UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAILSON PEREIRA DE SOUSA

A IMPORTÂNCIA DA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE
2023

RAILSON PEREIRA DE SOUSA

A IMPORTÂNCIA DA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT/UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

CAMPINA GRANDE
2023

S725i Sousa, Railson Pereira de.
A importância da argumentação matemática na resolução de problemas [manuscrito] / Railson Pereira de Sousa. - 2023.
78 p.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Resolução de problemas matemáticos. 2. Educação básica. 3. Lógica dedutiva. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

RAILSON PEREIRA DE SOUSA

A IMPORTÂNCIA DA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT/UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado em: 19 de maio de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Anselmo Baganha Raposo Júnior

Prof. Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior - UFMA

DMEsteves

Profa. Dra. Divanilda Maia Esteves - UEPB

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo - UEPB
Orientador

Dedico este trabalho a meu filho, Rian Gabriel.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente a Deus, por guiar os meus passos e iluminar os meus caminhos, proporcionando a tão sonhada vitória.

A minha família, pelo apoio na minha caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gustavo da Silva Araujo, pelo conhecimento transmitido e dedicação.

Aos professores da banca examinadora, Dr. Anselmo Baganha Raposo Júnior e Dra. Divanilda Maia Esteves, pelas correções e sugestões.

Agradeço ao corpo docente do PROFMAT da UEPB de Campina Grande, pela excelente contribuição e orientação em minha formação.

Aos meus colegas/amigos do PROFMAT, que, através das contribuições de cada um, enriqueceram a minha formação.

Aos meus colegas e alunos da Escola Severino Marinheiro, local onde a proposta foi aplicada.

Agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática (SBM) pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Atualmente, percebe-se uma decadência do formalismo no ensino dos conteúdos matemáticos, principalmente na educação básica na qual a maioria dos livros só aborda fórmulas prontas, impossibilitando que o aluno construa o conhecimento matemático através da lógica dedutiva. Neste sentido, o presente trabalho tem como objetivo construir uma proposta que desenvolva os conteúdos matemáticos com um certo rigor e formalismo, utilizando a lógica para demonstrar as principais fórmulas e teoremas. Para tal, tem-se como ferramentas a leitura, a escrita e argumentação para potencializar o processo de resolução de problemas, almejando uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos pelos alunos e, por consequência, o aprimoramento dos próprios recursos utilizados, sobretudo a escrita. O estudo teve como cenário a Escola Municipal de Ensino Fundamental Severino Marinheiro, da cidade de Juazeirinho-PB. Os sujeitos da pesquisa foram 40 alunos de uma turma de nono ano que estudavam na referida escola. Ao fim deste trabalho, poderemos perceber a importância que a escrita desenvolve no aprendizado dos alunos nos anos finais da educação básica, possibilitando a organização de ideias e do pensamento no processo de resolução de problemas, fato este que acarretou na premiação de alguns alunos envolvidos nessa proposta na 17ª OBMEP.

Palavras-chave: resolução de problemas matemáticos; educação básica; lógica dedutiva.

ABSTRACT

Currently, a decadence of formalism in the teaching of mathematical contents is perceived, mainly in basic education where most books only address ready-made formulas, making it impossible for the student to build mathematical knowledge through deductive logic. In this sense, the present work aims to develop a proposal that develops the mathematical contents with a certain rigor and formalism, using logic to demonstrate the main formulas and theorems, all of this using reading, writing and argumentation as a potentiating ferment in the process of problem solving, aiming at improving writing in problem solving and a better understanding of mathematical content by students. The study had as scenario the Municipal Elementary School Severino Marinheiro, in the city of Juazeirinho-PB. The research subjects were 40 students from a ninth grade class who studied at the aforementioned school. At the end of this work, we will be able to perceive the importance that writing develops in the learning of students in the final years of basic education, allowing the organization of ideas and thinking in the problem solving process, a fact that allowed the awarding of some students involved in this proposal at the 17th OBMEP.

Keywords: mathematical problem solving; basic education; deductive logic.

NOTAÇÕES E SIMBOLOGIAS

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais.

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{I}$: Conjunto dos números irracionais.

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC: Base Nacional Comum Curricular.
ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio.
IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.
PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais.
PIC: Programa de Iniciação Científica Jr.
PISA: Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.
PROFMAT: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
SAEB: Sistema de Avaliação da Educação Básica
UEPB: Universidade Estadual da Paraíba.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os problemas matemáticos fazem parte da construção social e intelectual dos seres humanos, pois desde os primórdios da humanidade há relatos em que os indivíduos tentam resolver problemas simples de contagem e nesse processo surge a necessidade de representar os elementos matemáticos em forma de linguagem escrita. Inicialmente, por exemplo, essa representação de contagem era feita através de ranhuras em ossos, no barro ou em pedras.

Com a evolução da humanidade, o processo de resolução de problemas também evoluiu, sendo um tema posto em foco e constantemente debatido entre matemáticos e pedagogos como didática de ensino e aprendizagem da matemática. Contribuições mais recentes foram dadas principalmente pelo matemático George Pólya, um dos pioneiros na utilização de situações problemas como ferramenta potencializadora da aprendizagem. Com seus estudos, deu contribuições significativas para o processo de aprendizagem matemática e seus trabalhos até hoje são referência quando esse tema é abordado.

Nesse processo, há a necessidade de uma boa argumentação matemática com conceitos e argumentos convincentes para que se possa resolver os problemas e mostrar o seu raciocínio de forma clara, convincente e objetiva. Isso é reforçado com a aprovação recente da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), que contempla em uma de suas competências específicas o ato de:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p.540).

Para isto o aluno deve desenvolver argumentos lógicos para comprová-los ou contraexemplos para refutá-los, porém Brasil (2018, p. 540) afirma que “essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais formais, incluindo a demonstração de algumas proposições”.

Contudo, o ato de argumentar não é fácil, principalmente quando são abordados problemas matemáticos, nos quais até alguns professores mostram dificuldades ao escrever o seu raciocínio de forma clara para o aluno. Tais atos são primordiais, pois cada vez mais provas, como a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática) na sua 2° fase, cobram essa habilidade dos alunos e esse movimento, portanto, se torna mais uma forma de avaliar se o aluno teve uma aprendizagem concreta sobre as habilidades exigidas no seu nível de ensino.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (Brasil, 2018, p.266).

Mediante o exposto, aflora-se a necessidade de desenvolver esta pesquisa para contribuir e estimular a argumentação matemática na educação básica, principalmente no ensino fundamental. Assim quando o aluno concluir essa etapa em sua formação, conseguirá desenvolver argumentos lógicos convincentes sobre o tema em estudo nos anos seguintes, fazendo com que esses estudantes compreendam os elementos matemáticos de forma lógica e dedutiva.

Para tanto:

> O ensino da matemática aos adolescentes simplesmente passou de um extremo ao outro: antigamente demonstrava-se demais; hoje demonstra-se de menos. Em ambos os casos, esquece o verdadeiro objetivo da educação científica, que deve ser o de habituar gradativamente os alunos a pensar por si próprios, de maneira lógico-dedutiva (Garbi, 2010, p.10).

Ademais, a falta do hábito de demonstrar alguns teoremas de forma didática, de explicar as construções e as implicações lógicas que levaram àqueles resultados explicados pelo professor na lousa, deixam algumas lacunas nas habilidades desenvolvidas pelos estudantes, prejudicando o desenvolvimento efetivo dos alunos envolvidos no processo, principalmente na disciplina de matemática.

Essa dificuldade é crescente e afeta até os professores de matemática, nos quais, alguns têm essa dificuldade de demonstrar fórmulas e teoremas, muitos alegam o falso pretexto de que os alunos não aprenderiam a partir deles, considerando mais fácil explicitar uma fórmula pronta sem sentido lógico que o aluno esquecerá em poucos dias. Visando essa dificuldade e cada vez mais a necessidade de profissionais que dominem a matemática para atuarem nos ramos tecnológicos, programas como o PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) atuam para capacitar professores para atuarem em sala, com uma visão diferenciada, a fim de desenvolver as habilidades nos alunos de forma integral.

Desta forma, este trabalho visa desenvolver os conteúdos com um certo rigor matemático, demonstrando as principais proposições e teoremas apoiado na leitura e escrita, enfatizando a importância da argumentação matemática no processo de resolução de problemas, enfatizando sempre a necessidade da escrita e da demonstração no processo de ensino-aprendizagem, pois, segundo Piazzi (2020), “o aluno tem que escrever, pois assistir às aulas é um ato coletivo e passivo. O ser humano aprende com a escrita que é um ato individual e ativo e não existe outra forma de estudar se não for escrevendo”.

A aplicação da proposta ocorreu na Escola Municipal de Ensino Fundamental Severino Marinheiro, município de Juazeirinho, uma pequena cidade localizada no interior da Paraíba que tem cerca de 17 mil habitantes e os sujeitos da pesquisa foram alunos do 9° ano da referida escola.

A proposta visa uma mudança da prática e na didática do docente envolvido ao valorizar o trabalho com a argumentação e o rigor matemático nas suas demonstrações valorizando a escrita como uma ferramenta potencializadora no processo de resolução de questões. E com a mudança de tais práticas almeja a melhoria da compreensão dos conteúdos matemáticos ensinados e a melhoria do desempenho dos estudantes em avaliações externas como as Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), salientando que com práticas e posturas simples pode modificar a realidade dos alunos envolvidos na proposta.

Assim, esse trabalho visa desenvolver o hábito de escrita matemática nos alunos, auxiliando no processo de aprendizagem dos conteúdos e no processo de resolução de problemas. Para atingir as metas, este trabalho foi organizado em três capítulos e se caracteriza como uma análise prática a partir de estudo de caso, concebido com a aplicação da proposta em sala de aula.

O primeiro capítulo aborda o processo de resolução de problemas na educação básica as principais técnicas e métodos utilizados na abordagem dos problemas, assim como uma análise de como são concebidas as aulas de matemática na educação básica e como a escrita pode ser uma forte aliada no processo de resolução de problemas.

O segundo capítulo aborda a importância da lógica no processo de ensino aprendizagem de matemática, mostrando a importância e onde utilizar os principais conectivos lógicos presentes de forma implícita na educação básica e aborda os principais métodos de demonstrações matemáticas que podem ser introduzidos nos anos finais da educação básica a demonstração direta, demonstração por redução ao absurdo, demonstração pela contra positiva e demonstração por indução.

No terceiro capítulo aborda a metodologia, a forma que os conteúdos eram abordados, a maneira que as demonstrações eram realizadas, assim como a análise de dados dos resultados que forma alcançados e analisa se realmente houve uma melhoria na escrita e na argumentação desenvolvida no processo de resolução de problemas e quais forma os resultados que forma alcançados com a aplicação da proposta.

Por último encerra com as considerações finais contendo uma análise sobre o desenvolvimento do trabalho e propondo pontos que podem ser melhorados em aplicações de propostas futuras que almejem desenvolver os conteúdos matemáticos através da lógica e da demonstração apoiados na escrita como um ferramenta potencializadora no processo de resolução de problemas.

2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 Problemas Matemáticos

Os problemas matemáticos são fruto de uma construção social, realizada ao longo do tempo, isso fica claro com a descoberta de diversas tábulas e pergaminhos que foram escritos por povos antigos, como babilônios e egípcios, a fim de retratar problemas cotidianos de caráter prático enfrentados por essas pessoas e que ajudaram a sociedade daquela época a entender a importância de compreender e registrar tais situações.

Na antiguidade, os problemas matemáticos eram oriundos da observação do cotidiano. Logicamente, esses problemas descritos surgiram juntamente com a escrita, com a necessidade de gravar e representar os problemas vivenciados cotidianamente em tábulas e pergaminhos, mas com o passar do tempo, tais problemas começaram a evoluir e ganhar um nível de abstração maior. Segundo Eves (2011, p.61), perto do ano 2000 a.C. "a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida". Esses povos já conseguiam resolver equações do segundo grau tanto pela forma de completar quadrados como pela fórmula geral.

A civilização egípcia também era detentora do conhecimento matemático. Isso é provado com a descoberta do papiro de Rhind e o papiro de Moscou, datados, respectivamente, do anos 1650 a.C. e 1850 a.C. Esses papiros continham vários problemas matemáticos, que abordavam, principalmente, problemas geométricos envolvendo áreas e perímetros e problemas com triângulos. Tais problemas refletem a necessidade do povo egípcio no estudo de elementos da matemática, principalmente no sistemas de medida, área e perímetro que estavam presentes na agricultura e arquitetura.

> O papiro de Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos (EVES, 2011, P.70).

Com a evolução da civilização e o desenvolvimento do racionalismo, começaram a surgir as indagações sobre o porquê das soluções desses problemas serem verdadeiras. O homem começou a se perguntar como aqueles resultados tão importantes eram obtidos e essas indagações deram origem a geometria demonstrativa que teve como precursor Tales de Mileto e, segundo Eves (2011, p.94), "algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou a primeiro plano".

A partir desses pensamentos, os conceitos matemáticos começam a tomar novos rumos, até então desconhecidos. Surgiram, então, os postulados e os teoremas, oriundos de uma verdade lógica e demonstrável. Os procedimentos de resolução de problemas passaram a ser consequência desses teoremas e postulados, dando origem a uma nova matemática mais abstrata com verdades sólidas e sustentada pela razão e coerência, composta por uma construção lógica irrefutável, fruto do desenvolvimento do pensamento humano.

Tales acreditava que as afirmações feitas em matemática deveriam ser provadas através de argumentos lógicos e demonstrações. Essa nova visão levou a uma grande revolução na matemática e, segundo Garbi (2010, p.20) "a matemática não é uma ciência experimental. Suas leis são de uma natureza totalmente diferente e peculiar: elas não se fundamentam em experiências mas sim em provas de natureza lógica".

Essa lógica está presente em praticamente todos os problemas matemáticos e, apesar das consideráveis contribuições sobre métodos e técnicas utilizadas para se resolver problemas, os professores enfrentam diariamente dificuldades em unir os conteúdos com os problemas matemáticos. Os alunos também enfrentam dificuldades para aprender os conteúdos principalmente em relacionar tais assuntos a uma aplicação prática. Tudo isso revela que ainda há muito a ser discutido e que novas ideias, argumentos e procedimentos devem ser construídos para que possamos melhorar o nível de aprendizado dos nossos estudantes, principalmente na base das escolas públicas.

Essa dificuldade advém do fato de que as questões problemas exigem soluções lógicas e estruturais para serem resolvidos. Tais problemas podem ser abstratos, envolver a aplicação de teoremas ou envolver a análise de dados. Entretanto, é possível observar que grande parte do alunado não detém essa forma estruturada de pensar e isso prejudica o processo de aprendizagem, nesse sentido:

> Embora nestes parâmetros a lógica não se constitua como bloco de conteúdo a ser abordado de forma sistemática no ensino fundamental, alguns de seus princípios podem ser tratados de forma integrada aos demais conteúdos, desde as séries iniciais. Tais elementos, construídos por meio de exemplos relativos a situações-problema, ao serem explicitados, podem ajudar a compreender melhor as próprias situações (Brasil, 1997, p.38).

Com intuito de contornar essas dificuldades e desenvolver uma educação que seja construtiva e priorize o aprendizado do aluno, foram construídas ao longo do tempo várias estratégias com o objetivo de potencializar o processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, como a aprendizagem através da resolução de problemas, a modelagem matemática ou a utilização de jogos e materiais concretos.

Entre essas práticas e metodologias pedagógicas utilizadas para ajudar a potencializar o aprendizado dos alunos está o ensino através da resolução de problemas, que é visto como uma ótima maneira de estimular o aluno a adquirir as habilidades matemáticas desejadas, através de situações potencializadoras, permitindo que eles apliquem o conhecimento que já possuem para descobrir novos conhecimentos a partir das orientações e estímulos fornecidos pelo professor, se utilizando do raciocínio lógico e de estratégias pré-definidas para se chegar às soluções.

O ensino através da resolução de problemas ganhou destaque internacional com as contribuições do matemático húngaro George Pólya, o qual utilizou os problemas para potencializar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, ajudando seus alunos a pensar logicamente. Além disso, ele também é usado para ajudar a desenvolver habilidades de pensamento crítico que permitam encontrar soluções para problemas complexos.

Apesar das contribuições do método Pólya para o ensino, essa metodologia enfrenta dificuldades na sua aplicação em sala de aula, pois há conteúdos difíceis de serem relacionados com o cotidiano dos alunos. São conteúdos mais abstratos e o esforço para fazer tal relação requer muita energia por parte do professor e há momentos em que pouquíssimos alunos conseguem resolver os problemas, mesmo com o professor auxiliando, e isso ocorre, muitas vezes, devido ao aluno não deter dos conhecimentos básicos essenciais ou de uma estratégia eficaz.

Uma metodologia bastante utilizada em sala de aula é o ensino para resolver problemas. Nesse processo, o professor ensina o conteúdo e técnicas e procedimentos de resoluções para, posteriormente, relacionar com problema matemáticos práticos ou abstratos que almeja que os alunos resolvam, mostrando em que situações o aluno pode utilizar os conhecimentos ensinados. Apesar de ser amplamente utilizado nas escolas brasileiras, é fruto de críticas, pois alguns pensadores acreditam que tal método proporciona apenas um mero treinamento que o aluno possa utilizar em situações específicas e até os parâmetros curriculares nacionais defendiam que:

> Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido (Brasil, 1997, p.33).

Mas esse processo pode ser validado através da argumentação desenvolvida pelo aluno. A escrita e a argumentação desenvolvida na resposta é uma arma poderosa no processo avaliativo, pois sinaliza se o aluno conseguiu se apropriar do conhecimento ensinado.

2.2 Ensinar Através da Resolução de Problemas

Objetivando desenvolver uma educação matemática de qualidade, na qual os alunos realmente compreendam os elementos matemáticos, várias pesquisas e métodos têm sido apresentados ao longo da história. Um desses métodos é o de ensinar através da resolução de problemas, que ganhou uma maior ênfase devido às contribuições dadas por George Pólya, com seu trabalho intitulado *A arte para resolver problemas* estabeleceu um processo para a resolução de problemas, dividindo o processo em etapas conhecidas como as quatro fases de Pólya:

1° passo: Compreensão do problema que implica no ato de o aluno buscar assimilar o problema, ler, interpretar e identificar o que a questão está solicitando, desenvolvendo uma leitura criteriosa a fim de identificar as ideias principais da questão.

2° passo: Estabelecimento de um plano a partir da elaboração de uma estratégia, aqui o aluno deve verificar se conhece algum método ou procedimento que possa ser utilizado ou se há outro problema semelhante que possa ser utilizado como referência. Esse procedimento auxilia o aluno a observar os caminhos que podem ser trilhados para se chegar a resposta.

3° passo: Execução do plano a partir do esquema de ações, é nesse passo que o aluno irá colocar as suas estratégias em ação, elaborando um rascunho, para encontrar a resposta do problema.

4° passo: Retrospecto das ações realizadas, por fim, é nesse passo que o aluno verifica a solução, explora o problema de forma crítica, testa outros caminhos que poderiam chegar ao resultado, se o procedimento utilizado poderia ser aplicado em outros problemas, se ao mudar a estrutura do problema poderia utilizar a mesma estratégia para resolvê-lo, ou seja, esse é o momento que o aluno explora e propõe outros problema.

Nessa metodologia o professor aborda o conteúdo de forma diferenciada, valorizando as interações e a construção do conhecimento através das relações de mediação construídas entre professor e aluno durante as aulas. Esse processo torna as aulas mais dinâmicas, atraentes e construtivas fugindo do formalismo exagerado presente nos procedimentos matemáticos e, por sua vez, melhorando o processo e codificação dos elementos matemáticos. Conforme Pólya (1978, p.3), "o professor que deseja desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporciona-lhes muitas oportunidades de imitar e de participar".

A metodologia visava tornar mais atraente os conteúdos matemáticos, uma forma de deixar a matéria menos abstrata, coerente e compreensiva. A partir dela, o aluno é convidado a desenvolver estratégias e raciocínio crítico para resolver os problemas abordados, esses que se relacionavam com o cotidiano dos alunos, proporcionando que identificassem os elementos matemáticos presentes no meio em que vivem.

