

Gilder da Silva Mesquita

*O círculo dos nove pontos e algumas de suas  
potencialidades didáticas*

Recife - PE, Brasil

28 de agosto de 2013

Gilder da Silva Mesquita

*O círculo dos nove pontos e algumas de suas  
potencialidades didáticas*

Trabalho de conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, orientada pelo Professor Doutor Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva, pelo aluno Gilder da Silva Mesquita, como requisito à obtenção do grau de Mestrado Profissional em Matemática.

Orientador:  
Adriano Regis Rodrigues

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

Recife - PE, Brasil

28 de agosto de 2013

Dissertação de Projeto Final de Mestrado Profissional sob o título “*O círculo dos nove pontos e algumas de suas potencialidades didáticas*”, defendida por Gilder da Silva Mesquita e aprovada em 28 de agosto de 2013, em Recife, Estado de Pernambuco, pela banca examinadora constituída pelos professores:

---

Prof. Dr. Adriano Regis Rodrigues  
Orientador

---

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera  
UFRPE

---

Prof. Dr. Paulo Roberto Santiago  
UFRPE

---

Prof. Dr. Hélio Machado da Silva Porto  
UFPE

# *Apresentação*

As questões rotuladas como difíceis sempre despertaram minha curiosidade, desde os já distantes anos da adolescência, época em que era atraído pelas provas de Matemática dos concursos militares de então, os quais me eram mais conhecidos do que as olimpíadas de Matemática.

O que começou em forma de curiosidade terminou se transformando em prazer, de forma que, atualmente, não me é possível mais diferir essas sensações, tampouco delimitar – o que é matematicamente frustrante, porém, espiritualmente gratificante! Por vezes, pode vir a ser enlevante obsessão, como quando insisti, por nove meses, na busca de uma solução para um problema de Álgebra.

No entanto, a Geometria<sup>1</sup> sempre foi a quintessência dos meus deslumbramentos matemáticos. Maravilhava-me com problemas geométricos que eram resolvidos por traçados oportunos e/ou propriedades surpreendentes em seus efeitos.

De certo modo, essa experiência inspiradora repetiu-se na cadeira MA21, quando o professor Adriano Regis propôs uma lista de exercícios desafiadores, os quais representavam uma parcela da Geometria raramente vista na escola, que dirá explorada, tais como isogonais, simedianas, quádrupla harmônica, círculo de Apolônio, teorema de Menelaus, teorema de Ceva, ponto de Lemoine, reta de Euler, reta de Simpson, ponto de Gergonne, ponto de Nagel, etc. Mas, o que mais captou minha atenção foi o *Círculo dos Nove Pontos*. Achei por demais belo três ternos de pontos de naturezas diferentes serem integrantes de um mesmo lugar geométrico tão simples.

Contudo, ao tentar me debruçar sobre o tema, tive certa dificuldade em encontrar fontes de consulta. Normalmente, o tema é discutido em revistas especializadas em Matemática, em livros de Geometria ‘mais avançada’ ou materiais de competições matemáticas. Isso, talvez, ocasionou o paradigma de que, por estar no final do livro, já pressupunha conhecimento prévio do leitor. Além do mais, geralmente, para exposição desses temas mais incomuns, reserva-se demonstrações curtas, contendo apenas o que se considera “essencial” para a demonstração.

Mas, que bom que o encanto foi maior que a dificuldade! E, após diversas leituras, julguei vislumbrar uma oportunidade didática que se traduz como excelente aplicação de vários conceitos de Geometria num só tema.

Na verdade, o que me propus foi retirar detalhes de cada abordagem e juntá-las numa nova proposta. Como exemplo, cito e destaco a relevância do “*Círculo dos Seis Pontos*”, o qual me era desconhecido.

Pensando na conjuntura atual de muitos professores nesse país, por conseguinte, das suas diversas dificuldades, tencionei condensar numa só fonte subsídios para proporcionar-

---

<sup>1</sup>ao longo de todo este trabalho, está-se referindo à Geometria Euclidiana Plana

lhes um considerável suporte de consulta para uma atividade enriquecedora para seus alunos, desde o processo de leitura e aquisição da proposta até a pretendida aplicação.

Devido a isso, os comentários sobre as abordagens encontradas, bem como a proposta didática de atividade com o *Círculo dos Nove Pontos*, foram descritos detalhadamente, visando preencher as limitações tipográficas dos livros que eventualmente abordam o tema.

Outrossim, a funcionalidade deste trabalho residiu na premissa de que é possível, sim, despertar o educando para atividades instigantes e/ou desafiadoras, usando para tal apenas conhecimentos geométricos básicos (no caso, do oitavo ano do ensino fundamental) e, quem sabe, para sua capacidade inventiva. Por outro lado, espera-se também que provoque no aluno a certeza da sua capacidade.

Por fim, desejando abarcar tais objetivos, será notória a quantidade de desenhos expostos, não só com a finalidade de clarividenciar as demonstrações, mas, principalmente, chamar a atenção do educando para determinados problemas geométricos que necessitam mais de um desenho. Em outras palavras, tirar-lhes o vício de que problemas matemáticos só precisam de uma fórmula, ou uma receita mnemônica para resolvê-los. Quiçá, abrir-lhes uma frente de raciocínio (novos horizontes nas habilidades matemáticas) que lhes estimule a criatividade, bem como suas capacidades, de acordo com suas individualidades.

# *Resumo*

O presente trabalho tem por objetivo propiciar ao professor, desde o oitavo ano do ensino fundamental, suporte matemático e sugestões didáticas para o desenvolvimento de atividade em classe, para verificação de conceitos de Geometria Euclidiana plana, visão geométrica, exercício e estímulo à criatividade do aluno.

Em consonância com amplos objetivos, foi escolhido o *Círculo dos Nove Pontos* como conteúdo a ser discutido, tema abordado quase que exclusivamente em literatura matemática normalmente não usada pelas instituições de ensino em geral. No entanto, este tópico se reveste de considerável variedade de uso de conceitos geométricos, o que se pode traduzir numa atividade pedagógica bastante diversificada, com a possibilidade de se explorar vários aspectos didáticos.

Para materializar essas idéias, foi proposto um estudo das propriedades do *Círculo dos Nove Pontos* onde, para tanto, são feitas demonstrações com ênfase em geometria angular (identificação e medição de ângulos), ao passo que, na métrica (medição de comprimentos), excluiu-se um aspecto constante em demonstrações tradicionais, a saber – a semelhança de triângulos, uma vez que estaria apropriando-se de conteúdo fora da proposta básica do público-alvo pretendido.

Quatro novidades são apresentadas neste texto, na demonstração da existência do *Círculo dos Nove Pontos*, constituem a essência desse trabalho:

- Partindo-se do círculo que contém os três pontos médios de um triângulo acutângulo;
- A não utilização da Reta de Euler como pré-requisito para a abordagem do *Círculo dos Nove Pontos*;
- uma forma de concluir que o referido círculo passa pelos pontos de Euler num triângulo;

enquanto a quarta,

- A ausência da semelhança de triângulos no processo dedutivo.

**Palavras-chave:** Reta de Euler; *Círculo dos Nove Pontos*; Triângulo Órtico; Pontos de Euler.

# *Abstract*

This present work have aimed to provide the teacher since the eighth grade level, mathematical support and teaching suggestions for the development of classroom activity for verification concepts of Euclidean plane Geometry, geometric vision, exercise and stimulate student's creativity.

In consonance with broad objectives, was named the Circle of Nine-Point as content to be discussed, topic discussed almost exclusively in mathematical literature not normally used by educational institutions in general. However, this topic reveals its considerable customary variety of geometric concepts, which can translate into pedagogical activity quite diverse, with the possibility to explore various aspects of teaching.

To materialize these ideas, was proposed a study of the properties of the Nine-Point Circle which, therefore, are made demonstrations with emphasis on angular geometry (identification and measurement of angles), whereas, in the metric (measuring length) excluded if a constant feature in traditional demonstrations, namely - the similarity of triangles, since it would be appropriating content outside of the basic proposal of the intended audience.

Four new features are presented in this paper, in the statement of existence the Nine-Point Circle, constitute the essence of this work:

- Starting from the circle containing the three midpoints of an acute triangle;
- Failure to use the Euler Line as a prerequisite for the approach of the Nine-Point Circle;
- A way to conclude that the cited circle passes through the Points Euler of a triangle;

then the fourth,

- The absence of similar triangles in the deductive process.

Keywords: Euler Line; Nine-Point Circle; Orthic Triangle; Points Euler.

# *Dedicatória*

Aos meus pais — durante toda a minha vida, sempre fizeram o que julgaram ser melhor para mim.



# *Agradecimentos*

Em primeiríssimo lugar, “Bendito seja o Deus e Pai de nosso Senhor Jesus Cristo, o Pai das misericórdias e o Deus de toda consolação.” (II Coríntios 1:3) que sempre acreditou em mim e “não vê como vê o homem, pois o homem vê o que está diante dos olhos, porém o Senhor olha para o coração.” (I Samuel 16:7b).

“Ao Rei dos séculos, imortal, invisível, ao único Deus seja honra e glória para todo o sempre. Amém.” (I Timóteo 1:17).

Aos colegas Bruno Salgado Cole e Wagner José dos Santos, pelo companheirismo de três semanas de julho de 2012, quando nos empenhávamos pela qualificação no Profmat. Ao último, ainda acrescentaria: a personificação do ditado – “amigo se conhece nas horas difíceis”.

Aos diversos colegas do “grupo do Ipsep”, pelas diversas reuniões de estudo e pelos momentos fraternos inesquecíveis que tivemos, os quais sabem o que me significa a frase “sentirei saudades”: foi gratificante saber quanta gente capacitada há nesse país!

Ao meu colega de trabalho, Moacy Vasconcelos Cabral: por se dispor a revisar as versões finais do texto, abdicando dos seus horários de lazer e descanso.

Ao orientador, Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva, pela resignação ao se dignar dispensar atenção ao tema que apresentei.

Extra Universidade, tenho dívidas para com:

— Ana Paula Aguiar da Costa Carvalho, gestora da instituição de ensino da qual fazia parte, quando da entrada no Profmat: pouquíssimas pessoas na minha existência me apoiaram incondicionalmente tal qual.

# Sumário

## Lista de Figuras

INTRODUÇÃO	p. 14
<b>1 Abordagens tradicionais da Reta de Euler</b>	p. 16
1.1 1ª demonstração da Reta de Euler . . . . .	p. 16
1.1.1 Comentários à 1ª demonstração da Reta de Euler . . . . .	p. 18
1.2 2ª demonstração da Reta de Euler . . . . .	p. 18
1.2.1 2ª demonstração - O Triângulo “Medial” e a Reta de Euler . . . . .	p. 18
1.2.2 Comentários à 2ª demonstração - O Triângulo “Medial” e a Reta de Euler . . . . .	p. 20
1.3 Considerações . . . . .	p. 23
<b>2 <i>Círculo dos Nove Pontos</i></b>	p. 24
2.1 <i>Círculo dos Nove Pontos</i> - 1ª demonstração . . . . .	p. 24
2.1.1 Comentários à 1ª demonstração - <i>Círculo dos Nove Pontos</i> . . . . .	p. 27
2.1.2 Reflexões . . . . .	p. 30
2.2 <i>Círculo dos Nove Pontos</i> - 2ª demonstração . . . . .	p. 31
2.2.1 Comentários à 2ª demonstração - <i>Círculo dos Nove Pontos</i> . . . . .	p. 33
2.2.1.1 desmembrando a figura 20 . . . . .	p. 34
2.2.1.2 desmembrando a figura 21 . . . . .	p. 35
2.2.2 Reflexões . . . . .	p. 36
<b>3 Propostas</b>	p. 37
3.1 <i>Círculo dos Seis Pontos</i> (aplicado a um triângulo <i>acutângulo</i> e <i>escaleno</i> )	p. 38
3.2 <i>Círculo dos Nove Pontos</i> . . . . .	p. 41
3.2.1 O Triângulo Órtico . . . . .	p. 42

3.2.2 Os Pontos de Euler . . . . .	p. 46
Conclusões	p. 50
Apêndice A – Ponto de encontro das mediatrizes	p. 51
Apêndice B – Todo trapézio inscrito num círculo é isósceles	p. 53
Apêndice C – Propriedades da Mediana relativa à Hipotenusa	p. 55
Apêndice D – Os pontos $E$ e $F$ são pés das alturas $BE$ e $CF$	p. 57
Apêndice E – O Círculo dos Nove Pontos passa pelos pontos $L$ e $M$	p. 59
Apêndice F – Círculo dos Nove Pontos – aplicado ao Triângulo Retângulo	p. 61
Apêndice G – Círculo dos Nove Pontos – aplicado ao Triângulo Obtusângulo	p. 62
G.1 Encontrando os pés das alturas . . . . .	p. 62
G.2 Encontrando os Pontos de Euler . . . . .	p. 65
G.3 A Reta de Euler . . . . .	p. 73
Apêndice H – Ponto de encontro das alturas	p. 79
Apêndice I – a relação entre vértices e ortocentro de um triângulo	p. 80
Apêndice J – Círculo dos Nove Pontos – aplicado ao Triângulos Equiláteros	p. 82
Referências	p. 83

## *Lista de Figuras*

1	Reta de Euler . . . . .	p. 17
2	Demonstração relativa à Reta de Euler . . . . .	p. 17
3	Triângulo medial . . . . .	p. 19
4	As medianas do $\triangle A'B'C'$ estão contidas nas medianas do $\triangle ABC$ . . .	p. 21
5	$N$ é o ponto médio de $HO$ . . . . .	p. 22
6	$r = \frac{R}{2}$ . . . . .	p. 22
7	Construindo um <i>Círculo dos Nove Pontos</i> pelos pontos médios e de Euler	p. 25
8	$N$ é o ponto médio de $HO$ . . . . .	p. 26
9	$\overline{C'B'} = \overline{LM}$ . . . . .	p. 27
10	$\overline{C'L} = \overline{B'M}$ . . . . .	p. 27
11	$B'C'LM$ é paralelogramo . . . . .	p. 27
12	$B'C'LM$ é retângulo . . . . .	p. 28
13	$A'B'KL$ é retângulo . . . . .	p. 28
14	$C'A'MK$ é retângulo . . . . .	p. 28
15	Construção do <i>Círculo dos Nove Pontos</i> por retângulos inscritos . . . .	p. 29
16	O pé da altura pertence ao <i>Círculo dos Nove Pontos</i> . . . . .	p. 30
17	Pontos pertencentes ao <i>Círculo dos Nove Pontos</i> . . . . .	p. 31
18	O <i>Círculo dos Nove Pontos</i> . . . . .	p. 31
19	$\lambda$ passa pelo pé da altura $AK$ . . . . .	p. 32
20	$L$ pertence a $\lambda$ . . . . .	p. 32
21	$M$ é o centro de $\lambda$ . . . . .	p. 32
22	Inscritibilidade de $KFLE$ . . . . .	p. 34
23	$FL$ é base média de $AHC$ . . . . .	p. 34
24	$EFL$ é um ângulo reto . . . . .	p. 34
25	$KFLE$ é um quadrilátero inscritível . . . . .	p. 34
26	$\triangle LFE$ é retângulo em $F$ . . . . .	p. 35
27	$M$ é ponto médio de $HO$ e centro de $\lambda$ . . . . .	p. 35

28	Triângulo acutângulo e seus pontos médios . . . . .	p.38
29	Encontrando o centro do círculo determinado pelas mediatrizes . . . . .	p.39
30	Quadrilátero inscrito determinado por $A'$ , $B'$ , $C'$ e $D$ . . . . .	p.39
31	Estudando a natureza do segmento $AD$ . . . . .	p.40
32	$AD$ é uma altura do $\triangle ABC$ . . . . .	p.41
33	Triângulo Órtico . . . . .	p.42
34	Os ângulos internos do $\triangle BEA$ e do $\triangle CFA$ são congruentes . . . . .	p.42
35	Inscritibilidade do quadrilátero $BFHD$ . . . . .	p.43
36	Equivalência dos ângulos $F\hat{B}H$ e $F\hat{D}H$ . . . . .	p.43
37	Inscritibilidade do quadrilátero $CEHD$ . . . . .	p.44
38	Equivalência dos ângulos $E\hat{C}H$ e $E\hat{D}H$ . . . . .	p.44
39	Altura $AD$ é bissetriz do vértice $D$ do Triângulo Órtico . . . . .	p.45
40	As alturas do $\triangle ABC$ são bissetrizes do seu Triângulo Órtico . . . . .	p.45
41	$E\hat{F}K$ e $E\hat{D}K$ têm mesma medida . . . . .	p.46
42	Marcando os ângulos com medida $\gamma$ . . . . .	p.47
43	$D\hat{H}C$ e $F\hat{H}A$ têm mesma medida . . . . .	p.48
44	unicidade do ponto de interseção das mediatrizes . . . . .	p.51
45	Os ângulos adjacentes aos lados paralelos são suplementares . . . . .	p.53
46	Se um quadrilátero é inscrito, os ângulos opostos são suplementares . . . . .	p.54
47	Mediana relativa à hipotenusa . . . . .	p.55
48	Mediana relativa à hipotenusa devido à inscritebilidade no círculo . . . . .	p.56
49	Quadrilátero inscrito determinado por $A'$ , $B'$ , $C'$ e $F$ . . . . .	p.57
50	Quadrilátero inscrito determinado por $A'$ , $B'$ , $E$ e $C'$ . . . . .	p.58
51	<i>Círculo dos Nove Pontos</i> passa pelo ponto $L$ . . . . .	p.59
52	<i>Círculo dos Nove Pontos</i> passa pelo ponto $M$ . . . . .	p.60
53	<i>Círculo dos Nove Pontos</i> num triângulo retângulo . . . . .	p.61
54	<i>Círculo dos Nove Pontos</i> no Triângulo Obtusângulo . . . . .	p.62
55	O <i>Círculo dos Nove Pontos</i> passa pelo pé da altura relativa ao lado $BC$ . . . . .	p.63
56	O <i>Círculo dos Nove Pontos</i> passa pelo pé da altura relativa ao lado $AB$ . . . . .	p.63
57	O <i>Círculo dos Nove Pontos</i> passa pelo pé da altura relativa ao lado $AC$ . . . . .	p.64
58	O Triângulo Órtico e os pontos de Euler no Triângulo Obtusângulo . . . . .	p.65
59	Inscritebilidade dos quadriláteros $AEBD$ , $HDBF$ e $CEBF$ . . . . .	p.66

60	Mostrando que $M$ é ponto médio de $HC$ . . . . .	p. 67
61	$EM$ é mediana relativa à hipotenusa $HC$ . . . . .	p. 68
62	Mostrando que $K$ é ponto médio de $AH$ . . . . .	p. 69
63	$FK$ é mediana relativa à hipotenusa $AH$ . . . . .	p. 70
64	Mostrando que $L$ é ponto médio de $BH$ . . . . .	p. 71
65	$FK$ é mediana relativa à hipotenusa $BH$ . . . . .	p. 72
66	O centro ( $N$ ) do <i>Círculo dos Nove Pontos</i> pertence à Reta de Euler . . . . .	p. 73
67	Mostrando que $MN // OC$ . . . . .	p. 74
68	Os ângulos $C\hat{A}O$ e $A\hat{C}O$ são congruentes . . . . .	p. 75
69	$MN$ é base média do $\triangle OHC$ . . . . .	p. 76
70	Mostrando que $N$ é ponto médio de $HO$ . . . . .	p. 77
71	Unicidade do ponto de interseção das alturas . . . . .	p. 79
72	As alturas do $\triangle ABC$ formam três triângulos obtusângulos . . . . .	p. 80
73	Considerando o ortocentro do acutângulo como vértice do obtusângulo . . . . .	p. 81
74	os pés das alturas coincidem com os pontos médios . . . . .	p. 82

# INTRODUÇÃO

Deseja-se promover a integração do *Círculo dos Nove Pontos* como atividade pedagógica viável a partir do oitavo ano do ensino fundamental, a qual possibilite aos professores de ensino fundamental revisar e exercitar, numa única atividade, diversos conceitos matemáticos até aquele período de estudos, tais como:

- Triângulos: ângulos (internos e externos) e propriedades métricas;
- Círculo: ângulos (inscrito, excêntrico interno e excêntrico externo) e arco capaz;
- Quadriláteros notáveis: propriedades angulares e métricas.

Dado um triângulo, o *Círculo dos Nove Pontos* consiste no círculo que contém os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios (Pontos de Euler) dos segmentos compreendidos entre o ortocentro e os vértices do triângulo.

A principal característica de inovação constitui-se em se partir, à priori, de um círculo que passe pelos pontos médios de um triângulo, ao invés de construir o referido círculo só no final da demonstração. No caso, procurar-se-á demonstrar as propriedades dos pontos de interseção desse círculo com os lados e alturas do triângulo, donde ver-se-á que essas interseções são em número de nove – por isso, o nome *Círculo dos Nove Pontos*.

Poder-se-ia desenvolver tal atividade com suporte informático, porém, a intenção desta proposta é fazer uso de instrumentos concretos para o desenho geométrico – esquadro, régua e compasso – pelos quais se deseja que o aluno perceba as transformações, bem como suas propriedades geométricas.

O trabalho segue o seguinte roteiro:

- Para cada um dos dois primeiros capítulos, foram selecionados duas demonstrações (conforme constam nas referências), seguidas de comentários, além de considerações ao final de ambos os capítulos;
- No capítulo 3, far-se-á a proposta precípua deste trabalho; e,
- Em alguns momentos, far-se-á alusões a detalhes constantes nos apêndices.

É de fundamental importância ter em mente que o público preferencial que se pretende alcançar são os alunos do oitavo ano do ensino fundamental.

Devido à escassez de referências, os capítulos 1 e 2 foram incluídos com o intuito de serem materiais disponíveis para consulta, tendo em vista que seus conteúdos não são de entendimento imediato para os alunos supracitados.

Algumas convenções para notações matemáticas:

$AB \rightarrow$  segmento  $AB$  ;  $\overline{AB} \rightarrow$  medida do segmento  $AB$ .

$\hat{A}BC$  → ângulo cujo vértice é o ponto  $B$  ;  $\angle ABC$  → medida de  $\hat{A}BC$ .

$\widehat{ABC}$  → tanto representará o arco, como a medida do arco.

Os triângulos que foram considerados nos três capítulos são **acutângulos** e **escalenos**<sup>1</sup>. Do contrário, alguns dos pontos notáveis, com os quais trabalharemos, serão coincidentes, e não teríamos os “*nove pontos*” distintos – para o *Círculo dos Nove pontos*.

---

<sup>1</sup>para o triângulo equilátero, vide apêndice J



# 1 *Abordagens tradicionais da Reta de Euler*

Mostrar-se-á a seguir que, em um triângulo qualquer, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares. A reta que contém esses três pontos é conhecida como Reta de Euler.

Das seis referências bibliográficas, apenas [?] não prima por apresentar a Reta de Euler como pré-requisito ao *Círculo dos Nove Pontos*. Parece que, pelo fato do objeto em questão ser um círculo, as abordagens mais comuns têm como eixo principal de raciocínio buscar previamente o centro do suposto círculo. Na verdade, isso se deve à particularidade do centro do *Círculo dos Nove Pontos* pertencer a essa reta, além de coincidir com o ponto médio do segmento compreendido entre o ortocentro e circuncentro.

No entanto, a abordagem tradicional dessa reta, talvez para ser mais atrativa, sugere observar que três pontos notáveis de um triângulo, a saber, ortocentro, baricentro e circuncentro são colineares. No caso, a reta que contém esses três pontos é denominada de Reta de Euler, muito embora, na prática, os estudos se concentrem no segmento delimitado pelo ortocentro e circuncentro.

O conteúdo deste capítulo não é para apoiar ou reforçar a necessidade didática da Reta de Euler anteceder a abordagem do *Círculo dos Nove Pontos*. Tanto é verdade que, no capítulo 3 (correspondente à proposta deste trabalho), sequer se faz menção ao baricentro de um triângulo. O intuito é expor as linhas mais tradicionais de apresentação da Reta de Euler, bem como

## 1.1 1ª demonstração da Reta de Euler

O enunciado do Teorema a seguir, bem como sua demonstração, encontra-se em [?], página 196.

**Teorema 1.1.1.** *Em um triângulo qualquer, o Ortocentro  $H$ , o centro  $G$  e o Circuncentro  $O$  estão sobre uma mesma linha reta (conhecida por Reta de Euler) e a distância do Ortocentro ao Baricentro é o dobro da distância do Baricentro ao Circuncentro (figura 1).*

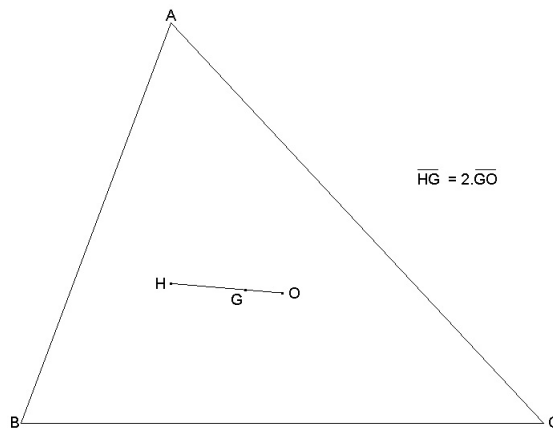


Figura 1: Reta de Euler

Sejam, conforme a figura 2, o triângulo  $ABC$ , uma de suas medianas, por exemplo  $AA'$ , relativa ao lado  $BC$ , o ponto  $G$  sobre ela (com  $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GA'}$ ) e o circuncentro  $O$  localizado sobre a perpendicular a  $BC$  que passa por  $A'$ .

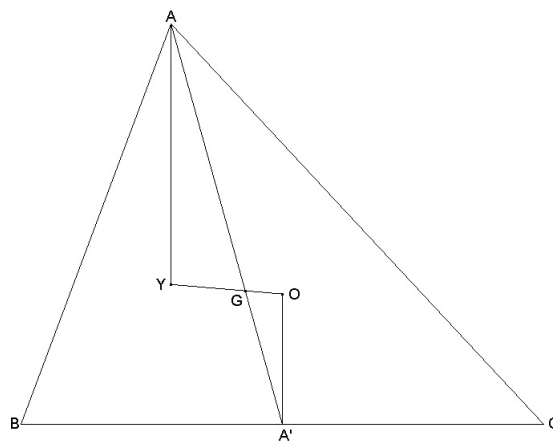


Figura 2: Demonstração relativa à Reta de Euler

Trace a reta que passa por  $O$  e  $G$  e, sobre ela, na semirreta oposta à do segmento  $GO$ , **tome o ponto  $Y$  tal que**  $\overline{GY} = 2 \cdot \overline{GO}$ .

Os ângulos  $\widehat{OGA'}$  e  $\widehat{AGY}$  são congruentes, por serem opostos pelo vértice. Como os segmentos  $AG$  e  $GY$  são proporcionais, respectivamente, aos segmentos  $A'G$  e  $OG$ , os triângulos  $AGY$  e  $A'GO$  são semelhantes. Logo, as retas  $AY$  e  $A'O$  são paralelas. Como  $A'O$  é perpendicular a  $BC$ ,  $AY$  também o é. Mas a perpendicular a  $BC$  traçada a partir de  $A$  é a reta que contém a altura do triângulo relativa àquele lado. Portanto, o ponto  $Y$  está sobre a reta de uma das alturas do triângulo. Por raciocínio análogo, prova-se que  $Y$  está sobre as retas das duas outras alturas. Logo,  $Y$  é exatamente o ortocentro  $H$ . E como, por construção,  $Y$  está sobre a reta que passa pelo baricentro e pelo circuncentro, então aqueles três pontos estão sobre uma mesma reta. Portanto, pela semelhança dos triângulos,  $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GO}$  c.q.d

### 1.1.1 Comentários à 1ª demonstração da Reta de Euler

Para um aluno do oitavo ano, é pouco intuitivo aspectos do tipo:

1º) Qual a motivação para criar o ponto  $Y$  ?

