Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Victor Luiz da Silva

Desenhando gráficos de funções reais

Rio de Janeiro

2020

Victor Luiz da Silva

Desenhando gráficos de funções reais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Mohammad Soufi Neyestani

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S586 Silva, Victor Luiz da.
Desenhando gráficos de funções reais / Victor Luiz da Silva – 2020.
215 f. : il.

Orientador: Mohammad Soufi Neyestani.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística.

1. Funções (Matemática) – Teses. 2. GeoGebra (Programa de computador) – Teses. I. Neyestani, Mohammad Soufi. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 517.5

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Victor Luiz da Silva

Desenhando gráficos de funções reais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 18 de dezembro de 2020.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mohammad Soufi Neyestani (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Raphael Constant da Costa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Mohammad Fanaee
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2020

AGRADECIMENTOS

O trajeto para a realização de uma grande conquista sempre conta com o auxílio e o apoio de várias pessoas.

Agradeço a Deus por sempre me conceder saúde, sabedoria e força em todos os momentos, e por colocar em minha vida pessoas tão importantes e especiais nessa caminhada.

À minha esposa Flávia, quero agradecer pelo companheirismo, pela paciência, pelo amor e por sempre me incentivar a buscar a realização dos meus sonhos. Sua presença nos meus momentos de cansaço e quase desistência do curso foi o combustível que alimentou esse trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor Mohammad Soufi Neyestani, muito obrigado pela atenção, pela compreensão, pela paciência e pelos ensinamentos.

Aos meus pais e irmãos, muito obrigado pelas orações e pela torcida de sempre.

Aos amigos que, direta ou indiretamente, colaboraram para que este trabalho pudesse ser finalizado.

Aos meus queridos colegas do mestrado, por todos os momentos de estudos, pelas conversas, pela amizade e conselhos trocados durante esses dois anos.

Ao Sistema Educandus de Ensino, obrigado por se empenharem para atender minhas necessidades de horários de aulas e por apoiarem minha especialização. Muito obrigado aos alunos por participarem da aula proposta, por serem os motivadores do meu trabalho. Aos professores, meus colegas de trabalho, obrigada por sempre torcerem pela minha conquista e estarem dispostos a ajudar.

Aos professores das disciplinas do PROFMAT, agradeço pelas experiências e conhecimentos partilhados.

Nada se constrói sozinho.

Eu não tenho nenhum talento especial.

Sou apenas apaixonadamente curioso.

Albert Einstein

RESUMO

SILVA, Victor Luiz da. *Desenhando gráficos de funções reais*. 2020. 215f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

O presente trabalho tem como objetivo "desenhar as funções", ou seja, compreender o aspecto geométrico de alguns tipos de funções, observando o processo de construção gráfica e suas particularidades e complexidades. Direcionamos o conteúdo da presente dissertação aos alunos de Ensino Médio, com o objetivo de melhorar a análise do comportamento de um objeto algébrico, dado por uma expressão, sob o ponto de vista da Geometria. Embora a Álgebra nos facilite o cálculo, a Geometria nos ajuda a 'enxergar' o problema. Para tal propósito, utilizaremos instrumentos matemáticos que auxiliam as construções e transformações gráficas, em especial as simetrias e derivadas, e tendo como importante aliado à essa metodologia o software Geogebra, ajudando na visualização e manipulação dos gráficos das funções envolvidas neste trabalho, observando de maneira rápida como as variações ocorrem nos gráficos de algumas funções.

Palavras-chave: Funções reais de variável real. Gráficos de Funções. Transformações. Simetrias. Reflexões. Limites. Derivadas. Geogebra.

ABSTRACT

SILVA, Victor Luiz da. *Drawing real function graphs*. 2020. 215fl. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

The goal in this work is "to draw the functions", that is, to understand the geometric aspect of some types of functions by observing the process of constructing graphs and its particularities and complexities. The content of present dissertation is addressed to high school students, with the goal of improving the analysis of the behavior of an algebraic object, giving by an expression, from the geometric point of view. Although Algebra makes calculations easier, Geometry helps us to 'see' the problem. For this purpose, we will use mathematical instruments which help in constructing and transforming graphs, especially the symmetries and derivatives, and having as an important ally to this methodology the software of Geogebra, helping to visualize and manipulate the graphs of the functions involved in this work, observing quickly how variations occur in the graphs of some functions.

Keywords: Real functions of real variable. Graph of functions. Transformations. Symmetries. Reflections. Limits. Derivatives. Geogebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito de funções é um dos mais importantes em Matemática, e seu conhecimento impulsionou o desenvolvimento tecnológico em muitas áreas. As funções estão em nossa vida cotidiana, mesmo que não tenhamos consciência disso. Por exemplo, o valor da conta de luz depende da quantidade de energia gasta, a dose de remédio que é dada a uma criança depende do seu peso, o valor para fazer cópias de um material depende do número de páginas copiadas. Usando funções, também se estudam o crescimento de bactérias, o movimento dos astros, a variação da temperatura da Terra, etc. A noção de função nos permite, enfim, descrever e analisar relações de dependência entre quantidades.

Especificamente neste trabalho estudaremos o que chamamos de funções reais, isto é, relações entre quantidades que podem ser descritas por números reais, dando ênfase ao comportamento gráfico das mesmas. Nossa opção foi tratar o tema funções chamando a atenção para a importância da linguagem gráfica, observando as ligações entre as informações algébricas com as informações geométricas fornecidas pelos seus gráficos, levando em consideração a possibilidade de compreender a manipulação dos gráficos com o uso de instrumentos matemáticos, como as simetrias, deslocamentos e derivadas.

Mediante isso, no primeiro capítulo faremos a apresentação do conceito formal de função de uma maneira clara e objetiva, mostrando construções gráficas de como o domínio e a imagem de uma função ficam representadas no plano cartesiano. O segundo capítulo abordará os movimentos que podemos executar com os gráficos de funções (translações, dilatações, reflexões,...) a partir de gráficos já conhecidos, sempre explorando, mais uma vez, os conceitos de domínio e imagem de uma função.

O terceiro capítulo visa expandir o conhecimento ora adquirido em alguns tipos de funções, objetivando o aprimoramento das técnicas utilizadas no capítulo anterior, além de apresentar gráficos de funções amplamente trabalhadas no ensino da Matemática, tal como a função quadrática.

No quarto capítulo serão abordados os critérios para se determinar pontos relevantes do gráfico de uma função através das derivadas. Vale ressaltar que as derivadas, embora não sejam mais vistas na maioria dos colégios do Ensino Médio, é uma importante ferramenta para a constução gráfica de funções, especialmente as de grau maior que 2.

O quinto capítulo inicia com alguns tipos de simetrias e como elas auxiliam as construções gráficas. Em seguida, os conceitos de funções par e ímpar são dados, ilustrando nos gráficos as devidas simetrias pertinentes a cada uma delas, assim como as definições de funções semi-par e semi-ímpar e como se dá a construção gráfica de tais funções. Prosseguindo neste raciocínio, o sexto capítulo versa sobre as funções inversas e *k*-inversas, tudo devidamente construído e demonstrado no plano cartesiano.

O sétimo capítulo aborda algumas funcionalidades do software Geogebra nas funções afim e quadrática, apresentando características sobre estas duas funções amplamente trabalhadas no Ensino Médio.

No oitavo e último capítulo, será mostrado como alguns tópicos desta dissertação foram trabalhados numa aula experimental. Em particular, foram abordados conceitos de translações, dilatações, contrações e reflexões, nas funções afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica, assim como exercícios onde se comprova que o conhecimento sobre tais movimentos gráficos contribui significativamente na assimilação da disciplina. O anexo contém a lista com exercícios aplicados na atividade proposta.

1 FUNÇÃO

Este capítulo tem por finalidade apresentar os conceitos formais de função real de variável real, incluindo seus conjuntos domínio e imagem, através de exemplos onde serão especialmente representados geometricamente nos 'desenhos das funções', o qual conhecemos como gráficos de funções.

1.1 Um breve histórico do conceito de função

A noção de dependência teve início a aproximadamente 2000 anos, possivelmente nas tábuas de relações funcionais utilizadas pelos babilônicos na Astronomia para a compreensão das efemeridades do Sol, da Lua e dos planetas. De acordo com Boyer (1999), nessas tábuas era possível encontrar a principal ideia envolvida no conceito de função: a relação entre variáveis. Posteriormente, os trabalhos do astrônomo Claudius Ptolomeu (século III) continham uma grande quantidade de tabuas astronômicas que indicavam que a posição do Sol, da Lua e dos planetas mudava de maneira contínua e periódica, obedecendo certos padrões. Com o passar dos anos, segundo Ponte (1992), Oresme (1323 – 1382) aproximou-se de uma formulação moderna de função através do desenvolvimento da teoria geométrica das latitudes, pois nada havia de concreto, até então, sobre essa relação funcional, seja escrita ou por representação gráfica. Porém, apesar deste avanço, as relações eram utilizadas para estudar fenômenos relacionados a outras ciências, como Astronomia e Física.

Somente no fim do século XVII houve o desenvolvimento do conceito formal de função. Segundo Youschkevitch (1981), somente após a criação dos logaritmos é que o método analítico de introduzir as funções por meio de fórmula e equações ganha destaque, através de trabalhos publicados por Pierre Fermat (1601 – 1665) e René Descartes (1596 – 1650), aplicando a nova álgebra à geometria e, cada um à sua maneira, o método analítico de introduzir funções.

A ideia de que expressões infinitas fosse uma função não era novidade, mas foi somente depois da primeita metade do século XVII que as séries se tornaram o meio universal para a expressão analítica e o estudo de funções. Bourbaki (1976, p. 253) salienta "a brilhante descoberta da série $\log(1+x) = \frac{(x)^n}{n}$, que possibilitou novas aplicações para as séries, principalmente das séries de potências aos problemas considerados até então impossíveis". A partir dessas descobertas, Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilheim Leibniz (1646 – 1716) dedicaram-se às séries de potências. Com o desenvolvimento dos estudos, Newton introduziu as noções básicas de função por meio da cinemática. Concomitantemente, segundo Boyer (1999), Leibniz chega às noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral a partir da geometria das curvas. O uso de função como um termo matemático foi iniciado por Leibniz, em um manuscrito de 1673, para designar uma quantidade relacionada a uma curva, tal como a sua inclinação em um ponto específico. As funções que Leibniz considerou são atualmente chamadas de funções diferenciáveis. Ele também introduziu os termos constante, variável e parâmetro.

Mais tarde, as funções começaram a ser representadas por meio de expressões algébricas e, de acordo com Ponte (1992), essa nova maneira de representar apareceu em correspondências trocadas por Leibniz e Jean Bernoulli (1667 – 1748) entre 1694 e 1698. Em 1718, Bernoulli publicou um artigo que teve ampla divulgação, o qual continha a definição de uma função de uma variável. Tal definição ganhou uma contribuição significativa para sua evolução através de Leonard Euler (1707 – 1783), que era discípulo de Bernoulli. De acordo com Boyer (1999, p. 305), "foi ele o construtor da notação mais bem-sucedida de todos os tempos. Deve-se a ele a notação *f(x)* para uma função em x". Porém, apesar desta grande evolução acerca do conceito de função dado por Euler, algumas controvérsias surgiram que motivaram discussões a respeito do assunto, desde o problema da corda vibrante por Jean Le Rond D'Alembert (1717 – 1783), passando por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), que criou a definição formal de função moderna, até chegar no grupo Bourbaki (1935), formado por matemáticos franceses que tinha o objetivo de organizar toda a Matemática conhecida até o momento. Em 1939, este grupo publicou o primeiro livro da coleção *Théorie dês Ensembles (fascicule de results),* que apresenta a definção de função dos dias atuais.

1.2 **Definição de função**

Descritivamente, uma função é dada quando um valor de alguma quantidade (geralmente denotado pela letra *x*), corresponde ao valor de outra quantidade (geralmente denotado pela letra *y*), chamada de função.

Matematicamente, dizemos que uma função *f* é uma relação entre os elementos de dois conjuntos A e B, em que para cada elemento do conjunto A é associado apenas um elemento do outro conjunto B. Para indicarmos uma função *f*, definida de A em B, segundo a lei de correspondência *y* = *f(x)*, usaremos uma das seguintes notações:

$$\begin{aligned} f&: A \to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad ou \quad \begin{aligned} f&: A \to B \\ y &= f(x) \end{aligned},$$

onde *f*(*x*) é chamado a imagem de *x* pela função *f*. Dizer que a quantidade *y* é uma função da quantidade *x* é, antes de tudo, especificar quais valores *x* pode assumir. Estes valores "permitidos" de *x* formarão um conjunto que será denominado domínio da função *y*.

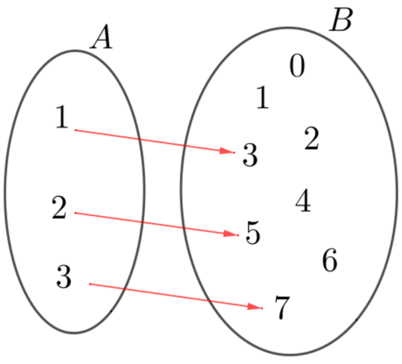
A escrita $f: A \to B$ significa que *f* é uma função de A em B, ficando entendido que o conjunto A é o domínio e o conjunto B é o contradomínio da função *f*.

Exemplo 1. Dados os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, consideremos a lei que associa os elementos dos conjuntos A e B definida por $y = 2x + 1$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Determine se a lei é uma função ou não.

Solução:

Para $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, para $x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ e para $x = 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Figura 1 – Diagrama da relação
$y = 2x + 1$.



Fonte: O autor, 2020.

Como todo elemento do conjunto A se associa com exatamente um elemento do conjunto B, concluímos que y = 2x + 1 é, de fato, uma função.

1.3 Domínio de uma função

Como exemplo, vamos considerar a função *y* = *f(x)*, definida pela fórmula $f(x)=\frac{\sqrt{2x-6}}{3x-12}$. O que pode ser considerado como seu domínio?

Se uma função é dada por uma fórmula, geralmente o domínio considerado é o conjunto de todos os números para os quais é possível realizar as operações especificadas pela fórmula. Isso significa que o domínio de $f(x)=\frac{\sqrt{2x-6}}{3x-12}$ não contém o número 4 (já que em x = 4 o denominador da fração se anula) e valores de x menores que 3 (já que para $x < 3$ a expressão sob a raiz de índice dois é negativo). Assim, o natural domínio da função $f(x)=\frac{\sqrt{2x-6}}{3x-12}$ consiste em todos os números que satisfazem as relações $x \neq 4$ e $x \geq 3$.

1.4 Imagem de uma função

Outro conceito importante envolvido na noção de função é o conjunto imagem da função ou, abreviadamente, a imagem da função. Se $f: A \rightarrow B$ é uma função com domínio A e contradomínio B, a imagem de *f* é o conjunto

$$f(A)=\{f(a)/a \in A\} \text{ e } f(A) \subset B.$$

Em outras palavras, a imagem de *f* é o conjunto dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto, o conjunto imagem de *f* é um subconjunto do contradomínio B.

Exemplo 2. Se $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $f:\Re \rightarrow \Re$ então $f(2)=\frac{1}{2^2+1}=\frac{1}{5}$, ou seja, $\frac{1}{5}$ é imagem da função $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ para o valor do domínio x = 2.

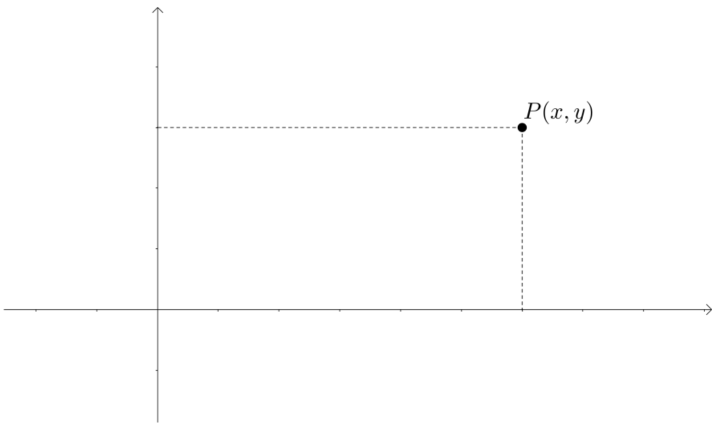
1.5 Representação gráfica de uma função

Uma função descreve as mudanças sofridas por uma grandeza provocadas pela variação de outra. Quando conhecemos uma função, temos algum tipo de descrição da maneira como uma grandeza varia dependendo da variação de outra.

Há várias formas de descrever como essa correspondência é feita. Essa descrição pode ser verbal, feita por meio de um texto que explica como as variáveis se relacionam, ou por meio de uma tabela, mostrando alguns valores significativos que a variável dependente assume conforme o valor da variável independente. Além disso, uma função pode ser representada por meio de uma fórmula matemática, ou então por meio de um desenho ou gráfico. A ideia de desenhar o comportamento das funções em um plano está associada à necessidade de representar figuras tendo alguma referência espacial.

Com o uso dessa representação, passou-se a utilizar um plano com duas retas graduadas ortogonais destacadas, uma para representar os valores de x e outra os valores de y. Ou seja, para cada ponto P, precisamos ter um par de números indicando sua posição: o número x, que inicialmente era chamado de “corte” do ponto P, e depois ficou conhecido como abscissa (do latim “cortar”); e um segundo número y (conhecido como ordenada**)**. Os termos abscissa, ordenada e coordenadas foram usados pela primeira vez por Leibniz em 1692.

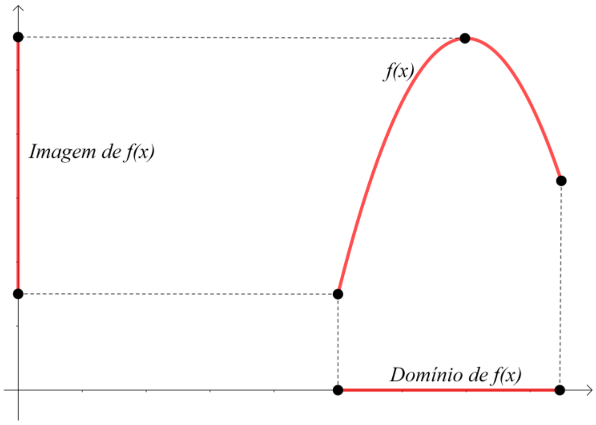
Figura 2 – O ponto *P* no plano cartesiano.



Fonte: O autor, 2020.

O plano para representar posições recebeu posteriormente o nome de plano cartesiano, em homenagem a Descartes, que em 1637 teve a ideia de tratar as curvas geométricas por meio de expressões algébricas. No plano cartesiano, as duas retas de referência recebem o nome de eixos coordenados.

Figura 3 – Ilustração de possível condição de domínio e imagem de uma função *f*.



Fonte: O autor, 2020

Uma função pode ser representada geometricamente através de um gráfico. Para construir um gráfico de alguma função, vamos considerar algum valor admissível de *x* e o valor correspondente de *y*. Por exemplo, suponha que o valor de *x* seja o número *a*, e o valor correspondente de *y* é o número $b = f(a)$. Nós representaremos esse par de números *a* e *b* pelo ponto com as coordenadas (*a*, *b*) no plano cartesiano. Vamos construir esses pontos para todos os valores admissíveis de *x*. A coleta de pontos obtidos dessa maneira é o gráfico da função.

Portanto, o gráfico de uma função é o conjunto de pontos cuja abscissas são valores admissíveis de *x* e cujas ordenadas são os valores correspondentes da função *y*. Ou ainda, dada uma função *f* de domínio X e contradomínio Y

$$f : X \to Y$$

Definimos o gráfico de *f*, denotado por G(*f*), como sendo o subconjunto do produto cartesiano de X por Y formado pelos pares (*x*,*y*) tais que $y = f(x)$, ou seja

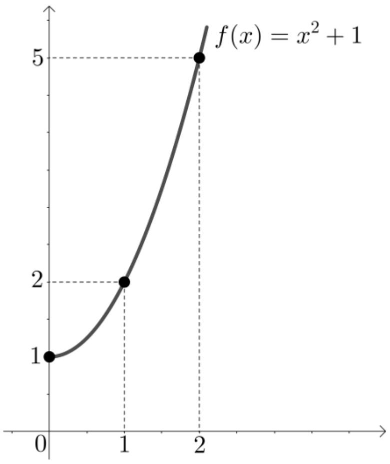
$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \,/\, y = f(x)\}$$

Se a definição for seguida literalmente, é necessário que se encontre todos os pares de valores correspondentes de *x* e *y*, e construir todos os pontos com essas coordenadas. Na maioria dos casos, é praticamente impossível fazer isso, uma vez que existem infinitos desses pares. Vamos esboçar o gráfico da função $y = x^2 + 1$, escolher alguns valores de *x*, encontrar os valores correspondentes da função *y* e escrevê-los na tabela a seguir:

x	y
0	1
1	2
2	5

Com as coordenadas calculadas, vamos unir os pontos $(0,1)$, $(1,2)$ e $(2,5)$, conforme a figura 4.

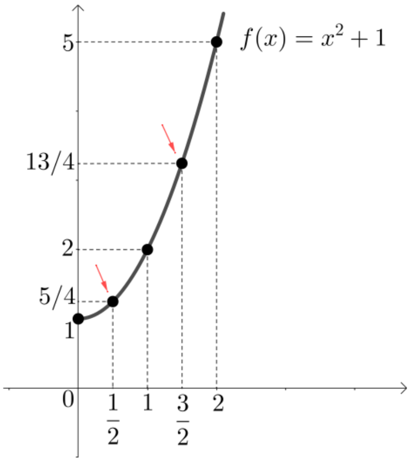
Figura 4 – Construção do gráfico de $y = x^2 + 1$.



