Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

O Método de Pólya e as Contribuições de uma Sequência Didática no Processo Ensino-Aprendizagem de Geometria Analítica

Tatiana de Araújo Leite

Juazeiro do Norte - CE

2022

O Método de Pólya e as Contribuições de uma Sequência Didática no Processo Ensino-Aprendizagem de Geometria Analítica

Tatiana de Araújo Leite

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2022

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Leite, Tatiana De Araújo
L533m O Método de Polya e as Contribuições de uma Sequência Didática no Processo Ensino-Aprendizagem de Geometria Analítica / Tatiana De Araújo Leite. Farias Brito-Ce, 2022.
77p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.
Orientador(a): Prof. Dr. Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira

1.Geometria Analítica, 2.Resolução de Problemas, 3.Sequência Didática; I.Título.

CDD: 510

O Método de Pólya e as Contribuições de uma Sequência Didática no Processo Ensino-Aprendizagem de Geometria Analítica

Tatiana de Araújo Leite

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título mestre em matemática.

Aprovada em 17/11/2022

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira(Orientador)
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Francisco Régis Vieira Alves

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves(Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - *campus* Fortaleza

Mario de Assis Oliveira

Prof. Me. Mário de Assis Oliveira
Universidade Regional do Cariri(URCA)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - *campus* Juazeiro do Norte

Dedico ao meu esposo e aos nossos filhos, que foram meu maior apoio nos momentos de angústia. Sem vocês, esta conclusão acadêmica, não teria sido possível.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por permitir que meus objetivos fossem alcançados, durante toda a minha caminhada acadêmica e pessoal. À minha família pelo apoio que sempre me deram durante toda a minha vida. Ao meu esposo Edcarlos, que acima de tudo, sempre esteve presente nos momentos difíceis com uma palavra de incentivo. Aos meus filhos, por compreenderem as várias horas em que estive ausente por causa do desenvolvimento deste trabalho. Ao meu orientador, Paulo Cesar Cavalcante de Oliveira, me guiou pelo caminho deste trabalho com paciência, dedicação e amizade. À todos os professores dessa instituição de ensino, que com seus ensinamentos tornaram a minha formação acadêmica possível os colegas que estiveram ao meu lado ao longo do curso, que passaram por todas as situações e momentos difíceis, tornando tudo mais leve. Foi muito gratificante estar ao lado de vocês!

“Combati o bom combate, terminei a corrida, guardei a fé.”(2 Timóteo 4:7)

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo referente às contribuições de uma sequência didática com resolução de problemas de Geometria Analítica utilizando os quatro passos propostos por George Polya em seu livro "A Arte de Resolver Problemas". A motivação do estudo parte da experiência da pesquisadora como professora de Matemática do Ensino Médio em que ficou perceptível as grandes dificuldades de aprendizagem dos estudantes e uma metodologia de ensino pautada na memorização de fórmulas. Deste modo, indicou-se como questão de investigação: como uma sequência didática envolvendo resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem dos conceitos básicos de Geometria Analítica? Delineou-se, como objetivo geral, propor uma sequência didática que auxilie na aprendizagem de alguns tópicos de Geometria Analítica através da resolução de problemas. Como objetivos específicos fixou-se: Identificar algumas dificuldades de aprendizagem, através da resolução de problemas de geometria analítica; elaborar e aplicar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, a partir do que se possa contribuir para a aprendizagem dos alunos e analisar as contribuições da sequência didática na aprendizagem de Geometria Analítica por meio da resolução de problemas. Para dar uma resposta a questão de investigação, utilizou-se a abordagem qualitativa apresentada por Gerhardt e Silveira (2009) por preocuparse com fatos da realidade que não podem ser quantificados. Participaram da coleta de dados, 30 alunos da terceira série do Ensino Médio da EEMTI Gabriel Bezerra de Morais, Farias Brito, Ceará. Para a coleta de dados, utilizaram-se os instrumentos: anotações do diálogo com os alunos nos encontros, formulário de um questionário informativo e um questionário diagnóstico, além das atividades da sequência didática, que foram elaboradas e aplicadas. Os resultados encontrados demonstraram que a Sequência Didática contribuiu para a aprendizagem dos conceitos básicos de Geometria Analítica e para reflexões a respeito das dificuldades destacadas no percurso de sua aplicação. Entre os resultados, pode-se apontar: 1°) a participação dos alunos nas plenárias durante os encontros contribuiu para o aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e da relevante construção de conhecimento sobre o conceito em estudo; 2°) as interações entre os alunos, nos momentos de busca do consenso da resposta certa para um problema, possibilitou a superação de dificuldades ou a uma percepção melhor, diante do confronto entre as respostas encontradas; 3°) a valorização das etapas da Sequência Didática fez com que a maioria dos alunos se sentissem interessados para participar ativamente das atividades propostas; 4°) A aplicação de novos problemas relacionados ao problema gerador, após a fase de formalização do conceito, possibilitou consolidar aprendizagens construídas em fases anteriores e aprofundar o entendimento do conceito em estudo. O planejamento, aplicação e vivência da sequência didática favoreceram a promoção do conhecimento matemático e a compreensão dos conteúdos abordados. Espera-se que essa pesquisa possa contribuir com outras futuras investigações acerca do ensino e aprendizagem de Geometria Analítica.

Palavras-chave: Sequência Didática, Geometria Analítica, Resolução de Problemas.

Abstract

This paper presents a study related to the contributions of a didactic sequence with problem solving of Analytical Geometry using the four steps proposed by George Polya in his book "How to solve it". The study motivation comes from the experience of the researcher as a high school Math teacher in which it became perceptible the big learning difficulties of the students and a methodology of teaching based on memorization of formulas. Thus, it was indicated as a research question: how can a didactic sequence involving problem solving contribute to the learning of the basic concepts of Analytical Geometry? It was outlined, as a general objective, to propose a didactic sequence that helps in the learning of some topics of Analytical Geometry through the resolution of problems. The following specific objectives were set: Identify some learning difficulties, through the resolution of analytical geometry problems; develop and apply a didactic sequence, involving problem solving, from which it can contribute to students learning and analyze the contributions of the didactic sequence in the learning of Analytical Geometry through problem solving. To answer the research question, the qualitative approach presented by Gerhardt and Silveira (2009) was used because it is concerned with facts of reality that cannot be quantified. Participated in data collection, 30 students of the 3th grade, senior students, of the EEMTI (high and vocational school) Gabriel Bezerra de Morais, Farias Brito city state of Ceará. In data collection, were used the following tools: dialog notes with the students in meetings, an informative questionnaire and a diagnostic questionnaire, in addition to the activities of the didactic sequence, which were elaborated and applied. The results found demonstrated that the Didactic Sequence contributes to the basic concept learning of Analytical Geometry and to the reflections about the difficulties highlighted in the course of its application. Among the results, it can be pointed out: 1st) the students' participation in the plenary sessions during the meetings contributed to the improvement of mathematical reading and writing and the relevant construction of knowledge about the concept under study; 2nd) the interactions between the students, in the moments of search for the consensus of the right answer to a problem, made it possible to overcome difficulties or to have a better perception, in the face of the confrontation between the answers found; 3rd) the appreciation of the stages of the Didactic Sequence made most students feel interested in actively participating in the proposed activities; 4th) The application of new problems related to the generating problem, after the concept formalization phase, made it possible to consolidate learnings built in previous phases and deepen the understanding of the concept under study. The planning, application and experience of the didactic sequence favored the promotion of mathematical knowledge and understanding of the contents covered. It is hoped that this research can contribute to other future investigations about the teaching and learning of Analytical Geometry.

Keywords: Didactic Sequence, Analytical Geometry, Solving Problems

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Uma indagação que sempre aparece nas aulas e nos faz refletir sobre o trabalho docente é: Professor, quando o senhor corrige o problema no quadro, eu consigo compreender perfeitamente, mas quando vou resolver sozinho, eu não consigo encontrar o caminho que devo seguir para resolvê-lo. Existe um caminho mais fácil para eu vencer esta dificuldade?? Os questionamentos dos alunos nos mostram que até os alunos mais dedicados muitas vezes têm dificuldades em resolver problemas de matemática. Várias pesquisas, documentos oficiais e resultados das avaliações externas têm nos mostrado que existe uma grande defasagem na aprendizagem. Os indicadores apresentam um baixo rendimento nessa disciplina e tem ganhado destaque nos cenários nacional e internacional como os apresentados no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB e no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA.

No SAEB os resultados indicam um avanço ainda muito tímido, praticamente estagnado em termos de desempenho. Em 2015, os alunos da 3^a série do ensino médio apresentaram uma média de proficiência em matemática de 267 pontos. Esse resultado evoluiu timidamente na avaliação do Saeb 2017 para 270 pontos, chegando a 277 na pesquisa de 2019. O Brasil também não conseguiu registrar avanços significativos no desempenho dos alunos em matemática na última edição do PISA em 2018, ficando no 70° lugar de 80 países avaliados. Na realidade, o resultado decresceu, comparando-se com a edição anterior, realizada em 2015, em que o Brasil ocupou a 65° posição de 70 países analisados.

Ao lecionarmos conteúdos sobre Geometria Analítica, observamos facilmente que os alunos apresentam dificuldade em compreender e manipular objetos tais como retas, circunferências, elipses. A dificuldade torna-se maior quando necessitavam estabelecer relações entre suas representações gráfica e algébrica, e vice-versa. Estudiosos apontam que existem fatores que podem ou não contribuir para uma aprendizagem significativa dos conteúdos que envolvem a matemática. Elon Lages Lima (2007) no livro intitulado Matemática e Ensino, aborda alguns aspectos do ensino e da aprendizagem em Matemática, considerando a natureza peculiar dessa disciplina e exige uma certa postura tanto em relação ao professor quanto ao aluno.

Em relação aos alunos, Elon Lages afirma que:

> [...] A generalidade com que valem as proposições matemáticas exige precisão, proíbe ambiguidades e por isso requer mais concentração e cuidado por parte do estudante. Por outro lado, o exercício dessas virtudes durante os anos de escola ajuda a formar hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da Matemática. (LIMA, 2007, p. 3)

E quanto ao ensino ministrado pelos professores, Elon Lages considera:

> [...] não há mistério nem milagre. O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura se colocar no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. Não há fórmulas mágicas para ensinar Matemática. Não há caminhos reais, como Euclides já dizia a Ptolomeu. A única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente. Não só para aprender Matemática, mas para tudo na vida. (LIMA, 2007, p. 5)

Nesse mesmo panorama, enquanto docente que leciono a quase duas décadas, em turmas do Ensino Médio na rede pública, foi possível perceber alguns problemas gerados no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica. Também, em conversa com alguns colegas docentes em momentos de planejamento, é perceptível nos relatos que existem algumas dificuldades no processo ensino aprendizagem de Geometria Analítica, pautado simplesmente na memorização de fórmulas, algoritmos e no uso de sequências de instruções bem definidas, que podem ser desenvolvidas mecanicamente.

Nessa perspectiva, buscou-se, com este trabalho, justificar a importância do ensino de Geometria Analítica nas contribuições de uma sequência didática envolvendo a metodologia de ensino através da resolução de problemas, utilizando os quatro passos propostos por George Pólya em seu livro "A Arte de Resolver Problemas".

A partir desta perspectiva, indaga-se: como uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem da Geometria Analítica? Portanto, o objetivo geral da presente pesquisa é propor uma sequência didática que auxilie na aprendizagem de alguns tópicos de Geometria Analítica através da resolução de problemas.

Para tanto, foram delineados os seguintes objetivos específicos: Identificar algumas dificuldades de aprendizagem, através da resolução de problemas de geometria analítica; elaborar e aplicar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, a partir do que se possa contribuir para a aprendizagem dos alunos e analisar as contribuições da sequência didática na aprendizagem de Geometria Analítica por meio da resolução de problemas.

Parte-se da hipótese de que utilizar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, no ensino de Geometria Analítica, contribui para que os alunos se apropriem dos conceitos básicos e possibilita uma aprendizagem concreta e significativa. Sendo assim, para realizarmos o teste da hipótese, realiza-se uma pesquisa de finalidade básica estratégica baseada na análise das respostas dos alunos aos problemas propostos, objetivos descritivo e exploratório, com abordagem qualitativa e realizada com procedimentos bibliográficos e pesquisa-ação, conforme os autores estudados para o desenvolvimento desse trabalho.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

O primeiro capítulo, designado como Introdução, nos apresenta uma contextualização do atual cenário do ensino da matemática, bem como o planejamento e a delimitação do problema; os objetivos delineados(geral e específicos); justificativa e hipótese. O segundo capítulo nos traz um pouco da história da Geometria Analítica, apresentando como essa importante área da matemática se desenvolveu ao longo do tempo, bem como os principais matemáticos e filósofos que contribuíram diretamente para o seu desenvolvimento.

O terceiro capítulo intitulado cônicas não-clássicas nos apresenta alguns conceitos de Geometria Analítica muito importantes para o planejamento e desenvolvimento desse trabalho. Definimos Lugar Geométrico e apresentamos alguns exemplos, além de apresentarmos as definições de parábola e hipérbole, curva de Agnesi, Ciclóide, Epicicloide, Fólium de Descartes dentre outros.