2º) Por que  $GY$  não poderia ser tal que  $\overline{GY} = 3 \cdot \overline{GO}$ , por exemplo?

Na verdade, o intuito é que se deseja provar que a distância do Baricentro ao Ortocentro é o dobro da distância do Baricentro ao Circuncentro. Contudo, ao se dizer “*tome o ponto  $Y$  tal que  $\overline{GY} = 2 \cdot \overline{GO}$* ”, está-se efetuando um tipo de construção pouco natural para um aluno desse nível escolar, independente do conteúdo semelhança não ser do seu conhecimento.

Outro detalhe é:

“*E como, por construção,  $Y$  está sobre a reta que passa pelo baricentro e pelo circuncentro, então aqueles três pontos estão sobre uma mesma reta. Pela semelhança dos triângulos,  $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GO}$  c.q.d*”

Seria melhor concluir que:

como  $Y = H$  e, por construção,  $\overline{GY} = 2 \cdot \overline{GO}$  (...) então  $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GO}$ .

Assim, não se precisaria evocar a semelhança de triângulos no final da demonstração.

## 1.2 2ª demonstração da Reta de Euler

O texto a seguir, retirado de [?], páginas 18-19, foi uma inspiração propulsora para o tema principal. Dada sua relevância, achou-se por bem incluí-lo, ao mesmo tempo que, espera-se, seja enriquecedor para o leitor.

A referência é extremamente recomendável para os que desejam “ir um pouco mais além” da Geometria tradicional dos livros didáticos. Inclusive, no próximo capítulo, expomos sua boa abordagem para o *Círculo dos Nove Pontos*. Para o nível dessa obra, suas exposições e demonstrações são consideravelmente didáticas.

No que tange a este trabalho, a única ressalva é, novamente, sobre a limitação tipográfica – além da figura 13 ser a única apresentada para esta demonstração, e em escala menor que o exposto a seguir, o desenho original é desprovido de cores.

### 1.2.1 2ª demonstração - O Triângulo “Medial” e a Reta de Euler

O texto a seguir, bem como sua demonstração, encontra-se em [?], página 18.

Juntando-se os pontos médios dos lados de um triângulo dado, o triângulo formado será chamado de triângulo *medial*. Na figura 3,  $\triangle A'B'C'$  é um triângulo medial do  $\triangle ABC$ . Foram traçadas duas medianas ( $AA'$  e  $BB'$ ), as quais se encontram em  $G$ , duas alturas do  $\triangle ABC$  que se encontram em  $H$ , e duas alturas do  $\triangle A'B'C'$  encontrando-se em  $O$ .

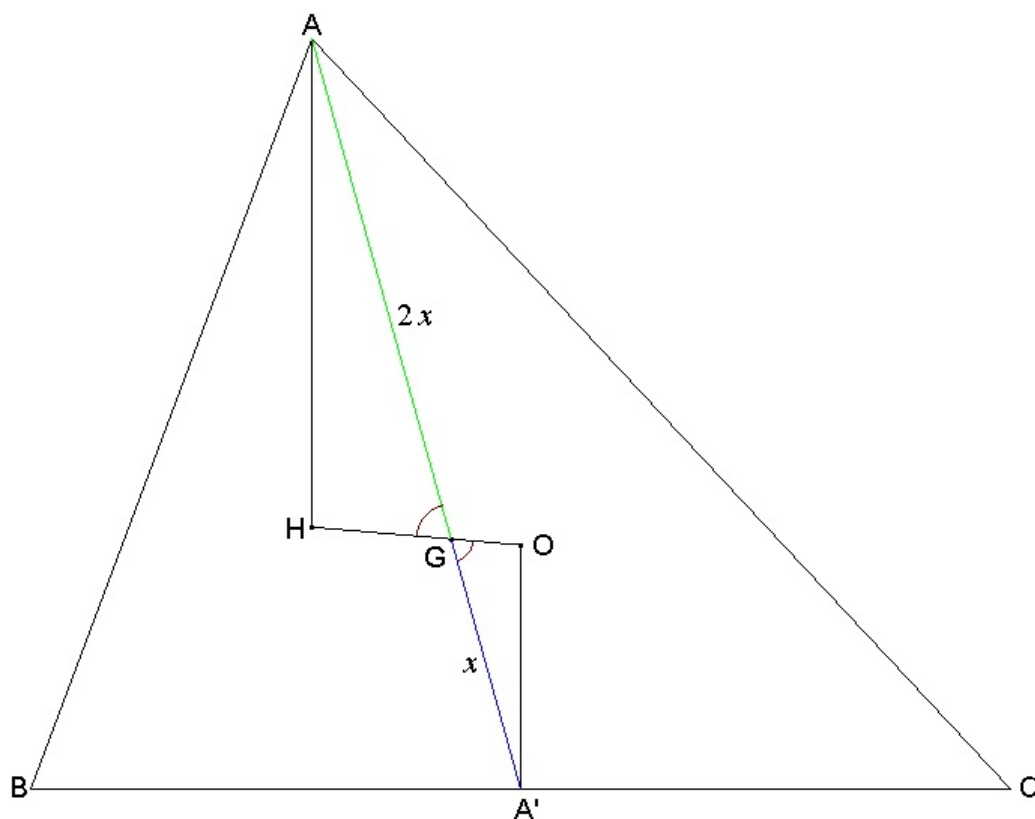


Figura 3: Triângulo medial

De antemão,  $\triangle A'B'C'$  tem os lados paralelos aos do  $\triangle ABC$ . Logo, são semelhantes.  $\overline{C'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ . Em seguida, vê-se que  $AC'A'B'$  é um paralelogramo, onde o ponto de interseção entre  $AA'$  e  $B'C'$  é o ponto médio dos dois segmentos. Portanto, as medianas de  $\triangle A'B'C'$  estão contidas nas medianas do  $\triangle ABC$ , o que acarreta que ambos os triângulos têm o mesmo baricentro,  $G$ . Por falar nisso, o ponto médio  $P$  de  $B'C'$  é também o ponto médio de  $AA'$ . Agora, as alturas do  $\triangle A'B'C'$  são mediatrizes dos lados  $AB$  e  $BC$  do  $\triangle ABC$ . Conclui-se que  $O$ , o ortocentro do  $\triangle A'B'C'$ , é, ao mesmo tempo, o circuncentro do  $\triangle ABC$ . Sendo  $H$  o ortocentro do  $\triangle ABC$ , e,  $O$  o ortocentro do triângulo semelhante  $\triangle A'B'C'$ ,  $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OA'}$ . Do Teorema 1.32<sup>1</sup>, recordamos que  $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{A'G}$ . Finalmente, desde que  $AD$  e  $A'O$  são ambos perpendiculares ao lado  $BC$ , eles são paralelos entre si. Daí

$$\begin{aligned} \angle HAG = \angle OA'G \quad , \quad \triangle HAG \sim \triangle OA'G \\ \qquad \qquad \qquad e \\ \angle AGH = \angle A'GO \end{aligned}$$

Isto mostra que os pontos  $O$ ,  $G$ ,  $H$  são colineares, e  $\overline{HG} = 2 \cdot \overline{GO}$ .

**Teorema 1.2.1.** *O ortocentro, baricentro e circuncentro de um triângulo são colineares. O baricentro divide a distância do ortocentro ao circuncentro na razão 2:1.*

*A reta sobre a qual estes três pontos repousam é chamada a Reta de Euler do triângulo.*

<sup>1</sup>consta na página 8 de [?]: uma mediana de um triângulo divide uma outra (mediana) na razão de 2:1.

Estude-se a figura 3 mais atentamente. Marcara-se o ponto  $N$  onde a Reta de Euler  $HO$  encontra a perpendicular a  $B'C'$  baixada por  $P$ . As três retas  $AH$ ,  $PN$ ,  $A'O$ , todas perpendiculares a  $B'C'$ , são paralelas entre si. Como  $\overline{AP} = \overline{PA'}$ , as retas  $AH$ ,  $PN$ ,  $A'O$  são equitativamente espaçadas:  $PN$  equidista de  $AH$  e  $A'O$ . Daí,  $N$  é o ponto médio do segmento  $HO$ .

Até aqui, conduziu-se as discussões com relação ao lado  $B'C'$  do  $\triangle A'B'C'$ . Se, em vez disso, aplicar-se o mesmo raciocínio para qualquer um dos outros lados, o segmento  $HO$  permanece fixo; e o ponto médio de  $HO$  será a interseção com a mediatriz do novo lado. Como  $HO$  tem somente um ponto médio, pode-se afirmar que as mediatrizes dos três lados de  $\triangle A'B'C'$  passarão pelo ponto  $N$ . Em outras palavras,  $N$  deve ser o circuncentro de  $\triangle A'B'C'$ .

Em resumo, o circuncentro do triângulo medial está no ponto médio do segmento  $HO$  da Reta de Euler do  $\triangle ABC$ . Além disso, uma vez que  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ , o raio do círculo circunscrito do triângulo *medial* é igual à metade do raio do círculo do  $\triangle ABC$ .

## 1.2.2 Comentários à 2ª demonstração - O Triângulo “Medial” e a Reta de Euler

Embora essa abordagem possa ser uma das mais evidentes quanto à clareza, a quantidade de traçados na figura 3, por si só, já é suficiente para dificultar o desenvolvimento da compreensão, uma vez que tende a dispersar a concentração do leitor em geral, no tema em apreço.

Sendo assim, é de bom siso que sejam acrescentadas algumas figuras que ilustrem o passo a passo da demonstração, bem como cinco detalhes são recomendáveis para o melhor entendimento.

1º detalhe: “vemos que  $AC'A'B'$  é um paralelogramo, de modo que o ponto de interseção entre  $AA'$  e  $B'C'$  é o ponto médio dos dois segmentos”.

$$\text{Com efeito, sendo } A' \text{ e } C' \text{ pontos médios de } BC \text{ e } AB: \begin{cases} A'C' // AB' \\ \overline{A'C'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \overline{AB'} = \overline{CB'} \end{cases}$$

$$\text{Igualmente, para } A' \text{ e } B' \text{ pontos médios de } BC \text{ e } AC: \begin{cases} A'B' // AC' \\ \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{AC'} = \overline{BC'} \end{cases}$$

Ora, a propriedade de que as diagonais de um paralelogramo ( $AC'A'B'$ ) intersectam-se em seu ponto médio fornece, simultaneamente, que  $\overline{AP} = \overline{A'P}$  e  $\overline{B'P} = \overline{C'P}$ . Logo,  $P$  é ponto médio de  $B'C'$  (figura 4).

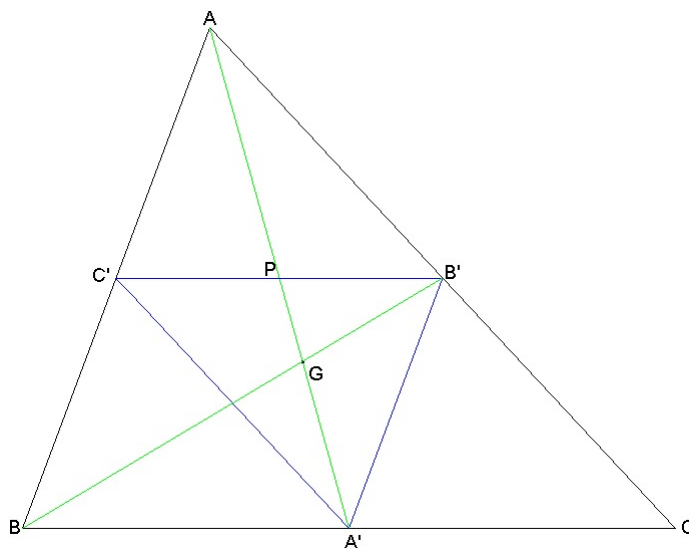


Figura 4: As medianas do  $\triangle A'B'C'$  estão contidas nas medianas do  $\triangle ABC$

Dessa forma,  $A'P$  é mediana do  $\triangle A'B'C'$  e

$$\overline{A'P} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AA'}.$$

2º detalhe: “as medianas de  $\triangle A'B'C'$  estão contidas nas medianas do  $\triangle ABC$ , o que acarreta que ambos os triângulos têm o mesmo baricentro,  $G$ .”

Como  $A'P$  está contida na diagonal  $AA'$  do paralelogramo  $AC'A'B'$ , e  $AA'$  é mediana do  $\triangle ABC$ ,  $A'P$  está contida na mediana  $AA'$ . Assim, por analogia, é possível concluir que as medianas do  $\triangle A'B'C'$  estão contidas nas medianas homólogas do  $\triangle ABC$ . Assim, possuem o mesmo baricentro  $G$ .

3º detalhe: “Marcar-se o ponto  $N$  onde a Reta de Euler  $HO$  encontra a perpendicular a  $B'C'$  baixada por  $P$ . As três retas  $AH$ ,  $PN$ ,  $A'O$ , todas perpendiculares a  $B'C'$ , são paralelas entre si. Como  $\overline{AP} = \overline{PA'}$ , as retas  $AH$ ,  $PN$ ,  $A'O$  são equitativamente espaçadas:  $PN$  equidista de  $AH$  e  $A'O$ . Daí,  $N$  é o ponto médio do segmento  $HO$ .”

Outra passagem merecedora de uma ilustração extra. Para tal, retire-se o  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle ABC$  da figura 3, obtenha-se a figura 5:

Pelo Teorema de Tales, retas paralelas determinam, sobre retas transversais, segmentos proporcionais. Ora, as retas suportes de  $AH$ ,  $PN$  e  $OA'$  determinam sobre o segmento  $AA'$  a razão  $\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P}}$ , assim como determinam sobre o segmento  $HO$  a razão  $\frac{\overline{HN}}{\overline{NO}}$ , de maneira que  $\frac{\overline{HN}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{A'P}}$ . Mas, já se sabe que  $\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P}} = 1$ . Logo,  $\frac{\overline{HN}}{\overline{NO}} = 1 \Rightarrow \overline{HN} = \overline{NO}$ , ou seja,

**N é o ponto médio do segmento HO.**

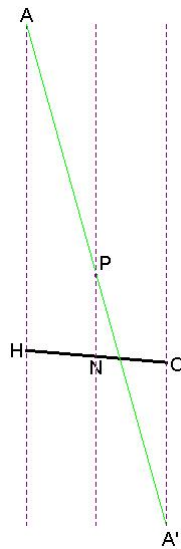


Figura 5:  $N$  é o ponto médio de  $HO$

4º detalhe: “o circuncentro do triângulo medial está no ponto médio do segmento  $HO$  da Reta de Euler do  $\triangle ABC$ . Além disso, uma vez que  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ , o raio do círculo circunscrito do triângulo medial é igual à metade do raio do círculo do  $\triangle ABC$ .”

Novamente evoca-se o aspecto supracitado de semelhança entre triângulos. Mais especificamente, já se leva em conta que os segmentos (**raios** dos círculos circunscritos ao  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle ABC$ ) cujas extremidades são o circuncentro ( $N$  e  $O$ ) e um dos vértices correspondentes são homólogos (figura 6), ou seja, mantêm a razão  $\left(\frac{1}{2}\right)$  de semelhança entre o  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle ABC$ . Portanto, **o raio do círculo circunscrito ao  $\triangle A'B'C'$  é igual à metade do raio do círculo circunscrito ao  $\triangle ABC$ .**

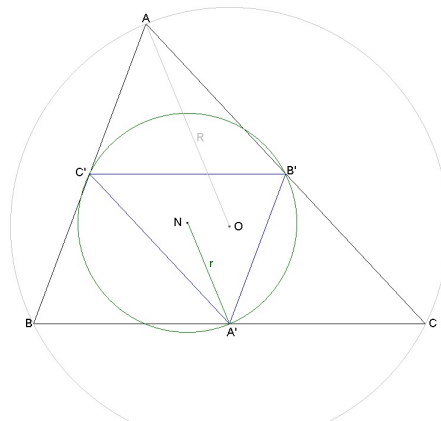


Figura 6:  $r = \frac{R}{2}$

## 1.3 Considerações

O apreciável da segunda demonstração [?], em relação à primeira [?], está na uniformidade intuitiva, ou seja, as construções são mais naturais (sem construção de segmentos com medida específica, sugestão de pontos, etc). Ainda que seja provida de sutilezas que exigem notáveis graus de abstração e conhecimento geométrico, deve-se destacar que tudo é tratado de forma concreta, isto é, as conclusões são obtidas a partir de objetos matemáticos bem delineados, tais como cevianas (medianas, alturas) e retas típicas (paralelas, perpendiculares, mediatrizes), assim como as suas interseções (baricentro, ortocentro e circuncentro).

A única ressalva que se faz é quanto à não explicitação da precedência da Reta de Euler imediatamente anterior ao *Círculo dos Nove Pontos* (sobre o qual trataremos mais detidamente nos capítulos 2 e 3). Se se quer optar por uma sequência didática em que se encontra primeiramente o centro de um círculo (pela Reta de Euler), para depois delineá-lo, é interessante que o leitor esteja cômico do processo, principalmente como no caso presente, onde a conclusão (o centro do suposto círculo coincide com o ponto médio da Reta de Euler) está relativamente distante da ideia que a sugere, podendo causar uma descontinuidade no entendimento do processo demonstrativo.

No intuito de dirimir tais considerações, buscou-se:

1. Deixar o objetivo bem evidente para o aluno alvo desse trabalho;
2. Uma exposição quantitativa intencional de esboços geométricos, mormente quando se julgou necessário facilitar o decorrer do processo de aquisição do conteúdo.



## 2 *Círculo dos Nove Pontos*

As duas demonstrações constantes neste capítulo trazem, em suma, a mesma ideia e recursos do capítulo anterior. A diferença básica está no que é dado mais ênfase. Enquanto a primeira está mais focada em construir o *Círculo dos Nove Pontos* por meio de retângulos, cujos vértices são pontos médios de segmentos delineados, a segunda, concentra-se mais em quadriláteros inscritíveis, onde um dos vértices é um dos pés das alturas do triângulo.

Seguir-se-á a mesma sequência do capítulo anterior, isto é, primeiramente expor-se-á o conteúdo do texto consultado, e depois, seguir-se-ão os comentários. A mudança estará na brevidade de algumas temáticas, haja vista que alguns resultados e/ou observações do capítulo 1 serão evocados.

### 2.1 *Círculo dos Nove Pontos* - 1ª demonstração

Antes, adiante-se que as notações utilizadas a seguir são as mesmas do item ??, isto é:

- $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices do triângulo;
- $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são os pontos médios dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente;
- $D$ ,  $E$  e  $F$  são os pés das alturas relativas aos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente;
- $O$  o ortocentro;
- Sendo  $H$  o ortocentro:
  - $K$  é o ponto médio do segmento  $AH$ ;
  - $L$  é o ponto médio do segmento  $BH$ ;
  - $M$  é o ponto médio do segmento  $CH$ ;
  - $N$  é o ponto médio do segmento  $HO$ .

Essa demonstração foi retirada de [?], páginas 20-21.

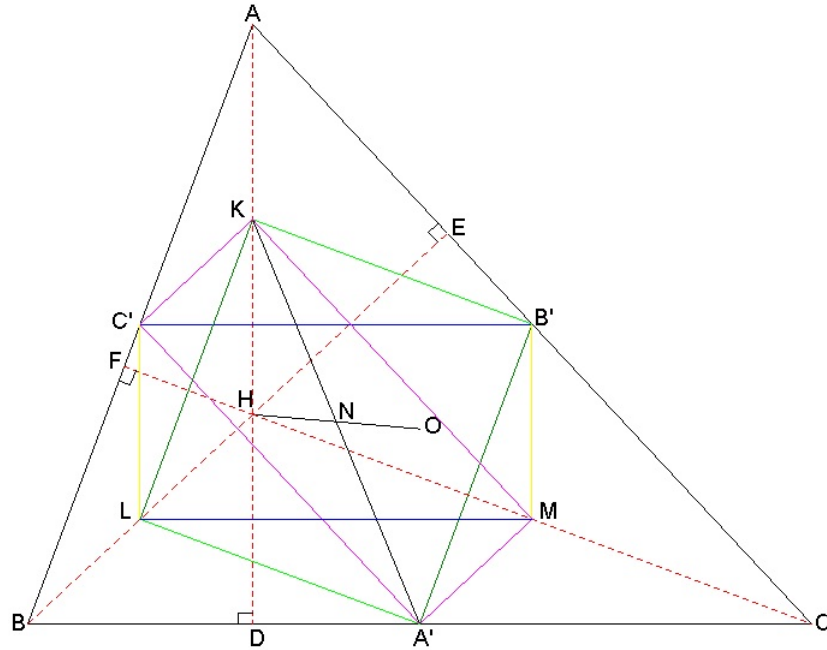


Figura 7: Construindo um *Círculo dos Nove Pontos* pelos pontos médios e de Euler

Com intuito de melhor clareza, algumas das linhas da figura 3 foram removidas e outras adicionadas, dando origem à figura 7. Faça-se uma leitura desta figura, admitindo-se  $K, L, M$  como pontos médios dos segmentos  $AH, BH, CH$ , respectivamente, contidos nas três alturas.

Como  $BC$  é um lado comum aos triângulos  $ABC$  e  $HBC$ , e,  $C', B'$  e  $L, M$ , respectivamente, pontos médios dos outros lados:

$$\begin{cases} C'B' // BC & \text{e} & \overline{C'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \\ LM // BC & \text{e} & \overline{LM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \end{cases} \Rightarrow \overline{C'B'} = \overline{LM}$$

Similarmente, sendo  $AH$  um lado comum aos triângulos  $BAH$  e  $CAH$ :

$$\begin{cases} C'L // AH & \text{e} & \overline{C'L} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \\ B'M // AH & \text{e} & \overline{B'M} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \end{cases} \Rightarrow \overline{C'L} = \overline{B'M}$$

Assim,  $B'C'LM$  é um paralelogramo e, como  $BC \perp AH$ ,  $B'C'LM$  é um retângulo.

Similarmente,  $A'B'KL$  é um retângulo (tal como  $C'A'MK$ ). Então,  $A'K, B'L, C'M$  são três diâmetros de um círculo, como na figura 8.

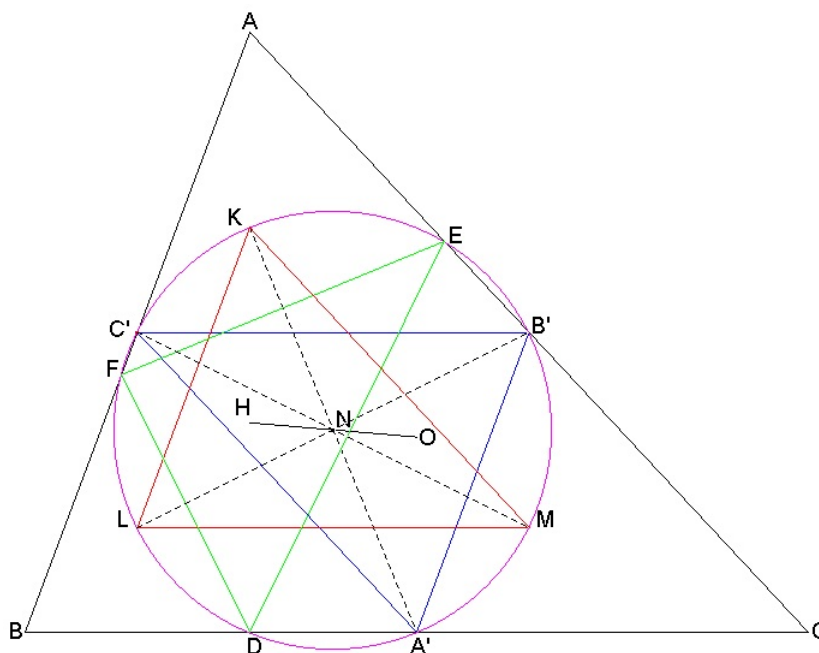


Figura 8:  $N$  é o ponto médio de  $HO$

Como  $\widehat{A'DK}$  é um ângulo reto, este círculo ( $A'K$  como diâmetro) passa por  $D$ . Da mesma forma, passa por  $E$  e  $F$ . Em resumo:

**Teorema 2.1.1.** *Os pés das três alturas de um triângulo qualquer, os pontos médios dos três lados e os pontos médios dos segmentos dos três vértices compreendidos entre o ortocentro e circuncentro, todos pertencem no mesmo círculo de raio  $\frac{1}{2}R$ . (tal qual figura 17)*

Este círculo é chamado de *Círculo dos Nove Pontos*. Uma vez que os três pontos  $K$ ,  $L$ ,  $M$  são diametralmente opostos a  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , qualquer um dos dois triângulos  $KLM$  e  $A'B'C'$  pode ser derivado do outro por uma meia-volta (isto é, uma rotação de  $180^\circ$ ) sobre o centro deste círculo. Claramente, esta meia volta, a qual transporta os dois triângulos congruentes, deve também alternar seus ortocentros,  $H$  e  $O$ . Então o centro do círculo de nove pontos é o ponto médio de  $HO$ , o qual nós já temos denotado por  $N$  em preparação para seu papel como o centro do *Círculo dos Nove Pontos*. Em outras palavras:

**TEOREMA 1.82:** *O centro do círculo de nove pontos pertence à Reta de Euler, no ponto médio do segmento cujas extremidades são o ortocentro e o circuncentro.*

### 2.1.1 Comentários à 1ª demonstração - Círculo dos Nove Pontos

Em princípio, não se pode negar a importância do fracionamento da figura 7, haja vista a quantidade relevante de segmentos traçados, principalmente na primeira passagem:

“ $BC$  é um lado comum aos triângulos  $ABC$  e  $HBC$ , e,  $C'$ ,  $B'$  e  $L$ ,  $M$ , respectivamente, pontos médios dos outros lados (...)  $\overline{C'B'} = \overline{LM}$  (figura 9).