Fonte: O autor, 2020.

Para verificar se o esboço do gráfico aproxima-se da realidade, usaremos valores intermediários de *x* aos valores usados anteriormente. Então, para $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{2}$, respectivamente teremos $y = \frac{5}{4}$ e $y = \frac{13}{4}$, e os pontos $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$ parecem estar bem colocados na curva $y = x^2 + 1$ (figura 5).

Figura 5 – Construção do gráfico de $y = x^2 + 1$.



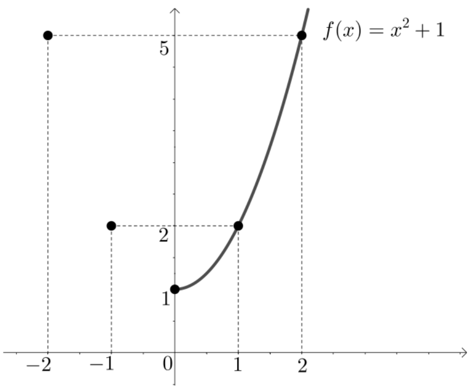
Fonte: O autor, 2020.

Para construir a metade esquerda do gráfico, é necessário preencher mais uma tabela para valores negativos de *x*. Logo:

x	*y*
–1	2
–2	5

Os pontos $(1,2)$ e $(2,5)$ possuem a mesma distância do eixo *y* dos pontos $(-1,2)$ e $(-2,5)$, respectivamente, ou seja, os pontos $(1,2)$ e $(2,5)$ são simétricos respectivamente aos pontos $(-1,2)$ e $(-2,5)$ em relação ao eixo *y*. Assim sendo, para obter a parte esquerda do gráfico da função $y = x^2 + 1$ correspondente a valores negativos de *x*, é necessário refletir a metade direita deste gráfico em relação ao eixo *y* (Figura 6).

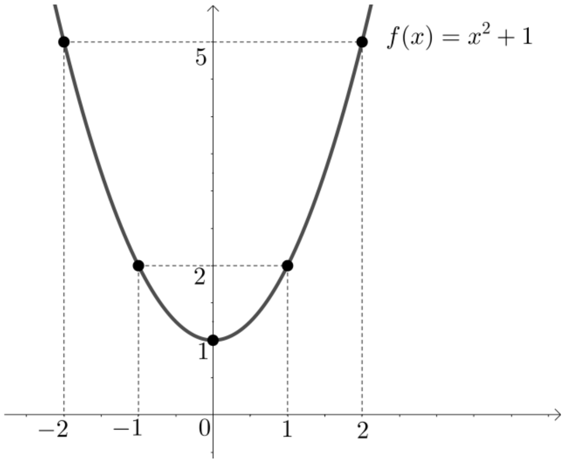
Figura 6 – Construção do gráfico de $y = x^2 + 1$.



Fonte: O autor, 2020.

A figura 7 mostra o esboço do gráfico de $y = x^2 + 1$. Veremos adiante que trata-se do deslocamento de uma unidade para cima do gráfico da função $y = x^2$.

Figura 7 – Construção do gráfico de $y = x^2 + 1$.



Fonte: O autor, 2020.

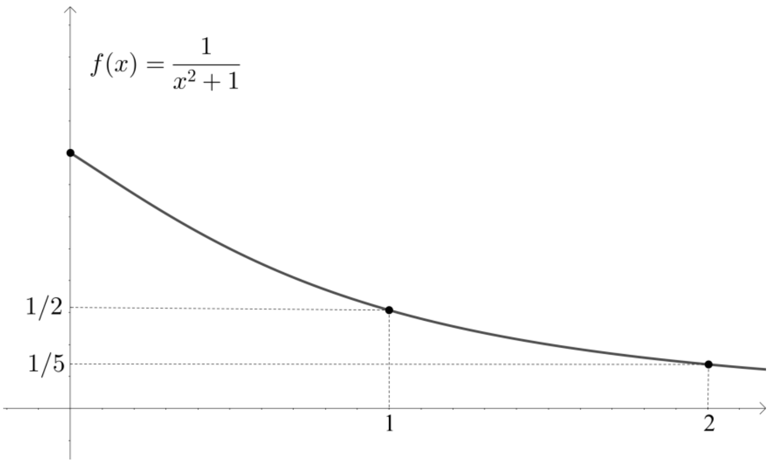
Procedendo da mesma forma para a construção do gráfico de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, obtemos uma tabela de valores para domínio e imagem:

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{5}$

Dessa forma, construímos os pontos com as coordenadas calculadas e vamos uní-los, conforme a figura 8. Precisamos verificar se traçamos a curva corretamente entre os pontos encontrados no gráfico. Para isso, considere um valor intermediário de *x*, digamos, $x = \frac{3}{2}$, obtendo o valor correspondente da função $y = \frac{4}{13}$. Parece que o ponto obtido $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{13}\right)$ encaixa bem em nossa curva. Agora tentamos $x = \frac{1}{2}$. Então, $y = \frac{4}{5}$, e o correspondente ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$ parece estar acima da curva que desenhamos (Figura 9). Isso significa que entre $x = 0$

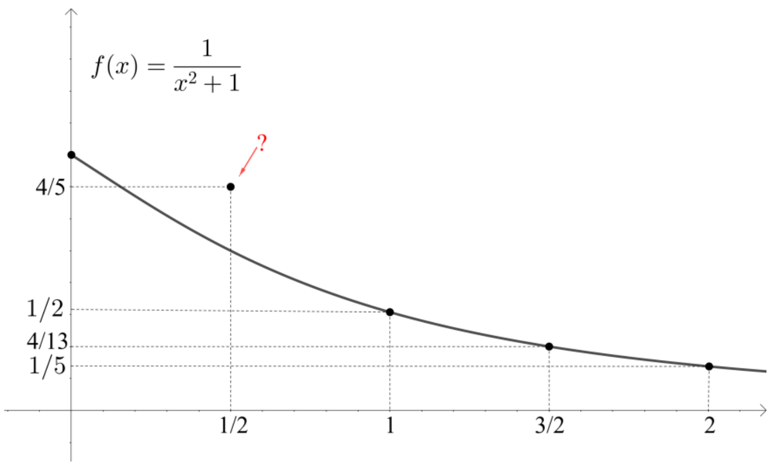
e $x = 1$, o gráfico não retrata a realidade. Aplicando mais valores intermediários, $x = \frac{1}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$, obtendo os respectivos pontos $\left(\frac{1}{4}, \frac{16}{17}\right)$ e $\left(\frac{3}{4}, \frac{16}{25}\right)$, justamente a parte do gráfico onde está a dúvida. Após conectar todos esses pontos, obtemos o curva representada na figura 10.

Figura 8 – Construção do gráfico de $y = \frac{1}{x^2+1}$.



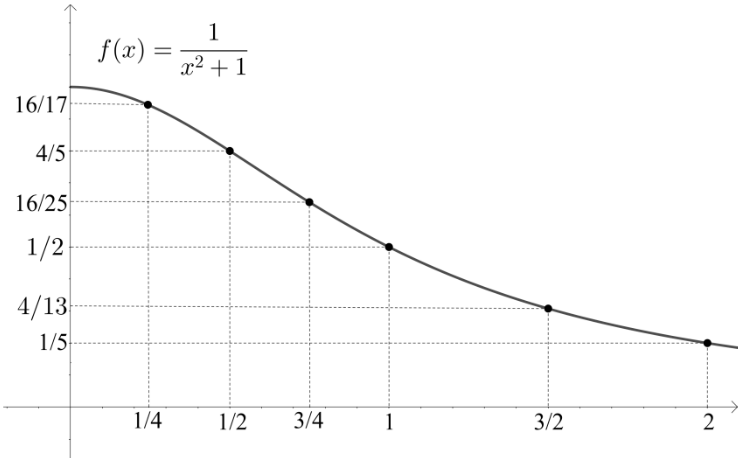
Fonte: O autor, 2020.

Figura 9 – Construção do gráfico de $y = \frac{1}{x^2+1}$.



Fonte: O autor, 2020.

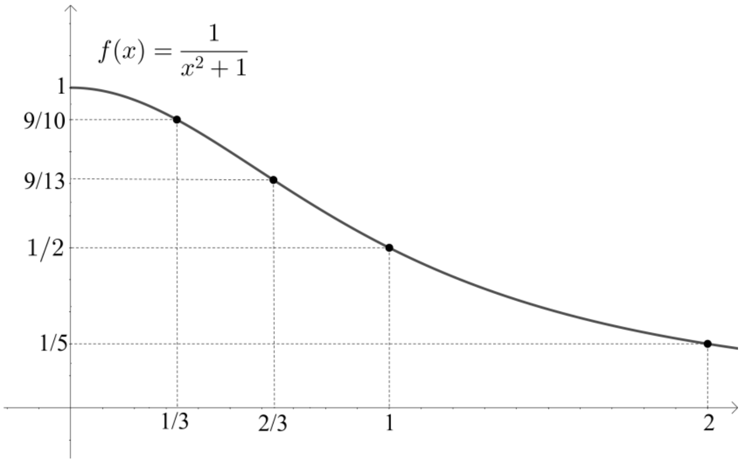
Figura 10 – Construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Os pontos $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{9}{10}\right)$ e $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{9}{13}\right)$ deixam a curva mais próxima da realidade (Figura 11).

Figura 11 – Construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.



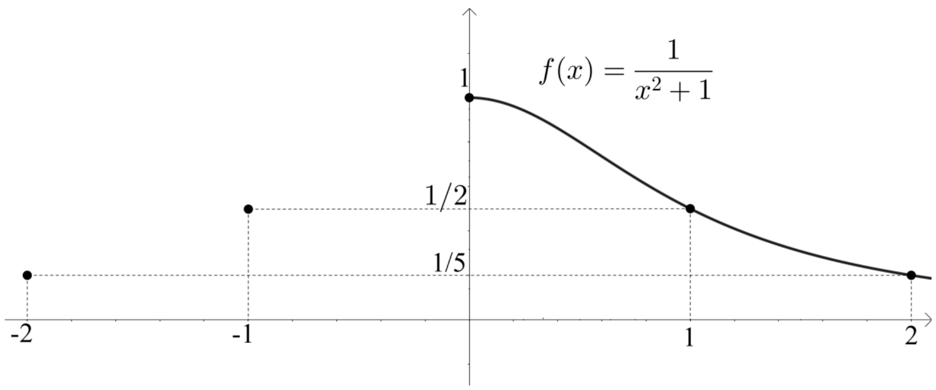
Fonte: O autor, 2020.

Para construir a metade esquerda do gráfico, é necessário preencher mais uma tabela para valores negativos de *x*. Logo:

x	y
-1	$\dfrac{1}{2}$
-2	$\dfrac{1}{5}$

Novamente, observamos que o gráfico também contém os pontos $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-2, \frac{1}{5}\right)$, respectivamente simétricos aos pontos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(2, \frac{1}{5}\right)$ em relação ao eixo y. Assim sendo, para obter a parte esquerda do gráfico da função $y = \frac{1}{x^2+1}$ correspondente a valores negativos de x, é necessário refletir a metade direita deste gráfico em relação ao eixo y (Figura 12).

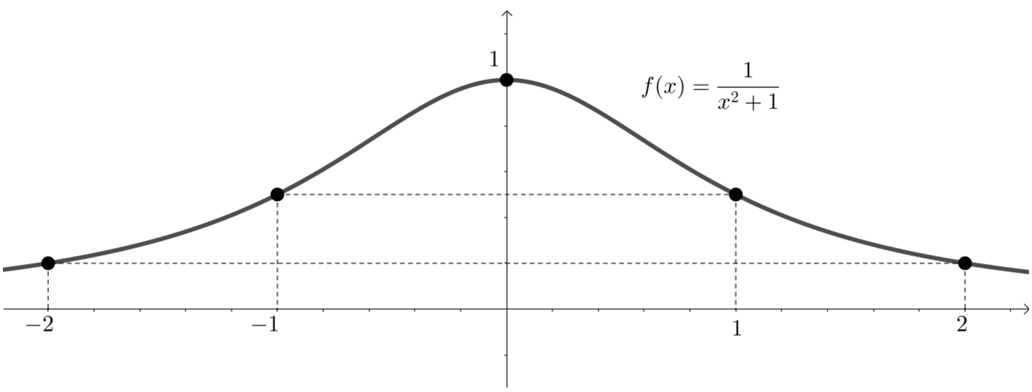
Figura 12 – Construção do gráfico de $y = \frac{1}{x^2+1}$.



Fonte: O autor, 2020.

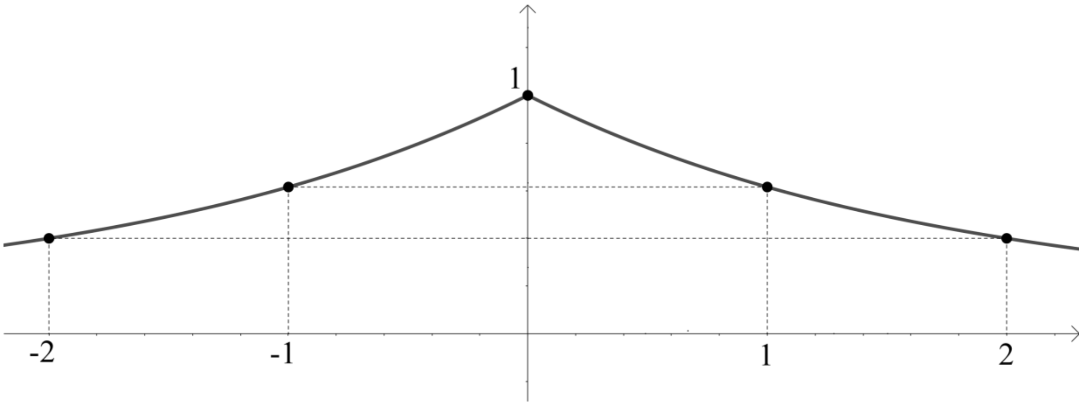
A figura abaixo mostra a forma geral do gráfico. Se tivéssemos sido apressados e usado nosso esboço inicial (vide figura 8) para a construção da parte do gráfico correspondente a x negativo, então teríamos uma "ponta" em $x = 0$. Em vez disso, há uma curva suave (Figuras 13 e 14).

Figura 13 – Construção do gráfico de $y = \frac{1}{x^2+1}$.



Fonte: O autor, 2020.

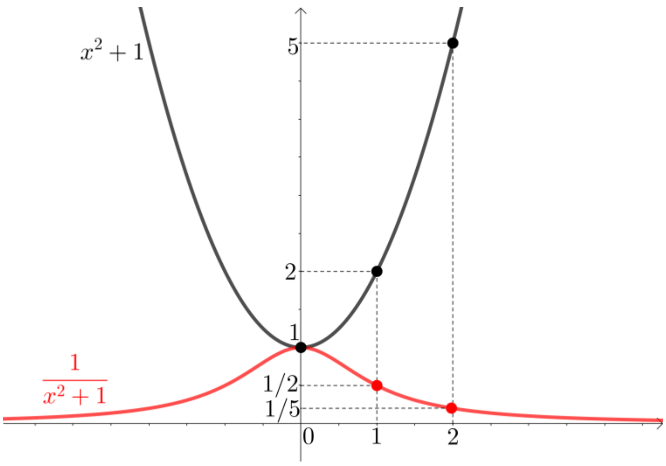
Figura 14 – Construção errônea do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Algebricamente, as expressões x^2+1 e $\dfrac{1}{x^2+1}$ são inversas entre si. Então, quanto maior o valor de x^2+1, menor será o de $\dfrac{1}{x^2+1}$, e vice-versa. Graficamente, os pontos que formam o gráfico de $y = x^2+1$ terão ordenadas maiores ou iguais a 1, pois x^2+1 sempre será maior ou igual a 1, para qualquer x real. Sendo assim, as ordenadas de $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ serão menores ou iguais a 1 e, como citado anteriormente, inversamente proporcionais às ordenadas de $y = x^2+1$ (Figura 15).

Figura 15 – Gráficos de $y = x^2+1$ e $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.



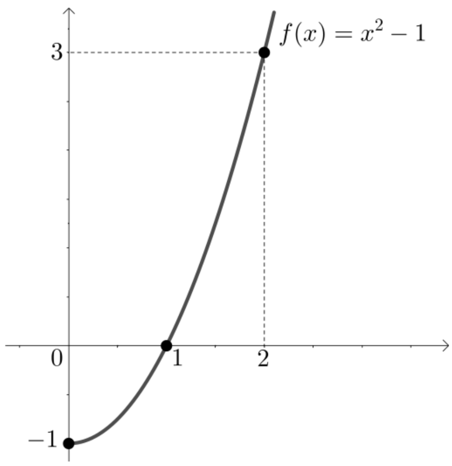
Fonte: O autor, 2020.

Agora, esbocemos o gráfico da função $y = x^2 - 1$, escolhendo alguns valores de *x*, encontrar os valores correspondentes da função *y* e escrevê-los na tabela a seguir:

x	*y*
0	–1
1	0
2	3

Com as coordenadas calculadas, vamos unir os pontos $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(2,3)$, conforme a figura 16.

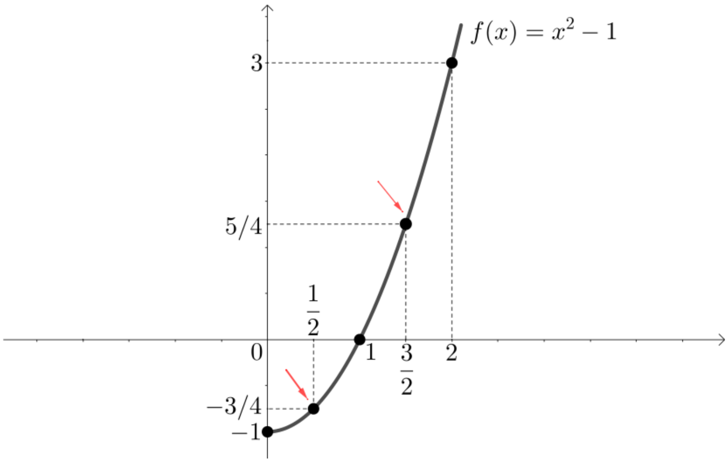
Figura 16 – Construção do gráfico de $y = x^2 - 1$.



Fonte: O autor, 2020.

Para verificar se o esboço do gráfico aproxima-se da realidade, usaremos valores intermediários de x aos valores usados anteriormente. Então, para $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{2}$, respectivamente teremos $y = -\frac{3}{4}$ e $y = \frac{5}{4}$, e os pontos $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ parecem estar bem colocados na curva $y = x^2 - 1$ (figura 17).

Figura 17 – Construção do gráfico de $y = x^2 - 1$.



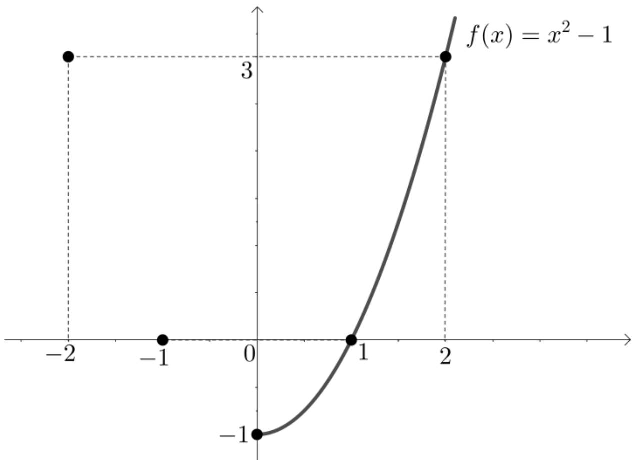
Fonte: O autor, 2020.

Para construir a metade esquerda do gráfico, é necessário preencher mais uma tabela para valores negativos de *x*. Logo:

x	*y*
–1	2
–2	5

Os pontos $(1,2)$ e $(2,5)$ possuem a mesma distância do eixo *y* dos pontos $(-1,2)$ e $(-2,5)$, respectivamente, ou seja, os pontos $(1,2)$ e $(2,5)$ são simétricos respectivamente aos pontos $(-1,2)$ e $(-2,5)$ em relação ao eixo *y*. Assim sendo, para obter a parte esquerda do gráfico da função $y = x^2 + 1$ correspondente a valores negativos de *x*, é necessário refletir a metade direita deste gráfico em relação ao eixo *y* (Figura 18).

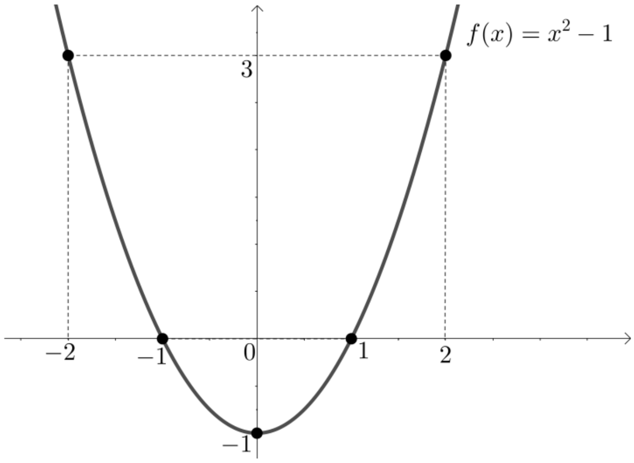
Figura 18 – Construção do gráfico de $y = x^2 - 1$.



Fonte: O autor, 2020.