O quarto capítulo traz a definição da Sequência Didática de Polya bem como fala um pouco da vida e de sua obra ?A Arte de Resolver Problemas?, e nos mostra as quatro fases do método de Pólya.

O quinto capítulo, Delineamento da Pesquisa, traz a caracterização do pesquisador, escola de aplicação e grupo de aplicação e a proposta metodológica para se trabalhar uma Sequência Didática com Resolução de Problemas de Geometria Analítica no Ensino Médio, assim como: caracterização do estudo; técnicas e instrumentos de coleta de dados e técnicas de processamento e análise de dados.

O sexto capítulo, Resultados e discussões, apresenta a descrição e análise dos questionários; resultados e discussões das etapas da Sequência Didática, sua estrutura e demais especificações.

Capítulo 2

Um pouco da História da Geometria Analítica

Originalmente a matemática foi definida como a ciência dos números e das grandezas e inicialmente era limitada pelos números naturais, porém as primeiras grandes civilizações já conheciam algumas frações e alguns fundamentos práticos de geometria. Desde os primórdios da humanidade houve a preocupação de como surgiu a geometria e a sua associação com os números, como também a primeira conexão entre números e tempo.

Os mais antigos documentos escritos da Mesopotâmia, Egito, China e Índia dão evidência da preocupação com a mensuração. Os papiros pré-helênicos e as escritas cuneiformes trazem problemas que envolvem os conceitos de comprimento, área e volume. Historicamente as ideias da Geometria Analítica surgiram da comparação de grandezas curvilíneas com grandezas retilíneas e foram os egípcios e os babilônios que deram os primeiros passos por meio do estudo do círculo.

Os babilônios adotaram uma aproximação três para π(embora um exemplo seja conhecido com o valor tomado em $3+\frac{1}{8}$), mas sua geometria do círculo, no entanto, ultrapassa os egípcios. Eles reconhecem que o ângulo inscrito em um semicírculo é reto, antecipando Tales por bem mais de mil anos, e além disso, eles estavam familiarizados ao mesmo tempo com o Teorema de Pitágoras. Os babilônios não chegaram a um maior desenvolvimento de tais conceitos, pois os elementos essenciais da geometria analítica como coordenadas e equações de curvas surgiram muito mais tarde, mas é bom ter em mente que muitos aspectos da matemática antiga se aproximam das concepções modernas.

Uma outra civilização que se destaca no avanço da matemática e geometria foi a grega. As contribuições dos gregos para o desenvolvimento da Geometria Analítica também foram importantes. Os primeiros séculos da matemática grega começam com os esforços de Tales por uma geometria demonstrativa (600 a.C), culminam com os Elementos de Euclides (300 a.C) e marcam um período de grandes realizações. Estima-se que nesse período, a história da matemática grega tenha sido obscurecida pela grandeza dos Elementos, pois esta obra reunia de forma bem organizada todo o conhecimento matemático acumulado por seus antecessores e produziu um efeito tão grande, que durou mais de 2000 anos.

Provavelmente o trabalho de Euclides sobre seções cônicas tenha sido superado pelo brilhante trabalho de Apolônio. Embora este tivesse escrito sobre diversos assuntos matemáticos, sua fama se deve à obra *Seções Cônicas*, o que lhe rendeu o cognome de ”O Grande Geômetra” pelos seus contemporâneos. Apolônio foi um grande estudioso das cônicas, e em sua obra *Seções Cônicas* mostrou que, dependendo da inclinação do plano, a interseção desse com um cone de duas folhas determina uma elipse ou uma parábola ou uma hipérbole. (SANTOS; LAVAL, 2012). Apolônio é considerado por alguns historiadores da matemática como o primeiro estudioso a recorrer a um sistema de coordenadas, e seus estudos contidos em sua grande obra permitiram que outros matemáticos chegassem a grandes descobertas na geometria analítica.

Um período de grande relevância no desenvolvimento da cultura e ciências foram os séculos XIV, XV e XVI que propiciaram o renascimento da cultura clássica, o impulso às grandes navegações, o desenvolvimento de novas ciências e técnicas, os movimentos da Reforma e da Contra Reforma e a gênese de novas questões científicas, filosóficas e pedagógicas (MIORIM, 1998, p. 40). O século XVII é de grande importância na história da matemática pelo surgimento de uma nova geometria, que teve como pontapé inicial os trabalhos de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) vindo a se configurar como a Geometria Analítica.

Assim como muitos outros conceitos em matemática, não podemos precisar a data de criação da geometria analítica, entretanto no ano de 1637 surgem conceitos muito importantes para a geometria analítica, no pequeno texto de Descartes chamado Geometria, como um dos três apêndices do Discurso do Método, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nela, em resumo, Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos. Descartes acreditava que a linguagem da natureza era matemática, convergindo o seu pensamento com o de Galileu. Com a aplicação de relações numéricas a figuras geométricas, ele correlacionou álgebra e geometria estabelecendo, assim, um novo ramo da matemática, Fermat iniciou em 1629 um trabalho de recomposição das obras perdidas da Antiguidade e uma dessas obras reconstituída por ele foi Lugares Planos, de Apolônio. Acredita-se que, ao reconstruir essa obra, ele se inspirou para chegar ao princípio fundamental da geometria analítica. Em sua obra *Introdução aos lugares planos e sólidos* publicada somente em 1679, encontram-se reduções de equações de primeiro e segundo graus através de translações e rotações de eixos. Fermat, bastante modesto, era avesso a publicar seus trabalhos. Disso resulta, em parte, o fato de Descartes comumente ser mais lembrado como criador da Geometria Analítica. Percebe-se ainda que Descartes e Fermat, por muitas vezes, chegaram a resultados próximos, porém, por meios diferentes. Nesse contexto passa-se a ter um novo olhar sobre os objetos geométricos que são vistos então como úteis na resolução de problemas práticos. A análise do papel das curvas geométricas nos trabalhos de Descartes e Fermat pode mostrar como a crença na importância da técnica levou a um novo tipo de geometria. Para Descartes, essa geometria deveria estudar figuras usando proporções. A tradução dos problemas geométricos em linguagem algébrica, visava compreender as relações entre as grandezas do problema:

> [...] O objetivo de Descartes era utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, em que regras simples de composição levassem de objetos simples a outros mais complexos. O método começa por exibir objetos mais simples de todos, as retas, e as relações simples que os relacionam, as operações aritméticas (ROQUE, 2012, p. 322).

Quando analisamos os livros didáticos é possível notar que quase todos citam Descartes como o criador da geometria analítica. Aparentemente temos um consenso entre os historiadores de que, só depois das contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat à geometria analítica ganhou os contornos iniciais da forma com a qual estamos acostumados. A obra *La Géometrie* trata-se da única publicação estritamente matemática de Descartes. Neste livro, estabelece-se um novo método: a geometria das coordenadas ou geometria analítica. De acordo com Boyer (1996) e Eves (2006) a forma atual de apresentação da geometria analítica surgiu um século após a divulgação do trabalho de Descartes, por meio de inúmeras interpretações e incansáveis traduções.

No entanto, a nomenclatura com a qual estamos acostumados, coordenadas, abscissas e ordenadas foi contribuição de Leibniz no século XVII. Das três partes da obra *La Géometrie*, a primeira contém alguns dos princípios da geometria algébrica, a segunda, uma classificação de curvas e um método para construir tangentes às curvas e a terceira parte trata da resolução de equações de grau maior que dois. A utilização de um sistema de coordenadas foi fundamental na invenção da geometria analítica, porém Descartes não empregava necessariamente um sistema de eixos ortogonais. O sistema era escolhido de maneira conveniente, dependendo do problema. A geometria cartesiana tinha como principal objetivo a construção geométrica, e não necessariamente a redução da geometria a álgebra, assim:

> A obra de Descartes é com demasiada frequência descrita simplesmente como aplicação da álgebra à geometria, ao passo que na verdade poderia ser bem caracterizada como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. (BOYER, 1996, p. 232).

Ao que parece, acredita-se que a ideia do sistema de coordenadas polares tenha sido introduzida em 1691 por Jakob Bernoulli, apesar do trabalho realizado por Leonard Euler sobre coordenadas polares. Suas contribuições na consolidação do sistema de coordenadas polares foram tão significativas que muitos o consideram como criador desse sistema. Assim também, como afirmam Santos e Laval (2012), Lagrange, no século XVIII deu sua contribuição ao promover a aplicação da álgebra a problemas da geometria elementar, com o trabalho sobre soluções analíticas de problemas relacionados à área de um triângulo e ao volume de um tetraedro, expressos por determinantes de terceira e quarta ordem. O cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático, poderoso e eficiente, revelado no século XVII. E finalmente, o século XIX caracteriza um momento profícuo em matemática: a consolidação da geometria analítica por meio do trabalho do então professor da Ècole Polytechnique, Gaspard Monge. É interessante ressaltar que o efeito produzido pelo seu trabalho fez com que, na mesma época, a geometria analítica se tornasse uma disciplina, conquistando um lugar nas escolas.

No que diz respeito ao avanço da geometria analítica, a partir da segunda metade do século XIX, atravessando o século XX, é que essa se mistura com a álgebra linear e a análise:

> [...] Assim, como em um determinado momento da história já não era mais possível fazer avanços somente com a aritmética e a esta foram se agregando a geometria e a álgebra, o mesmo ocorre com a geometria analítica, que no desenvolvimento de uma matemática mais ?apurada? passa a depender da álgebra linear, da análise e passa também a ter uma estreita relação com o cálculo, fazendo com que já não seja mais possível visualizar uma geometria analítica desconectada de outras áreas da matemática (SANTOS; LAVAL, 2012, p. 203).

Percebemos que muitas foram as etapas e contribuições dadas à geometria analítica, assim como os estudiosos envolvidos nos diversos momentos da história da matemática. A riqueza de detalhes nos é revelada a cada momento em que nos aprofundamos em nossos estudos. Compreendemos a geometria analítica como sendo uma parte imprescindível da matemática, e, como qualquer outra disciplina, está sempre em desenvolvimento, inserida historicamente nos contextos que a determinam.

Capítulo 3

Cônicas Não-Clássicas

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos importantes para o desenvolvimento desse trabalho. Definimos Lugar Geométrico, mostramos alguns exemplos de curvas algébricas planas, elipse, hipérbole, parábola, a Curva de Agnesi e o estudo de curvas obtidas pela trajetória de pontos fixos em circunferências que rolam, sem deslizar, sobre uma reta(A Ciclóide) ou sobre uma outra circunferência (Epiciclóide), e ainda falamos um pouco sobre o Folium de Descartes. Os conceitos apresentados aqui são baseados no capítulo I do Livro Introdução às Curvas Algébricas Planas de autoria de Israel Vainsencher. Para o desenvolvimento do trabalho de aplicação da Sequência Didática, utilizamos apenas os conceitos relacionados a Elipse, Hipérbole e Parábola. As demais curvas aqui apresentadas, apesar de serem importantes para o desenvolvimento desse trabalho, tornam-se muito complexas para serem aplicadas a alunos do ensino médio, bem como não fazem parte do atual currículo dessa etapa da educação básica.

3.1 Lugar Geométrico

É o conjunto de pontos que possuem uma mesma propriedade. Se um ponto possui uma propriedade p, o conjunto de todos os pontos (do plano ou do espaço) que possuem a propriedade p é chamado de Lugar Geométrico da propriedade p.

3.2 Curva Algébrica

Uma curva algébrica plana é o lugar dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do tipo $f(x, y) = 0$, onde f é um polinômio não constante (curvas descritas por equações polinomiais de duas variáveis).

Definição 1. *Uma curva algébrica plana afim (ou mais abreviadamente, curva) é uma classe de equivalência de polinômios não constantes $f \in K[X, Y]$, módulo a relação que identifica dois tais polinômios se um é múltiplo do outro por alguma constante.*

Nesse contexto, a equação de uma curva é representada por qualquer um dos polinômios nessa classe. Dizemos que uma curva está definida sobre o corpo K_0, subcorpo de K, se ela admitir uma equação a coeficientes em K_0.

3.2.1 Exemplos de Curvas Algébricas Planas

Elipse: lugar dos pontos tais que a soma das distâncias a dois pontos fixos (digamos $(\pm c, 0)$) é uma constante, que por conveniência escolhemos igual a $2a$. A condição imposta escreve-se $p(X+c)^2+Y^2+p(X-c)^2+Y^2 = 2a$. Esta equação não é polinomial, mas é possível eliminar os radicais e mostrar que toda solução dela é também solução da seguinte (e vice-versa), $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$, onde $b = \sqrt{a^2 - b^2}$.

