o crescimento será mais acentuado nas funções polinomiais quanto maior for o expoente da potência e nas funções exponenciais, quanto maior a base da potência. Contudo, comparando visualmente as tabelas de maiores crescimentos, nos casos 1 e 4, temos:

Figura 8 – Evolução dos casos 1 e 4



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando que na Figura 8 tivéssemos as evoluções de dois tipos distintos de epidemias, qual tem o crescimento mais acentuado?

Se o caro leitor pensou que é evidente ser o *caso 1*, você não está sozinho, muitos subestimam o desenvolvimento de funções como a do *caso 4*. Este tipo comum de erro é conhecido como "*viés de crescimento exponencial*", tal comportamento descreve a dificuldade de se raciocinar em termos de *juros compostos*, o que pode nos levar a menosprezar seus efeitos a longo prazo. Dessa forma, na próxima seção mostraremos matematicamente que o crescimento é sempre mais acentuado em funções exponenciais.

3.10 Comparativo de Crescimento Entre os Casos 1 e 4

Para realizar a comparação entre os casos 1 e 4, apresentados na Seção 3.9, precisamos utilizar conceitos da Matemática como: *infinito*, *limites* e *derivadas*, assim para simplificar deixamos ao leitor o aprofundamento nesses assuntos, nesta seção faremos uma apresentação mais intuitiva.

Se considerarmos a divisão de 1 pelo número x, isto é, considerarmos o número

$$\frac{1}{x}$$

é intuitivamente claro que,

- $\frac{1}{x}$ será um número cada vez menor se x toma valores cada vez maiores;
- $\frac{1}{x}$ será um número cada vez maior se x toma valores cada vez menores e positivos.

Este fato intuitivo é perfeitamente explicado com o conceito matemático de limite, esse conceito nos permite afirmar que,

- $\frac{1}{x}$ pode ficar tão próximo de zero quanto desejarmos, desde que tomemos x suficientemente grande;
- $\frac{1}{x}$ pode ficar tão grande quanto desejarmos, desde que tomemos x suficientemente pequeno.

Ou, em símbolos:

- $\frac{1}{x} \to 0$, quando $x \to +\infty$;
- $\frac{1}{x} \to +\infty$, quando $x \to 0$, para valores positivos.

Com a notação padrão de limites, seria:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Mas, geralmente o conceito de limite permite estudar o comportamento de um dado fenômeno modelado por uma função, digamos $f(x)$, quando os valores de x se aproximam de algum valor de interesse, digamos x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$), ou quando os valores de x são cada vez maiores ($x_0 = +\infty$).

Neste caso, escrevemos: (NETO, 2015)

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, para dizer que os valores de $f(x)$ ficam tão grandes quanto desejados, desde que tomemos valores de x suficientemente próximos de x_0. Em símbolos matemáticos, isto é traduzido por:

Para todo número $M > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$, desde que $0 < |x - x_0| < \delta$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, onde $L \in \mathbb{R}$, para dizer que os valores de $f(x)$ ficam próximos do número L tanto quanto desejado, desde que os valores de x sejam suficientemente grandes. Em símbolos matemáticos:

Para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número $k > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, desde que $x > k$.

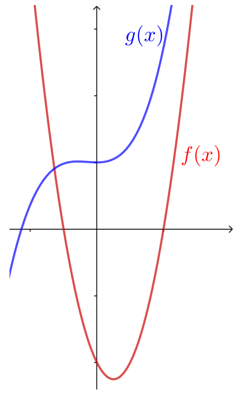
Naturalmente, como queremos "comparar" o maior crescimento entre duas funções, digamos $f(x)$ e $g(x)$, quando os valores de x são cada vez maiores ($x \to +\infty$), podemos analisar a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ e estudar seu comportamento quando x for muito grande, isto é, estudar se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe ou não. Se existir e o limite for igual a zero, podemos entender que os valores de $g(x)$ "dominam" os valores de $f(x)$. Por outro lado, se o limite for infinito, então devemos entender que os valores de $f(x)$ "dominam" os valores de $g(x)$, para valores de x suficientemente grandes, isto é, a partir de um certo valor de x é isso que acontecerá.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

Figura 9 – Gráficos genéricos de $f(x)$ e $g(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Naturalmente, analisar a existência do limite L, sendo L um número ou $L=+\infty$, muitas vezes não é imediato. Por exemplo:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

Se $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=x-1$ não é difícil verificar que ambas funções tem limite igual a zero, quando x se aproxima de 1. Sendo assim, aparentemente teríamos:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}$$

Mas, $\frac{0}{0}$ não é um número, é uma indeterminação, assim como $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, 0^∞, entre outras. O leitor mais atento pode ter reparado que,

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=x+1.$$

Logo, não é dificil de acreditar que,

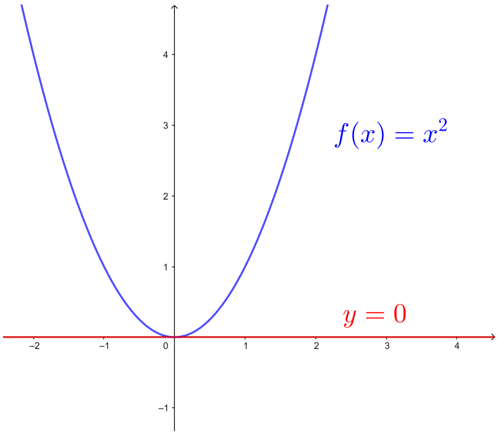
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}x+1=2,$$

isto é, os valores de $\frac{x^2-1}{x-1}$ se aproximam do número 2, quando tomarmos valores de x próximos de 1. Mas, o artifício algébrico utilizado acima nem sempre será possível. Por exemplo,

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{sen(x)},$$

existe? É infinito? Note que como $\lim_{x\to0}x^2=0$ e $\lim_{x\to0}sen(x)=0$, então temos a indeterminação $\frac{0}{0}$ e não podemos utilizar algum artifício algébrico como no caso anterior. Para entender melhor como proceder nestes casos, observemos que ambas funções, $f(x) = x^2$ e $g(x) = sen(x)$, possuem reta tangente a seus respectivos gráficos no ponto $(0, f(0)) = (0, g(0))$ (lembre que $x_0 = 0$ é o nosso ponto de interesse no comparativo de $f(x)$ com $g(x)$ quando x está próximo de x_0).

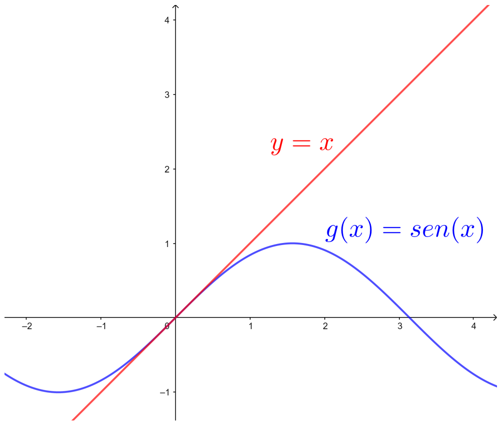
Figura 10 – Gráfico de $f(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$y = 0$ é a reta tangente ao gráfico de f em $(0, f(0))$

Figura 11 – Gráfico de $g(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$y = x$ é a reta tangente ao gráfico de g em $(0, g(0))$

É possível provar que num intervalo suficientemente pequeno contendo $x_0 = 0$, a função $f(x) = x^2$ pode ser aproximada pela reta $y = 0$ (reta tangente a f) e a função $g(x) = sen(x)$, pela reta $y = x$ (reta tangente a g). Isto, graficamente nos diz que, para valores suficientemente próximos de $x_0 = 0$, a curva determinada pelo gráfico de $f(x)$ (respectivamente, $g(x)$) e a reta $y = 0$ (respectivamente, $y = x$), são próximos (vide figuras 10 e 11). Em símbolos:

$$y = x^2 \sim y = 0$$

$$y = sen(x) \sim y = x$$

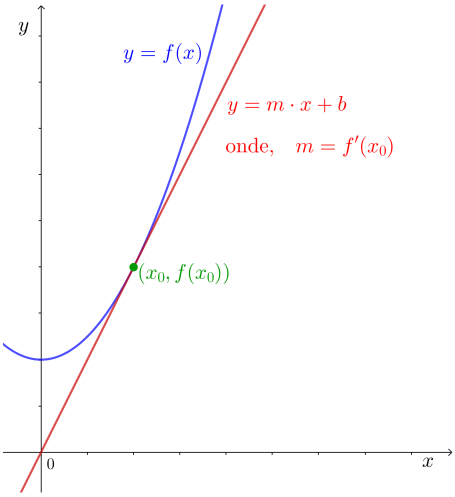
para todo x suficientemente próximo de $x_0 = 0$.

Funções com essa característica especial são chamadas de funções que possuem derivada em $x_0 = 0$ e usamos o símbolo $f'(0)$ para representar a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$. No exemplo em questão para a função $f(x) = x^2$ temos $f'(0) = 0$ e para a função $g(x) = sen(x)$ temos $g'(0) = 1$. Note que podemos analisar o caso genérico e querer saber se a função possui derivada em qualquer ponto x, logo reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$ e,

$$y = f(x) \sim y = m \cdot x + b$$

numa vizinhança de x. Neste caso a derivada de f no ponto x, mais precisamente, $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente (c.f. 12).

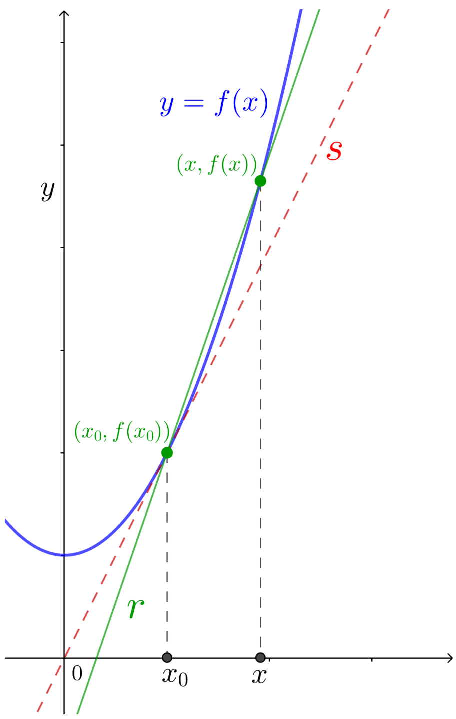
Figura 12 – Representação gráfica de $f(x)$ e $f'(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Não é difícil provar que, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = sen(x)$, então $f'(x) = 2 \cdot x$ e $g'(x) = cos(x)$. Note que, para garantir a existência da reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$, bastará garantir que a inclinação das retas secantes ao gráfico de $y = f(x)$ (c.f. 13) convirjam para um número quando nos aproximamos do ponto de interesse $x = x_0$. Assim, a definição formal diz:

Figura 13 – Retas, secante r e tangente s, em $(x_0, f(x_0))$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

desde que o limite exista.

Retornando a nosso assunto inicial, é possível provar que (NETO, 2015) se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ provoca uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{\infty}$ ou $\frac{\infty}{0}$ e as funções $f(x)$ e $g(x)$ possuem derivada em x_0, então (regra de *L'Hospital*)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e, naturalmente, se o último limite provoca ainda indeterminação como as apontadas acima e as novas funções, f' e g', possuem derivadas em x_0, então

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

e o processo, sob as condições necessárias, continua até a indeterminação não existir mais. No exemplo anterior, $f(x)=x^2$ e $g(x)=sen(x)$, aplicando a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{sen(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x}{cos(x)}=\frac{0}{1}=0$$

Lembremos que queremos comparar a "velocidade" de crescimento das funções

$$f(x)=2\cdot x^5 \quad \text{e} \quad g(x)=2^x,$$

quando x toma valores cada vez maiores.

Ainda para este caso ($x\to+\infty$) a regra de L'Hospital continua válida e é possível provar que,

$$f'(x)=2\cdot 5\cdot x^4,\quad f''(x)=2\cdot 5\cdot 4\cdot x^3,\ldots,\quad f^{(5)}(x)=2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

e

$$g'(x)=2^x\cdot\ln(2),\quad g''(x)=2^x\cdot\ln^2(2),\ldots,\quad g^{(5)}(x)=2^x\cdot\ln^5(2).$$

Como, $\lim_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=+\infty$ para $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ e $\lim_{x\to+\infty}f^{(5)}(x)=2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, assim como $\lim_{x\to+\infty}g^{(n)}(x)=\lim_{x\to+\infty}=2^x\cdot\ln^{(n)}(2)=+\infty$ para $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$, então:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot x^5}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^x\cdot\ln^5(2)}=\frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\infty}=0$$

mostrando assim que $g(x)=2^x$ cresce mais rápido que $f(x)=2\cdot x^5$ a partir de um valor de x. Podemos observar tal comparativo de crescimento na Tabela 12 abaixo:

Tabela 12 – Crescimento dos casos 1 e 4

x	$2 \cdot x^5$	2^x
1	2	2
2	64	4
3	486	8
4	2.048	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
23	12.872.686	8.388.608
24	15.925.248	16.777.216
25	19.531.250	33.554.432
26	23.762.752	67.108.864
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Mas, ainda é possível de provar, seguindo o mesmo argumento que, se $g(x)$ é uma função do tipo exponencial, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{g(x)} = 0,$$

para todo polinômio $P(x)$ de qualquer grau, isto garante que as funções do tipo exponencial crescem mais rapidamente que qualquer polinômio.