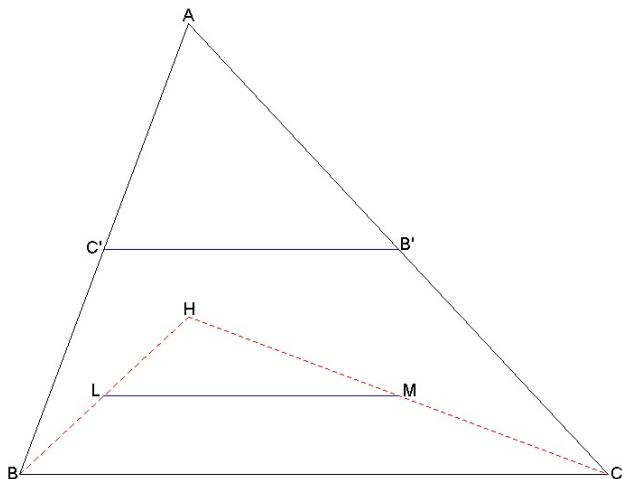


Figura 9:  $\overline{C'B'} = \overline{LM}$

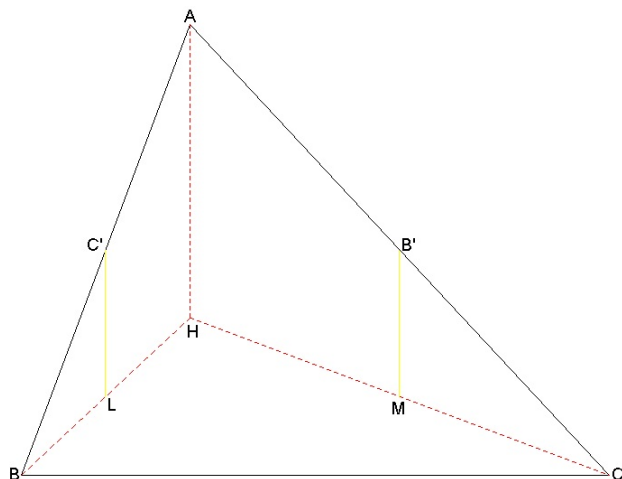


Figura 10:  $\overline{C'L} = \overline{B'M}$

(...) Similarmente, sendo  $AH$  um lado comum aos triângulos  $BAH$  e  $CAH$  (...)  $\overline{C'L} = \overline{B'M}$ ” (figura 10).

É importante salientar que a maneira utilizada no texto para concluir que  $\overline{C'L} = \overline{B'M}$  está em consonância com o realce dado às bases médias. Mas, não custa lembrar que o desenvolvimento para esse resultado poderia ser omitido, caso a turma esteja apropriada do seguinte fato: o polígono convexo obtido ligando-se as extremidades de dois segmentos paralelos e congruentes (não coincidentes) é um *paralelogramo*.

“(...) Assim,  $B'C'LM$  é um paralelogramo.”

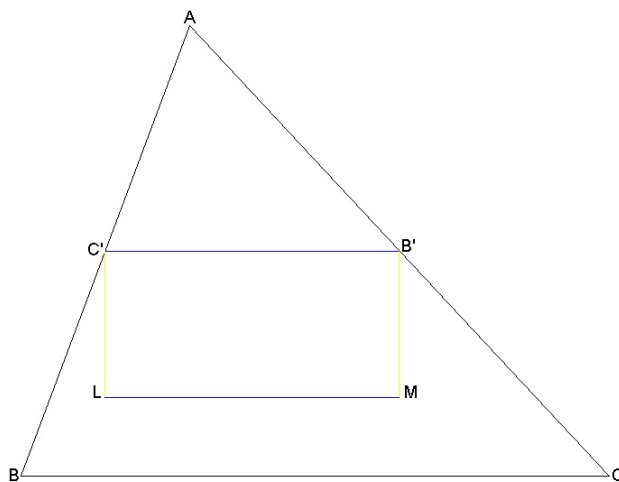


Figura 11:  $B'C'LM$  é paralelogramo

“como  $BC \perp AH$ ,  $B'C'LM$  é um retângulo.”

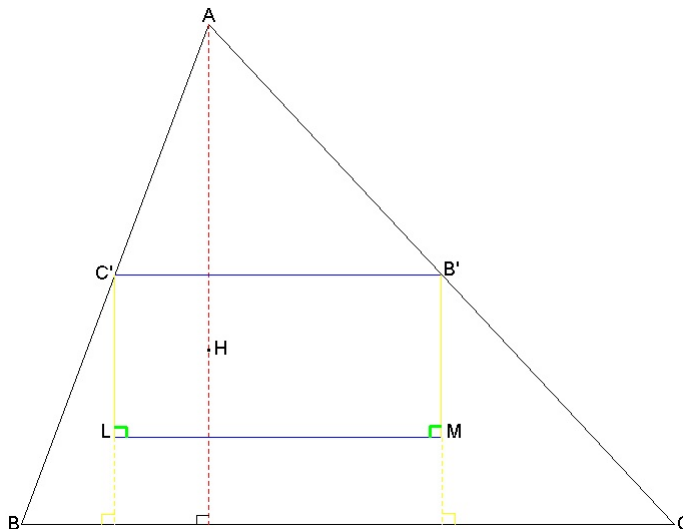


Figura 12:  $B'C'LM$  é retângulo

As figuras 9 a 12 não só ilustram, como também contribuem bastante para a compreensão das etapas da demonstração supracitada, além de servirem de referência para as analogias com as alturas  $CM$  e  $BL$  (figuras 13 e 14): “*Similarmente,  $A'B'KL$  é um retângulo (tal como  $C'A'MK$ ).*”

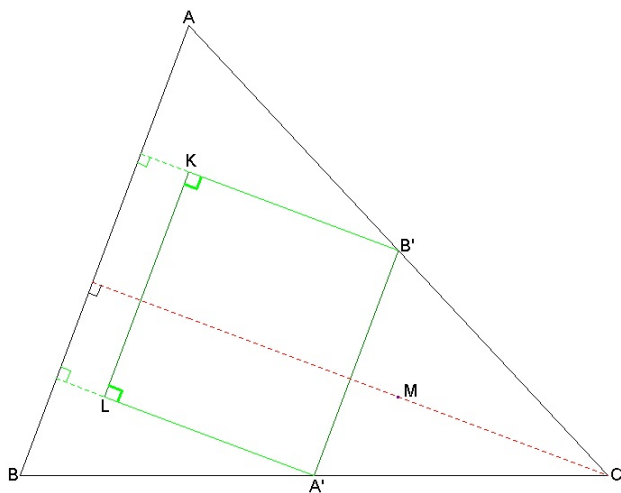


Figura 13:  $A'B'KL$  é retângulo

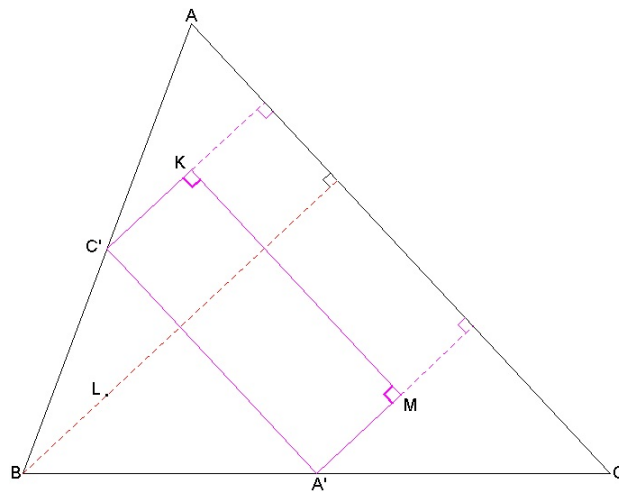


Figura 14:  $C'A'MK$  é retângulo

Não se trata de questionar a opção metodológica do texto (uso de retângulos para determinar um círculo), mas sim esclarecer previamente para o leitor sobre a ferramenta utilizada e, sobretudo, o porquê da sua escolha, a fim de potencializar seu manejo, justificando assim sua adequação. Por exemplo, para um leitor iniciante, é possível que o objetivo maior (*Círculo dos Nove Pontos*), passe um pouco despercebido (assumindo outro viés) – até poque, desde a abordagem da Reta de Euler, tudo que foi traçado foram segmentos de reta.

No caso presente, lança-se mão do fato de que **todo retângulo é inscrito em um círculo**, gozando da propriedade das suas **diagonais coincidirem com diâmetros do círculo**. Em seguida, prova-se que, se os **centros de retângulos distintos são coincidentes**, esse ponto é o **centro do círculo que contém esses vértices**, conforme figura 15:

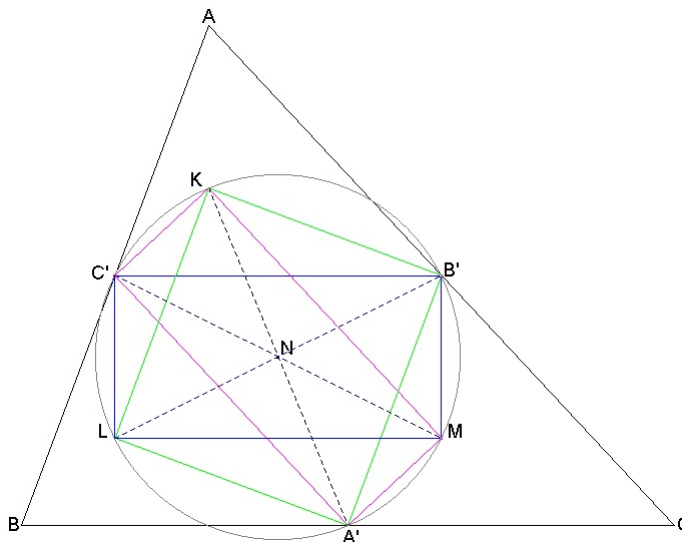


Figura 15: Construção do *Círculo dos Nove Pontos* por retângulos inscritos

Observando atentamente a figura 15, percebe-se que  $A'K$  e  $C'M$  são as diagonais do retângulo  $A'MKC'$ . Seja  $N$  o ponto de interseção dessas diagonais. Ora, sabendo-se que as diagonais de um retângulo são congruentes, e que se intersectam no ponto médio, podemos afirmar que  $N$  é ponto médio das diagonais do retângulo  $A'MKC'$ .

Em contrapartida,  $C'M$  e  $B'L$  são as diagonais do retângulo  $B'C'LM$ . Então,  $C'M$  e  $B'L$  são congruentes e se intersectam no ponto médio, ou seja,  $N$ .

Logo, a interseção das diagonais do retângulo  $A'MKC'$  ( $N$ ) coincide com a interseção das diagonais do retângulo  $B'C'LM$ .

Analogamente, obtêm-se a mesma conclusão observando o retângulo  $A'B'KL$ , onde  $A'K$  é uma diagonal comum com o retângulo  $A'MKC'$ .

Assim,  $A'$  e  $K$ ,  $B'$  e  $L$ ,  $C'$  e  $M$  são opostos em relação ao ponto  $N$ , ou, semelhantemente ao texto, “*diametralmente opostos*”. Mais ainda: os pontos  $A'$ ,  $M$ ,  $B'$ ,  $K$ ,  $C'$  e  $L$  equidistam de  $N$ . Logo, existe um círculo com centro em  $N$  contendo os pontos  $A'$ ,  $M$ ,  $B'$ ,  $K$ ,  $C'$  e  $L$ .

Por último, “*como  $\hat{A}DK$  é um ângulo reto, este círculo ( $A'K$  como diâmetro) passa por  $D$ .*”

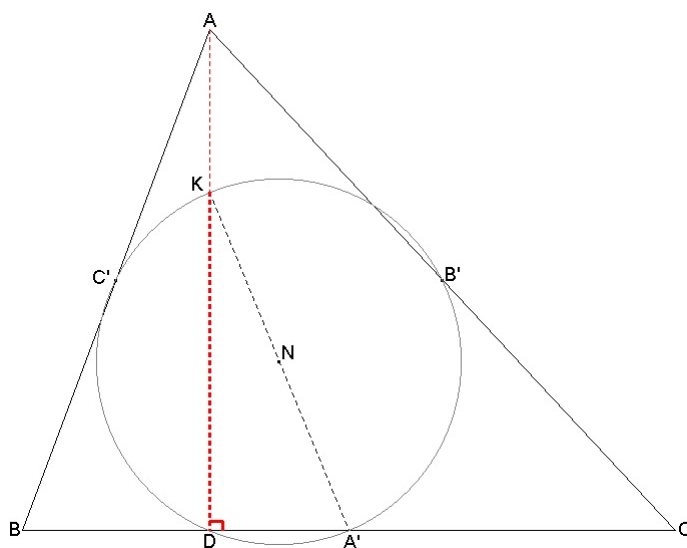


Figura 16: O pé da altura pertence ao *Círculo dos Nove Pontos*

### 2.1.2 Reflexões

O último comentário corrobora o fato citado na introdução deste capítulo, quer seja, a maior ênfase está na construção do *Círculo dos Nove Pontos* por meio de retângulos. Os resultados obtidos são empregados na prova da inclusão dos pés das alturas no referido círculo.

Outrossim, vale destacar o trecho (ainda referente à figura 15):

*“Uma vez que os três pontos  $K, L, M$  são diametralmente opostos a  $A', B', C'$ , respectivamente, os dois triângulos  $KLM$  e  $A'B'C'$  são derivados um do outro por uma rotação de  $180^\circ$  sobre o centro deste círculo. Como esta rotação transporta dois triângulos congruentes, deve também alternar seus ortocentros ( $H$  e  $O$ ) entre si. Então o centro do círculo de nove pontos é o ponto médio de  $HO$ , o qual já temos denotado por  $N$  em preparação para seu papel como o centro do *Círculo dos Nove Pontos*. Em outras palavras:*

*O centro do *Círculo dos Nove Pontos* pertence à Reta de Euler, no ponto médio do segmento cujas extremidades são o ortocentro e o circuncentro.”*

pelo valor que lhe é intrínseco.

Em primeiro lugar, pela uso perspicaz da rotação (figura 15) do  $\triangle KLM$ , coincidindo com o  $\triangle A'B'C'$  (nessa ordem), para mostrar a alternância entre os ortocentros  $H$  e  $O$ , respectivamente.

Em segundo, pela curiosa declaração de que o ponto médio da Reta de Euler havia sido preparado para exercer o “*seu papel como o centro do *Círculo dos Nove Pontos*”*.”

Pelo que consta, não foi necessário o uso da Reta de Euler para encontrar o ponto  $N$ , visto que a rotação em torno do centro ( $N$ ) do círculo aponta para a igualdade  $\overline{HN} = \overline{ON}$ , fazendo de  $N$  ponto médio de  $HO$ , o que, por si só, permite conjecturar que a Reta de Euler não se constitui pré-requisito para o *Círculo dos Nove Pontos*.

## 2.2 *Círculo dos Nove Pontos - 2ª demonstração*

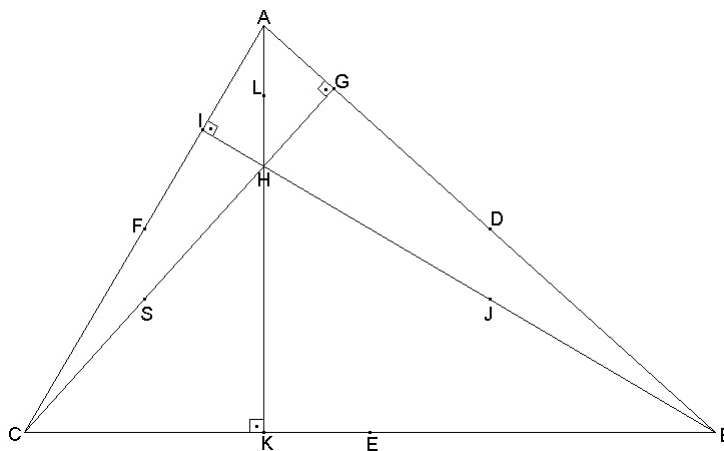


Figura 17: Pontos pertencentes ao *Círculo dos Nove Pontos*

Sejam:

$ABC$  o triângulo.

$D$ ,  $E$  e  $F$  os respectivos pontos médios de  $AC$ ,  $BC$  e  $AB$ .

$AK$ ,  $BI$  e  $CG$  as alturas com  $K$ ,  $I$  e  $G$  os respectivos pés,  $H$  o ortocentro do triângulo.

$L$ ,  $J$  e  $S$  os respectivos pontos médios de  $AH$ ,  $BH$  e  $CH$ . [grifo nosso]

Os nove pontos são:  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $I$ ,  $G$ ,  $L$ ,  $J$  e  $S$  (figura 17).

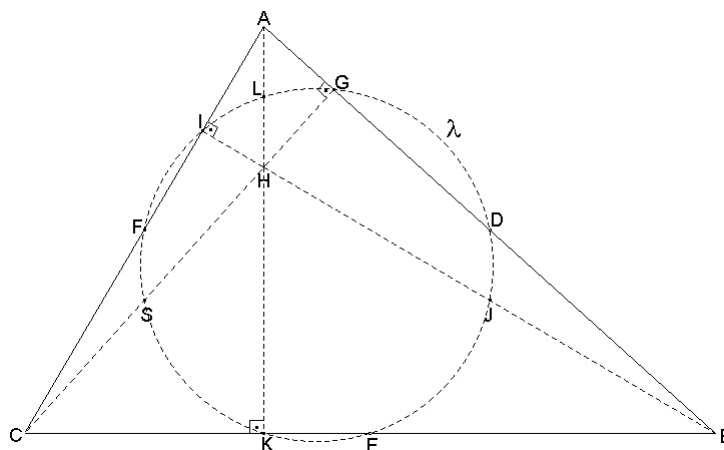


Figura 18: O *Círculo dos Nove Pontos*

**Tese.**  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $I$ ,  $G$ ,  $L$ ,  $J$  e  $S$  pertencem a uma mesma circunferência.

*Demonstração:* Consideremos a circunferência  $\lambda$  passando por  $D$ ,  $E$  e  $F$  (figura 18). Trata-se de demonstrar que  $\lambda$  passa por  $K$ ,  $I$  e  $G$ , e por  $L$ ,  $J$  e  $S$ . **Basta provar que  $\lambda$  passa por  $K$**  (pois, para  $I$  e  $G$  a demonstração é análoga) e **por  $L$**  (pois, para  $J$  e  $S$  é análogo). [grifo nosso]



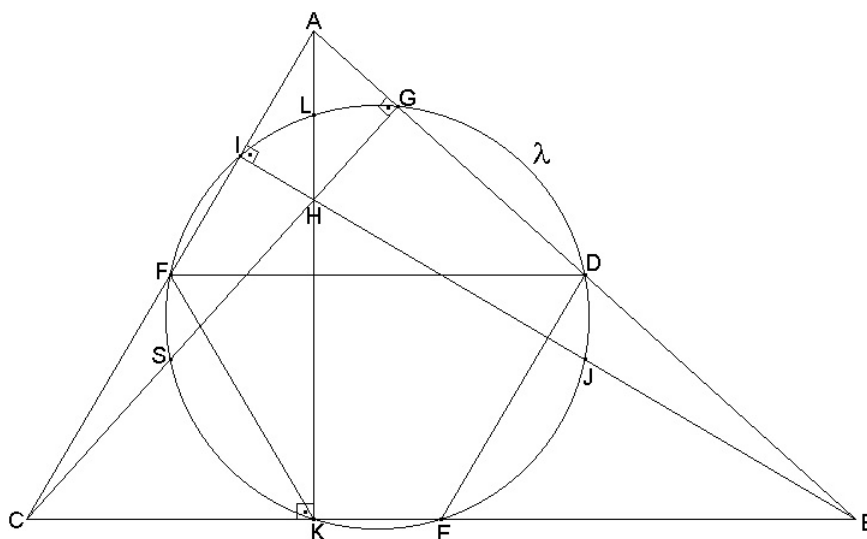


Figura 19:  $\lambda$  passa pelo pé da altura  $AK$

1. parte (figura 19): Provemos que  $\lambda$  passa por  $K$ , observando o quadrilátero  $KFDE$ . O segmento  $DE$ , com extremidades nos pontos médios dos lados  $AB$  e  $BC$  do triângulo  $ABC$ , é paralelo a  $AC$  e igual à sua metade, logo  $\overline{DE} = \overline{FC}$  (1). No triângulo  $CAK$ , retângulo em  $K$ , a mediana  $KF$ , relativa à hipotenusa  $AC$ , é metade desta hipotenusa. Logo  $\overline{KF} = \overline{FC}$  (2). De (1) e (2) vem:  $\overline{KF} = \overline{DE}$ . Portanto, o quadrilátero  $KFDE$  é um trapézio isósceles, pois  $FD$  é paralelo a  $KE$  e  $\overline{KF} = \overline{DE}$ . Conseqüentemente, ele é inscritível. Sendo inscritível, a circunferência  $\lambda$  que passa pelos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , passa, também, por  $K$ . Então,  $\lambda$  passa por  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $I$  e  $G$ .

2. parte (figura 20): Provemos que  $\lambda$  passa por  $L$ , observando o quadrilátero  $KFLE$ .

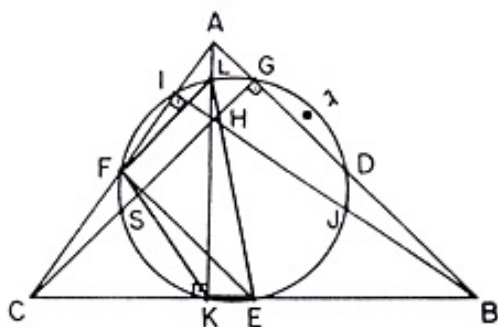


Figura 20:  $L$  pertence a  $\lambda$

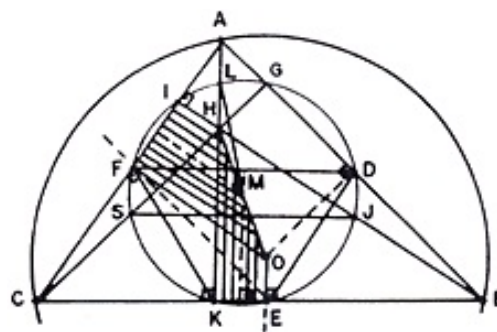


Figura 21:  $M$  é o centro de  $\lambda$

No triângulo  $ACH$ ,  $FL$  é paralelo a  $CH$  por ser segmento com extremidades nos pontos médios dos lados  $AC$  e  $AH$ . Analogamente, no triângulo  $ABC$ ,  $FE$  é paralelo a  $AB$ . Os ângulos  $E\hat{F}L$  e  $A\hat{G}C$ , por terem lados respectivamente paralelos, são congruentes. Como  $A\hat{G}C$  é reto, segue-se que  $E\hat{F}L$  é também reto. Ora, os triângulos retângulos  $EKL$  e  $EFL$  possuem a mesma hipotenusa  $LE$ . Logo, o quadrilátero  $KFLE$  é inscritível. Sendo inscritível, a circunferência  $\lambda$  que passa pelos pontos  $E$ ,  $F$  e  $K$  (1.ª parte), passa também por  $L$ . Vemos, então, que  $\lambda$  passa por  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $I$ ,  $G$ ,  $L$ ,  $J$  e  $S$ .

**Corolário 1.** *O segmento  $LE$  é o diâmetro do “Círculo dos Nove Pontos”.*

*Demonstração:* Basta notar que o triângulo  $LFE$  é retângulo em  $F$ , e, portanto inscritível em  $\lambda$  com diâmetro  $LE$ .

**Corolário 2.** *O centro do “Círculo dos Nove Pontos” é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o ortocentro  $H$  e o circuncentro  $O$  do triângulo  $ABC$  (figura 21).*

*Demonstração:* Num trapézio, toda reta paralela às bases, passando pelo ponto médio de um lado, intercepta o outro em seu ponto médio. Consideremos os trapézios, retângulos  $FIHO$  e  $HOEK$ . No primeiro, a mediatriz de  $FI$  (que é paralela às bases) corta o segmento  $HO$  em seu ponto médio  $M$ . Também no trapézio  $HOEK$  a mediatriz de  $KE$  (que é paralela às bases) corta  $HO$  em seu ponto médio  $M$ . O ponto  $M$  é o centro de  $\lambda$  pois também é intersecção das mediatrizes das cordas  $FI$  e  $KE$  de  $\lambda$ .

### 2.2.1 Comentários à 2ª demonstração - Círculo dos Nove Pontos

Vale destacar um aspecto nessa demonstração, o qual se coaduna com o disposto nas considerações finais do capítulo 1. Das cinco figuras do artigo da revista, apenas na primeira não aparece o círculo em questão. Dessa forma, o objetivo principal é patente ao longo do processo demonstrativo.

No mais, mantendo a coerência dessa dissertação, a única sugestão é referente à quantidade de figuras, conforme os dois itens a seguir.

2.2.1.1 desmembrando a figura 20

“Provemos que  $\lambda$  passa por  $K$ , observando o quadrilátero  $KFLE$ .” (figura 22)

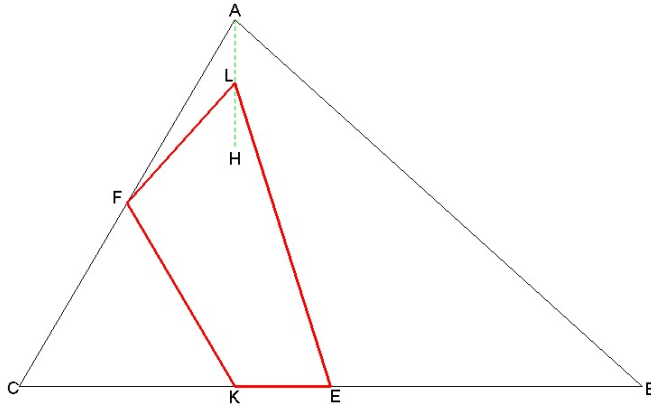


Figura 22: Inscritibilidade de  $KFLE$

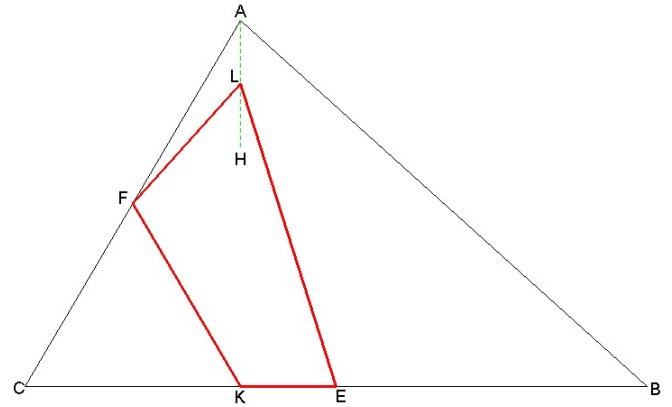


Figura 23:  $FL$  é base média de  $AHC$

“No triângulo  $ACH$ ,  $FL$  é paralelo a  $CH$  por ser segmento com extremidades nos pontos médios dos lados  $AC$  e  $AH$ .” (figura 23)

“Analogamente, no triângulo  $ABC$ ,  $FE$  é paralelo a  $AB$ . Os ângulos  $E\hat{F}L$  e  $A\hat{G}C$ , por terem lados respectivamente paralelos ( $C'K // HE$ ), são congruentes. Como  $A\hat{G}C$  é reto, segue-se que  $E\hat{F}L$  é também reto.” (figura 24)

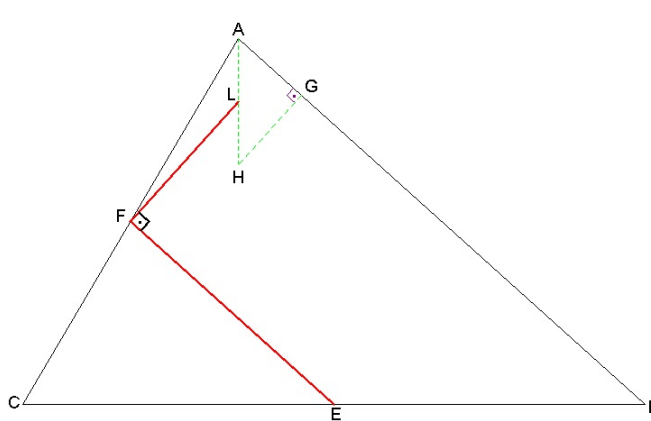


Figura 24:  $EFL$  é um ângulo reto

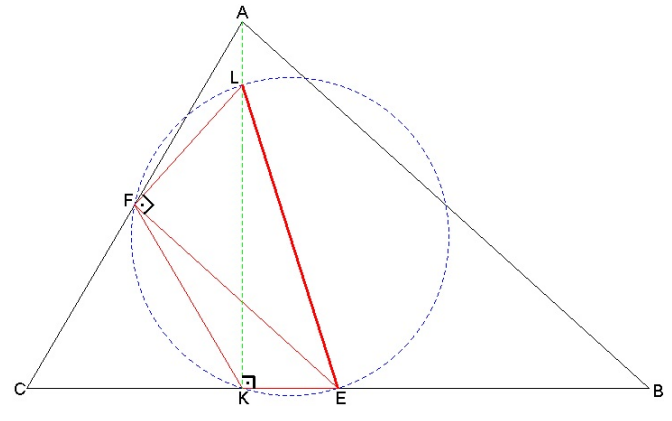


Figura 25:  $KFLE$  é um quadrilátero inscritível

“Ora, os triângulos retângulos  $EKL$  e  $EFL$  possuem a mesma hipotenusa  $LE$ . Logo, o quadrilátero  $KFLE$  é inscritível.” (figura 25)

“**Corolário 1.** O segmento  $LE$  é o diâmetro do “Círculo dos Nove Pontos”.