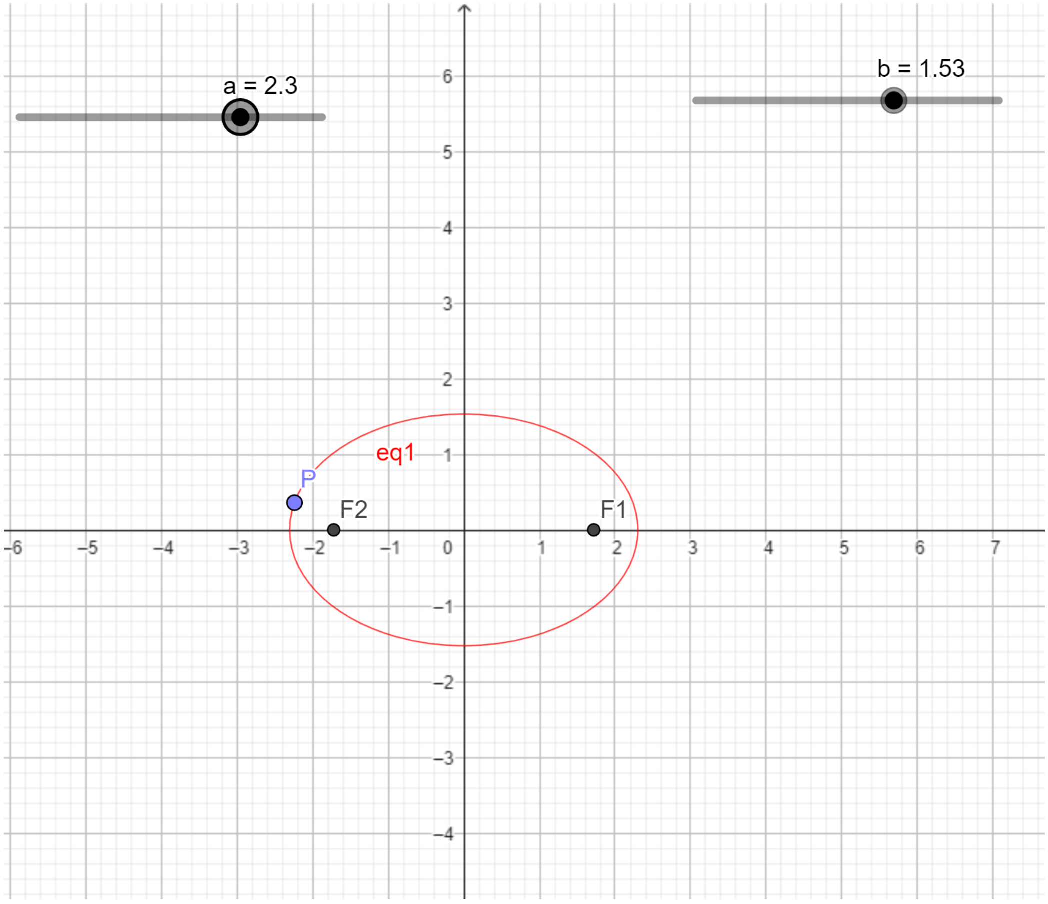

Figura 3.2.1: Elipse

Hipérbole: lugar dos pontos cujas distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, têm diferença uma constante igual a $2a$. Marcando os focos em $(\pm c, 0)$, a diferença das distâncias se expressa $p(X-c)^2+Y^2-p(X+c)^2+Y^2=2a$. Procedendo como no caso da elipse, pondo $b^2=c^2-a^2$, eliminamos os radicais e obtemos a equação $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$.

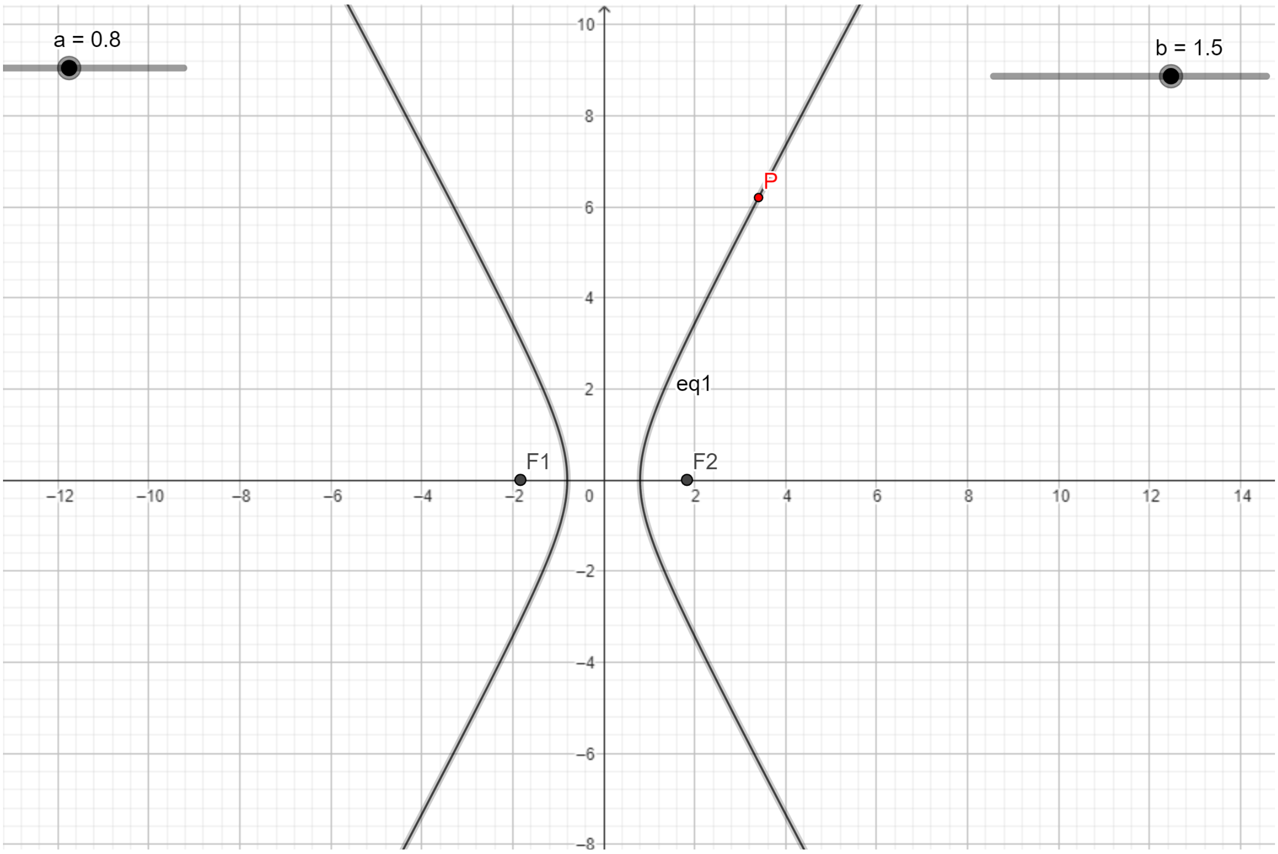

Figura 3.2.2: Hiperbole

Parábola: lugar dos pontos equidistantes de um ponto fixo, chamado foco e de uma reta fixa, diretriz. Tomando $(0, b), b > 0$ e $Y = -b$ como foco e diretriz, a equação (já simplificada) fica na forma, $X^2 = 4bY$.

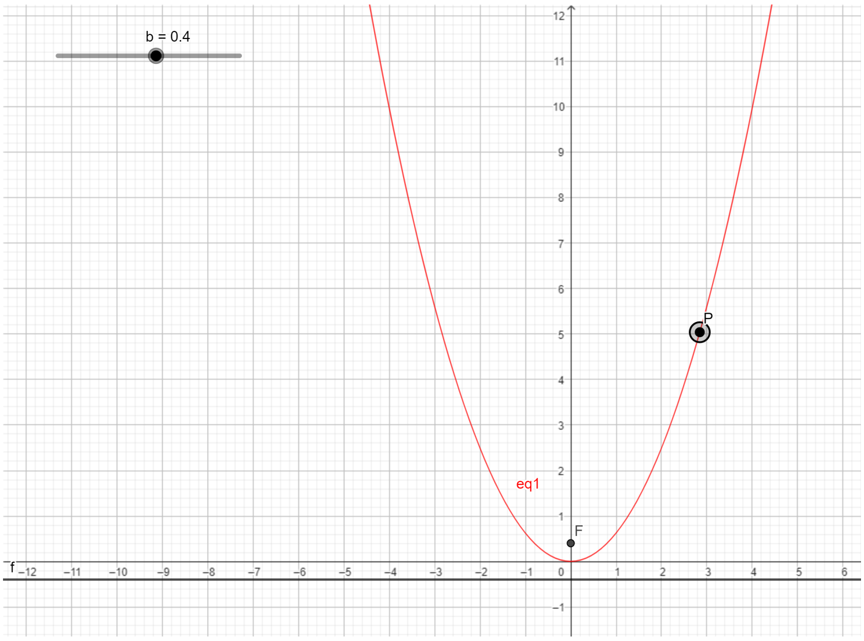

Figura 3.2.3: Parabola

Curva de Agnesi: Atribuída a Maria Gaetana Agnesi, é uma curva estudada por Agnesi em 1748 no seu livro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana.* A curva tem a seguinte descrição: fixada uma circunferência, toma-se um ponto O nela. De qualquer outro ponto A da circunferência, traça-se a secante OA. Seja M o ponto diametralmente oposto a O. A intersecção entre a reta OA e a reta tangente à circunferência no ponto M é o ponto N. Por A, traça-se uma reta paralela a MN, e por N uma reta paralela a OM. Seja P a interseção entre essas duas retas. O caminho que P faz ao variarmos A é a chamada curva de Agnesi.

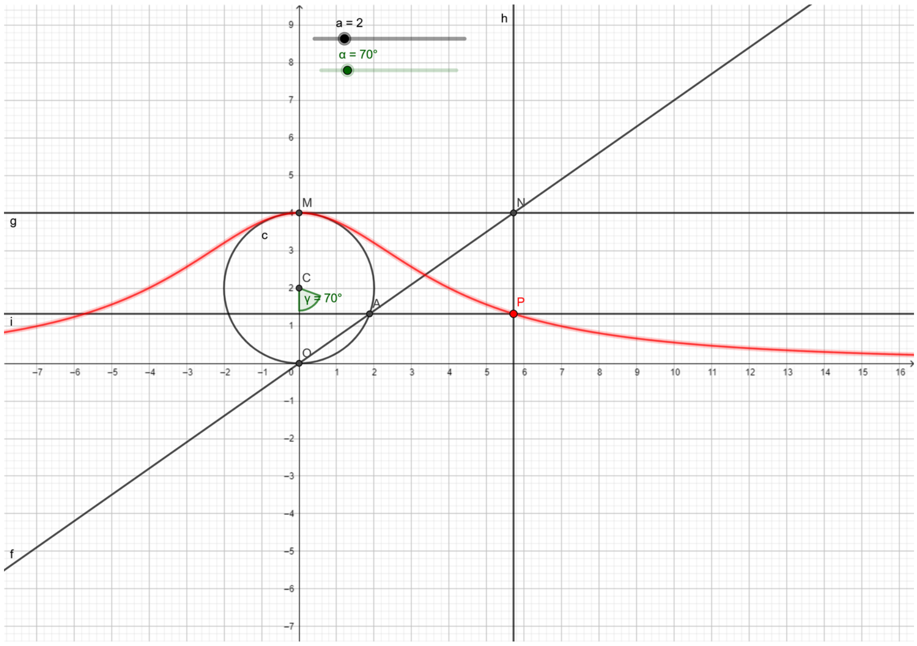

Figura 3.2.4: Curva de Agnesi

Ciclóide: Podemos dizer que é a curva descrita por um ponto sobre um círculo que gira enquanto caminha sobre uma reta sem escorregar. De forma mais simples é o resultado da combinação de uma rotação com uma translação. Se a distância de P ao centro O é igual ao raio da circunferência temos uma cicloide. Se é menor, temos uma cicloide encurtada, e se é maior, temos uma cicloide alargada.

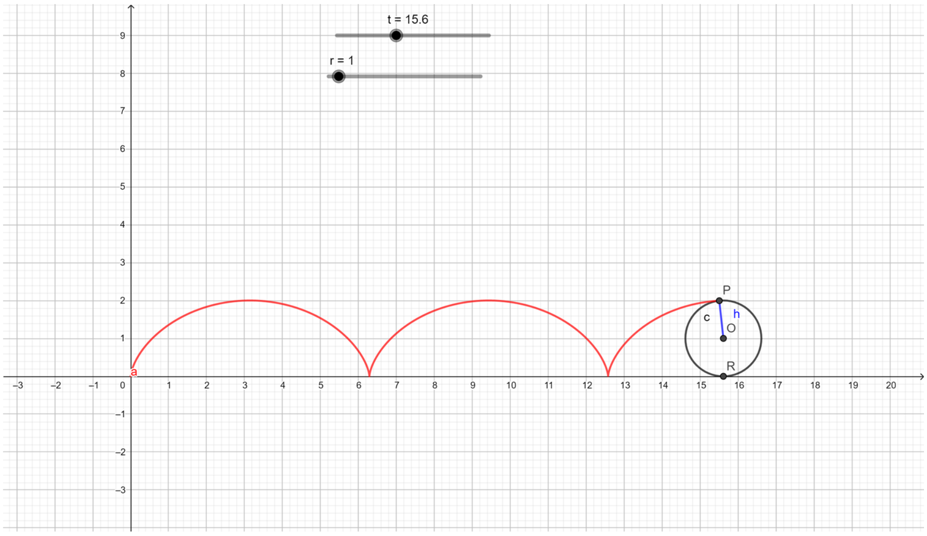

Figura 3.2.5: Movimento da Ciclóide

Equação Paramétrica da Ciclóide: Como sabemos, a Ciclóide é a curva traçada pelo ponto P na borda de um círculo quando ele rola ao longo de uma reta. Se o círculo tiver raio r e rolar ao longo de um eixo x, vamos obter as equações paramétricas da ciclóide considerando o ângulo de rotação θ como parâmetro (note que $\theta = 0$ quando P está na origem).