Uma pergunta natural é, será que existe alguma função que cresça mais rapidamente que uma do tipo exponencial? A resposta é sim, funções do tipo fatorial (muito comuns em problemas de combinatória), mais precisamente é possível provar que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

Daremos uma ideia desta afirmação. Note que não é difícil de verificar que, a partir de um valor de n (neste caso, não muito grande), $e^n < n!$. De fato, por exemplo para $n = 10$, temos:

$$e^{10} < 3^{10} < 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 < 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 < 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

assim, $e^{10} < 10!$. Desta última desigualdade e por argumentos de indução em n, é fácil provar que

$$e^n < n!, \quad \forall\, n \geq 10.$$

Mas isso não prova que $n!$ cresce mais rapidamente que e^n. Para demonstrar isto, bastará provar que $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$. Vejamos isto, note que para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ temos uma sequência

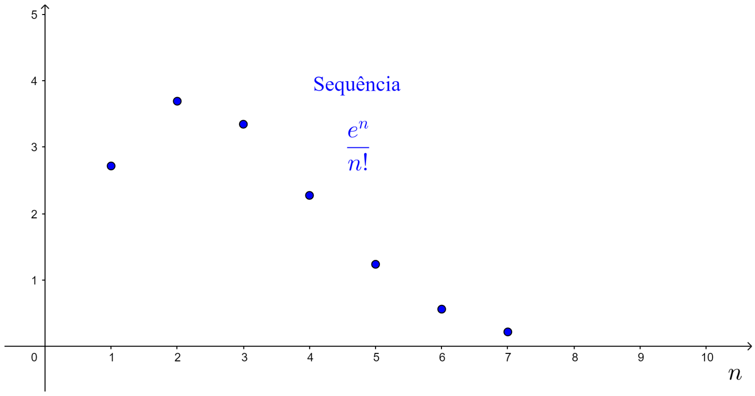
$$\left(\frac{e^1}{1!}, \frac{e^2}{2!}, \frac{e^3}{3!}, \ldots, \frac{e^n}{n!}, \ldots \right)$$

com as seguintes características:

(i) $\frac{e^n}{n!} > 0$, para todo $n \geq 0$;

(ii) A partir de um valor de n, a sequência é decrescente.

Figura 14 – Gráfico da sequência de pontos da razão entre exponencial e fatorial em n



Fonte: Elaborada pelo autor.

A primeira característica é imediata, para verificar a segunda basta comparar dois termos consecutivos e genéricos, x_{n+1} com x_n, da referida sequência. Isto é, se

$$x_n = \frac{e^n}{n!} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}$$

então,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{e^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot e^n} = \frac{e}{(n+1)}.$$

Como claramente esta expressão, $\frac{e}{(n+1)}$, é menor que um para todo $n \geq 2$, podemos concluir que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Provando assim que, a sequência $(x_n = \frac{e^n}{n!})$, é decrescente. Um resultado clássico da teoria das sequências numéricas garante que toda sequência, satisfazendo os itens (i) e (ii) descritos acima, é convergente (NETO, 2015, capítulo 2), sendo assim podemos afirmar que o limite, digamos L, existe. Em símbolos:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = L$$

Para provar que $L = 0$ usamos o seguinte artifício, como

$$x_{n+1} = \frac{e}{n+1} \cdot x_n$$

aplicando o limite, quando $n \to +\infty$, em ambos membros obtemos que $L = 0 \cdot L$, de onde $L = 0$. Conclusão,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

Provando assim que $n!$ tem um crescimento mais acentuado que e^n. Em símbolos:

$$e^n << n!$$

Um argumento similar permite provar que

$$e^n << n! << n^n.$$

Já pensou num vírus com crescimento de contágio fatorial $(n!)$ ou do tipo potência n^n?

CAPÍTULO

4

SITUAÇÃO FINANCEIRA INUSITADA

A Matemática Financeira é um ramo da matemática incumbida de estudar os fenômenos relacionados às finanças. Além disso, seus conceitos se fazem muito importantes no nosso cotidiano visto que estão cada vez mais presentes, seja no momento de comprar algo ou realizar um investimento, entre outros. Quando ingressamos no mundo das instituições financeiras, sem conhecer a fundo como as coisas funcionam, podemos nos deparar com problemas que levarão grandes períodos de tempo para se resolver e também podem fazer aparecer restrições que podem nos acompanhar por uma vida inteira.

Assim, vejamos a seguir alguns conceitos desta área de conhecimento que são essenciais para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho como, por exemplo, *capital*, *acréscimos*, *descontos*, *juros simples* e *juros compostos*, porém boa parte dos conceitos que veremos dependem das chamadas *porcentagens*, contudo ficará a cargo do leitor interar-se sobre o tema.

4.1 Alguns Conceitos da Matemática Financeira

A ideia de capital ou *capital financeiro*, na área da Economia, são quaisquer depósitos bancários, títulos e ações capazes de gerar um fluxo de rendimentos ao longo do tempo por meio de sua aplicação, também conhecida por *capitalização*. Esse conceito inclui não só o dinheiro propriamente dito, mas também os investimentos financeiros, os estoques e os bens que podem ser aplicados para produzir riqueza, dentre outros.

A concepção de acréscimos está associada a *acrescentar* ou *adicionar* parte do valor ao valor original, ou seja, adicionamos uma determinada porcentagem do valor em si próprio. Dessa forma, podemos estabelecer matematicamente que a fórmula para os acréscimos, considerando um valor qualquer x e uma porcentagem $p\%$ ou $\frac{p}{100}$, é:

$$x + p\% \cdot x = x + \frac{p}{100} \cdot x = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

O conceito de desconto é semelhante ao acréscimo, a diferença é que ao invés de adicionar, deve-se *subtrair* ou *retirar* parte do valor ao valor original, ou seja, retiramos uma determinada porcentagem do valor nele mesmo. Assim, considerando os mesmos elementos x e $p\%$, matematicamente tem-se:

$$x - p\% \cdot x = x - \frac{p}{100} \cdot x = x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

A essência do *juros simples* (J) também é similar a ideia do acréscimo, sua diferença é dada pelo período (tempo) em que são calculados. Enquanto a taxa (tributo) de acréscimo é aplicada uma vez, a do juros simples é determinada em um intervalo de tempo. Podemos calcular o juros simples de determinado capital C, aplicado à taxa de juros simples i, considerando um período de tempo t, pela fórmula:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

O valor resgatado ou pago ao final dessa aplicação deve ser dado pelo dinheiro aplicado (capital) mais o valor do juros, esse valor recebe o nome de *montante* M. Dessa forma, tal montante é representado por:

$$M = C + J \tag{4.1}$$

substituindo a expressão do juros simples na Equação 4.1, obtemos:

$$M = C + C \cdot i \cdot t$$

ou, simplesmente:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t) \tag{4.2}$$

No juros simples, o valor da taxa de juros é sempre calculado em cima do capital inicial, a diferença entre os dois sistemas, juros simples e juros compostos, está definitivamente nesse ponto, ou seja, na forma como a taxa é calculada. No *juros composto*, a taxa de juros é sempre calculada em cima do capital do mês anterior, isso faz com que o juros aumente de maneira substancial (ou como veremos, exponencial) seu valor. Observe que se consideramos, na Equação 4.2, $t = 1$ como o tempo decorrido de taxação em cada período de aplicação, temos:

- determinação do montante em um único período de capitalização.

$$M_1 = C \cdot (1 + i \cdot 1) = C \cdot (1 + i)$$

- determinação do montante em dois períodos de capitalização.

$$M_2 = M_1 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$

- determinação do montante em três períodos de capitalização.

$$M_3 = M_2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3$$

- determinação do montante em n períodos de capitalização.

$$M_n = M_{n-1} \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^n$$

Logo, considerando $n = t$ como o período de tempo após a incidência da taxa de juros, a fórmula para se calcular o montante, no sistema de capitalização em juros compostos, é dada por:

$$M = C \cdot (1+i)^t \tag{4.3}$$

4.2 Uma situação inusitada

Após nos familiarizarmos com esses conceitos da Matemática Financeira, torna-se instintivo e bastante atraente viver dela, visto que a dependência do dinheiro se faz presente a todo momento, seja para pequenas ou grandes realizações. É uma enorme proeza fazer com que o dinheiro trabalhe sozinho e gere riqueza no mundo das finanças, entretanto requer muito conhecimento, vigilância e cautela.

Pensando nisso, propomos o cenário a seguir, com base na função 3.6, obtida na segunda situação e apresentada no final do Capítulo 3. Observando-a por mais um momento vemos que, ao manipulá-la temos que,

$$c(t) = C_0 \cdot 2^t,$$

passaria a ser escrita da seguinte forma:

$$c(t) = C_0 \cdot (1+1)^t$$

Chamamos a atenção do leitor para que perceba a semelhança com a fórmula de juros compostos (4.3) onde, $c(t)$ é o montante (M) da capitalização, aplicando um capital inicial C_0, por exemplo, a uma taxa de juros i de 100% ao ano, ou seja, $i = 1$, no final do período desse ano da aplicação, $t = 1$, o capital claramente dobraria.

Se $i = 1$, na função 4.3, temos $c(1) = C_0 \cdot (1+1)^1$, logo $c(1) = 2 \cdot C_0$.

Porém, perceba que se a capitalização for semestral, ou seja, dividindo pela metade a taxa de juros i de 100% ao ano, seria de 50% ao semestre, então em um ano, isto é, $t = 2$ períodos de aplicação, o capital aumentaria mais do que seu dobro.

Para $i = 50\%$ ou $i = \frac{1}{2}$, na função 4.3, temos $c(2) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$, logo $c(2) = 2,25 \cdot C_0$.

Se a capitalização for mensal, então a taxa de juros efetiva da aplicação seria $i = \frac{100\%}{12}$ ou $i = \frac{1}{12}$, na função 4.3, temos $c(12) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$, assim $c(12) = C_0 \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^{12}$, logo $c(12) \approx 2,61 \cdot C_0$.

Fica claro, mesmo àqueles com pouca afinidade no ramo das finanças, que independente da taxa de juros, quanto mais períodos de tempo aplicarmos, sobre a mesma taxa de juros, maior será o resgate da aplicação (montante). Isso nos leva a uma expressão genérica para o capital acumulado ao final de um ano, em juros compostos capitalizados continuamente e t períodos, a uma taxa $i = \frac{1}{t}$ no seguinte formato:

$$c(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \tag{4.4}$$

A pergunta que talvez possamos fazer para este exemplo é:

Será que poderíamos triplicar, quadruplicar ou aumentar indefinidamente esse montante?

A resposta, como veremos a seguir é não! Haverá, como dizemos hoje, um limite para o aumento desse montante. No exemplo, quando a taxa (i) de juros é 100% ou 1 ao ano, aplicando períodos de capitalização ($\frac{1}{t}$) com t cada vez maiores na função 4.4, temos a tabela de montantes que se segue:

Tabela 13 – Tabela de acréscimos de períodos

período de capitalização	t	$c(t)$
anual	1	$2 \cdot C_0$
semestral	2	$2,25 \cdot C_0$
trimestral	4	$2,441... \cdot C_0$
bimestral	6	$2,521... \cdot C_0$
mensal	12	$2,6130... \cdot C_0$
semanal	52	$2,6926... \cdot C_0$
diário	365	$2,714567... \cdot C_0$
hora	8.760	$2,718127... \cdot C_0$
minuto	525.600	$2,7182792... \cdot C_0$
segundo	31.536.000	$2,71828178... \cdot C_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se na tabela que mesmo se fosse feito investimento com capitalizações a cada segundo, o montante obtido aumentaria até um limite de aproximadamente 2,72 vezes o capital inicial, sem nunca ultrapassá-lo.

4.3 Um número constante representado por e

Parece peculiar que um valor constante tenha sido notado em situações que envolvam a Matemática Financeira, para alguns (MAOR, 2006) os matemáticos já o conheciam 50 anos antes do surgimento do cálculo. Uma possível explicação para este fato seria de que alguém teria notado, em algum momento, que este número aparece espontaneamente no cálculo de juros compostos.

De fato, com a fórmula de juros compostos dada por:

$$c(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{t}\right)^t$$

Onde, $c(t)$ é o montante da aplicação na data t, C_0 o capital inicial investido na capitalização, i a taxa de juros por período e t é a frequência de capitalização durante esse período.