Apesar de ser uma fuga do modelo tradicional de aulas, a heurística de Pólya não é uma tarefa fácil, concebendo o modelo e o tempo das aulas, é uma ferramenta que deve ser explorada e aprimorada, a fim de que o aprendizado matemático não seja comprometido. É preciso tomar cuidado para que tal processo de resolução de problemas deva ser entendido como uma sequência lógica-construtiva que relacione a lógica e a beleza dos elementos matemáticos com a linguagem cotidiana dos alunos, principalmente no ensino fundamental, etapa na qual os alunos não detêm tanto conhecimento formal dos elementos matemáticos, uma vez que até o próprio Pólya (1978, p.3) afirma que "há, de fato, uma restrição, mas que nada tem a ver com o assunto da matéria. Algumas indagações e sugestões da lista são aplicáveis apenas a problemas de determinação e não a problemas de demonstração".

Apesar do método de Pólya ser amplamente discutido e utilizado em sala de aula, e algumas pesquisas e educadores concordarem com sua eficácia, a realidade em sala de aula é outra, o método apresenta-se muito genérico e não possui modelos específicos para se trabalhar os problemas e nem sempre se utiliza dos argumentos lógicos matemáticos. Assim, segundo Onuchic (2013, p.6) "a resolução de problemas é vista como independente e isolada do desenvolvimento de ideias, compreensões e processos matemáticos essenciais".

Outro apontamento apresentado é com a escolha do problema, pois com a diversidade encontrada em sala de aula, uma questão que possa ser atraente para uma aluno não poderá ser para outro, e assim não terá tanto interesse para o resolvê-lo. Além disso, também é requerido lidar com questões que os alunos não tenham conhecimento matemático suficiente para resolver e como o método de Pólya propõe o ensino da matemática através da resolução de problemas, os alunos ficam frustrados ao se deparar com tais situações e mesmo com a mediação do professor, não conseguem encontrar embasamento que sustentar sua resposta.

2.3 Ensinar Para Resolver Problemas

Ensinar para resolver problemas é o processo no qual são ensinados métodos e estratégias para que o aluno possa desenvolver habilidades específicas e utilizá-las para pensar de forma criativa, encontrar soluções eficazes e aplicar conhecimentos para sanar problemas complexos. No processo de ensinar para resolver problemas o aluno é apresentado a mecanismos que o ajuda a atacar os problemas e a caminhos nos quais pode seguir para chegar à resolução do problema. Essa proposta ajuda os discentes a desenvolver habilidades para identificar, analisar, solucionar e avaliar problemas. Nesse sentido Echeverría e Pozo (1998, p.27) afirmam que "quanto mais conhecimentos concretos uma pessoa tiver melhor poderá compreender, planejar, etc., o problema. Além disso, podem ser ensinadas determinadas técnicas que tornem esse processo mais eficiente em qualquer área".

O método de ensinar para resolver problemas tem sido utilizado há vários anos com o objetivo de preparar e ajudar os indivíduos a enfrentar e solucionar os diversos entraves que encontrarão na sua vida profissional ou social. É um método que utiliza os conhecimentos anteriormente adquiridos, o diálogo, o debate, o pensamento crítico, entre outras ferramentas, para ajudá-los a aprender e a resolver problemas. O método pode ser usado em qualquer área de estudo, desde ciência e matemática até negócios, engenharia e pesquisa.

O referido método é fundamentado na ideia de que o aprendizado é um processo ativo, que requer que a pessoa explore possibilidades considerando as diferentes abordagens e táticas para resolver problemas, o que proporciona muitas oportunidades para que os alunos possam trabalhar com problemas reais, nesse sentido:

> Ensinar a resolver problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Não é uma questão de somente ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a propor problemas para si mesmo, a transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, P.14).

A melhor maneira de ensinar a resolver problemas é proporcionar ao aluno um ambiente estimulante para o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico, ambiente que proporcione que o aluno entenda que pode usar a lógica, a criatividade e os conteúdos ensinados pelo professor anteriormente para encontrar soluções para os problemas trabalhados.

Nesse sentido, é importante que o professor forneça ao aluno tempo e recursos para que ele possa refletir sobre o problema e chegar à solução além de ajudar o aluno a desenvolver habilidades de raciocínio lógico e estimulá-lo a avaliar diferentes maneiras de solucionar um problema. Em acréscimo, o professor deve incentivar o aluno a escrever as estratégias e os passos que estão sendo realizados, dessa maneira o aluno consegue refletir sobre o procedimento utilizado e questionar seu próprio raciocínio através dos debates em sala de aula, pois isso auxilia a desenvolver pensamentos que não foram internalizados.

E importante não confundir tal metodologia com "um treinamento", pois há pessoas que a confundem com, por exemplo, o processo mecânico de resolver uma equação do primeiro grau, quando, na verdade ela vai além, proporcionando que o aluno identifique qual ferramenta usar, como utilizá-las e verificar se o processo se aplica a outras situações do seu cotidiano, formando e reformulando conceitos que podem ser recuperados quando necessite. Em outras palavras, o processo de ensinar para resolver problemas permite transmitir conhecimentos específicos e proporciona meios no qual o aluno reflita sobre métodos e procedimentos que podem ser utilizados nas mais variadas gamas de problemas cotidianos, sejam matemáticos ou não.

Nesse sentido, este trabalho se estrutura a partir da perspectiva de desenvolver uma educação matemática voltada para a descoberta e transmissão de conteúdos matemáticos que podem se utilizados em seu cotidiano ou para resolver problemas específicos em provas de aplicação de larga escala, como a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), auxiliando o aluno a conhecer e desenvolver técnicas que são aprimoradas durante sua vida acadêmica.

2.4 O Ensino da Matemática

A educação básica, principalmente nos anos iniciais, é fundamental na formação do indivíduo crítico e reflexivo, mas as avaliações de larga escala, como SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), ressaltam que a maioria dos alunos que concluem a educação básica não consegue dominar os elementos básicos da disciplina de matemática, o qual se espera para esse nível de escolaridade. Os fatores que causam esses problemas são diversos e variam de acordo com a realidade na qual o aluno está inserido, indo desde a falta de capacitação dos professores, passando pela falta de estímulo dos alunos e incluindo a abstração dos conteúdos matemáticos, nos quais eles veem esses conteúdos como uma série de fórmulas sem lógica ou conexão com sua realidade.

> Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics — NCTM —, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento "Agenda para Ação". Nele destacava-se a resolução de problemas como foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares (Brasil, 1997, p.20).

Durante todo esse período muito se tem discutido sobre a resolução de problemas, mas muito pouco sobre a importância da linguística no processo de aprendizagem matemática principalmente sobre a importância da escrita no processo de resolução de problemas.

Com a aprovação da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), há conteúdos básicos que devem ser ministrados e habilidades que devem ser desenvolvidas e alcançadas pelos alunos na disciplina de matemática, entre elas a capacidade de fazer demonstrações simples. Para resolver esses problemas, é imprescindível utilizar a lógica e argumentos coerentes podendo dividir o problema em partes menores e mais gerenciáveis, além de dominar a escrita e a argumentação para que possa se expressar e argumentar de forma clara e precisa.

Em um país de dimensões continentais como o Brasil, é essencial que se tenha um currículo base que assegure conteúdos básicos a serem ministrados, mas quando se trata de aprendizagem matemática, esses conteúdos não implicam que os alunos adquiram tal conhecimento. E essa aprendizagem depende de vários fatores que variam desde as condições e os ambientes de convivência do aluno, além das práticas desenvolvidas no ambiente escolar. Fora isso, ainda há as dificuldades encontradas pelos alunos quando se deparam com a matemática, como a dificuldade em compreender conceitos básicos como números, operações e estruturas de dados, falta de motivação e falta de prática, pois a maioria não dispõe de tempo adequado para praticar os conceitos matemáticos ou quando chega em casa têm dificuldade em lembrar e a falta de interesse, pois alguns alunos não levam a sério a matemática.

A fim de proporcionar uma educação matemática de qualidade, protagonista e construtiva, várias metodologias foram elaboradas e discutidas por inúmeros pesquisadores da área, como a resolução de problemas e o movimento de matemática moderna que buscava desenvolver um ensino com compreensão e significado, tinha o objetivo de ensinar através da lógica e da construção de argumentos lógicos.

> Com o movimento de reforma chamado Matemática Moderna, vigente nos anos sessenta e setenta do século XX, o mundo foi influenciado por recomendações de ensinar Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. O tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, fadou-o ao fracasso (Onuchiic; Alevato, 2011, p.78).

É bom frisar que o fracasso de tal movimento seria evidente, pois para ter sucesso primeiramente deveria haver uma capacitação em massa dos professores, apoiada em uma política de valorização profissional em relação às condições de trabalho e estruturação das escolas que proporcione acolhimento, alimentação, ambientes adequados que forneça meios para que os alunos desenvolvam uma aprendizagem efetiva, aliada a programas sociais que auxiliem as famílias e as oriente sobre a importância da educação dos seus filhos e quase 30 anos atrás documentos como os PCNs já informavam que:

> Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho (Brasil, 1997, p.22).

Apesar dos estudos realizados, na última década poucas pesquisas têm sido desenvolvidas sobre a importância da argumentação matemática no processo de ensino-aprendizagem de matemática, essencial no método lógico construtivo dos elementos e das estruturas matemáticas, tão pouco da importância da escrita na técnica de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, o qual auxilia o aluno a fixar, revisar e reestruturar o pensamento à medida em que estuda. E segundo Brasil (1997, p.20) "no Brasil, a Matemática Moderna foi veiculada principalmente pelos livros didáticos e teve grande influência. O movimento Matemática Moderna teve seu refluxo a partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas na sua implantação".

O processo de ensinar é extremamente complexo, principalmente quando se trata de matemática, pois tanto o professor quanto os alunos têm que estar na mesma sintonia. O aluno deve desenvolver a busca e a curiosidade para entender o processo de construção lógica e poder organizar suas ideias, mas isso é difícil, a maioria visualiza as fórmulas matemáticas como algo sobrenatural, sem lógica, impossível de entender.

Aprender matemática não é fácil e o problema se intensifica quando os alunos não dominam conceitos básicos e com a introdução de elementos cada vez mais abstratos, esse processo de codificação se torna mais difícil e insustentável a ponto de afirmar que não entende nada da disciplina de matemática. Logo, o processo se torna insustentável e o aluno carrega traumas durante toda vida.

A linguagem utilizada no processo também interfere no aprendizado do aluno, uma vez que a linguagem correta é aquela que os alunos compreendem a mensagem que o professor quer transmitir, sem perder a formalidade dos elementos estudados. Essa formalização seguida da escrita no início e/ou no final da apresentação de um conteúdo ou da apresentação de um problema é de extrema importância, pois se torna um exemplo no qual os alunos devem seguir na hora da resolução de um problema matemático futuro.

É óbvio que tal processo de argumentação não é construído de forma imediata, é um processo lento, contínuo e gradual que se aperfeiçoa a cada demonstração e a cada descoberta de novos elementos e técnicas aprendidas ao longo da vida estudantil. O professor é um construtor que consegue unir os conteúdos ao conhecimento prévio da realidade do aluno, aprimorando ou ressignificando os conhecimentos básicos que servirão como base durante a vida dos indivíduos envolvidos no processo.

Nesse processo, assim como o aluno, o professor deve ser um protagonista, acreditar na capacidade de seus alunos em compreender os conceitos matemáticos essenciais, propor e se utilizar de métodos e estratégias que melhor se adequem à realidade vivenciada, buscando desenvolver a lógica e o pensamento crítico dos alunos. Tal tarefa não é nada fácil e muitas vezes tem-se que retomar conceitos, tidos por muitos como óbvios, mas que para os alunos não são, já que podem não ter dominado ou simplesmente os esquecidos.

Um ponto delicado a ser tratado é a formalização dos conteúdos por parte do professor, muitos pulam passos importantes, como demonstrações simples, acreditando que os alunos não iriam entender o conceito, dando apenas uma fórmula que deve ser seguida. Isso torna o aprendizado incompleto, pois o aluno fica sem saber de onde derivam os argumentos utilizados que levaram a tal fórmula a ser válida, já outros defendem não ser viável devido à questão de tempo das aulas ou até mesmo pelas condições sociais, baixo nível de conhecimento e motivação dos alunos.

Essa formalização é um problema enfrentado em várias escolas no Brasil, se derivando principalmente da formação do professor e da falta de programas de capacitação que tratem de forma coesa os elementos matemáticos. Tal fato impacta no aprendizado do estudante e é evidenciado em provas como a OBMEP, na qual em sua 2ª fase muitos alunos mesmo sabendo responder a questão, não conseguem estruturar as ideias em ordem lógica ou até mesmo não conseguem expressar suas ideias de forma escrita, perdendo pontos por essa deficiência.

> Felizmente, cada vez mais cedo, nossos estudantes estão percebendo o fato de a matemática lhes cobrar mais do que simplesmente expressões, usar fórmulas, dar respostas corretas ou mesmo ter ideias geniais para resolver problemas. Em geral, já antes de entrarem na universidade, os alunos são solicitados a redigir matemática e muitos não sabem como proceder, pois ninguém os ensinou (FILHO, 2018, P.IX).

Essa formação deficitária dos professores de matemática nas demonstrações e argumentação fica evidente em programas como o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no qual, no início, grande parte dos alunos se depara com um grande desafio, principalmente na argumentação e demonstrações por não ter esse hábito de demonstrar os elementos matemáticos em suas aulas. Por isso a importância de programas como o PROFMAT que levam uma visão diferenciada sobre o ensino de matemática e uma postura dinâmica pelo professor que conclui o curso.

Essa formação é primordial, principalmente nos tempos atuais, em que percebe-se uma constante exclusão de conteúdos dedicados à matemática teórica e abstrata. Essa exclusão advém do fato de alguns educadores defenderem a importância de contextualizar a matemática, relacionando-a a situações do cotidiano e aplicando-a a problemas reais, defendendo abordagens mais contextualizadas e baseadas em projetos, e que, para atender tais necessidades, são necessários alguns ajuste no currículo

Mas a abstração é importante no ensino da matemática e O professor capacitado consegue desenvolver uma linguagem matemática adequada para seus alunos, explicar conceitos, equações matemáticas e diagramas que são usados para introduzir ideias complexas de maneira concisa e precisa. Mesmo se utilizando de uma linguagem matemática científica e técnica, consegue explicar suas ideias de uma forma dinâmica e precisa para seus alunos, já que domina o conteúdo e sabe adequar a linguagem à realidade vivenciada.

2.5 A Escrita Aliada a Resolução de Problemas

Constantemente os professores buscam superar desafios e desenvolver métodos e estratégias para que seus alunos compreendam os conteúdos matemáticos de forma concreta. Contudo, além de desenvolver em seus alunos habilidades como raciocínio lógico, senso crítico e desenvolvimento de diversas estratégias que os auxiliem na mais variada gama de situações problemas que encontram em seu cotidiano, é essencial que potencialize estratégias que fixem na mente dos seus alunos os conteúdos e procedimentos ensinados.

Estamos vivenciando a era tecnológica, em que a informação está sempre muito acessível através da internet e mídias sociais, como YouTube, Instagram, Twitter, programas televisivos, entre outros. Diariamente somos bombardeados com uma enxurrada de notícias, vídeos e informações dos mais variados gêneros, havendo um consumo excessivo de informações e isso está acarretando o surgimento de doenças como a síndrome do pensamento acelerado e para se proteger desses males a mente humana deleta tudo aquilo que identifica como desnecessário.

O armazenamento de informações na mente humana é parecido com um computador, compostos de uma memória temporária e outra permanente. As informações acumuladas na memória temporária são transferidas para a memória permanente caso o cérebro julgue importante ou simplesmente deletadas caso sejam julgadas como desnecessárias e esse processo acontece durante o sono. Conforme o professor Pier:

> O sistema límbico faz um pouco o papel da memória RAM de um micro, enquanto o córtex, entre outras funções, seria o equivalente a um HD: “Escrever” nessa RAM é muito fácil, mas “apagar” é mais fácil ainda! Você tem, nessa estrutura, um rascunho relativamente pequeno (no qual cabem apenas algumas horas de informação) (Piazzi, 2008, p.32).

O excesso de informação na memória temporária pode levar a confusão, dificuldade de concentração e dificuldade em tomar decisões. Também pode levar ao estresse e diminuir a produtividade e concentração do aluno durante as aulas. A quantidade de informações disponíveis atualmente não tem precedentes e se é difícil para um adulto processar tanta informação, imagine uma criança. O déficit na aprendizagem matemática é evidenciado nos resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) que indica que, em 2018 no Brasil, 68% dos estudantes de 15 anos não sabem o básico de matemática.

> O que torna o sistema educacional brasileiro tão catastrófico (é um dos piores do mundo!) é o fato da maioria das escolas serem ineficientemente burocratizadas, não se preocupam em ensinar seus alunos em realmente aprender, ou seja, em armazenar o conhecimento de forma permanente (Piazzi, 2008, p.30).

É imprescindível que o professor tenha ciência de tal problema e a forma que a mente humana lida com as informações para que possa desenvolver estratégias que levem os alunos a internalizar os conteúdos ministrados em sala de aula. Tal tarefa não é simples, pois cada pessoa tem uma forma de reagir quando estimulada.

Uma das estratégias que pode ser desenvolvida é o ato da escrita, pois ao escrever o aluno se torna um ser ativo, ele informa para sua mente que tal conteúdo é importante e deve ser guardado. A escrita se torna uma ferramenta importantíssima, principalmente para aprendizagem dos conteúdos matemáticos que são vistos por muitos alunos como chatos, enfadonhos e difíceis de aprender. Assim segundo Piazzi (2008, p.61) “o próprio ato de escrever é que permite uma maior fixação posterior durante a noite”.

Assim, a resolução de problemas e a escrita fazem uma união perfeita: por um lado os problemas proporcionam desafios aos alunos, aplicando seus conhecimentos matemáticos para encontrar soluções desenvolvendo habilidades e raciocínio lógico, e por outro lado a escrita ajuda a internalizar o conhecimento, organizar e expressar melhor ideias e desenvolve o pensamento crítico.

Porém, escrever não é fácil e, principalmente, a escrita matemática requer um certo nível de treinamento e conhecimento sobre símbolos e técnicas de argumentação, tanto de escrita como de estrutura lógica, para que possa ser utilizada em sala de aula. Nesse sentido, no próximo capítulo serão abordadas algumas técnicas de argumentação e demonstrações matemáticas que podem ser utilizadas pelo professor nas aulas de matemática.

Assim, este trabalho irá abordar o método de ensino para resolver problemas, unido à escrita e à argumentação matemática que permite o aluno se expressar e comunicar suas ideias de forma clara e objetiva, possibilitando compartilhar suas perspectivas com a sociedade de forma lógica e eficaz, e a partir da resolução de problemas que, por sua vez, envolve habilidades cognitivas críticas para obter resultados, tais como análise de dados, pensamento estratégico e foco na solução de situações cotidianas. Essa união entre escrita e resolução de problemas são habilidades extremamente importantes e que ajudam os alunos a alcançar êxito, na vida acadêmica e profissional, independente de qual área deseja seguir.

3 A ARGUMENTAÇÃO LÓGICA MATEMÁTICA

3.1 A Lógica

A lógica é fruto do desejo de conhecimento e da inquietude do pensamento humano, da perspectiva de pensar filosoficamente sobre os elementos, estruturas e conceitos que cercam o indivíduo e da ideia de ordenar o pensamento através do estudo de fatos que se aceitava como verdades ou não. Esses fatos são denominados como proposições, que são afirmações passíveis de assumir valor lógico verdadeiro ou falso. Nesse sentido, a lógica tem o objetivo de estabelecer leis gerais de encadeamento a partir das proposições válidas para buscar novas verdades.

> Essa forma de encadeamento é chamado, em Lógica, de argumento, enquanto as afirmações envolvidas são chamadas proposições; um argumento é, pois, um conjunto de proposições tal que se afirme que uma delas é derivada das demais; usualmente, a proposição derivada é chamada conclusão, e as demais, premissas. Em um argumento válido, as premissas são consideradas provas evidentes da verdade da conclusão (PINHO, 1999, P.2).

À medida em que o pensamento humano foi evoluindo a forma de agir e de pensar, foram se aprimorando as definições, os resultados e os processos técnicos estabelecidos até então para resolver problemas específicos. Para as ciências, esse processo não era suficiente, e então o homem começou a se perguntar o porquê de tais resultados serem válidos e assim teve origem o processo lógico dedutivo.