Suponha que o círculo tenha girado θ rad. Como o círculo está em contato com a reta que determina o eixo, temos que a distância que ele girou a partir da origem é:

$$|OT| = \text{arco}PT = r\theta\ .$$

Dessa forma o centro do círculo será $C = (r\theta, r)$. Sejam (x, y) as coordenadas de P. Da figura, vemos que:

$$\begin{aligned} x &= |OT| - |PQ| = r\theta - r\text{sen}\theta = r(\theta - \text{sen}\theta\ . \\ y &= |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)\ . \end{aligned}$$

Portanto, as equações paramétricas da ciclóide são:

$$
\begin{aligned}
x(\theta) &= r(\theta - \mathrm{sen}\theta).\\
y(\theta) &= r(1 - \cos\theta).
\end{aligned}
$$

Epiciclóide: A epiciclóide é definida como a trajetória de um ponto P, fixo a uma circunferência de um círculo de raio r, que rola exteriormente, sem deslizar e com velocidade constante, sobre a circunferência exterior de outro círculo fixo de raio R. Na figura abaixo pode-se variar os valores dos raios dos círculos, além de poder restringir o número de voltar que círculo rolante dá sobre o fixo, usando o controle deslizante n.

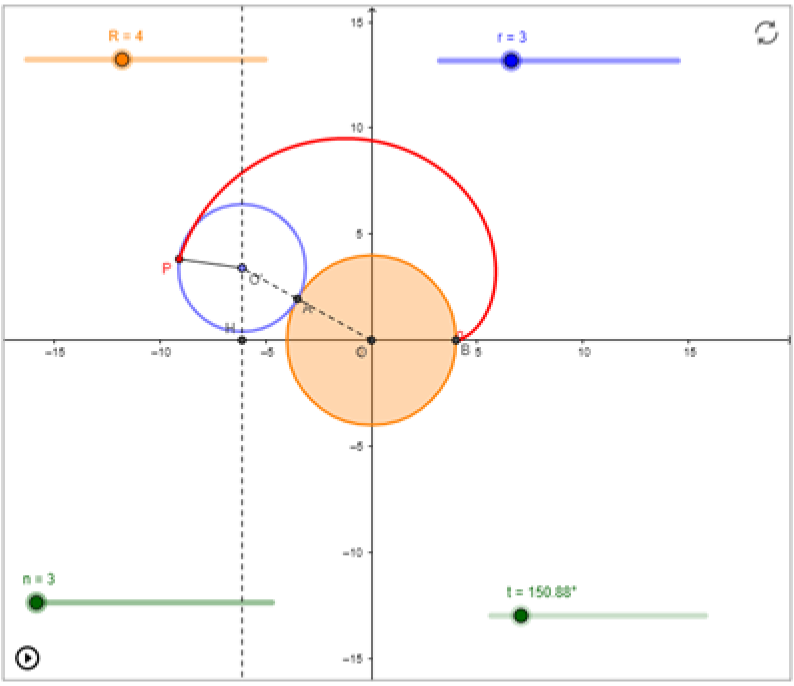

Figura 3.2.6: Movimento de criação da Epiciclóide

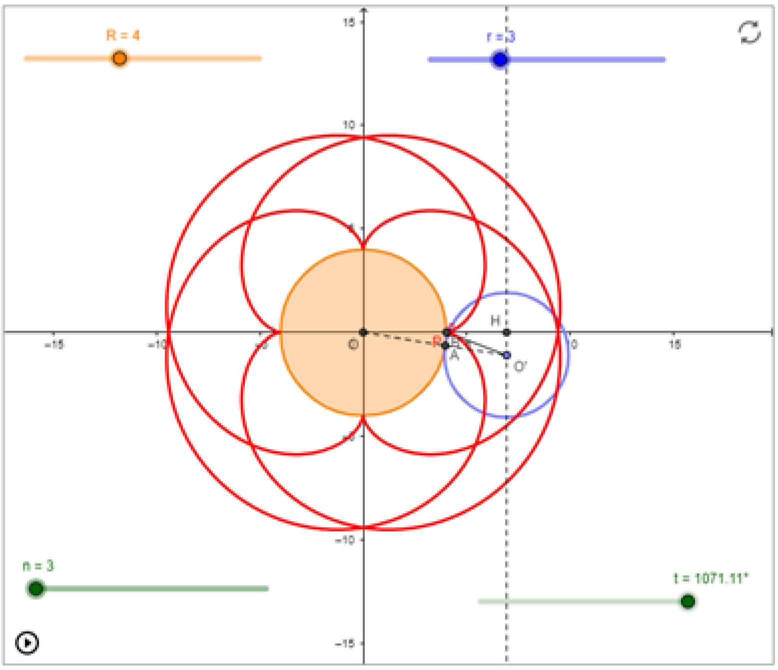

Figura 3.2.7: Epiciclóide

A epiciclóide pode ser vista como uma generalização da ciclóide, onde troca-se a reta, na qual um círculo rola, por outro círculo fixado. E como o círculo, rola sobre a circunferência exterior do fixo, o que explica o nome de epiciclóide, visto que epi vem do grego (sobre ou acima).

Entre alguns dos nomes que estudaram, a epiciclóide, se encontram: Alberto Durero (1471-1528), Girard Desargues (1591-1661), Isaac Newton (1642-1727), Jacob Bernoulli (1654-1705) e Leonhard Euler (1707-1783).

Equações paramétricas da Epiciclóide: Para determinar a parametrização, da epiciclóide, iremos considerar como origem do sistema cartesiano o centro O do círculo fixo. Por definição, os círculos são tangentes, com isso temos que, o ponto de tangência A, está sobre o segmento OO', onde O? é o centro do círculo rolante. Para determinar as coordenadas do ponto P, iremos analisar as coordenadas do ponto O?, e assim encontrar as coordenadas de P, em relação a O?. Tomaremos, que no início do movimento o ponto P, coincidia com o ponto de tangência, com coordenadas $(R, 0)$, conforme figura 1 representada acima. Primeiramente, toma-se como parâmetro o ângulo t formado, entre o segmento OO' e o eixo x positivo. Assim sendo as coordenadas do ponto O' são dadas por:

$$\begin{cases} x &= (R+r)\cdot\cos(t) \\ y &= (R+r)\cdot\operatorname{sen}(t)\ . \end{cases}$$

Sendo $B = (R, 0)$, o ponto de partida do ponto P, como não ocorre deslizamento no movimento, temos que para qualquer ângulo t, os arcos AB e AP possuem a mesma medida. E com isso temos que o ângulo $\alpha = O\widehat{O'}P$ é igual a:

$$\alpha = \frac{R}{r}t\ .$$

E considerando a reta perpendicular ao eixo x passando por O', temos também que o ângulo entre $H\widehat{O'}P$ (COMO ASSIM UM ÂNGULO ENTRE UM ÂNGULO??? REVEJA ISSO!!), onde H é o pé da perpendicular sobre o eixo x, é igual a:

$$H\widehat{O'}P = \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{R+r}{r}\cdot t - \frac{\pi}{2}\ .$$

E com isso, podemos determinar as coordenadas do ponto P, que são:

$$\begin{cases} x &= (R+r)\cdot\cos(t) - r\operatorname{sen}\left(\dfrac{R+r}{r}\cdot t - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y &= (R+r)\cdot\operatorname{sen}(t) - r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\cdot t - \dfrac{\pi}{2}\right)\ . \end{cases}$$

Usando as propriedades de diferença de arcos temos:

$$\begin{cases} x &= (R+r)\cdot\cos(t) - r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\cdot t\right) \\ y &= (R+r)\cdot\mathrm{sen}(t) - r\mathrm{sen}\left(\dfrac{R+r}{r}\cdot t\right) \end{cases}.$$

Folium de Descartes: O *folium de Descartes* é uma curva plana proposta por Descartes para desafiar as técnicas de extremos de Fermat. O nome vem da palavra latina folium, que significa ?folha? e na forma paramétrica, esta curva é parametrizada por:

$$\overrightarrow{r}(t) = \frac{3at}{1+t^3}\overrightarrow{i} + \frac{3at^2}{1+t^3}\overrightarrow{j}.$$

Esse fólio foi discutido pela primeira vez por Descartes em 1638, mas, embora ele tenha encontrado a forma correta da curva no quadrante positivo, ele acreditava que essa forma de folha se repetia em cada quadrante como as quatro pétalas de uma flor.

O Fólio de Descartes é famoso por causa de um incidente no desenvolvimento do cálculo. Descartes desafiou Pierre de Fermat a encontrar a linha tangente à curva em um ponto arbitrário, já que Fermat havia descoberto recentemente um método para encontrar linhas tangentes. Fermat resolveu o problema facilmente, algo que Descartes não foi capaz de fazer.

Uma curva parametrizada $\overrightarrow{r}(t)$ é chamada de simples se ela não possui pontos de auto-interseção. Ou seja, se existirem pontos t_0? e t_1?, tais que $\overrightarrow{r}(t_0) = \overrightarrow{r}(t_1)$, a curva não é simples. O **Folium de Descartes não é uma curva simples**, como podemos observar no esboço abaixo:

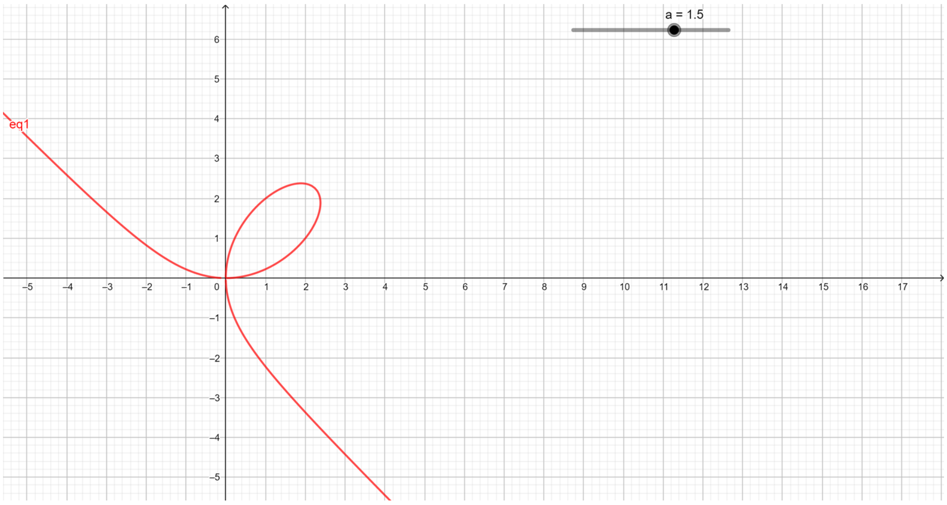

Figura 3.2.8: Fólio de Descartes

Para enriquecermos ainda mais o trabalho e contextualizarmos os conceitos apresentados até aqui, apresentamos a solução do exercício 8 contido na unidade 10 ? Curvas Planas Parametizadas do Livro Geometria Analítica dos autores Jorge Delgado, Kátia Frensel e Lhaylla Crissaff.

Exemplo: Considere o círculo da figura. Sejam OA o diâmetro sobre o eixo OX, AB um segmento tangente ao círculo em A, e C o ponto em que o segmento OB intercepta o círculo. Se P está sobre o segmento OB e $OP = CB$, obtenha as equações paramétricas do lugar geométrico descrito por tais pontos P. Esta curva é denominada Cissóide de Diocles. Determine também a equação cartesiana, mostre que a reta $x = 2a$ é uma assíntota e faça um esboço da curva.

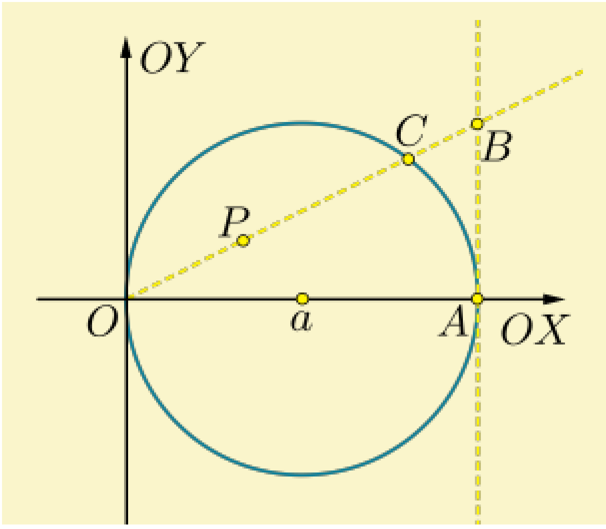

Figura 3.2.9: Involuta

Como $AB = 2a\text{tg}\theta$ e $CB = OP = r = AB\text{sen}\theta$, temos que $r = 2a\text{tg}\theta \cdot \text{sen}\theta$ e, portanto, $x = r\cos\theta = 2a\text{tg}\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta, y = r\text{sen}\theta = 2a\text{tg}\theta\text{sen}2\theta$ são equações paramétricas da curva.