Podemos observar, pela Tabela 13, que mesmo aumentando consideravelmente os períodos t de capitalização, o valor do montante vai convergindo para um número constante, onde o capital inicial C_0 poderá assumir quaisquer valores, porém $c(t)$ estará cada vez mais próximo de $2,71828178 \cdot C_0$, mas sem nunca ultrapassá-lo.

Com o estudo do *Cálculo Diferencial e Integral*, como veremos mais adiante, nos moldes de Newton e Leibniz (1665-1727), o surgimento de novas ferramentas matemáticas possibilitou a análise no desenvolvimento do conceito de limite (Seção 3.10). Este fato permitiu compreender, por exemplo, que para valores de t cada vez maiores, a expressão $(1+\frac{1}{t})^t$ se aproxima de um número irracional que é, comumente, denotado por e. Mais precisamente, a expressão $(1+\frac{1}{t})^t$ toma valores tão próximos do número e quanto desejarmos, desde que tomemos valores de t suficientemente grandes. Em símbolos escrevemos:

$$lim_{t\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

Sabe-se que $e \approx 2,71828182845904...$ e, podemos provar que $lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{i}{t}\right)^t = e^i$.

Logo, no cenário proposto na Seção 4.2, o cálculo do montante de uma capitalização contínua de um valor inicial C_0, para uma taxa i de juros infinitamente computada no final de um ano, é dado por:

$$M = C_0 \cdot e^i$$

4.4 O número e e o logaritmo

Na transição do século XVI para o XVII, a humanidade foi testemunha de uma grande expansão do conhecimento científico e da exploração marítima. Em 1569, Galileu Galilei com os fundamentos da ciência mecânica, Johannes Kepler com as leis dos movimentos planetários e grande parte da comunidade científica, precisavam de um modelo aritmético mais simples para realizar cálculos com grandes quantidades de dados (MAOR, 2006). Por volta de 1594, Napier aceitou a tarefa que tomou 20 anos de sua vida, ele imaginou que, se todo número positivo pudesse ser escrito na forma de potência, cuja base seja algum número constante dado (Equação 4.5), todo trabalho com produtos e quocientes seriam reduzidos a, respectivamente, somas e diferenças de expoentes. Esta propriedade exponencial foi percebida 50 anos antes por Michael Stifel quando ele estudava a relação entre fatores de uma progressão geométrica, porém seu foco eram expoentes inteiros.

Napier foi mais longe, expandindo tais expoentes a um intervalo contínuo de valores e, ao completar a tarefa, batizou sua criação de *"número proporcional"* ou *logaritmo*:

$$N = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{10^7})^L \tag{4.5}$$

Para Napier, L é o logaritmo de N e para $L = 0$ na Equação 4.5, temos que $N = 10^7$.

Entretanto as definições feitas por Napier não mantinham as propriedades desejadas como, por exemplo, o logaritmo do produto. Assim, para ele, o problema consistia em encontrar qual seria a *base perfeita* para expressar qualquer número positivo na forma de uma potência. Após debater com seus pares sobre seu trabalho concluíram que a base 10 seria mais apropriada sendo que, algum tempo depois, foi substituída pela definição generalizada de Euler para qualquer base positiva na forma:

$$N = b^L \tag{4.6}$$

Onde, L é o logaritmo de N na base b e para $L = 0$ na Equação 4.6, temos que $N = 1$.

Napier aproximou-se muito da base que imaginava ser a mais apropriada, contudo estima-se que ele tenha chegado próximo a $\frac{1}{e}$, onde e é o número caracterizado na seção anterior, hoje conhecido como *inverso multiplicativo* de e, ou seja, e^{-1}. Tempos depois a constante e ficou reconhecida como a base *universal* ou a base *natural* dos logaritmos. (MAOR, 2006)

Podemos notar ao longo da história que existe muito misticismo em torno deste número, não podemos afirmar com certeza sua verdadeira origem, porém sua presença ficou marcada em vários ramos da Matemática. Sabemos que foi o símbolo adotado por Leonhard Euler desde 1727, porém também é conhecido como *número de Napier*, pois aparece como uma citação na famosa tábua de logaritmos de John Napier (c.f. 15), publicadas em 1614 em Edimburgo, a *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio* (Descrição canônica magnífica de logaritmos).

Figura 15 – Tábua de Logaritmos

Fonte: Dorce (2014, p.39).

Temos falado muito em logaritmos, pois, a função logarítmica é a inversa da função exponencial, ou seja, existe uma reciprocidade entre essas funções, em outras palavras uma desfaz o que a outra fez.

Como vimos a criação dos logaritmos foi motivada inicialmente pela necessidade de uma ferramenta para simplificação de cálculos, porém através do tempo o desenvolvimento e bem estar da humanidade passou a ser o objetivo central de pesquisas em diversas áreas do conhecimento, de forma que o estudo de fenômenos naturais, como: terremotos, reprodução de microrganismos, nível de acidez das substâncias, a deterioração da matéria, entre muitos outros, ganhassem o destaque que merecem e estabelecem a presença marcante dos logaritmos naturais e, consequentemente, da exponencial cuja base natural é a constante e. (MAOR, 2006)

4.5 Significado geométrico do número e

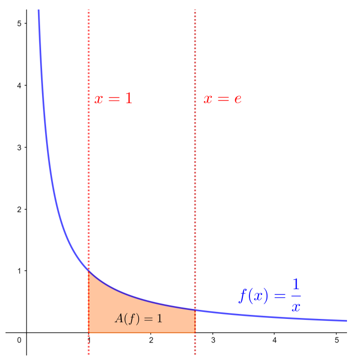
O número e é um ente matemático, uma constante irracional provada por Leonhard Euler e outros matemáticos. Como vimos no Capítulo 4 ele não surgiu de uma criação, já estava aqui, apenas foi notado, característica essa que lhe atribuiu o adjetivo - natural, assim nesta seção destacaremos sua presença na Geometria.

O estudo da quadratura das formas geométricas tornou-se comum entre vários matemáticos da antiguidade, a aplicação do método da exaustão de Arquimedes para o cálculo de áreas de formas como as curvas, demonstrou-se um verdadeiro desafio para essas mentes iluminadas, principalmente quanto a cônica conhecida como *Hipérbole* representada pela função abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{4.7}$$

Podemos dizer que o *Cálculo* é o estudo das funções, motivado por alterações nas variáveis. Quando essas mudanças são muito pequenas (*infinitesimais*), elas formam o *Cálculo Diferencial*, contudo quando tais mudanças são muito pequenas e cumulativas, surge o *Cálculo Integral*. Em geral, podemos dizer que a integral de uma função no cálculo foi criada para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano.

Figura 16 – Área sob a Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, com o cálculo diferencial e integral, a dificuldade encontrada pelos antigos geômetras com relação ao estudo das quadraturas pôde ser superado, pois com a Equação 4.7 e conhecendo o exato valor de e, baseado numa propriedade observada por Gregory de St. Vicent a respeito das áreas sob o gráfico da função, pode-se determinar a área sob uma hipérbole. (MAOR, 2006)

É possível provar que a integral (área na Figura 16) definida da função 4.7 no 1º quadrante do plano cartesiano é igual a 1, quando as retas perpendiculares ao eixo x que limitam tal função, passam pelos pontos $(1,0)$ e $(e,0)$, ou seja, a área abaixo desta hipérbole será igual a 1 entre as retas $x = 1$ e $x = e$. Dessa forma, podemos dizer que o número e curiosamente aparece como um dos limites que definem a área unitária abaixo da curva hipérbólica modelada pela função, sendo expressa matematicamente da seguinte forma:

$$A(f) = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = 1.$$

CAPÍTULO

5

FENÔMENO COM VARIAÇÃO ACENTUADA

Neste capítulo tratamos com o exemplo de um fenômeno que devido sua variabilidade acentuada pode ser estudado, na forma mais elementar, por função exponencial, porém não limitado a ela. Em especial, propomos a comparação visual simples entre a pandemia de *Covid-19* e as curvas exponenciais.

5.1 A pandemia de coronavírus

Nos dias atuais a humanidade tem presenciado, senão a maior, uma das maiores calamidades do século XXI, um surto que se transformou numa epidemia viral e que, rapidamente, foi caracterizada como *pandemia*. Causada por um vírus comum da família coronavírus, chamado cientificamente de *SARS-COV-2*, este tipo de microrganismo é responsável por provocar a chamada *Síndrome Respiratória Aguda Grave* (em inglês, *Severe Acute Respiratory Syndrome*), cujos efeitos são potencialmente perigosos aos seres humanos.

Foi identificado inicialmente em dezembro de 2019 em *Wuhan*, uma cidade da China, onde alguns profissionais da saúde do país perceberam que pessoas estavam com uma gripe que evoluia rapidamente para quadros graves, em certos casos fatais, de pneumonia.

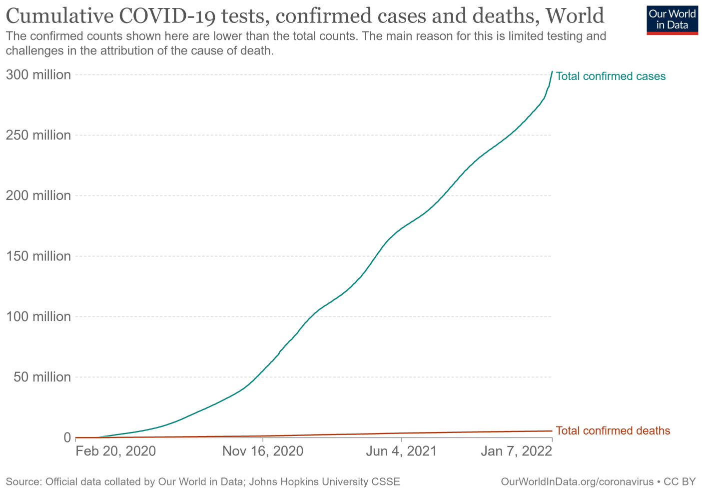
Segundo a *Organização Mundial da Saúde - OMS* essa enfermidade (c.f. 17), até o início do ano de 2022 infectou mais de 300 milhões de indivíduos ao redor do mundo, levando a morte mais de 5 milhões deles. (Apêndice C)

Para este trabalho obtivemos as informações, relativas ao número de casos confirmados e mortes na pandemia, com base no *Projeto SP Covid-19 Info Tracker*, trata-se da concentração de esforços de iniciativas e ações provomidas pelas frentes de pesquisa científica, acadêmica e agências de fomento à pesquisa.

Este projeto, em particular, reune pesquisadores da *UNESP - Universidade Estadual Paulista*, *USP - Universidade de São Paulo*, *CEPID-CeMEAI - Centro de Ciências Matemáticas*

Aplicadas à Industria, com suporte da *FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo* e da *FUNDACTE - Fundação de Ciências, Tecnologia e Ensino - FCT/UNESP*.

Figura 17 – Dados acumulados de casos confirmados e mortes por Covid-19 no mundo

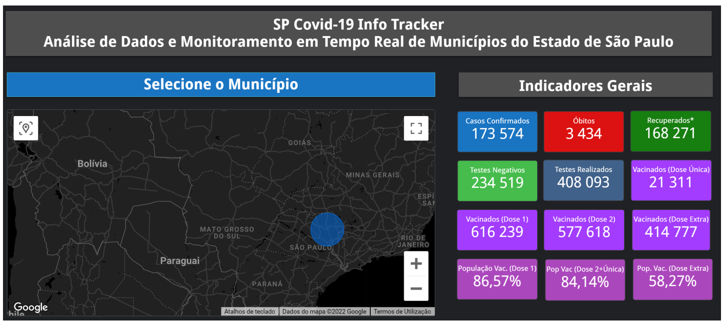


Fonte – https://ourworldindata.org/coronavirus-data

Até dezembro de 2022 o projeto acompanhou 92 municípios no estado de São Paulo, o que corresponde a aproximadamente 35 milhões de pessoas. A coleta de dados teve início em 26 de março de 2020, sendo que sua base de dados é atualizada diariamente pelos orgãos da saúde dos municípios no período noturno, após as 20:00 horas.

Destacamos neste documento as informações relativas ao município de Ribeirão Preto (c.f. 18), visto que o caso está mais próximo da nossa realidade. Embora a modelagem matemática empregada pelo *Projeto SP Covid-19 Info Tracker* não esta baseada em funções exponenciais, mas em ferramentas computacionais mais sofisticadas, no nosso trabalho temos a intenção de estabelecer comparações com os gráficos obtidos na plataforma em determinados períodos deste fenômeno e analisá-los via funções exponenciais.