> A lógica teve origem como disciplina com Aristóteles, entre 300 e 400 anos antes de Cristo. Naturalmente, os homens não eram irracionais antes disso, tendo sido transformados em seres racionais pelos estudos aristotélicos: eles sempre pensaram, raciocinaram, escolheram, decidiram. Com Aristóteles, no entanto, tem início a caracterização das formas legítimas de argumentação, em contraposição a outras que poderiam parecer corretas, mas que eram inadequadas–as falácias (MACHADO; CUNHA, 2019, P.14).

Para que a lógica fosse utilizada no pensamento matemático, foram admitidas afirmações básicas que não necessitavam de provas e eram consideradas como verdades e receberam o nome de axiomas. Segundo Fossa (2009, p.47), um axioma é uma proposição aceita sem demonstração. Esses axiomas estruturam a base do pensamento matemático e para imaginá-los, podemos pensá-los como sendo a base de um edifício em que cada andar depende do anterior para se sustentar. Conforme Garbi (2010, p.31), Aristóteles afirma que nas ciências existem verdades evidentes por si mesmas, que devem ser aceitas sem prova.

Atualmente, a educação matemática na maioria das escolas brasileiras não é concebida como um processo lógico construtivo, os conteúdos são explicados de forma isolada, os conhecimentos adquiridos anteriormente não são utilizados para construir novos conhecimentos. É importante salientar que o processo lógico edificado nas aulas de matemática é importantíssimo, pois auxilia os alunos a relembrar conceitos básicos, organiza as ideias e estrutura a base do pensamento a ser construído.

3.2 Conectivos Lógicos

Desenvolver o hábito de escrita, principalmente a matemática, não é uma tarefa fácil, pois requer tempo e prática, além de desenvolver uma postura protagonista na busca de aprimorar seu vocabulário e aprender novos símbolos matemáticos que irão auxiliar em sua empreitada.

O professor de matemática deve ter uma linguagem acessível e compreensível a seus alunos, de tal forma que seja clara, objetiva e concisa, mas ao mesmo tempo sem deixar de contemplar a beleza dos elementos matemáticos. Assim, os símbolos e os conectivos lógicos matemáticos devem ser inseridos na educação básica para que os alunos se acostumem gradativamente, pois de início a linguagem coloquial empregada pelo professor pode surtir efeito e os alunos conseguirão expressar suas ideias e conceitos, mas ao decorrer do tempo, naturalmente irão necessitar de conceitos mais refinados para expressar suas ideias.

Para auxiliar na organização do pensamento, podemos representar as proposições por letras minúsculas (p, q ou r), denominadas de letras proposicionais. Além disso, quando temos duas ou mais proposições em uma frase, estamos diante de uma proposição composta que se relaciona com conectivos que têm valor lógico. Nesse sentido, se faz necessário conhecer alguns conectivos expressos na Tabela 3.1, para que o aluno consiga expressar uma determinada frase em uma linguagem matemática.

Tabela 3.1 – Alguns Símbolos e conectivos lógicos

Símbolo	Conectivo	Operação lógica
$\rightarrow$	Implica	Condicional
$\leftrightarrow$	Se, e somente se	Bicondicional
$\sim$	Não	Negação
$\wedge$	E	Conjunção
$\vee$	Ou	Disjunção

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

3.2.1 Conjunção

Sejam p e q proposições, denominamos conjunção de p e q a proposição composta da forma $p \wedge q$. Nesse caso se for conhecido o valor lógico de cada proposição simples, também será conhecido o valor lógico da conjunção, que nessa só terá valor lógico verdadeiro apenas quando as duas proposições tiverem valor lógico verdadeiro, caso contrário, a conjunção será falsa, veja isso na tabela abaixo:

Tabela 3.2 – Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Pinho (1999, p.11).

Para dar um exemplo, observe as duas proposições a seguir: "Taperoá é um município do estado da Paraíba" (p); "A paraíba é um estado brasileiro" (q). Note que ambas as proposições têm valor lógico verdadeiro, ou seja, a proposição "Taperoá é um município do estado da Paraíba e a Paraíba é um estado brasileiro", representada por $(p \wedge q)$ também terá valor lógico verdadeiro. É interessante notar que a conjunção é comutativa, ou seja, $(p \wedge q) = (q \wedge p)$.

3.2.2 Negação

Seja p uma proposição, denominamos de $\sim p$ a negação de p. A negação inverte o valor lógico da proposição, ou seja, se p for verdadeira, $\sim p$ será falsa, do mesmo modo que se $\sim p$ for verdadeira, p será falsa. Um fato interessante ocorre com a dupla negação, pois como a negação inverte o valor lógico da proposição, se $\sim p$ for falso, $\sim\sim p$ será verdadeiro. Veja a construção na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Negação

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Um exemplo é se tomar a proposição "Campina Grande é a rainha da Borborema" (p), logo, sua negação será "Campina Grande não é a rainha da Borborema" ($\sim p$).

3.2.3 Condicional

Sejam p e q proposições simples, definimos condicional como sendo a ligação de duas proposições simples pelo conectivo "Se... então...", representado da forma $(p \to q)$ em que a proposição p é chamada de antecedente e a proposição q é chamada de consequente da condicional. Para ficar mais claro, vamos utilizar o Exemplo 1, construindo todas as combinações possíveis das proposições p e q.

Exemplo 1. *Sejam p e q proposições, onde ambas tem valor lógico verdadeiro, logo:*
p: Rian é paraibano.
q: Rian é brasileiro.
1°- *Se Rian é paraibano, então Rian é brasileiro.*
2°- *Se Rian não é paraibano, então Rian é brasileiro.*
3°- *Se Rian não é paraibano, então Rian não é brasileiro.*
4°- *Se Rian é paraibano, então Rian não é brasileiro.*

Percebe-se que a única proposição com valor lógico falso é a quarta, pois não tem como Rian ser paraibano e não ser brasileiro. Nota-se, ainda, que a primeira tem valor lógico verdadeiro, já a segunda e a terceira são mais difíceis de perceber. Observa-se, também, que em relação à segunda, o antecedente mesmo sendo falso, implica que Rian poderia ter nascido em outro estado do Brasil e ser brasileiro, já a terceira tanto o antecedente quanto o consequente exercem valor lógico falso, mas na condicional exerce uma valor verdadeiro, pois se Rian não nasceu na Paraíba, ele poderia ter nascido em qualquer país diferente do Brasil e não será brasileiro. Assim, concluímos que, na condicional, para que a proposição composta tenha valor lógico falso, é necessário que o antecedente tenha valor lógico falso e o consequente tenha valor lógico verdadeiro.

Tabela 3.4 – Condicional

p	q	$p \to q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
V	F	F

Fonte: Pinho (1999, p.11).

A condicional, apesar de ser mais difícil de o aluno aprender seu conceito, é essencial para que se possa simplificar algumas preposições difíceis em outra equivalente mais simples. Tal procedimento é bastante utilizado nas demonstrações matemáticas e vale ressaltar que a condicional não é comutativa, pois $p \to q \neq q \to p$. Veremos mais à frente que nas condicionais do tipo $p \to q$ iremos assumir:

- p como sendo a hipótese.
- q como sendo a tese.

Pela construção da tabela acima, veja que a demonstração da tese é fundamentada pela hipótese, pois se nossa hipótese for verdadeira e seguir uma sequência de passos lógicos, se chegará a uma verdade comprovando ou refutando a tese. O estudo da condicional também será extremamente importante para as demonstrações por absurdo que veremos logo mais.

3.2.4 Bicondicional

Sejam p e q proposições simples, definimos bicondicional como sendo a ligação das duas proposições simples pelo conectivo "Se e somente se", representado da forma $(p \leftrightarrow q)$. Percebe-se que o bicondicionamento nada mais é que uma dupla condicional, na qual devem ser verificadas a ida e a volta, ou seja, deve ser verificado $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$, simultaneamente. Assim a bicondicional só terá valor lógico verdadeiro quando as duas proposições forem verdadeiras ou falsas simultaneamente. Veja o Exemplo 2.

Exemplo 2. *Sejam p e q proposições, onde ambas tem valor lógico verdadeiro, logo:*

p: Rian é paraibano.

q: Rian é brasileiro.

1°- Rian é paraibano se e somente se Rian é brasileiro.

2°- Rian não é paraibano se e somente se Rian é brasileiro.

3°- Rian não é paraibano se e somente se Rian não é brasileiro.

4°- Rian é paraibano se e somente se Rian não é brasileiro.

Nota-se que na segunda proposição, a ida é verdade. Esse movimento ocorreu anteriormente na condicional, pois $p \rightarrow q$ é uma verdade. Ademais, nota-se que a volta é falsa, pois $q \rightarrow p$ é falso. Logo, como a ida tem valor lógico diferente da volta, concluímos que a bicondicional é falsa e isso acontece de forma análoga no terceiro caso. Vejamos como fica a construção lógica na tabela abaixo.

Tabela 3.5 – Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
F	V	F
F	F	V
V	F	F

Fonte: Pinho (1999, p.11).

Tais conectivos são importantíssimos na estruturação do pensamento, principalmente nas implicações. Diariamente fazemos implicações lógicas mentais da forma ”se moro em Taperoá, então sou paraibano”, mas tais pensamentos não estão tão presentes nas aulas de matemática, os conteúdos matemáticos não são entendidos como uma sequência de implicações lógicas e esses se tornam sem sentido para os alunos, pois não têm uma construção lógica de passos que sustentem a sua veracidade.

3.2.5 Disjunção

A disjunção se divide em dois grupos: inclusivas e exclusivas. As disjunções inclusivas são, geralmente, as utilizadas na matemática para as construções das tabelas verdade, já as disjunções exclusivas são as comumente utilizadas na língua portuguesa. Assim, deve-se ter um cuidado redobrado com o conectivo da disjunção.

Disjunção inclusiva.

Sejam p e q proposições, denominamos disjunção de p e q a proposição composta da forma $p \vee q$. Nesse sentido, para que a disjunção inclusiva tenha valor lógico verdadeiro, é necessário pelo menos uma preposição simples tenha valor lógico verdadeiro, assim a disjunção só será falsa se ambas proposições simples forem falsas, vejamos a Tabela 3.6:

Tabela 3.6 – Disjunção inclusiva.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Pinho (1999, p.10).

A Tabela 3.6 representa a disjunção inclusiva e percebe-se que, nesse caso, para que a disjunção seja verdadeira, basta que apenas uma ou ambas proposições simples sejam verdadeiras. Vamos citar um exemplo, que seja:

Exemplo 3. *sejam:*

p: 2 é um número par.

q: 2 é um número primo.

A disjunção inclusiva das proposições será “2 é um número par ou 2 é um número primo”, representado por $(p \vee q)$ *e, consequentemente, será verdadeira.*

Disjunção exclusiva.

A disjunção exclusiva é representada pelo símbolo $\veebar$. Assim, se p e q são duas proposições, denominamos disjunção exclusiva de p e q a proposição composta da forma $p \veebar q$. Nesse sentido, para que essa disjunção tenha valor lógico verdadeiro, é necessário que apenas uma proposição tenha valor lógico verdadeiro, caso contrário, a disjunção exclusiva será falsa, vejamos a Tabela 3.7:

Tabela 3.7 – Disjunção exclusiva.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Observe, que se analisarmos o Exemplo 3 através da disjunção exclusiva, ela será falsa, pois a disjunção exclusiva só será verdadeira se uma proposição for verdadeira e a outra for falsa, independente da ordem, pois ela é comutativa. Esse tipo de disjunção dificilmente é empregado nas provas matemáticas, mas vale a pena saber desse fato, pois na língua portuguesa o “ou” é empregado no sentido de exclusão.

Nesse sentido ao ministrar aulas de matemática, o professor deve ter um cuidado redobrado na sua escrita ao explicar os conteúdos na lousa, utilizar os símbolos matemáticos e realizar os exercícios, pois ele é um exemplo para seus alunos, eles tendem a copiar a maneira que o professor se expressa e resolve os problemas. Assim, se deve sempre buscar um equilíbrio para que a linguagem utilizada seja acessível, mas utilizando os símbolos adequados e uma estrutura lógica construtiva, para que os alunos comecem a organizar suas ideias.

Assim, é essencial ministrar as aulas introduzindo os conectivos lógicos gradativamente nas demonstrações que realiza em sala de aula. Tais demonstrações são essenciais, para que as fórmulas e os conteúdos matemáticos tenham um significado para o aluno, para que ele possa entender que essas fórmulas não foram obtidas como um toque de mágica, mas como uma série de implicações lógicas desenvolvidas durante gerações pelo pensamento humano.

3.3 Tabela Verdade

A tabela verdade surge com a proposta de organizar as proposições em um modelo lógico matemático, no qual o professor Friedrich Ludwig Gottlob Frege deu importantíssimas contribuições no ano de 1879, com a publicação de *Begriffsschrift*. Frege buscava representar formalmente a estrutura dos enunciados lógicos e suas relações, foi um visionário. Com seus estudos, buscava caracterizar de forma precisa como deveria ser uma demonstração matemática, como as proposições deveriam ser organizadas e as regras nas quais deveriam ser seguidas, pois na sua época, constantemente os matemáticos cometiam erros nas demonstrações dos teoremas, dando um passo à frente no modelo lógico de Aristóteles. Em 1921 o filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein publicou o livro *O Tractatus Logico-Philosophicus*, no qual já abordava proposições básicas estruturadas na forma que as conhecemos hoje, mas foi graças a George Boole, em meados do século XIX, que linguagem simbólica foi introduzida para representar os elementos matemáticos, criando o cálculo proposicional.

> À medida que a Lógica Simbólica desenvolve sua própria linguagem técnica, vem se tornando um instrumento cada vez mais poderoso para a análise e a dedução dos argumentos. A utilização de uma simbologia matemática ajuda a expor, com maior clareza, as estruturas lógicas das proposições e dos argumentos, que podem não ficar suficientemente claras se expressas em linguagem natural (Pinho, 1999, p.3).

Desta forma, a tabela verdade surge como um dispositivo engenhoso e eficaz, que possibilita organizar as proposições compostas elencadas em uma frase ou em um teorema matemático a fim de verificar a sua veracidade (verdadeiro ou falso), por meio das proposições simples que as compõe, uma vez que essa dedução é assegurada pelo princípio do terceiro excluído, e segundo Pinho (1999, p.5) “uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção”. Esse princípio é a base da construção da Tabela 3.8 descrita abaixo:

Tabela 3.8 – Tabela verdade

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow (\sim p)$	$\sim p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A tabela verdade é apenas uma estrutura organizada que contém todas as combinações lógicas das proposições envolvidas, em que cada linha representa uma dessas combinações e com cada proposição só pode se assumir dois valores possíveis (verdadeiro ou falso) e o número de linhas dessa tabela será dado por $2^n + 1$, o qual n representa a quantidade de proposições envolvidas.

A Tabela 3.8 aborda uma ideia importante para as demonstrações matemáticas: o conceito de equivalência. Observa-se que a tabela acima na sétima, oitava e nona colunas apresenta a mesma construção lógica, logo as proposições $(p \to q)$, $(\sim q \to (\sim p))$ e $(\sim p \vee q)$ são equivalentes e podem ser expressas da forma $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to (\sim p)) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

As equivalências são importantíssimas nas demonstrações matemáticas, pois há certas situações em que o trabalho com as proposições equivalentes diminui o trabalho para demonstrar um teorema ou uma proposição composta, tornando essa tarefa algo mais simples e menos doloroso. Veremos tais situações nas seções seguintes.

Esses conceitos básicos devem ser introduzidos gradativamente na educação básica, para que se possa auxiliar os alunos a estruturarem e organizarem seus pensamentos para que futuramente se consiga compreender e vislumbrar o sentido de uma demonstração matemática, possibilitando a melhoria da argumentação e da escrita.

3.4 Tautologia

Uma tautologia é uma proposição composta que tem valor lógico sempre verdadeiro, independentemente dos valores lógicos atribuídos às suas premissas. Em outras palavras, é uma afirmação que tem valor lógico verdadeiro em qualquer situação.

Na lógica formal, uma tautologia é uma sentença que é verdadeira em todas as interpretações possíveis. Isso significa que, não importa quais valores lógicos são atribuídos as premissas, a afirmação sempre será verdadeira. Elas ajudam a estabelecer a validade de argumentos, a demonstrar teoremas e a construir provas lógicas consistentes.

A maneira mais eficiente e mais utilizada para identificar uma tautologia é utilizando tabela verdade, pois através dela é possível verificar se o valor lógico realmente é verdadeiro para todas as opções possíveis. Um exemplo de tautologia é a expressão "p ou não p", onde p representa qualquer afirmação. Essa expressão sempre será verdadeira, porque ela afirma que p é verdadeira ou a negação de p é verdadeiro, e uma das duas opções sempre será verdadeira, veja o exemplo na tabela a seguir.

Tabela 3.9 – Tautologia.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A tautologia pode ser usada na educação básica de várias maneiras para auxiliar no desenvolvimento do pensamento lógico e na compreensão dos princípios matemáticos. Assim listaremos algumas aplicações da tautologia na educação básica:

• **Introdução à lógica:** As tautologias podem ser usadas para introduzir os conceitos básicos da lógica para os alunos. Através de exemplos simples de tautologias, os estudantes podem aprender sobre afirmações verdadeiras independentemente dos valores lógicos de suas premissas.

- **Desenvolvimento do raciocínio dedutivo:** A partir das tautologias, os alunos podem aprender sobre o raciocínio dedutivo. Eles podem ver como é possível chegar a conclusões válidas a partir de premissas verdadeiras. Isso ajuda a desenvolver habilidades de pensamento crítico e capacidade de argumentação.
- **Provar teoremas:** À medida que os alunos avançam na matemática, eles começam a provar teoremas e proposições. As tautologias podem ser usadas como ferramentas para construir argumentos lógicos sólidos na prova de teoremas. Os alunos podem aprender a aplicar leis lógicas e propriedades que envolvam as tautologias para estabelecer a validade de uma afirmação.
- **Compreender os conectivos lógicos:** As tautologias permitem aos alunos explorar os conectivos lógicos, como "e", "ou" e "não". Eles podem ver como esses conectivos afetam os valores de verdade das afirmações e como as tautologias estão relacionadas a eles. Isso ajuda a desenvolver uma compreensão mais profunda da lógica matemática.
- **Resolução de problemas:** Ao trabalhar com tautologias, os alunos podem desenvolver habilidades de resolução de problemas. Eles aprendem a analisar informações, identificar padrões e aplicar princípios lógicos para chegar a uma solução.

Nesse sentido, a tautologia pode ser usada na educação básica como uma ferramenta para ensinar lógica, desenvolver habilidades de raciocínio dedutivo, provar teoremas, simplificar expressões, compreender os conectivos lógicos e resolver problemas matemáticos. Ela ajuda os alunos a pensar logicamente, a argumentar de forma consistente e a compreender os fundamentos da matemática.

3.5 As Demonstrações Matemáticas na Educação Básica

No ensino básico, principalmente nos anos finais do ensino fundamental há a necessidade de mostrar aos alunos a importância das demonstrações das fórmulas e teoremas e, segundo Oliveira e Fernández (2012, p.9), "uma demonstração em matemática é o processo de raciocínio lógico e dedutivo para se chegar a veracidade de uma proposição condicional".

Contudo, alguns professores da educação básica alegam que essas demonstrações são uma verdadeira perda de tempo, afirmam que os alunos não assimilam o conteúdo, as aulas são curtas e o tempo não é suficiente para que tais demonstrações sejam realizadas, preferem dar uma fórmula pronta, "uma receita de bolo" para resolver as questões, ocultando diversas informações importantes e acreditando que o aluno não entenderia tal conceito. As explicações na lousa têm poucas informações escritas, as aplicações puramente oral interferem no aprendizado, principalmente com os alunos da escola pública, em que maioria não desfruta de aulas de reforço para compreender o conteúdo.