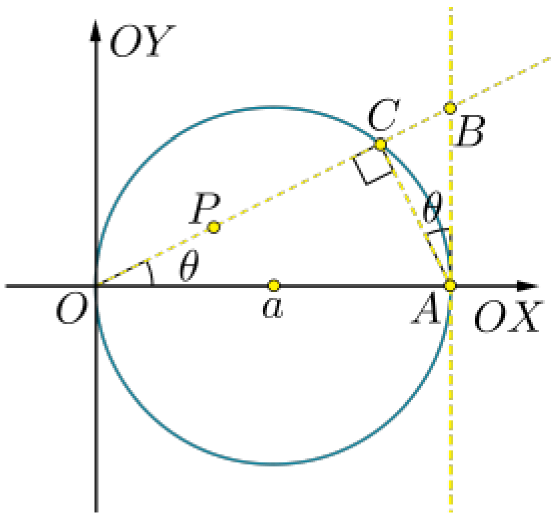

Figura 3.2.10: Solução do exercício

Além disso, como $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ e $\text{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, a equação cartesiana da curva é

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{y}{x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ,$$

Ou seja,

$$x^3 = y^2(2a-x) \ .$$

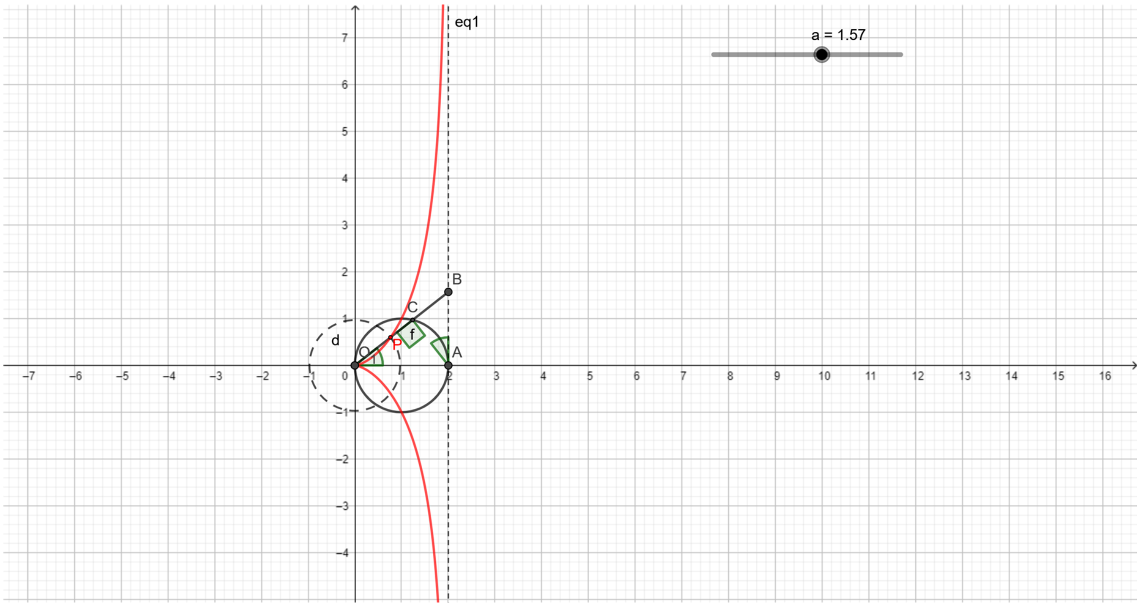

Figura 3.2.11: Solução do exercício 8

A curva é, portanto, simétrica em relação ao eixo OX, e como $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^3}{2a-x}}$, $0 \leq x < 2a$, $\lim\limits_{x\to 2a^-} y = \pm\infty$. Logo, $x = 2a$ é uma assíntota da curva.

Capítulo 4

Sequência Didática de Pólya

A Geometria Analítica é um tema muito importante que perpassa todos os níveis da educação básica. Os documentos oficiais que regulamentam o currículo estabelecem que, a partir do Ensino Fundamental II até o Ensino Médio, sejam trabalhados desde os conceitos mais básicos até os mais complexos relacionados aos estudos dessa importante área da matemática.

Considerando que esse tema se revela extremamente rico por exigir conhecimentos e habilidades tanto de álgebra como de geometria na resolução de problemas ligados a esse tema e refletindo acerca das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos ao estudar esse conteúdo, necessita-se organizar um conjunto de atividades que se tornem eficazes no cumprimento dos objetivos de ensino e facilitem a resolução de problemas. Assim, adota-se uma Sequência Didática que tem como objetivo vivenciar e manipular diferentes alternativas em busca de uma aprendizagem mais significativa. Apresentamos a seguir algumas definições de Sequência Didática que irão nos embasar no desenvolvimento desse estudo.

Zabala (1998) nos traz a seguinte definição para Sequência Didática, "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos"(ZABALA, 1998, p. 18). Assim, considerando essa definição, o professor, apoiado nos objetivos que almeja atingir com os alunos, deve organizar, de forma bem estruturada, um conjunto de atividades a fim de alcançar a aprendizagem dos conteúdos definidos para a unidade didática estabelecida.

Entendemos uma Sequência Didática como um conjunto de atividades estruturadas relacionadas a um determinado conteúdo. Segundo Silva e Oliveira (2009), "Uma Sequência Didática se refere a uma sequência elaborada pelo professor que proporciona uma escolha ou organização de atividades que explorem o domínio do conhecimento dos alunos em sala de aula"(SILVA; OLIVEIRA, 2009, p. 2). A citação das autoras deixa bem claro a importância de valorizar as respostas dos alunos. Nesse contexto, vê-se relevância em considerar o nível em que eles se encontram, suas habilidades e seus conhecimentos prévios. Vale ressaltar a importância das atividades de sondagem e diagnósticas, pois elas contribuem, de forma significativa, para conhecê-los e poder organizar uma sequência que proporcione bons resultados.

Segundo Paula e Barreto (2016), é importante destacar que:

> [...] Sequência Didática não se trata de um aglomerado de atividades soltas, mas sim representa uma articulação entre as atividades, que devem proporcionar níveis progressivos de desafios e habilidades necessárias, além da necessidade de o professor ter definido o objetivo da aprendizagem. (PAULA; BARRETO, 2016, p.04)

É fato que na disciplina de Matemática, quando um professor propõe questões ou situações problemas, ele espera que os estudantes sejam capazes de resolvê-las, e nesse sentido, a utilização da Sequência Didática como um recurso pedagógico contribui para que o professor tenha um novo olhar sobre a organização do conteúdo, de onde pode partir para a problematização, conduzindo o aluno a verificar seu conhecimento prévio e a se apropriar de novos significados.

Neste sentido, a importância de utilizar metodologias que auxiliem os alunos a adquirirem competências e habilidades para a resolução de problemas é papel fundamental do professor. Dentre estas estratégias, a Metodologia proposta por George Pólya, que está contida na obra "A arte de resolver problemas"(PÓLYA, 2006), pode ser bastante relevante na melhoria da aprendizagem dos alunos na disciplina Matemática e especificamente nos conteúdos relativos a Geometria Analítica.

George Pólya (1887-1985), natural de Budapeste, foi um importante matemático de sua área de pesquisa, publicando trabalhos relevantes em áreas como Análise Combinatória e Probabilidade. Entretanto, Pólya tornou-se uma grande referência no ensino de Matemática publicando trabalhos voltados para este fim. Em um dos seus artigos publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM 10), Elon Lages Lima faz uma apresentação suscinta, porém bastante completa sobre esse grande matemático, a qual citamos:

> George Pólya (1887 + 98 = 1985) nasceu em Budapest, Hungria, foi professor em Zurich de 1914 a 1940 e depois em Stanford, Estados Unidos, onde se aposentou em 1953, mas continuou ativo até praticamente sua morte, quase centenário. [?] Nos últimos quarenta anos de sua longa carreira, passou a interessar-se pelo ensino da Matemática, dedicando-se quase inteiramente ao estudo das questões referentes à transmissão do conhecimento matemático. (POLYA, 1987, p.2)

A obra de George Pólya nos indica que a aplicação dos procedimentos sugeridos pelo autor poderia nos indicar a utilização e aplicação de uma ferramenta que muito contribui para resolução de problemas matemáticos, pois facilmente identificamos desde o início que seus conceitos, apesar de terem sido apresentados há muitos anos, continuam atuais, o que nos faz entender porque ainda hoje sua leitura é recomendada por muitos professores. Pólya explica que a sua obra "A arte de resolver problemas"é uma tentativa de reviver o estudo da heurística que tem múltiplas conexões e matemáticos, lógicos, psicólogos, educadores e até filósofos reivindicam partes deste estudo para seus domínios particulares (Pólya, 2006, p.99).

Assim, é possível identificarmos que a aplicação dessa ferramenta pelos professores em sala de aula se apresenta como um dos caminhos no desenvolvimento das competências e habilidades necessárias aos alunos para a resolução de problemas matemáticos, conforme consta na BNCC Ensino Médio (BRASIL, 2017, p. 470), que no Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional. Na BNCC do ensino médio, a terceira competência específica detalha que os estudantes devem,

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos ? Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística ?, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2017, p. 523)

Por esse motivo, identificamos o método conhecido como Sequencia Didática de Polya contido no livro "A arte de resolver problemas", como uma eficaz ferramenta que poderá contribuir para atingir o objetivo de vivenciarmos uma nova proposta para o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias à resolução de problemas matemáticos, possibilitando aos alunos que ampliassem o interesse pela Matemática, principalmente na área de Geometria Analítica, conteúdo que é foco deste trabalho. Como já dissemos, um dos objetivos desse trabalho é apresentar uma forma eficiente do professor ensinar e do aluno aprender matemática a partir de resolução de problemas, e já apresentando o método Pólya(2006) nos mostra que existem quatro fases para resolver um problema de matemática de forma eficiente:

- **Compreender o problema (CP):** o que é necessário para resolvê-lo? Quais suas variáveis e incógnitas?
- **Designar um plano (DP):** Esse problema é conhecido? Como as variáveis estão correlacionadas? Quais estratégias devemos usar para sua resolução?
- **Executar o plano (EP):** é possível verificar cada passo da execução? É possível demonstrar que o plano está correto?
- **Retrospecto do problema (RP):** é possível verificar o resultado encontrado?

Analisando as fases acima é perceptível como este processo de resolução de um problema de matemática proposto por Pólya é um método bastante interessante e de fácil aplicação. Se o professor planejar uma boa atividade e se todas as fases forem bem executadas, com certeza os objetivos de aprendizagem e resultados esperados serão atingidos.

$$CP \to DP \to EP \to RP.$$

A compreensão do problema é o ponto inicial do processo e se faz necessário que o aluno interprete o enunciado do problema e tenha vontade de resolvê-lo. Em seguida, o aluno estabelecerá um plano para a resolução do problema, apontando suas variáveis, suas hipóteses e seus modelos. A execução do plano só será eficaz se todo o planejamento desde da sua compreensão até as estratégias a seguir forem realizadas a contento. E por fim, fazer uma retrospectiva do problema executado, sendo de total valia esta ação, pois o mesmo comprovará a verdade do resultado obtido.

Capítulo 5

Delineamento da Pesquisa

5.1 Sobre a Professora Pesquisadora

Nasci em 1979, conclui minha licenciatura em Matemática na Universidade Regional do Cariri - URCA em 2002, mas desde antes da conclusão da licenciatura já atuava como professora de matemática tanto na rede pública como na rede privada. Na rede estadual, iniciei minha trajetória como contrato temporário em 2001 ficando com esse vínculo até 2010, onde prestei concurso público para professor e passei a ser efetiva lotada 40h/a na EEMTI Gabriel Bezerra de Morais na qual estou prestando meus serviços até hoje.

Desde então, venho buscando o aprimoramento da prática docente com muito estudo, troca de experiências com colegas de profissão e da participação em diversos cursos de formação continuada. Nesse sentido, o curso do Mestrado foi a experiência mais desafiadora em minha vida profissional como professora por diversos aspectos, mas principalmente, pelas dificuldades que encontrei durante o percurso, pois me lembrando delas eu busco compreender melhor meus alunos e os seus desafios frente ao aprendizado da Matemática.

5.2 Sobre a Escola de Aplicação

O local de desenvolvimento das atividades de pesquisa do presente trabalho foi uma escola de ensino médio de tempo integral da rede pública estadual do Ceará, localizada na cidade de Farias Brito chamada EEMTI Gabriel Bezerra de Morais. Em 2021, essa escola tinha um total de 431 alunos matriculados, distribuídos em 10 turmas durante os turnos manhã e tarde. As turmas que participaram da pesquisa e que foram aplicadas as questões para análise dos dados foram os 3° anos que totalizavam 72 alunos, mas apenas 35 alunos participaram do estudo.

5.3 Sobre o Grupo de Aplicação

O presente projeto foi desenvolvido com um grupo de estudantes matriculados na escola citada anteriormente, constituído por jovens que, em 2021, cursavam o 3° ano do Ensino Médio. Estes jovens, ao serem convidados para participarem da pesquisa, demonstraram-se muito interessados em colaborar com o meu trabalho, pois viram como uma oportunidade de melhorar os seus conhecimentos em Matemática. Durante o período de realização da pesquisa e apresentação das questões que continham as situações problemas, podemos contar com a presença de 30 alunos em média durante os encontros.