*Demonstração:* Basta notar que o triângulo  $LFE$  é retângulo em  $F$ , e, portanto inscritível em  $\lambda$  com diâmetro  $LE$ .” (figura 26)

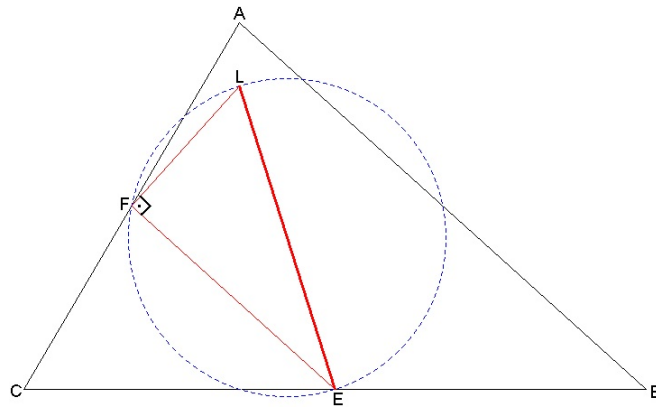


Figura 26:  $\triangle LFE$  é retângulo em  $F$

### 2.2.1.2 desmembrando a figura 21

“**Corolário 2.** O centro do “Círculo dos Nove Pontos” é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o ortocentro  $H$  e o circuncentro  $O$  do triângulo  $ABC$  (figura 27).”

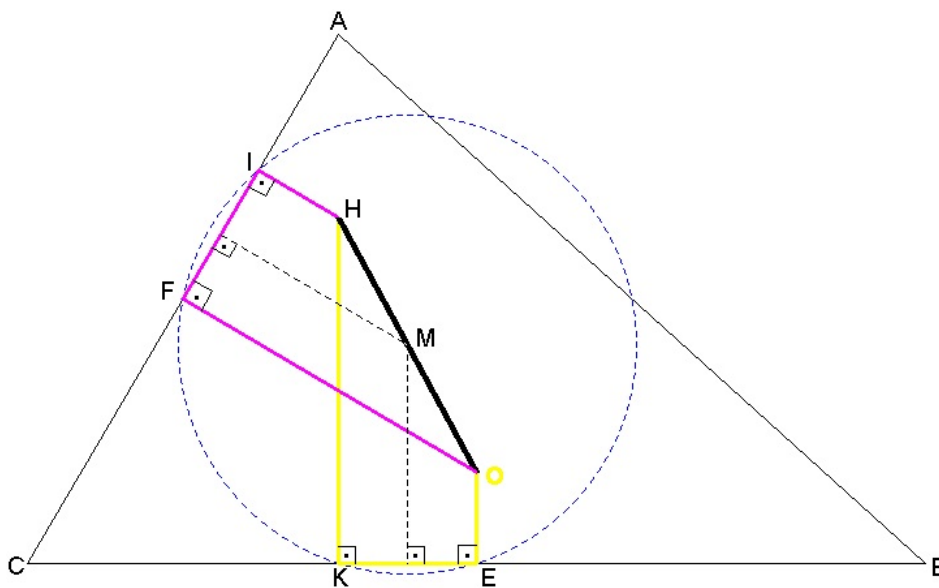


Figura 27:  $M$  é ponto médio de  $HO$  e centro de  $\lambda$

“*Demonstração:* Num trapézio, toda reta paralela às bases, passando pelo ponto médio de um lado, intercepta o outro em seu ponto médio. (Em outras palavras: é a base média do trapézio)”

“Consideremos os trapézios, retângulos  $FIHO$  e  $HOEK$ . No primeiro, a mediatriz de  $FI$  (que é paralela às bases) corta o segmento  $HO$  em seu ponto médio  $M$ . Também no trapézio  $HOEK$  a mediatriz de  $KE$  (que é paralela às bases) corta  $HO$  em seu ponto médio  $M$ .”

“O ponto  $M$  é o centro de  $\lambda$  pois também é intersecção das mediatrizes das cordas  $FI$  e  $KE$  de  $\lambda$ .”

### 2.2.2 Reflexões

Há aspectos primorosos nessa demonstração, compatíveis com este trabalho.

Primeiro pela originalidade em se servir de ferramenta matemática simples (base média de um trapézio) para provar resultados bem sofisticados, ou seja, além de situar geometricamente o centro do *círculo dos Nove Pontos* no segmento compreendido entre o ortocentro e circuncentro do  $\triangle ABC$ , mostrou ainda que o centro do *círculo dos Nove Pontos* coincide com o ponto médio desse segmento. Ora, o que é isso, senão a propalada Reta de Euler ?

Segundo, semelhantemente à reflexão da 1ª demonstração do *Círculo dos Nove Pontos*, repare que, mais uma vez, a **Reta de Euler não se constituiu pré-requisito** para o *Círculo dos Nove Pontos*.

### 3 *Propostas*

De posse das reflexões e considerações dos capítulos anteriores, será apresentada uma sequência didática para uma atividade com o *Círculo dos Nove Pontos*, onde:

- O círculo (objetivo) estará exposto desde o início da atividade; e
- Haverá considerável quantidade de figuras como auxiliar didático.

Para tal, aproveitou-se a sugestão encontrada apenas em [?] (página 197-198), em apresentar o “*Círculo dos Seis Pontos*”, onde a escolha dos pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro aos vértices do triângulo (Pontos de Euler) não se faz necessária.

Para simplificá-la, alguns usos de propriedades e teoremas, que estavam originalmente incluídos nos passos, foram deslocados para apêndices, deixando para o professor a escolha de suas inserções na atividade.

Em seguida, mostrar-se-á uma demonstração para a propriedade dos Pontos de Euler, com geometria acessível ao aluno do oitavo ano do ensino fundamental.

### 3.1 Círculo dos Seis Pontos (aplicado a um triângulo acutângulo e escaleno)

Achar os pontos médios de um segmento constitui-se um exercício básico nas aulas de construções geométricas, o que equivale, na maioria das vezes, a traçar a mediatriz de um segmento. Portanto, poder-se-ia transpor o 1º passo da atividade e já entregar para o aluno um triângulo acutângulo com os pontos médios localizados. Ora, como vários traçados serão feitos, é fundamental que esse esboço ocupe o máximo de espaço possível da folha. De igual modo, recomenda-se o acréscimo de algumas folhas para função de rascunho.

1º passo: acha-se os pontos médios ( $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ) dos lados de um  $\triangle ABC$  (figura 28) — pelo procedimento de encontrar a mediatriz de cada lado.

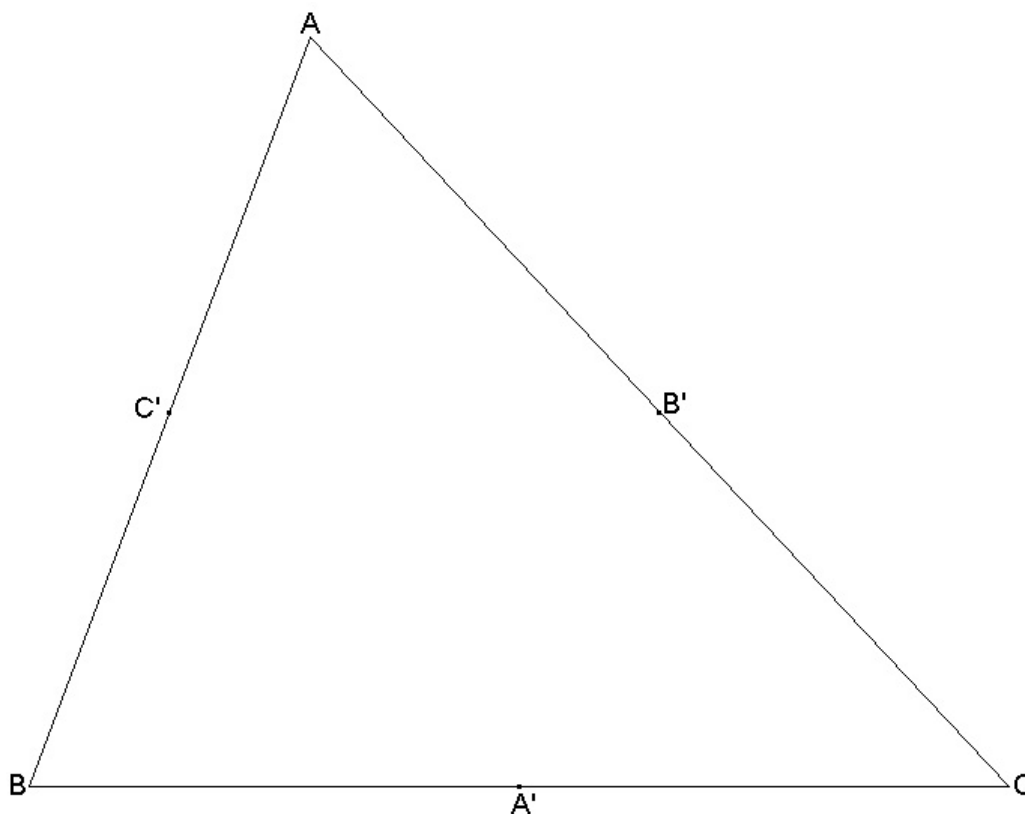


Figura 28: Triângulo acutângulo e seus pontos médios

2º passo: como três pontos não colineares no plano sempre determinam um círculo,  $A'B'$  e  $B'C'$  são cordas de um círculo determinada pelos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Semelhantemente ao 1º passo, traçando as mediatrizes dessas duas cordas, encontraremos um ponto de interseção (apêndice **A**) correspondente ao centro da circunferência ( $\lambda$ ) determinada pelos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  (figura 29).

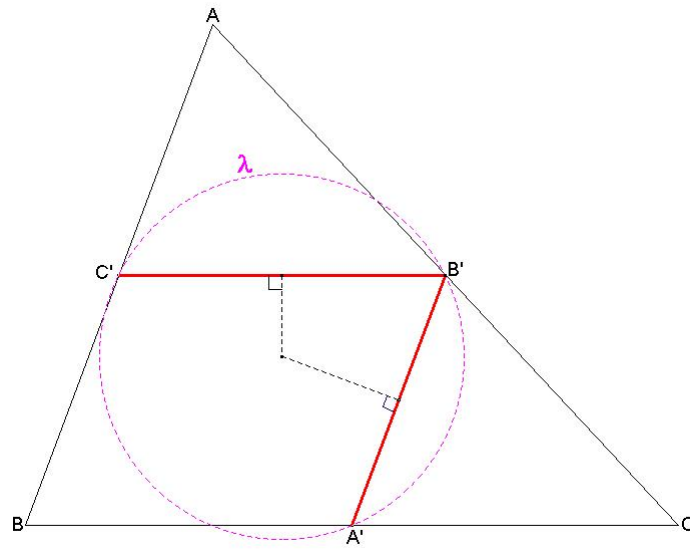


Figura 29: Encontrando o centro do círculo determinado pelas mediatrizes

3º passo: chamemos de  $D$  o segundo ponto de interseção de  $\lambda$  com o lado  $BC$  e analisemos a natureza o quadrilátero  $A'B'C'D$  (figura 30).

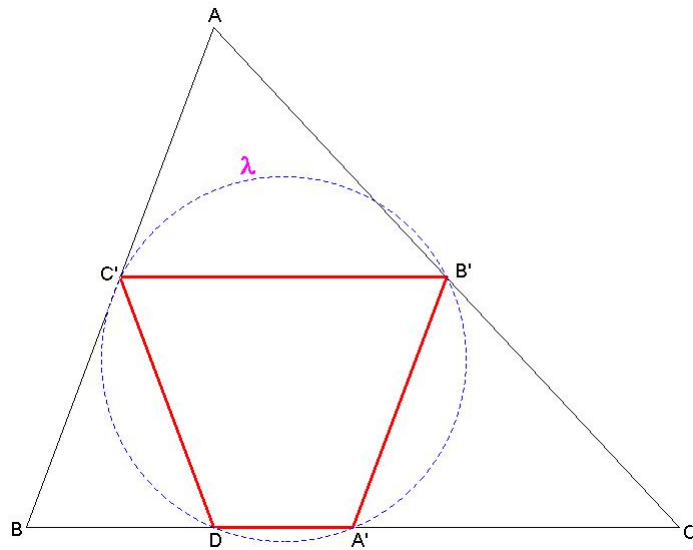


Figura 30: Quadrilátero inscrito determinado por  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D$

$$\text{Sendo } C' \text{ e } B' \text{ pontos médios dos lados } AB \text{ e } AC \Rightarrow \begin{cases} C'B' // BC \\ C'B' // DA' \\ \overline{C'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \end{cases}$$



Logo, o quadrilátero  $A'B'C'D$  é um trapézio<sup>1</sup>. Mas, todo trapézio inscrito num círculo é isósceles (apêndice **B**).

$$\text{Sendo } A' \text{ e } B' \text{ pontos médios dos lados } BC \text{ e } AC \Rightarrow \begin{cases} A'B' // BA \\ \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{BC'} = \overline{AC'} \end{cases}$$

4º passo: ligue o vértice  $A$  ao ponto  $D$  (figura 31).

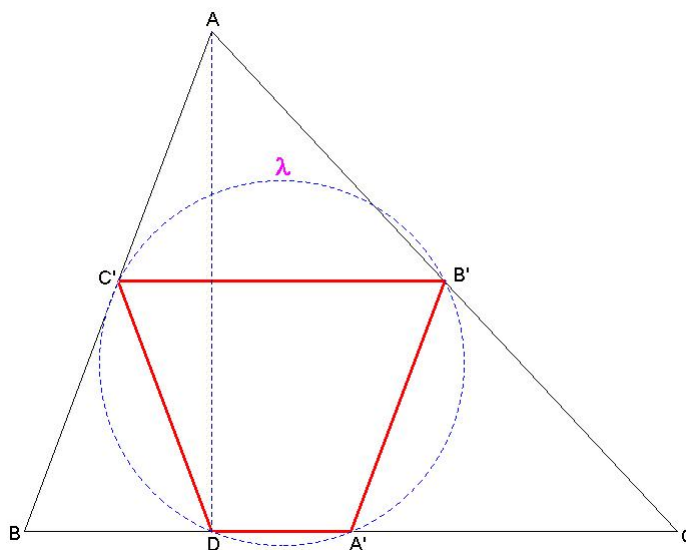


Figura 31: Estudando a natureza do segmento  $AD$

$$\text{Ora, } \begin{cases} \overline{A'B'} = \overline{DC'} \\ \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{BC'} = \overline{AC'} \end{cases} \Rightarrow \overline{DC'} = \overline{BC'} = \overline{AC'}$$

Como o comprimento da mediana ( $DC'$ ) é igual à metade do comprimento do lado ( $AB$ ) que é relativa, o  $\triangle ADB$  é retângulo em  $D$  (apêndice **C**). Então,  $AD$  é altura  $\Rightarrow$  o *Círculo dos Seis Pontos* passa pelo pé ( $D$ ) de uma das alturas.

Então, existe um círculo passando pelos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D$ , ou melhor, pelos **três pontos médios** ( $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ) e pelo pé da **altura**  $AD$ .

Por analogia, os outros dois pontos ( $E$  e  $F$ ) de interseção da circunferência com o  $\triangle ABC$  serão pés das outras duas alturas (vide apêndice **D**).

Por si só, já seria deveras interessante constatar esse fato: “*existe um círculo que passa pelos pontos médios de um triângulo e pelos pés das suas alturas*”. Nesse momento, dá até para cognominar, com os alunos, de ‘círculo dos seis pontos’.

<sup>1</sup>Neste trabalho, é o quadrilátero que tem somente dois lados paralelos

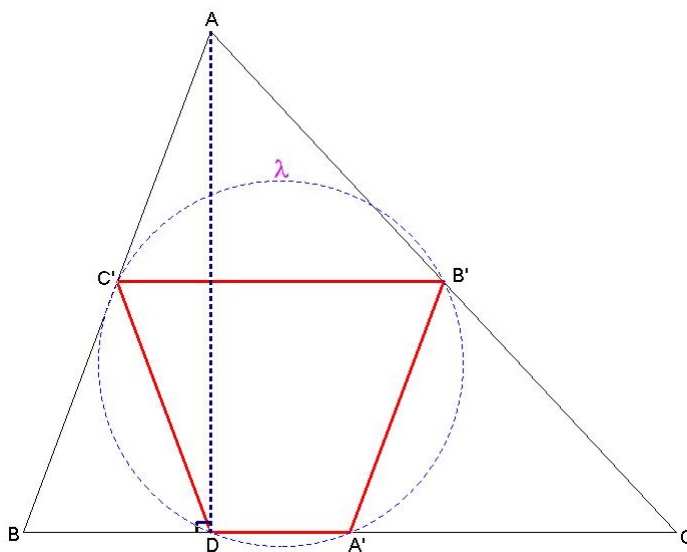


Figura 32:  $AD$  é uma altura do  $\triangle ABC$

### 3.2 *Círculo dos Nove Pontos*

Dependendo da turma, e do tempo disponível, pode-se pensar em avançar em direção ao *Círculo dos Nove Pontos*, ou deixar para o nono ano. Porém, mesmo que assim ocorra, as demonstrações existentes fazem a escolha dos pontos médios dos segmentos compreendidos entre os vértices e o ortocentro, a fim de provar que o *Círculo dos Nove Pontos* também passa por esses pontos.

Como as três alturas foram exploradas na construção do *Círculo dos Seis Pontos*, seria sugestivo que os outros três pontos corresponderiam às interseções da circunferência  $\lambda$  com as alturas do triângulo. Mas, daí concluir a propriedade peculiar desses três pontos é uma tarefa mais árdua, na qual corresponde à novidade deste trabalho.

No caso, buscou-se uma demonstração dessa propriedade, a qual só requeresse conteúdos estudados até o oitavo ano. O cerne da questão desse trabalho é mostrar que é possível tal empreitada. No entanto, para que essa aventura flua em melhor compasso, num momento importante da demonstração, será salutar um pré-requisito: o conhecimento das propriedades do TRIÂNGULO ÓRTICO<sup>2</sup> (figura 33), sobre o qual discorreremos a seguir.

<sup>2</sup>para maiores detalhes sobre suas propriedades, ver [?]

### 3.2.1 O Triângulo Órtico

Dado um  $\triangle ABC$ , o triângulo formado pelos pés ( $D, E, F$ ) das alturas é denominado *triângulo órtico* do  $\triangle ABC$ .

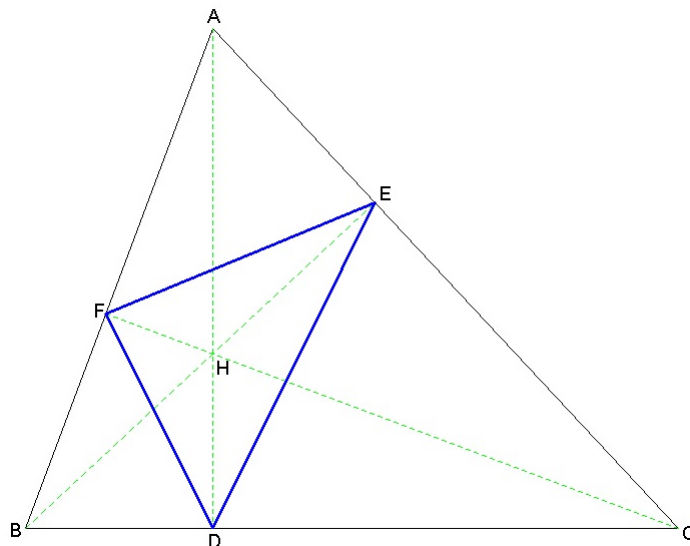


Figura 33: Triângulo Órtico

Observando o  $\triangle BEA$  e o  $\triangle CFA$  (figura 34), o ângulo do vértice  $A$  é comum aos dois triângulos, isto é:  $\angle BAE = \angle CAF$ .

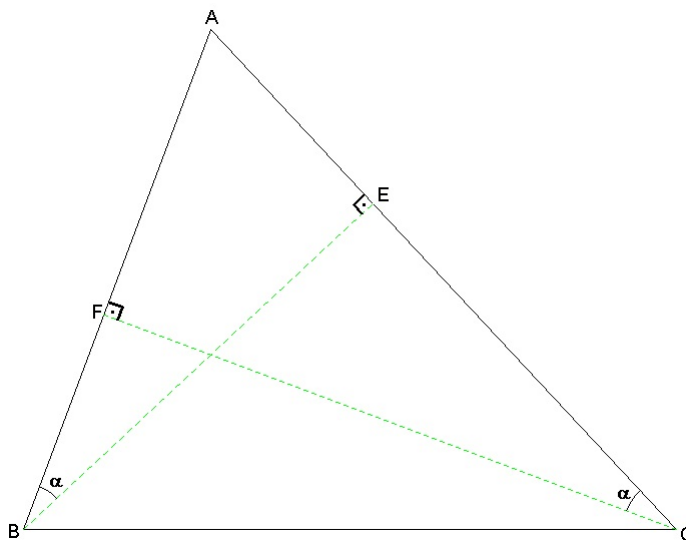


Figura 34: Os ângulos internos do  $\triangle BEA$  e do  $\triangle CFA$  são congruentes

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo,  $\angle ABE = \angle ACF = \alpha$ .

Observe o quadrilátero  $BFHD$  (figura 35).

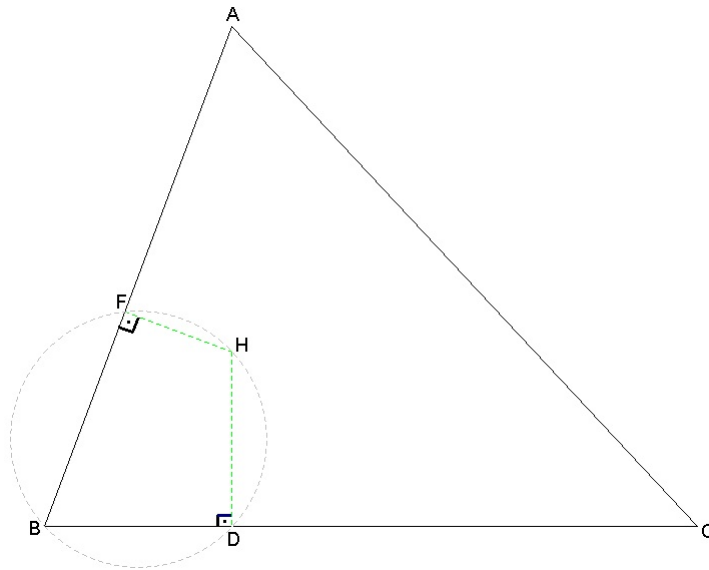


Figura 35: Inscritibilidade do quadrilátero  $BFHD$

$\angle BFH = \angle BDH = 90^\circ \Rightarrow \angle BFH + \angle BDH = 180^\circ \Rightarrow BFHD$  é inscritível.

Nesse caso, note que  $\widehat{FH}$  é o arco capaz dos ângulos inscritos  $F\hat{B}H$  e  $F\hat{D}H \Rightarrow \angle FBH = \angle FDH$  (figura 36).

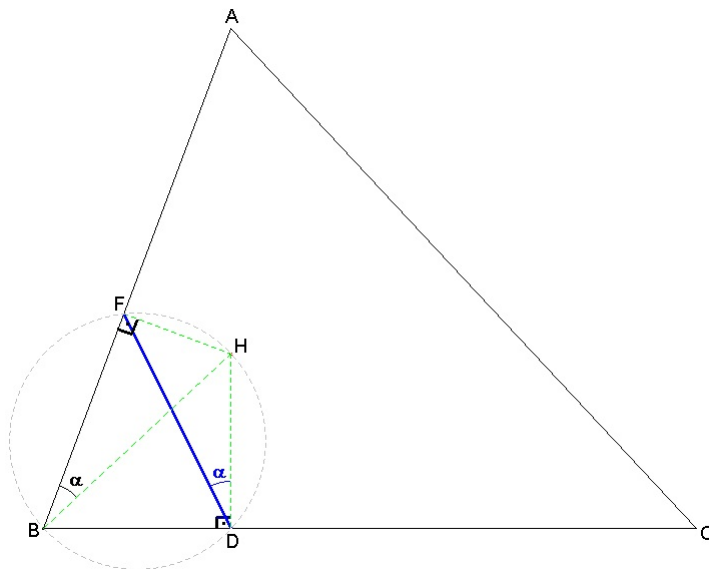


Figura 36: Equivalência dos ângulos  $F\hat{B}H$  e  $F\hat{D}H$

Logo:  $\begin{cases} \angle FBH = \angle ABE = \alpha \Rightarrow \angle FBH = \alpha \\ \angle FBH = \angle FDH \end{cases} \Rightarrow \angle FBH = \angle FDH = \alpha$

Analogamente, observe agora o quadrilátero  $CEHD$  (figura 37).

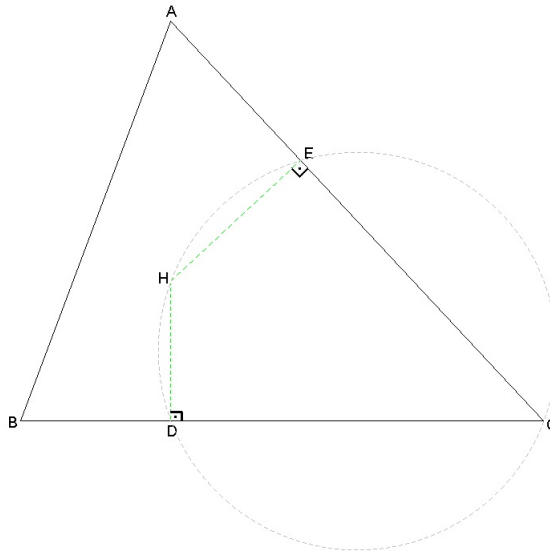


Figura 37: Inscritibilidade do quadrilátero  $CEHD$

$\angle CEH = \angle CDH = 90^\circ \Rightarrow \angle CEH + \angle CDH = 180^\circ \Rightarrow CEHD$  é inscritível.

Nesse caso, note que  $\widehat{EH}$  é o arco capaz dos ângulos inscritos  $E\hat{C}H$  e  $E\hat{D}H \Rightarrow \angle ECH = \angle EDH$  (figura 38).