Esses professores não estão totalmente errados em pensar dessa forma: salas lotadas, alunos com uma base de conteúdos matemáticos insuficientes, falta de material e até mesmo de estímulo no ambiente familiar são alguns desafios enfrentados diariamente pelo professor de matemática que, ao se deparar com tantos desafios, fica desestimulado e abatido em enfrentar tantos problemas. A falta de capacitação e estímulo para os professores interferem para que desenvolva essa didática utilizando as demonstrações aliadas à escrita e à argumentação na sala de aula.

No fim, o que vai dar a resposta ao professor de qual postura assumir em sala de aula são os objetivos que deseja que seus alunos desenvolvam, pois as demonstrações, a argumentação que desenvolve na lousa nas explicações e na correção dos exercícios auxiliam o aluno a desenvolver um raciocínio que o ajuda a resolver as questões-problemas em provas como a OBMEP, aprimorar os conceitos e as principais técnicas de argumentação, além de auxiliar na resolução de questões-problemas mais gerais. Segundo Garbi (2010, p.10), "o êxito de um professor de matemática deve ser medido pela quantidade de alunos que, ao longo da vida ele ensinou a pensar por si mesmo e não pelo volume de fórmulas que os fez memorizar".

Porém, para tal tarefa, o primeiro ponto é reconhecer que matemática é uma disciplina difícil e algumas demonstrações requerem um certo nível de abstração que tem que ser muito bem planejada para que se tenha o efeito desejado. E esse planejamento não deve ser único, dependerá do nível de conhecimento o qual os alunos detêm. Um fato a ser considerado é que nada é óbvio, todo conceito inserido requer no mínimo uma explicação sobre tal fato.

A seguir veremos algumas das principais demonstrações que devem ser realizadas nos anos finais do ensino fundamental, principalmente no 9° ano, e as principais técnicas que poderemos utilizar em alguns conteúdos e o papel fundamental que a lógica exerce no processo de organização das ideias para que o aluno possa compreender o conceito de forma clara e eficiente.

Para que o professor tenha êxito nas explicações e proporcione uma aprendizagem significativa para os alunos, ele terá que explicar alguns axiomas básicos para o corpo discente, voltando a explicá-los sempre que solicitado, pois o raciocínio não fluirá se os conceitos básicos não forem internalizados de forma satisfatória.

3.5.1 Alguns Conceitos Básicos

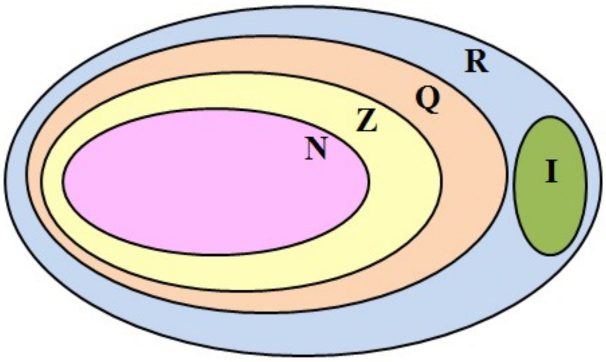
Nesta seção, veremos alguns conceitos básicos do 9° ano que devem ser abordados com um extremo cuidado para que os alunos possam compreender os conteúdos de forma exata e sem dupla interpretação. Nessa etapa, é inserido o conteúdo dos números reais ($\mathbb{R}$) e é importante iniciar apresentando os outros conjuntos vistos em séries anteriormente: o conjunto dos números naturais representado por ($\mathbb{N}$) e o conjunto dos números inteiros

$(\mathbb{Z})$.

É importante reforçar a definição de números racionais $(\mathbb{Q})$, em que $\mathbb{Q} = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, para que posteriormente os números reais sejam representados como a união entre conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Salientando que em uma linguagem precisa os irracionais devem ser apresentados como complementar de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, $\left(\complement_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}\right)$.

Como dito anteriormente é importantíssimo o professor repassar conceitos precisos que não gerem dúvidas de interpretação ou conceitos errados, pois isso irá interferir drasticamente na aprendizagem dos seus alunos. Para visualizar exemplos de conceitos equivocados, observemos a Figura 1:

Fig. 1 – Diagrama do conjunto dos números reais

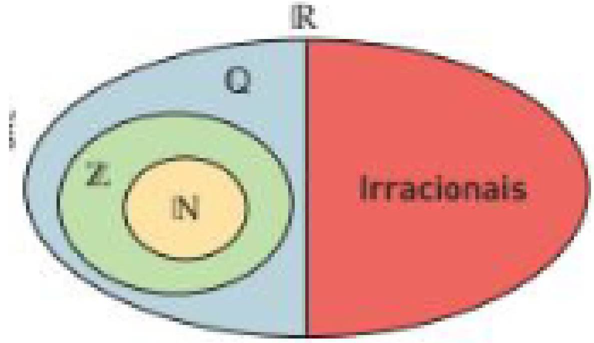


Fonte: Silva (2022)

É comum alguns professores durantes suas aulas representarem o conjunto dos números reais conforme diagrama da Figura 1. Para o aluno, essa figura não é nada intuitiva, primeiramente por estar representada dentro de setores e isso remete a ideia de finito, já que nessa imagem se consegue visualizar o início e o fim. Considerando que o professor explique que cada um desses conjuntos é infinito, outro ponto que os alunos podem questionar é a parte sinalizada em cor azul, entendendo, também, que o professor já tenha informado que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Veja que tal diagrama será melhor compreendido se for representado conforme a Figura 2. Observemos como uma simples mudança gera total diferença na compreensão.

Fig. 2 – Diagrama correto do conjunto dos números reais



Fonte: Longen (2018)

Essa compreensão é importantíssima e destacamos a necessidade das propriedades da adição e multiplicação sobre os reais, pois esse conjunto é abstrato para o aluno, sendo necessário trabalhar o conceito de elemento e cardinalidade, pois quando o professor fala $x \in \mathbb{R}$, eles entendem x como algo estático e rígido e não consegue entender que o x é variável e pode assumir qualquer valor nos $\mathbb{R}$.

Essa dificuldade fica explícita quando o professor escreve a seguinte sequência dos números naturais na lousa:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-2, n-1, n$$

Ao perguntar aos seus alunos quantos números têm na sequência, dificilmente a resposta será n, pois eles não compreendem de início que ele representa um número. Então essas ideias devem ser bem trabalhadas e seus significados devem ser constantemente revisados e escritos na lousa para que não gerem dúvidas futuras.

Nessa etapa do ensino fundamental, deve-se assumir as propriedades básicas da adição e da multiplicação sobre os $\mathbb{R}$ como axiomas, pois no momento não há a necessidade de serem provadas. Vejamos algumas dessas propriedades matemáticas que geralmente são trabalhadas nos currículos do ensino fundamental.

- Propriedades da adição sobre o reais, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$:

Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
Comutatividade: $a + b = b + a$.
Existência do elemento neutro (zero): $a + 0 = a$.
Inverso aditivo: $b + (-b) = 0$, inverso aditivo de a indicado como $-a$.

Todas essas propriedades são importantíssimas e devem ser exploradas com os alunos durante todo período, pois não se pode esperar que explicado uma única vez o aluno já consiga internalizar. É óbvio que alguns terão mais facilidades de compreender, mas outros não. Uma propriedade na qual os alunos ficam maravilhados quando bem explicada é a A_4, pois além de ser importantíssimas nas demonstrações é uma forma elegante de representar o número zero, aliás essa é uma dificuldade enfrentada pelos alunos, a dificuldade de representar os números de uma maneira diferente.

- Propriedades da Multiplicação sobre o reais, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$:
Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
Comutatividade: $a \cdot b = b \cdot a$.
Existência do elemento neutro da multiplicação: $a \cdot 1 = a$.
Distributividade em relação à adição: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
Lei do cancelamento: $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$, com $a \neq 0$.

Apesar dos alunos dos anos finais do ensino fundamental já terem um certo nível de conhecimento por estudar essas mesmas propriedades em outros conjuntos, como os inteiros ($\mathbb{Z}$), essas propriedades têm que ser muito bem exploradas, principalmente a M_4 e M_5, pois os alunos demonstram extrema dificuldade em fazer a volta. Por exemplo, é fácil para o aluno entender que $a \cdot (b + c) \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c$, mas é extremamente difícil notar que $a \cdot b + a \cdot c \Rightarrow a \cdot (b + c)$. Colocar o fator comum em evidência é um ato penoso para um aluno que não construiu esse conceito. Essa dificuldade avança durante sua vida escolar, prejudicando procedimentos mais sofisticados de manipulação, tornando o estudo da matemática algo estressante e complicado.

Nessa fase, os alunos apresentam dificuldades ao trabalhar com as incógnitas, principalmente as que envolvem divisões. Um exemplo disso é quando o professor explica o conceito que para quaisquer $x \in \mathbb{R} - \{0\}, \frac{x}{x} = 1$. Então na tentativa que os alunos compreendam, ele escreve na lousa:

$$\begin{gathered}\frac{1}{1} = 1\\ \frac{2}{2} = 1\\ \frac{3}{3} = 1\\ \vdots\\ \frac{x}{x} = ?\end{gathered}$$

Não é de se admirar que para os alunos a resposta não é óbvia e grande maioria vai responder x, assim o professor deve sempre que possível revisar esses conceitos e ter um cuidado redobrado na forma na qual explica e na argumentação desenvolvida na lousa.

É fundamental que os alunos dominem esses conceitos, apesar de serem conceitos básicos que se espera que os alunos dominem nos anos finais do ensino básico. São conceitos abstratos que na maioria das vezes não estão presentes no cotidiano do aluno.

Os conceitos geométricos são mais fáceis de serem ensinados e aprendido pelos alunos, isso ocorre pelo fato que eles carregam um certo nível de conhecimento sobre esses elementos por estarem presentes em seu cotidiano além de a facilidade de enxergar tais elementos. Mas por outro lado, se ensinar já é difícil, reconstruir conceitos equivocados é ainda mais complexo. Um exemplo disso é o conceito de reta e ponto: comparando-se a reta com uma linha e considerando-se que existem diferentes larguras, a espessura da linha depende, também, da espessura da ponta do lápis com o qual o aluno está realizando a construção dessa mesma linha. Por esse fato, o professor deve desenvolver um esforço para explicar esses conceitos de forma precisa.

É evidente que ao trabalhar os conceitos geométricos, não podemos deixar de mencionar a importância do livro *Os Elementos* de Euclides que introduziu conceitos básicos fundamentais que estruturaram a geometria como a conhecemos atualmente. Tais conceitos receberam o nome de primitivos e destacamos abaixo alguns indispensáveis que o aluno deve dominar e que estão presentes na obra de Commandino (1994, p.4).

1°- Ponto é o que não tem partes ou o que não tem grandeza.

2°- Linha é o que tem comprimento sem largura.

3°- As extremidades da linha são pontos.

4°- Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.

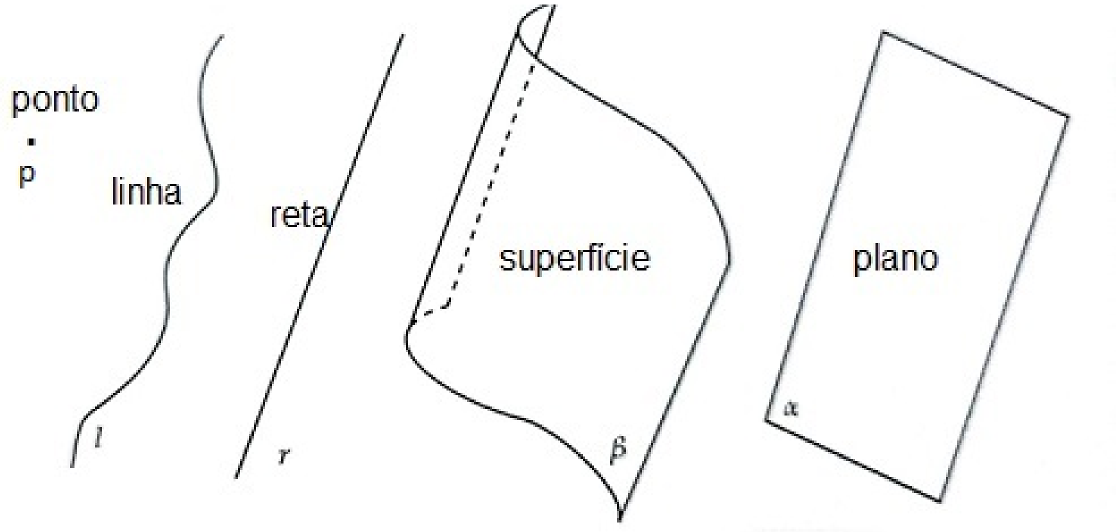
5°- Superfície é o que tem comprimento e largura.

4°- As extremidades da superfície são linhas.

5°- Superfície plana é aquela sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer que estiverem na mesma superfície.

Essas definições devem ser explicadas com o auxílio de imagens como da Figura 3, para que o aluno possa comparar a diferença, compreender e mentalizar tais elementos, pois tal procedimento favorece o aprendizado à medida que o aluno visualiza e reconstrói mentalmente essas definições, caso necessário.

Fig. 3 – Ponto, Linha, Reta, Superfície e Plano



Fonte: Garbi (2010, p.45).

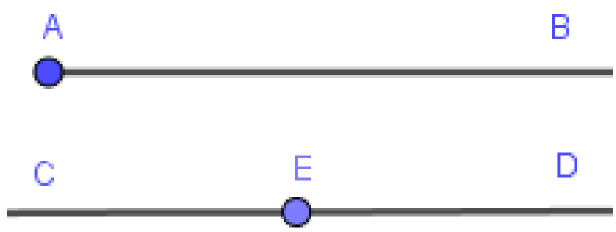
É comum utilizar letras maiúsculas $(A, B, C, \cdots)$ para representar os pontos, já as retas representamos com letras minúsculas e os planos são representados por letras minúsculas do alfabeto grego $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots)$. É bom informar para o aluno que essa representação é o "apelido" que colocamos no elemento para facilitar a referência.

Para fortalecer a compreensão, é importante esclarecer alguns outros conceitos que a maioria dos livros didáticos supõe que seja óbvio para o aluno, mas que não são. Tais conceitos foram extraídos do livro Garbi (2010, p.44).

1°- Semiplano é cada uma das partes em que uma reta divide um plano. Tal reta costuma ser chamada de origem dos semiplanos.

2°- Semirreta é cada uma das duas partes em que uma reta é dividida por um ponto qualquer pertencente a elas (a noção de "pertencer" é primitiva). Tal ponto costuma ser chamado de origem das duas semirretas.

Fig. 4 – Semirreta e semirreta oposta

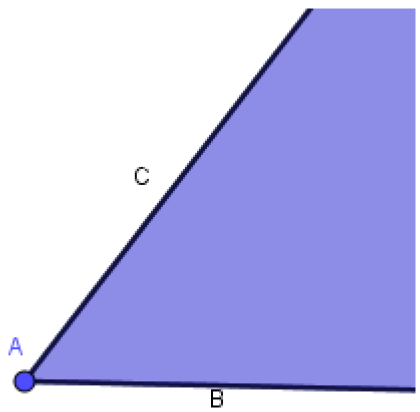


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Na imagem acima, tem-se três semirretas que as definimos utilizando letras maiúsculas $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$, e $\overrightarrow{EC}$. Como as semirretas $\overrightarrow{ED}$, e $\overrightarrow{EC}$ estão sobre a mesma reta, são chamadas de semirretas opostas.

3°- Ângulo é a medida da abertura entre dois segmentos de reta com origem em um mesmo ponto e é representado pelo símbolo $\angle$. O ponto em comum das duas semirretas que constituem um ângulo é chamado de vértice do ângulo e as referidas semirretas são chamadas de lados do ângulo. É importante que o aluno aprenda a forma correta de representar os ângulos, pois isso irá auxiliar no desenvolvimento da escrita durante a resolução de problemas. A princípio, deve-se evitar conceitos como "ângulo é a região formadas por duas semirretas de mesma origem", pois para o aluno está associado à ideia de área, e começa a imaginar ângulo da conforme a Figura 5, e isso prejudica o aprendizado.

Fig. 5 – Visão de ângulo pelo aluno



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Assim, deve-se ter um extremo cuidado ao se introduzir um conceito, pois o aluno carrega consigo um certo nível de experiência e conhecimento e para compreender o conteúdo busca assimilá-lo a outros conhecimentos e algumas vezes isso pode gerar interpretações equivocadas. Porém, é importante que o aluno domine, pois tais conceitos aliados com a lógica matemática vista anteriormente, fornecerá elementos e técnicas que o aluno pode utilizar para resolver os problemas matemáticos sejam aqueles problemas práticos do seu cotidiano ou até mesmos problemas que envolvam demonstrações matemáticas.

Agora serão apresentadas algumas das principais demonstrações matemáticas que devem ser introduzidas nos anos finais da educação básica e algumas demonstrações dos principais resultados apresentados aos alunos nessa etapa de ensino.

3.6 Demonstração Direta

As demonstrações de forma direta estão presentes em alguns livros da educação básica, de forma implícita e é baseada na lógica matemática, pois esse método parte de uma premissa e através de implicações válidas encontrará uma outra proposição também verdadeira. Assim serão apresentadas a seguir algumas proposições que podem e devem ser expostas aos alunos, principalmente nos anos finais da educação básica.

Proposição 3.1. *Sejam* a, b *e* $c \in \mathbb{R}$*, então:*

I) $a \cdot 0 = 0$.

II) Se $a + b = a + c$*, então* $b = c$.

III) se $a \cdot b = 0$*, então* $a = 0$ *ou* $b = 0$.

Demonstração. I) Tomemos $b \in \mathbb{R}$. Pela existência do inverso aditivo nas operações com números reais, sabemos que $(b - b) = 0$. Então

$$a \cdot 0 = a \cdot (b - b).$$

Em seguida, utilizando a propriedade distributiva, obtemos

$$a \cdot (b - b) = ab - ab = 0$$

e, portanto,

$$a \cdot 0 = 0.$$

II) Adicionando $-a$ a ambos os membros da equação $a + b = b + c$, e se utilizado da associatividade da adição, segue que

$$(a + b) - a = (a + c) - a.$$

Utilizando a propriedade associativa, segue que

$$b + (a - a) = c + (a - a).$$

Finalizando, pela propriedade do elemento neutro da da adição, conclui-se que

$$b + 0 = c + 0 \Rightarrow b = c.$$

III) Utilizando a primeira propriedade, em que $a \cdot 0 = 0$, por hipótese, temos

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot b = a \cdot 0.$$

Assim:

1) Quando $a = 0$, b pode ser qualquer outro real, inclusive o zero.

2) Quando $a \neq 0$, utilizamos a lei do cancelamento da multiplicação:

$$a \cdot b = a \cdot 0 \Rightarrow b = 0.$$

□

Mais a frente, veremos outros exemplos com as propriedades envolvendo as potenciações que são importantes na realização e simplificação dos cálculos pelo aluno. É importante que sejam demonstradas pelo professor e esse processo repassa confiança para o aluno tanto no docente como nas propriedades apresentadas. A definição a seguir tem como principal referência o livro de Vieira (2020).