A figura 19 mostra o esboço do gráfico de $y = x^2 - 1$. Veremos adiante que trata-se do deslocamento de uma unidade para baixo do gráfico da função $y = x^2$.

Figura 19 – Construção do gráfico de $y = x^2 - 1$.

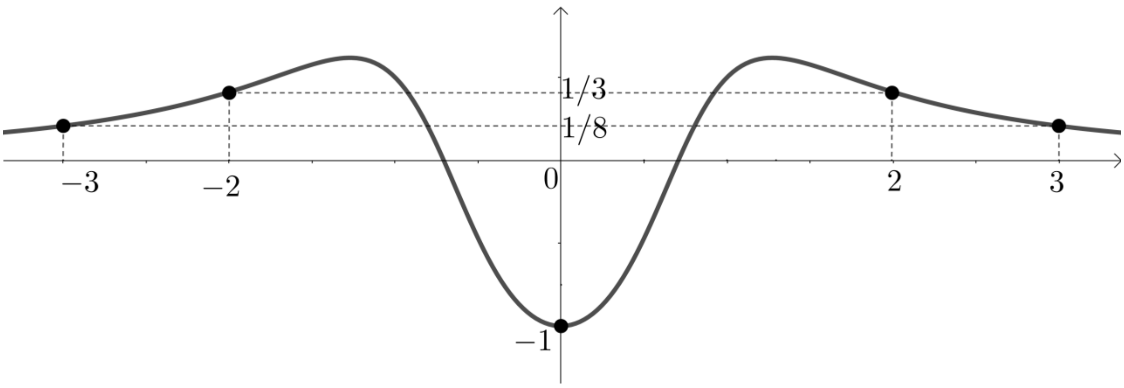


Fonte: O autor, 2020.

Vamos desenhar o gráfico da função $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Elaborando uma tabela e marcando os pontos do gráfico correspondente aos valores x = –3, –2, 0, 2, 3 , obtemos a figura 20.

x	–3	–2	0	2	3
y	$1/8$	$1/3$	–1	$1/3$	$1/8$

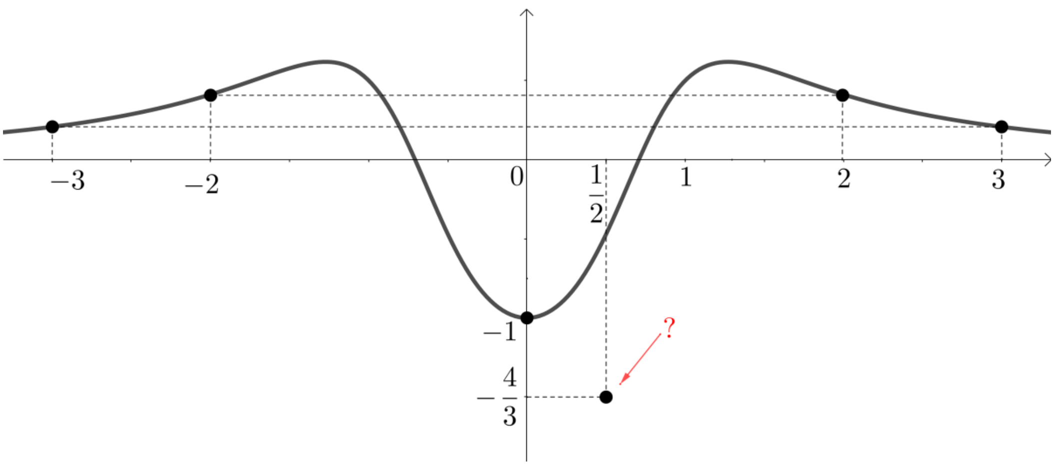
Figura 20 – Construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



Fonte: O autor, 2020.

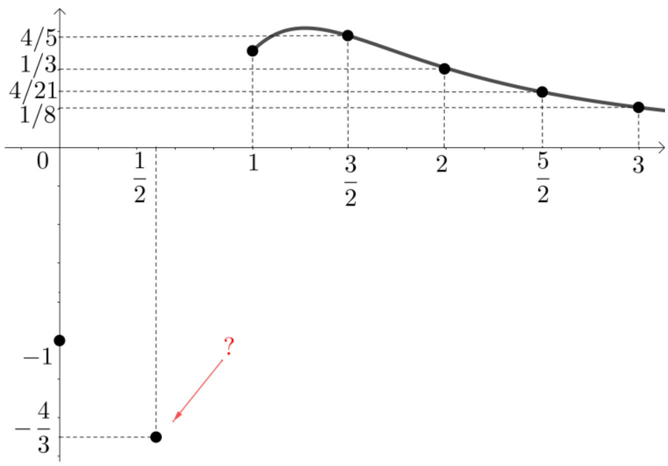
Se tomarmos mais dois valores, $x = \frac{3}{2}$ e $x = \frac{5}{2}$, os respectivos pontos $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{5}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{21}\right)$ ficam bem situados em nossa curva. Porém, a localização destes pontos “a olho nu” fica bem mais complicada. Adotando $x = \frac{1}{2}$, obtemos $y = -\frac{4}{3}$, e o ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right)$ fica aparentemente abaixo da nossa curva. Isso significa que entre $x = 0$ e $x = 1$, o gráfico comporta-se de maneira diferente, conforme as figuras 21 e 22. Sendo assim, como o gráfico comporta-se entre os pontos $x = 0$ e $x = 1$?

Figura 21 – Construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



Fonte: O autor, 2020.

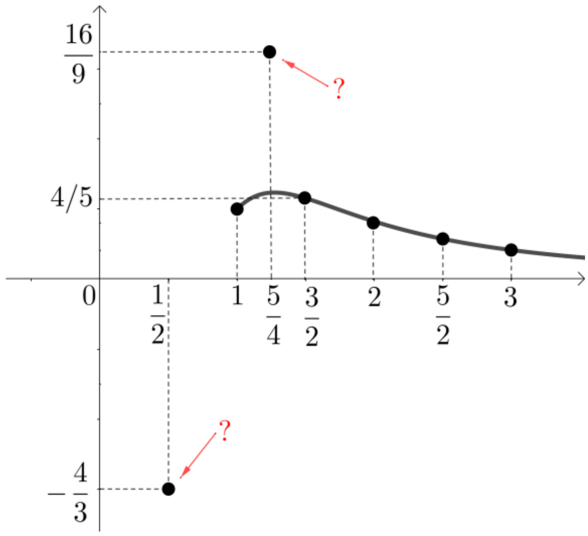
Figura 22 – Construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Além desses pontos, podemos testar $x=\frac{5}{4}$, obtendo $y=\frac{16}{9}$, onde a localização do ponto $\left(\frac{5}{4},\frac{16}{9}\right)$ parece estar acima do esboço inicial (Figura 23).

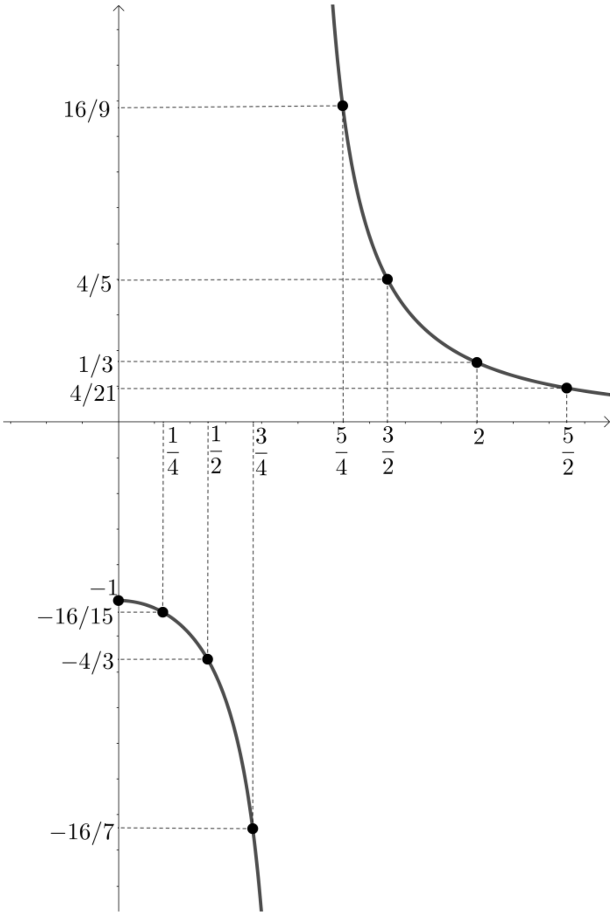
Figura 23 – Construção do gráfico de $y=\frac{1}{x^2-1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Continuamos com $x=\frac{1}{4}$ e $x=\frac{3}{4}$. Obtemos $y=-\frac{16}{15}$ e $y=-\frac{16}{7}$, respectivamente os pontos $\left(\frac{1}{4},-\frac{16}{15}\right)$ e $\left(\frac{3}{4},-\frac{16}{7}\right)$. O esboço do gráfico entre os pontos $x=0$ e $x=\frac{3}{4}$ tornou-se assim mais nítido (Figura 24).

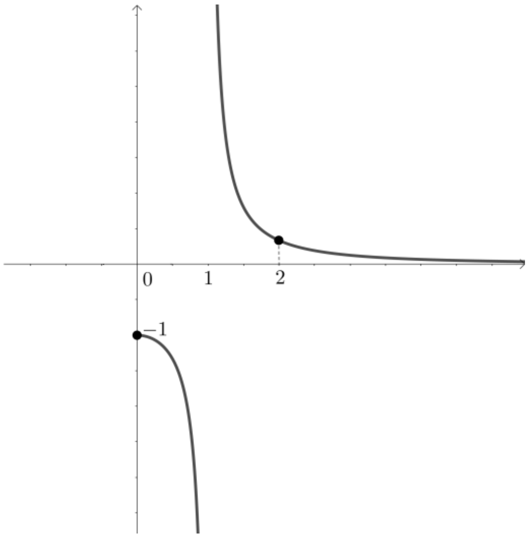
Figura 24 – Construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Contudo, o comportamento da função entre $x = \dfrac{3}{4}$ e $x = \dfrac{5}{4}$ permanece obscuro. Se tentarmos mais alguns valores intermediários entre $x = \dfrac{3}{4}$ e $x = \dfrac{5}{4}$, vemos que os correspondentes pontos do gráfico não se encontram em uma, mas em duas curvas, e o lado direito do gráfico assume aproximadamente a seguinte aparência (Figura 25).

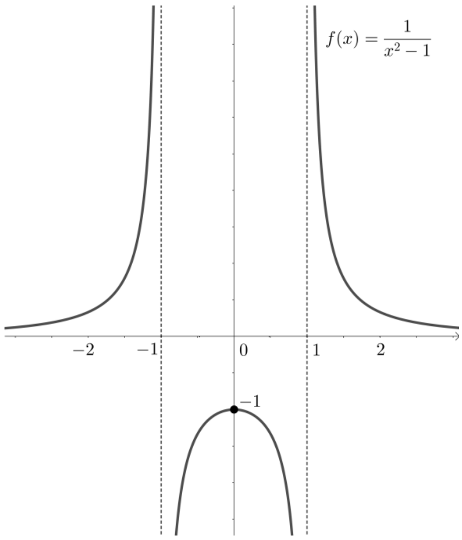
Figura 25 – Construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Se olharmos atentamente para a expressão que define a função $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, é imediatamente óbvio que para dois valores do denominador essa expressão não faz sentido. Esses valores são iguais a $+1$ e -1, onde um deles está no intervalo $\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{5}{4}$, justamente onde o gráfico não fica bem caracterizado. De fato, para os valores $x = \pm 1$, a função não é definida nos números reais (divisão por zero é impossível). Logo, não pode haver pontos no gráfico com essas abscissas - o gráfico não cruza as retas verticais $x = +1$ e $x = -1$, e decompõe-se em três ramos separados. Se x se aproximar dos valores – 1 ou 1, a função $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ aumenta em valores absolutos, ou seja, aumenta ou diminui drasticamente. A forma geral do gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ é mostrada na figura 26.

Figura 26 – Construção do gráfico
de $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



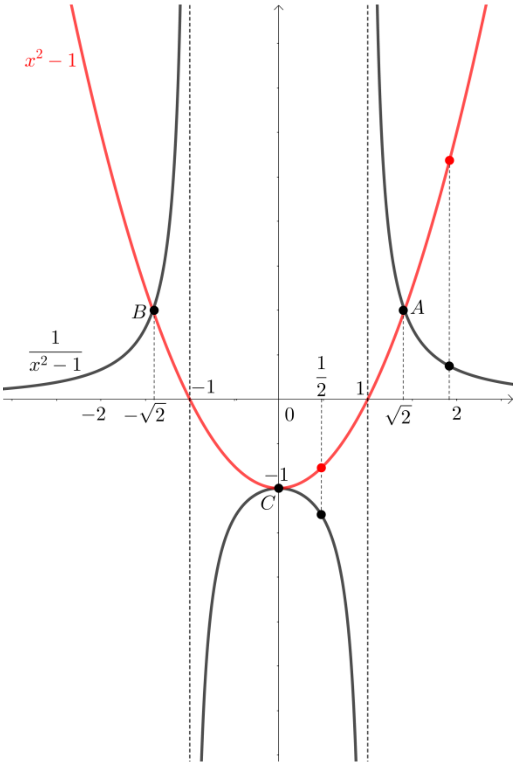
Fonte: O autor, 2020.

Assim como nos dois primeiros exemplos, as expressões $x^2 - 1$ e $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ são inversas entre si. Então, quanto maior o valor de $x^2 - 1$, menor será o de $\dfrac{1}{x^2 - 1}$, e vice-versa. Uma das diferenças está no fato que $x^2 - 1$ deve ser diferente de zero em $\dfrac{1}{x^2 - 1}$. Podemos, inclusive, encontrar os pontos de interseção entre os dois gráficos. Basta igualar suas expressões para obter as abscissas de tais pontos:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = x^2 - 1 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 1, \text{ onde } x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ ou } x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 .$$

A partir das abscissas $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$, teremos respectivamente as ordenadas $y = -1$ e $y = 1$, formando os pontos de interseção $\mathrm{A}(\sqrt{2},1)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{2},1)$ e $\mathrm{C}(0,-1)$, como podemos observar no gráfico da figura 27.

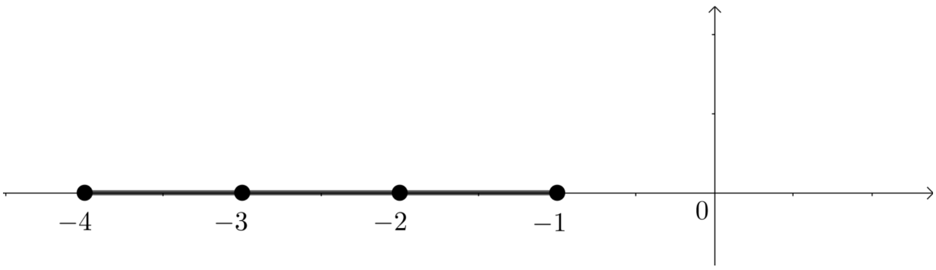
Figura 27 – Gráficos de $y = x^2 - 1$ e $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Passemos agora ao gráfico do polinômio $y = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ que também será construído primeiro por pontos. Perceba a dificuldade para encontrar os valores de *x* para os quais a função se anula. Admitindo *x* como sendo iguais a –1, –2, –3 e –4 obtemos valores da função iguais a zero. Os pontos correspondentes do gráfico (–1, 0), (–2, 0). (–3, 0), (–4, 0) estão no eixo *x* (Figura 28).

Figura 28 – Construção do gráfico de $y = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$.



Fonte: O autor, 2020.

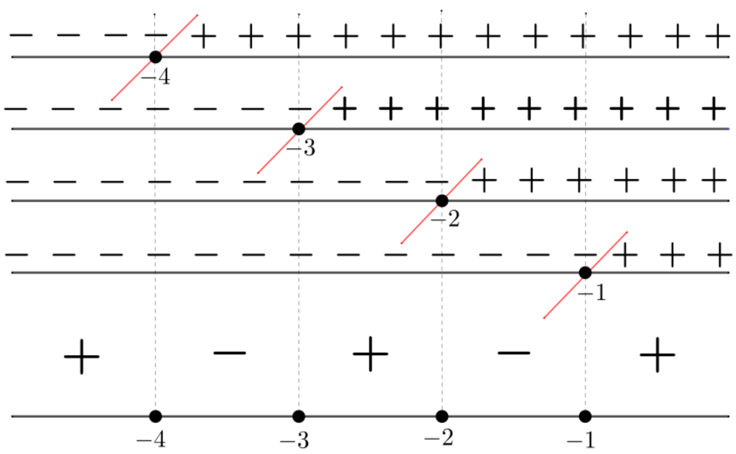
Se nos restringirmos a esses quatro valores, o gráfico será a junção dos pontos obtidos. No entanto, é claro que o eixo *x* não é o gráfico da nossa função porque o polinomial $y = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ não pode ser igual a zero para todos os valores de *x*.

Vamos utilizar mais dois valores, *x* = 0 e *x* = 1. Os pontos correspondentes (0, 24) e (1, 120) não estão no eixo *x*; pelo contrário, eles estão localizados muito longe dele. É possível encontrarmos uma quantidade suficiente de pontos intermediários e construir uma aproximação do gráfico, como fizemos antes, mas esse método não é muito confiável. Vamos proceder de maneira diferente: descobriremos onde a função é positiva (e, portanto, o gráfico está acima do eixo *x*) e onde é negativa (ou seja, o gráfico está abaixo do eixo *x*). Como os valores –1, –2, –3 e –4 anulam a função, temos que

$$y = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

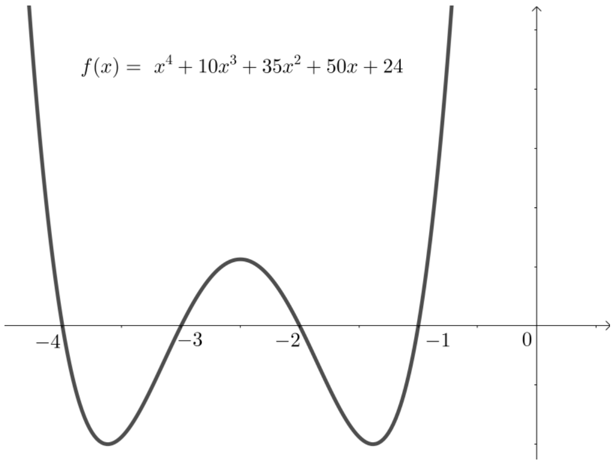
Com o polinômio fatorado, podemos perceber que nossa função é igual a zero apenas nesses quatro pontos que já mencionamos anteriormente. À esquerda do ponto *x* = –4, todos os quatro fatores são negativos e a função é positiva. Entre os pontos *x* = –4 e *x* = –3 (ou seja, no intervalo –4 < *x* < –3), o fator *x* + 4 torna-se positivo, enquanto os demais fatores permanecem negativos, deixando a função negativa. No intervalo –3 < *x* < –2, temos dois fatores positivos e dois fatores negativos, deixando a função positiva. No próximo intervalo –2 < *x* < –1, a função é novamente negativa. Finalmente, como o valor de *x* passa pelo ponto *x* = –1, o último dos fatores torna-se positivo e, consequentemente, a função torna-se positiva (figura 29). O gráfico da função tem a aparência dada na figura 30.

Figura 29 – Estudo dos sinais de $y = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 30 – Construção do gráfico de $y = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$.



Fonte: O autor, 2020.

Com estes exemplos, podemos entender que a construção de um gráfico pode ser arriscada e demorada. E se traçarmos alguns pontos, pode ser que nós obtenhamos uma imagem totalmente falsa da função. E se, por outro lado, traçarmos mais pontos, haverá trabalho supérfluo, e algumas dúvidas ainda permanecerão se não omitimos algo significativo. Como devemos proceder? Não é possível isolar regiões "perigosas" antecipadamente?

Na maioria dos casos, a parte principal da construção de gráficos consiste previamente em encontrar valores de *x* importantes para a função dada e investigando seu comportamento próximo a esses valores, para então completar a construção do gráfico. Em geral, basta encontrar valores da função entre esses pontos característicos.

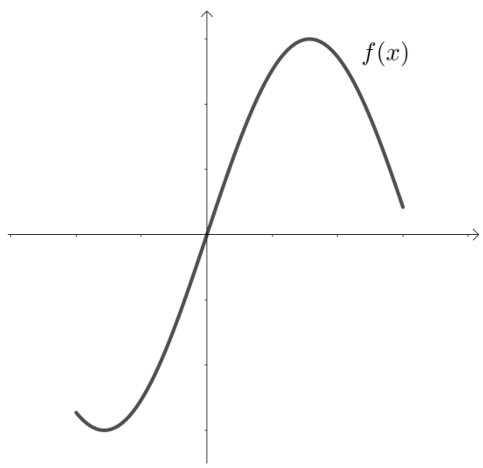
2 CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Neste capítulo serão abordados os movimentos que podemos executar com os gráficos de funções reais de variável real, tendo como ponto de partida gráficos já conhecidos. Novamente, os conceitos de conjuntos domínio e imagem de uma função serão amplamente explorados no seu contexto geométrico, ou seja, a visualização de domínio e imagem no plano cartesiano.

2.1 Translações verticais

Suponhamos conhecido o gráfico de uma função $y = f(x)$.

Figura 31 – Gráfico de uma função $f(x)$.