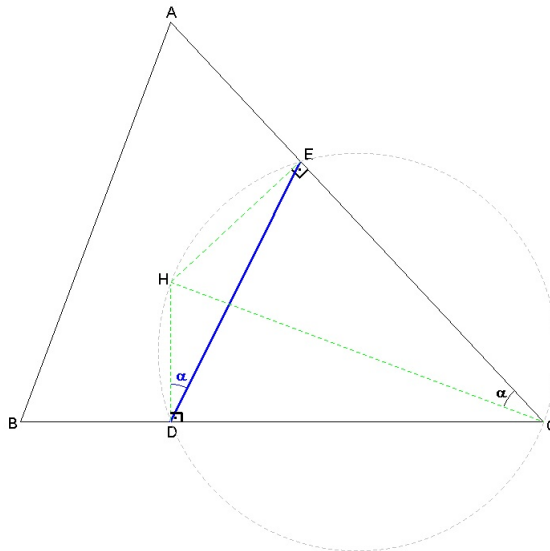


Figura 38: Equivalência dos ângulos  $E\hat{C}H$  e  $E\hat{D}H$

Logo,  $\begin{cases} \angle ECH = \angle ACF = \alpha \Rightarrow \angle ECH = \alpha \\ \angle ECH = \angle EDH \end{cases} \Rightarrow \angle ECH = \angle EDH = \alpha$

Juntando alguns dos resultados mostrados nas figuras 36 e 38, obtêm-se a figura 39, donde se pode enunciar:

A altura  $AD$  do  $\triangle ABC$  é a bissetriz de  $E\hat{D}F$ .

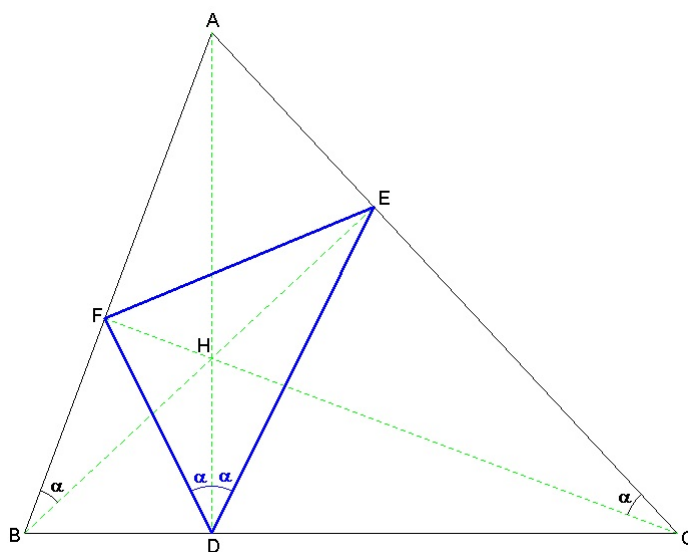


Figura 39: Altura  $AD$  é bissetriz do vértice  $D$  do Triângulo Órtico

Do mesmo modo, no  $\triangle EDF$ ,  $EB$  é a bissetriz de  $\widehat{DEF}$  e  $FC$  é a bissetriz de  $\widehat{EFD}$  (figura 40).

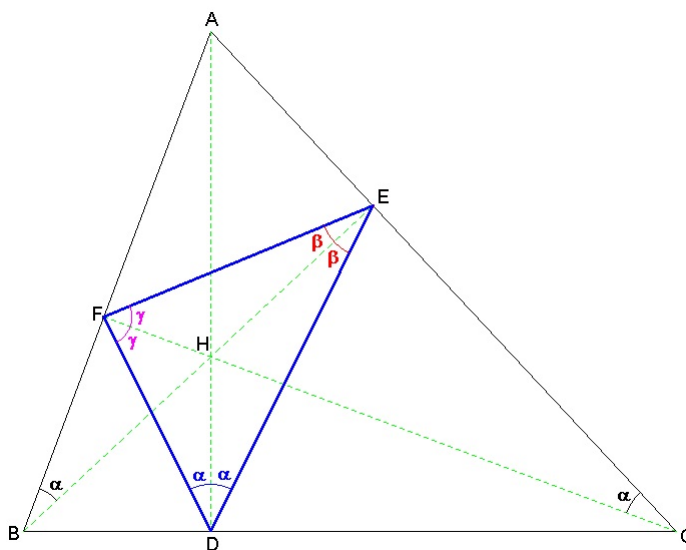


Figura 40: As alturas do  $\triangle ABC$  são bissetrizes do seu Triângulo Órtico

Essa propriedade do Triângulo Órtico contribuirá bastante para a parte final da proposta de apresentação do Círculo dos Nove Pontos.

### 3.2.2 Os Pontos de Euler

Mostrar-se-á a seguir que os Pontos de Euler não precisam ser admitidos, podendo ser encontrados com conhecimentos geométricos vistos até o oitavo ano do ensino fundamental.

Na figura 41,  $K$  é ponto de interseção do *Círculo dos Seis Pontos* com a altura ( $AD$ ). O propósito é verificar se  $K$  goza de alguma propriedade especial. No caso, pode-se sugerir que os alunos “meçam” com o compasso os segmentos  $AK$  e  $HK$ . Facilmente surgirão suspeitas de que  $K$  seja o ponto médio de  $AH$ . Com essa hipótese, ter-se-á um ponto de chegada, ou melhor, um objetivo bem específico a ser atingido. Logo, busque-se subsídios para tal empreitada. Particularmente, procurar-se-á demonstrar que  $FK$  a mediana relativa à hipotenusa  $AH$ .

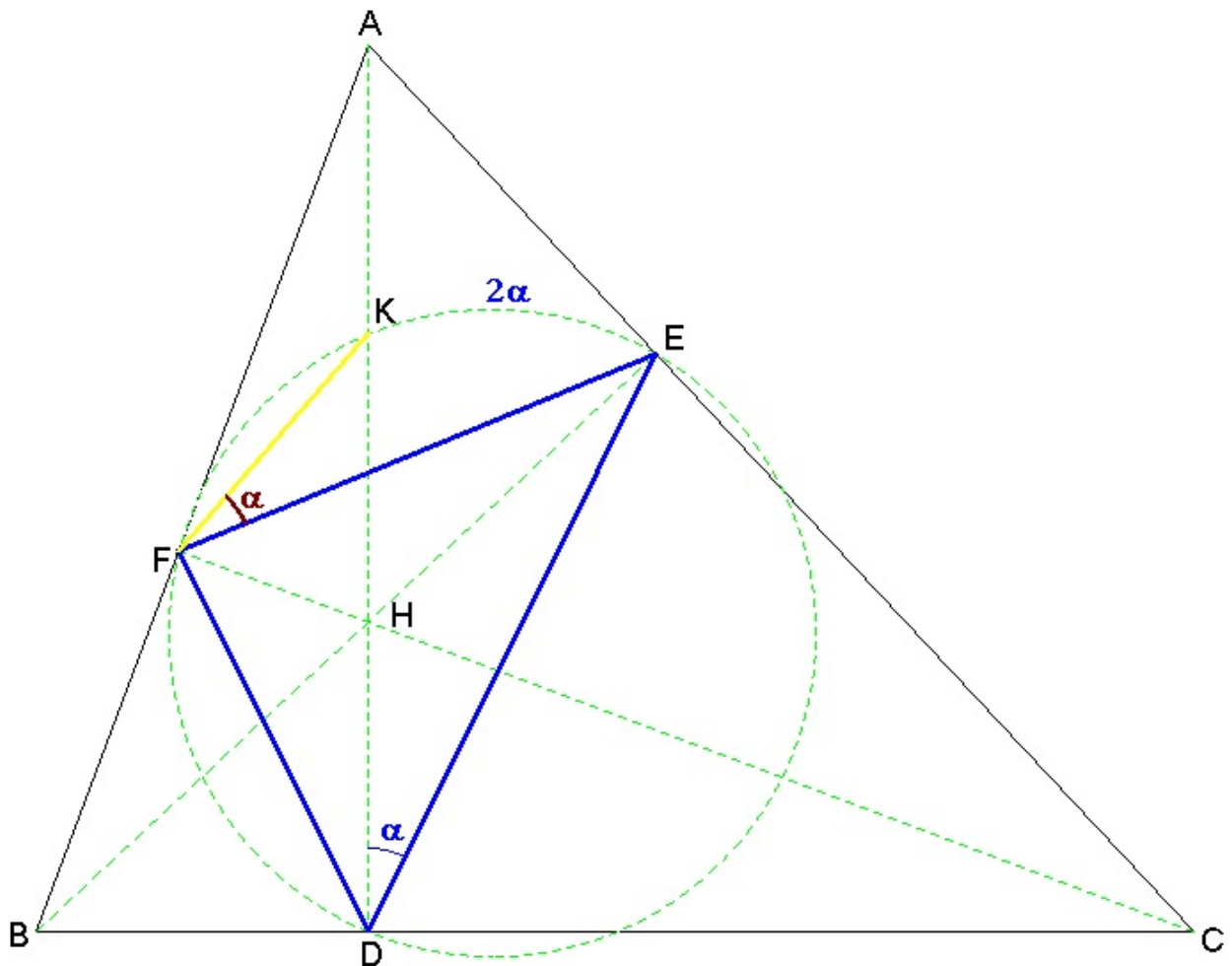


Figura 41:  $\widehat{EFK}$  e  $\widehat{EDK}$  têm mesma medida

Em consequência da propriedade do triângulo órtico:  $\widehat{EK} = 2\alpha$ .

Considere o segmento  $FK$ .

$\angle EFK = \angle EDK = \alpha$  (ângulos inscritos subtendendo arcos de mesma medida)

Ainda pelo triângulo órtico, marquemos os ângulos com medida  $\gamma$  (figura 42).

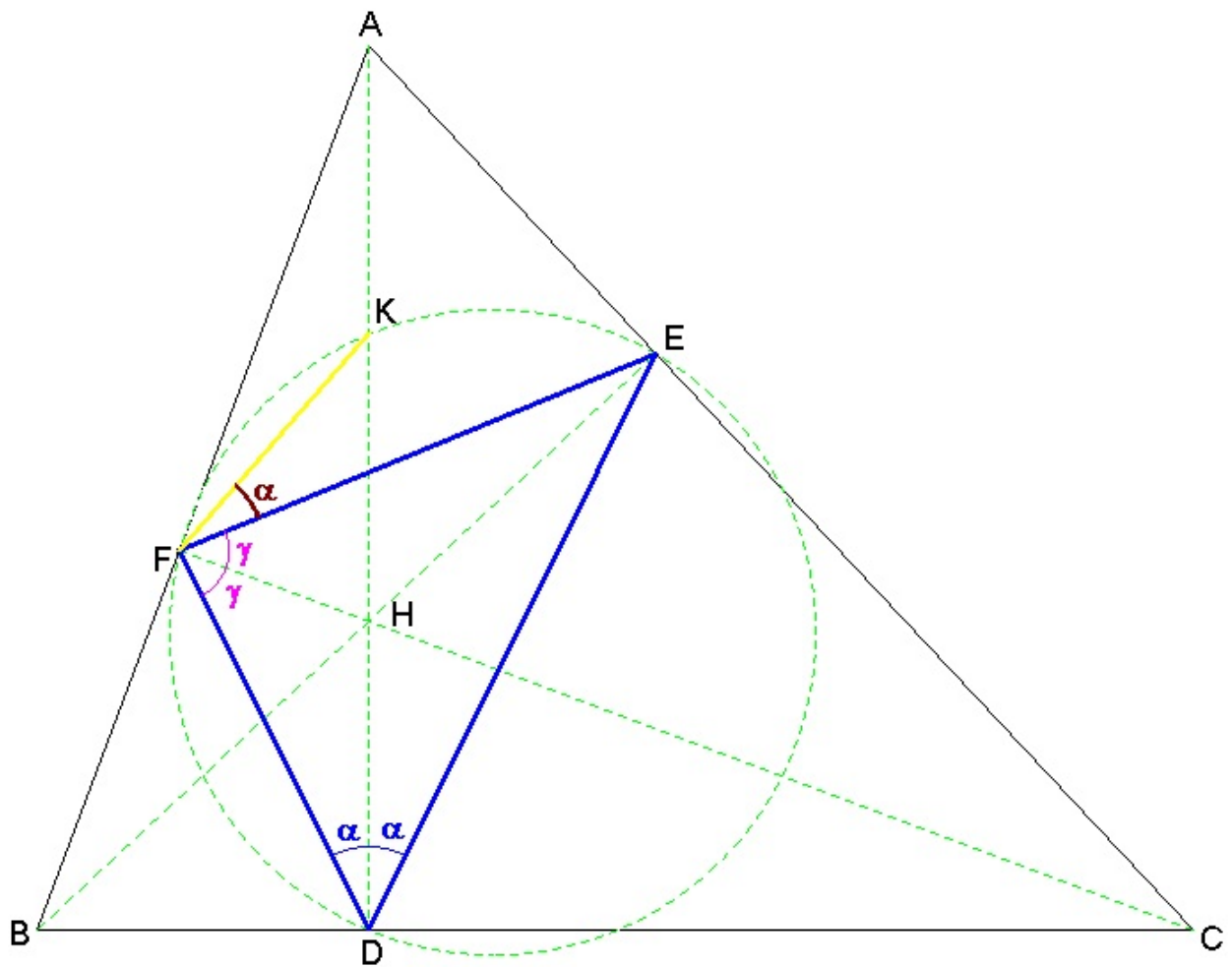


Figura 42: Marcando os ângulos com medida  $\gamma$



Na figura 43, Note que  $\widehat{FHA}$  é um ângulo externo do  $\triangle FHD \Rightarrow$   
 $\angle FHA = \angle FDH + \angle DFH = \alpha + \gamma$ .

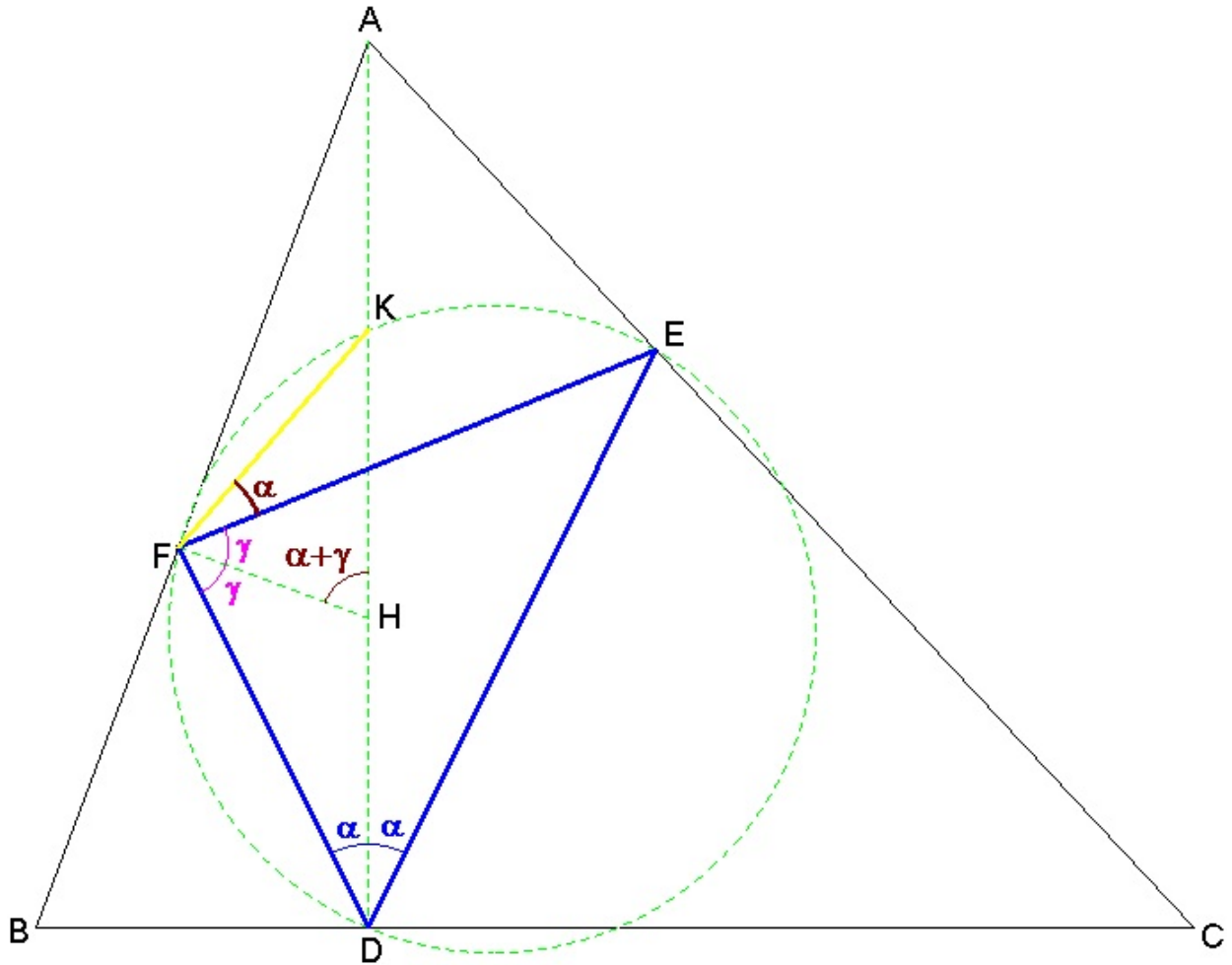


Figura 43:  $\widehat{DHC}$  e  $\widehat{FHA}$  têm mesma medida

Assim,  $\triangle HFK$  é isósceles  $\Rightarrow \overline{FK} = \overline{HK}$  (\*)

Em consequência, para o  $\triangle AFH$ :

$$\left. \begin{array}{l} \angle FAH = 90^\circ - \angle FHA = 90^\circ - (\alpha + \gamma) \\ \angle AFK = 90^\circ - \angle HFK = 90^\circ - (\alpha + \gamma) \end{array} \right\} \triangle AFK \text{ também é isósceles, onde}$$

$$\overline{FK} = \overline{AK} \quad (**)$$

Juntando (\*) e (\*\*):  $\overline{HK} = \overline{AK} \Rightarrow K$  é ponto médio do diâmetro  $AH$ .

No apêndice E, encontram-se as demonstrações análogas para os pontos L e M.

Assim sendo, podemos enunciar que:

“O *Círculo dos Seis Pontos* intersecta o segmento da altura, compreendido entre um vértice e o ortocentro, exatamente em seu ponto médio.”

Agora sim, é possível falar-se do *Círculo dos Nove Pontos*!

Logo, conclui-se que:

**É possível mostrar as diversas propriedades do *Círculo dos Nove pontos*, partindo-se do círculo que passa pelos pontos médios de um triângulo (acutângulo), sem o uso de *semelhança de triângulos*, bem como da *Reta de Euler*.**

No caso do triângulo retângulo, os Pontos de Euler estão todos sobre os catetos, coincidindo com os pontos médios e o vértice do ângulo reto (apêndice F).

Tendo em vista que, durante a pesquisa, não se achou referência que constasse a demonstração do *Círculo dos Nove pontos* para o caso do triângulo obtusângulo, deliberou-se incluir uma demonstração (apêndice G) sob a mesma ótica deste trabalho, quer seja, usando conhecimentos matemáticos vistos até o oitavo ano, sendo mais uma referência para o professor. Para tal, fundamentalmente, traça-se o *Círculo dos Seis Pontos* que passa pelos pontos médios do  $\triangle ABC$  e se demonstra que o círculo passa pelos:

- pés das alturas – por meio de trapézios inscritos no círculo;
- Pontos de Euler – por meio de ângulos na circunferência (inscrito, excêntrico interno e excêntrico externo).

No entanto, se o leitor julgá-la custosa, há uma distinta opção disposta no apêndice I, proposta pelo orientador deste trabalho. No caso, analisa-se a relação existente entre o ortocentro e os vértices de um triângulo, e conclui-se que é equivalente estudar a demonstração do *Círculo dos Nove pontos* para os triângulos acutângulo e obtusângulo.

Caso necessário, no apêndice G, há uma demonstração para a propriedade de que as alturas de um triângulo se intersectam no mesmo ponto.

## *Conclusões*

Diante do exposto, vê-se que, para o *Círculo dos Nove Pontos*:

- É possível a construção sem a admissão dos Pontos de Euler; e
- As propriedades podem ser demonstradas sem o conceito de Semelhança.

Quanto ao viés motivador, há um aspecto bem interessante no *Círculo dos Nove pontos* – as propriedades, tanto dos pés das alturas, como dos Pontos de Euler, podem estar bem sugestivas para os alunos, tais como:

- Ao se ligar um ponto (exceto os médios) de interseção do *Círculo dos Nove pontos* com um lado do triângulo, ao vértice oposto, o traçado sugerirá que esse segmento traçado é perpendicular ao lado e, portanto, uma altura do triângulo (sem levar em conta a probabilidade de algum aluno usar um dos lados perpendiculares do esquadro para tal) – culminando na necessidade de provar essa conjectura;
- Quanto aos Pontos de Euler, ao se lhes pedir que “meçam” com o compasso os segmentos  $KA$  e  $KH$ ,  $LB$  e  $LH$ , assim como  $MC$  e  $MH$ , é bastante provável que se lhes sugerirá que  $K$ ,  $L$  e  $M$  são pontos médios de  $AH$ ,  $BL$  e  $CM$ , respectivamente – novamente se requerendo provar essa outra suposição.

Para tanto, peça para os alunos usarem o esquadro para ligar um ponto de interseção do *Círculo dos Nove pontos* ao vértice oposto do triângulo. Aqueles que o fizerem pelos catetos do esquadro, poderão inferir a perpendicularidade (quando não pelo desenho do traçado) – quando um dos catetos coincidir com o lado do pé da perpendicular.

Somando-se a quantidade de teoremas e propriedades usados, temos uma atividade que:

- Requer uma variedade de conhecimentos geométricos, com características de bom exercício para revisão;
- Pode ser prolongada, inclusive com interrupções – uma vez que, por exemplo, foi mostrado que a prova de que os pés das perpendiculares pertencem ao círculo não depende da prova que os Pontos de Euler também pertencem ao mesmo círculo;
- Traz para o aluno do ensino fundamental um tema outrora rotulado como problema de alto grau de dificuldade – o que se, espera, aumente a sua confiança.

## *APÊNDICE A - Ponto de encontro das mediatrizes*

Em [?], página 101, encontra-se o

**TEOREMA 46:** Por três pontos não colineares passa uma e uma só circunferência.

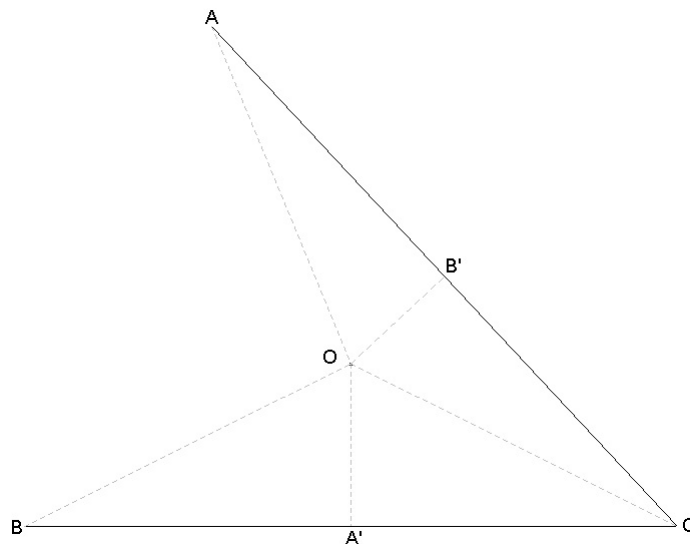


Figura 44: unicidade do ponto de interseção das mediatrizes

Sejam, conforme a figura 44, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não em linha reta. Assim, unindo  $A$  e  $B$  ao ponto  $C$ , fica formado o ângulo não nulo  $\widehat{ACB}$ . Tracemos as mediatrizes dos segmentos  $AC$  e  $BC$ . Tais mediatrizes, por serem perpendiculares aos lados  $BC$  e  $AC$  do ângulo  $\widehat{ACB}$ , formam entre si ângulos iguais ou suplementares do ângulo  $\widehat{ACB}$ <sup>1</sup>. Logo, elas não podem ser paralelas entre si ou coincidentes. Portanto, elas devem se encontrar em um ponto  $O$ . Os triângulos  $AOB'$  e  $COB'$  são congruentes (LAL), pois: são retângulos (por construção);  $OB'$  é comum e  $\overline{B'A} = \overline{B'C}$  (por construção). Logo,  $\overline{OA} = \overline{OC}$ .

Por outro lado, os triângulos  $OA'C$  e  $OA'B$  são congruentes (LAL), pois: são retângulos (por construção);  $OA'$  é comum e  $\overline{A'B} = \overline{A'C}$  (por construção). Logo,  $\overline{OB} = \overline{OC}$ .

<sup>1</sup>a igualdade ocorrendo para  $\angle ACB = 90^\circ$

Logo,  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$  e, por definição de circunferência, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão sobre um círculo de centro  $C$  e raio congruente com  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ . Tal circunferência é única porque as mediatrizes só podem ter o ponto  $O$  em comum, caso contrário coincidiriam, o que já demonstrou ser impossível. Este teorema equivale a dizer que **“as três mediatrizes dos lados de um triângulo cruzam-se em um mesmo ponto”**.

*APÊNDICE B – Todo trapézio inscrito num círculo é isósceles*

Aproveitando elementos da figura 44:

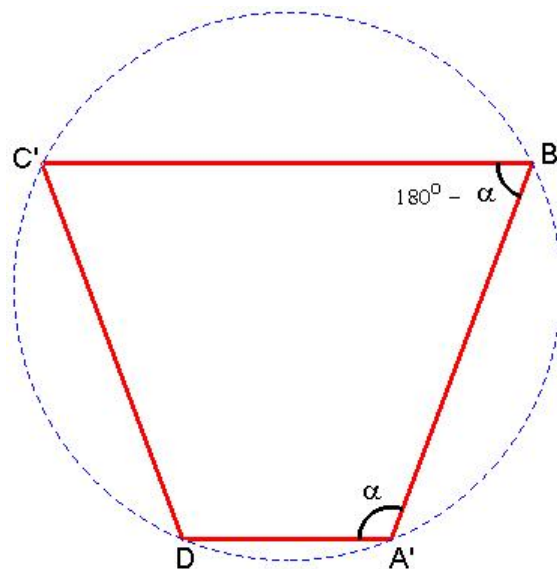


Figura 45: Os ângulos adjacentes aos lados paralelos são suplementares  
 $\angle DA'B'$  e  $\angle A'B'C'$  são suplementares — ângulos colaterais internos (figura 45).

Por outro lado, num quadrilátero inscrito, os ângulos opostos são suplementares (figura 46).

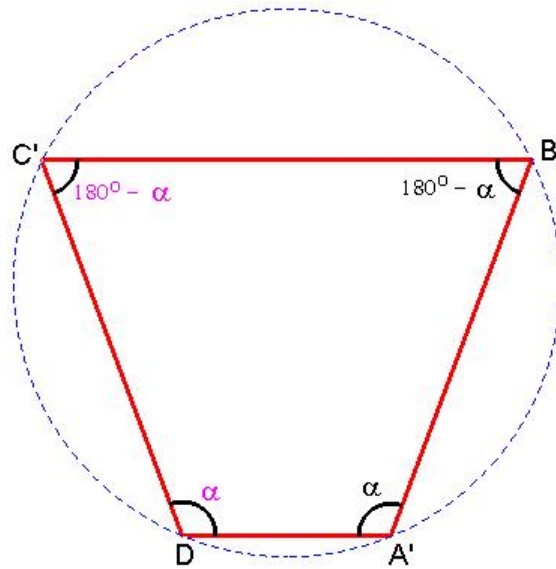


Figura 46: Se um quadrilátero é inscritível, os ângulos opostos são suplementares

Sendo assim, o quadrilátero  $A'B'C'D$  é um trapézio isósceles —  $\overline{A'B'} = \overline{DC'}$ .