Definição 3.1. *Dados $a \in \mathbb{Z}^*$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos a potência de a com expoente n da seguinte forma:*

$$a^n = \begin{cases} 1 & se\ n = 0, \\ a^{n-1}a & se\ n \geq 1. \end{cases}$$

É claro que por definição, para $n \geq 1$,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}$$

e quando esse expoente é um número inteiro negativo, segue que

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Proposição 3.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:*

I) $a^m a^n = a^{m+n}$

II) $(a^n)^m = a^{nm}$

III) $(ab)^n = a^n b^n$

Demonstração. I) Por definição de potenciação, segue que

$$a^m a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ fatores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}).$$

Utilizando a associatividade da multiplicação, obtemos

$$(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ fatores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ fatores}}).$$

Por fim, por definição, concluímos que

$$(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ fatores}}) = a^{m+n},$$

isto é,

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

II) Utilizando a definição de potenciação, segue que

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m \text{ fatores}} = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ fatores}} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ fatores}}}_{m \text{ fatores}}.$$

Em seguida, utilizando a propriedade associativa da multiplicação, obtemos

$$\underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ fatores}} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ fatores}}}_{m \text{ fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{mn \text{ fatores}}.$$

Por definição, temos

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{mn \text{ fatores}} = a^{mn},$$

ou seja,

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

III) Por definição de potenciação, segue que

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdots ab}_{n \text{ fatores}}.$$

Utilizando a associatividade da multiplicação, confirma-se que

$$(\underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdots ab}_{n \text{ fatores}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ fatores}}).$$

Finalmente, por definição, concluímos que

$$(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ fatores}}) = a^n b^n,$$

isto é,

$$(ab)^n = a^n b^n$$

□

Proposição 3.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $ax^2 + bx + c = 0$, então*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração. Colocando a em evidência em

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

segue que

$$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Agora usando o elemento neutro da divisão, multiplicando e dividindo por 2, obtemos

$$a\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{c}{a}\right) = 0.$$

Utilizando a propriedade do elemento neutro da adição, somando e subtraindo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, segue que

$$a\left[\underbrace{x^2 + \frac{2bx}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{(*)} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0.$$

Por sua vez, reescrevendo o produto notável acima, em (*), temos

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0.$$

Como temos um produto igual a zero e $a \neq 0$, segue que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Reorganizando e passando para o segundo membro os termos que não dependem de x, segue que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

Desenvolvendo o produto $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Elevando cada membro da igualdade a potência $\frac{1}{2}$, segue que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Utilizando o mínimo múltiplo comum, temos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

e, assim, extraindo a raiz quadrada de $4a^2$, concluímos que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Passando os termos que não dependem de x para o segundo membro, segue que

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

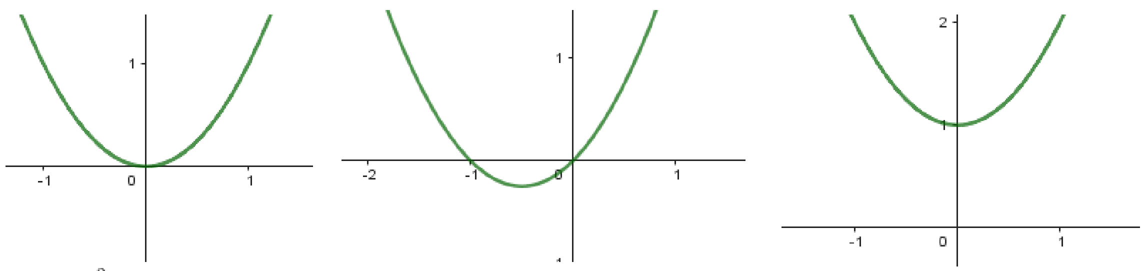
Finalmente, escrevendo sobre o denominador comum, obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

□

Ao fim da explicação, é bom frisar que uma equação do 2° grau pode ter uma, duas ou nenhuma solução real e como a maioria dos alunos já estudou a construção de gráficos na série anterior, é bom frisar que as raízes da equação são o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas, podendo fazer esse desenho na lousa ou uma pequena construção com o GeoGebra para fixar melhor a visualização.

Fig. 6 – Gráfico de uma equação do 2° grau



$b^2 - 4ac = 0$ $\quad$ $b^2 - 4ac > 0$ $\quad$ $b^2 - 4ac < 0$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

3.7 Demonstração por Redução ao Absurdo

As demonstrações matemáticas realizadas através da redução ao absurdo consistem em negar a tese. Através de implicações lógicas válidas, essa negação da tese implicará em um absurdo matemático e esse absurdo pode ser algo que contrarie as leis da matemática. Como exemplo, pode se chegar a absurdos como $1 = 2$, $-1 > 0$, etc.

Então, se tivermos uma sentença matemática da forma $p \to q$, em que p é a hipótese e q é a tese ao negar a tese $(\sim q)$ implicará em um absurdo matemático. Portanto, esse absurdo mostra que a negação da tese é falsa, logo a negação da negação da tese é verdadeira. E com isso $\sim (\sim q) = q$ e teremos que a tese tem valor lógico verdadeiro provando sua validade. Nesse método, deve se ter cuidado ao realizar os cálculos, pois o erro poderá acarretar em um absurdo equivocado. Veremos agora alguns exemplos de demonstrações por absurdo que podem ser utilizadas nos anos finais do ensino fundamental.

Exemplo 4. *Prove que nenhum número inteiro pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que que existe um número x que seja par e ímpar ao mesmo tempo, então existirão $m,\ n \in \mathbb{Z}$, tais que $x = 2m$ e $x = 2n + 1$. Então

$$2m = 2n + 1.$$

Subtraindo $2n$ de ambos os membros, segue que

$$2m - 2n = 1.$$

Dividindo ambos os membros por 2, temos

$$m - n = \frac{1}{2},$$

o que é um absurdo, pois m e n são números inteiros e sua diferença resultou em um número não inteiro. Portanto, não existe número inteiro que pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. □

Exemplo 5. *Mostre que se $x > 0$, então $x + \frac{1}{x} \geq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $x + \frac{1}{x} < 2$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade por x, segue que

$$x \cdot x + \frac{x \cdot 1}{x} < 2x \Rightarrow x^2 + 1 < 2x.$$

Subtraindo $2x$ em ambos os membros da última desigualdade, obtemos

$$x^2 - 2x + 1 < 0 \Rightarrow (x - 1)^2 < 0,$$

O que é um absurdo, pois todo número real elevado ao quadrado resulta em um número maior do que ou igual a zero. Portanto, se $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$. □

3.8 Demonstração por Contrapositiva

O método de demonstração por contraposição é bem parecido com o método de redução ao absurdo, pois ambos consistem em negar a tese, mas o processo é diferente. Na prova por contraposição, se utilizam das equivalências da Tabela 3.8, em que foi visto que se uma sentença matemática $p \to q$ tiver valor lógico verdadeiro, a sua contrapositiva $\sim q \to (\sim p)$, também terá valor lógico verdadeiro. Esse método se torna bem útil, pois há certos casos em que é mais fácil provar a contrapositiva do que a sentença original.

Então esse método consiste em negar a tese e mostrar que essa negação irá implicar na negação da hipótese, ou seja, a negação da tese vira a hipótese e a negação da hipótese vira a tese e a partir daí procede de forma semelhante a uma demonstração de forma direta. Serão apresentados alguns exemplos utilizando o método de demonstração através da contraposição.

Exemplo 6. *Prove que para todo $x \in \mathbb{Z}$, se x^2 é par, então x é par.*

Demonstração. Inicialmente, percebe-se que a sentença é do tipo $p \to q$, com "$p : x^2$ é par" e "$q : x^2$ é par". Inicia-se o processo negando a tese (q). A negação da tese é "x é ímpar" e, portanto, podemos escrever x da forma $x = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Nosso objetivo é provar a negação da hipótese (p), que é x^2 é ímpar.

Elevando x ao quadrado e reorganizando segue que

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{r}) + 1.$$

Desta forma, escrevemos x^2 como $2r + 1$, com $r \in \mathbb{Z}$, ou seja, provamos que x^2 é ímpar.

Portanto, se x^2 é par, x também é par, para todo $x \in \mathbb{Z}$. □

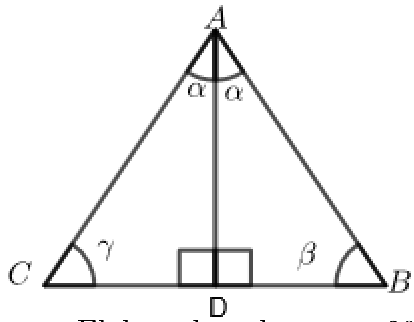
Esse método de prova também pode ser aplicado facilmente em problemas geométricos, nos quais se torna mais fácil provar a sua contrapositiva, vejamos um exemplo.

Exemplo 7. *Prove que, se um triângulo é escaleno, então nenhuma bissetriz pode ser altura.*

Demonstração. Para realizar essa prova, será provada a sua contrapositiva. Percebe-se que a sentença original é da forma $p \to q$, com p : "o triângulo é escaleno" e q : "nenhuma bissetriz pode ser altura". A negação da tese é $\sim q$: "alguma bissetriz pode ser altura". Admitindo isso, queremos provar a negação da hipótese , que é $\sim p$: "o triângulo não é escaleno".

Será construída uma figura que satisfaça a nossa nova hipótese, para melhor visualização do problema.

Fig. 7 – Altura e bissetriz de um triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Por hipótese, a bissetriz coincide com a altura. Dividindo o triângulo ABC em dois triângulos, ADC e ABD, respectivamente, utilizando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, segue que:

I) $\gamma + \alpha + 90° = 180°$;

II) $\beta + \alpha + 90° = 180°$.

Igualando as duas equações acima, obtemos

$$\gamma + \alpha + 90° = \beta + \alpha + 90°.$$

Subtraindo α e 90° de ambos os membros da equação, segue que

$$\gamma = \beta.$$

Porém, isso implica que o triângulo ABC terá no mínimo dois ângulos iguais, portanto, o triângulo ABC não será escaleno. $\square$

Vale destacar que um mesmo problema pode ser demonstrado utilizando técnicas diferentes. Assim, é importante que o aluno detenha o conhecimento dessas ferramentas para ter possibilidades ao atacar um problema. Para que fique claro, vamos demonstrar o Exemplo 7 utilizado a demonstração por redução ao absurdo. Para tal demonstração utilizaremos a Figura 7 como referência.

Vamos supor por absurdo que exista um triângulo ABC escaleno tal que uma das bissetrizes é uma altura. Como o segmento $\overline{AD}$ é bissetriz, $C\widehat{A}D \cong D\widehat{A}C = \alpha$. Além disso, como o segmento $\overline{AD}$ é altura, $A\widehat{D}B \cong B\widehat{D}A = 90°$, e pelo caso de congruência "ângulo, lado, ângulo", temos que os triângulos ADC e ADB são congruentes. Isso implica que $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, ou seja, o triângulo tem dois lados iguais, mas isso é um absurdo, pois contradiz o fato do triângulo ser escaleno. Portanto, para todos os triângulos escalenos, nenhuma bissetriz pode ser altura.

3.9 Demonstração por Indução

A indução matemática além de ser um método de construir definições é largamente utilizada para provar uma determinada afirmação sobre conjunto dos números naturais por ser bem ordenado. Graças a Giuseppe Peano (1858-1932) com o estabelecimento de uma lista de axiomas que caracterizou o conjunto dos números naturais o método de indução pode ser construído, principalmente graças ao quarto axioma também apelidado como axioma da indução. Tais axiomas foram extraídos dos livro Morgado e Carvalho (2015).

1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

2) Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.

3) Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.

4) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

A técnica de demonstração por indução consiste em três etapas: para provar uma afirmação, a primeira etapa é denominada caso base da indução, a segunda é chamada de hipótese de indução e a terceira é a passagem de indução. De outra forma, sendo $P(n)$ uma determinada propriedade, então:

i) Provamos que $P(n_0)$ é válida, em que n_0 representa o caso base de indução (geralmente, $n_0 = 1$).

ii) Supomos que, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $P(n)$ também é valida.

iii) Se for possível provarmos que $P(n+1)$ é válida, então podemos concluir que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Na educação básica, para explicar tal princípio é importante fazer uma analogia como uma fileira de dominós, uma brincadeira que consiste organizar as peças de dominó em uma fileira e a medida que você derrubar a primeira peça essa peça derruba a segunda, a segunda derruba a terceira e assim segue, mas para que todas as peças caiam deve ocorrer o seguinte:

i) que o primeiro dominó caia (caso base), e

ii) se um dominó cair, o seguinte também cairá.

Explicado isso, podemos aproveitar o momento para explicar algumas fórmulas simples, algumas conjecturas que servirão de base para fixar a ideia de tal método. Abaixo veremos algumas demonstrações que podemos utilizar o método de indução nos anos finais do ensino básico.

Exemplo 8. *Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.*

Perceba que podemos conjecturar tal situação:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$\vdots$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Embora essa conjectura sirva para a soma de alguns números ímpares, ela pode falhar para alguma sequência de ímpares, por esse motivo surge a necessidade de utilizar o processo de indução finita para provar tal conjectura.

Demonstração. Seja $P(n)$ a sentença sobre $\mathbb{N}$ dada por:

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

i) Primeiro vamos verificar o caso base, se a proposição vale para $P(n_0 = 1)$

$$P(1) : (2 \cdot 1 - 1) = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$$

. Logo, a propriedade é verdadeira para $n_0 = 1$.

ii) Agora vamos supor por hipótese de indução que $P(n)$ é válida para algum $n \in \mathbb{N}$ e buscaremos provar que $P(n+1)$ também é verdade. Assim, nossa hipótese de indução é:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Somando $(2n + 1)$ a ambos os membros da equação, obtemos

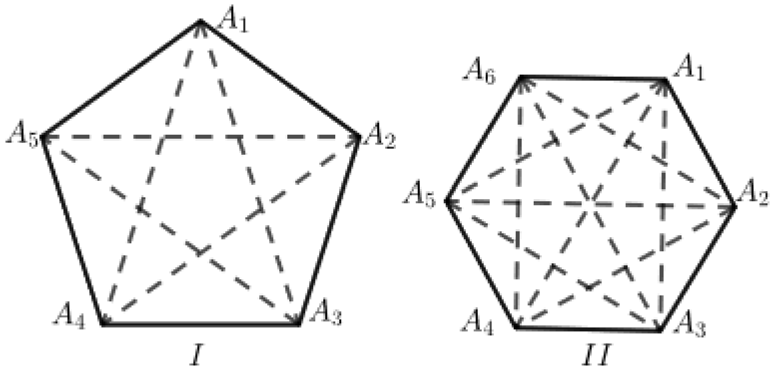
$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2, \end{aligned}$$

o que prova que $P(n + 1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio de indução finita, concluímos que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. □

É importante frisar que as demonstrações por indução podem ser utilizadas em diversas áreas da matemática, inclusive em questões problemas lúdicos ou até mesmo na geometria. Veremos agora um problema geométrico no qual iremos utilizar o método indutivo para provar uma fórmula.

Exemplo 9. *Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n-lados é igual a* $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$*, com* $n \in \mathbb{N}$*, tal que que* $n \geq 3$.

Fig. 8 – Diagonais de polígonos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Demonstração. Primeiro vamos verificar o caso base, isto é, se a proposição vale para um triângulo. veja que nesse exemplo o caso base é quando $n_0 = 3$, pois não possibilidade de construir um polígono que possua apenas um ou dois lados. Assim quando $n_0 = 3$, segue que:

$$D_3 = \frac{3(3-3)}{2}$$
$$\Rightarrow D_3 = 0.$$

Logo, a propriedade é verdadeira para $n_0 = 3$.

Agora vamos supor por hipótese de indução que a fórmula $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ seja válida para algum n-ágono convexo e buscaremos provar que também é verdade para o $(n+1)$-ágono convexo.

Perceba que $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ são os vértices do $(n+1)$-ágono convexo e esse $(n+1)$-ágono pode ser decomposto em duas figuras:

- Um n-ágono convexo de diagonais $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.
- E em um triângulo de diagonais A_1, A_n, A_{n+1}.

Assim para determinar as diagonais do $(n+1)$-ágono, com base nessa informação devemos considerar dois casos:

1) Por hipótese de indução o número de diagonais do (n)-ágono é dado por:

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

.

2) Do vértice A_{n+1} partem $(n-2)$ diagonais e além disso surge mais uma diagonal ligando os vértices A_1A_n que não existia no (n)-ágono. Dai juntando as duas informa temos que:

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= \underbrace{D_n}_{H.I} + (n-2) + 1 \\
&= \frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 \\
&= \frac{n(n-3) + 2(n-2) + 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2n - 4 + 2}{2} \\
&= \frac{n(n-3) + 2(n-2) + 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2n - 4 + 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2}.
\end{aligned}
$$

O que prova que para a fórmula é verdadeira para $n+1$. Portanto, pelo princípio de indução finita, concluímos que formula $D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ representa o número de diagonais de um polígono convexo de n-lados. $\square$

Caso os alunos não tenham conhecimento sobre o processo de fatoração de $n^2 - n - 2$, pode-se igualar o respectivo polinômio a zero e encontrar as raízes da equação do 2° grau. Como o conjunto solução das raízes da equação é $S = \{-1, 2\}$, podemos concluir que $n^2 - n - 2 = (n+1)(n-2)$.

4 DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA

Antes de iniciar, é bom frisar que a metodologia desenvolvida é fruto de uma melhoria dos conhecimentos técnicos e pedagógicos do docente envolvido, mudança essa que ocorreu graças ao aperfeiçoamento profissional fornecido pelo programa PROFMAT-UEPB, que possibilitou uma melhoria significativa da compreensão dos elementos e conteúdos matemáticos presentes na educação básica, domínio das principais técnicas de demonstração matemática, além de melhorar a escrita e a argumentação essenciais para que os conteúdos sejam repassados de forma clara e precisa aos alunos.

A metodologia utilizada nesse trabalho é apoiada no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos através da lógica, com rigor nas demonstrações das principais proposições matemáticas e apoiado na melhoria da escrita e argumentação. esse trabalho tem como objetivo a melhoria significativa na compreensão dos conteúdos matemáticos, evidenciados pela escrita e argumentação que os alunos desenvolvem durante a realização dos exercícios.

O trabalho visa mostrar como atitudes simples na postura didática do professor podem ter um impacto significativo na aprendizagem dos alunos e pontos como a leitura, escrita, argumentação matemática e a resolução de problemas podem modificar a realidade em sala de aula e proporcionar um ambiente de cooperação e estímulo a seus alunos, pois:

> Expressar-se adequadamente, argumentar de modo correto, cuidar da forma da argumentação para parecer convincente e persuadir os outros à ação que eram as metas do Trivium, permanecem sendo objetos fundamentais na formação do cidadão, ainda hoje, em qualquer lugar do mundo (MACHADO; CUNHA, 2019, P.13).

Parece estranho que o grande diferencial da metodologia de ensino desenvolvida nesse trabalho seja algo tão simples de ser aplicado: a argumentação matemática aliada à resolução de problemas, valorizando o desenvolvimento da leitura e a escrita. Evidente que para isso o professor tem que ter conhecimento técnico para dominar os conteúdos ministrados, organização para que os conteúdos explicados na lousa sigam uma sequência lógica, além de uma oralidade acessível ao aluno, além de ser paciente e retornar um degrau sempre que for necessário para explicar novamente. Sempre que possível desenvolver uma proposta interdisciplinar com a disciplina de língua portuguesa a fim de melhorar a leitura e a escrita dos alunos, nas quais a chave do sucesso é o aluno escrever, praticar, resolver e fazer um retrospecto das questões problemas trabalhadas.

4.1 Proposta de Ensino

Na busca de desenvolver uma educação matemática na qual todos os alunos compreendam os conceitos e elementos ensinados, várias práticas e metodologias foram desenvolvidas ao longo dos anos, como jogos, dinâmicas, brincadeiras, etc., mas muito pouco se fala sobre a importância da escrita e do rigor matemático no processo de ensino aprendizagem, pois muitos consideram tais metodologias como práticas ultrapassadas de ensino e isso vem deixando lacunas profundas na aprendizagem matemática dos jovens brasileiros, que não dominam os conceitos matemáticos básicos e muitos nem sequer os conhecem, fato esse evidenciado pelo desempenho de nossos alunos no PISA.

Além do curtíssimo tempo das aulas, cerca de 45 minutos, problemas crônicos como a falta de domínio dos elementos matemáticos pelos professores prejudicam a dinâmica em sala de aula. Não há condições que o professor ministre uma aula de matemática se o mesmo não domina o conteúdo. Para amenizar esse fato, programas de aperfeiçoamento profissional visam melhorar a prática desses profissionais e domínio de conteúdo. Contudo, ao se capacitarem, muitos desses profissionais saem da educação básica e buscam melhores condições de trabalho, ingressam na educação superior ou o outras áreas.

Com o objetivo de melhorar a compreensão dos conteúdos matemáticos, essa proposta visa desenvolver uma interdisciplinaridade entre matemática e língua portuguesa, a fim de melhorar a leitura, escrita, argumentação e raciocínio lógico dos alunos, proporcionando uma aprendizagem construtiva e com significados.

A metodologia de explicação na lousa, através da argumentação e demonstrações, é vista por muitos profissionais como tradicional e mecânica, pouco tendo a contribuir na aprendizagem dos alunos. Porém, será que isso é verdade? Será que se a matemática ensinada através da lógica, argumentação em uma linguagem precisa, mas acessível, tende a contribuir com o aprendizado do aluno? É visando responder essas perguntas que essa proposta de ensino foi desenvolvida.