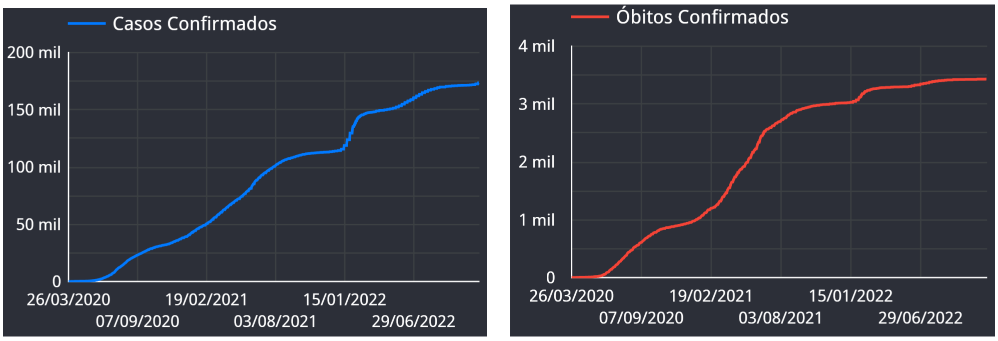
Figura 18 – Indicadores pelo Projeto SP Covid-19 Info Tracker de Ribeirão Preto até dezembro 2022



Fonte – https://datastudio.google.com/u/0/reporting/5b72d54e-a0c2-4748-acf0-9688f42278aa/page/spmIB

Nas figuras, 19a e 19b abaixo, são apresentados os gráficos dos números de casos confirmados e números de óbitos confirmados nesse município pela plataforma *Info Tracker*, cujos dados foram coletados no intervalo compreendido entre os dias 26/03/2020 e 09/12/2022.

Figura 19 – Gráficos de indicadores de Ribeirão Preto até dezembro 2022



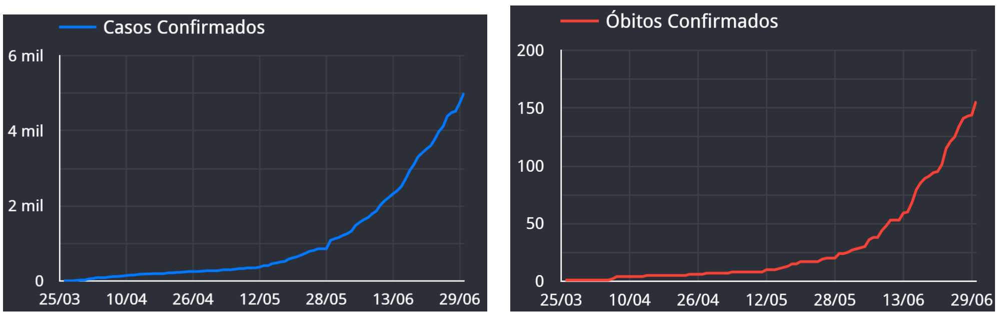
(a) Número de casos confirmados (b) Número de óbitos confirmados

Fonte – https://datastudio.google.com/u/0/reporting/5b72d54e-a0c2-4748-acf0-9688f42278aa/page/w39PB

As curvas de crescimentos relativas às figuras 19a e 19b são semelhantes as chamadas *curvas de crescimento logístico ou sigmoidais* que relacionam-se a fenômenos de crescimentos populacionais, pois as *curvas de crescimentos exponenciais* são situações pouco sustentáveis por um longo período, visto que dependem de quantias infinitas de recursos.

Considerando que o crescimento populacional pode ocorrer durante certo tempo se houver poucos indivíduos e muitos recursos (c.f. 20), entretanto quando o número de indivíduos cresce demasiadamente os recursos começam a se esgotar reduzindo a taxa de crescimento, dessa forma, tal variação se estabilizará ou diminuirá (c.f. 21). Em suma, podemos dizer que o crescimento exponencial ocorre quando a taxa de variação da população permanece a mesma, independente do tamanho da população, enquanto que o crescimento logístico acontece quando a taxa de variação de determinada população aproxima-se do seu máximo.

Figura 20 – Gráficos dos indicadores de Ribeirão Preto entre 26/03 e 29/06/2020

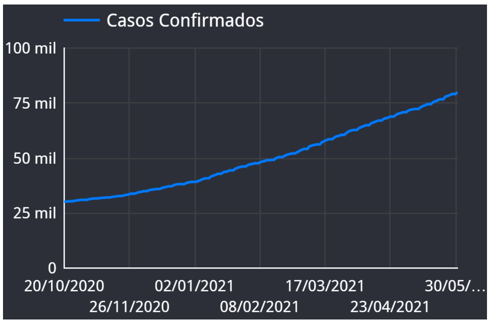


(a) Casos confirmados no período (b) Óbitos confirmados no período

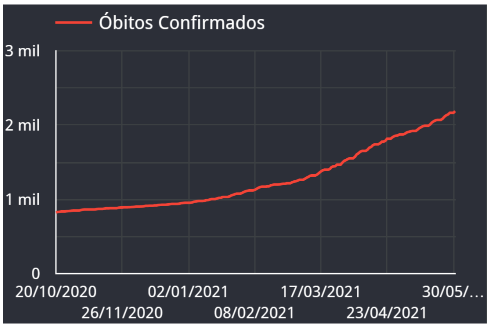
Fonte – https://datastudio.google.com/u/0/reporting/5b72d54e-a0c2-4748-acf0-9688f42278aa/page/w39PB

Podemos observar nos gráficos apresentados na plataforma *Info Tracker* (c.f. 21) que, a taxa de crescimento dos números de casos e óbitos sofrem diminuições a medida que os protocolos sanitários, sugeridos pela Organização Mundial da Saúde (OMS), são aplicados com mais rigor e, novamente, quando começam a serem oferecidos tratamentos (vacinação) que amenizam os sintomas agravantes da Covid-19 no início do ano de 2021. Um ponto que ainda precisa ser investigado é seu grau de diminuição atribuído ao fator de imunização natural, pois conforme muitos indivíduos são contaminados, produzem anticorpos capazes de resistir aos piores sintomas e, estes por sua vez, deixam de recorrer as instituições ligadas à saúde.

Figura 21 – Gráficos dos indicadores de Ribeirão Preto entre 20/10/2020 e 31/05/2021



(a) Casos confirmados no período



(b) Óbitos confirmados no período

Fonte – https://datastudio.google.com/u/0/reporting/5b72d54e-a0c2-4748-acf0-9688f42278aa/page/w39PB

Como mencionamos anteriormente, separando intervalos de tempo específicos da pandemia, podemos notar a grande semelhança com os gráficos de funções exponenciais. Podemos ver, nos três primeiros meses da pandemia na Figura 20, que a taxa de crescimento representa ser alta, esta característica confere ao gráfico um aspecto de curva acentuada, enquanto que na Figura 21 aparentemente a taxa de crescimento desacelerou, conferindo a curva um aspecto menos acentuado.

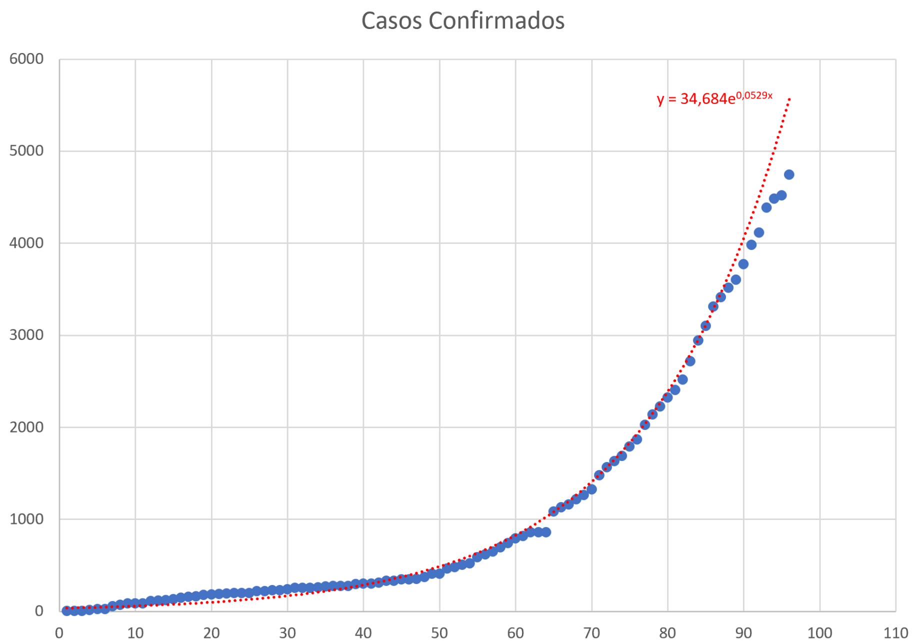
Destacando a série de dados da Figura 20a, apresentada no Apêndice A, podemos estabelecer uma aproximação simplificada desta com as funções exponenciais. Para isso, podemos utilizar um programa do tipo planilha eletrônica ou construção gráfica, inserimos os dados, por exemplo, relativos ao número de casos confirmados no período de 26/03 a 29/06/2020 em Ribeirão Preto, geramos seu gráfico e aplicamos uma *linha de tendência do tipo regressão não-linear exponencial*[1].

Na Figura 22 a seguir a curva tracejada em vermelho representa a linha de tendência, em regressão exponencial sobre a série de dados do exemplo, oferecida pelo programa *Microsoft Office Excel*, sendo que o mesmo resultado é obtido pelo *Geogebra*, dada pela seguinte expressão:

[1] Em estatística regressão não-linear é uma técnica em que dados observados podem ser modelados por um tipo de função cujo gráfico não seja uma reta, no nosso caso, por uma função do tipo exponencial.

$$y = 34,684 \cdot e^{0,0529 \cdot x} \tag{5.1}$$

Figura 22 – Gráfico tipo dispersão de pontos de casos confirmados de Ribeirão Preto



Fonte: Elaborada pelo autor.

Onde, no eixo horizontal x estão dispostos os dias (tempo) e no eixo vertical y estão os números de casos confirmados. Vemos que a linha de tendência em regressão exponencial do gráfico se encaixa muito bem entre os pontos da série de dados do intervalo, porém é realmente uma aproximação grosseira da realidade. Até dezembro de 2022 a população da cidade de Ribeirão Preto era de aproximadamente 711 mil habitantes, então se considerarmos a equação $f(x) = 711000$ na incógnita x, podemos determinar a partir de quantos dias após o início da pandemia todos os habitantes de Ribeirão Preto seriam contaminados. Assim, temos:

$$34,684 \cdot e^{0,0529 \cdot x} = 711000, \quad \text{então} \quad x = \frac{\ln \frac{711000}{34,684}}{0,0529}, \quad \text{logo} \quad x \approx 187,677$$

Resolvendo o valor de x na igualdade anterior conclui-se que em aproximadamente 188 dias após o início da pandemia em 26/03/2020, segundo os dados da Info Tracker, a população de Ribeirão Preto estaria toda contaminada, porém na Figura 18 podemos notar que até dezembro de 2022 pouco mais de 173 mil casos confirmados foram registrados. Isso significa que caso medidas não fossem tomadas e a taxa de evolução da pandemia não diminuísse, em pouco mais de seis meses de pandemia o número de infectados atingiria a totalidade dos habitantes da cidade.

A seguir trataremos sobre a taxa de crescimento da pandemia de Covid-19, assim torna-se necessário destacar que, para o intervalo de dados proposto, a taxa de contaminação apresentada na Equação 5.1 tem o valor do número e, porém aplicando uma propriedade de potência pode-se simplificar tal expressão da seguinte forma:

$$y = 34,684 \cdot \left(e^{0,0529}\right)^x$$

como, $e^{0,0529} \approx 1,054$, segue que

$$y = 34,684 \cdot 1,054^x. \tag{5.2}$$

Dessa forma, na Equação 5.2 que representa o intervalo de dados da pandemia na cidade de Ribeirão Preto da Figura 20a, porém com expoente inteiro, tem uma taxa de crescimento próxima a 1,054.

5.2 A taxa de crescimento da pandemia

Ao lidarmos com problemas relacionados a saúde, principalmente nos casos de epidemias, conhecer a taxa de propagação de um vírus em meio a uma população de indivíduos é essencial. Para isso, é necessário utilizar um indicador conhecido como *número efetivo de reprodução da infecção* (R_e ou R_t), onde R_e é o número médio de contagiados por cada infectado nas condições existentes em dado momento.

Conhecer este indicador permite o planejamento adequado quanto às medidas cautelares ou demandas de recursos e equipamentos ao combate da epidemia. Um R_e equivalente a 1 significa que cada infectado transmite a doença para mais uma pessoa, porém um indicador acima deste valor indica a necessidade de manutenção das medidas de controle do malefício. Segundo epidemiologistas a flexibilização das medidas de combate e controle da epidemia poderá ser relaxada quando o indicador R_e estiver entre 0,7 ou 0,8 tendo em vista que com a flexibilização dos protocolos e a intensificação dos contatos sociais os vírus encontram-se novamente em condições de se disseminar.