## *APÊNDICE C – Propriedades da Mediana relativa à Hipotenusa*

Bem,  $DC'$  é mediana relativa ao lado  $AB$  do  $\triangle ABC$ , com a particularidade do comprimento de  $DC'$  ser a metade do comprimento do lado  $AB$ . Contudo, o mais importante é  $\overline{DC'} = \overline{BC'} = \overline{AC'}$  — uma vez que foram criados dois triângulos isósceles:  $\triangle ADC'$  e  $\triangle BDC'$  (figura 47).

Observemos agora o triângulo  $ADB$ . Note que  $\angle AC'D$  e  $\angle BC'D$  são ângulos externos de  $\triangle BDC'$  e  $\triangle ADC'$ , respectivamente.

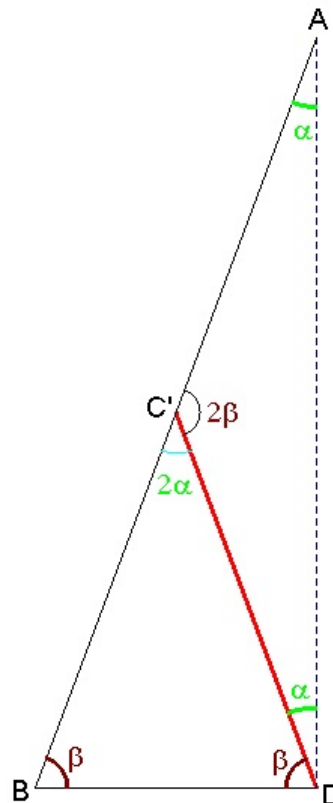


Figura 47: Mediana relativa à hipotenusa

Assim sendo, em quaisquer dos dois triângulos:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot (\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$



Particularmente,  $\angle ADB = 90^\circ$ .

\* Nunca é demais lembrar que foi obtido um resultado deveras interessante — num triângulo retângulo (ADB), o comprimento da mediana ( $\overline{DC'}$ ) relativa à hipotenusa é igual à metade do comprimento da hipotenusa ( $\overline{BC'} = \overline{AC'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$ ). E o melhor: com simples geometria angular aplicada a triângulos.

É claro que, dependendo do contexto do conteúdo programático, o professor pode optar por uma abordagem prévia mais simples dessa propriedade, tal como na (figura 48).

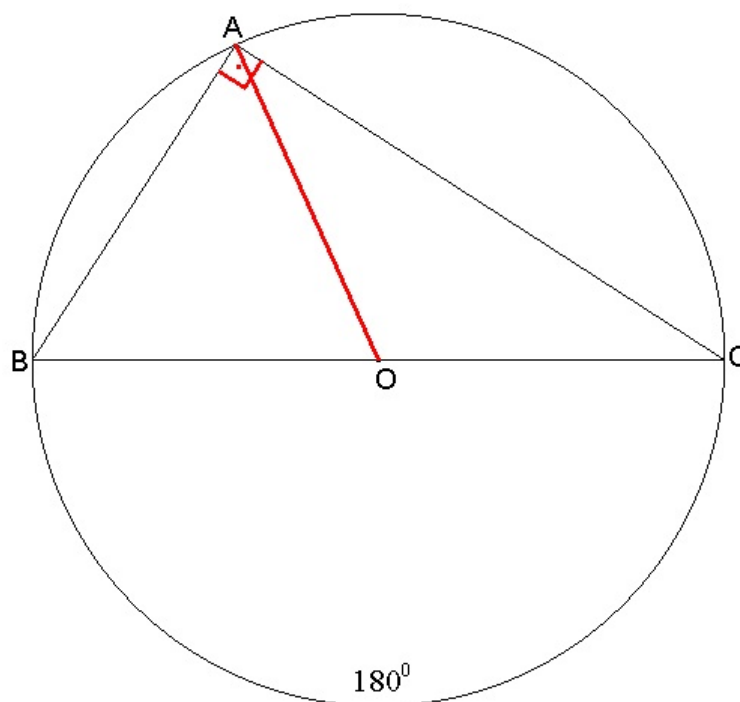


Figura 48: Mediana relativa à hipotenusa devido à inscribibilidade no círculo

Considere: O como centro da circunferência;  $BC$  um diâmetro;  $B\hat{A}C$  um ângulo inscrito subentendendo o arco  $\widehat{BC}$  (uma semicircunferência). Por conseguinte,  $\angle BAC = 90^\circ$  e a mediana ( $AO$ ) relativa à hipotenusa é tal que  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} =$  raio.

**APÊNDICE D – Os pontos  $E$  e  $F$  são pés das alturas  $BE$  e  $CF$**

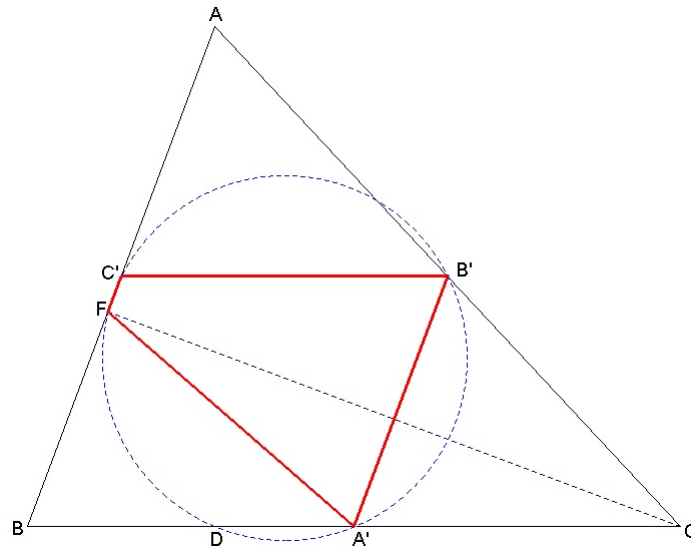


Figura 49: Quadrilátero inscrito determinado por  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $F$

$$\begin{cases} A'B' \parallel FC' & (\text{A'B'C'F é um trapézio}) \\ \overline{B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} & \text{(figura 49)} \end{cases}$$

Mas,  $A'B'C'F$  está inscrito em  $\lambda \Rightarrow A'B'C'F$  é um trapézio isósceles.

Logo,  $\overline{B'C'} = \overline{FA'}$ , ou seja,  $FA'$  é mediana relativa a  $BC$ , pois:

$$\overline{FA'} = \overline{BA'} = \overline{CA'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}.$$

Por outro lado, se uma mediana tem o mesmo comprimento que a metade do lado a que é relativa, então o triângulo é retângulo — o ângulo de  $90^\circ$  estando no vértice do triângulo, donde se originou a mediana (apêndice C). Em outras palavras,  $\angle BFC = 90^\circ \Rightarrow F$  é o pé da altura  $CF$ .

Encontrar-se-á o mesmo resultado se, no  $\triangle BFC$ , for observado que  $FA'$  é mediana relativa à hipotenusa  $BC$ .

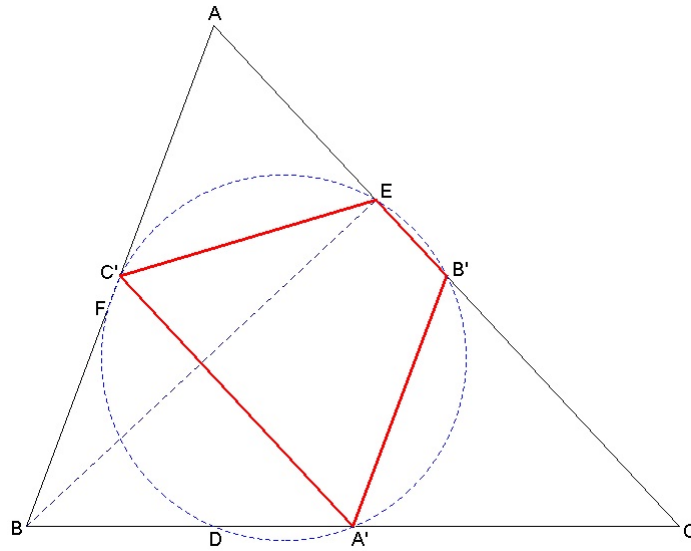


Figura 50: Quadrilátero inscrito determinado por  $A'$ ,  $B'$ ,  $E$  e  $C'$

$$\left\{ \begin{array}{l} A'C' // EB' \quad (A'B'EC' \text{ é um trapézio}) \\ \overline{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \end{array} \right. \quad (\text{figura 50})$$

Mas,  $A'B'EC'$  está inscrito em  $\lambda \Rightarrow A'B'EC'$  é um trapézio isósceles.

Logo,  $\overline{A'B'} = \overline{EC'}$ , ou seja,  $EC'$  é mediana relativa a  $AB$ , pois:

$$\overline{EC'} = \overline{AC'} = \overline{BC'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}.$$

Por outro lado, se uma mediana tem o mesmo comprimento que a metade do lado a que é relativa, então o triângulo é retângulo – o ângulo de  $90^\circ$  estando no vértice do triângulo, donde se originou a mediana (apêndice C). Em outras palavras,  $\angle BEC' = 90^\circ \Rightarrow E$  é o pé da altura  $BE$ .

Encontrar-se-á o mesmo resultado se, no  $\triangle AEB$ , for observado que  $EC'$  é mediana relativa à hipotenusa  $AB$ .

*APÊNDICE E - O Círculo dos Nove Pontos  
passa pelos pontos L e M*

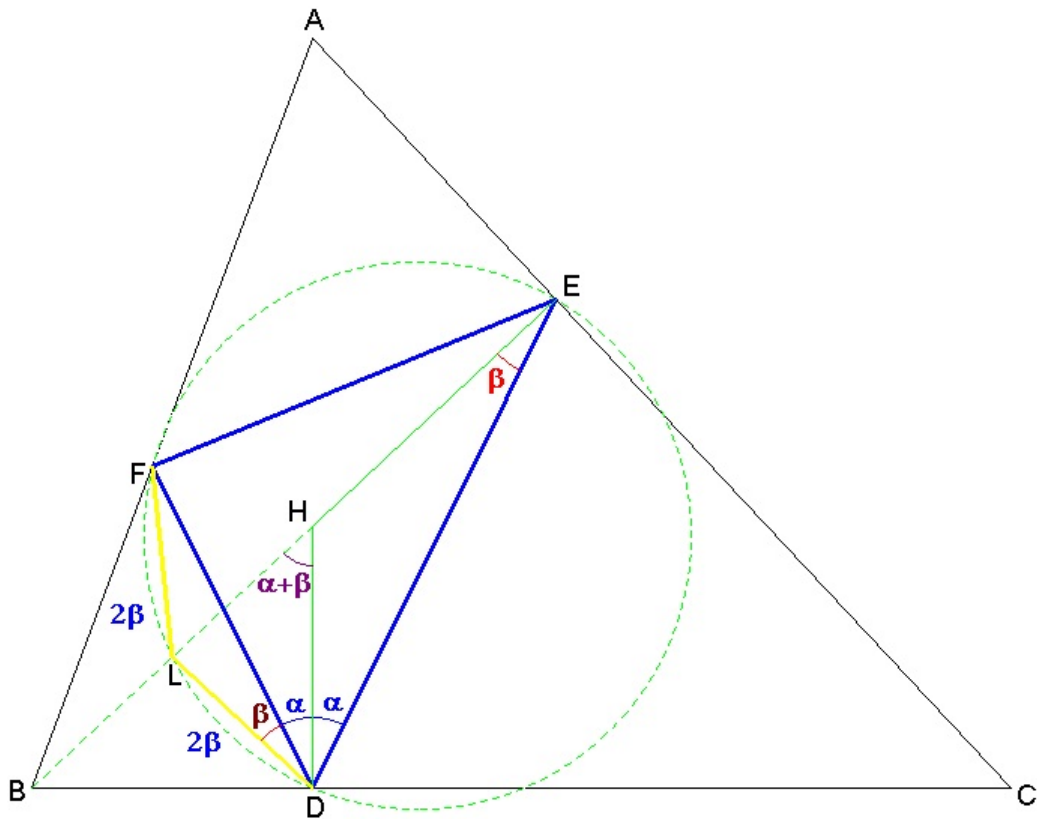


Figura 51: *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo ponto L

Na figura 51, note que  $\widehat{BHD}$  é um ângulo externo do  $\triangle EHD \Rightarrow$   
 $\angle BHD = \angle HDE + \angle HED = \alpha + \beta$ .

Assim,  $\triangle DLH$  é isósceles  $\Rightarrow \overline{DL} = \overline{HL}$  (\*)

Em consequência, para o  $\triangle DLB$ :

$$\left. \begin{array}{l} \angle DBH = 90^\circ - \angle DHB = 90^\circ - (\alpha + \beta) \\ \angle BDL = 90^\circ - \angle HDL = 90^\circ - (\alpha + \beta) \end{array} \right\} \triangle DLB \text{ também é isósceles, onde} \\ \overline{DL} = \overline{BL} \quad (**)$$

Juntando (\*) e (\*\*):  $\overline{HL} = \overline{BL} \Rightarrow L$  é ponto médio de  $BH$ .

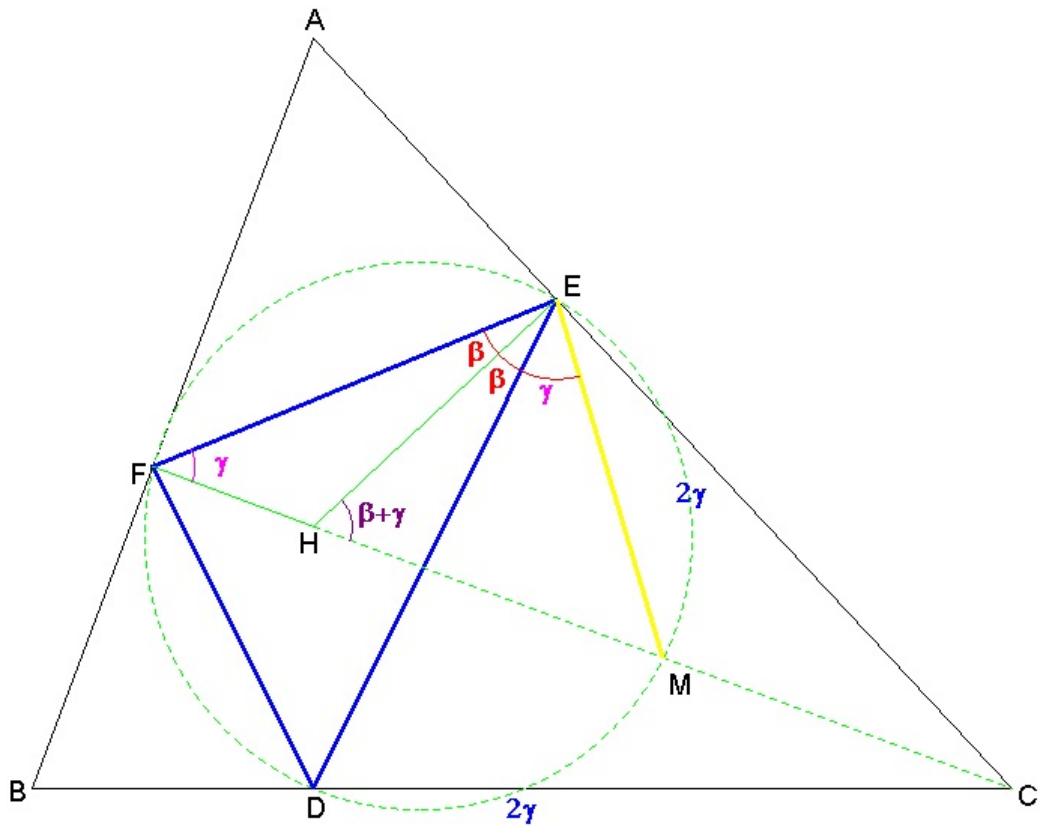


Figura 52: *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo ponto M

Na figura 52, note que  $\widehat{EHC}$  é um ângulo externo do  $\triangle FHE \Rightarrow \angle EHC = \angle FEH + \angle EFH = \beta + \gamma$ .

Assim,  $\triangle EHM$  é isósceles  $\Rightarrow \overline{EM} = \overline{HM}$  (●)

Em conseqüência, para o  $\triangle EMC$ :

$$\left. \begin{aligned} \angle ECH &= 90^\circ - \angle EHC = 90^\circ - (\beta + \gamma) \\ \angle CEM &= 90^\circ - \angle HEM = 90^\circ - (\beta + \gamma) \end{aligned} \right\} \triangle EMC \text{ também é isósceles, onde } \overline{EM} = \overline{CM} \quad (\bullet\bullet)$$

Juntando (●) e (●●):  $\overline{HM} = \overline{CM} \Rightarrow M$  é ponto médio de  $CH$ .

*APÊNDICE F – Círculo dos Nove Pontos –  
aplicado ao Triângulo  
Retângulo*

Conforme se vê na Figura 53, vários pontos são coincidentes – o que tira um pouco a finalidade da proposta desse trabalho. É claro que, dependendo da turma em questão, esse caso pode ser usado como motivação para o estudo do círculo dos nove pontos.

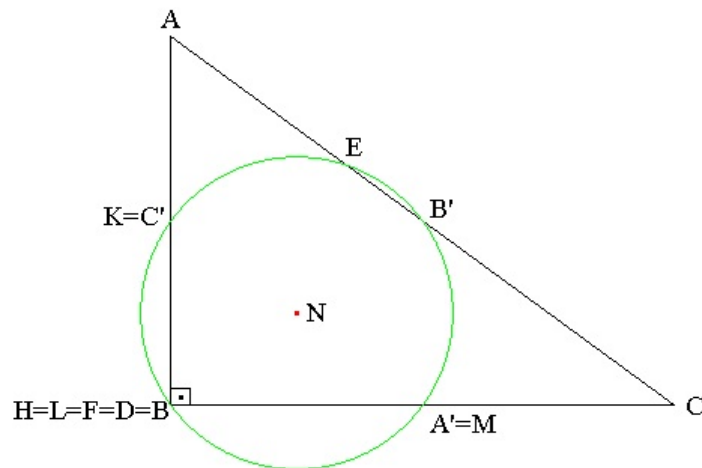


Figura 53: *Círculo dos Nove Pontos* num triângulo retângulo

*APÊNDICE G – Círculo dos Nove Pontos –  
aplicado ao Triângulo  
Obtusângulo*

**G.1 Encontrando os pés das alturas**

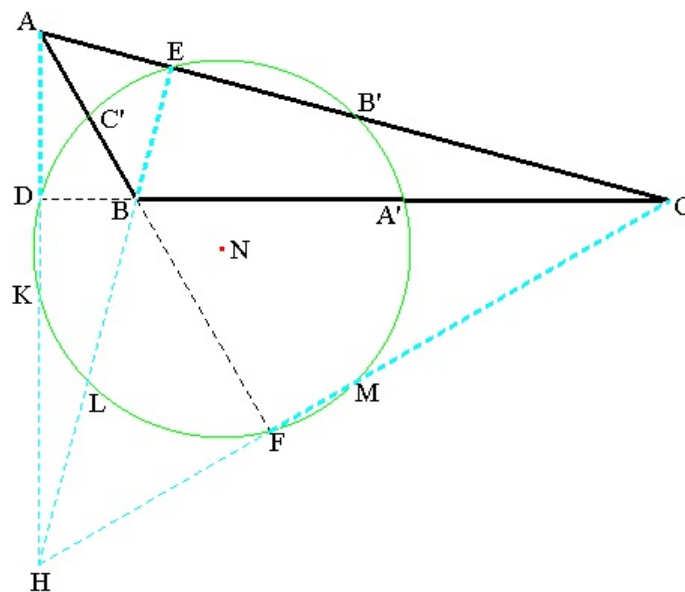


Figura 54: Círculo dos Nove Pontos no Triângulo Obtusângulo

O caso do triângulo obtusângulo (figura 54) é um pouco atípico, uma vez que o ortocentro estará normalmente distante do interior do triângulo. Porém, nada impede que os alunos façam uma constatação com compasso, ou mesmo com régua, de propriedades válidas no triângulo acutângulo. Isso será possível justamente se considerarmos já a construção do círculo que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo. É surpreendente para o aluno verificar que  $\overline{KH} = \overline{KA}$ ,  $\overline{LH} = \overline{LB}$  e  $\overline{MH} = \overline{MC}$ .

Lembramos que a metodologia segue a proposta do trabalho, quer seja: a partir dos três pontos médios do  $\triangle ABC$ , construímos um círculo que contenha esses pontos.

Observe a figura 55:

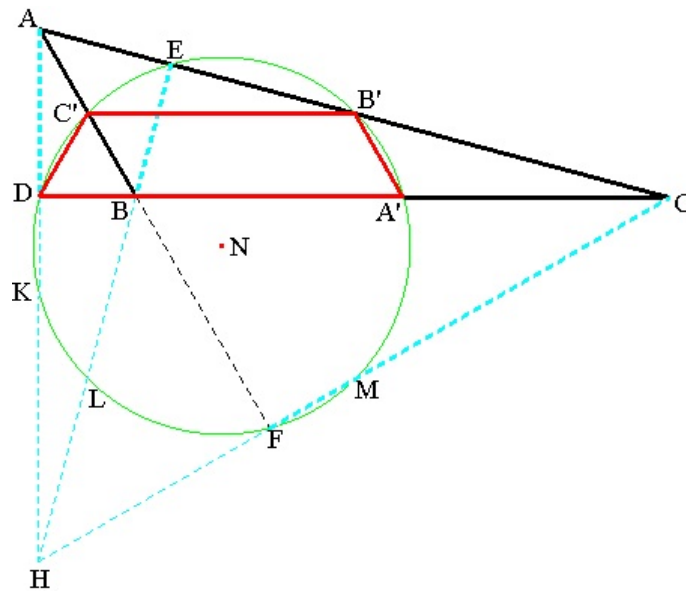


Figura 55: O Círculo dos Nove Pontos passa pelo pé da altura relativa ao lado  $BC$

$B'C' // AB \Rightarrow B'C' // A'D$ . Logo,  $A'B'C'D$  é um trapézio isósceles e  $\overline{A'B'} = \overline{DC'}$ .

Mas,  $\overline{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{AC'} = \overline{BC'}$ . Então,  $\overline{DC'} = \overline{BC'} = \overline{AC'}$  e, conforme mostrado no apêndice  $C$ , o  $\triangle ADB$  é retângulo em  $D$  (pois a mediana  $DC'$  tem a mesma medida da metade do segmento que lhe é relativo) e, por conseguinte,  $AD$  é altura do lado  $BC$ . Mais ainda: o *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo pé ( $D$ ) da altura relativa ao lado  $BC$ .

Observe a figura 56:

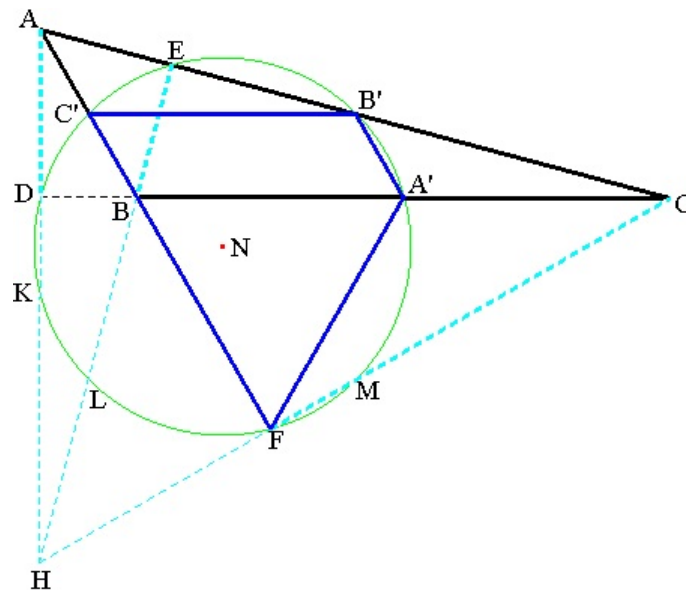


Figura 56: O Círculo dos Nove Pontos passa pelo pé da altura relativa ao lado  $AB$

$A'B' // BC' \Rightarrow A'B' // C'F$ . Logo,  $A'B'C'F$  é um trapézio isósceles e  $\overline{B'C'} = \overline{A'F}$ .



Mas,  $\overline{B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB} = \overline{BA'} = \overline{CA'}$ . Então,  $\overline{FA'} = \overline{BA'} = \overline{CA'}$  e, conforme mostrado no apêndice C, o  $\triangle BFC$  é retângulo em  $F$  (pois a mediana  $FA'$  tem a mesma medida da metade do segmento que lhe é relativo) e, por conseguinte,  $CF$  é altura do lado  $AB$ . Mais ainda: o *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo pé ( $F$ ) da altura relativa ao lado  $BC$ .

Observe a Figura 57:

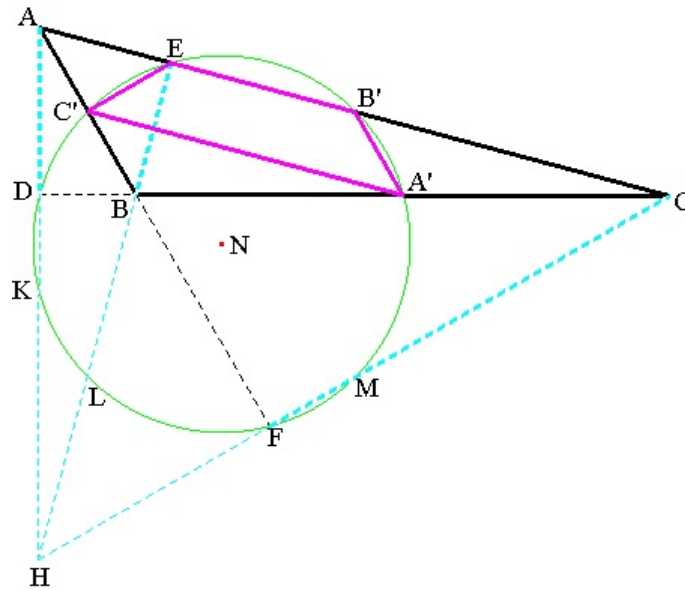


Figura 57: O *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo pé da altura relativa ao lado  $AC$

$A'C' // AC \Rightarrow A'C' // B'E$ . Logo,  $A'B'EC'$  é um trapézio isósceles e  $\overline{A'B'} = \overline{C'E}$ .

Mas,  $\overline{A'B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \overline{AC'} = \overline{BC'}$ . Então,  $\overline{EC'} = \overline{BC'} = \overline{AC'}$  e, conforme mostrado no apêndice C, o  $\triangle AEB$  é retângulo em  $E$  (pois a mediana  $EC'$  tem a mesma medida da metade do segmento que lhe é relativo) e, por conseguinte,  $BE$  é altura do lado  $AC$ . Mais ainda: o *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo pé ( $E$ ) da altura relativa ao lado  $AC$ .