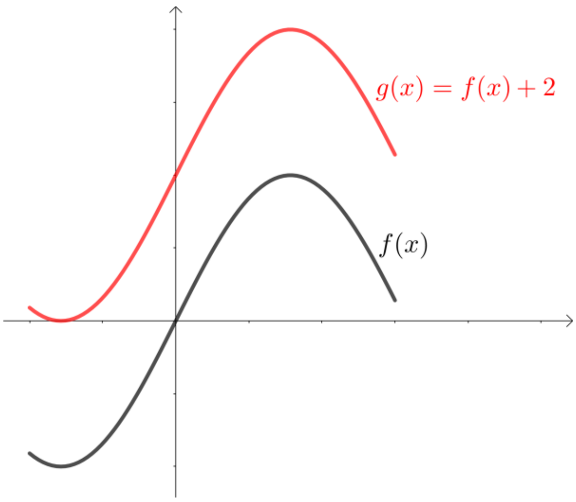
Fonte: O autor, 2020.

Sejam D_f = domínio da função f e D_g = domínio da função g.

Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função g em que $D_g = D_f$, definida por $g(x) = f(x) + a$, corresponde à imagem do gráfico cartesiano de f pela translação associada ao vetor $\vec{u} = (0, a)$. Em outras palavras, se $a > 0$, o gráfico de g pode ser construído através do deslocamento (translação) de a unidades para cima do gráfico de f, ou seja, as imagens de g serão as imagens de f acrescidas da constante a, mantendo-se iguais os domínios de g e f. Na figura 32, seja $a = 2$.

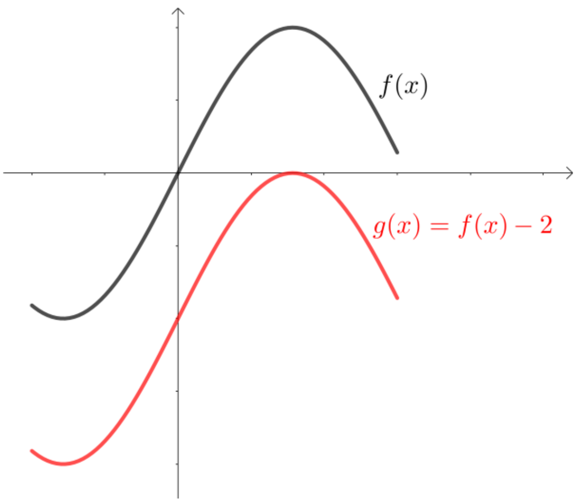
Por outro lado, se $a < 0$, o gráfico de g pode ser construído através do deslocamento de $|a|$ unidades para baixo do gráfico de f, ou seja, as imagens de g serão as imagens de f diminuídas da constante $|a|$, mantendo-se iguais os domínios de g e f. Na figura 33, seja $a = -2$.

Figura 32 – Gráfico de $g(x) = f(x) + 2$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 33 – Gráfico de $g(x) = f(x) - 2$.



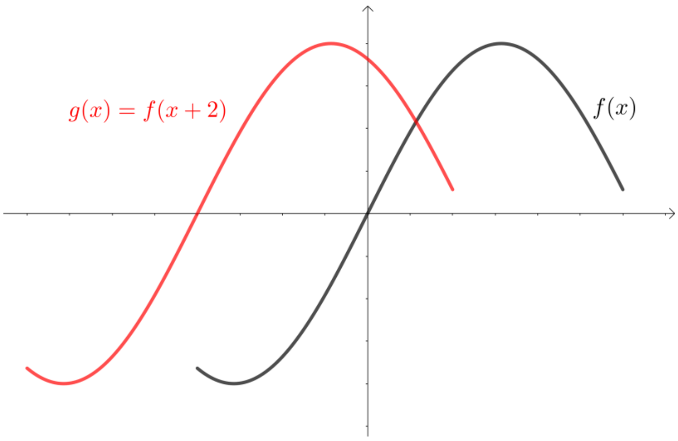
Fonte: O autor, 2020.

2.2 Translações horizontais

Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função g em que $D_g = \{x / x + a \in D_f\} = \{x - a / x \in D_f\}$, definida por $g(x) = f(x + a)$, corresponde à imagem do gráfico cartesiano de *f* pela translação associada ao vetor $\vec{u} = (-a, 0)$. Em outras palavras, se *a* > 0, o gráfico de *g* pode ser construído através do deslocamento de *a* unidades para a esquerda do gráfico de *f*, ou seja, o domínio de *g* será o domínio de *f* diminuído da constante *a*, mantendo-se iguais as imagens de *g* e *f*. Na figura 34, seja *a* = 2.

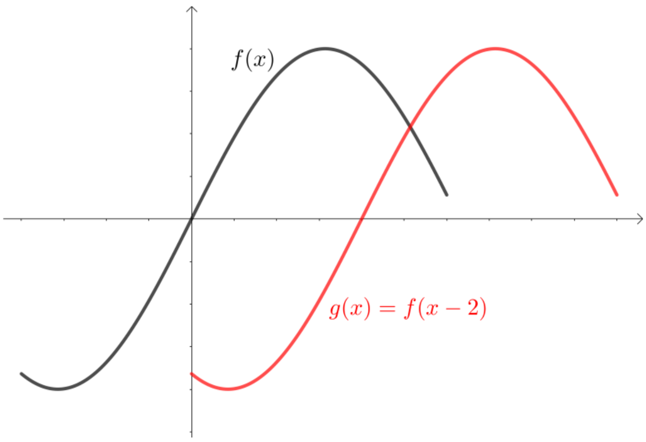
Por outro lado, se *a* < 0, o gráfico de *g* pode ser construído através do deslocamento de |*a*| unidades para a direita do gráfico de *f*, ou seja, o domínio de *g* será o domínios de *f* adicionado da constante *a*, mantendo-se iguais as imagens de *g* e *f*. Na figura 35, seja *a* = –2.

Figura 34 – Gráfico de $g(x) = f(x + 2)$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 35 – Gráfico de $g(x) = f(x - 2)$.



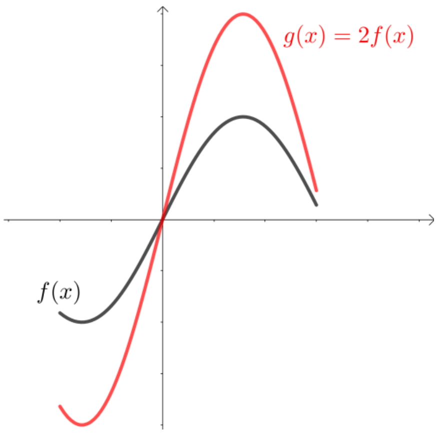
Fonte: O autor, 2020.

2.3 Dilatações (alongamentos) e contrações (encolhimentos) verticais

Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função *g* em que $D_g = D_f$, definida por $g(x) = a \cdot f(x)$, corresponde à imagem do gráfico de *f* por uma dilatação vertical de coeficiente *a*, se $a > 1$. Em outras palavras, o gráfico de *g* pode ser construído através de um alongamento na direção vertical do gráfico de *f*, mantendo-se iguais os domínios de *g* e *f*. Na figura 36, seja $a = 2$.

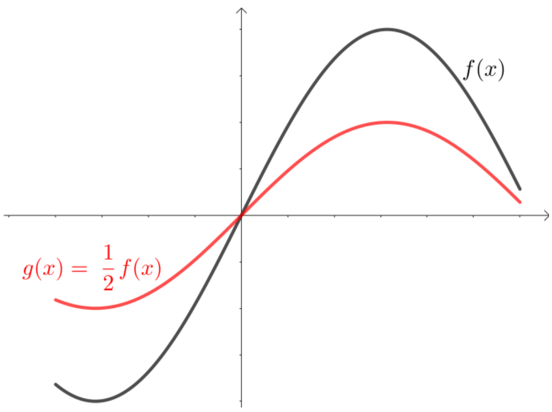
Por outro lado, o gráfico de *g* corresponde à imagem do gráfico de *f* por uma contração vertical de coeficiente *a*, se $0 < a < 1$. Em outras palavras, o gráfico de *g* pode ser construído através de um encolhimento na direção vertical do gráfico de *f*, mantendo-se iguais os domínios de *g* e *f*. Na figura 37, seja $a = \frac{1}{2}$.

Figura 36 – Gráfico de $g(x) = 2f(x)$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 37 – Gráfico de $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

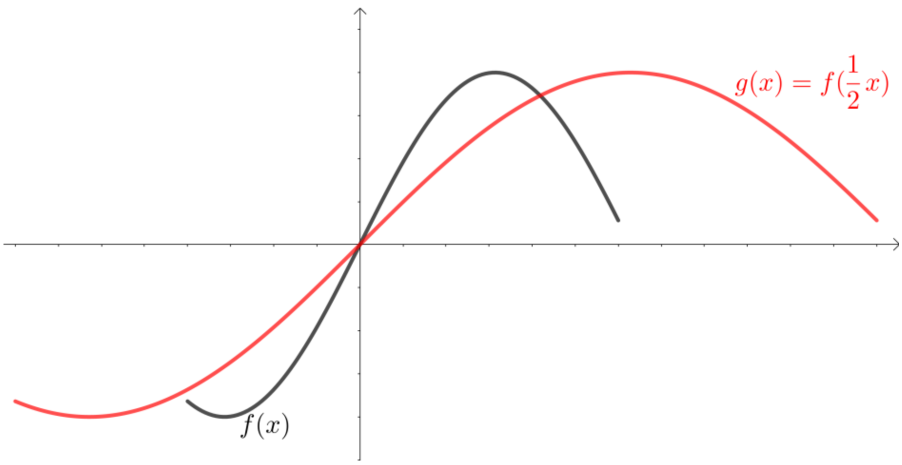


Fonte: O autor, 2020.

2.4 Dilatações (alongamentos) e contrações (encolhimentos) horizontais

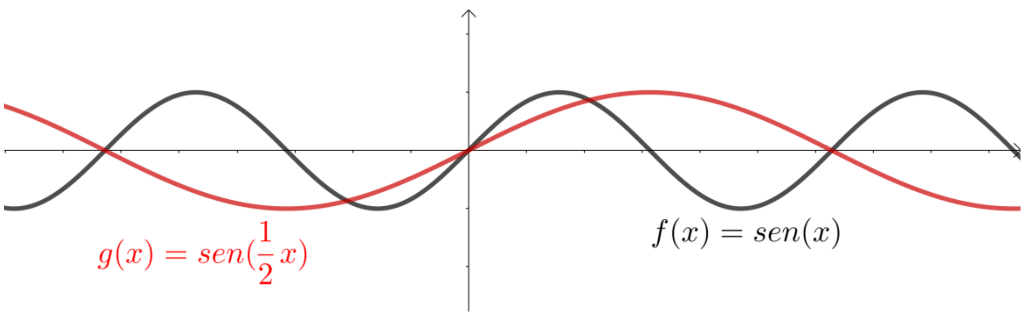
Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função g definida em $D_g = \left\{ \frac{1}{a} \cdot x / x \in D_f \right\}$ por $g(x) = f(ax)$ corresponde à imagem do gráfico de f por uma dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$, se $0 < a < 1$. Em outras palavras, o gráfico de g pode ser construído através de um alongamento na direção horizontal do gráfico de f, mantendo-se iguais as imagens de g e f. Nas figuras 38 e 39, seja $a = \frac{1}{2}$.

Figura 38 – Gráfico de $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Fonte: O autor, 2020.

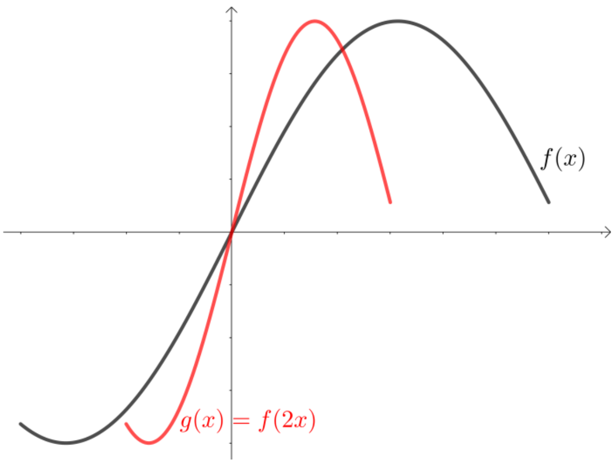
Figura 39 – Gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = sen\left(\frac{1}{2}x\right)$.



Fonte: O autor, 2020.

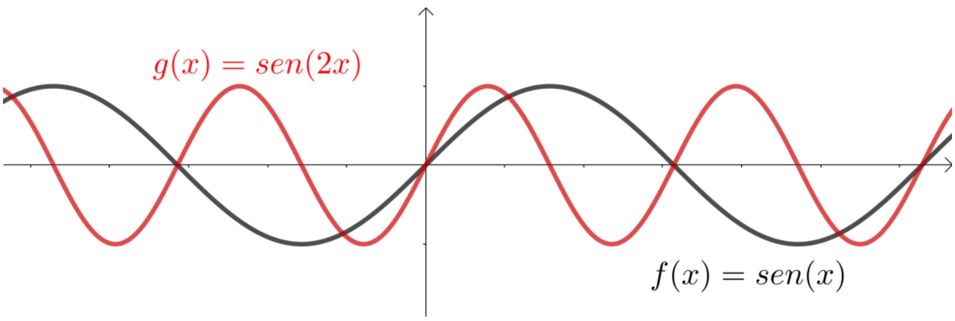
Por outro lado, o gráfico de *g* corresponde à imagem do gráfico de *f* por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$, se $a > 1$. Em outras palavras, o gráfico de *g* pode ser construído através de um encolhimento na direção horizontal do gráfico de *f*, mantendo-se iguais as imagens de *g* e *f*. Nas figuras 40 e 41, seja a = 2.

Figura 40 – Gráfico de $g(x) = f(2x)$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 41 – Gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = f(2x) = sen(2x)$.

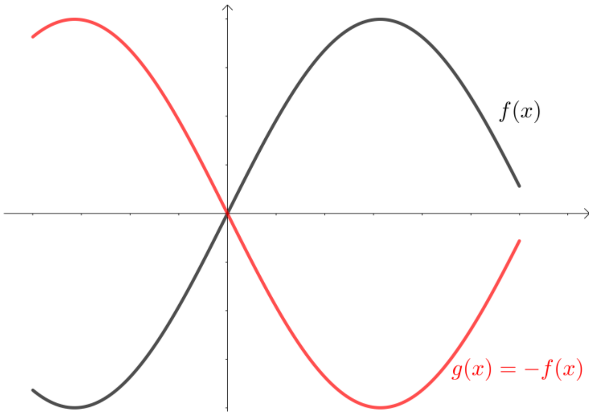


Fonte: O autor, 2020.

2.5 **Reflexão de eixo OX**

Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função *g* em que $D_g = D_f$, definida por $g(x) = -f(x)$, corresponde à imagem do gráfico de *f* pela reflexão OX. Em outras palavras, o gráfico de *g* pode ser construído através da reflexão em torno do eixo *x* do gráfico de *f*, ou seja, os pontos do gráfico de *f* que estiverem abaixo do eixo *x* são refletidos para cima e os que estiverem acima do eixo *x* são refletidos para baixo (Figura 42).

Figura 42 – Gráfico de $g(x) = -f(x)$.

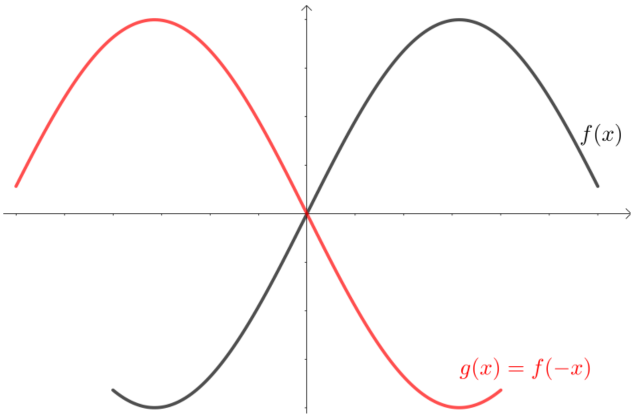


Fonte: O autor, 2020.

2.6 Reflexão de eixo OY

Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função g em que $D_g = \{-x / x \in D_f\}$, definida por $g(x) = f(-x)$, corresponde à imagem do gráfico de f pela reflexão OY. Em outras palavras, o gráfico de g pode ser construído através da reflexão em torno do eixo y do gráfico de *f*, ou seja, os pontos do gráfico de *f* que estiverem à esquerda do eixo *y* são refletidos para a direita e os que estiverem à direita do eixo *y* são refletidos para a esquerda (Figura 43).

Figura 43 – Gráfico de $g(x) = f(-x)$.



Fonte: O autor, 2020.

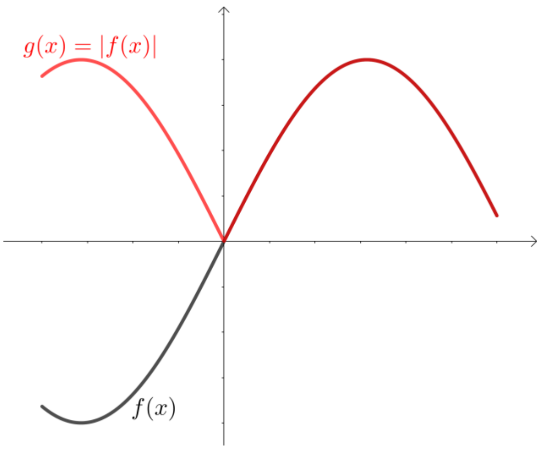
2.7 Módulo $|f(x)|$

Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função *g* em que $D_g = D_f$, definida por

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & se \ f(x) \geq 0 \\ -f(x), & se \ f(x) < 0 \end{cases},$$

corresponde à imagem do gráfico cartesiano de *f* pela simetria dos pontos de ordenada negativa relativamente ao eixo OX. Em outras palavras, o gráfico de *g* pode ser construído através da reflexão em torno do eixo dos *x* da parte do gráfico de *f* que estiver abaixo desse eixo. A parte do gráfico de *f* que estiver acima do eixo dos *x* faz parte do gráfico de *g* sem modificações (Figura 44).

Figura 44 – Gráfico de $g(x) = |f(x)|$.



Fonte: O autor, 2020.

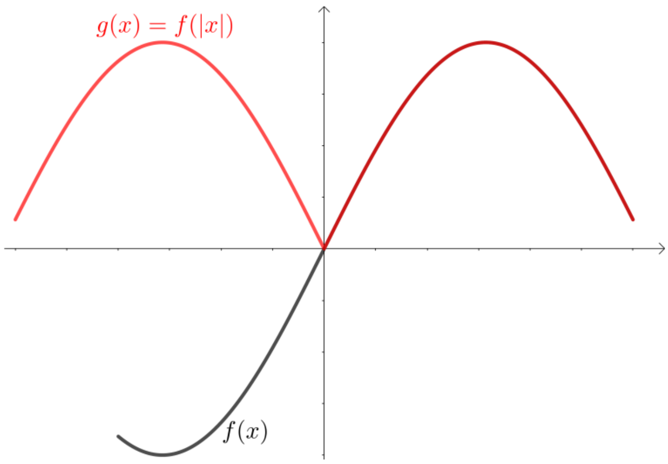
2.8 Módulo $f(|x|)$

Num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função *g* em que $D_g = (D_f \cap \Re_0^+) \cup \{-x / D_f \cap \Re_0^+\}$, definida por

$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & se \ x \geq 0 \\ f(-x), & se \ x < 0 \end{cases},$$

corresponde à imagem do gráfico cartesiano de f mantendo os pontos de abscissa não negativa e a simetria desses pontos relativamente ao eixo OY (Figura 45).

Figura 45 – Gráfico de $g(x) = f(|x|)$.

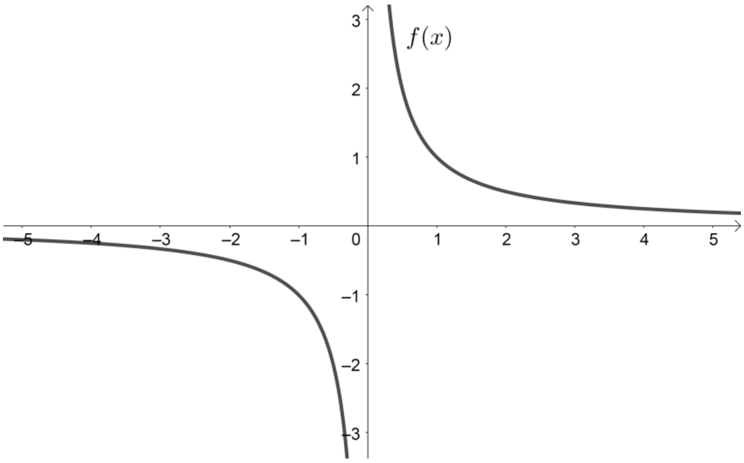


Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 3. Supondo conhecido o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (Figura 46), construa o gráfico de $g(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

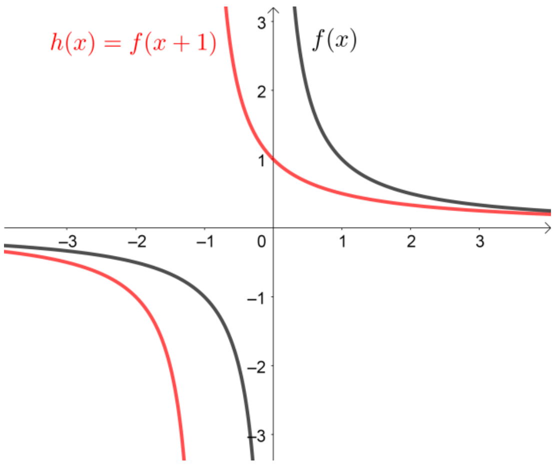
Solução: Observando que $\dfrac{2x+5}{x+1} = \dfrac{2x+2+3}{x+1} = \dfrac{2x+2}{x+1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)}{x+1} + 3 \cdot \dfrac{1}{x+1}$, temos que $g(x)$ pode ser escrita na forma $g(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{x+1} + 2$. O gráfico de $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ pode ser construído deslocando-se o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ uma unidade para a esquerda, pois $h(x) = f(x+1)$ (Figura 47).