A proposta de ensino foi aplicada na escola Municipal de Ensino Fundamental Severino Marinheiro, localizada em uma pequena cidade com uma população estimada em 17 mil habitantes, localizada no interior da Paraíba e teve como público alunos do 9° ano do ensino fundamental, sendo um relato das aulas desenvolvidas nessa turma durante o ano de 2022.

A turma do 9° ano escolhida para ser aplicada a proposta era composta por 40 alunos que estudavam no período matutino, a qual era composta por 24 alunos do sexo feminino e 16 alunos do sexo masculino. A sala era composta por alunos da zona urbana e rural, todos estavam na série adequada referente a sua idade. A turma era comportada e não apresentava problemas com indisciplina, apenas conversas paralelas.

Inicialmente foi realizada uma avaliação diagnóstica, para analisar as dificuldades e o nível de conhecimento que os alunos detinham, para revisar os conceitos que os alunos apresentaram maior dificuldade. As questões da avaliação diagnóstica são abertas para analisar se eles estão escrevendo e se expressando de forma clara objetiva e se estão dominando os conteúdos básicos essenciais para ingressar na série na qual estão. Veremos na sequência a aplicação dessa avaliação e quais elementos que devem ser analisados para dar início aos trabalhos.

4.2 Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica é o processo no qual visa identificar as aptidões e competências que os alunos possuem para que possamos realizar o planejamento baseado na realidade encontrada em sala de aula, traçando meta e objetivos a serem alcançados para que os alunos possam desenvolver o seu potencial da melhor forma possível, valorizando conhecimentos e habilidades já adquiridas.

A elaboração da avaliação diagnóstica buscou identificar além das habilidades em matemática, habilidades em língua portuguesa tais como a capacidade de interpretar pequenos textos, a escrita e a capacidade de dissertar sobre assuntos que envolvem elementos matemáticos e o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, visando suprir as necessidades educacionais do aluno.

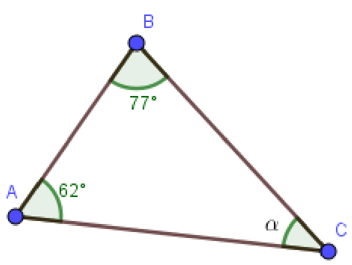
A avaliação deu preferência a questões abertas, as quais exigiam que o alunos explicassem a estratégia e a solução desenvolvida. Foram utilizadas questões de conteúdo dos anos anteriores e distribuídas desde um nível muito fácil a um nível mais elevado de conhecimento, além de possuir questões compostas por itens com nível crescente de dificuldades, pois o objetivo foi identificar desde os alunos em estado crítico aos alunos em nível adequado ou superior a série na qual se encontram. Vejamos abaixo o exemplo de uma questão que foi aplicada no nono ano.

Exemplo 10. *Os triângulos são figuras geométricas planas básicas que têm três lados em contato uns com os outros em pontos comuns chamados vértices. Seu nome vem do fato de possuir três ângulos internos ou externos, formados por cada par de linhas em contato no mesmo vértice. São figuras extremamente importantes utilizadas desde os primórdios da humanidade em diversas áreas.*

a) Faça um curto texto explicando em quais situações os triângulos são utilizados? E qual a sua importância?

b) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180°, determine a medida de α

Fig. 1 – Triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

c) Seja α, β *e* γ *ângulos internos do triângulo qualquer, mostre que* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Observe que a questão avaliou a capacidade de interpretação, a escrita, a capacidade de argumentar, a habilidade com o cálculo numérico e habilidades em realizar demonstrações e resolver problemas matemáticos dessa natureza.

Como o próprio nome faz referência, a avaliação diagnóstica tem o papel de avaliar as habilidades que o aluno possui, então não foi atribuída nota a essa avaliação, mas os alunos envolvidos tiveram um feedback geral do desempenho da turma, com quais pontos deveriam ser melhorados, principalmente no processo de resolução das questões abertas.

Para se ter um maior controle dos dados coletados, foi importante desenvolver uma tabela contendo nome do aluno e as habilidades que o mesmo desenvolveu na avaliação diagnóstica e a análise dessas informações norteou o planejamento das aulas, visando desenvolver os objetivos traçados. É sabido que não existem habilidades fixas, o professor é quem deve construir a avaliação visando quais habilidades são essenciais que seus alunos dominem para que possa iniciar os trabalhos priorizando desenvolver as habilidades básicas presentes na BNCC. Vejamos o exemplo da referida tabela abaixo.

Tabela 4.1 – Habilidades dos alunos

Aluno/habilidade	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	$\cdots$
João Carlos	x	x		x	x				
Maria Clara		x	x	x	x	x	x		
Rian	x	x	x	x	x		x	x	
$\vdots$									

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

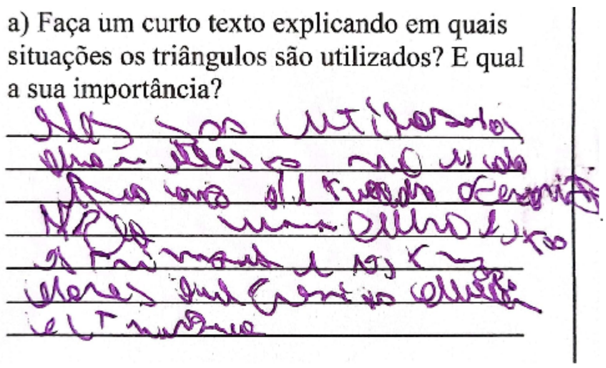
Foi necessário criar uma legenda representando cada habilidade para que os dados fossem interpretados de forma eficiente. Além disso, a avaliação continha habilidades que representava o nível de leitura e escrita dos alunos e essa habilidades foram retiradas da BNCC, da matriz da prova SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), mas também podem ser criadas habilidades pelo professor caso julgue ser importante para o desenvolvimento dos seus alunos.

Os dados coletados não geram admiração, pois a maioria dos alunos que chega ao nono ano demonstra extrema dificuldade nas quatro operações básicas e há casos críticos em que os alunos não sabem resolver uma simples adição e problemas crônicos na leitura e principalmente na escrita. Na avaliação, foram identificadas situações em que a falta da leitura interfere drasticamente na compreensão dos textos matemáticos, pois desconhecem o significado de palavras como diferença, produto e quociente. O hábito da leitura interfere na escrita que, por sua vez, interfere no aprendizado e tal problema está se agravando com o péssimo hábito do aluno tirar foto da lousa para não copiar.

Apesar da avaliação diagnóstica parecer simples, tal tarefa requer muito tempo e empenho do professor. Imagine um professor que trabalha em duas escolas, lecionando em quatro turmas em cada escola como uma média de 35 alunos por turma. Isso resulta em 280 avaliações para corrigir, além do trabalho para preparar e se reunir com os colegas de outras áreas para realizar o planejamento. Por esse motivo, muitos professores optam por avaliações diagnósticas com questões fechadas para facilitar o trabalho ou simplesmente a fazem para cumprir o cronograma exigidos, desprezando os valiosos dados coletados.

A imagem abaixo é fruto de uma avaliação diagnóstica que foi aplicada no início do ano de 2022 com 40 alunos da turma de nono ano na escola onde a proposta foi desenvolvida e mostra a falta de domínio da escrita de um aluno, o qual posteriormente, indagado sobre o que tinha escrito, não conseguiu ler o conteúdo. Assim, através dessa análise, pode-se perceber que a dificuldade do aluno vai além dos elementos matemáticos e essas dificuldades foram informadas aos demais professores em reunião, para que o aluno pudesse ser ajudado a suprir tais dificuldades. Para apresentar a respostas dos alunos, eles serão representados com letras maiúsculas do nosso alfabeto, que não representa necessariamente as iniciais de seus nomes.

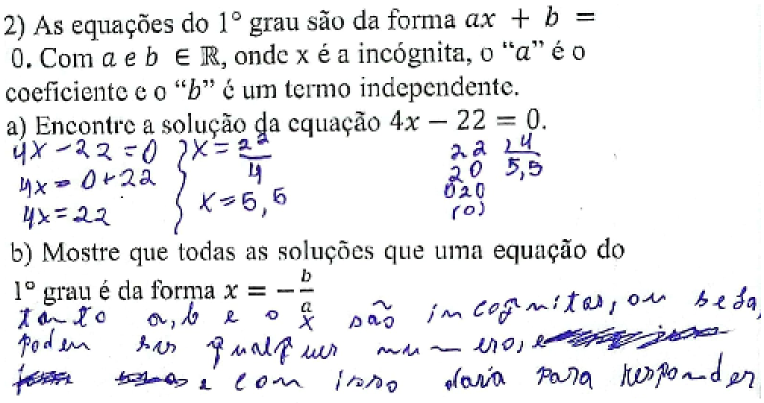
Fig. 2 – Resposta do aluno A


a) Faça um curto texto explicando em quais situações os triângulos são utilizados? E qual a sua importância?

Fonte: Avaliação diagnóstica.

É importante salientar que a avaliação diagnóstica teve o papel de identificar tanto as dificuldades como as potencialidades, para que as aulas possam privilegiar tanto os alunos que têm dificuldade com a matemática como também aqueles que demonstram habilidades específicas, possibilitando que evoluam e melhorem na escrita e na argumentação, aprimorando os conhecimentos matemáticos. Tais potencialidades são ilustradas na imagem abaixo.

Fig. 3 – Resposta do aluno B


2) As equações do 1° grau são da forma $ax + b = 0$. Com a e b $\in \mathbb{R}$, onde x é a incógnita, o "a" é o coeficiente e o "b" é um termo independente.

a) Encontre a solução da equação $4x - 22 = 0$.

$4x - 22 = 0$
$4x = 0 + 22$
$4x = 22$
$x = \frac{22}{4}$
$x = 5,6$

b) Mostre que todas as soluções que uma equação do 1° grau é da forma $x = -\frac{b}{a}$

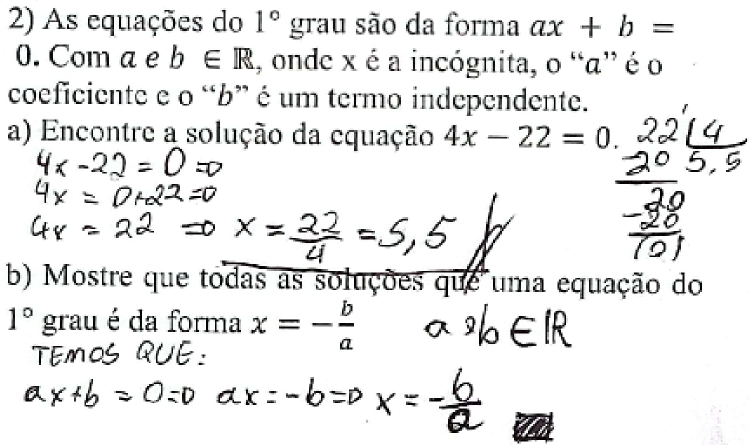
tanto a, b e o x são incógnitas, ou seja, podem ser qualquer número, e com isso dará para responder

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Nesse caso, o aluno dominava o conhecimento de resolução de uma equação do primeiro grau, as quatro operações básicas e tinha uma escrita razoável, porém necessitava de uma aprofundamento dos elementos matemáticos, técnicas para desenvolver a escrita e uma argumentação lógica para aprimorar suas potencialidades e melhorar seu desempenho nas avaliações internas e externas realizadas.

Na imagem abaixo, revela-se um aluno C que assim como o aluno B dominava a resolução de uma equação do primeiro grau, as quatro operações básicas, mas além disso já dominava os símbolos matemáticos e conhecia o conceito de demonstração. Posteriormente, identificou-se que esse aluno participava do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), programa ofertado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) a jovens que já tenham sido medalhistas na OBMEP.

Fig. 4 – Resposta do aluno C


2) As equações do 1° grau são da forma $ax + b = 0$. Com a e b $\in \mathbb{R}$, onde x é a incógnita, o "a" é o coeficiente e o "b" é um termo independente.

a) Encontre a solução da equação $4x - 22 = 0$.

$4x - 22 = 0 \Rightarrow$
$4x = 0 + 22 \Rightarrow$
$4x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{4} = 5,5$

b) Mostre que todas as soluções que uma equação do 1° grau é da forma $x = -\frac{b}{a}$

$a, b \in \mathbb{R}$

TEMOS QUE:

$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Fonte: Avaliação diagnóstica.

Através dessa avaliação, constatou-se que apenas 15% dos alunos detinha conhecimento sobre procedimentos para resolver equações do primeiro grau, 5% não respondeu nenhuma questão e 30% demonstrou possuir uma escrita razoável. Por esse motivo que a avaliação diagnóstica é tão importante, pois o professor terá um mapa da realidade e os diferentes níveis em que cada aluno se encontra.

Com as informações em mãos, foi o momento traçar os objetivos e estratégias. O objetivo geral era de desenvolver os conteúdos matemáticos através das demonstrações lógicas, apoiada na escrita e na leitura, salientando que a tabela com as habilidades dos alunos foi de extrema importância, pois auxiliou tanto na construção das aulas de revisão sobre conceitos matemáticos básicos, como para suprir as necessidades dos alunos e a forma de explicar conteúdos futuros, pois com ela identificou as habilidades que a maioria da turma dominava e quais habilidade eles não dominavam e, assim, possibilitou-se a revisão de conceitos básicos no momento da abordagem do conteúdo.

4.3 A Oralidade nas Aulas de Matemática

A oralidade é o uso da língua por meio da produção e articulação sonora, ela é um dos recursos mais utilizados pelos professores e pelos alunos, não só em matemática, mas em qualquer área do conhecimento, uma ferramenta que exprime conceitos e conhecimento, uma forma de trocar informações de forma ágil e eficaz.

O professor de matemática faz uso constante da língua materna em suas aulas, seja para ler enunciados de questões problemas, para explicar os conteúdos e até mesmo falar sobre as técnicas as quais utiliza. Com a oralidade devemos ter um extremo cuidado, a fim de não transmitir conceitos com duplo sentido, confusos ou equivocados, pois isso prejudicará o processo de assimilação das ideias transmitidas. Assim, se torna essencial que além da oralidade, a escrita e as demonstrações na lousa sejam um ato frequente em suas explicações.

> A tarefa do professor em relação à linguagem matemática deve desdobrar-se em duas direções. Em primeiro lugar, na direção do trabalho sobre os processos de escrita e representação sobre a elaboração de símbolos, sobre o esclarecimento quanto às regras que tornam certas ferramentas de escrita legítimas e outras inadequadas. Em segundo, em direção ao trabalho sobre o desenvolvimento de habilidades de raciocínio que, para as crianças, se inicia com o apoio da linguagem oral e vai, com o tempo, formando textos e representações mais elaboradas (SMOLE; DINIZ, 2001, P.17).

A representação dos elementos matemáticos na linguagem escrita se torna de extrema importância, pois além de simplificar o texto, organiza as ideias, torna mais atraente a leitura e compreensão, auxiliando no processo de raciocínio lógico. Contudo, devemos ter cuidado para não cometer exageros, o texto ou explicação deve ser acessível e a todo momento que o aluno o leia, deverá ser capaz de compreender o significado do que escreveu, principalmente em relação às passagens que o professor realiza, facilitando assim o ato de estudar.

A oralidade desenvolvida nas aulas de matemática, principalmente aquela construída pelos alunos, é importantíssima para o aprendizado deles mesmos. Porém, tal oralidade é de certa forma desprezada pelo professor, por apresentar definições incompletas ou até mesmo equivocadas, além de alguns não considerarem a argumentação que o aluno realiza na prova. O professor deve dar uma atenção especial à argumentação do aluno, pois é a partir dela que pode analisar se o aluno está compreendendo o conteúdo ou se está simplesmente aplicando uma fórmula de forma mecânica sem significados.

O momento da escrita é importantíssimo no processo de aprendizagem dos elementos matemáticos, pois é através da escrita que os alunos podem analisar o que foi ensinado pelo professor, refletir sobre os assuntos ensinados e analisar se realmente houve aprendizado. Uma forma simples que o professor pode utilizar para aferir o aprendizado dos seus alunos é solicitar que ele faça um pequeno texto explicando o que ele aprendeu na aula, isso parece até estranho, fazer um texto na aula de matemática, mas o ato da escrita faz o aluno refletir sobre o que foi ensinado, forçando a mente a relembrar os ensinamentos do professor.

No início, o hábito de escrever foi extremamente difícil e penoso, os alunos não conseguiam escrever quase nada sobre os assuntos explicados durante a aula, pois não tinham esse habito. Na verdade, a escrita será um reflexo do conteúdo no qual ele conseguiu internalizar, mas tal escrita evidencia se torna uma avaliação poderosa, pois indica a parte do conteúdo que foi mais chamativa e que ele conseguiu internalizar tal procedimento, possibilitando revisar as lacunas e rever a prática docente.

Nesse sentido, a oralidade deve seguir com a escrita na lousa, pois o professor será tido como uma referência para os alunos, tanto nas explicações, como na resolução e proposição de questões-problemas, pois atualmente os alunos encaram a resolução de problemas matemáticos como apenas um ato de fazer cálculos numéricos sem a necessidade de expressar seu raciocínio sobre a questão.

4.4 Introdução do Conteúdo na Sala de Aula

Antes de iniciar o procedimento de aplicação da proposta em sala de aula, é importante frisar que nesse modelo, apesar de utilizar alguns elementos do modelo tradicional de ensino da matemática, como a realização de exercícios e aulas expositivas e dialogadas, há pontos totalmente diferentes, pois visa ao desenvolvimento do conteúdo através da manipulação e demonstração dos elementos matemáticos a fim de construir o conhecimento juntamente com o aluno. Outra grande diferença é compreender que o aluno não é um quadro em branco, ele possui um certo nível de conhecimento e tal deve ser considerado, aprimorado ou ressignificando quando necessário, possibilitando que os alunos façam descobertas à medida em que realizam as atividades.

É essencial que o professor tenha um profundo conhecimento e domínio da matéria que ministra, principalmente quando se ensina matemática, pois não há como exigir do aluno aquilo que nem o professor domina. Tal domínio ajuda a sanar as dúvidas, propor exemplos, aplicação, além de proporcionar que o aluno tenha confiança no professor. Tal confiança é importante, pois há conceitos primitivos que devem se compreendidos como verdades.

Qualquer um que concluiu o ensino básico em algum momento nas aula de matemática se deparou com a famosa fórmula conhecida no Brasil como fórmula de Bháskara, uma fórmula mágica que o professor apresenta para resolver uma equação do 2° grau que geralmente chega a dois números e os "apelida" como raízes de equação. Isso é um exemplo de uma aula tradicional e tal abordagem se torna catastrófica para os alunos, pois além de não compreender o motivo de tal procedimento, não compreende o significado da solução.

Para aplicação da proposta, se fez necessária a avaliação diagnóstica que vimos anteriormente, objetivando verificar o grau de conhecimento tanto de escrita da língua materna, como dos conteúdos matemáticos. Ela serviu como a base de planejamento, possibilitando que os alunos desenvolvam as habilidades adequadas para seu nível.

No início se fez necessário rever alguns conceitos básicos, que o livro não abordava, acreditando que o aluno já tenham desenvolvido em anos anteriores, mas foi importantíssimo rever esses conceitos que serviram de base para o trabalho durante todo o ano letivo, apoiando as demonstrações e procedimento. Juntamente com esses conceitos foram inseridos os conectivos lógicos e os conceitos iniciais envolvendo as proposições matemáticas que foram explicadas no segundo capítulo sobre lógica matemática deste trabalho.

Para compreender a dinâmica do trabalho realizado, veremos a seguir, como foram desenvolvidos os conteúdos em sala de aula, a metodologia utilizada e o desenvolvimento dos trabalhos, privilegiando a abordagem e a forma na qual os conteúdos foram introduzidos.

O grande diferencial dessa proposta foi a abordagem do conteúdo em sala de aula, a qual realizou as demonstrações das principais fórmulas e proposições dos conteúdos matemáticos com um nível mais elevado de rigor e apoiados pela lógica matemática, valorizando a escrita como uma ferramenta importante no processo de decodificação e codificação de problemas matemáticos.