5.4 Caracterização do Estudo

De forma simplificada podemos dizer que uma metodologia nada mais é que o direcionamento para o cumprimento de algum objetivo, ou seja, o estudo dos caminhos necessários para se alcançar um determinado objetivo. Na concepção de Aragão e Mendes (2017, apud Gonçalves (2020)), metodologia é o estudo do método utilizado para se buscar certo conhecimento. Trata-se das formas de se fazer ciência. Para Marconi e Lakatos (2003) o método é o conjunto das atividades sistemáticas que permite alcançar o objetivo, traçando o caminho a ser trilhado, identificando erros e contribuindo nas decisões do pesquisador. O presente estudo consiste na elaboração, aplicação e análise de uma Sequência Didática, como proposta de ensino e aprendizagem dos princípios básicos da Geometria Analítica, tendo como metodologia a Resolução de Problemas. Para a elaboração da Sequência Didática, pretende-se fazer um estudo diagnóstico sobre os conhecimentos prévios dos alunos, acerca do conteúdo citado anteriormente. Essa concepção teve como suporte os estudos de Vygotsky, sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Nessa perspectiva, os autores Trevizan e Brolezzi(2016), afirmam que:

> Um conceito muito conhecido de Vygotsky é a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que na escala do desenvolvimento cognitivo, é a área definida entre o nível real de desenvolvimento e o nível potencial da criança. O nível real de desenvolvimento envolve aquilo que ela já sabe ou é capaz de realizar sozinha. (Trevizan e Brolezzi, p.32, 2016)

Com base na afirmação, podemos afirmar que o nível potencial envolve tudo o que está em vias de aprender. [...] A ZDP é, então, o estágio que pode vir a ser alcançado pela criança no nível de desenvolvimento em que se encontra. (TREVIZAN; BROLEZZI, 2016, p. 33-34). O nível de desenvolvimento potencial refere-se aquilo que o aluno alcançou a partir da interação com outras pessoas, por exemplo com seus pares ou com seus professores. A ideia de ZDP faz com que o professor valorize os conhecimentos prévios dos seus alunos e também aquilo que eles ainda podem aprender. Em outras palavras, o olhar do professor não se volta apenas para aquilo que o seu aluno tem ou não condições de fazer, considerando que é nas possibilidades de aprendizagens que se encontra a ação educativa. Contudo, esta pesquisa busca destacar o processo de ensino e aprendizagem por meio da análise das respostas dos alunos das questões propostas pelo pesquisador e dessa forma, se caracteriza por ser um estudo de natureza descritiva e de abordagem qualitativa.

A pesquisa descritiva tem como principal objetivo, descrever as características de determinada população ou fenômeno. Nela, o pesquisador observa, registra, analisa e correlaciona fatos, fenômenos ou variáveis sem proceder quaisquer manipulações neles (GOMES, 2004). O autor mencionado também nos lembra que na pesquisa qualitativa o pesquisador experimenta um cruzamento de suas conclusões de maneira que tenha maior segurança de que suas informações não são produto de algum acontecimento particular.

Segundo Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa se preocupa com fatos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se no entendimento e no esclarecimento da prática das relações sociais. Para as autoras, a pesquisa científica é o resultado de um exame detalhado, executado com o propósito de resolver um problema utilizando métodos científicos.

Com o objetivo de propor uma sequência didática que auxilie na aprendizagem dos conceitos básicos da Geometria Analítica, por meio da resolução de problemas, definiu-se que este estudo é de finalidade básica estratégica, sob o método hipotético ? dedutivo e realizada com procedimentos bibliográficos e pesquisa ? ação. Para

Thiollent (1985) apud Gil (2010), a pesquisa ? ação pode ser definida como:

> [...] um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou ainda, com a resolução de um problema coletivo, onde todos pesquisadores e participantes estão envolvidos de modo cooperativo e participativo. (GIL, 2010, p. 42)

Portanto, o detalhamento metodológico do estudo sobre os conceitos e conceitos básicos da Geometria Analítica para o Ensino Médio; as dificuldades na aprendizagem em Geometria Analítica; a Geometria Analítica nos documentos norteadores da educação básica; e a resolução de problemas no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos e fundamentos da sequência didática, colaborarão para a organização e a interpretação dos dados.

5.5 Técnicas e Instrumentos de Coleta de Dados

O método científico tem como fim garantir que os dados coletados representem com fidelidade a realidade estudada. Nesse sentido, Gil (2010) aborda que os instrumentos de coleta de dados são os meios utilizados para aplicar as técnicas escolhidas. A qualidade dos resultados de uma pesquisa depende, essencialmente, da qualidade dos instrumentos usados na coleta de dados. Assim, é perceptível a importância do delineamento de ferramentas consistentes e adequadas para realizar a investigação. Nessa pesquisa, far-se-á a coleta de dados para investigação, a partir de dois instrumentos: o questionário 01 com objetivo de traçar o perfil dos sujeitos que participam, obtendo uma visão ampliada da realidade, principalmente diante do atual contexto de pandemia; e questionário 02 que se trata de uma avaliação diagnóstica, que contém dez problemas abertos que envolvem habilidades básicas de Geometria Analítica. O objetivo na aplicação, foi de coletar informações acerca da aprendizagem em Geometria Analítica por meio da resolução de problemas, bem como averiguar os conhecimentos prévios, as estratégias de resoluções e identificar possíveis dificuldades de aprendizagem dos alunos que participaram da pesquisa.

Além da técnica e dos instrumentos mencionados acima, utilizaram-se, para visualizar o desenvolvimento de cada aluno no desenrolar da pesquisa: anotações pessoais; áudios dos grupos de estudo; atividades entregues e recolhidas, como também questionamentos subjetivos por parte do professor pesquisador, a fim de que os alunos apontassem, de forma escrita ou oral, as dificuldades relacionadas às etapas da resolução de problemas e aos conceitos abordados. Acredita-se que os instrumentos de pesquisa utilizados e o processamento das análises possibilitarão responder à questão de investigação proposta para este estudo que é: como uma sequência didática envolvendo resolução de problemas com o método de Polya, pode contribuir na aprendizagem dos conceitos básicos de Geometria Analítica.

5.6 A Geometria Analítica nos documentos norteadores da Educação Básica (BNCC e DCRC)

A LDB (BRASIL, 1996) tem como objetivo regular os direitos e deveres da política brasileira em relação a educação formal e não-formal, possibilitando que os alunos deem prosseguimento aos seus estudos, de modo que em conjunto com a Base Nacional Comum Curricular ? BNCC (BRASIL, 2017) e Diretrizes Curriculares, definam os processos educacionais conforme os princípios presentes na Constituição. A BNCC foca no conjunto de competências gerais e específicas para cada área do conhecimento e, especificamente no campo da Matemática para o Ensino Médio, o documento postula sobre competências e habilidades, as quais buscam:

(i) pensar e racionar utilizando estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos;

(ii) propor atividades que levem a investigação de desafios do mundo contemporâneo de forma a articular conhecimentos matemáticos;

(iii) planejar e resolver problemas a partir da construção de modelos que levem os estudantes a plausibilidade dos resultados das soluções propostas;

(iv) utilizar ferramentas que primem pela investigação e o estabelecimento de conjecturas acerca de diferentes conceitos, empregando recursos e estratégias como observação, experimentação e tecnologias digitais;

(v) compreender e utilizar com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação da matemática.

Nesses documentos oficiais não encontramos nada específico relacionado a Geometria Analítica a não ser a representação de variáveis no plano cartesiano principalmente relacionadas as funções do 1° e 2º graus, são poucas as referências que apontam a inserção de conceitos como ponto, reta, circunferência e cônicas ficando claro que esse assunto ficou muito deslocado na BNCC dessa etapa da educação nacional. Na minha avaliação, considero que esse assunto ficou bastante reduzido, sem a atenção que deveria receber. Há poucas sinalizações de contextualização e integração nem mesmo entre os eixos matemáticos.

Além disso, tanto a BNCC (BRASIL, 2017) como as DCRC (CEARÁ, 2021) sinalizam que as tecnologias digitais podem ser ferramentas agregadoras ao estudo da Geometria Analítica, visto que é uma forma de expandir os conhecimentos dos estudantes através da dinamicidade que se estabelece entre a simulação dos objetos e suas variáveis, abrindo assim a possibilidade de representação das diversas figuras geométricas por meio de coordenadas cartesianas. Vale salientar que a BNCC também preconiza que, no Ensino Médio, os alunos devem desenvolver e mobilizar habilidades que serão úteis para resolver problemas ao longo de sua vida. Para isso, as situações problemas propostas precisam ter significado real para eles (BRASIL, 2017). Nesse sentido, além dos problemas geradores serem elaborados fundamentados no contexto social, algumas atividades propostas devem conter os conceitos que não são citados especificamente, mas são relacionados com outros eixos contidos nas diversas habilidades da área Matemática.

Capítulo 6

Resultados e Discussões

6.1 Aplicação da Sequência Didática

Conforme descrito no objetivo desse trabalho, buscamos, com essa Sequência Didática, contribuir para que situações favoráveis surjam a fim de que os alunos consigam assimilar os conceitos básicos de Geometria Analítica, permitindo a identificação de dificuldades que venham surgir no processo. Para atingir os objetivos dessa pesquisa mencionados anteriormente, a Sequência Didática sugerida será abordada levando em conta quatro etapas compostas por oito encontros com 50 minutos cada um. Quanto à estrutura organizacional dos conteúdos da Sequência Didática, esta será posta em prática considerando as informações na Tabela 6.1.1:

Primeira Etapa	Estudo de conceitos iniciais: plano cartesiano, ponto e reta.
Segunda Etapa	Estudo dos conceitos de Elipse: definição e equação.
Terceira Etapa	Estudo dos conceitos de Hipérbole: definição e equação.
Quarta Etapa	Estudo dos conceitos de Parábola: definição e equação.

Tabela 6.1.1: **Etapas da Sequência Didática**

A forma como essa Sequência Didática foi organizada e definida, é principalmente porque cada etapa servirá de base para uma melhor compreensão do conteúdo a ser aprendido posteriormente. Dessa forma, conforme temos observado em nossa vivência, os conteúdos estarão ordenados de forma a contribuir para a resolução de atividades relacionadas ao estudo de Geometria Analítica e com uma progressão nos níveis de dificuldades, favorecendo assim a aprendizagem dos alunos.

Para construção da Sequência Didática, usamos como apoio a metodologia de ensino por meio da Resolução de Problemas, objetivando a aprendizagem de conceitos e de resolução de problemas mediante uma participação ativa dos alunos. As escolhas foram fundamentadas, principalmente, nos estudos feitos por Polya (2006) em sua obra ?A Arte de Resolver Problemas?.

Como já relatado, Polya (2006) recomenda, que no processo de ensino e aprendizagem, a resolução de problemas seja executada em quatro passos: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e retrospectiva.

E nessa perspectiva, Zabala (1998) contribui com esse trabalho quando propõe que as atividades sejam executadas de forma ordenada, estruturada e articulada a fim de alcançar os objetivos educacionais, sendo o caminho a ser trilhado conhecido pelo professor e pelos alunos. Além disso, o autor também contribui quando relata sobre a importância da ampliação dos objetivos para abranger os diferentes tipos de conteúdo (conceituais, procedimentais e atitudinais), o planejamento e a avaliação de uma Sequência Didática.

Assim, pressupomos que o estudo apoiado nas abordagens acima citadas tenha grande importância para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio. Nessa perspectiva, acredita-se que o desenvolvimento de atividades bem estruturadas, organizadas em etapas, vivenciadas através de situações-problema e apoiadas na metodologia da Resolução de Problemas, contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos de forma bastante significativa.

6.2 Resultados e Discussões

Ao término da coleta de dados de uma pesquisa, faz-se necessário à sua análise, e especificamente nesse estudo, os dados coletados serão descritos e interpretados segundo um panorama fenomenológico. Bicudo (2010), considera que a fenomenologia tem, como cerne, a busca do sentido que as coisas as quais estão à nossa volta fazem para nós. Para a autora, essa busca de sentido faz grande diferença, colocando-se como significativa principalmente no contexto da educação. Por isso, neste estudo, pretende-se compreender como uma Sequência Didática, envolvendo Resolução de Problemas pode contribuir para a aprendizagem dos conteúdos de Geometria Analítica.

Optamos pela fenomenologia como suporte para a compreensão dos fatos ocorridos no decorrer do estudo. A identidade dos alunos participantes será resguardada ao analisar: a aplicação dos questionários; as observações das aulas e as atividades propostas. Assim, para a análise dos dados selecionamos algumas atividades, que nos ajudassem a responder à pergunta da pesquisa e por esse motivo, apresenta-se uma seleção de situações e soluções que se julga serem relevantes para a análise dos dados.