Figura 46 – Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.



Fonte: O autor, 2020.

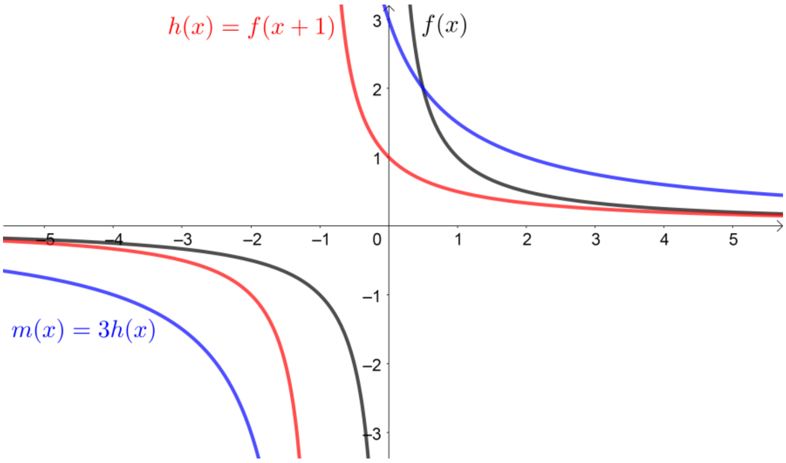
Figura 47 – Translação de uma unidade à direita do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.



Fonte: O autor, 2020.

Daí, para se obter o gráfico de $m(x) = 3.\frac{1}{x+1} = \frac{3}{x+1}$, é só fazer um alongamento por um fator 3 na direção vertical, pois $m(x) = 3 \cdot h(x)$ (Figura 48).

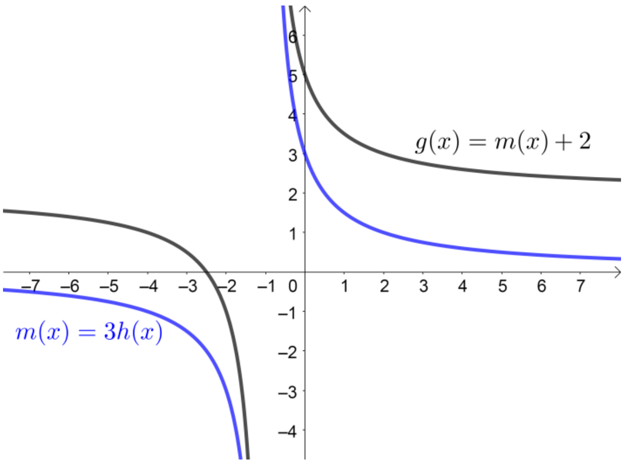
Figura 48 – Alongamento vertical de fator 3 do gráfico de $h(x) = f(x+1)$.



Fonte: O autor, 2020.

Finalmente, basta deslocar o gráfico de $m(x) = \dfrac{3}{x+1}$ duas unidades para cima para se obter o gráfico de $g(x)$, pois $g(x) = m(x) + 2$ (Figura 49).

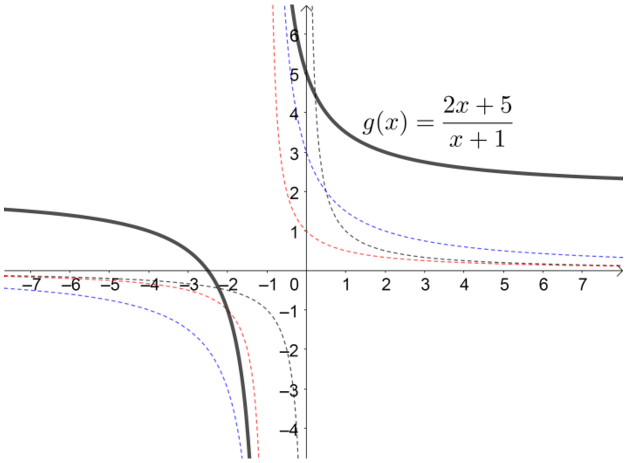
Figura 49 – Translação para cima de duas unidades do gráfico de $m(x) = 3 \cdot h(x)$.



Fonte: O autor, 2020.

Segue o resumo de todos os passos do exemplo (Figura 50):

Figura 50 – Construção do gràfico de $g(x)=\dfrac{2x+5}{x+1}$.

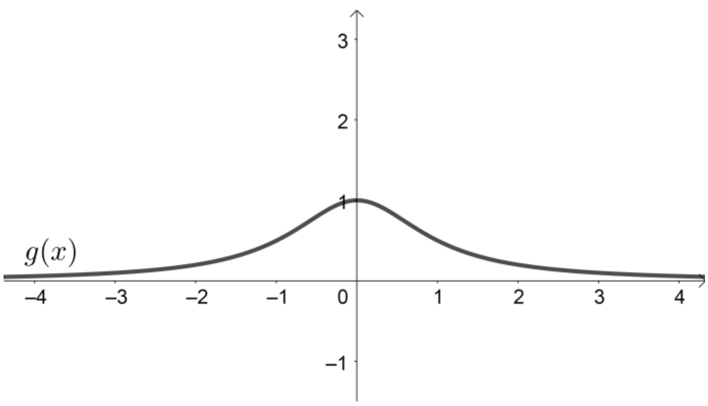


Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 4. Vamos construir o gráfico da função $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

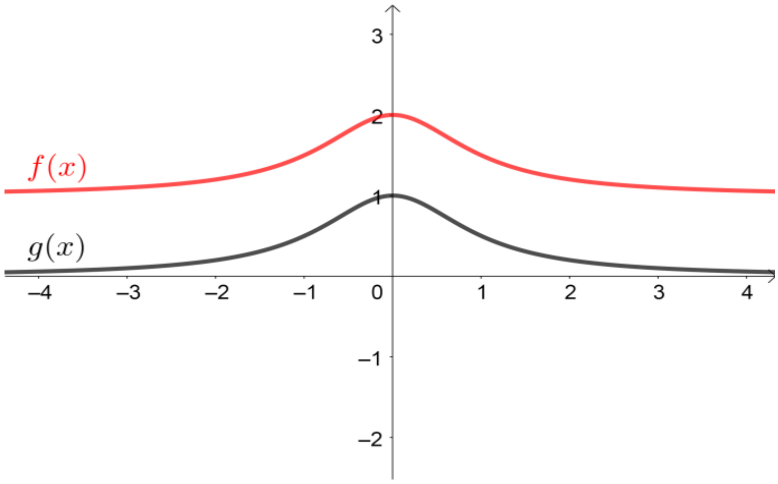
Solução: Vamos representar esta função na forma $f(x)=\dfrac{x^2+1+1}{x^2+1}$ ou $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2+1}$ .Vimos anteriormente o gráfico de $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, que está representado na figura 51. Portanto, fica transparente que o gráfico de $f(x)=\dfrac{x^2+1+1}{x^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}+1$ pode ser obtido do gráfico de $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ por um deslocamento vertical de 1 unidade ao longo do eixo *y*, pois $f(x)=g(x)+1$(Figura 52).

Figura 51 – Construção do gràfico de $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 52 – Translação de uma unidade para cima do gràfico de $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.

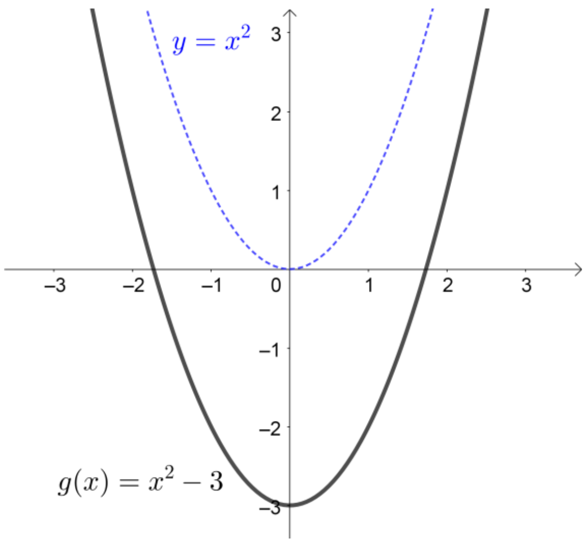


Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 5. Construir o gráfico de $f(x) = |\, x^2 - 3 \,|$.

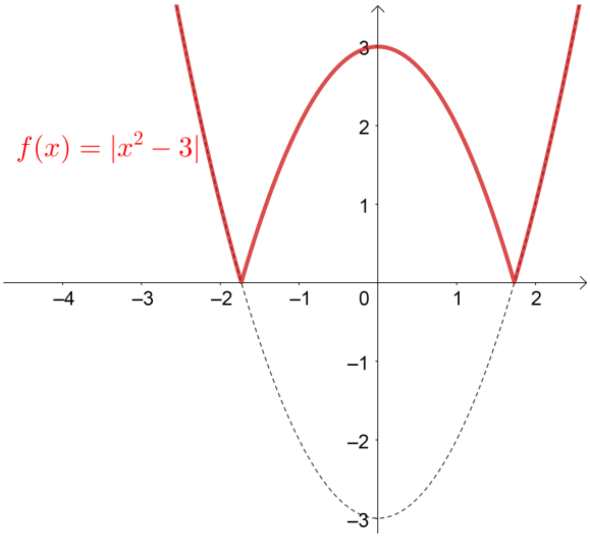
Solução: O gráfico de $g(x) = x^2 - 3$ é o gráfico de x^2 deslocado 3 unidades para baixo (Figura 53). Refletindo para cima do eixo dos x a parte do gráfico de $x^2 - 3$ que está abaixo desse eixo, obtemos o gráfico de $f(x) = |\, x^2 - 3 \,|$ (Figura 54).

Figura 53 – Gráfico de $y = x^2$ deslocado 3 unidades para baixo.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 54 – Gráfico de $f(x) = |\, x^2 - 3\,|$, obtido por reflexão de $g(x) = x^2 - 3$.



Fonte: O autor, 2020.

3 ALGUMAS FUNÇÕES E SEUS GRÁFICOS

O presente capítulo visa expandir o conhecimento ora adquirido em alguns tipos de funções, objetivando o aprimoramento das técnicas utilizadas no capítulo anterior, além de apresentar alguns gráficos de funções amplamente trabalhadas no ensino da Matemática.

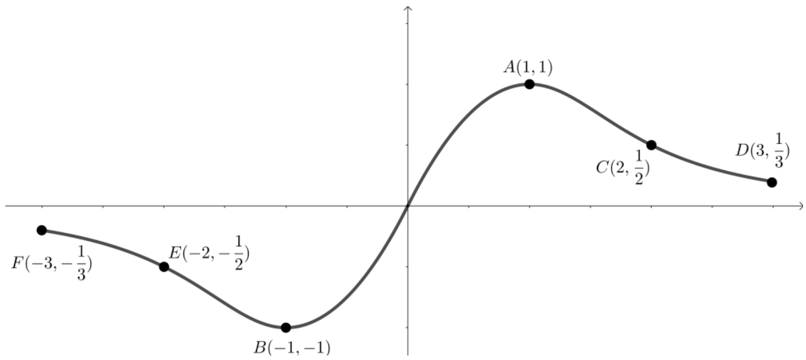
3.1 Função $h(x) = \frac{1}{x}$

Vamos dedicar um pequeno estudo a respeito do gráfico da função $h(x) = \frac{1}{x}$. Para tal, montamos uma tabela de valores para verificar seu comportamento inicial:

	x	$h(x)$
A	1	1
B	–1	–1
C	2	$1/2$
D	3	$1/3$
E	–2	$-1/2$
F	–3	$-1/3$

Um esboço prematuro do gráfico de $h(x)$ ficaria dessa maneira (Figura 55):

Figura 55 – Construção do gráfico de $h(x) = \frac{1}{x}$



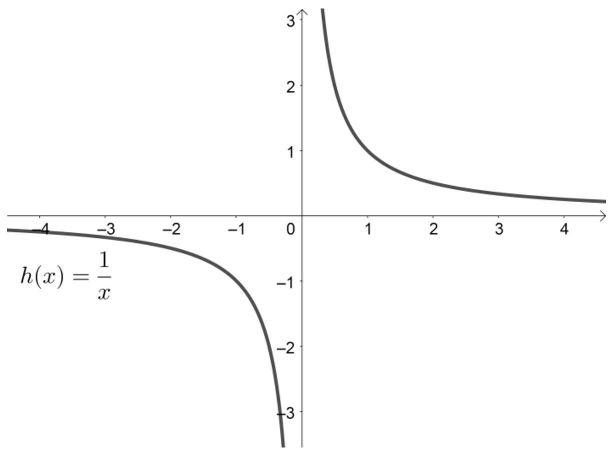
Fonte: O autor, 2020.

Neste momento sabemos, por exemplos anteriores, que gráficos não devem ser desenhados precipitadamente. Observe que, em $x = 0$, a função $h(x) = \frac{1}{x}$ não está definida. Portanto, devemos verificar como a função se comporta perto deste ponto.

Quando x se aproxima de zero à direita ($x > 0$), então $h(x)$ se torna cada vez maior. Se $x > 0$, então $h(x) = \frac{1}{x}$ também é positivo. Portanto, aproximando-se x de zero à direita, a curva do gráfico se move para cima infinitamente, sem tocar a reta $x = 0$. Se x se aproxima de zero à esquerda ($x < 0$), então $h(x)$ é negativo e se torna cada vez menor. Portanto, aproximando-se x de zero à esquerda, a curva do gráfico se move para baixo infinitamente, sem tocar a reta $x = 0$.

Vamos analisar agora como a função se comporta se x aumenta ou diminui infinitamente. Primeiro, vamos considerar o lado direito, ou seja, valores de $x > 0$. Para x positivo os valores da função também são positivos. Isto significa que todo o lado direito do gráfico está acima do eixo x. À medida que x aumenta infinitamente, a fração $\frac{1}{x}$ diminui infinitamente, fazendo com que esta parte do gráfico se aproxime do eixo das abscissas cada vez mais, porém sem interceptá-lo. Por outro lado, observando o lado esquerdo do eixo x, ou seja, valores de $x < 0$, temos que os valores da função serão também negativos. Obviamente o lado esquerdo do gráfico estará abaixo do eixo x. À medida que x diminui infinitamente, a fração $\frac{1}{x}$ aumenta infinitamente, fazendo com que esta parte do gráfico se aproxime do eixo das abscissas cada vez mais, tembém sem interceptá-lo (Figura 56).

Figura 56 – Gráfico $h(x) = \frac{1}{x}$.



Fonte: O autor, 2020.

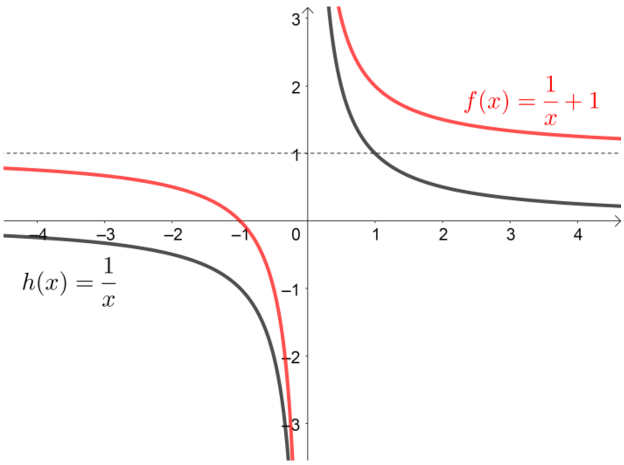
O gráfico de $h(x)=\frac{1}{x}$ é uma HIPÉRBOLE, e as linhas retas no qual o gráfico se aproxima, mas não intersecta, são chamadas ASSÍNTOTAS.

Vamos desenhar os gráficos das funções a seguir, indicando as assíntotas de cada uma das hipérboles. (os gráficos dos seguintes exercícios são obtidos do gráfico da hipérbole $h(x)=\frac{1}{x}$, pelas transformações que vimos anteriormente).

Exemplo 6. Esboçar o gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}+1$.

Solução: Como vimos anteriormente, as assíntotas de $h(x)=\frac{1}{x}$ são as retas $x = 0$ e $y = 0$. Em $f(x)=\frac{1}{x}+1$, haverá somente a translação vertical para cima de uma unidade do gráfico de $h(x)=\frac{1}{x}$. Pelo gráfico abaixo (Figura 57), está nítido que as assíntotas serão $x = 0$ e $y = 1$.

Figura 57 – Gráfico de $h(x)=\frac{1}{x}$ transladado uma unidade para cima.

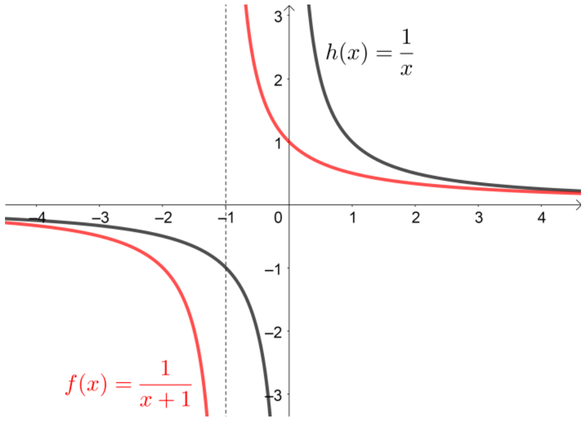


Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 7. Esboçar o gráfico de $f(x)=\frac{1}{x+1}$.

Solução: Neste caso, haverá somente uma translação horizontal de uma unidade para a esquerda do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$. Pelo gráfico abaixo (Figura 58), as assíntotas serão $x = -1$ e $y = 0$.

Figura 58 – Gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$ transladado uma unidade para esquerda.

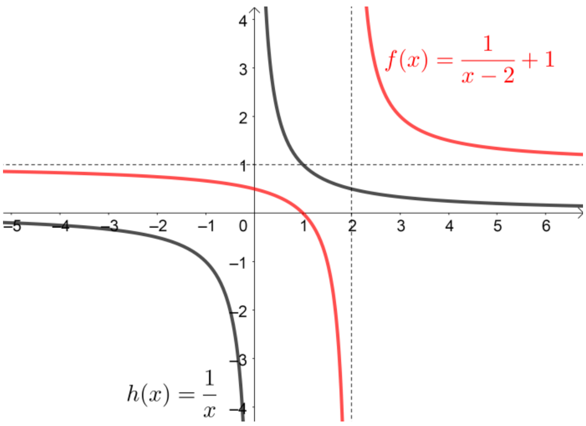


Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 8. Esboçar o gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$.

Solução: Neste exemplo, teremos a translação horizontal de duas unidades para a direita do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$, além da translação vertical para cima de uma unidade do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$. Pelo gráfico abaixo (Figura 59), as assíntotas serão $x = 2$ e $y = 1$.

Figura 59 – Gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$.



Fonte: O autor, 2020.

3.2 **Função** $f(x)=\dfrac{a}{bx+c}$

Os gráficos de funções da forma $f(x)=\dfrac{a}{bx+c}$, onde $a\neq 0$ e $b\neq 0$, podem ser obtidos a partir do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$ por translação ao longo do eixo *x* e dilatando-se/contraindo-se ao longo do eixo *y*. Para determinar o valor correto da translação e dilatação/contração, é necessário que se divida o numerador e o denominador da fração por *b* (coeficiente de *x*):

$$f(x)=\frac{a}{bx+c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{b}x+\frac{c}{b}}\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{a}{b}}{x+\frac{c}{b}}$$

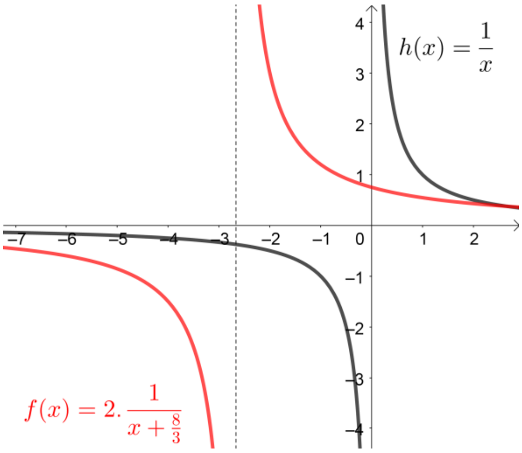
Exemplo 9. Vamos esboçar o gráfico de $f(x)=\dfrac{6}{3x+8}$.

Solução: Dividindo o numerador e o denominador da fração por 3 (coeficiente de *x*):

$$f(x)=\frac{6}{3x+8}=\frac{\frac{6}{3}}{\frac{3}{3}x+\frac{8}{3}}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x+\frac{8}{3}}\Rightarrow f(x)=2\cdot\frac{1}{x+\frac{8}{3}}$$

Agora é óbvio que o gráfico da nossa função $f(x)=\dfrac{6}{3x+8}=2\cdot\dfrac{1}{x+\frac{8}{3}}$ é o gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$, com translação horizontal de $\left(\dfrac{8}{3}\right)$ unidades para a esquerda do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$ e também por uma dilatação (alongamento) vertical de coeficiente 2. De acordo com o gráfico da figura 60, suas assíntotas serão $x=-\dfrac{8}{3}$ e $y=0$.

Figura 60 – Gráfico de $f(x)=\dfrac{6}{3x+8}$.