A primeira semana de aula foi aproveitada para desenvolvimento da avaliação diagnóstica. No momento da avaliação, houve várias dúvidas principalmente sobre a questão de notas, afinal ficou nítido que os alunos não estão motivados em aprender matemática e sim em saber se tiram boas notas. Isso é preocupante, pois afeta diretamente o aprendizado, já que os alunos estudam praticamente para decorar fórmulas para tirar boas notas na prova e não para aprenderem os conteúdos matemáticos que serão necessários durante toda vida.

Logo após a aplicação da avaliação diagnóstica, foram apresentados ao alunos os conectivos presentes na Seção 3.2 e durante 6 aulas foi trabalhado o que representa cada símbolo e seu significado na matemática: o que era uma hipótese e uma tese, entre outros. Com base nesse conhecimento, foi construída juntamente com os alunos a Tabela 3.8, focando principalmente nas suas implicações, pois foi a base das demonstrações que utilizamos durante todo o ano, sempre recorrendo a ela quando necessário. a explicação desses conceitos básicos auxiliou aos alunos a compreender a importância da lógica na construção da matemática.

Com os dados da avaliação diagnóstica em mãos, observou-se que havia a necessidade de revisar os conceitos básicos 3.5.1. Foram necessárias quatro aulas para revisar tais conceitos e operações, sanando as dúvidas sobre propriedades importantes que seriam utilizadas praticamente em todas as aulas. Salientando que a linguagem na qual o conhecimento foi transmitido, foi a mais simples possível e sempre que falava uma nova palavra era informado o seu significado e anotando na lousa, tendo sempre extremo cuidado para não repassar conceitos equivocados ou que tenham duplo sentido, pois o aluno por timidez, ou por vergonha, não pergunta o significado das palavras, preferindo ficar calado sem compreender o que o professor fala. Apesar disso e mesmo com uma linguagem simples, o rigor matemático era mantido.

Depois do terreno preparado, partimos para a explicação dos conteúdos na lousa. Um dos primeiros conteúdos apresentados nesta etapa foram as propriedades da potenciação, em que a proposição foi apresentada para o aluno e logo em sequência foi realizada a sua prova, conforme mostramos na Seção 3.6. Com calma e observando a reação dos alunos, sempre indagando o motivo de tal procedimento acontecer e esperando que eles citem as propriedades sobre os números reais, tudo isso para que o aluno se habitue com o processo de justificar os procedimentos realizados.

Quando terminava a demonstração e as dúvidas eram sanadas, era momento de deixar o aluno copiar, pois muitas dessas demonstrações não estavam no livro. É importante relatar que esse processo de escrita era primordial, pois no momento que estavam copiando, surgiam mais dúvidas e algumas vezes necessitava rever alguns conceitos básicos sobre as operações envolvidas. Alguns alunos, inclusive, relataram que no momento da escrita, eles, de certa forma, revisavam o conteúdo explicado e processavam as etapas das informações passadas.

Logo após as demonstrações serem realizadas, eram repassadas atividades de fixação, que, no caso do conteúdos das propriedades de potenciação, consistiam em exercitar tais definições e praticar as habilidades com o cálculo. Apesar de ser uma atividade puramente técnica, era exigido que o aluno esclarecesse qual a propriedade estava utilizando e o motivo de estar aplicando tal procedimento.

No início esse hábito de ter que explicar, foi extremamente penoso para o aluno, já que para ele o cálculo era suficiente, então foi definido como regra que ao resolver um problema, ele deveria responder como se estivesse explicando para uma criança de seis anos de idade, que nunca tivesse estudado matemática. O aluno teria que explicar tanto a estratégia adotada quanto o procedimento utilizado, pois o discente imagina que como o professor já detém o conhecimento, não necessita explicar e o que importa só é a resposta final.

Após realizar esses exercícios, era momento de introduzir questões que envolvessem situações problemas. Nessa proposta, tanto as questões que envolviam demonstrações, como questões que envolviam situações do cotidiano dos alunos eram consideradas como problemas e essas questões tinham o intuito que o aluno percebesse a forma na qual poderia utilizar o conhecimento adquirido no seu cotidiano.

Durante a aplicação dos exercícios, observou-se que depois das demonstrações os exercícios que não exigiam interpretação na língua portuguesa foram realizados bem mais rápido, porém, nas questões-problemas, os alunos tinham extrema dificuldade em interpretá-las. O processo de decodificação, ou seja, transformar o texto da questão em linguagem matemática, era extremamente penoso devido à dificuldade em interpretar textos.

Sempre era exigido que o aluno explicasse todo procedimento de resolução de forma escrita mostrando o seu raciocínio lógico que utilizou para encontrar a solução. No início não foi nada fácil, ter que explicar o seu pensamento, era extremamente difícil até mais que resolver o problema, isso porque eles não tinham o hábito de resolver questões dessa maneira.

Após a resolução das questões-problemas envolvendo situações do seu cotidiano, os alunos eram convidados sempre a elaborar um novo problema baseado no problema anterior e compartilhava com seu colega. Para fechar o conteúdo, sempre era posto um problema que envolvesse uma demonstração e a sugestão dada era utilizar o mesmo método que o professor tinha utilizado anteriormente para demonstrar as propriedades dos conteúdos.

Durante todas as aulas, a dinâmica manteve-se a mesma: iniciava com a apresentação do conteúdos seguida das demonstrações, exercício, problemas genéricos e problemas envolvendo demonstrações. Durante as aulas de geometria, para a construção das figuras, era utilizado Softwares GeoGebra a fim de não passar figuras distorcidas que atrapalhassem a compreensão e a interpretação dos alunos.

Entre as técnicas de demonstração, a mais fácil e intuitiva foi a demonstração direta, era através dela que os alunos buscavam desenvolver com maior frequência as questões-problemas. As demonstrações por redução ao absurdo era a que gerava mais fascínio, era algo novo e chamativo e corriqueiramente eles falavam: “isso é um absurdo professor”. Fazendo referência à técnica de demonstração citada. A demonstração pelo método de contraposição sempre gerava dúvida em onde queria chegar e sempre que utilizava-se ela, tinha-se que retornar a tabela verdade no início do ano para rever o conceito, como do Exemplo 7 e ainda assim eles ficavam com um certo tom de dúvida.

Embora as demonstrações por indução tenham sido apresentadas aos alunos e feito algumas demonstrações com ela, dificilmente era utilizada por algum aluno. Eles acharam o método mais complexo e preferiam sempre desenvolver as provas pelo método direto. O motivo dessa escolha pode ter sido o fato que as técnicas de demonstração não terem sido inseridas de uma única vez, mas de forma gradual durante todo ano e a demonstração direta foi a primeira técnica a ser vista pelos alunos, além a de ser a mais abordada pelos livros didáticos.

É importante destacar que ao decorrer do tempo, a escrita e argumentação se tornam uma arma poderosa no processo de resolução de problemas, pois o aluno consegue organizar as ideias e definir as estratégias, além de ajudar na memorização, trilhando um caminho no qual consegue retornar, caso necessário, para verificar os equívocos, caso ocorram, além de auxiliar quando necessite rever ou estudar novamente a matéria.

4.5 Avaliação e Feedback

A avaliação é um dos processos mais importantes durante o ensino da matemática, visa identificar as principais dificuldades e os avanços na compreensão dos conceitos ensinados, promovendo a melhoria do ensino através da análise do trabalho desenvolvido, possibilitando realizar revisões ou trabalhar o assunto com uma abordagem diferenciada, caso seja identificado lacunas na aprendizagem dos alunos, nesse sentido:

> Avaliação é um processo abrangente da existência humana, que implica em uma reflexão crítica sobre a prática, no sentido de captar seus avanços, suas resistências, suas dificuldades e possibilitar uma tomada de decisão sobre o que fazer para superar os obstáculos (Vasconcellos, 1995, p.43).

Durante a proposta de ensino foi desenvolvido uma avaliação contínua, cada atividade realizada era avaliada principalmente a resolução das questões problemas, eram analisados elementos como a escrita matemática, desenvolvimento da lógica e a fixação do conteúdo matemático abordado, além disso o feedback era imediato, sugerindo os pontos que deviam ser melhorados tanto na escrita como na construção da resposta.

Ao fim de cada conteúdo abordado era realizado um pequeno teste para analisar se os conteúdos e as técnicas de argumentação tinham sido aprendidas pelos alunos e se eles estavam as utilizando para resolver as questões problemas aplicadas.É importante frisar que os alunos estavam sendo avaliados não só pelo seu desempenho que obtinham nesses testes. A avaliação era contínua e além dos testes a nota era mensurada através da participação, desenvolvimento das atividades, da escrita e da oralidade desenvolvida através de debates realizados em sala de aula referente ao conteúdo.

Ao falar da composição da nota é importante ressaltar que em nenhum momento as avaliações realizadas estavam preocupadas em mensurar notas, até porque, devido o período pós pandêmico, a frequência e a participação do aluno era condição suficiente para sua promoção a série seguinte, independente da nota obtida no componente curricular.

Nesse sentido a avaliação desenvolvida buscava identificar as necessidades dos alunos, em qual ponto o professor poderia intervir para melhorar a compreensão, escrita e argumentação no processo de resolução de problemas matemáticos e ao mesmo tempo exigia-se que o aluno desenvolvesse a capacidade de criar uma ponte entre os conteúdos ensinados a fim de melhorar a compreensão dos conteúdos.

Durante o processo avaliativo sempre surge a dúvida se o aluno está sendo bem avaliado, se a avaliação está realmente avaliando o desenvolvimento do aluno e nessa perspectiva a escrita se torna uma arma poderosa no processo avaliativo, pois a medida que o aluno escreve e expõe seu pensamento, o professor consegue identificar qual foi a maior dificuldade enfrentada por ele no momento da resolução, se foi interpretar, realização dos cálculos ou na elaboração da estratégia. E com essas informações o professor consegue criar estratégias para revisar as lacunas que ficaram no aprendizado, favorecendo o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

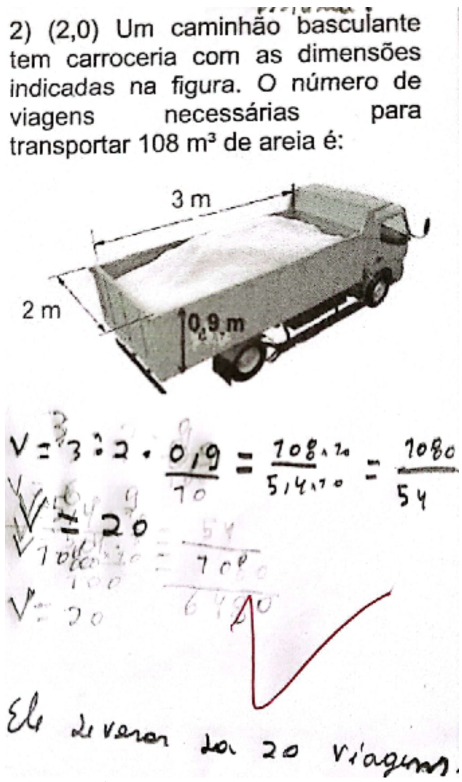
4.6 Resultados da Prática

Inicialmente é importante destacar que o desenvolvimento da proposta só foi possível graças aos conhecimentos adquiridos no programa PROFMAT, que resultou no desenvolvimento dessa proposta de ensino que obteve resultados positivos como a melhoria na escrita, no raciocínio lógico e melhoria na compreensão e resolução de questões problemas. Os resultados foram tão significativos que nesta turma houve três premiados na 17ª edição da OBMEP, inclusive um aluno recebeu a medalha de ouro demonstrando o seu excelente desempenho na prova, outro aluno foi premiado com uma medalha de bronze e o outro com uma menção honrosa.

Ações simples adotadas na metodologia do professor resultaram em um avanço no aprendizado dos conteúdos matemáticos, possibilitaram uma melhor abordagem e compreensão dos problemas matemáticos, explicando os procedimentos e estratégias utilizadas. Tais procedimentos foram aprimorando-se de forma gradual e os alunos foram se habituando e ao final do ano a escrita parecia ser algo natural e espontâneo, eram utilizados até mesmo em procedimentos diretos que não se exigia tanta argumentação.

Com o intuito de mostrar os avanços e os resultados da proposta faremos uma leve comparação de questões problema resolvidas por alunos que participaram da proposta com alunos de outra turma que não participaram da proposta, onde os conteúdos eram desenvolvidos de forma tradicional, consistindo na apresentação da fórmula, realização de exemplos e aplicação de questões problemas. Agora observe as respostas de dois alunos para a mesma questão, o aluno L pertencia a uma turma de nono ano em que a proposta não foi aplicada, e o aluno J pertencia a turma na qual a proposta foi aplicada.

Fig. 5 – Resposta do aluno L



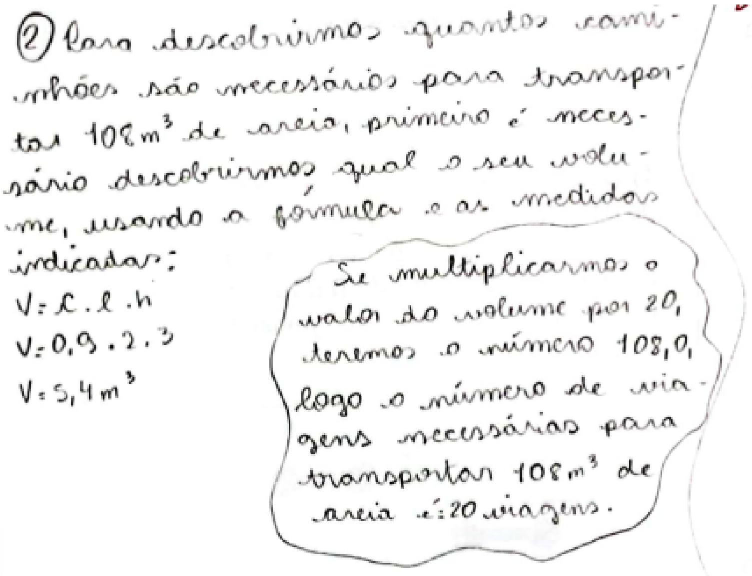
Fonte: Avaliação realizada em sala.

Observe que apesar do aluno L ter conseguido encontrar o número de viagens necessárias que o caminhão deveria dar para transportar a areia, fica perceptível que não conseguiu organizar as ideias em uma sequência lógica, além de cometer alguns equívocos nos cálculos, ele representou tanto o volume como o número de viagens com a mesma letra V, comprometendo o entendimento.

Esses erros são cometidos pois o aluno não tem o hábito de explicar as suas respostas, como o professor explica as questões de forma oral colocando apenas os cálculos na lousa ele considera que apenas o cálculo é suficiente para sua resposta, e esse aluno ainda foi além conseguiu responder a pergunta, muitos só colocam o resultado final.

Agora observe a resposta do aluno J para o mesmo problema representada na Figura 6, a forma na qual a escrita e a lógica ajudam o aluno a organizar as suas ideias e a desenvolver o problema de uma forma convincente explicando o sua linha de raciocínio e os motivos de sua conclusão.

Fig. 6 – Resposta do aluno J


2) Para descobrirmos quantos caminhões são necessários para transportar 108m³ de areia, primeiro é necessário descobrirmos qual o seu volume, usando a fórmula e as medidas indicadas:

V=C.l.h

V=0,9.2.3

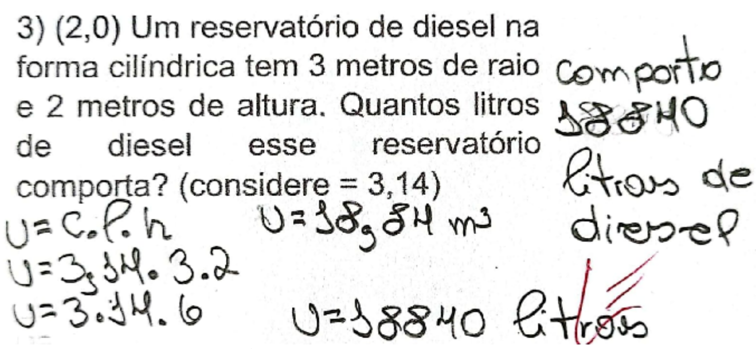
V=5,4m³

Se multiplicarmos o valor do volume por 20, teremos o número 108,0, logo o número de viagens necessárias para transportar 108m³ de areia é: 20 viagens.

Fonte: Avaliação realizada em sala.

Como informado anteriormente o aluno J foi um aluno pertencente a sala na qual a proposta foi aplicada, observe o quão rica de detalhes é a sua resposta para o problema, obedecendo a uma construção lógica de implicações, apesar de demonstrar dificuldades em realizar operações que envolvam divisões, fez por tentativas e utilizou a multiplicação para chegar ao resultado sem comprometer a sua resposta, informações como essa são de extrema importância para o professor pois revelou a necessidade de revisar os procedimentos e os critérios de divisão. Agora observe mais um exemplo onde vamos comparar mais duas respostas de alunos para a mesma questão.

Fig. 7 – Resposta do aluno M


3) (2,0) Um reservatório de diesel na forma cilíndrica tem 3 metros de raio e 2 metros de altura. Quantos litros de diesel esse reservatório comporta? (considere = 3,14)

V=C.l.h

V=3,14.3.2

V=3.14.6

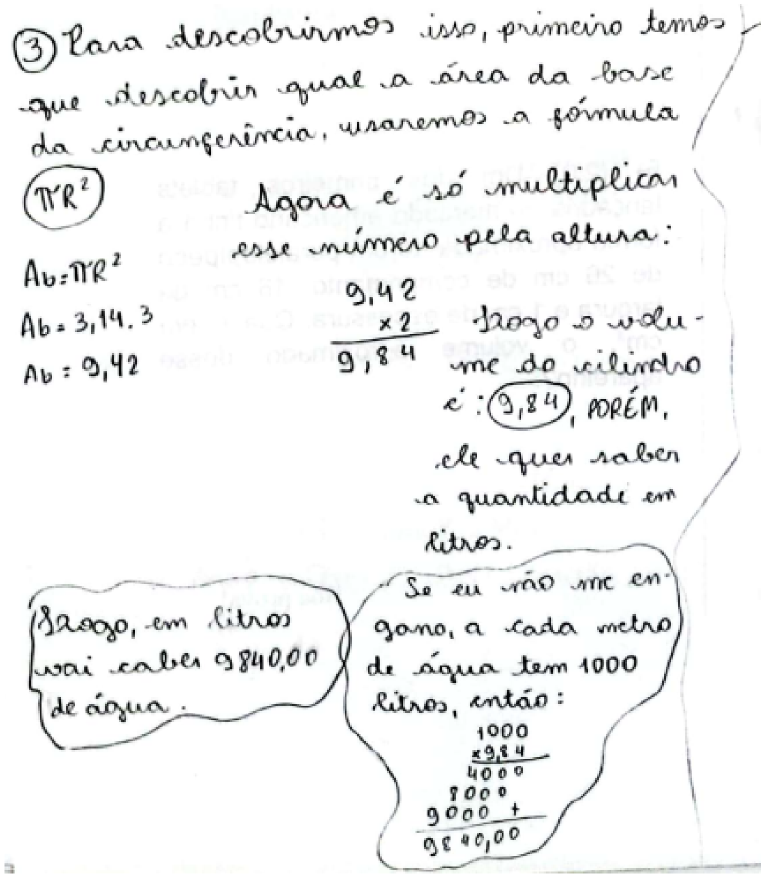
V=18,84 m³

V=18840 litros

Comporta 18840 litros de diesel

Fonte: Avaliação realizada em sala.

Fig. 8 – Resposta do aluno P


3) Para descobrirmos isso, primeiro temos que descobrir qual a área da base da circunferência, usaremos a fórmula πR^2

Agora é só multiplicar esse número pela altura:

$Ab = \pi R^2$

$Ab = 3{,}14 . 3$

$Ab = 9{,}42$

$$\begin{array}{r} 9{,}42 \\ \times 2 \\ \hline 9{,}84 \end{array}$$

Logo o volume do cilindro é: 9,84, PORÉM, ele quer saber a quantidade em litros.

Se eu não me engano, a cada metro de água tem 1000 litros, então:

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \times 9{,}84 \\ \hline 4000 \\ 8000 \\ 9000\ + \\ \hline 9840{,}00 \end{array}$$

Logo, em litros vai caber 9840,00 de água.

Fonte: Avaliação realizada em sala.