## G.2 Encontrando os Pontos de Euler

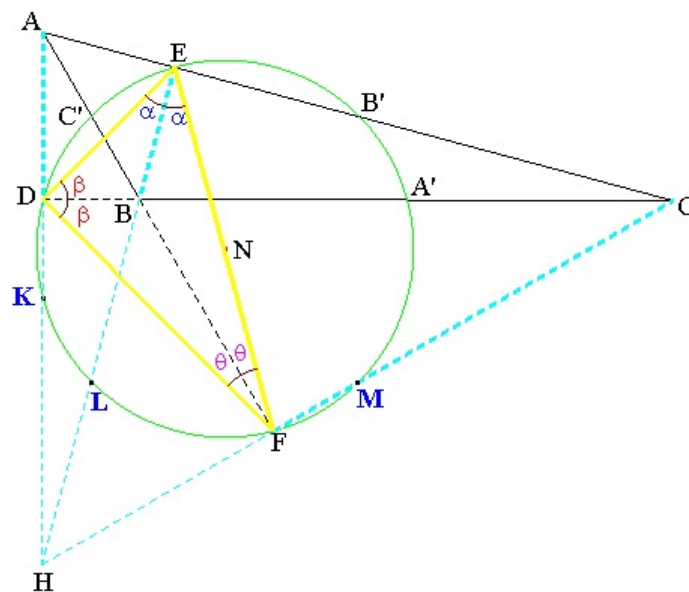


Figura 58: O Triângulo Órtico e os pontos de Euler no Triângulo Obtusângulo

Na figura 58, ligamos os pés das alturas para obter o triângulo órtico, conforme visto no item 3.2.1, onde os segmentos  $HE$ ,  $CD$  e  $AF$  são bissetrizes do triângulo órtico.

É fácil ver que:

$$2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180^\circ \Rightarrow 2 \cdot (\alpha + \beta + \theta) = 180^\circ \Rightarrow (\alpha + \beta + \theta) = 90^\circ.$$

Note que os quadriláteros  $AEBD$ ,  $HDBF$  e  $CEBF$  são inscritíveis, pois têm dois pares de ângulos retos cada um (figura 59).

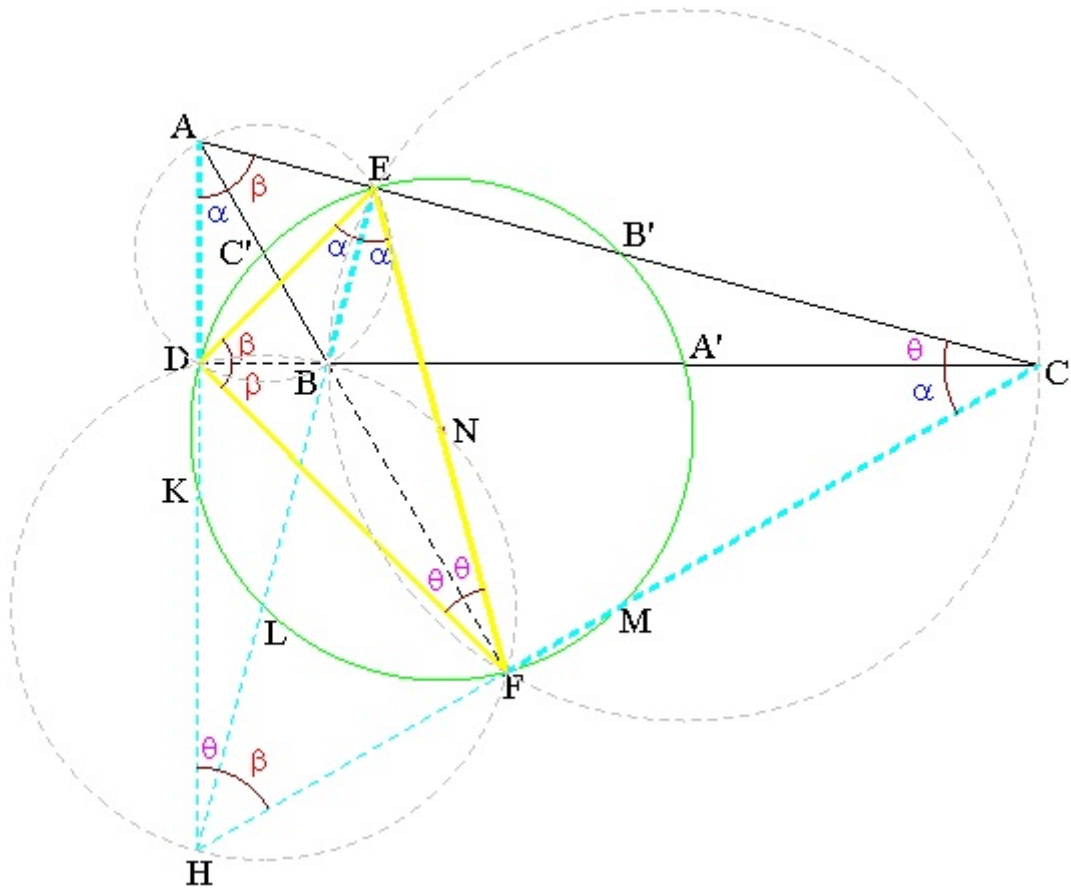


Figura 59: Inscritibilidade dos quadriláteros  $AEBD$ ,  $HDBF$  e  $CEBF$

A identificação dos ângulos nos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  foi feita a partir da análise dos arcos capazes  $\widehat{BD}$ ,  $\widehat{BE}$  e  $\widehat{BF}$ .

Agora, um momento importante:  $\angle MFC' = 90^\circ \Rightarrow C'M$  é um diâmetro do círculo (figura 60).

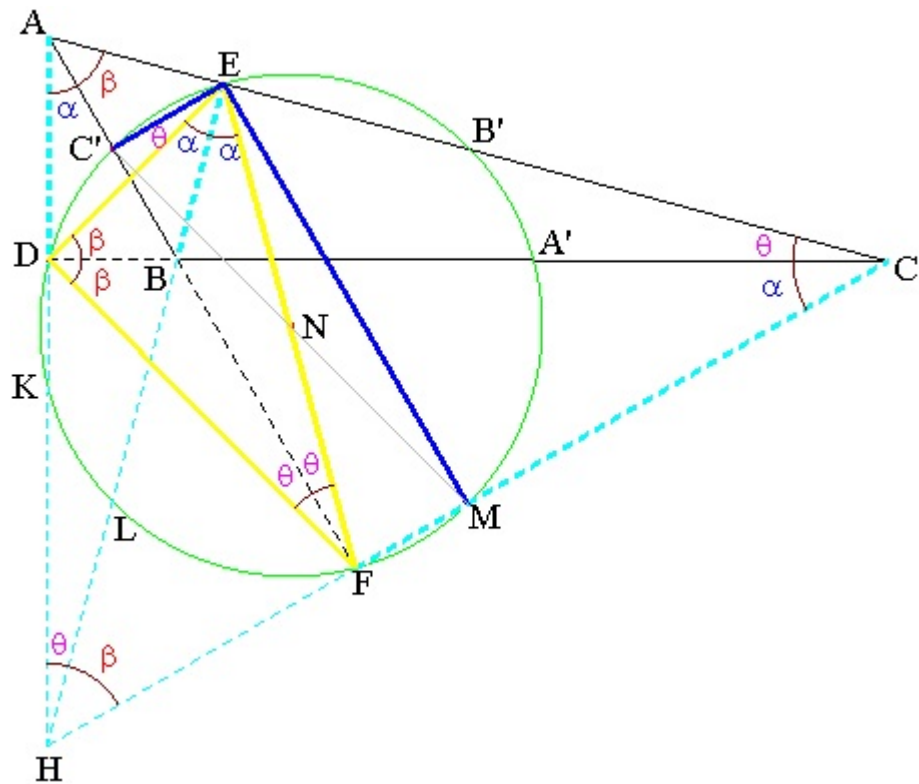


Figura 60: Mostrando que  $M$  é ponto médio de  $HC$

Por conseguinte,  $\angle C'EM = 90^\circ$ .

Ora,  $\widehat{C'ED}$  é um ângulo inscrito subtendendo  $\widehat{C'D} \Rightarrow \angle C'ED = \theta$ .

Podemos então dizer que  $\angle MEF + \alpha + \alpha + \theta = 90^\circ$ .

No entanto, sabemos que  $\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$ .

Assim,  $\angle MEF + \alpha + \alpha + \theta = \alpha + \beta + \theta \Rightarrow \angle MEF + \alpha = \beta \Rightarrow \angle MEF = \beta - \alpha$ .

Ainda que não pareça, o resultado é deveras importante. Note que:

$\angle MEH = \angle MEF + \angle FEH = (\beta - \alpha) + \alpha = \beta \Rightarrow \angle MEH = \beta$ , o que mostra que o  $\triangle EMH$  é isósceles; e, conforme a figura 61, o  $\triangle EMC$  também é isósceles.

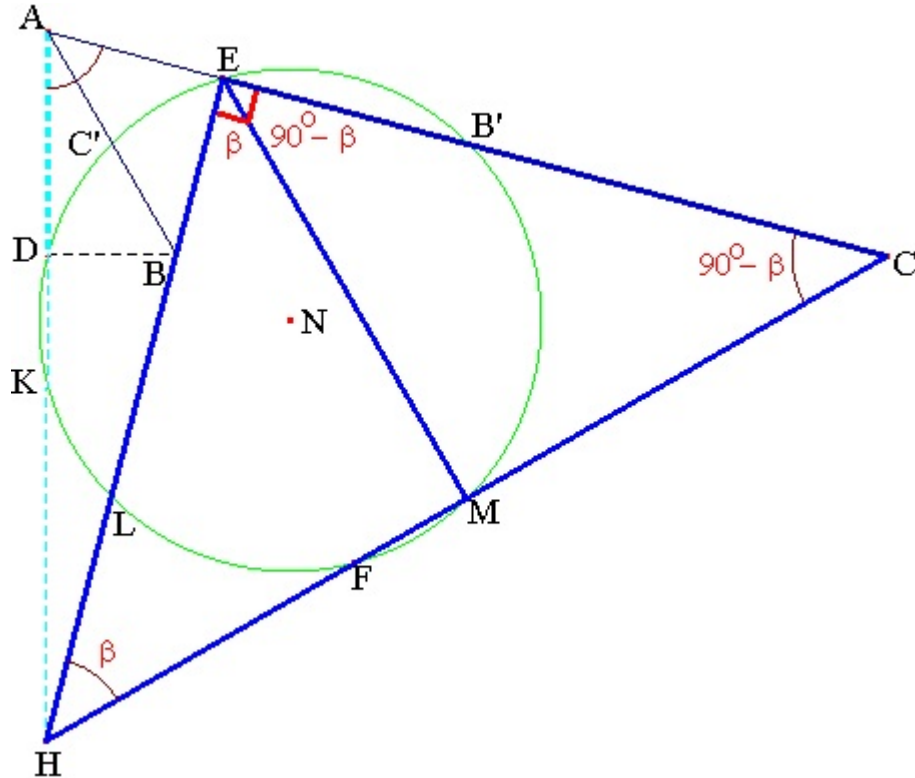


Figura 61:  $EM$  é mediana relativa à hipotenusa  $HC$

Logo,  $EM$  é mediana relativa à hipotenusa  $CH$  e, por fim  $M$  é ponto médio de  $HC$ , ou seja:.

O *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo ponto médio ( $M$ ) do segmento que une o vértice  $C$  ao ortocentro ( $H$ ).

Raciocinando de forma análoga na figura 62, se soubermos o valor do ângulo  $\widehat{K\hat{F}D}$ , provaremos que  $KF$  é mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo  $AFH$ . Para tanto, identifiquemos os arcos  $\widehat{DK}$  e  $\widehat{KL}$ .

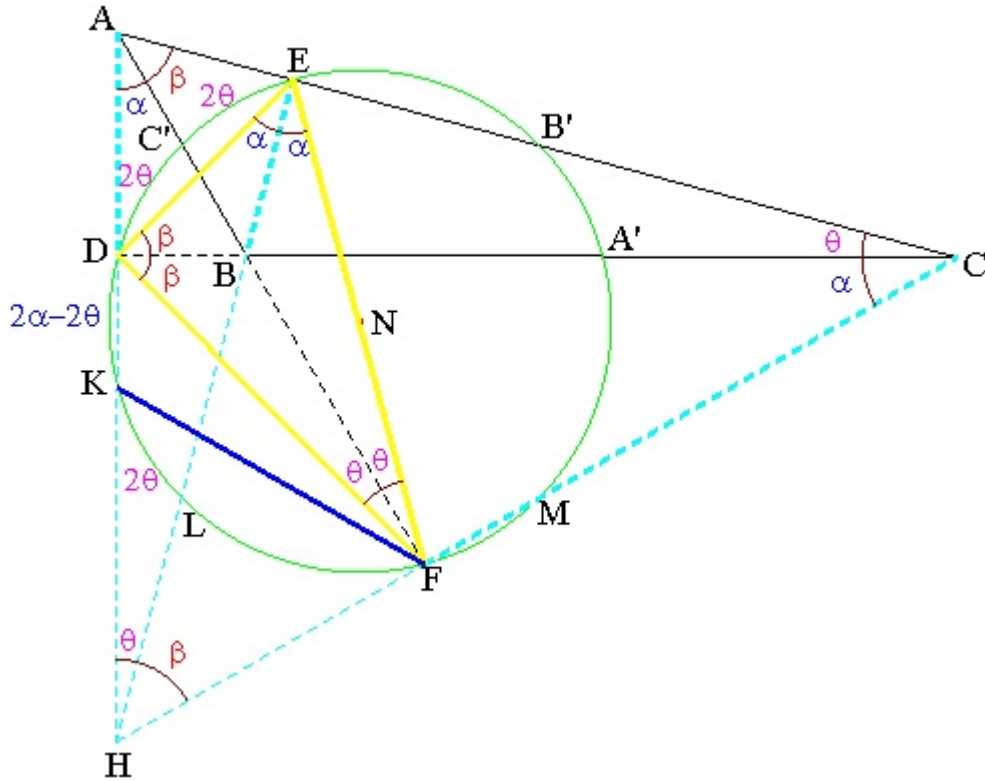


Figura 62: Mostrando que  $K$  é ponto médio de  $AH$

É fácil ver que  $\angle DEB = \frac{\widehat{DL}}{2} \Rightarrow 2\alpha = \widehat{DL}$ . Para conhecermos a medida do arco  $\widehat{KL}$ , apliquemos a fórmula do ângulo excêntrico externo:

$$\angle AHE = \frac{\widehat{DE} - \widehat{KL}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{4\theta - \widehat{KL}}{2} \Rightarrow 2\theta = 4\theta - \widehat{KL} \Rightarrow \widehat{KL} = 2\theta$$

Com isso, podemos afirmar que:

$$\widehat{DK} + \widehat{KL} = 2\alpha \Rightarrow \widehat{DK} + 2\theta = 2\alpha \Rightarrow \widehat{DK} = 2\alpha - 2\theta$$

$$\text{Nesse caso, } \angle KFD = \frac{\widehat{DK}}{2} = \frac{2\alpha - 2\theta}{2} \Rightarrow \angle KFD = \alpha - \theta.$$

Em consequência,  $\angle KFA = \angle KFD + \theta = (\alpha - \theta) + \theta = \alpha \Rightarrow \angle KFA = \alpha$ , o que mostra que o  $\triangle KFA$  é isósceles; e, conforme a figura 63, o  $\triangle KFH$  também é isósceles.

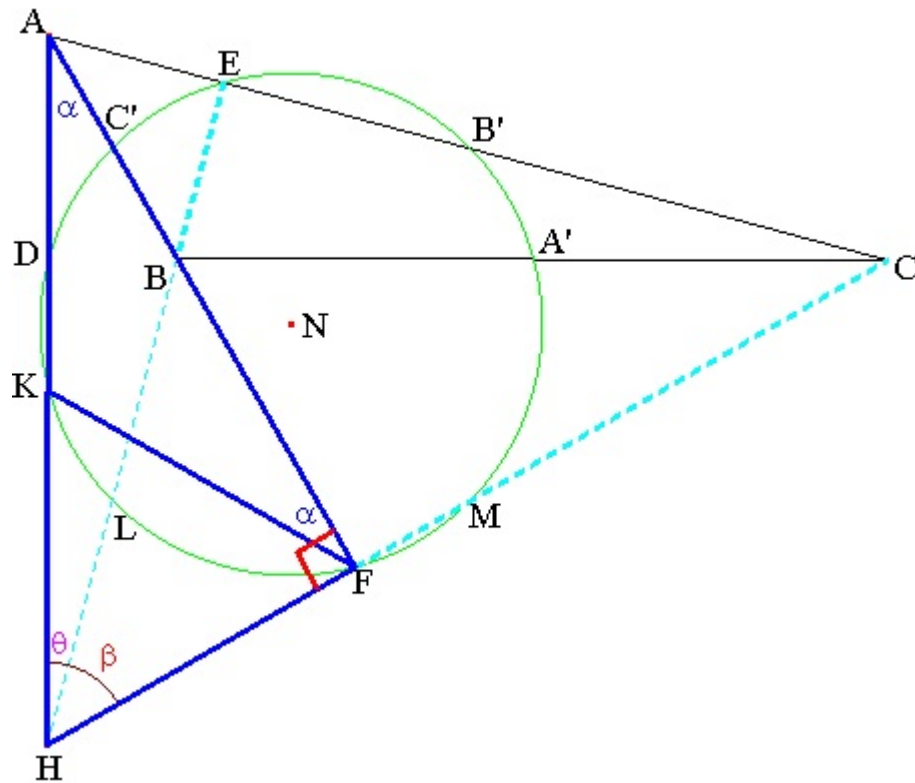


Figura 63:  $FK$  é mediana relativa à hipotenusa  $AH$

Logo,  $FK$  é mediana relativa à hipotenusa  $AH$  e, por fim  $K$  é ponto médio de  $AH$ , ou seja:.

O *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo ponto médio ( $K$ ) do segmento que une o vértice  $A$  ao ortocentro ( $H$ ).

Na figura 64, é fácil ver que  $\angle DFL = \alpha$ .

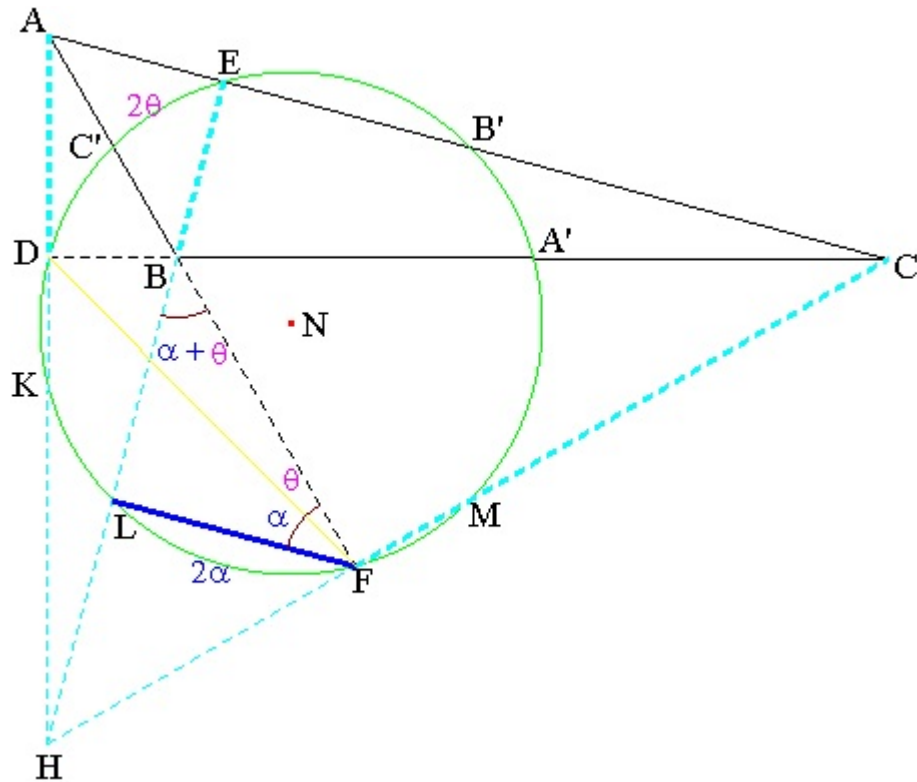


Figura 64: Mostrando que  $L$  é ponto médio de  $BH$

Por conseguinte,  $\angle LFB = \alpha + \theta$ . Além disso, o ângulo excêntrico interno  $\widehat{LBF}$  é:

$$\angle LBF = \frac{\widehat{LF} + \widehat{C'E}}{2} = \frac{2\alpha + 2\theta}{2} \Rightarrow \angle LBF = \alpha + \theta$$



Nesse caso,  $\angle LFB = \alpha + \theta = \angle LBF$ , o que mostra que o  $\triangle LFB$  é isósceles; e, conforme a figura 65, o  $\triangle LFH$  também é isósceles.

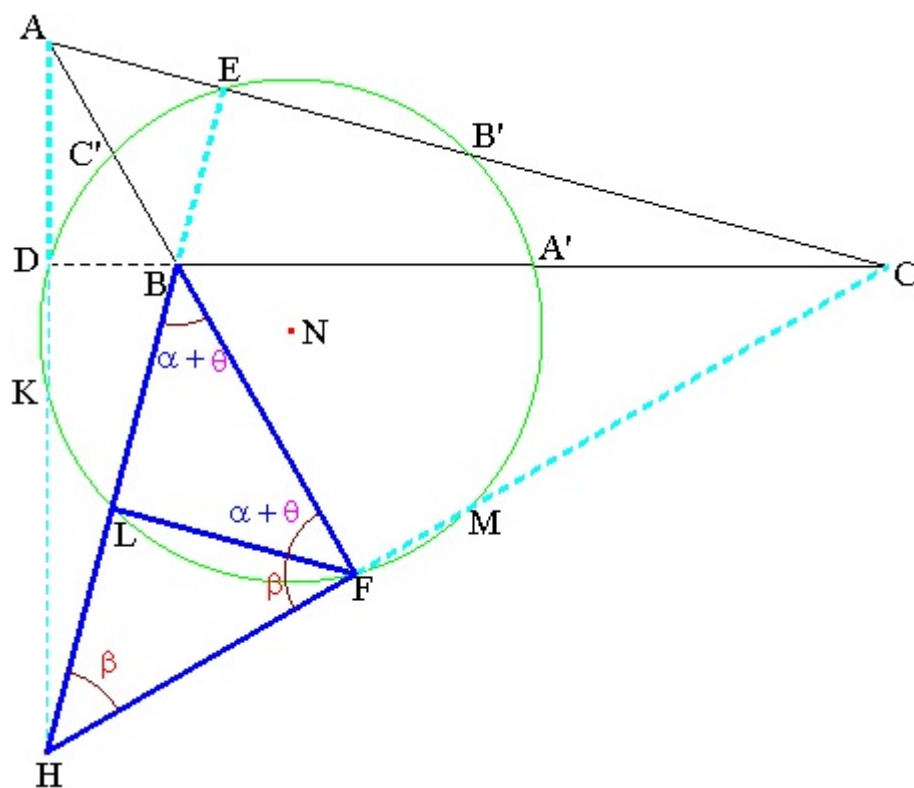


Figura 65:  $FK$  é mediana relativa à hipotenusa  $BH$

Logo,  $FL$  é mediana relativa à hipotenusa  $BH$  e, por fim  $L$  é ponto médio de  $BH$ , ou seja:

O *Círculo dos Nove Pontos* passa pelo ponto médio ( $L$ ) do segmento que une o vértice  $B$  ao ortocentro ( $H$ ).

## G.3 A Reta de Euler

Na Figura 66, já sabemos que  $M$  é ponto médio de  $HC$ . Por outro lado, o desenho sugere que  $MN \parallel OC$ . Para tal, provemos que  $\angle HMN = \angle HCO$ .