6.3 Descrição e análise dos questionários informativo e diagnóstico

O primeiro encontro com os alunos aconteceu no dia 05 de outubro de 2021 (alunos do 3º ano do ensino médio de tempo integral). Muito importante contextualizar o momento de dificuldades que vivíamos. Estávamos apenas com dois meses de retorno das atividades presenciais na rede estadual do Ceará, e os alunos passavam por um processo de readaptação na escola. As dificuldades eram gritantes e o ritmo do processo ensino-aprendizagem era outro. De início socializou-se os objetivos da pesquisa, a metodologia a ser utilizada, orientações acerca dos quatro passos para a resolução de um problema segundo George Polya e a definição de uma Sequência Didática. Em seguida, os vinte e cinco alunos presentes responderam primeiramente ao questionário informativo (apêndice A), e, em seguida, buscaram, individualmente, solucionar os problemas propostos no questionário diagnóstico (apêndice B).

Esse encontro teve a duração de duas aulas de 50 minutos, a aplicação do questionário diagnóstico iniciou após 40 minutos da primeira aula, logo após o questionário informativo. Durante a aplicação do questionário diagnóstico, surgiram dúvidas e questionamentos: ?É muito difícil professora??, ?Esse conteúdo é muito difícil?, ?Não estou entendendo essa questão?. Durante a aplicação do questionário sempre dialoguei tentando incentivar os alunos e buscando fazer com que eles conseguissem resolver as questões.

No momento da aplicação do questionário o cenário refletido era de silêncio, mas de certa inquietação por parte de alguns alunos participantes que apresentavam pouca concentração. Após 30 minutos do início, os alunos começaram a devolver os questionários, nesse momento cinco alunos entregaram. Por fim, restaram os quatro últimos que entregaram o questionário 10 minutos após o término do tempo proposto.

Figura 6.3.1: Aplicação de questionário informativo e diagnóstico

Com o objetivo de levantar resultados que contribuíssem para a realização de uma avaliação sobre os conhecimentos prévios dos alunos e também para identificar possíveis dificuldades de aprendizagem, fizemos de forma bastante detalhada as correções dos questionários. As oito questões propostas no questionário diagnóstico envolviam os conceitos básicos da Geometria Analítica (Representação de pontos no plano cartesiano, distância entre pontos e ponto médio, equações da reta, circunferência e cônicas).

Serão apresentados a seguir, os dados coletados na pesquisa por meio do questionário informativo. Será apresentado primeiramente o perfil dos alunos, contendo dados sobre a componente curricular de matemática no processo de aprendizagem. Em seguida, será realizado um comentário geral relacionado aos problemas utilizados no questionário diagnóstico.

O questionário informativo trazia 10 questões acerca de gênero, faixa etária, possíveis reprovações, tópicos matemáticos de Geometria Analítica e outros temas relevantes para essa pesquisa. Num universo de 25 alunos, todos responderam ao questionário. Entre os sujeitos pesquisados 11 responderam ser do sexo masculino, 14 do sexo feminino e nenhum respondeu outro. Quanto à faixa etária, obtiveram-se respostas no intervalo entre 15 e 19 anos. A maioria respondeu que se encontrava na faixa etária de 16 a 17 anos (70%). Observando esses números, é possível ver que não há diferenças significativas entre as faixas etárias dos alunos que participaram da pesquisa.

Somente três alunos responderam que já ficou reprovado em alguma série do percurso de sua vida escolar, desses três, um aluno respondeu que já foi reprovado duas vezes consecutivas na mesma série, os demais tiveram êxito em todos os anos letivos. Os alunos reprovados apontaram como possíveis motivos da reprovação: alguns problemas familiares, dificuldade de organizar seus estudos, a falta de perspectiva de vida, desinteresse diante dos estudos e desmotivação. Entre os fatores que levaram a reprovação, destacamos: a dificuldade de organização dos estudos, desinteresse e a desmotivação. Nesse sentido, Polya (2006), nos coloca a respeito da resolução de problemas matemáticos, que o professor que deseja desenvolver nos seus alunos tal habilidade, deve buscar motivá-los. Para ele, a motivação do aluno passa pelo interesse e por oportunidades de imitações e de práticas.

Apesar do número baixo de reprovações, os dados coletados mostraram que as reprovações tiveram, como causas, os baixos rendimentos em algumas disciplinas: Matemática; Física; Biologia; Química e Língua Portuguesa.

Quanto à alternativa que melhor caracterizava a relação do aluno com os conteúdos propostos de acordo com a resolução de problemas, 40% responderam que tinham dificuldades em resolver os problemas propostos, por não possuir uma boa base, não compreender o enunciado do problema e não saber retirar os dados necessários para resolução.

Em relação aos conhecimentos sobre Geometria Analítica abordados no questionário diagnóstico, $20,7\%$ responderam que nunca tinham visto este conteúdo; $56,6\%$ tinha alguma noção desse conteúdo; $22,7\%$ tinham conhecimento sobre esse conteúdo e que tinham no mínimo noções básicas. Diante da análise do desempenho em Resolver Problemas Matemáticos, $15,7\%$ classificaram como péssimo o desempenho, $55,3\%$ classificaram como regular o desempenho e 30% classificaram como bom ou muito bom o desempenho ao resolver os problemas propostos. Todas essas informações foram muito importantes e contribuíram para o planejamento, elaboração e prática da Sequência Didática proposta.

6.4 Descrição e análise dos resultados da sequência didática e aplicação das quatro etapas da resolução de problemas de Polya.

Neste tópico buscamos analisar de forma mais detalhada os resultados acerca das três últimas etapas da Sequência Didática definida, que se refere à investigação da evolução dos alunos sobre os conceitos e aplicações das cônicas (elipse, hipérbole e parábola). A primeira etapa refere-se aos conceitos iniciais de Geometria Analítica (plano cartesiano, pontos e retas), não sendo necessário nesse estudo o aprofundamento e detalhamento dos resultados. Avaliamos que os dados de qualquer uma dessas etapas da Sequência Didática nos permitiria analisar as quatro etapas da Resolução de Problemas de Polya, sendo aplicadas na resolução de problemas geradores que tenham alguma relação com o seu contexto. Nesse sentido, a BNCC preconiza que, no Ensino Médio, os alunos devem desenvolver e mobilizar habilidades que serão úteis para resolver problemas ao longo de sua vida. Para isso, as situações problemas propostas precisam ter significado real para eles (BRASIL, 2017).

Todos os passos a serem vivenciados na Sequência Didática contribuem para a construção dessa explanação, que vai do momento inicial que é a leitura individual do Problema Gerador, juntamente com a aplicação das quatro etapas da Resolução de Problemas segundo Polya, até a formalização do conteúdo em estudo, apresentação de novas atividades e devolutiva a partir da correção coletiva. Importante ressaltar que em cada encontro era trabalhado a resolução de um Problema Gerador no quadro branco. Tivemos um total de seis encontros para o desenvolvimento deste trabalho.

No início da aplicação dos problemas, buscou-se motivar os alunos a utilizar as estratégias de resolução de problemas propostas por George Polya na realização das atividades, sendo explanado mais uma vez o passo a passo das quatro etapas, além da explicação geral sobre o conteúdo abordado na questão a ser resolvida naquele dia. Em média tínhamos 30 alunos presentes nos encontros e, no primeiro encontro, cada aluno recebeu uma folha xerocopiada composto por duas questões simples e três problemas geradores sobre cônicas. Abaixo, como exemplo, apresentamos a questão 02 composta por um problema gerador sobre cônicas que estava contido na lista (em anexo).

Problema 02

O mapa de uma cidade é localizado sobre um sistema cartesiano, em que o centro da cidade está na origem. Se um avião voa sobre essa cidade obedecendo à equação $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{81} = 1$, qual é a distância mínima em relação ao centro da cidade a que esse avião chega? (As unidades adotadas têm medidas lineares em quilômetro.)

Figura 6.4.1: Problema Gerador - Cônicas

Eram dados 20 minutos para lerem e resolverem individualmente o problema indicado naquele encontro. Durante a resolução, vários alunos fizeram questionamentos na tentativa de obter uma solução para o problema, no entanto, a resposta dada pelo professor sempre foi com outra pergunta, buscando fazer com que eles conseguissem ver sua dúvida de outra forma. As indagações foram quase que na totalidade sobre o reconhecimento dos elementos da cônica ou a forma da sua equação, além de dúvidas em operações básicas. As perguntas devem ajudar "[...] discretamente, apenas indicando a direção geral, deixando muito para o estudante fazer"(POLYA, 2006, p. 3).

Após todos resolverem e devolverem a folha com os problemas propostos, o problema era projetado no telão, passando assim para o momento da plenária. Neste momento, eram disponibilizados outros 10 minutos para discussão das fases segundo Polya a fim de chegarem a um consenso acerca da resposta correta do problema gerador. Nesse momento, alguns alunos foram convidados a expor suas ideias de resolução no quadro branco, estando certa ou não. O debate sempre era muito bom, um rico momento de construção de aprendizagens onde cada aluno deu sua contribuição demonstrando, corretamente, como elaborou e executou seu plano no quadro branco, segundo os quatro passos sugeridos por Polya.

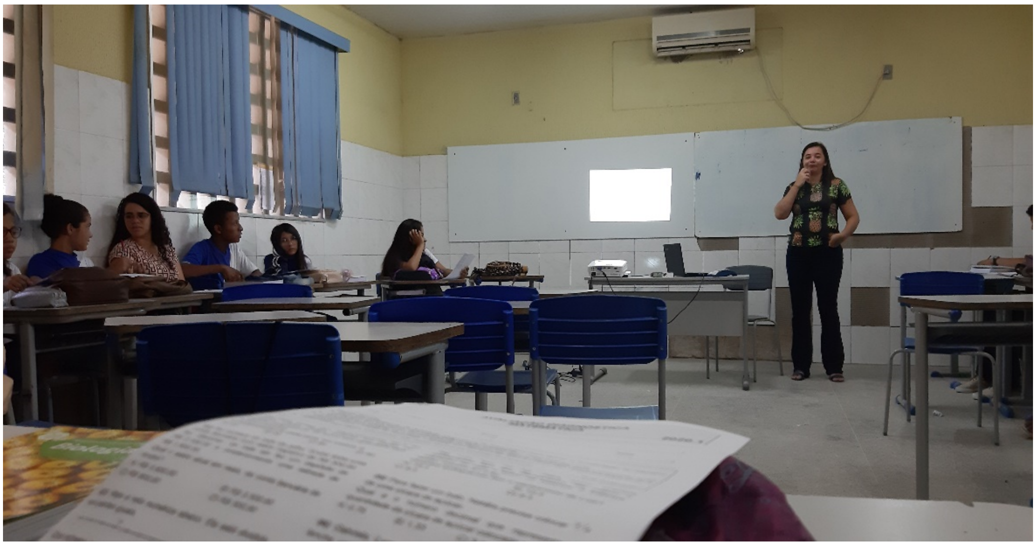

Figura 6.4.2: Plenária para discussão dos resultados

Na resolução da primeira questão, primeira etapa da sequência didática, 90% dos alunos resolveram corretamente esta questão. Foram abordados os conhecimentos relativos à representação de pontos no plano cartesiano e retas. Os erros constatados foram relativos à falta de atenção no desenvolvimento dos cálculos.

Dos 30 alunos que se fizeram presentes nos três encontros seguintes, 03 não conseguiram resolver os problemas 02 e 03; 02 não conseguiram resolver o problema 04; e 04 resolveram de forma errada algum dos três problemas geradores sobre cônicas (elipse, hipérbole e parábola). Os demais alunos, cerca de 70%, conseguiram resolver os problemas com sucesso seguindo as quatro etapas propostas por Polya. Importante ressaltar que os problemas 02, 03 e 04 abordam os conceitos de cônicas presentes nas etapas 02, 03 e 04 da sequência didática proposta nesse trabalho.

Após os alunos chegarem a um consenso acerca da resposta certa de cada um dos Problemas Geradores, a pesquisadora fez uma discussão a partir das respostas dadas pelos alunos do estudo das Cônicas, buscando a aprendizagem e tentando suprimir as dificuldades apresentadas. Dessa forma, foram direcionadas perguntas à turma de modo que os alunos percebessem alguns erros cometidos. Acredita-se que, por meio desse diálogo, é possível conduzir a aula de maneira que eles mesmos identifiquem e digam qual o erro cometido.

As principais dificuldades encontradas durante esses momentos de resolução, correção e debates foram:

- Compreensão dos enunciados dos problemas. Os alunos relataram não conseguir identificar o que os problemas pedem;

- Operações básicas no desenvolvimento dos cálculos durante a resolução;

- Identificação dos elementos das cônicas (focos, eixos, vértices, etc);

- Distinção entre as equações da elipse e da hipérbole.

A quinta questão da lista era uma questão retirada do exame do ENEM que abordava Geometria Analítica na sua resolução. Como os alunos que participaram da pesquisa são do 3° ano, achamos importante abordarmos o ENEM em nossa lista, já que um dos objetivos desses jovens é conseguir uma vaga na Universidade.

Explorou-se a compreensão de problemas, enfatizando a importância de uma leitura atenta e da compreensão dos dados do problema, além disso, mostrou-se que deveria ser elaborado um plano de ação para solucionar um problema, fazendo uma ligação entre os dados do problema e o que ele pede de fato. A partir desse momento, o próximo passo seria executar o plano elaborado, verificando cada passo a ser realizado. Concluindo com a análise da solução encontrada e verificando os resultados, ou seja, fazendo o retrospecto.