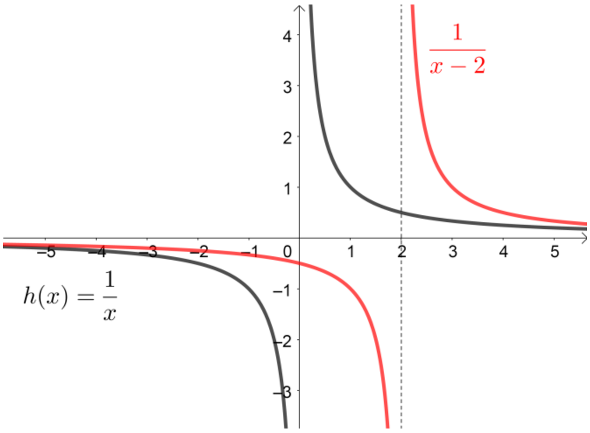


Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 10. Vamos desenhar o gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{2-x}+1$.

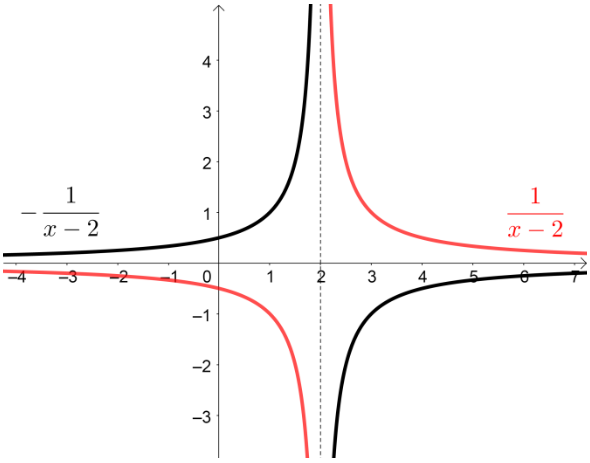
Solução: Divida o numerador e o denominador da fração $\dfrac{1}{2-x}$ pelo coeficiente de *x*, ou seja, por (–1), para obter $\dfrac{-1}{x-2}$ e, consequentemente, $f(x)=-\dfrac{1}{x-2}+1$. Ficou transparente que o gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{2-x}+1 \Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x-2}+1$ sofrerá uma translação horizontal de duas unidades para a direita do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$ (Figura 61) para, logo após, ser refletido em relação ao eixo *x* (Figura 62), ou seja, os pontos do gráfico de $\dfrac{1}{x-2}$ que estiverem abaixo do eixo x são refletidos para cima e os que estiverem acima do eixo x são refletidos para baixo.

Figura 61 – Translação de duas unidades à direita do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$.



Fonte: O autor, 2020.

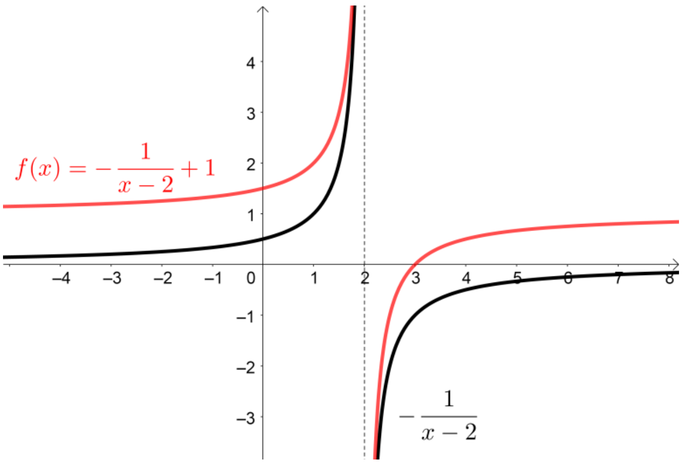
Figura 62 – Reflexão em relação ao eixo x do gráfico de $y = \frac{1}{x-2}$.



Fonte: O autor, 2020.

Por fim, também haverá a translação vertical para cima de uma unidade do gráfico de $-\frac{1}{x-2}$ (Figura 63).

Figura 63 – Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2-x} + 1$.



Fonte: O autor, 2020.

Pelo gráfico, podemos notar que as assíntotas de $f(x) = \frac{1}{2-x} + 1$ serão $x = 2$ e $y = 1$.

3.3 **Função** $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Os gráficos de funções da forma $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ não diferem da forma do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$. Porém, temos que atentar para dois fatos:

- o coeficiente 'c' deve ser diferente de zero. Caso contrário, obteremos a função $f(x)=\dfrac{ax+b}{d}=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$, que é linear.
- $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$, isto é, o numerador não deve ser um múltiplo do denominador. Caso contrário, a função será constante, como em $y=\dfrac{4x+6}{2x+3}=\dfrac{2\cdot(2x+3)}{2x+3}\Rightarrow y=2$.

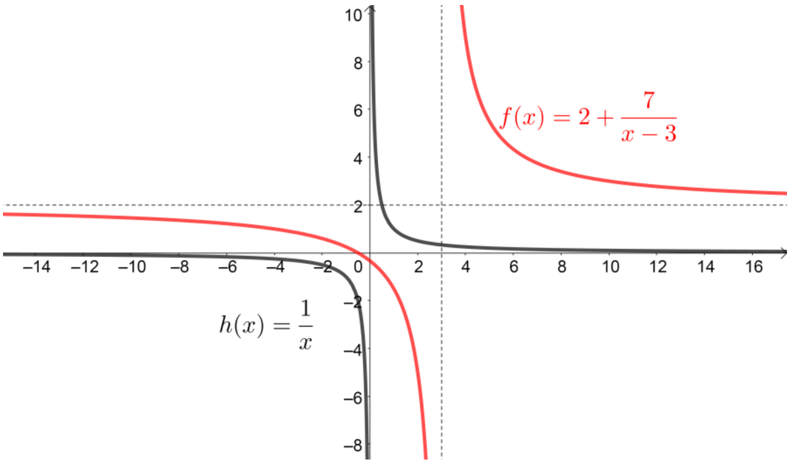
Exemplo 11. Esboçar o gráfico de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

Solução: Vamos separar a "parte inteira" da fração, dividindo o numerador pelo denominador. Dessa forma, obteremos:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}.$$

O gráfico desta função é claramente obtido do gráfico de $h(x)=\dfrac{1}{x}$ pelas seguintes transformações: uma translação horizontal de 3 unidades à direita; por uma dilatação (alongamento) vertical de coeficiente (7) ao longo do eixo *y*, e uma translação vertical de 2 unidades para cima (Figura 64).

Figura 64 – Gráfico de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$.



Fonte: O autor, 2020.

Percebemos que as assíntotas de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}$ serão $x = 3$ e $y = 2$.

Observação: Para construir o gráfico de algumas funções da forma $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, a fração que a define não precisa ser transformada. Sabendo que seu gráfico é uma hipérbole, basta encontrar as linhas retas nas quais seu gráfico se aproxima, mas não encosta (as assíntotas de hipérbole) e mais alguns pontos característicos.

Exemplo 12. Construa o gráfico de $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x+2}$.

Solução: Suas assíntotas podem ser obtidas a partir de alguns critérios. Perceba que a função não está definida para $2x+2=0 \Rightarrow x=-1$. Para valores muito próximos a –1, o gráfico de $f(x)$ e a reta $x=-1$ ficam também muito próximos à medida que se afastam da origem do sistema de coordenadas, porém sem ocorrer a interseção entre eles. Portanto, $x=-1$ é uma assíntota vertical. Para encontrar a assíntota horizontal, vamos aumentar x em valor absoluto infinitamente. Isso faz com que os números 5 e 2 não exerçam influência na soma e, portanto, teremos como assíntota horizontal a linha reta $y=\dfrac{3}{2}$.

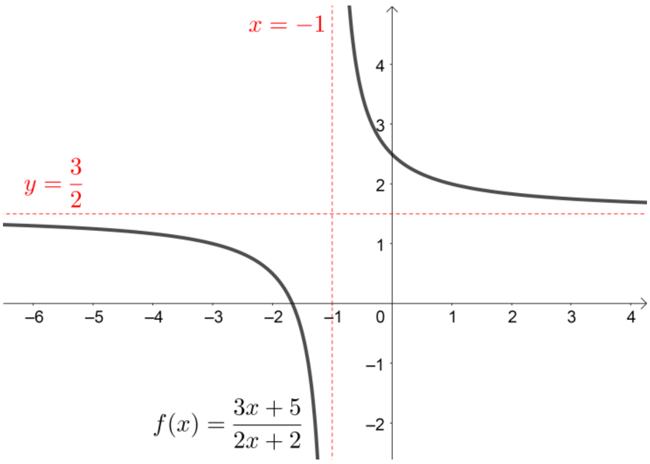
$$f(x)=\frac{3x+5}{2x+2}\approx\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

Os pontos de interseção da hipérbole $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x+2}$ com os eixos coordenados serão:

x	$f(x)$
0	$\dfrac{5}{2}$
$-\dfrac{5}{3}$	0

Enfim, o gráfico ficará da seguinte forma (Figura 65):

Figura 65 – Gráfico de $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x+2}$.



Fonte: O autor, 2020.

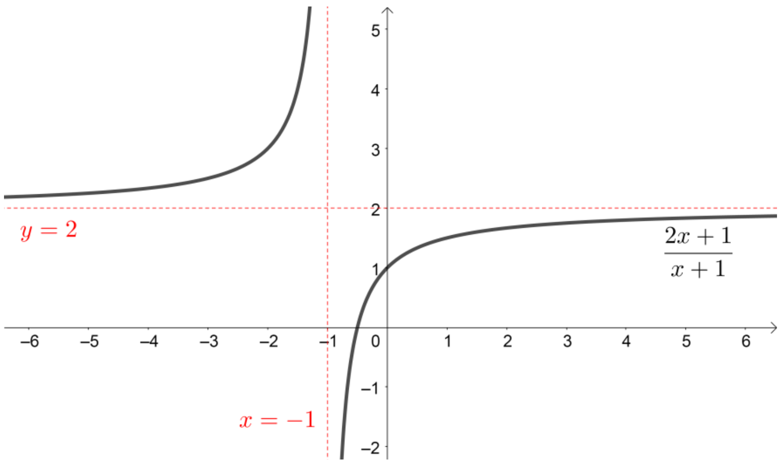
Exemplo 13. Sobre o gráfico da função $f(x)=\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|$, podemos afirmar que:

- a função não está definida em $x+1=0 \Rightarrow x=-1$; Para valores muito próximos a –1, o gráfico de *f*(*x*) e a reta $x=-1$ ficam também muito próximos à medida que se afastam da origem do sistema de coordenadas, porém sem ocorrer a interseção entre eles. Então, $x=-1$ é uma assíntota vertical.;
- considerando os valores de x aumentando indefinidamente em valores absolutos, temos que $y=\dfrac{2x+1}{x+1}\approx\dfrac{2x}{x}=\dfrac{2}{1}=2$. Então, a assíntota horizontal será *y* = 2, e

- os pontos de interseção de *f(x)* com os eixos coordenados serão $y = 1$ (para $x = 0$) e $x = -\frac{1}{2}$ (para $y = 0$).

Até aqui, temos o gráfico de $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (Figura 66):

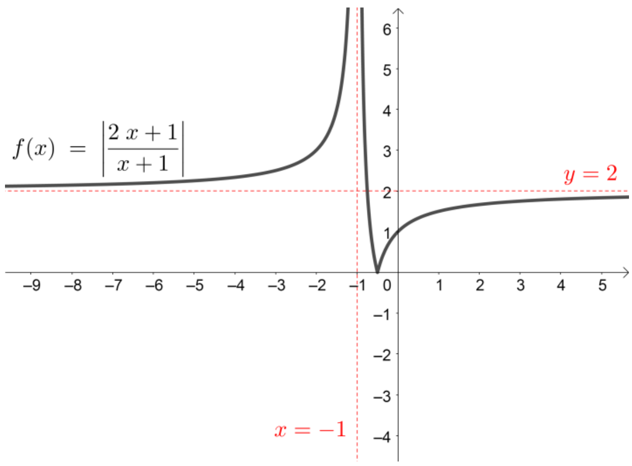
Figura 66 – Gráfico de $y = \frac{2x+1}{x+1}$.



Fonte: O autor, 2020.

Como queremos o gráfico de $f(x) = \left|\frac{2x+1}{x+1}\right|$, basta refletir a parte do gráfico de $y = \frac{2x+1}{x+1}$ que estiver abaixo do eixo *x*, de acordo com a figura 67:

Figura 67 – Gráfico de $f(x) = \left|\frac{2x+1}{x+1}\right|$.

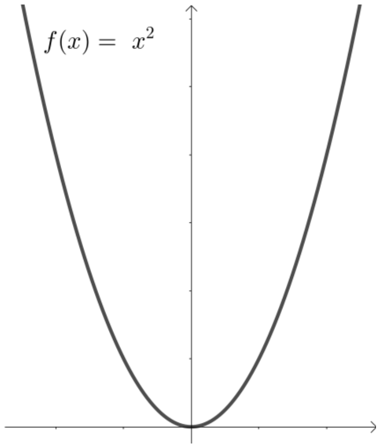


Fonte: O autor, 2020.

3.4 Função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Inicialmente, vamos considerar o gráfico da função $f(x) = x^2$ (Figura 68), onde sabemos tratar-se de uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano.

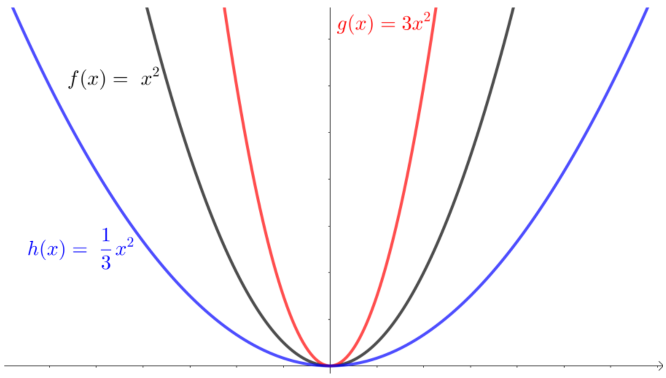
Figura 68 – Gráfico de $f(x) = x^2$.



Fonte: O autor, 2020.

Ademais, gráficos das funções *f(x)* = *ax*^{2}, com a real diferente de zero, são obtidos a partir do gráfico de $f(x) = x^2$ por alongamentos e contrações, e serão parábolas (vale ressaltar que hipérbole e parábola são cônicas, e os gráficos de algumas funções são assim chamados porque, de fato, são esses objetos). Usaremos, como exemplo, as funções $g(x) = 3x^2$ e $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ (Figura 69), em comparação com a função $f(x) = x^2$:

Figura 69 – Alongamento e contração do gráfico de $f(x) = x^2$.



Fonte: O autor, 2020.

Consideremos agora os gráficos das funções quadráticas da forma $f(x) = x^2 + bx + c$. Vamos mostrar que seus gráficos não diferem muito do gráfico da parábola $y = x^2$, mas estão apenas em posição diferente em relação aos eixos de coordenadas. Para começar, vamos considerar um exemplo numérico.

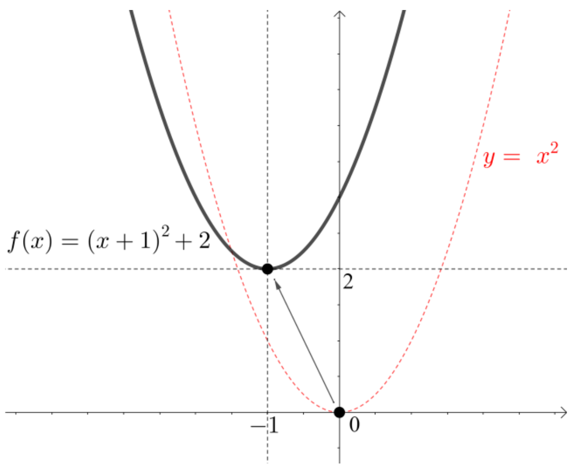
Exemplo 14. Considere a função $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Repare que

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2,$$

onde esse processo chama-se “completando o quadrado”.

Assim, o gráfico de $f(x) = (x+1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ é obtido a partir da parábola $y = x^2$ por translação horizontal de uma unidade à esquerda e por translação vertical de duas unidades para cima. Pelas translações, o vértice da parábola $f(x) = x^2 + 2x + 3$, inicialmente na origem O(0, 0), desloca-se para o ponto A(–1, 2) (Figura 70).

Figura 70 – Gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$
a partir de $y = x^2$.



Fonte: O autor, 2020.

Vamos mostrar que, com as translações da parábola $y = x^2$, podemos obter o gráfico de qualquer função quadrática da forma $f(x) = x^2 + bx + c$. Para isso, completamos o quadrado, isto é, representamos nossa função na forma $f(x)=(x+K)^2+P$, que deve ser igual a $f(x)=x^2+bx+c$. Portanto:

$$f(x)=(x+K)^2+P=x^2+2Kx+K^2+P=x^2+bx+c$$
$$x^2+2Kx+K^2+P=x^2+bx+c$$

Igualando os termos de acordo com as potências de *x*, teremos:

$$2K=b \Rightarrow K=\frac{b}{2}$$

e

$$K^2+P=c \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2+P=c \Rightarrow P=c-\frac{b^2}{4}$$

Assim, a função $f(x)=x^2+bx+c$ pode ser reescrita na forma $f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$. Nesse formato, a função $f(x)=x^2+bx+c$ representa a parábola $y=x^2$ transladada horizontalmente de $\left(-\frac{b}{2}\right)$ unidades e transladada verticalmente de $\left(c-\frac{b^2}{4}\right)$ unidades, onde o vértice desta parábola tem a abscissa $\left(-\frac{b}{2}\right)$ e ordenada $\left(c-\frac{b^2}{4}\right)$. A translação de $\left(-\frac{b}{2}\right)$ unidades ao longo do eixo *x* significa uma translação para a direita se $-\frac{b}{2}>0$, e uma translação para a esquerda se $-\frac{b}{2}<0$, enquanto a translação de $\left(c-\frac{b^2}{4}\right)$ unidades ao longo do eixo *y* significa uma translação para cima se $c-\frac{b^2}{4}>0$, e uma translação para baixo se $c-\frac{b^2}{4}<0$

Exemplo 15. Encontre o menor valor da função $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

Solução: Basta calcular a ordenada do vértice da parábola. Para determinar as coordenadas do vértice, vamos completar o quadrado:

$$f(x) = x^2 + 6x + 5 + 4 - 4 = x^2 + 6x + 9 - 4 = (x+3)^2 - 4$$

Dessa forma, nossa parábola foi obtida de $y = x^2$ por translação ao longo do eixo *x* por –3 unidades e ao longo do eixo *y* em –4 unidades, isto é, o menor valor da função é igual a –4.

Vamos analisar o gráfico de funções do tipo $y = ax^2$. A partir dele, podemos obter o gráfico de funções do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para melhor entendimento, vamos utilizar um exemplo numérico para, em seguida, expandir o conceito.

Exemplo 16. Sobre a função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$, e isolando o coeficiente de x^2, temos:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 = \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 12\right)$$

Completamos o quadrado da expressão dentro dos parênteses:

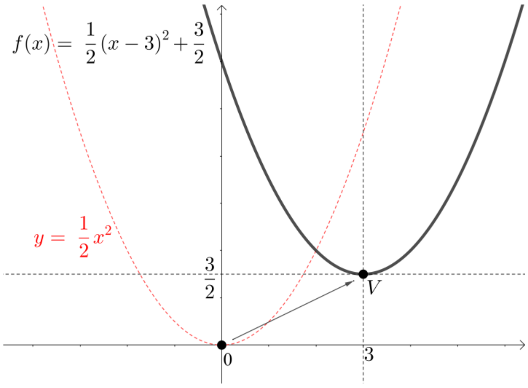
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 12\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + 3\right) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 + 3\right]$$

Assim, finalmente,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{3}{2}$$

Vemos que o gráfico de $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{3}{2}$ é obtido da parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ transladando 3 unidades à direita ao longo do eixo x e $\frac{3}{2}$ unidades acima ao longo do eixo y (Figura 71).

Figura 71 – Gráfico de $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+6$ a partir de $y=\frac{1}{2}x^2$.



Fonte: O autor, 2020.

Utilizando a ideia do exemplo anterior, isolamos o coeficiente de x^2 em $f(x)=ax^2+bx+c$:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Devemos completar o quadrado da expressão dentro dos parênteses. Para isso, vamos igualá-la à expressão $(x+K)^2+P$ e obter os valores de K e P:

$$(x+K)^2+P=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\Rightarrow x^2+2Kx+K^2+P=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}.$$

Igualando os termos semelhantes em ambos os membros da igualdade:

$$2K = \frac{b}{a} \Rightarrow K = \frac{b}{2a} \text{ e } K^2 + P = \frac{c}{a} \Rightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Assim, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita na forma

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Nesse formato, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa a parábola $y = ax^2$ transladada horizontalmente de $-\frac{b}{2a}$ unidades e transladada verticalmente de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ unidades, onde o vértice desta parábola tem abscissa $-\frac{b}{2a}$ e ordenada $\frac{4ac - b^2}{4a}$. A translação de $-\frac{b}{2a}$ unidades ao longo do eixo x significa uma translação para a direita se $-\frac{b}{2a} > 0$, e uma translação para a esquerda se $-\frac{b}{2a} < 0$, enquanto a translação de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ unidades ao longo do eixo y significa uma translação para cima se $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$, e uma translação para baixo se $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$.

Exemplo 17. Vejamos o "caminho contrário", ou seja, descubra a função *f(x)* cujo gráfico passa pelo ponto $\mathrm{A}(3,2)$ que foi transladada ao longo do eixo *x* da parábola $g(x) = x^2$.