Segundo a epidemiologista Maria Amélia Veras, do Departamento de Saúde Coletiva da FCM-SCSP, integrante do Observatório Covid-19 BR, entrevistada pela revista Pesquisa da Fapesp (Apêndice C), uma variação supostamente pequena no fator R_e, por exemplo da cidade de São Paulo, de 0,95 para 1,05 acarretaria no aumento de mais 100 mil casos em um mês. Este tipo de ocorrência levaria ao esgotamento acelerado dos leitos de hospitais, equipamentos de respiração mecânicos, medicamentos, entre outros, o que causaria terrivelmente a morte de muitos indivíduos. Salienta ainda sobre a importante necessidade da coleta precisa de informações, acerca do acompanhamento da evolução da epidemia para a determinação do número de reprodução efetiva da doença, de forma que o planejamento de contramedidas sejam feitos de maneira mais realista possível.

O Observatório Covid-19 BR é um dos grupos responsáveis pelo valor do R_e no Brasil, segundo seus integrantes a realização do cálculo do número de reprodução efetiva da doença não é o ideal com a base de dados disponível, porém pode ser feito. Tendo em vista que leva em conta o acompanhamento hospitalar de pacientes com a síndrome, contudo estimam que de 80 a 90% dos casos não causam internações, além disso a falta de regularidade na inserção de informações dificulta ainda mais os cálculos.

De acordo com especialistas na área, o cálculo do R_e leva em conta o *número básico de reprodução da infecção*, denotado por R_0, que determina a infectividade de um patógeno em um ambiente ao qual nenhum indivíduo possui imunidade a ele. Para o cálculo do R_0 são utilizadas três informações:

- o número de contatos que uma pessoa infectada tem com indivíduos suscetíveis;
- o risco de transmissão em cada contato realizado;
- o tempo médio de transmissão da doença pelo infectado.

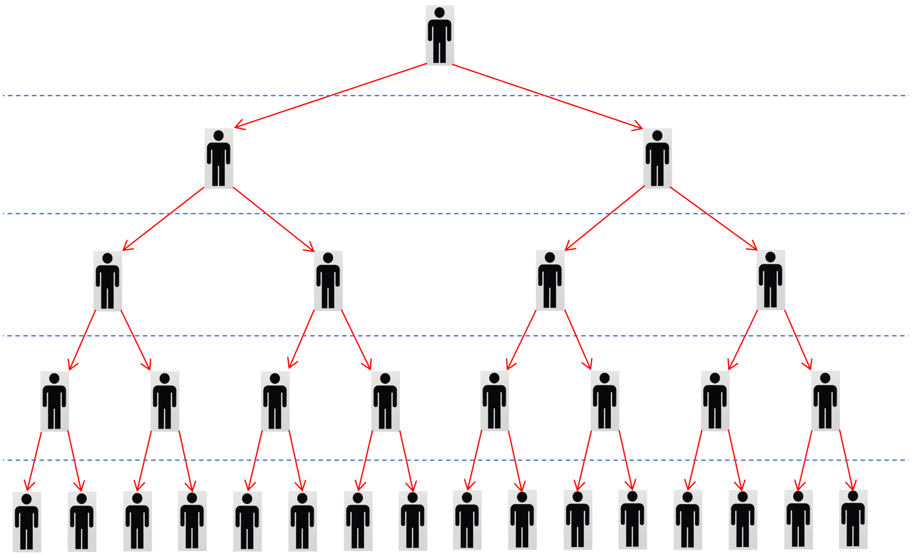
Em resumo, estabelecem que o R_e é o R_0 dentro de condições reais de evolução da doença. Na mesma entrevista para a revista Pesquisa da Fapesp (Apêndice C), o professor Guilherme Werneck do Instituto de Estudos em Saúde da UFRJ apresenta a seguinte escala decrescente do fator R_0 de algumas enfermidades infectocontagiosas:

- Sarampo - $R_0 = 15,6$
- Catapora - $R_0 = 11,3$
- Caxumba - $R_0 = 8,1$
- Rubéola - $R_0 = 7,0$
- Varíola - $R_0 = 5,2$
- Poliomielite - $R_0 = 4,9$
- Covid -19 - $R_0 = 2,5 \quad \text{a} \quad 3,0$
- Gripe espanhola - $R_0 = 1,5 \quad \text{a} \quad 4,0$
- H1N1 (2009) - $R_0 = 1,46$
- Gripe comum - $R_0 = 1,2$

Observando o item destacado acima podemos perceber que, em se tratando da Covid-19, um indivíduo infectado por esta doença em um ambiente sem imunidade contaminaria de dois a três novos indivíduos. Sendo otimistas considerando no intervalo de R_0 o limite inferior de contágio, ou seja, dois novos infectados a cada contato, sem a adoção dos protocolos sanitários chegamos muito próximos a situação apresentada no Capítulo 1 sobre a demanda do inventor do jogo de xadrez ao imperador, porém caso fossemos pessimistas e adotássemos o R_0 no limite superior de contágio, a situação se agravaria muito mais rapidamente.

Imagine que em uma pequena cidade do interior, com aproximadamente dois mil habitantes, exista apenas um único hospital, tal instituição de saúde possui vinte leitos de UTI totalmente disponíveis durante o início da pandemia de Covid-19. Adotando o fator otimista de R_0, citado anteriormente, apresentamos a seguir o diagrama de árvore que representaria o início das contaminações da cidade em questão.

Figura 23 – Evolução do número de contaminados com Covid-19



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 23 cada linha tracejada corresponde a duração de um dia completo de contaminações por Covid-19, porém sem que sejam adotadas contramedidas no combate desta doença infectocontagiosa. Com base nas informações apresentadas até agora propomos, para reflexão do leitor, os seguintes questionamentos:

1-) Após quantos dias de contágio, sem que sejam adotados protocolos sanitários, o número de leitos da UTI se esgotarão, se todos os casos desenvolverem quadros de sintomas graves?

2-) Após sete dias de contágio, sem que sejam adotados protocolos sanitários, qual o número de habitantes contaminados na cidade?

3-) Após quantos dias de contágio, sem que sejam adotados protocolos sanitários, o número de habitantes contaminados na cidade atingiria sua totalidade?

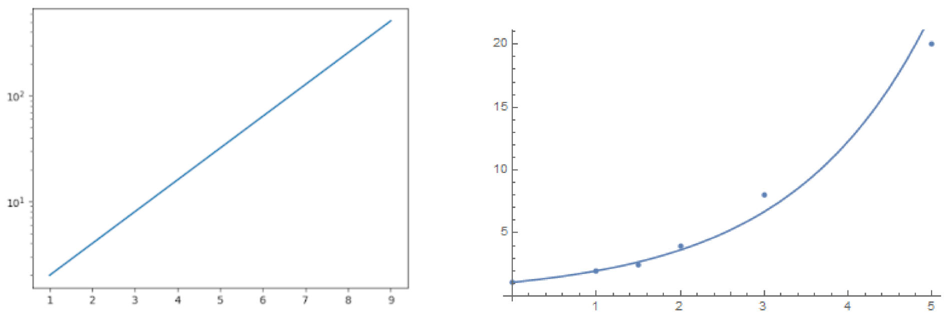
4-) Quais as consequências econômicas e sociais recairiam sobre os cidadãos deste município, no caso de negligenciarem os protocolos sanitários?

5.3 Um fenômeno mal-interpretado

Como vimos na Seção 3.9 (Capítulo 3), o viés de crescimento exponencial pode prejudicar a interpretação do desenvolvimento de um fenômeno. Devido a linearidade tão presente em nossas vidas somos, muitas vezes, compelidos a acreditar que toda evolução se dá de forma constante.

Alguns estudos mostraram que as pessoas suscetíveis ao viés estão menos preocupadas com a disseminação do Covid-19 e menos inclinadas a adotar medidas como distanciamento social, higiêne das mãos ou uso de máscaras (protocolos sanitários). Pesquisadores atribuem este fato, em parte, a representação gráfica em escala logarítmica de fenômenos como a evolução do número de infectados na pandemia, ou seja, fenômenos com grande variação na vertical. Nesta escala os valores posicionados no eixo y seguem uma escala de potências de dez, assim começa em 1, depois 10, 100, 1000, ..., 10^n, esta ferramenta aproxima curvas exponenciais à retas.

Figura 24 – Gráfico de uma função exponencial



(a) em escala logarítmica (b) em escala normal

Fonte – vide link no Apêndice C

Segundo tais pesquisadores, as emissoras de televisão inicialmente mostravam a evolução da pandemia em escala logarítmica, devido ao fato de que as pessoas comuns entendem melhor a imagem de uma reta ascendente, o que poderia ter potencializado o efeito do viés de crescimento exponencial. Deixaram de mostrar um elemento muito importante deste tipo de fenômeno, seu crescimento acentuado não-linear.

Fazendo uma estimativa grosseira sobre a pandemia de coronavírus, adotando uma taxa de contaminação média de 2,5 (otimista) em qualquer parte do mundo, sem que fossem adotados os protocolos sanitários, em apenas 25 dias toda população mundial já teria sido infectada. Considerando que, na pior das hipóteses, 1% das pessoas infectadas não sobrevivam, segundo estimativa da *O.M.S.*, haveriam entre 70 e 80 milhões de mortes, fazendo com que a Covid-19 estivesse entre as cinco piores pandemias já enfrentada pela humanidade.

Felizmente as ideias e opiniões das pessoas são flexíveis, logo pela simples participação em experimentos práticos as pessoas podem melhorar muito sua percepção de propagação da doença ou fenômenos, assim apresentamos no capítulo a seguir duas práticas de sala de aula.

CAPÍTULO

6

DISCUTINDO A FUNÇÃO EXPONENCIAL EM SALA DE AULA

Durante as aulas do ensino médio as funções são abordadas constantemente, contudo nem sempre ficam explícitas as diferenças entre seus diversos tipos, principalmente quando lidamos com as funções lineares e as funções exponenciais que, como vimos anteriormente, somos linearmente tendendiosos.

Em quase todos os ciclos de ensino a aprendizagem da forma abstrata como tradicionalmente é utilizada, dificulta ainda mais a compreensão de conceitos essenciais da Matemática, em parte pela própria falta de aplicações concretas sobre algum assunto ou mesmo sua complexidade. Dessa forma, a união da teoria com a prática torna-se um elo poderoso na educação, favorecendo um aprendizado dinâmico e protagonizado pelo próprio aluno.

Neste capítulo propomos experimentos práticos que podem ajudar na compreensão de que nas funções lineares a taxa de crescimento é constante, enquanto que nas funções exponenciais a taxa de crescimento é variada e acentuada, com base nas competências e habilidades definidas pela *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*.

6.1 Prática 1 - Simulando um investimento financeiro

Em muitos países desenvolvidos a educação doméstica e financeira fazem parte de seus currículos acadêmicos, visto que desde pequenos somos atraídos pelos nossos objetos de desejo e somos orientados que eles possuem um valor, seja financeiro, emocional, social, entre outros. Caso tal desejo tenha um valor financeiro, somos imediatamente levados a cobiça pelo dinheiro, pois sem ele nada pode ser resolvido, até que as vendas em crediários foram criadas .

A dúvida que, normalmente, paira sobre o consumidor é em qual tipo modalidade de pagamento deve-se investir, fazer a compra a vista ou a prazo, qual será a mais vantajosa? A resposta para esta questão é depende, pois se os valores a serem pagos a vista ou a prazo forem iguais, então a compra a prazo é mais vantajosa, tendo em vista que sabemos, o valor do dinheiro muda com o tempo.

Contudo, se na venda a vista tivermos um desconto percentual, desde que acima dos rendimentos comuns oferecidos por instituições financeiras, então a compra a vista torna-se muito mais atraente. Além disso, sabemos que com o dinheiro em mãos barganhas extras podem ser feitas, todavia a grande dificuldade nesta modalidade é resistir ao tempo de aquisição do bem.

A prática proposta nesta seção, além dos objetivos deste trabalho, incentiva e exercita a economia de dinheiro para a modalidade de compra a vista, pois é comum a muitos pais de famílias estimular a autonomia financeira de seus filhos com uma renda mensal chamada *mesada*.

6.1.1 A poupança familiar

Pedro é um empresário de sucesso que adora brincar com a Matemática, possui dois filhos, Ana de onze anos e Jorge, com quatorze. Certo dia, num passeio pela cidade com a família é abordado pelas crianças, Ana pediu um celular novo e Jorge um computador para seus estudos, embora Pedro não tivesse problemas financeiros e ambos objetos de desejo dos filhos custassem R$ 2.000,00 cada, pensou ser a oportunidade certa de ensinar a eles como economizar e valorizar seu dinheiro.

Pedro, muito astuto, apresenta a seguinte proposta aos filhos. Ele lhes daria os dois mil reais de uma única vez com a restrição de que cada filho compre seu presente só depois que guardasse em seu cofrinho todo o dinheiro já recebido, porém depositando valores que seguiriam dois padrões distintos diariamente, sendo que

- Jorge deve guardar R$ 0,10 no primeiro dia e a cada dia seguinte deverá guardar o dobro da quantia guardada no dia anterior,
- Ana deve guardar R$ 2,00 no primeiro dia e a cada dia seguinte deverá guardar dois reais a mais da quantia que guardou no dia anterior.