A Figura 7 representa a resposta de um aluno M que não pertencia a sala onde a proposta foi aplicada, perceba que a sua resposta é algo mecânico e estático, consistindo na aplicação de uma fórmula para responder ao problema, como utilizou a fórmula errada não conseguiu encontrar a resposta correta para o problema e como uma resposta desse tipo a avaliação também fica prejudicada, pois não tem como identificar se o aluno compreendeu o conceito de volume ou se apenas aplicou a fórmula errada ou simplesmente decorou um procedimento mecânico sem significado.

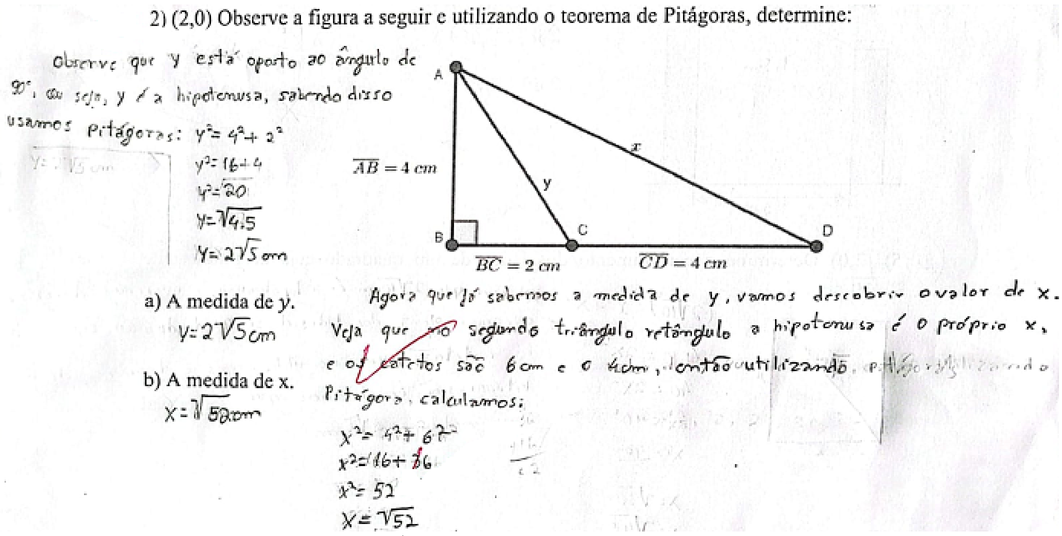
Agora veja a Figura 8 que mostra a resposta de um aluno P para a mesma questão, observe como é totalmente diferente, ele consegue explicar sua estratégia estabelecer um sequência lógica e organizar o raciocínio, apesar de ter errado na substituição e na multiplicação fica evidente que compreendeu o conceito de como calcular o volume de um cilindro, além de entender como converter metros cúbicos para litros, o aluno P demonstra que realmente aprendeu o conteúdo pois é capaz de explicar todo o procedimento realizado e o seu significado.

Como o desenvolvimento da proposta os alunos melhoraram a escrita e a argumentação matemática principalmente no processo de resolução de questões problemas, as fórmulas passaram de verdades para ferramentas que auxiliam a encontrar a solução dos problemas trabalhados, a resolução de problemas não foi visto como algo mecânico, pelo contrário, foi vista como um processo lógico de deduções construtiva e carregada de significados.

É importante salientar que para desenvolver uma boa avaliação em questões problemas é importante criar e seguir critérios para mensurar cada habilidade que o aluno consiga desenvolver da melhor forma possível, para ser justo e privilegiar a criatividade e os avanços alcançados pelos alunos. Talvez por esse motivo alguns professores não gostam que os alunos desenvolvam tal argumentação em suas avaliações sendo o cálculo auto suficiente, pois o processo de correção de provas desse tipo é mais demorado, por ter que ler e buscar compreender o pensamento do aluno.

A figura a seguir mostra que com a aplicação da proposta até em questões diretas o aluno sente a necessidade de argumentar, explicar a sua estrategia a fim de ser convincente em sua resposta.

Fig. 9 – Resposta do aluno E


2) (2,0) Observe a figura a seguir e utilizando o teorema de Pitágoras, determine:

Observe que y está oposto ao ângulo de 90°, ou seja, y é a hipotenusa, sabendo disso usamos Pitágoras: $y^2 = 4^2 + 2^2$

$y^2 = 16 + 4$

$y^2 = 20$

$y = \sqrt{4 \cdot 5}$

$y = 2\sqrt{5}$ cm

a) A medida de y.

$y = 2\sqrt{5}$ cm

b) A medida de x.

$x = \sqrt{52}$ cm

Agora que já sabemos a medida de y, vamos descobrir o valor de x. Veja que no segundo triângulo retângulo a hipotenusa é o próprio x, e os catetos são 6 cm e o 4 cm, então utilizando Pitágoras, calculamos:

$x^2 = 4^2 + 6^2$

$x^2 = 16 + 36$

$x^2 = 52$

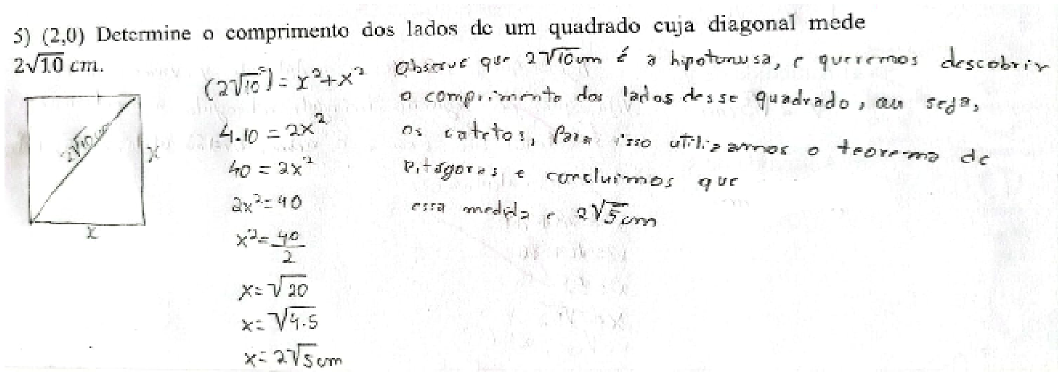
$x = \sqrt{52}$

Fonte: Avaliação realizada em sala.

O aluno E pertencia a sala em que a proposta foi realizada, veja que mesmo em uma atividade direta sentiu a necessidade de argumentar e explicar o procedimento utilizado, com isso demonstra domínio e segurança sobre o procedimento que está realizando mostrando ao professor que aprendeu o conteúdo ministrado e esse hábito de argumentar torna-se algo natural para o aluno de tal maneira que sente a necessidade de registrar o seu raciocínio todas as questões.

Veja a seguir na Figura 10 mais uma questão respondida pelo aluno E, apesar de ser uma questão direta o mesmo explicou o procedimento utilizado, demonstrando que quando o conteúdo é desenvolvido através da demonstração apoiado na escrita, o aluno tende a imitar os passos realizados pelo professor na sua explicação, esse processo possibilitou ao aluno uma melhor compreensão e domínio dos conteúdos matemáticos ensinados.

Fig. 10 – Resposta do aluno E


5) (2,0) Determine o comprimento dos lados de um quadrado cuja diagonal mede $2\sqrt{10}$ *cm*.

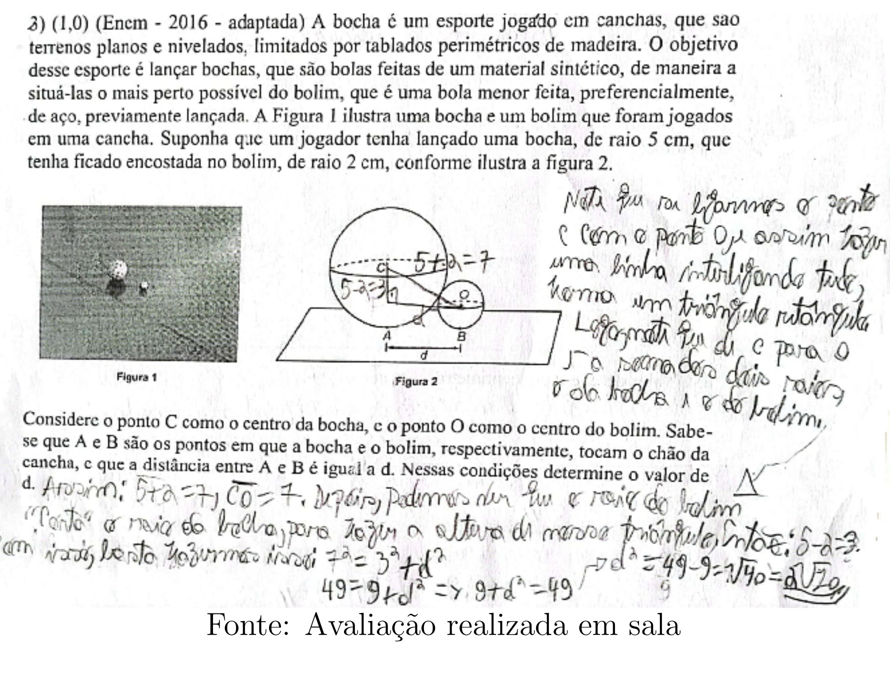
$(2\sqrt{10})^2 = x^2+x^2$
$4\cdot 10 = 2x^2$
$40 = 2x^2$
$2x^2 = 40$
$x^2 = \frac{40}{2}$
$x = \sqrt{20}$
$x = \sqrt{4\cdot 5}$
$x = 2\sqrt{5}$cm

Observe que $2\sqrt{10}$cm é a hipotenusa, e queremos descobrir o comprimento dos lados desse quadrado, ou seja, os catetos, para isso utilizamos o teorema de Pitágoras e concluímos que essa medida é $2\sqrt{5}$cm

Fonte: Avaliação realizada em sala.

É interessante que esse processo de argumentação para resolver os problemas se repete independente se seja um problema que envolva uma demonstração mais técnica ou situações que envolva problemas cotidianos do aluno, a lógica e a argumentação se tornam naturais para o aluno, isso fica bem explícito na imagem abaixo onde o aluno F respondeu uma questão adaptada aplicada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2016, explicando o seu desenvolvimento e o seu pensamento de forma segura e convincente.

Fig. 11 – Aluno F


3) (1,0) (Enem - 2016 - adaptada) A bocha é um esporte jogado em canchas, que sao terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a figura 2.

Nota que se ligarmos o ponto C com o ponto O, e assim traçar uma linha interligando tudo, forma um triângulo retângulo. Logo, note que de C para O é a soma dos dois raios, o da bocha e o do bolim.

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d. Nessas condições determine o valor de d.

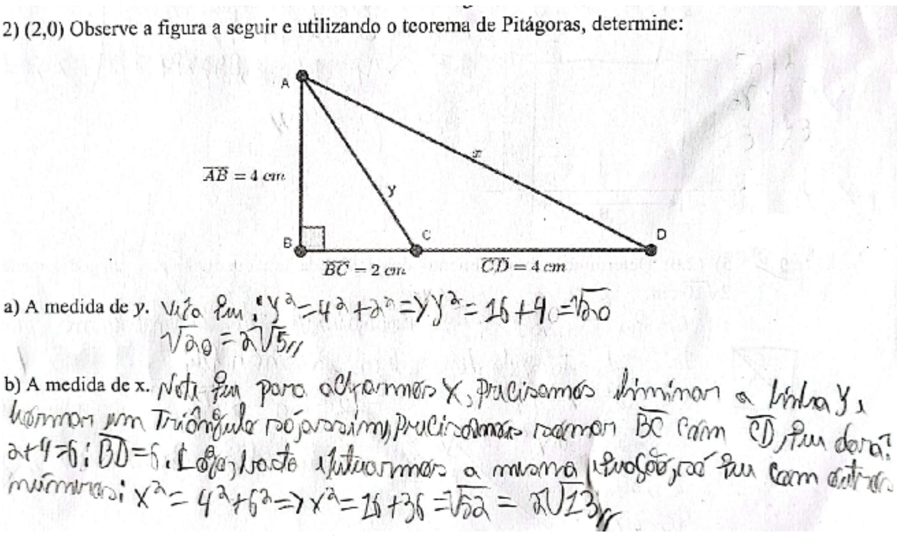
Assim: $5+2=7$, $CO=7$. Depois, podemos dizer que o raio do bolim "corta" o raio da bocha, para traçar a altura do nosso triângulo. Então: $5-2=3$. Com isso, basta traçarmos assim: $7^2=3^2+d^2$
$49=9+d^2 \Rightarrow 9+d^2=49 \Rightarrow d^2=49-9=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Fonte: Avaliação realizada em sala

Perceba que ele desenvolve a questão buscando explicar o seu raciocínio, procedimento e a maneira que conseguiu utilizar o teorema de Pitágoras para resolver o problema, isso é importantíssimo tanto para o aprendizado do aluno quanto para o professor que consegue identificar e corrigir possíveis equívocos no processo de construção de conhecimento do aluno.

Agora veja a resposta do mesmo aluno F para um problema mais técnico que não requer tanta interpretação, o mesmo desenvolve a resposta apoiado argumentação para justificar o procedimento utilizado, principalmente no item b que sentiu a necessidade de explicar o procedimento de como obteve o comprimento do segmento $\overline{BD}$ do triângulo ABD

Fig. 12 – Aluno F



Fonte: Avaliação realizada em sala

Tais imagens vistas acima são frutos de fragmentos de avaliações e exercícios realizados pelos alunos durante todo ano de 2022, mostrando os avanços que obtiveram na escrita, argumentação e na resolução de questões problemas e lógico no aprendizado dos conteúdos matemáticos.

Avaliamos a proposta como positiva e extremamente importante para o ensino da matemática, principalmente para desenvolver uma aprendizagem significativa e que tenha significado para os alunos. A melhoria da escrita, da argumentação e da compreensão dos conteúdos matemáticos é comprovada com a premiação de alguns alunos na OBMEP e com a melhoria da escrita desenvolvida pelo restante da turma e comprovada através da aplicação das avaliações bimestrais e exercícios realizados em sala.

Além das melhorias citadas na aprendizagem dos alunos, também fui um dos professores premiados na 17ª OBMEP, conquista muito válida, pois é fruto de um longo trabalho e de uma didática diferenciada que busca desenvolver um ensino da matemática com qualidade e excelência. Isso ressalta a importância de programas de capacitação como o PROFMAT, pois, graças a ele, os professores adquirem conhecimento e aprimoram as técnicas de ensino, conseguindo modificar a realidade dos seus alunos através da educação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É fato que a lógica e o rigor matemáticos para a realização de demonstrações, apoiados na escrita e na argumentação, são fortes aliados no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, principalmente no ato de resolução de problemas, o que possibilita a construção de uma metodologia eficaz que pode ser introduzida em sala de aula apenas como uma mudança na postura do professor e gerar uma melhoria significativa na aprendizagem dos alunos.

A proposta deste trabalho foi direcionada para alunos do nono ano, por conter alunos que estão na etapa final do ensino fundamental. A tendência é que eles consigam a cada dia, melhorar a escrita e a argumentação, adquiram possibilidades e estratégias para expressar o seu conhecimento de forma concisa, principalmente o matemático. Contudo, é importante que a leitura e a argumentação matemática devam estar presentes durante todo o ensino fundamental, pois com isso o aluno criará uma estrutura sólida de conhecimento e técnicas essenciais em sua formação.

Com o presente estudo, podemos concluir que a leitura, a escrita, a argumentação, as demonstrações e o desenvolvimento das proposições matemáticas através da lógica podem contribuir de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem, desempenhando papel fundamental no entendimento dos conteúdos e possibilitando que o aluno construa um aprendizado com significados e compreenda a importância e a utilidade dos elementos matemáticos.

Tal proposta, prepara e dá ferramentas para que o aluno possa atacar e resolver diversos problemas matemáticos, seja a partir de demonstração ou não. Tais ferramentas auxiliam e preparam o aluno pra fazer provas nacionais, como a OBMEP, permitindo que os mesmos obtenham excelentes resultados, tudo graças a melhoria da argumentação e da compreensão dos elementos matemáticos privilegiados pela proposta.

Contudo, esse estudo demonstrou uma necessidade fundamental em desenvolver o planejamento de uma proposta de ensino interdisciplinar, principalmente com a disciplina de língua portuguesa, a fim de desenvolver nos alunos capacidades de argumentação e raciocínio lógico, tão essenciais para ambas as disciplinas. Deixamos como possibilidade de construção, uma ação afirmativa que vise o desenvolvimento de uma proposta de ensino que desenvolva os alunos de forma integral, privilegie as suas potencialidades e diminua as suas dificuldades.

Neste sentido, podemos compreender que a proposta se mostrou muito útil na compreensão e, principalmente, na resolução de problemas, proporcionando uma melhoria na escrita no processo de resolução dos problemas. Sendo então, tal estratégia se torna importante no ensino dos conteúdos matemáticos, mas para que ela alcance os efeitos desejados, é imprescindível a capacitação docente, para que o mesmo desenvolva uma visão diferenciada e um olhar crítico e possa modificar a sua realidade e a dos seus alunos.

Não podemos negar a importância da argumentação e do rigor das demonstrações como ferramenta de ensino, tendo em vista que a escrita é uma ferramenta fundamental para que os indivíduos possam se comunicar e expressar suas ideias. Sendo assim, é essencial incentivar e utilizar tal proposta para que se tenha um retorno satisfatório na compreensão de conceitos matemáticos estudados.

Desta forma, podemos concluir que os objetivos do nosso estudo foram alcançados, uma vez que obtivemos resultados extraordinários com a premiação de alguns alunos na OBMEP e a melhoria da escrita e argumentação dos alunos no processo de resolução de problemas. Isso torna os alunos mais confiantes em seu aprendizado e potencializa, mostrando que a educação é um instrumento de mudança social.

REFERÊNCIAS

BRASIL: **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL, Secretaria de Educação F.: **Parâmetros Curriculares Nacionais** / Matemática. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf`. Acesso em: 25 dez. 2022. 1997.

COMMANDINO, Frederico. **Euclides**: Elementos de Geometria. São Paulo: Edições Cultura, 1994.

ECHEVERRÍA, María del Puy Pérez; POZO, Juan Ignacio. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, p. 13-42, 1998.

EVES, Howard: **Introdução à história da matemática**. Tradução: H. Hygino. 5ª ed. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011.

FILHO, Daniel Cordeiro de M.: **Manual de Redação Matemática: Com um dicionário etimológico de palavras usadas na Matemática**. 2ª edição - Rio de Janeiro:SBM, 2018.

FOSSA, John A.: **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GARBI, Gilberto G.: C.Q.D.: **Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. 1ªed. São Paulo: Livraria da Física,2010.

LONGEN, Adilson: **Apoema: matemática 9**. 1ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

MACHADO, Nílson José; CUNHA, Marisa Ortega da. **Lógica e Linguagem Cotidiana**: verdade, coerência, comunicação, argumentação. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática**: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ONUCHIC, Lourdes de la R.: **A resolução de problemas na educação,**

matemática: Onde estamos? E para onde iremos?. In: Revista Espaço Pedagógico 20 (2013), Nr. 1.

ONUCHIC, Norma Suely G.; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: Bolema-Mathematics Education Bulletin (2011), S. 73–98.

PIAZZI, Pierluigi: **Aprendendo inteligência: manual de instruções do cérebro para alunos em geral**. 2. ed. São Paulo: Aleph, 2008.

PIAZZI, Pierluigi: **Como Estudar e Aprender**. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=noXqEGIZak8. Acesso em: 18 nov.2022. 2020.

PINHO, Antonio de A.: **Introdução à Lógica Matemática**. Rio de Janeiro. Disponível em: https://ifgjatai.webcindario.com/logica.pdf. Acesso em: 22 dez. 2022. 1999.

PÓLYA, George: **A arte de resolver problemas**. In: Rio de Janeiro: interciência 2 (1978), S. 12.

SILVA, Andreia Aparecida C.: **Números Reais**. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/numeros-reais/. Acesso em: 25 fev. 2023. 2022.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, Escrever e Resolver Problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. São Paulo: Artmed Editora, 2001.

VASCONCELLOS, Celso dos S.: **Avaliação: Concepção dialética-libertadora do processo de avaliação escolar**. 8ª ed. São Paulo: Libertad, 1995.