Solução: Como a translação é horizontal, as ordenadas de *f*(*x*) e *g*(*x*) são iguais. Sendo assim, teremos

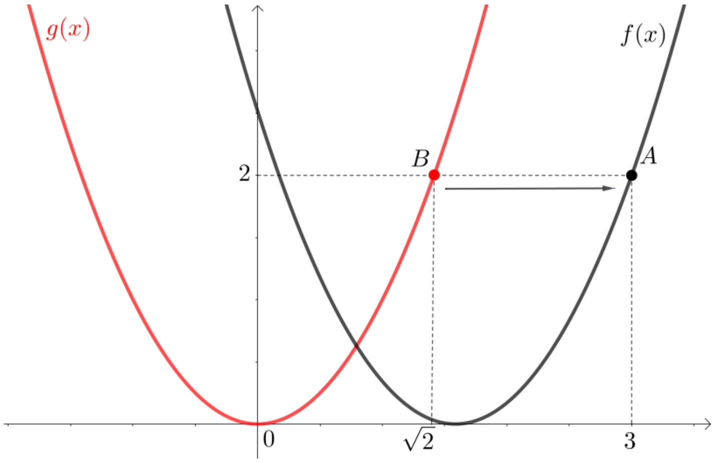
$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2},$$

ou seja, na função *f*, temos o ponto $\mathrm{A}(3,2)$; na função *g*, temos os pontos $B(\sqrt{2},2)$ e $\mathrm{C}(-\sqrt{2},2)$. Portanto, temos duas hipóteses para a expressão de *f*(*x*):

- Se considerarmos o ponto $A(3,2)$ como o ponto transladado do ponto $B(\sqrt{2},2)$, temos a translação horizontal com acréscimo de $(3-\sqrt{2})$ unidades para a direita, e a função *f*(*x*) fica assim definida (Figura 72):

$$f(x)=\left(x-(3-\sqrt{2})\right)^2 \Rightarrow f(x)=x^2-2(3-\sqrt{2})x+(3-\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2-2(3-\sqrt{2})x+11-6\sqrt{2}\,.$$

Figura 72 – Gráfico de $f(x)=x^2-2(3-\sqrt{2})x+11-6\sqrt{2}$.

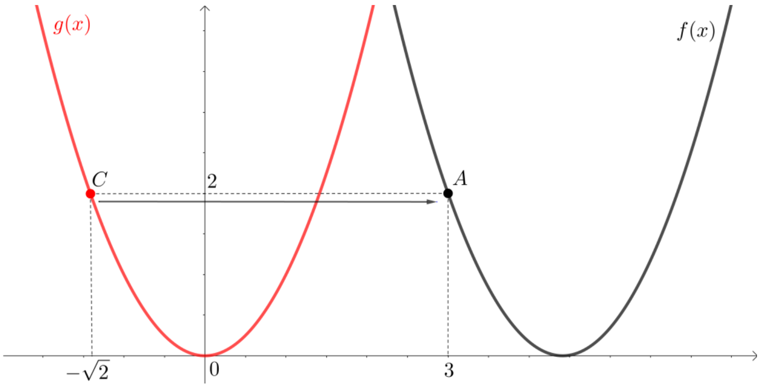


Fonte: O autor, 2020.

- Se considerarmos o ponto $A(3,2)$ como o ponto transladado do ponto $C(-\sqrt{2},2)$, temos a translação horizontal com acréscimo de $(3+\sqrt{2})$ unidades para a direita, e a função *f*(*x*) fica assim definida (Figura 73):

$$f(x)=\left(x-(3+\sqrt{2})\right)^2 \Rightarrow f(x)=x^2-2(3+\sqrt{2})x+(3+\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2-2(3-\sqrt{2})x+11+6\sqrt{2}\,.$$

Figura 73 – Gráfico de $f(x) = x^2 - 2(3-\sqrt{2})x + 11 + 6\sqrt{2}$.



Fonte: O autor, 2020.

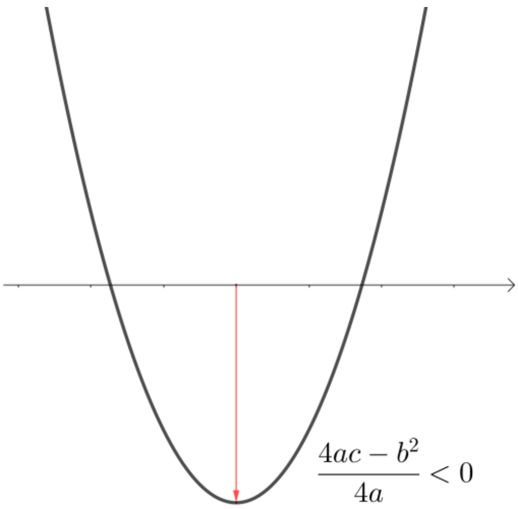
Vamos agora ver o que pode ser dito sobre a solução da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ usando o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

As raízes desta equação são os valores de *x* para o qual o valor da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é igual a zero. No gráfico, esses pontos têm ordenadas iguais a zero; isto é, eles estão no eixo *x*. Do gráfico de

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

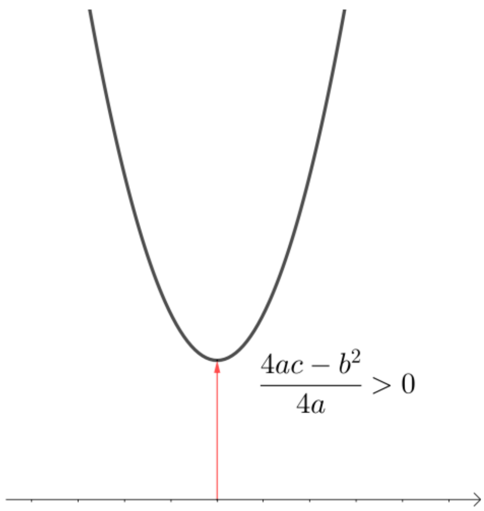
efetuamos o deslocamento do vértice (0,0) de $y = ax^2$ para $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, além de transladar a reta x = 0 (eixo de simetria de $y = ax^2$) para $x = \frac{-b}{2a}$. Dessa forma, observa-se que a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas se $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$ (Figura 74), com $a > 0$, ou não tem raízes reais se $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$ (Figura 75), com $a > 0$ (Lembre-se de que a parábola $y = ax^2$ se move para baixo se $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$, e para cima se $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$).

Figura 74 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com duas raízes reais distintas.



Fonte: O autor, 2020.

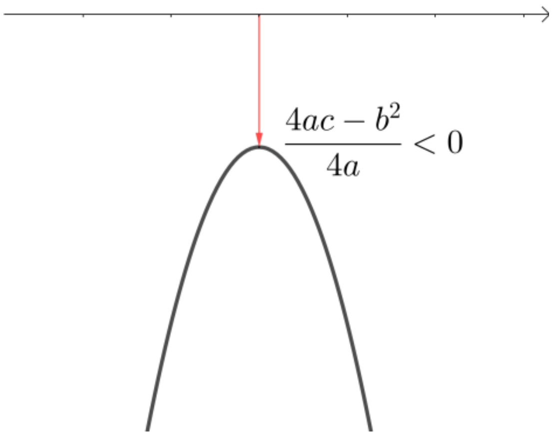
Figura 75 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ sem raízes reais.



Fonte: O autor, 2020.

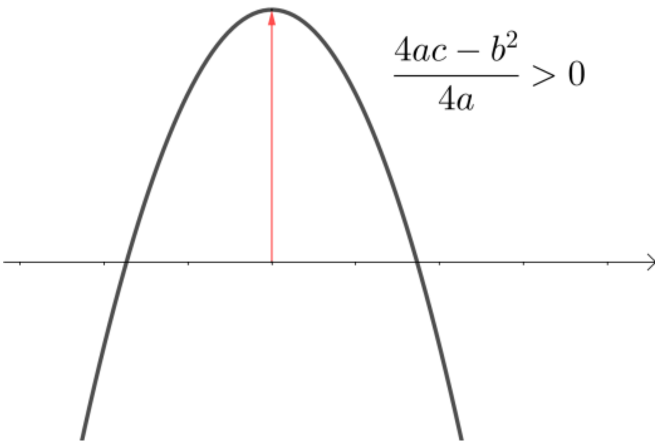
Caso tenhamos $a < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não terá raízes se $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$ (Figura 76), ou terá duas raízes reais distintas se $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$ (Figura 77).

Figura 76 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$
sem raízes reais.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 77 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$
com duas raízes reais distintas.



Fonte: O autor, 2020.

Vejamos o caso para $\frac{4ac - b^2}{4a} = 0$. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se transforma na equação

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

Por exemplo, como explicar que na equação $x - 2 = 0$ temos apenas uma raiz igual a 2 e na equação $(x-2)^2 = 0$ temos 'duas' raízes iguais, $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$? Um método simples consiste em substituir o zero do segundo membro por um número bem próximo de zero à direita, por exemplo:

$$x - 2 = 0{,}01 \Rightarrow x = 2{,}01.$$

É obvio que a raiz muda, mas permanecerá ÚNICA, como na equação anterior. É sobre esse aspecto que vamos detalhar aqui. Faremos o mesmo na equação quadrática, ou seja, substituiremos o zero do segundo membro por um número bem próximo de zero à direita:

$$(x-2)^2 = 0{,}01 \Rightarrow x^2 - 4x + 3{,}99 = 0,$$

que terá as raízes $x_1 = 2{,}1$ e $x_2 = 1{,}9$. Alterando novamente o lado direito da equação por um número cada vez menor:

$$(x-2)^2 = 0{,}0001 \Rightarrow x^2 - 4x + 3{,}9999 = 0,$$

que terá as raízes $x_1 = 2{,}01$ e $x_2 = 1{,}99$. Utilizando o mesmo procedimento:

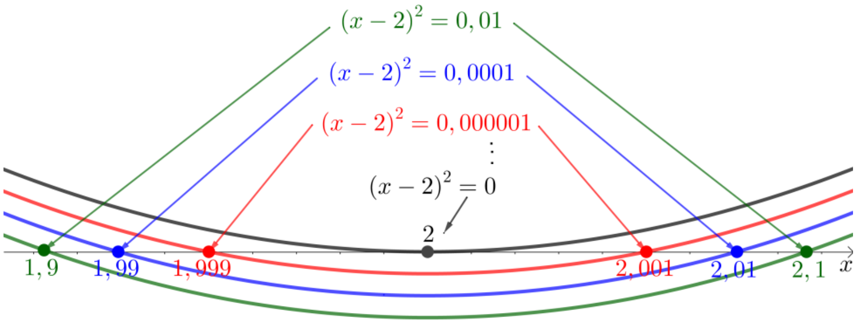
$$(x-2)^2 = 0{,}000001 \Rightarrow x^2 - 4x + 3{,}999999 = 0$$

que terá as raízes $x_1 = 2{,}001$ e $x_2 = 1{,}999$. Colocando os valores das raízes x_1 e x_2 em uma tabela:

x_1	x_2
2,1	1,9
2,01	1,99
2,001	1,999
2,0001	1,9999
2,00001	1,99999

Qual a conclusão? Como o lado direito da equação não é igual a zero, a equação quadrática terá sempre duas raízes distintas. À medida que este lado direito diminui cada vez mais (se aproximando do zero), percebemos que as raízes se 'aproximam' de tal maneira que a diferença entre elas torna-se cada vez menor (próxima do zero), de acordo com a figura 78.

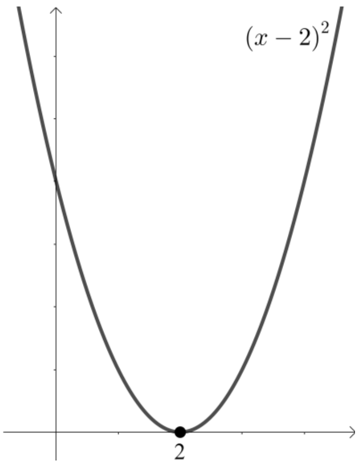
Figura 78 – Contexto geométrico para $\frac{4ac-b^2}{4a}=0$.



Fonte: O autor, 2020.

Finalmente, quando o lado direito da equação quadrática torna-se nulo, as duas raízes "encontram-se', ou seja, ficam iguais. Algebricamente, dizemos que a equação $(x-2)^2=0$ tem duas raízes reais e iguais. Geometricamente, as raízes da equação $(x-2)^2=0$ tocam o eixo x em um único ponto (Figura 79).

Figura 79 – Gráfico de $y=(x-2)^2$.

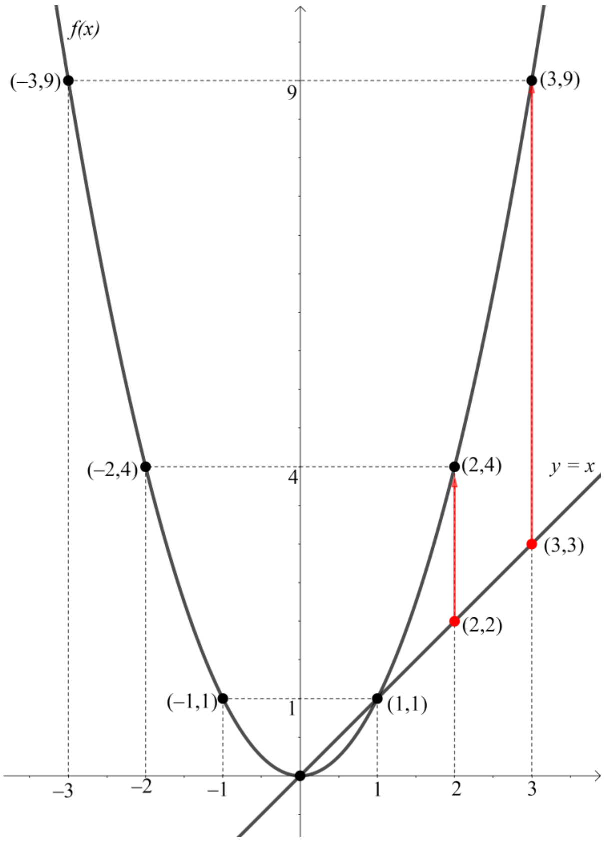


Fonte: O autor, 2020.

Uma maneira alternativa de construir o gráfico de $f(x)=x^2$ seria 'desenhar ao quadrado' o gráfico de $y=x$ (Figura 80), isto é, elevando ao quadrado os valores das ordenadas de $y=x$.

	$y=x$	$f(x)=x^2$
$x=0$	$y=0$	$f(x)=0^2=0$
$x=1$	$y=1$	$f(x)=1^2=1$
$x=2$	$y=2$	$f(x)=2^2=4$
$x=3$	$y=3$	$f(x)=3^2=9$

Figura 80 – Gráfico de $f(x) = x^2$ ‘desenhado ao quadrado’a partir de $y = x$.



Fonte: O autor, 2020.

4 USANDO DERIVADAS PARA DESENHAR GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Neste capítulo serão abordados os critérios para se determinar pontos relevantes do gráfico de uma função que colaborem efetivamente para sua construção, de uma maneira bem ágil e segura. Para isso, faz-se necessário o conceito de derivada e sua interpretação geométrica.

4.1 Breve introdução às derivadas

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento.

Uma das aplicações das derivadas está na construção de gráficos de funções. Primeiramente, devemos entender seu conceito, que é a inclinação da reta tangente em um determinado ponto do gráfico da função. Para os gráficos de funções, o importante é saber pontos específicos (máximo e mínimo local) onde a derivada é nula, ou seja, quando a inclinação da reta tangente muda, passa por um ponto de máximo ou mínimo local, em um determinado intervalo do domínio da função. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto.

Definição 1. *Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0, então a derivada de f em x_0, denotada por* $f'(x_0)$, *é dada por*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

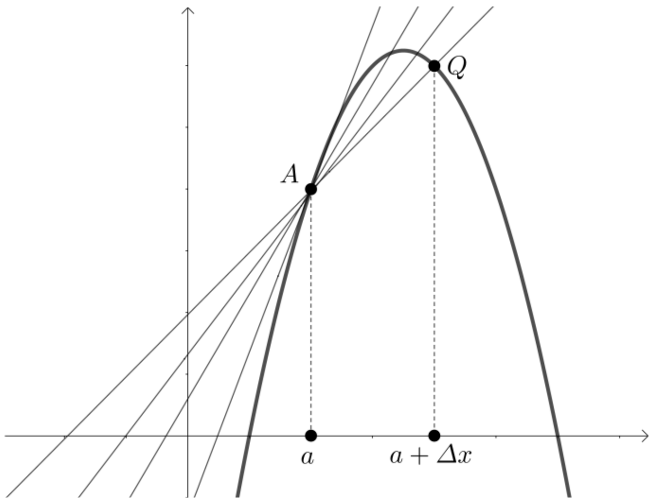
se este limite existir. Δx representa uma pequena variação em x, próximo de x_0, ou seja, tomando $x = x + \Delta x$ ($\Delta x = x - x_0$) , a derivada de f em x_0 pode também se expressa por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A interpretação geométrica da derivada de uma função f em um ponto a fornece o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de f no ponto A(a, $f(a)$). Então, dada uma curva plana que representa o gráfico de f, se conhecermos um ponto A(a, $f(a)$), então a equação da reta tangente r à curva em A é dada por $y - f(a) = m\ (x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação. Mas como obter m para que r seja tangente à curva em A?

Consideremos um outro ponto arbitrário sobre a curva, Q, cujas coordenadas são ($a + \Delta x$, $f(a + \Delta x)$). A reta que passa por A e Q que é chamada reta secante à curva (Figura 81).

Figura 81 – Interpretação geométrica do conceito de derivada.



Fonte: O autor, 2020.

Analisemos agora a variação do coeficiente angular da reta secante fazendo Q se aproximar de A, ou seja, tomando Δx cada vez menor.

Tudo indica que quando A está próximo de Q, o coeficiente angular $m_{\sec}$ da reta secante deve estar próximo do coeficiente angular *m* da reta *r*, ou seja, o coeficiente angular $m_{\sec}$ tem um limite *m* quando Q tende para A, que é o coeficiente angular da reta tangente *r*.

Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + \Delta x$ $(\Delta x = x - a)$ e sabendo-se que a abscissa de A é expressa por *a*, então, se Q → A temos que Δx → 0, o que é equivalente a $x \to a$. Assim,

$$m = m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

se este limite existe, é o coeficiente angular da reta tangente *r*. Porém,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Logo, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto, de fato, fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

Exemplo 18. Se $f(x) = x^2$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de *f*, no ponto A(2, 4).

Solução:

$$m_{\sec} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x,$$

se $\Delta x \neq 0$. Portanto, o coeficiente angular *m* da reta tangente, quando $x_0 = 2$, é dado por:

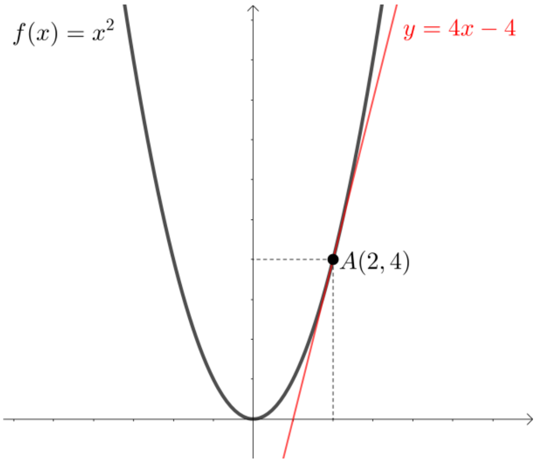
$$m = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

Logo, a equação reduzida para a reta tangente no ponto A(2,4) é dada por:

$$y - 4 = 4(x - 2) \text{ ou } y = 4x - 4,$$

a qual é ilustrada na figura 82.

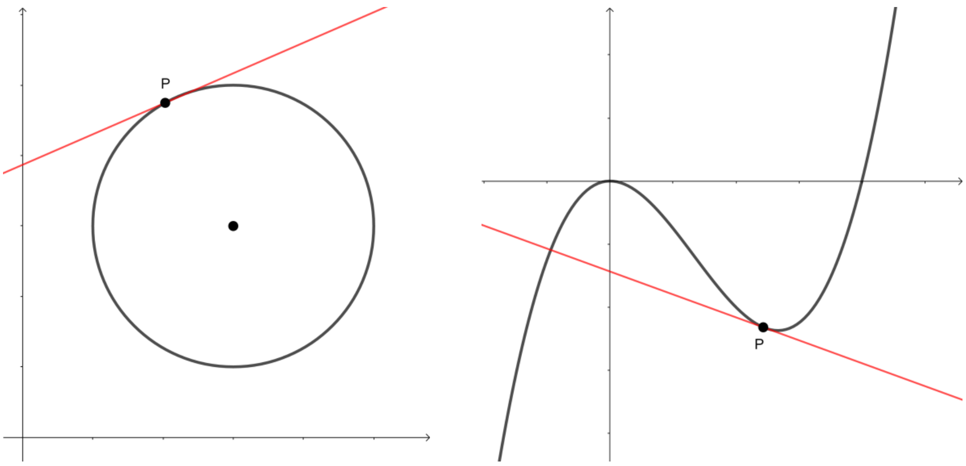
Figura 82 – Equação da reta tangente a $f(x) = x^2$, passando por A(2, 4).



Fonte: O autor, 2020.

O conceito que se conhece na geometria plana de reta tangente a uma circunferência, o qual estabelece que a reta tangente toca a circunferência em um único ponto, não pode ser estendido ao conceito de reta tangente a uma curva definida pela função $y = f(x)$. A figura 83 ilustra essa afirmação.