Para garantir que quando seus filhos atingissem o objetivo os presentes seriam comprados, Pedro fixa na sala de sua casa uma tabela para o acompanhamento do progresso dos depósitos feitos por cada um deles. Sendo o filho que compraria primeiro seu presente, aquele que esgotasse todo dinheiro recebido.

Tabela 14 – Acompanhamento dos depósitos diários de Ana e Jorge

Dias	1º	2º	3º	4º	5º	6º	...
Jorge	0,10	0,20	0,40	0,80	1,60	3,20	...
Ana	2	4	6	8	10	12	...

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.1.2 Recursos utilizados para a prática 1 em sala de aula

Segue abaixo a lista de recursos necessários na realização do experimento:

- 70 moedas de 10 centavos confeccionadas em cartolina;
- 103 cédulas de 1 real confeccionadas em papel;
- 39 cédulas de 10 reais confeccionadas em papel;
- 35 cédulas de 100 reais confeccionadas em papel;
- 2 caixas ou sacolas simulando os cofres;
- calculadora;
- cronômetro;
- folha da atividade impressa.

As quantidades dos item descritos formam um kit para o grupo, logo deve-se multiplicar tais quantidades pelo número de grupos formados para a atividade.

6.1.3 Definição das etapas da prática 1

- Organizar a turma em grupos, entre 3 e 5 alunos;
- Dentro de cada grupo definir os personagens sendo: O pai, Ana, Jorge e assistente para cada filho;
- Distribuir o formulário da prática (Apêndice B) entre os grupos;
- Realizar o experimento prático;
- Responder os questionamentos propostos no formulário;
- Realizar apresentação dos resultados e conclusões;
- Finalizar o experimento refletindo sobre o assunto.

6.1.4 Desenvolvimento da prática 1

Este experimento prático foi elaborado com duração de duas aulas de 45 minutos cada, sendo que ele deverá ser realizado na primeira aula e a segunda, destinada a esclarecimentos e conclusões sobre o tema. Após organizar a turma e distribuir os materiais utilizados para o personagem pai, que será o responsável em conferir o valor de cada depósito feito no cofre, cada grupo será responsável pelo progresso da sua atividade.

Após a realização da leitura da prática pelos integrantes do grupo, os mesmo devem registrar em campo específico do formulário (Apêndice B) suas primeiras impressões sobre a possível conclusão. Defina, dentro do prazo de aula disponível, o tempo para separação do valor do depósito e a realização do mesmo, entre 2 e 3 minutos, esclareça que tais tempos simulam o depósito no cofre realizado a cada dia.

Os personagens de assistentes dos filhos ficam responsáveis em marcar na tabela do formulário o valor de cada depósito a ser realizado, bem como realizar os cálculos do total acumulado após cada depósito. Os personagens filhos são encarregados de separar os valores dos depósitos a serem realizados e guardá-los no cofre após a conferência do personagem pai. Segue-se o procedimento durante 6 depósitos, em seguida são questionados novamente se reafirmam sua convicção sobre a conclusão da prática. O experimento prático termina quando um dos personagens filho depositar o último valor disponível em sua posse.

6.2 Prática 2 - Simulando um contágio viral

Este experimento foi utilizado pelo professor Yedlin (Apêndice C) da *Universidade da Colúmbia Britânica*, no curso intitulado "Viver com Armas Nucleares? Controle de Armas e Tecnologias de Verificação", o exercício mostra a diferença entre crescimento linear e exponencial.

6.2.1 Recursos utilizados para a prática 2 em sala de aula

Segue abaixo a lista de recursos necessários na realização do experimento:

- sala de aula;
- alunos;
- lousa e giz;
- cronômetro.

6.2.2 Definição das etapas da prática 2

- Organizar a sala de aula, deixar apenas as cadeiras alinhadas em disposição retangular;
- Dividir a lousa em cinco espaços;
- No 1° espaço da lousa escrever os objetivos da aula;
- No 3° espaço da lousa desenhar três tabelas;
- No 4° e 5° espaços da lousa desenhar dois planos cartesianos;

- Selecionar dois alunos como assistentes, o responsável pelo cronômetro e outro pela anotação dos resultados na lousa;
- No 2° espaço anotar o número de participantes, o tempo de duração da primeira simulação, o tempo da segunda simulação e o tempo da terceira simulação;
- Definir o marco inicial de contágio, adotando preferencialmente as posições localizadas nos cantos da disposição das cadeiras.

6.2.3 Desenvolvimento da primeira simulação

Inicialmente, anunciamos e marcamos as regras com a qual se dará a simulação na lousa. Supomos que o toque realizado por cada aluno indicará uma contamição e leva cerca de 1 segundo para ocorrer. O toque poderá acontecer apenas naqueles que se encontram no entorno do aluno que já está contaminado. Cada aluno que seja tocado deve se levantar, porém aqueles que estão em pé, não podem ser tocados novamente.

Na primeira simulação, o aluno sentado na cadeira, adotada como marco de início da contaminação, se levanta e deve tocar no ombro de apenas um aluno que esteja imediatamente a sua direita, esquerda, atrás ou a frente, dependendo da posição inicial da simulação, assim que o processo se inicia, com o levantamento do primeiro aluno, o assistente com o cronômetro deve começar a contar o tempo.

O segundo aluno contaminado deve levantar-se e tocar no ombro de outro, seguindo o mesmo procedimento realizado pelo primeiro e, assim sucessivamente até que o último aluno seja atingido. Quando o último aluno levantar-se o cronômetro será pausado e, o assistente de lousa, deve marcar na lousa a informação quanto ao tempo de duração total obtido na simulação.

Após a marcação dos dados observados, o professor pode apresentar de alguns questionamentos para a turma da seguinte forma:

1- Qual foi o tempo real médio de contágio?

2- Quais devem ser os dois primeiros valores a serem postos na tabela da primeira simulação?

3- O número de pessoas contaminadas foi constante ou variou a cada intervalo de tempo?

Com o auxílio do professor, o assistente de lousa deve preencher a primeira tabela de forma que obtenha:

Tabela 15 – Evolução da contaminação na primeira simulação

tempo, em segundos	0	1	2	3	4	5	6	7	...	30	...
alunos contaminados	1	2	3	4	5	6	7	8	...	31	...

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a tabela o professor poderá exercitar a identificação e obtenção da lei de formação da simulação.

6.2.4 Desenvolvimento da segunda simulação

Adotamos o mesmo protocolo estabelecido na primeira simulação, porém desta vez, o aluno sentado na cadeira, adotada como marco de início da contaminação, se levanta e deve tocar no ombro de apenas dois alunos que estejam imediatamente atrás e a esquerda ou, a frente e a direita, dependendo da posição inicial da simulação, assim que o processo se inicia, com o levantamento do primeiro aluno, o assistente com o cronômetro deve começar a contar o tempo.

Os segundos alunos contaminados devem levantar-se e tocar nos ombros de outros dois colegas, seguindo o mesmo procedimento realizado pelo primeiro aluno e, assim sucessivamente até que os últimos alunos sejam atingidos. Quando os últimos alunos levantarem-se o cronômetro será pausado e, o assistente de lousa, deve marcar na lousa a informação quanto ao tempo de duração total obtido na simulação.

Após a marcação dos dados observados, o professor deve repetir os questionamentos da primeira simulação para a turma e acrescentar os seguintes:

4- Qual das simulações apresentou o crescimento mais rápido?

5- Mudando o marco inicial de contágio, a contaminação acontecerá mais rápido ou mais devagar?

Com o auxílio do professor, o assistente de lousa deve preencher a segunda tabela de forma que obtenha:

Tabela 16 – Evolução da contaminação na segunda simulação

tempo, em segundos	0	1	2	3	4	5	...
alunos contaminados	1	2	4	8	16	32	...

Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, utilizando a tabela o professor pode exercitar a identificação e obtenção da função da simulação.

6.3 Uso de experimentos práticos

Com a realização de experimentos práticos, todas atividades voltadas ao protagonismo e dinamismo dos estudantes, têm um efeito positivo muito significativo em seu aprendizado, a união da teoria com a prática traz consigo eficiência e eficácia. Aulas práticas marcam profundamente, como um aprendiz de artesão criando a mão sua primeira peça, mostram quais as dificuldades encontradas, trazem momentos de discussão, propostas de soluções e, na maioria dos casos, reformulação de ideias e entendimentos.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações: ensino médio. **Obra em**, v. 3, 2016. Citado na página 32.

DORCE, C. Un paseo histórico por la invención de los logaritmos. v. 75, p. 33–42, 03 2014. Citado na página 60.

LAGES, L. E. Números e funções reais. **Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro**, 2017. Citado nas páginas 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 95, 96 e 97.

MAOR, E. **e: história de um número**. [S.l.]: Libraria, 2006. Citado nas páginas 58, 59, 60, 61 e 62.

NETO, A. C. M. Fundamentos de cálculo. **Rio de janeiro: SBM**, 2015. Citado nas páginas 47, 50 e 53.

TAHAN, M.; LINHARES, T. Q. de. **O homem que calculava**. [S.l.]: Record, 2010. Citado na página 22.

APÊNDICE

A

SÉRIE DE DADOS DO INFO TRACKER

As tabelas e figuras da série de dados foram coletadas no site Info Tracker, são relativos a cidade de Ribeirão Preto e foram utilizadas as informações de número de casos confirmados e óbitos confirmados nos gráficos da Figura 20.

Tabela 17 – Série de dados do Info Tracker - 26/03 a 14/04/2020

Dia	*Data*	*Casos Confirmados*	*Óbitos Confirmados*
1	26/03/2020	4	1
2	27/03/2020	4	1
3	28/03/2020	4	1
4	29/03/2020	14	1
5	30/03/2020	25	1
6	31/03/2020	25	1
7	01/04/2020	54	1
8	02/04/2020	69	1
9	03/04/2020	88	1
10	04/04/2020	88	1
11	05/04/2020	88	1
12	06/04/2020	110	2
13	07/04/2020	116	4
14	08/04/2020	122	4
15	09/04/2020	130	4
16	10/04/2020	146	4
17	11/04/2020	157	4
18	12/04/2020	161	4
19	13/04/2020	178	4
20	14/04/2020	184	5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 18 – Série de dados Info Tracker - 15/04 a 24/05/2020

Dia	*Data*	*Casos Confirmados*	*Óbitos Confirmados*
21	15/04/2020	189	5
22	16/04/2020	191	5
23	17/04/2020	197	5
24	18/04/2020	197	5
25	19/04/2020	197	5
26	20/04/2020	217	5
27	21/04/2020	217	5
28	22/04/2020	228	5
29	23/04/2020	230	5
30	24/04/2020	241	6
31	25/04/2020	252	6
32	26/04/2020	253	6
33	27/04/2020	253	6
34	28/04/2020	259	7
35	29/04/2020	270	7
36	30/04/2020	274	7
37	01/05/2020	274	7
38	02/05/2020	274	7
39	03/05/2020	295	7
40	04/05/2020	300	8
41	05/05/2020	300	8
42	06/05/2020	313	8
43	07/05/2020	330	8
44	08/05/2020	330	8
45	09/05/2020	349	8
46	10/05/2020	349	8
47	11/05/2020	351	8
48	12/05/2020	370	10
49	13/05/2020	409	10
50	14/05/2020	409	10
51	15/05/2020	464	11
52	16/05/2020	479	12
53	17/05/2020	507	13
54	18/05/2020	521	15
55	19/05/2020	586	15
56	20/05/2020	618	17
57	21/05/2020	648	17
58	22/05/2020	693	17
59	23/05/2020	740	17
60	24/05/2020	794	17

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 19 – Série de dados Info Tracker - 25/05 a 29/06/2020

Dia	*Data*	*Casos Confirmados*	*Óbitos Confirmados*
61	25/05/2020	815	19
62	26/05/2020	860	20
63	27/05/2020	860	20
64	28/05/2020	860	20
65	29/05/2020	1082	24
66	30/05/2020	1128	24
67	31/05/2020	1160	25
68	01/06/2020	1217	27
69	02/06/2020	1261	28
70	03/06/2020	1325	29
71	04/06/2020	1480	30
72	05/06/2020	1563	36
73	06/06/2020	1633	38
74	07/06/2020	1690	38
75	08/06/2020	1791	44
76	09/06/2020	1865	48
77	10/06/2020	2028	53
78	11/06/2020	2139	53
79	12/06/2020	2227	53
80	13/06/2020	2321	59
81	14/06/2020	2406	60
82	15/06/2020	2517	68
83	16/06/2020	2715	79
84	17/06/2020	2941	85
85	18/06/2020	3101	89
86	19/06/2020	3308	91
87	20/06/2020	3412	94
88	21/06/2020	3514	95
89	22/06/2020	3600	101
90	23/06/2020	3771	115
91	24/06/2020	3981	121
92	25/06/2020	4113	125
93	26/06/2020	4385	134
94	27/06/2020	4483	141
95	28/06/2020	4520	143
96	29/06/2020	4746	144