Ao final dessa etapa de exploração da resolução dos problemas geradores, foi proposta uma atividade de aprendizagem, com o objetivo de ser resolvida individualmente, seguida pela devolutiva a partir da correção coletiva.

Ao entregar a atividade, o professor concedeu 30 minutos para solucioná-la. Em seguida, observou como os alunos respondiam. Nesse momento notou-se que realizavam a atividade sem solicitar a contribuição do professor. Após o término do encontro, todas as atividades foram recolhidas com o objetivo de realizar a devolutiva no encontro seguinte. Esse procedimento foi tomado em todos os encontros realizados durante a realização dessa pesquisa.

Capítulo 7

Considerações Finais

O desenvolvimento deste estudo pautado nas contribuições de uma sequência didática abordando Geometria Analítica, nos fez perceber o quão é importante o professor fazer uma reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem, na medida em que ele pode contribuir com estratégias de ensino que ajudem os alunos a compreenderem os conteúdos matemáticos tendo uma aprendizagem mais significativa. A partir do levantamento bibliográfico e a experiência da pesquisadora, enquanto professora de Matemática do Ensino Médio, ficou mais evidente as principais dificuldades na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Analítica.

Diante desse contexto, acreditou-se que a aplicação de uma Sequência Didática vivenciada segundo a metodologia da Resolução de Problemas de Geometria Analítica, com ênfase nas cônicas, poderia contribuir e facilitar o processo ensino-aprendizagem. As conclusões alcançadas a partir dos resultados coletados permitem inferir que essa pesquisa pode ser muito importante na busca de uma solução para a problemática apresentada.

Como objetivo geral temos a proposição de uma Sequência Didática que auxiliasse na aprendizagem dos conceitos básicos de Geometria Analítica, principalmente cônicas, através da Resolução de Problemas. Assim, realizou-se o estudo com os alunos do terceiro ano do Ensino Médio da EEMTI Gabriel Bezerra de Morais procurando aprofundar o campo da pesquisa por meio do levantamento bibliográfico, coleta e análise de dados, sendo constatado que o desenvolvimento de uma sequência de atividades ordenadas e articuladas, que se utiliza dos conhecimentos matemáticos para qualificar a compreensão dos alunos em relação aos conceitos básicos de Geometria Analítica, favoreceu uma aprendizagem mais significativa e autônoma e mais próxima dos objetivos que se almejam nos documentos norteadores da educação básica.

Deste modo, formulou-se o primeiro objetivo específico do estudo: Identificar algumas dificuldades de aprendizagem, através da resolução de problemas de Geometria Analítica. Logo, buscou-se construir um panorama das dificuldades de aprendizagem com os conceitos básicos de Geometria Analítica. Para isso, aplicou-se um questionário informativo com a finalidade de coletar dados sobre o componente curricular de Matemática no processo de aprendizagem e um questionário diagnóstico objetivando coletar informações acerca da aprendizagem dos alunos por meio da Resolução de Problemas. Diante da aplicação e observação dos resultados desses instrumentos, pode-se constatar algumas dificuldades de aprendizagem, como: incompreensão do enunciado da questão, confusões em interpretações de enunciados; erros em operações envolvendo multiplicações e divisões.

Com relação ao segundo objetivo específico que é elaborar e aplicar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, de modo a contribuir para a aprendizagem dos alunos, foi construída uma Sequência Didática a partir dos resultados apontados nos questionários, tendo em vista as dificuldades de aprendizagem apresentadas. Dessa forma, buscou-se levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, elaborando atividades com níveis gradativos de dificuldades com o objetivo de obter-se resultados satisfatórios. A experimentação aconteceu em quatro etapas. Na primeira, como nas demais, os alunos tiveram contato, no princípio, com o problema gerador, em que o objetivo foi o de explorar conceitos básicos de Geometria Analítica, nesse caso, estudo do plano cartesiano, ponto e reta. Na segunda, buscando aprofundar o estudo em Geometria Analítica, foram abordados os conceitos de Parábola. Na terceira etapa, vivenciou-se o estudo das Elipses. Na quarta e última etapa, vivenciou-se o estudo das Hipérboles. O planejamento e a vivência dessa Sequência Didática contribuíram de forma significativa para a compreensão dos conteúdos abordados.

No terceiro objetivo específico, que é analisar as contribuições da sequência didática, na aprendizagem de Geometria Analítica por meio da Resolução de Problemas, foram utilizados vários instrumentos para observar o desenvolvimento de cada aluno no decorrer da pesquisa: anotações pessoais, observações, atividades entregues, dentre outras. Também foi realizado questionamentos subjetivos por parte da professora, a fim de que os alunos apontassem, de forma escrita/oral, as dificuldades relacionadas às etapas da resolução de problemas e aos conceitos abordados.

Por último, o questionamento que problematiza e guia o presente estudo: como uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas pode contribuir para a aprendizagem da Geometria Analítica? Sobre isso, destacaram-se as seguintes constatações: 1^a) a participação dos alunos nas plenárias durante os encontros contribuiu para o aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemática e da relevante construção de conhecimento sobre o conceito em estudo; 2^a) as interações entre os alunos, nos momentos de busca do consenso da resposta certa para um problema, possibilitou a superação de dificuldades ou a uma percepção melhor, diante do confronto entre as respostas encontradas; 3^a) a valorização das etapas da Sequência Didática fez com que a maioria dos alunos se sentissem interessados para participar ativamente das atividades propostas; 4^a) A aplicação de novos problemas relacionados ao problema gerador, após a fase de formalização do conceito, possibilitou consolidar aprendizagens construídas em fases anteriores e aprofundar o entendimento do conceito em estudo.

A Sequência Didática aplicada nessa pesquisa, utilizando como metodologia a Resolução de Problemas, no ensino de Geometria Analítica, apoiada nos quatro passos de George Polya, contribuiu para que os alunos se apropriassem dos conceitos básicos de Geometria Analítica, especificamente Cônicas, de modo a lhes serem possibilitada uma aprendizagem consistente e significativa.

Espera-se que a presente pesquisa possa contribuir com outras futuras investigações acerca do ensino e aprendizagem de Geometria Analítica e que novas metodologias apoiadas na resolução de problemas e construção de sequências didáticas contribuam para o trabalho docente no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Referências

ARAGÃO, J. W. M.; MENDES, M. A. H. Metodologia Científica. Salvador: UFBA, Faculdade de educação, Superintendência de Educação a Distância, 2017, 51p.

ALVES. Francisco Regis Vieira. Computational Technique for Teaching Mathematics - CT2M: Sobre construção de curvas parametizadas. BoEM, Joinville, v.2. n.2, p. 56-71, jan./jul. 2014. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/4396/3233. Acesso em: 05 de jan. 2022.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, 2010, v.1, p. 23-47.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2017.

BOYER, B.C. (1996). História da matemática. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Estado do Ceará. Documento Curricular Referencial do Ceará. Fortaleza, 2021.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. Coleção PROFMAT. 2 ed. 373p. Rio de Janeiro. SBM, 2017.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: UNICAMP, 2006.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. Métodos de Pesquisa. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil - UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica - Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: https://cutt.ly/chrfyz6. Acesso em: 10 de ago. 2021.

GIL, A. C. Como Elaborar Projetos de Pesquisa. 5. Ed. São Paulo: Atlas, 2010. 184p.

GOMES, E. S. L.; LIMA, M. F.; SILVA, P. N. G. Estudo e Pesquisa Monográfica. João Pessoa: Universitária/UFPB, 2004.

GONÇALVES, E. dos Santos. Contribuições de uma sequência didática com resolução de problemas de análise combinatória. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco. Estado da Bahia. 2020.

LIMA. Elon Lages. Matemática e Ensino. 3 ed, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2007.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. Fundamentos de metodologia científica. 5 ed., São Paulo: Atlas, 2003.

MIORIM, Maria A. Introdução à história da educação matemática. São Paulo: Atual, 1998.

PAULA, M. A. S.; BARRETO, D. E. S. Sequência Didática de Matemática com Livros Paradidáticos na Perspectiva de uma Avaliação Formativa e Reguladora.

XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: https://cutt.ly/8hrgR5j. Acesso em: 24 de set. 2021.

PÓLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Editor Interciência. Rio de Janeiro, 2006.

PÓLYA, G. Dez mandamentos para professores. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, v.10, p. 2-10, 1987. Disponível em: RPM - Revista Professor de Matemática .

ROQUE, T. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, D. L.; LAVAL, A. Uma história concisa da geometria analítica. In: Ocsana Sônia Danyluk. (Org.). História da Educação Matemática - escrita e reescrita de histórias. Porto Alegre: Sulina, 2012, p. 170-207.

SILVA, A. P. B.; OLIVEIRA, M. M. A Sequência Didática Interativa como proposta para formação de professores de Matemática. VII Enpec (Encontro Nacional de Pesquisas em Educação em Ciências). 2009. Florianópolis 8 de nov. 2009. Disponível em: https://cutt.ly/NhrgNKc. Acesso em: 20 de set. 2021. Acesso em: 9 jul. 2021.

TREVIZAN, W. A.; BROLEZZI, A. C. Como ensinar análise combinatória. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

VAINSENCHER, Israel. Introdução às curvas algébricas planas. Coleção Matemática Universitária. 1 ed. 151p. Rio de Janeiro. IMPA, 2014.

ZABALA, A. A prática educativa: Como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Apêndices

Apêndice A

Questionário Informativo

O presente questionário tem como objetivo coletar informações sobre o componente curricular de matemática no processo de aprendizagem.

1. Gênero? ( ) masculino ( ) feminino ( ) outro

2. Marque a alternativa que corresponde a sua faixa etária. ( ) De 15 a 16 anos ( ) De 17 a 18 anos ( ) De 19 a 20 anos ( ) Acima de 20 anos

3. Você já reprovou de ano em algum momento de sua trajetória estudantil? ( ) Nunca reprovei de ano (Siga para a questão nº 06) ( ) Sim, uma vez. ( ) Sim, duas vezes. ( ) Sim, mais de duas vezes.

4. Na sua concepção, quais os motivos que o/a tenha levado a reprovação? (Marque apenas UMA OPÇÃO em cada item). a) Conteúdos difíceis de compreender. Sim ( ) Não ( ) b) Problemas familiares. Sim ( ) Não ( ) c) Metodologia de ensino não adequada. Sim ( ) Não ( ) d) Problema(s) de saúde. Sim ( ) Não ( ) e) Ausência de materiais didáticos. Sim ( ) Não ( ) f) Desinteresse e desmotivação. Sim ( ) Não ( ) g) Dificuldade de organizar meus estudos. Sim ( ) Não ( ) h) Problemas de relacionamento com colegas. Sim ( ) Não ( ) i) A falta de perspectiva de vida. Sim ( ) Não ( )

Apêndice B

Questionário Diagnóstico

01 - Sendo os pontos A(2,10) e B(8, -2), quais são as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em quatro segmentos congruentes?

02 - Seja P o ponto de intersecção da reta r com o eixo das ordenadas. Sendo r a reta determinada pelos pontos A(-1, -2) e B(4,2), calcule as coordenadas do ponto P.

03 - Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(2,3) e pelo ponto Q, simétrico de P em relação à origem.

04 - Determine a equação geral e a equação reduzida da circunferência que tem como centro o ponto (-3,2) e raio igual a 3.

05 - Determine o centro e o raio da circunferência de equação $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y - 28 = 0$.

06 - Determine a equação da elipse de focos F1(3, 0) e F2(-3, 0) e vértices, que são extremidades do eixo maior, A1(5,0) e A2(-5, 0).

07 - Determine a equação da hipérbole de focos F1(5, 0) e F2(-5, 0) e de vértices A1(3, 0) e A2(-3, 0).

08 - Calcule as coordenadas do vértice da parábola de equação $(x - 4)^2 = 12(y - 2)$.

Apêndice C

Termo de uso de imagem

Eu,____,nacionalidade brasileiro(a), estado civil ______________________, aluno da EEMTI Gabriel Bezerra de Morais, portador da Cédula de identidade RG nº.___________________________, inscrito no CPF sob nº ___________________________________, residente à Av./Rua ____, nº. _________, município de Farias Brito - Ceará. AUTORIZO o uso de minha imagem em todo e qualquer material entre imagens de vídeo, fotos e documentos, para ser utilizada na Dissertação intitulada "O MÉTODO DE POLYA E AS CONTRIBUIÇÕES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA"de autoria da Prof. Tatiana de Araújo Leite, e também nas peças de comunicação que será veiculada nos canais da Universidade Regional do Cariri - URCA. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada em todo território nacional, das seguintes formas: (I) home page; (II) mídia eletrônica (vídeo-tapes, televisão, cinema, entre outros).

Fica ainda autorizada, de livre e espontânea vontade, para os mesmos fins, a cessão de direitos da veiculação das imagens não recebendo para tanto qualquer tipo de remuneração. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à minha imagem ou a qualquer outro. A presente autorização será assinada por mim e por meu responsável legal (para menores de 18 anos) em 02 vias de igual teor e forma.

Farias Brito - CE, dia __________de _________________________de 2021.

____

(Assinatura/aluno)

____

(Assinatura/responsável)

Nome: ____

Telefone p/ contato: _________________________

Anexos