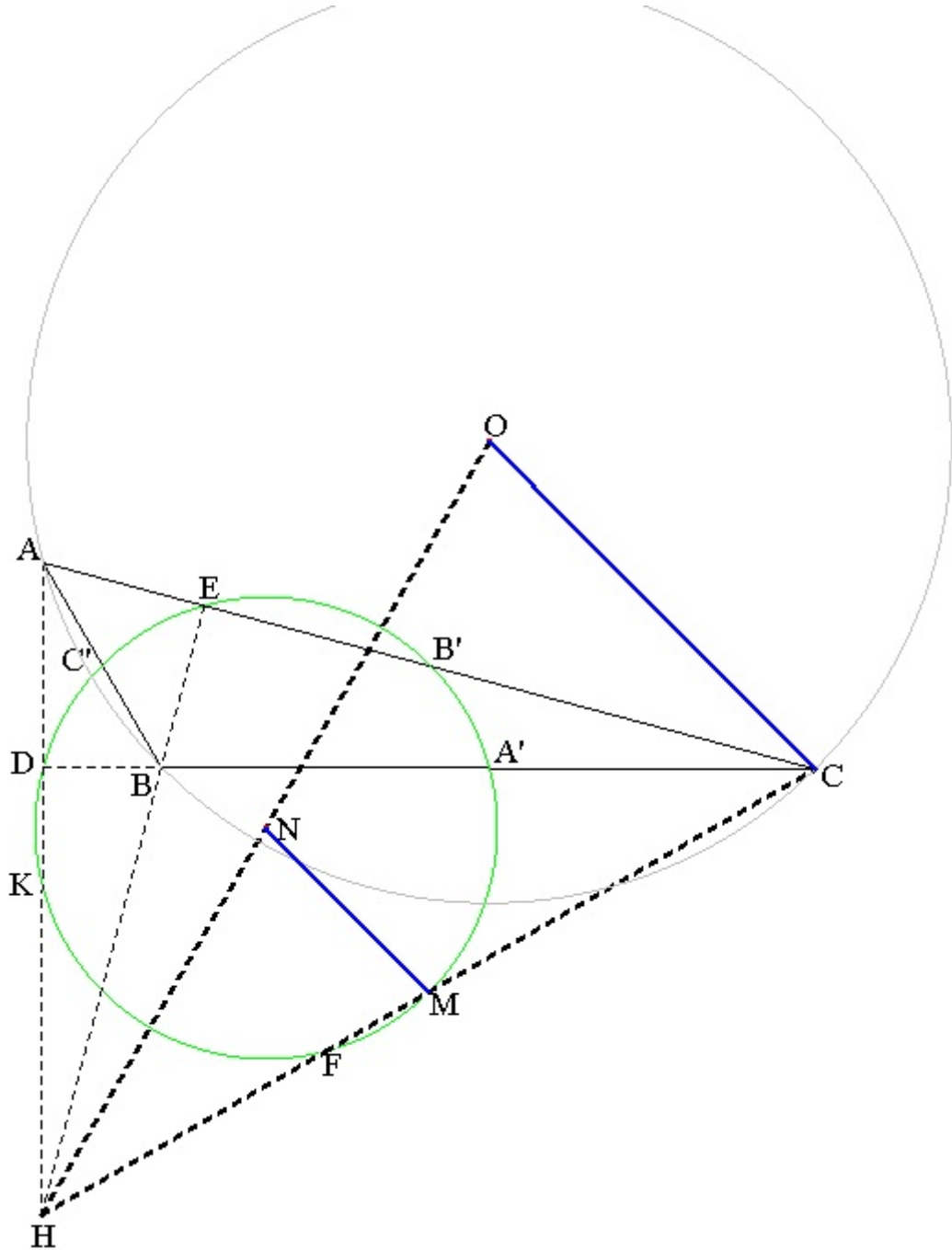


Figura 66: O centro ( $N$ ) do *Círculo dos Nove Pontos* pertence à Reta de Euler

Na Figura 67, identifiquemos os ângulos nos vértices  $A$ ,  $H$  e  $C$  conforme já encontrado:

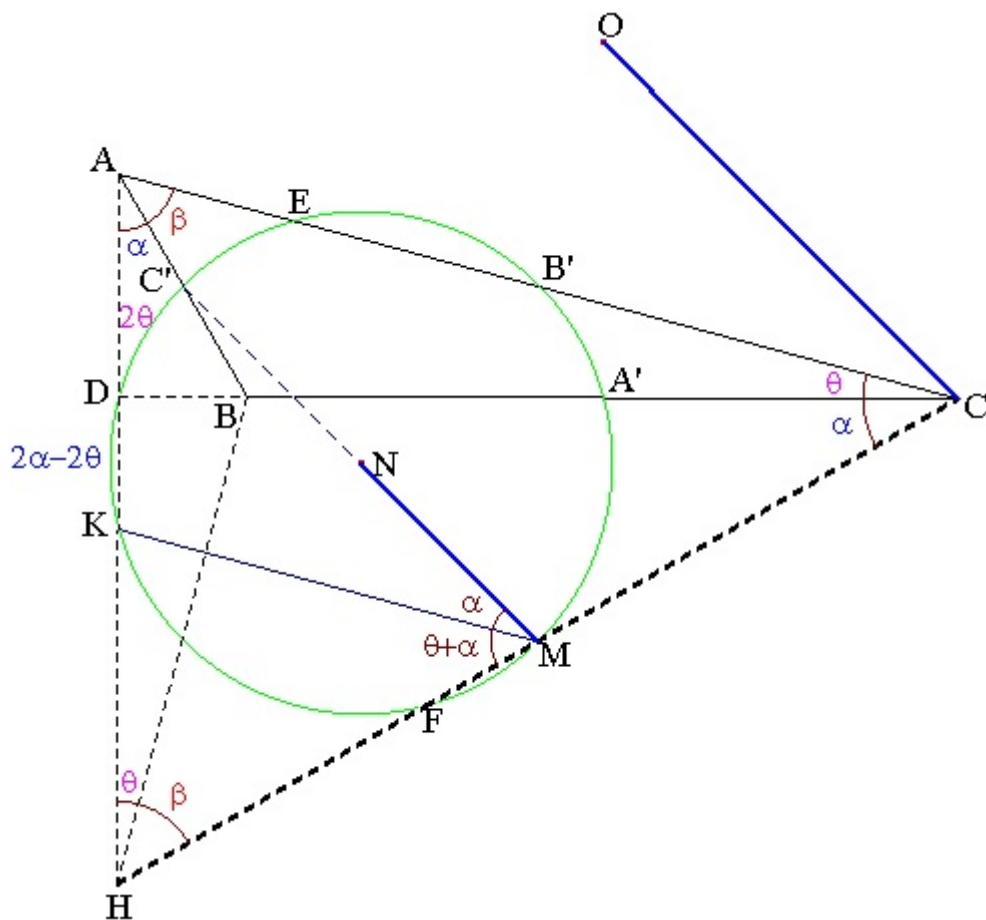


Figura 67: Mostrando que  $MN // OC$

$$KM \text{ é base média relativa ao lado } AC \Rightarrow \begin{cases} KM // AC \\ \angle KMH = \theta + \alpha \end{cases} .$$

$$\angle KMN = \frac{\widehat{KC'}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

Note que, para provar que  $MN // OC$ , é necessário que  $\angle ACO = \alpha$ . Nesse caso,  $\widehat{MCO}$  e  $\widehat{HMN}$  seriam ângulos colaterais internos.

Para tanto, concentremo-nos na circunferência circunscrita (figura 68):

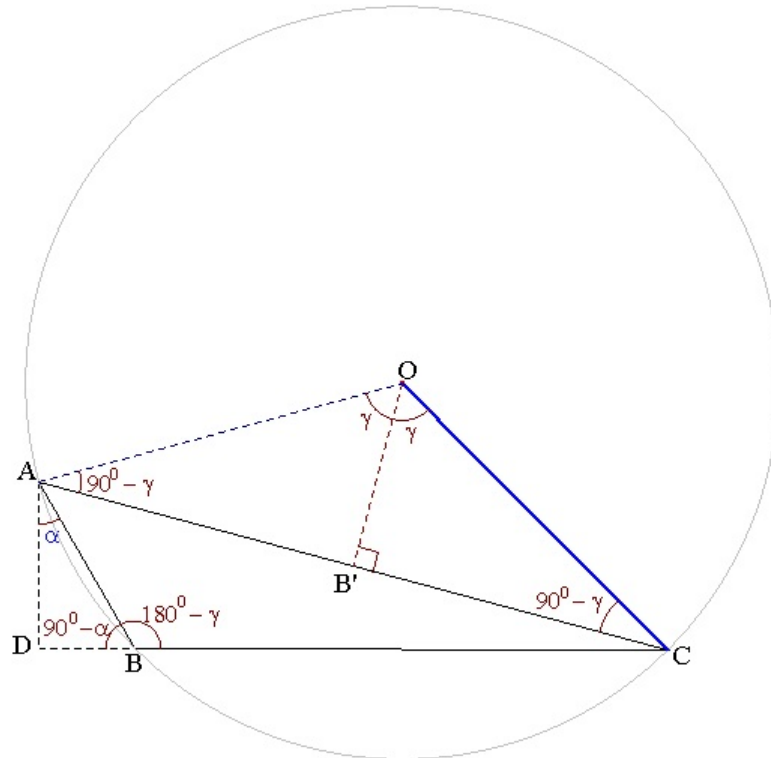


Figura 68: Os ângulos  $\widehat{CAO}$  e  $\widehat{ACO}$  são congruentes

É fácil ver que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OC} \Rightarrow \angle OAB' = \angle OCB' = 90^\circ - \gamma \Rightarrow \angle OB'C = 90^\circ \\ \angle AOC = \widehat{ABC'} = 2\gamma \\ \angle ABC = \frac{360^\circ - \widehat{ABC}}{2} = \frac{360^\circ - 2\gamma}{2} = 180^\circ - \gamma \\ \angle ABD = 90^\circ - \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{Logo, } \angle ABD + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow (90^\circ - \alpha) + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - \alpha - \gamma = 0^\circ \Rightarrow 90^\circ - \gamma = \alpha.$$

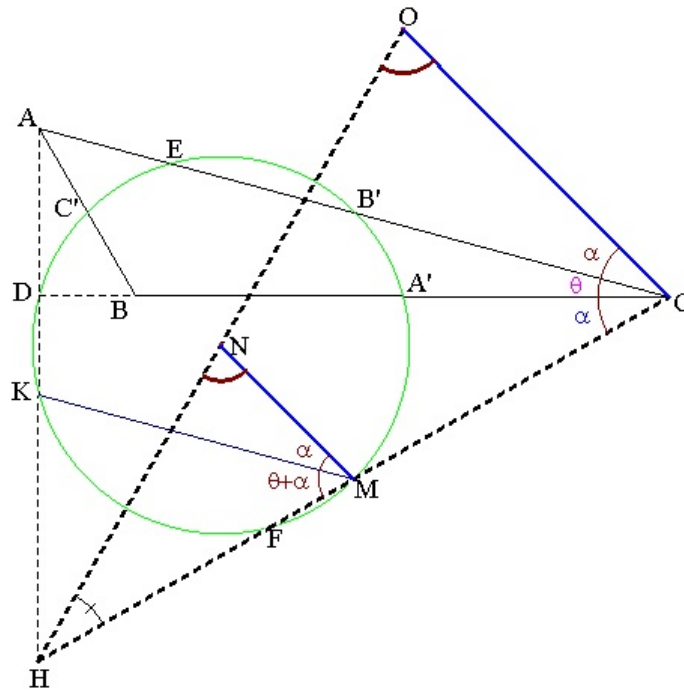


Figura 69:  $MN$  é base média do  $\triangle OHC$

Na figura 69, como  $\widehat{MHN}$  e  $\widehat{CHO}$  são ângulos comuns aos triângulos  $MHN$  e  $CHO$ :  $\angle MNH = \angle COH$  (ângulos colaterais internos) —  $H$ ,  $N$  e  $O$  são colineares e  $MN \parallel CO$ .

Por conseguinte,  $MN$  é base média do  $\triangle OHC$ , relativa ao lado  $OC$ , isto é,  $\overline{MN} = \frac{\overline{CO}}{2} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$ . Assim sendo, verifica-se que, semelhantemente ao caso do triângulo acutângulo, vale também para o triângulo *obtusângulo* que o raio do *Círculo dos Nove Pontos* é a metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.

ADENDO: caso o professor não tenha apresentado aos seus alunos que se pelo ponto médio de um lado de um triângulo for traçado uma paralela a um dos outros dois lados, o segmento contido na paralela, cujas extremidades são a interseção da paralela com dois lados, é uma base média, segue uma sugestão desse fato usando a própria figura da atividade em questão (figura 70):

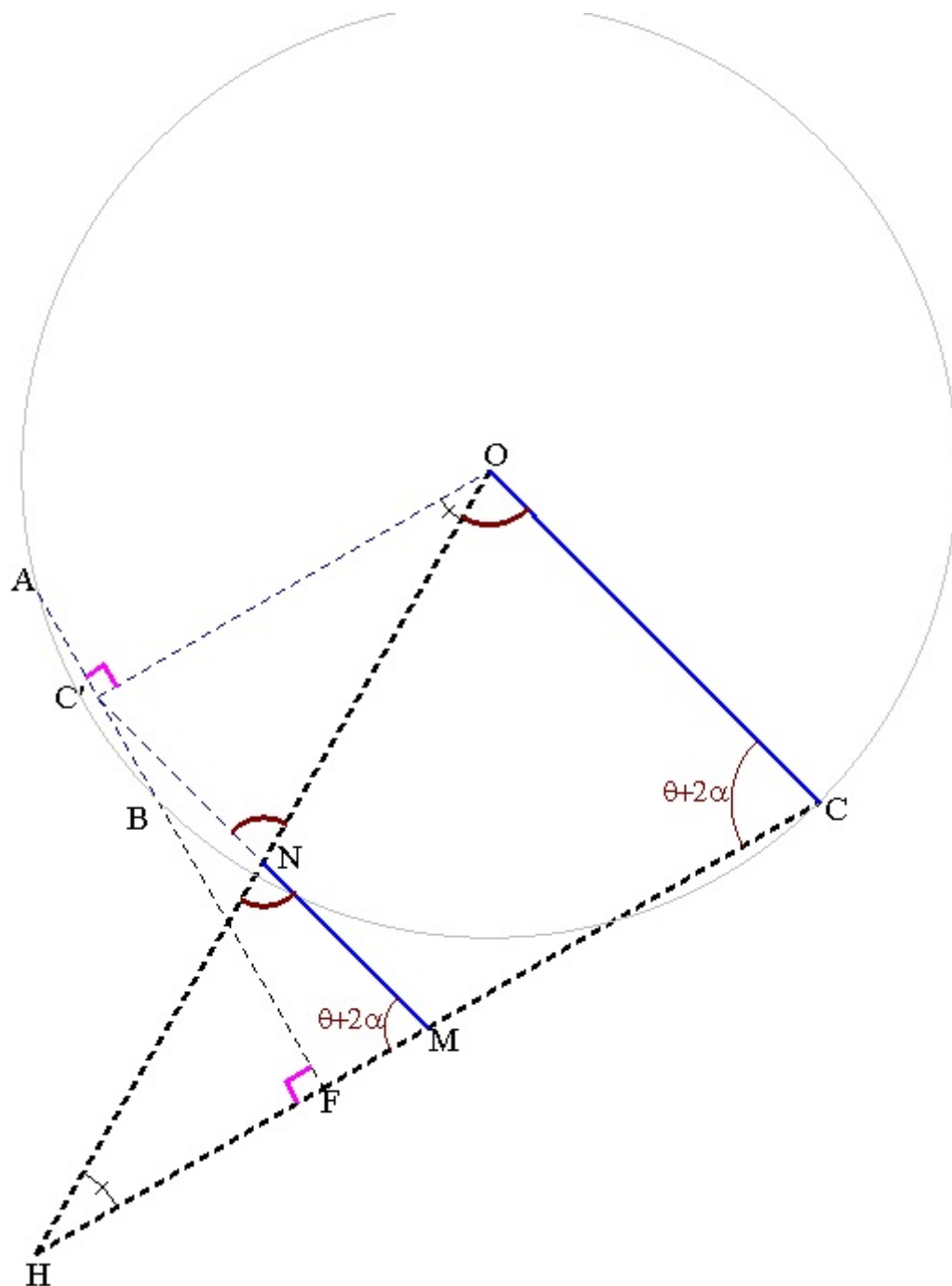


Figura 70: Mostrando que  $N$  é ponto médio de  $HO$

Sabemos que  $AF \perp (MC \subset HC)$ .

$C'$  é ponto médio do segmento  $AB \Rightarrow OC' \perp (AB \subset AF)$ .

Então,  $OC' \parallel (MC \subset HC)$ .

Ora, foi provado que  $MC' // CO$ .

Logo,  $MCOC'$  é um paralelogramo  $\Rightarrow \begin{cases} \overline{C'O} = \overline{MC} \\ \overline{MC'} = \overline{CO} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \cdot \overline{MN} = \overline{CO} \Leftrightarrow 2r = R$

Por si só, já é o resultado significativo que se desejava, porém, provemos que  $N$  é o ponto médio de  $HO$ :

Considerando  $OC' // CH$  e  $HO$  transversal:  $\angle NOC' = \angle NHM$ .

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo,  $\angle NC'O = \angle NMH$ .

Já sabemos que  $\overline{MC'} = \overline{C'O}$ .

Como  $M$  é ponto médio de  $HC$ :  $\overline{HM} = \overline{C'O}$ .

Assim sendo, por **A.L.A.** :

$$\triangle MHN \cong \triangle C'ON \Rightarrow \begin{cases} \overline{MH} = \overline{C'N} \\ \overline{C'O} = \overline{HM} \\ \overline{HN} = \overline{ON} \end{cases} \Rightarrow N \text{ é ponto médio de } HO$$

## APÊNDICE H – Ponto de encontro das alturas

Em [?], página 188, encontra-se o

**TEOREMA 113:** As retas a que pertencem as três alturas de um triângulo qualquer cruzam-se em um mesmo ponto.

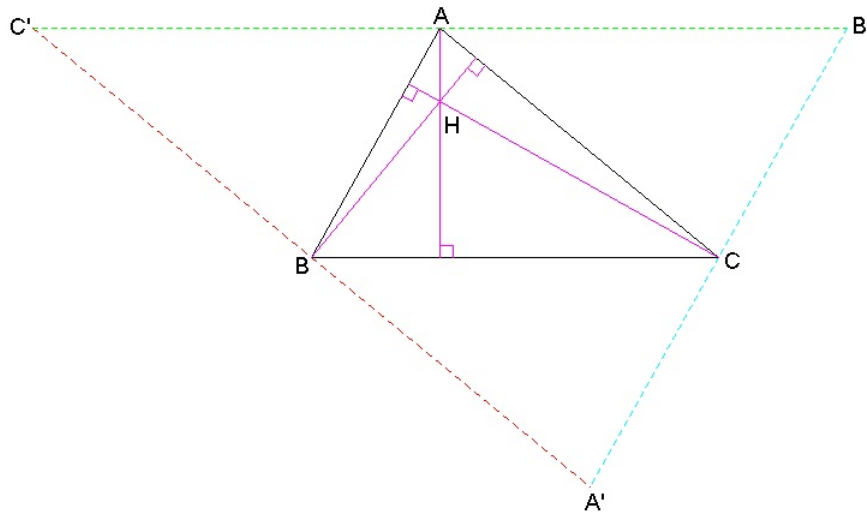


Figura 71: Unicidade do ponto de interseção das alturas

Seja, conforme a figura 71, o triângulo  $ABC$ . A partir de cada um dos vértices, trace a paralela ao lado oposto. Tais paralelas cruzam-se nos pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , formando o triângulo  $A'B'C'$ . Os quadriláteros  $AB'CB$ ,  $ACBC'$  e  $ACA'B$  são paralelogramos, pois seus pares de lados opostos são paralelos. Logo,  $\overline{AC'} = \overline{BC}$  e  $\overline{AB'} = \overline{BC}$ , ou seja,  $\overline{AC'} = \overline{AB'}$ , o que significa que  $A$  é o ponto médio de  $BC'$ . Da mesma forma,  $\overline{B'C} = \overline{A'C}$  e  $\overline{A'B} = \overline{C'B}$  e, portanto,  $B$  e  $C$  são, respectivamente, os pontos médios de  $A'C'$  e  $A'B'$ . Pelo vértice  $A$ , por exemplo, do triângulo  $ABC$ , traça-se a perpendicular ao lado  $BC$ . A altura do triângulo  $ABC$ , traçada a partir de  $A$ , está contida nessa perpendicular. Mas essa perpendicular é, também, mediatriz do lado  $B'C'$  do triângulo  $A'B'C'$ , porque  $B'C' \parallel BC$ . Da mesma forma, as alturas do triângulo  $ABC$ , em relação aos lados  $AC$  e  $AB$ , estão contidas nas perpendiculares traçadas dos vértices  $B$  e  $C$  aos lados  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Mas essas perpendiculares são mediatrizes do triângulo  $A'B'C'$ . Logo, as três alturas do triângulo  $ABC$  estão contidas nas mediatrizes do triângulo  $A'B'C'$ . Como, pelo Teorema 59<sup>1</sup>, tais mediatrizes cruzam-se em um mesmo ponto, o teorema está demonstrado. (... o mesmo raciocínio se aplica para os casos de triângulos retângulos e obtusângulos).

<sup>1</sup>Apêndice A



*APÊNDICE I - a relação entre vértices e ortocentro de um triângulo*

Considerando o ortocentro de um triângulo, pode-se formar três triângulos obtusângulos (figura 72).

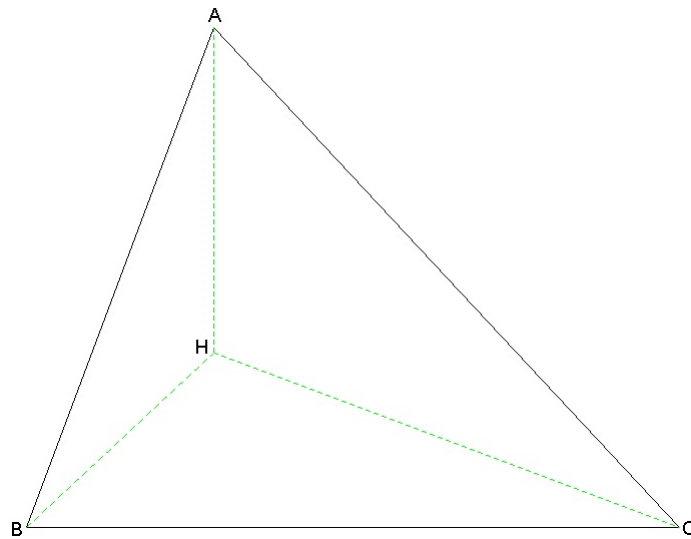


Figura 72: As alturas do  $\triangle ABC$  formam três triângulos obtusângulos

Note que o ponto B passa a ser o ortocentro do triângulo ( $AHC$ ) obtusângulo.

Afirmamos que os pontos que definem o *Círculo dos Nove Pontos* para o  $\triangle AHC$  são os mesmo para o  $\triangle ABC$ .

De fato:

– Os pés das alturas<sup>1</sup>  $E, F, D$ , assim como o ponto médio do lado  $AC$  e o Ponto de Euler  $L$  são os mesmos para os triângulos o  $\triangle AHC$  e o  $\triangle ABC$ , conforme figura 73.

– Os pontos médios dos lados  $AH$  e  $CH$  do  $\triangle AHC$  são Pontos de Euler para o  $\triangle ABC$ ; e os Pontos de Euler  $A'$  e  $C'$ , do  $\triangle AHC$ , são pontos médios dos lados  $AB$  e  $BC$  do  $\triangle ABC$ .

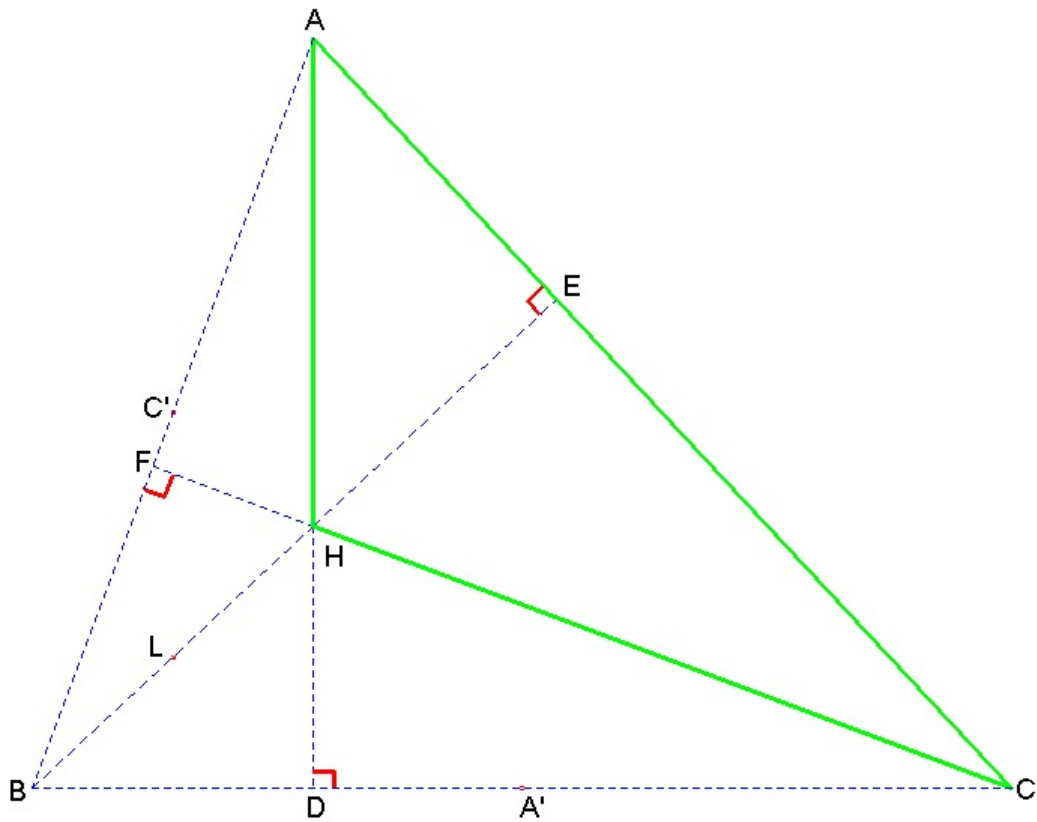


Figura 73: Considerando o ortocentro do acutângulo como vértice do obtusângulo

<sup>1</sup>os triângulos  $\triangle AHC$  e  $\triangle ABC$  têm o mesmo triângulo órtico

***APÊNDICE J – Círculo dos Nove Pontos –  
aplicado ao Triângulos  
Equilátero***

Num triângulo equilátero, as alturas e medianas são coincidentes  $\Rightarrow$  os pés ( $D, E, F$ ) das alturas coincidem com os pontos médios  $A', B', C'$ , nessa ordem (figura 74).

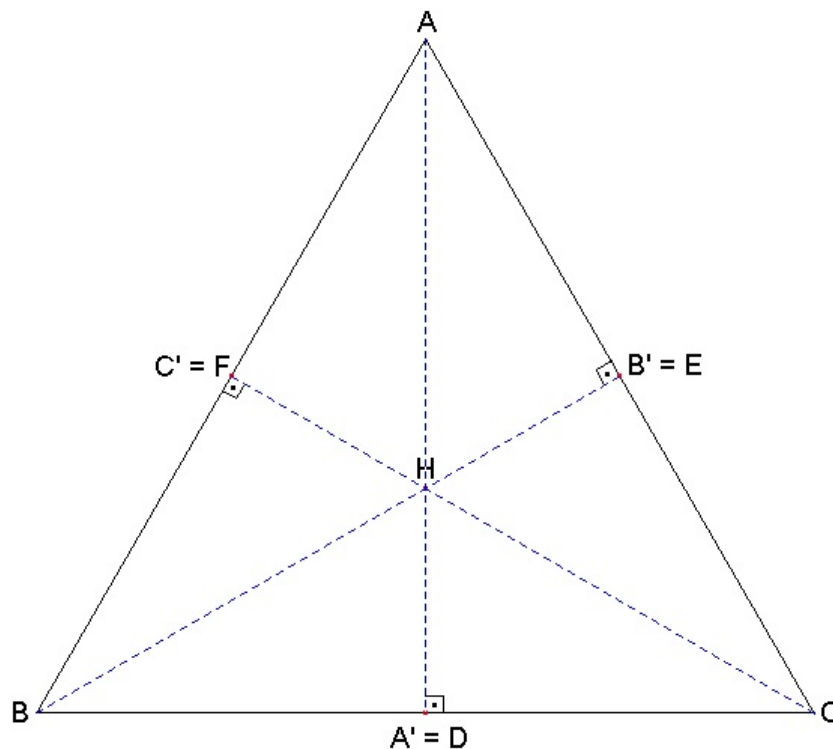


Figura 74: os pés das alturas coincidem com os pontos médios

Assim, como três pares de pontos ( $A' = D, B' = E, C' = F$ ) são coincidentes, não se terá um círculo com nove pontos.

Entretanto, este caso pode servir como um primeiro exemplo motivador, podendo as propriedades serem obtidas de forma mais imediata.

## *Referências*

- [1] COXETER, HAROLD SCOTT MACDONALD; GREITZER, SAMUEL L. - *Geometry Revisited*, Volume 19, Fifth Printing, Washington, D.C., The Mathematical Association of America-1967.
- [2] GARBI, GILBERTO GERALDO - *C.Q.D – Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da Geometria*, 1ª Edição, Rio de Janeiro, Editora Livraria da Física-2010.
- [3] PINHEIRO, PLÁCIDO ROGÉRIO - *O Círculo dos Nove Pontos*, Revista do Professor de Matemática, nº 14, São Paulo, SBM-1989.
- [4] MORGADO, AUGUSTO CÉSAR; WAGNER, EDUARDO; JORGE, MIGUEL - *Geometria II*, FC e Z Livros-2002.
- [5] FERREIRA, CARLOS EDUARDO SOUZA; GRAVINA, MARIA ALICE - *Teoremas da Geometria Plana usando animações*, Disponível em: [www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades\\_diversas/teoremas\\_geometria\\_avan/Objetos/Teoremas\\_da\\_Geometria\\_Plana\\_M2.swf](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/teoremas_geometria_avan/Objetos/Teoremas_da_Geometria_Plana_M2.swf), Acesso em: 17 de ago. 2013.
- [6] ROJAS, JACQUELINE; MENDOZA, RAMÓN - *A Reta de Euler e a circunferência de nove pontos*. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, nº 48/49, p. 76-85, 2010.
- [7] JÚNIOR, PEDRO JOSÉ DA SILVA SANTOS - *Triângulos Órticos e Interferômetros: Uma abordagem interdisciplinar*. Dissertação de Mestrado, Profmat/UFRPE, 2013.