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Dados do Info Tracker - Ribeirão Preto - 26/03 a 29/05/2020

Data	1ª Dose	2ª Dose	Casos Confirmados	Novos Casos Cofirmados	Óbitos Confirmados	Novos Óbitos Confimados	Casos Ativos	Internados	Casos Suspeitos	Recuperados	Taxa de Isolamento	Novos Casos Descartados
26/03/2020	0	0	4	4	1	1	3	0	160	0	51	0
27/03/2020	0	0	4	0	1	0	3	0	160	0	50	0
28/03/2020	0	0	4	0	1	0	3	0	160	0	54	0
29/03/2020	0	0	14	10	1	0	13	0	160	0	56	0
30/03/2020	0	0	25	11	1	0	24	0	160	0	51	0
31/03/2020	0	0	25	0	1	0	24	0	160	0	51	0
01/04/2020	0	0	54	29	1	0	53	0	0	0	51	59
02/04/2020	0	0	69	15	1	0	68	0	0	0	51	0
03/04/2020	0	0	88	19	1	0	87	0	0	0	50	0
04/04/2020	0	0	88	0	1	0	87	0	0	0	55	0
05/04/2020	0	0	88	0	1	0	87	0	0	0	56	0
06/04/2020	0	0	110	22	2	1	108	0	0	0	48	0
07/04/2020	0	0	116	6	4	2	112	0	0	0	47	95
08/04/2020	0	0	122	6	4	0	118	0	0	0	46	26
09/04/2020	0	0	130	8	4	0	126	0	0	0	41	29
10/04/2020	0	0	146	16	4	0	142	0	0	0	54	0
11/04/2020	0	0	157	11	4	0	153	0	504	0	50	0
12/04/2020	0	0	161	4	4	0	154	0	504	3	54	0
13/04/2020	0	0	178	17	4	0	171	0	0	3	44	158
14/04/2020	0	0	184	6	5	1	176	0	0	3	44	0
15/04/2020	0	0	189	5	5	0	171	0	0	13	43	42
16/04/2020	0	0	191	2	5	0	162	0	0	24	42	21
17/04/2020	0	0	197	6	5	0	168	0	0	24	41	31
18/04/2020	0	0	197	0	5	0	139	0	0	53	48	0
19/04/2020	0	0	197	0	5	0	124	0	0	68	55	0
20/04/2020	0	0	217	20	5	0	125	0	0	87	44	76
21/04/2020	0	0	217	0	5	0	125	0	0	87	53	0
22/04/2020	0	0	228	11	5	0	136	0	0	87	41	0
23/04/2020	0	0	230	2	5	0	117	0	0	108	41	51
24/04/2020	0	0	241	11	6	1	123	0	0	112	41	99
25/04/2020	0	0	252	11	6	0	128	0	378	118	47	16
26/04/2020	0	0	253	1	6	0	121	0	378	126	54	0
27/04/2020	0	0	253	0	6	0	105	0	378	142	41	0
28/04/2020	0	0	259	6	7	1	99	0	378	153	40	53
29/04/2020	0	0	270	11	7	0	106	0	378	157	40	23
30/04/2020	0	0	274	4	7	0	93	0	0	174	39	26
01/05/2020	0	0	274	0	7	0	88	27	0	179	50	0
02/05/2020	0	0	274	0	7	0	83	27	0	184	47	0
03/05/2020	0	0	295	21	7	0	102	27	403	186	53	29
04/05/2020	0	0	300	5	8	1	100	21	403	192	40	35
05/05/2020	0	0	300	0	8	0	100	21	403	192	40	0
06/05/2020	0	0	313	13	8	0	113	40	403	192	39	18
07/05/2020	0	0	330	17	8	0	110	32	454	212	39	25
08/05/2020	0	0	330	0	8	0	110	29	454	212	38	0
09/05/2020	0	0	349	19	8	0	118	34	445	223	44	0
10/05/2020	0	0	349	0	8	0	116	34	455	225	48	0
11/05/2020	0	0	351	2	8	0	108	34	455	235	40	64
12/05/2020	0	0	370	19	10	2	114	36	0	246	39	6
13/05/2020	0	0	409	39	10	0	152	26	0	247	39	14
14/05/2020	0	0	409	0	10	0	152	26	0	247	39	0
15/05/2020	0	0	464	55	11	1	201	32	0	252	38	298
16/05/2020	0	0	479	15	12	1	204	32	0	263	48	26
17/05/2020	0	0	507	28	13	1	227	32	0	267	51	0
18/05/2020	0	0	521	14	15	2	239	30	0	267	46	18
19/05/2020	0	0	586	65	15	0	304	33	0	267	46	1053
20/05/2020	0	0	618	32	17	2	313	34	0	288	46	94
21/05/2020	0	0	648	30	17	0	339	33	0	292	46	61
22/05/2020	0	0	693	45	17	0	384	37	0	292	44	68
23/05/2020	0	0	740	47	17	0	418	37	0	305	47	67
24/05/2020	0	0	794	54	17	0	455	40	0	322	52	93
25/05/2020	0	0	815	21	19	2	474	40	0	322	50	52
26/05/2020	0	0	860	45	20	1	499	52	0	341	45	80
27/05/2020	0	0	860	0	20	0	499	52	0	341	45	0
28/05/2020	0	0	860	0	20	0	497	52	0	343	46	0
29/05/2020	0	0	1082	222	24	4	698	50	0	360	45	356

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26 – Dados do Info Tracker - Ribeirão Preto - 30/05 a 02/08/2020

Data	1ª Dose	2ª Dose	Casos Confirmados	Novos Casos Cofirmados	Óbitos Confirmados	Novos Óbitos Confirmados	Casos Ativos	Internados	Casos Suspeitos	Recuperados	Taxa de Isolamento	Novos Casos Descartados
30/05/2020	0	0	1128	46	24	0	705	55	0	399	49	92
31/05/2020	0	0	1160	32	25	1	736	55	0	399	51	68
01/06/2020	0	0	1217	57	27	2	737	56	0	453	45	69
02/06/2020	0	0	1261	44	28	1	766	62	0	467	45	132
03/06/2020	0	0	1325	64	29	1	802	60	0	494	45	107
04/06/2020	0	0	1480	155	30	1	944	71	0	506	45	147
05/06/2020	0	0	1563	83	36	6	956	74	0	571	44	101
06/06/2020	0	0	1633	70	38	2	994	72	0	601	48	123
07/06/2020	0	0	1690	57	38	0	1021	78	0	631	51	73
08/06/2020	0	0	1791	101	44	6	1071	79	0	676	45	85
09/06/2020	0	0	1865	74	48	4	1094	85	0	723	45	120
10/06/2020	0	0	2028	163	53	5	1198	91	0	777	44	0
11/06/2020	0	0	2139	111	53	0	1290	97	0	796	48	0
12/06/2020	0	0	2227	88	53	0	1334	88	0	840	44	431
13/06/2020	0	0	2321	94	59	6	1422	101	0	840	47	110
14/06/2020	0	0	2406	85	60	1	1506	104	0	840	51	91
15/06/2020	0	0	2517	111	68	8	1391	103	0	1058	45	171
16/06/2020	0	0	2715	198	79	11	1532	111	0	1104	45	137
17/06/2020	0	0	2941	226	85	6	1721	108	0	1135	45	134
18/06/2020	0	0	3101	160	89	4	1822	118	0	1190	44	122
19/06/2020	0	0	3308	207	91	2	1984	121	0	1233	46	136
20/06/2020	0	0	3412	104	94	3	2022	124	0	1296	47	108
21/06/2020	0	0	3514	102	95	1	1969	124	0	1450	51	112
22/06/2020	0	0	3600	86	101	6	1972	124	0	1527	45	94
23/06/2020	0	0	3771	171	115	14	2061	135	0	1595	45	170
24/06/2020	0	0	3981	210	121	6	2208	144	0	1652	45	191
25/06/2020	0	0	4113	132	125	4	2241	145	0	1747	45	136
26/06/2020	0	0	4385	272	134	9	2434	162	0	1817	44	183
27/06/2020	0	0	4483	98	141	7	2367	159	0	1975	46	91
28/06/2020	0	0	4520	37	143	2	2291	154	0	2086	50	46
29/06/2020	0	0	4746	226	144	1	2428	164	0	2174	45	208
30/06/2020	0	0	5001	255	156	12	2583	150	0	2262	45	180
01/07/2020	0	0	5235	234	161	5	2728	155	0	2346	45	171
02/07/2020	0	0	5452	217	168	7	2835	157	0	2449	45	167
03/07/2020	0	0	5597	145	176	8	2785	153	0	2636	44	210
04/07/2020	0	0	5814	217	182	6	2776	161	0	2856	47	181
05/07/2020	0	0	5910	96	184	2	2714	163	0	3012	50	168
06/07/2020	0	0	5998	88	186	2	2595	154	0	3217	44	148
07/07/2020	0	0	6288	290	196	10	2774	158	0	3318	44	238
08/07/2020	0	0	6807	519	208	12	3180	154	0	3419	44	535
09/07/2020	0	0	7001	194	214	6	3288	174	0	3499	45	219
10/07/2020	0	0	7268	267	222	8	3390	174	0	3656	44	188
11/07/2020	0	0	7560	292	225	3	3475	172	0	3860	47	316
12/07/2020	0	0	7684	124	227	2	3469	172	0	3988	51	161
13/07/2020	0	0	7826	142	233	6	3342	166	0	4251	45	117
14/07/2020	0	0	8121	295	250	17	3529	167	0	4342	45	193
15/07/2020	0	0	8778	657	253	3	4148	175	0	4377	44	0
16/07/2020	0	0	9040	262	266	13	4172	176	0	4602	44	741
17/07/2020	0	0	9607	567	274	8	4488	173	0	4845	43	477
18/07/2020	0	0	10091	484	277	3	4740	176	0	5074	46	450
19/07/2020	0	0	10401	310	279	2	4838	180	5261	5284	50	257
20/07/2020	0	0	10534	133	284	5	4829	180	5261	5421	43	155
21/07/2020	0	0	11005	471	294	10	5079	173	5285	5632	43	426
22/07/2020	0	0	11378	373	304	10	5348	178	5429	5726	42	278
23/07/2020	0	0	11680	302	310	6	5558	180	5616	5812	43	234
24/07/2020	0	0	11963	283	319	9	5552	179	5823	6092	42	270
25/07/2020	0	0	12233	270	329	10	5305	185	6080	6599	46	164
26/07/2020	0	0	12344	111	334	5	5223	180	6088	6787	53	168
27/07/2020	0	0	12451	107	336	2	5069	186	6127	7046	44	107
28/07/2020	0	0	12762	311	347	11	5080	164	6404	7335	43	256
29/07/2020	0	0	13152	390	355	8	5340	164	6520	7457	42	197
30/07/2020	0	0	13421	269	363	8	5465	184	6552	7593	43	412
31/07/2020	0	0	13567	146	372	9	5324	175	6552	7871	41	200
01/08/2020	0	0	13963	396	379	7	5059	171	6775	8525	46	219
02/08/2020	0	0	14162	199	381	2	5007	186	6280	8774	52	509

Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE B

FOMULÁRIO DA PRÁTICA EM SALA DE AULA

Pedro é um empresário de sucesso que adora brincar com a Matemática, possui dois filhos, Ana de onze anos e Jorge, com quatorze. Certo dia, num passeio pela cidade com a família é abordado pelas crianças, Ana pediu um celular novo e Jorge um computador para seus estudos, embora Pedro não tivesse problemas financeiros e ambos objetos de desejo dos filhos custassem R$ 2.000,00 cada, pensou ser a oportunidade certa de ensinar a eles como economizar e valorizar seu dinheiro. Pedro, muito astuto, apresenta a seguinte proposta aos filhos. Ele lhes daria os dois mil reais de uma única vez com a restrição de que cada filho compre seu presente só depois que guardasse em seu cofrinho todo o dinheiro já recebido, porém depositando valores que seguiriam dois padrões distintos diariamente, sendo que

- Jorge deve guardar R$ 0,10 no primeiro dia e a cada dia seguinte deverá guardar o dobro da quantia guardada no dia anterior.
- Ana deve guardar R$ 2,00 no primeiro dia e a cada dia seguinte deverá guardar dois reais a mais da quantia que guardou no dia anterior.

Para garantir que quando seus filhos atingissem o objetivo os presentes seriam comprados, Pedro fixa na sala de sua casa uma tabela para o acompanhamento do progresso dos depósitos feitos por cada um deles. Sendo o filho que compraria primeiro seu presente, aquele que esgotasse todo dinheiro recebido.

Tabela 20 – Acompanhamento dos depósitos diários de Ana e Jorge - prática

Dias	1º	2º	3º	4º	5º	6º	...
Jorge	0,10						
Ana	2,00						

Fonte: Elaborada pelo autor.

B.1 Questionamentos

1-) Analisando a condição proposta pelo pai de Ana e Jorge para comprar cada presente, discuta com seu grupo sobre qual dos filhos guardaria primeiro todo dinheiro ganho e poderia comprar seu presente.

2-) Com base nos padrões de depósitos descritos por Pedro, preencha completamente a tabela abaixo.

Figura 27 – Tabela de valores depositados do 1º ao 6º dia

Dias	1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia	6º dia
Jorge						
Total de Jorge						
Ana						
Total de Ana						

Fonte: Elaborada pelo autor.

3-) Com relação a tabela acima, discuta com seu grupo se a decisão tomada no questionamento 1 se mantém ou muda. Em caso de mudança, qual filho terminará de guardar todo o dinheiro recebido do pai?

4-) Seguindo os mesmos padrões de depósitos da situação apresentada, preencha completamente as tabelas abaixo, caso necessário faça outras tabelas para terminar. O preenchimento termina quando a primeira criança depositar todo dinheiro recebido.

Figura 28 – Tabela de valores depositados do 7º ao 12º dia

Dias	7º dia	8º dia	9º dia	10º dia	11º dia	12º dia
Jorge						
Total de Jorge						
Ana						
Total de Ana						

Fonte: Elaborada pelo autor.

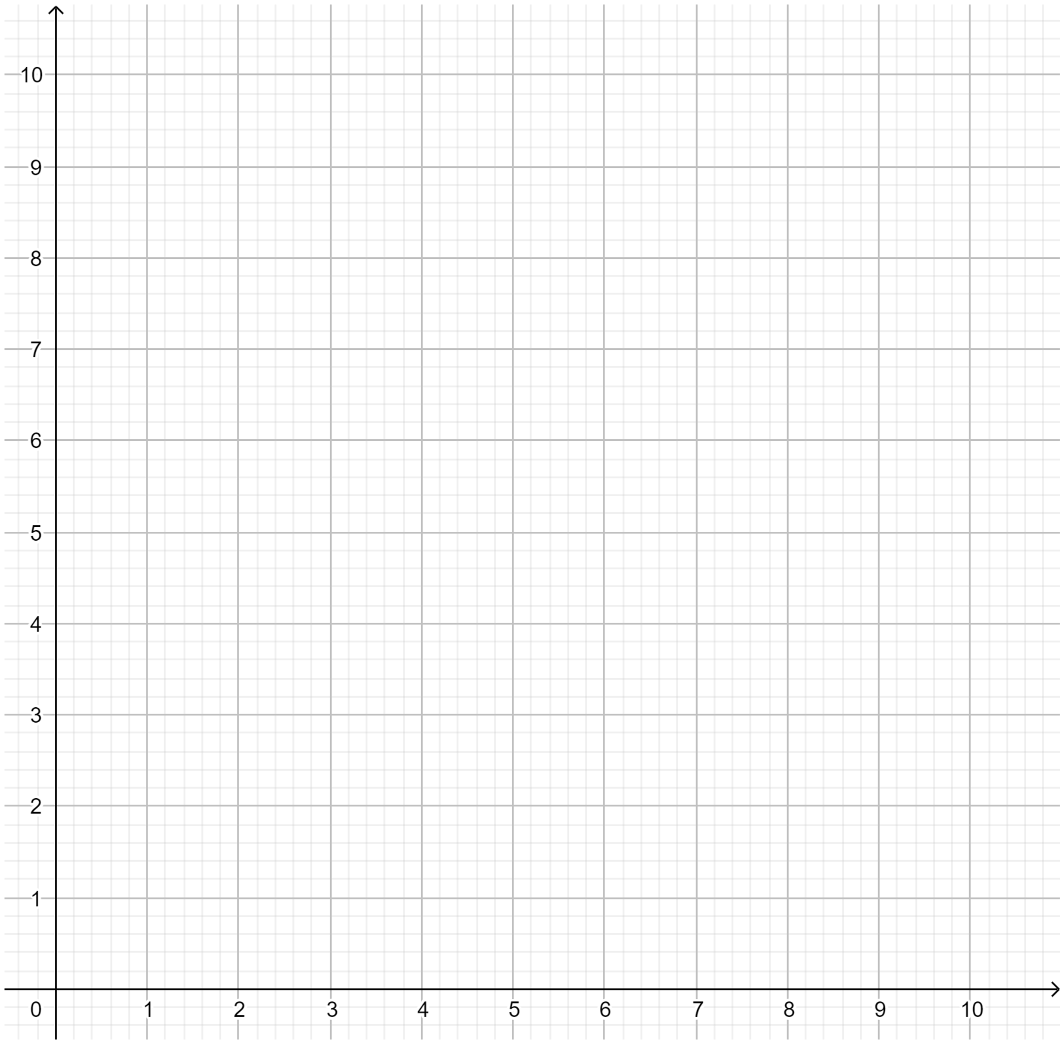
Figura 29 – Tabela de valores depositados do 13º ao 18º dia

Dias	13º dia	14º dia	15º dia	16º dia	17º dia	18º dia
Jorge						
Total de Jorge						
Ana						
Total de Ana						

Fonte: Elaborada pelo autor.

5-) Utilizando as informações das tabelas anteriores, desenhe na imagem abaixo os gráficos que representam os investimentos de Jorge e Ana. Adote no eixo horizontal os dias dos depósitos e, no eixo vertical, os valores depositados diariamente por cada criança, use cores diferentes para cada gráfico.

Figura 30 – Gráficos dos investimentos de Jorge e Ana



Fonte: Elaborada pelo autor.

6-) Unindo os pontos (pares ordenados), obtidos das tabelas para cada tipo de investimento proposto, tem-se o gráfico construído na imagem acima, discuta com seu grupo e descrevam duas diferenças observadas entre eles.

7-) Reflita com seu grupo e tentem descrever outras formas de descobrir quanto tempo levaria para que a última criança tenha o direito de comprar seu presente.

APÊNDICE

C

SITES INFORMATIVOS

<https://www.bloomberglinea.com.br/2022/06/12/riqueza-global-tem-recorde-de-us-530-trilhoes-em
Riqueza global acumulada.

<https://www.who.int/eportuguese/countries/bra/pt/> Página em português da Organização Mundial da Saúde;

<https://ourworldindata.org/coronavirus-data> Site de informações baseadas em pesquisas da Universidade de Oxford;

<https://www.spcovid.net.br/> Dados da pesquisas sobre casos confirmados e mortes por *COVID-19* pela *Info Tracker* para o estado de São Paulo;

<https://www.viser.com.br/covid-19/sp-covid-info-tracker> Página com informações do *projeto SP Covid-19 Info Tracker*;

<http://ecologia.ib.usp.br/bie430/lib/exe/fetch.php?media=apoio:gotelli_cap_2.pdf> Documento utilizado como base de leitura sobre crescimento populacional logístico;

<https://revistapesquisa.fapesp.br/o-desafio-de-calcular-o-r/> Documento utilizado como base de leitura sobre o desafio de se calcular a taxa de reprodução dos vírus;

<https://www.acervolima.com.br/2020/05/escala-logaritmica-com-matplotlib.html> Site contendo a imagem de uma função exponencial em escala logarítmica;

<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5921308/mod_resource/content/0/ajuste%20parte%204.p
Documento contendo a imagem de uma função exponencial em escala normal;

<https://www.youtube.com/watch?v=1_SwKG4Zt60> Experimento prático 2 utilizado como referência neste trabalho.

ANEXO A

COMPLEMENTO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Este anexo tem o intuito de complementar as demonstrações e provas com relação as características e caracterização de funções exponenciais vistas no Capítulo 3, sendo que nossa intenção é fornecer ferramentas para que o leitor possa identificar e classificar fenômenos com tais propriedades.

A.1 Complemento das características da função exponencial

Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$: (LAGES, 2017)

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;

Tais propriedades foram provadas no capítulo mencionado anteriormente.

4) A função exponencial é ilimitada superiormente;

Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo Lema 1 visto anteriormente. Mais precisamente, se $a > 1$, então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$, então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

5) A função exponencial é *contínua*;

(LAGES, 2017) Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se queira, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outra forma: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Esta é, novamente, uma consequência das propriedades básicas 1), 2) e 3) da função exponencial. Para prová-la, mostremos primeiro que é possível tornar a^h tão próximo de 1 quanto desejamos, desde que $|h|$ seja escolhido suficientemente pequeno.

Assim, suponhamos $a > 1$ e $h > 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que tomando h pequeno, teremos $a^h < 1 + \varepsilon$. Ora, pela *desigualdade de Bernoulli*, temos $(1+\varepsilon)^n > 1 + n \cdot \varepsilon$. Portanto, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, teremos $n \cdot \varepsilon > a - 1$, logo $a < 1 + n \cdot \varepsilon$ e daí (por Bernoulli) $a < (1+\varepsilon)^n$ e, finalmente, $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Mais precisamente, $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Se tomarmos h tal que $0 < h < \frac{1}{n}$, teremos $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Assim, faremos a^h tão próximo de 1 quanto desejemos.

Escrevemos $\lim_{h\to 0} a^h = 1$ (1 é o limite de a^h quando h tende a zero).

Agora, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, pomos $h = x - x_0$ e temos $a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0} \cdot (a^h - 1)$. Quando x se aproxima de x_0, h tende a 0, a^h tende a 1 e $a^h - 1$ tende a zero. Como a^{x_0} é fixo, não depende de h, temos $\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = 0$, ou seja, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, o que caracteriza a continuidade da função exponencial.

6) A função exponencial é *sobrejetiva*.

(LAGES, 2017) Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a). Para prová-la, usamos o Lema 1 e escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$, portanto $\lim_{x\to x_0} a^{r_n} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n}, sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \dots < a^{r_n} < \dots < b$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então, a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < s$.

Assim, (r_n) é uma sequência crescente, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x\to x_0} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, temos então $a^x = \lim_{x\to x_0} a^{r_n} = b$.

A.2 Segunda caracterização da Função Exponencial

Como vimos, no capítulo que trata deste assunto, ao estudar um determinado fenômeno deve-se verificar se o seu desenvolvimento se enquadra nas propriedades da função a ser usada como modelo. Dessa forma, apresentamos a seguir o teorema da segunda caracterização da função exponencial, bem como sua prova.

Teorema 5 (Segunda caracterização de $b \cdot a^t$)**.** Para cada b e cada t reais, suponhamos dado um número $f(b,t) > 0$ com as seguintes propriedades:

1) $f(b,t)$ depende linearmente de b e é *monótona injetiva* em relação a t;

2) $f(b,s+t) = f(f(b,s),t)$. Então, pondo $a = f(1,1)$, tem-se $f(b,t) = b \cdot a^t$.

Demonstração. (LAGES, 2017) A função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $\varphi(t) = f(1,t)$ é monótona e injetiva e cumpre

$$\varphi(s+t) = f(1,s+t) = f(f(1,s),t) = f(1,s) \cdot f(1,t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$$

em consequência de 1) e 2), pois $f(1,s) = f(1,s) \cdot 1$.

Pelo Teorema 3, tem-se $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1,1)$. Portanto,

$$f(b,t) = f(b \cdot 1,t) = b \cdot f(1,t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^t$$

A condição 2) do Teorema 5 tem seu significado esclarecido quando se nota que $b = b \cdot a^0 = f(b,0)$, ou seja, que b é o *valor inicial* da grandeza $f(b,t)$ no instante $t = 0$, pensando em t como o tempo decorrido desde que a grandeza passou do valor $b = f(b,0)$ para o valor $f(b,t)$. Então, 2) diz que, começar com o valor b e deixar passar o tempo $s+t$ é o mesmo que começar com o valor $f(b,s)$ e deixar transcorrer o tempo t. □

Para verificar a primeira condição do teorema 5 para o modelo obtido na segunda situação, temos:

$$c(t,h) = c(t+h) = \varphi(h) = 2^h - 1$$

Assim, como vimos no Teorema 4, $c(t) = 2^t$ é monótona e injetiva com relação a h, linearmente dependente de t. Para confirmar a segunda condição do Teorema 5, fazemos:

$$c(x,t+h) = c(c(x,t),h)$$

Se $a = c(1,1) = 2$, tem-se $c(x,t) = x \cdot 2^t$, sendo $x = C_0$, obtemos a função com capital de investimento (3.5) do início, com taxa de juros fixa $a = 2$, dada por:

$$c(t) = C_0 \cdot 2^t \tag{A.1}$$

Dessa forma, podemos concluir que a função, obtida na segunda situação apresentada no Capítulo 2, é caracterizada por uma função exponencial, onde $C_0 = 1$ (A.1) é o capital inicial de 1 real (1 grão de trigo). Logo, temos:

$$c(t) = 1 \cdot 2^t$$

ou, simplesmente:

$$c(t) = 2^t \tag{A.2}$$

ICMC USP
SÃO CARLOS