Figura 83 – Diferenças de aplicação entre conceitos de reta tangente.



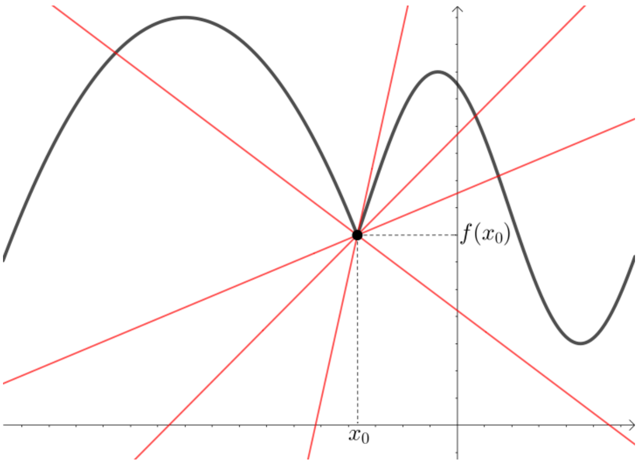
(a) (b)

Legenda: (a) Reta tangente à circunferência, tocando-a somente no ponto P; (b) Reta tangente à função $f(x)$ no ponto P, tocando-a em mais de um ponto.

Fonte: O autor, 2020.

Como consequência da interpretação geométrica da derivada, uma função só é derivável (ou diferenciável) em um ponto de seu domínio se existir somente uma reta tangente ao seu gráfico neste ponto. Estendendo este raciocínio a todos os pontos do domínio da função, notamos que o gráfico de uma função diferenciável é uma curva suave, sem nenhuma “ponta”. A função apresentada na figura abaixo (Figura 84) não é diferenciável em x_0, ou seja, neste ponto (x_0, $f(x_0)$) não existe a sua derivada, pois por ele não passa uma única reta tangente.

Figura 84 – Função não diferenciável no ponto x_0.



Fonte: O autor, 2020.

Como podemos notar, o cálculo da derivada através da sua definição nem sempre é simples, pois envolve o cálculo de um limite. Para minimizar este problema, utilizamos algumas propriedades das derivadas, que chamaremos de regras de derivação, as quais não serão demonstradas neste trabalho, porém suas demonstrações decorrem da definição de derivada e podem ser encontradas na maioria dos livros de Cálculo.

4.2 Algumas regras de derivação

- Se f é a função constante definida por $f(x) = c$, $c \in \Re$, então $f'(x) = 0$.
- Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$.
- Se $f(x) = x^n$, onde $n \in \Re$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- Se f é diferenciável em x e $g(x) = c \cdot f(x)$, então $g'(x) = c \cdot f'(x)$.
- Se f e g são diferenciáveis em x, então $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

- Se *f* e *g* são diferenciáveis em *x*, então $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

- Se *f* e *g* são diferenciáveis em *x*, então $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, com $g(x) \neq 0$.
- Derivada da função composta (Regra da Cadeia): sejam duas funções diferenciáveis *f* e *u*, onde $f = f(u)$ e $u = u(x)$, e tal que $y = f(u(x))$. Então, $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot u'(x)$.

4.3 Breve introdução aos pontos críticos (critérios para determinar a natureza dos extremos de uma função)

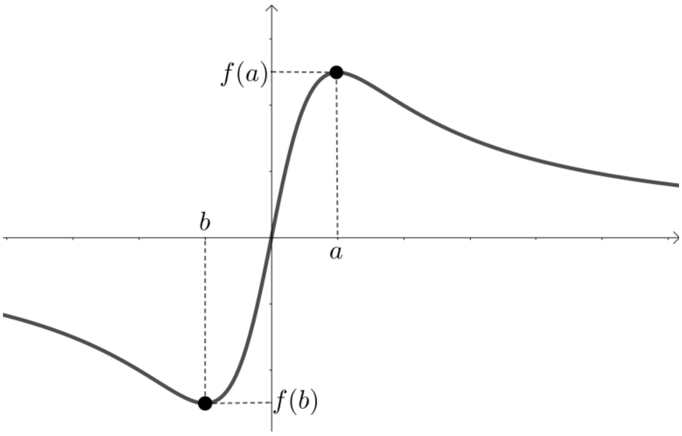
A determinação e análise dos pontos críticos de uma função, bem como das regiões de crescimento ou decrescimento, permite a construção de seu gráfico de modo confiável. Faremos alguns exemplos simples aqui, porém a ênfase será a percepção destes conceitos na visualização gráfica e a aplicação desta teoria na resolução de problemas que exigem a determinação e análise dos extremos de uma função. Como exemplo, podemos citar a necessidade de uma empresa determinar a produção que fornece seu lucro máximo, as medidas que permitem o custo mínimo de um determinado objeto e assim por diante.

Para isso, a primeira medida é sempre encontrar os pontos críticos da função para, em seguida, analisar se são de máximo, de mínimo ou nenhum dos dois. A distinção geométrica entre extremos absolutos e relativos em um gráfico é relativamente simples. Um extremo absoluto, como o próprio nome diz, é o local onde a função atinge o ponto mais alto (máximo absoluto) ou mais baixo (mínimo absoluto). No entanto, existem outros pontos onde a função atinge um máximo ou mínimo local. Tais pontos são chamados de pontos de máximo relativo ou mínimo relativo.

Definição 2. *Seja x = a um número no domínio de uma função f. Então x = a é chamado o* ***máximo absoluto*** *de f se* $f(a) \geq f(x)$ *para todo x no domínio de f, e chamado o* ***mínimo absoluto*** *de f se* $f(a) \leq f(x)$ *para todo x no domínio de f.*

Sendo assim, o número *f*(*a*) é denominado o valor máximo (ou mínimo) absoluto de *f* e o ponto (*a*, *f*(*a*)) é chamado ponto de máximo (ou mínimo) absoluto de *f*. Os máximos e mínimos absolutos de uma função recebem também o nome de extremos absolutos da função. Observe o gráfico abaixo (Figura 85):

Figura 85 – Máximo absoluto e mínimo absoluto de uma função *f*.



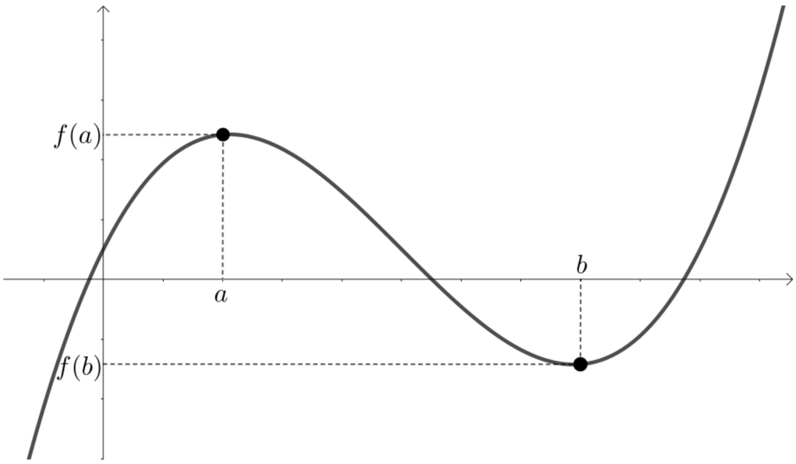
Fonte: O autor, 2020.

Note que o gráfico acima possui máximo absoluto em *x* = *a* e mínimo absoluto em *x* = *b*. Os pontos (*a*, *f*(*a*)) e (*b*, *f*(*b*)) são, respectivamente, o ponto mais alto e o ponto mais baixo no gráfico.

Definição 3. *Seja x = a um número no domínio de uma função f. Então x = a é chamado o* ***máximo relativo ou local*** *de f se* $f(a) \geq f(x)$ *para todo x em (a – k, a + k), para algum k > 0, e chamado o* ***mínimo relativo ou local*** *de f se* $f(a) \leq f(x)$ *para todo x em (a – k, a + k), para algum k > 0.*

Sendo assim, o número *f*(*a*) é denominado o valor máximo (ou mínimo) relativo ou local de *f* e o ponto (*a*, *f*(*a*)) é chamado ponto de máximo (ou mínimo) relativo ou local de *f*. Os máximos e mínimos relativos ou locais de uma função recebem também o nome de extremos relativos ou locais da função. Observe o gráfico abaixo (Figura 86):

Figura 86 – Extremos relativos (máximo e mínimo local) de uma função *f*.



Fonte: O autor, 2020.

Note que o gráfico da função possui máximo local em $x = a$ e mínimo local em $x = b$.

Proposição 1. *Suponha que $f(x)$ exista para todos os valores de $x \in (a,b)$ e que f tenha um extremo relativo em c, onde a < c < b. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c)=0$.*

Geometricamente, esta proposição indica que se *f* tem um extremo relativo em *c* e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de *f* tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x=c$.

Exemplo 19. Esboçar o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{8}{9}x^3-2x^2+\frac{4}{3}$, achando seus pontos críticos e classificando-os. Encontrando a primeira derivada $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{8}{3}x^2-4x$$

Observe que dependendo da complexidade da função original, poderá ser maior a complexidade da equação da primeira derivada. É comum nos depararmos com uma equação muito difícil, onde não conseguimos calcular as raízes diretamente. Para isso existem outros métodos, outro ramo de estudo para os casos em que as equações são intratáveis de uma maneira mais elementar. No nosso exemplo, a equação da primeira derivada é de 3º grau, mas observe que ela é incompleta (não possui o termo constante). Isso nos permite resolver tal equação colocando o x em evidência. Logo:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 4x = \frac{4}{3}x(x^2 - 2x - 3)$$

Anulado a primeira derivada para obter os pontos críticos do gráfico de $f(x)$, teremos $\frac{4}{3}x(x^2 - 2x - 3) = 0$, onde encontramos os três pontos críticos $x = 0$, $x = 3$ e $x = -1$ para serem analisados se são pontos de máximo ou mínimo local. Como decidimos se é máximo ou mínimo? Olhando para a segunda derivada de $f(x)$. Mais especificamente, olhando para o sinal da segunda derivada $f''(x)$. Derivando $f'(x)$ para obter a segunda derivada $f''(x)$, temos

$$f''(x) = 4x^2 - \frac{16}{3}x - 4$$

Analisando o sinal da segunda derivada nos pontos críticos encontrados na primeira derivada, os resultados serão:

$$f''(0) = 4 \cdot 0^2 - \frac{16}{3} \cdot 0 - 4 \Rightarrow f''(0) = -4$$
$$f''(-1) = 4 \cdot (-1)^2 - \frac{16}{3} \cdot (-1) - 4 \Rightarrow f''(-1) = \frac{16}{3}$$
$$f''(3) = 4 \cdot 3^2 - \frac{16}{3} \cdot 3 - 4 \Rightarrow f''(3) = 16$$

Se a segunda derivada (calculada em um determinado ponto crítico) é positiva, então o ponto crítico é de mínimo local. Caso contrário, se a segunda derivada é negativa, o ponto crítico é de máximo local. Portanto:

$x = 0$ é ponto de máximo local, pois $f''(0) = -4 < 0$;

$x = -1$ é ponto de mínimo local, pois $f''(-1) = \frac{16}{3} > 0$, e

$x = 3$ é ponto de mínimo local, pois $f''(3) = 16 > 0$.

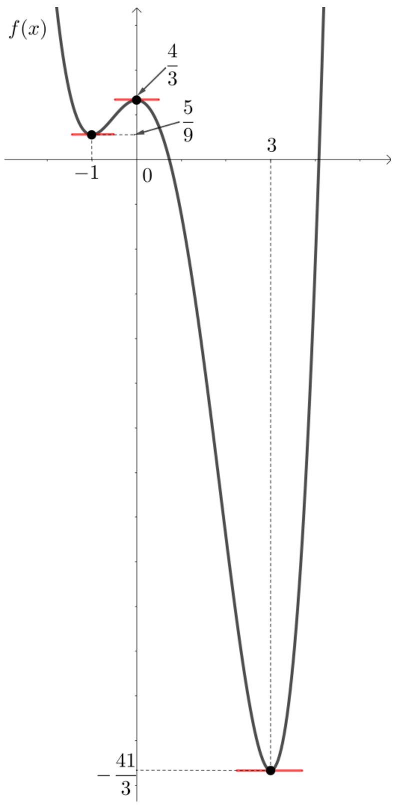
Como podemos perceber, teríamos algumas dificuldades para encontrar as raízes de *f*(*x*), a fim de localizar exatamente onde o seu gráfico deve cortar o eixo das abscissas (numa equação de 4º grau, isso se torna um empecilho, pois não é uma equação trivial de ser resolvida). Porém, só o fato de conhecermos os máximos e mínimos já nos dá uma noção do gráfico de *f*(*x*), e nos permite observar comportamentos interessantes da função a partir deste esboço. Elaborando uma tabela com os valores, temos:

Pontos críticos	$f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{8}{9}x^3-2x^2+\frac{4}{3}$
$x = -1$ (mínimo local)	$f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^4-\frac{8}{9}(-1)^3-2(-1)^2+\frac{4}{3}\Rightarrow f(-1)=\frac{5}{9}$
$x = 3$ (mínimo local)	$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^4-\frac{8}{9}\cdot 3^3-2\cdot 3^2+\frac{4}{3}\Rightarrow f(3)=-\frac{41}{3}$
$x = 0$ (máximo local)	$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 0^4-\frac{8}{9}\cdot 0^3-2\cdot 0^2+\frac{4}{3}\Rightarrow f(0)=\frac{4}{3}$

Enfim, nosso gráfico terá o aspecto da figura 87:

Figura 87 – Máximo e mínimo local de

$$f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{8}{9}x^3-2x^2+\frac{4}{3}.$$



Fonte: O autor, 2020.

Enfim, conforme podemos observar no gráfico anterior (figura 87), se $x = c$ é um ponto de extremo local para *f*, a derivada de *f* se anula e passa uma reta tangente horizontal (retas em vermelho) à curva $y = f(x)$ no ponto (*c*, *f*(*c*)).

Uma sugestão de aplicação aos alunos de ensino médio seria mostrar como obter as coordenadas do vértice de uma parábola (gráfico da função quadrática) usando as derivadas. Vamos considerar a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$, e descobrir se existe um ponto de extremo. Para isso, vamos efetuar a primeira derivada de $f(x) = x^2 - 6x + 5$:

$$f'(x) = 2x - 6 .$$

Anulando a primeira derivada, temos:

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \therefore x = 3 .$$

Analisando o sinal da segunda derivada de $f(x)$ no ponto $x = 3$, teremos:

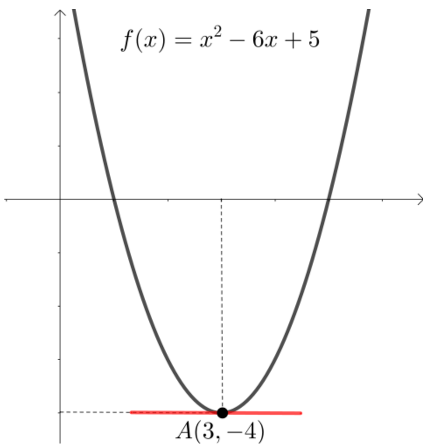
$$f''(x) = 2 > 0 ,$$

ou seja, se a segunda derivada é positiva, o ponto $x = 3$ é de mínimo local. Para encontrar a ordenada do vértice da parábola, basta substituirmos $x = 3$ em $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4 .$$

As coordenadas do vértice do gráfico da função serão A = (3, –4) (Figura 88).

Figura 88 – Mínimo local de $f(x) = x^2 - 6x + 5$.



Fonte: O autor, 2020.

De maneira geral, dada uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, a primeira derivada de $f(x)$ será dada por

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Anulando a primeira derivada para encontrar o ponto crítico:

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a},$$

que é a abscissa do vértice do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$. A ordenada será:

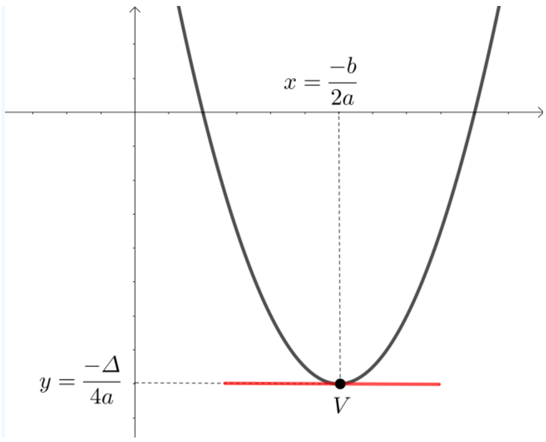
$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \Rightarrow = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-a(b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Para descobrirmos que se trata de máximo ou mínimo local, devemos substituir $x = \frac{-b}{2a}$ na segunda derivada de $f(x)$, onde $f''(x) = 2a$. Como $a \neq 0$, teremos as seguintes hipóteses:

- Se $a > 0$, $f''(x) = 2a > 0$ e $x = \frac{-b}{2a}$ é ponto de mínimo local (Figura 89):

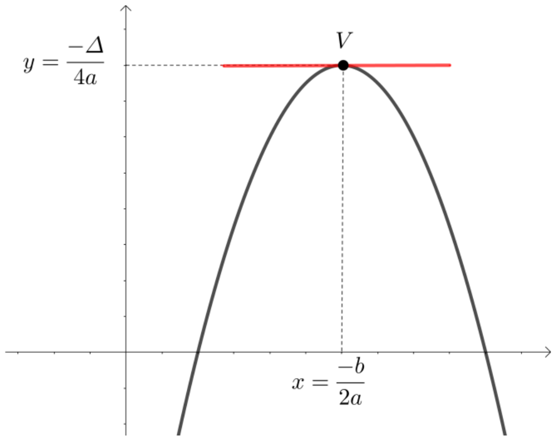
Figura 89 – Mínimo local de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

- Se $a < 0$, $f''(x) = 2a < 0$ e $x = \frac{-b}{2a}$ é ponto de máximo local (Figura 90):

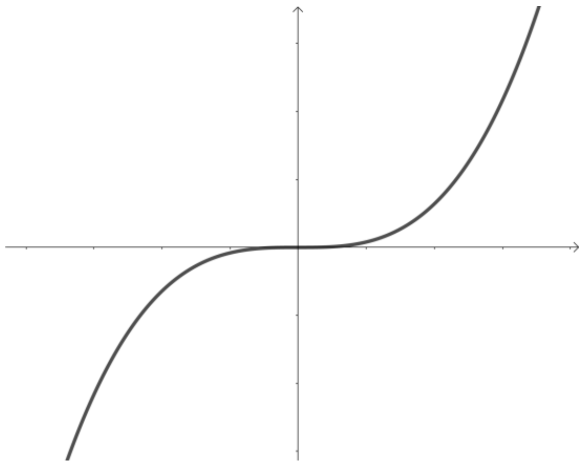
Figura 90 – Máximo local de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

Observação 1. não vale a recíproca da Proposição 1, ou seja, $f'(c) = 0$ não implica que *c* seja um extremo de *f*. O exemplo mais simples que ilustra este fato é a função $f(x) = x^3$ (Figura 91). Vemos claramente que $f'(0) = 0$, porém *f* não tem extremo em $x = 0$. Calculando a primeira derivada de $f(x) = x^3$ obtemos $f'(x) = 3x^2$, onde seu ponto crítico será $x = 0$. À esquerda e também à direita de $x = 0$, a derivada $f'(x) = 3x^2$ sempre será positiva, logo, $x = 0$ não pode ser ponto de máximo local nem ponto de mínimo local para *f*.

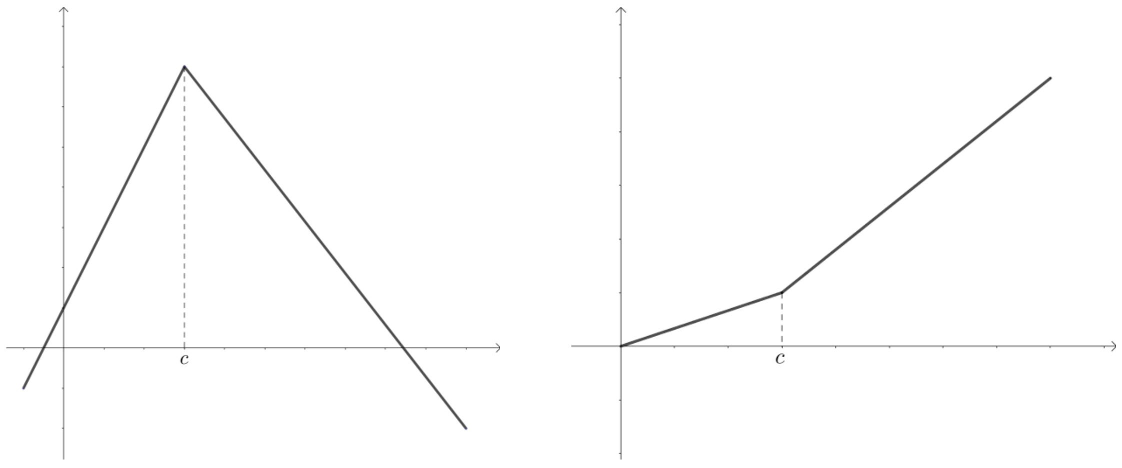
Figura 91 – Gráfico de $f(x) = x^3$.



Fonte: O autor, 2020.

Da mesma forma, observamos nas figuras abaixo que quando $f'(c)$ não existe, f pode ter ou não um extremo relativo em c (Figura 92).

Figura 92 – Exemplos de gráficos onde existe ou não um extremo relativo.



(a) (b)

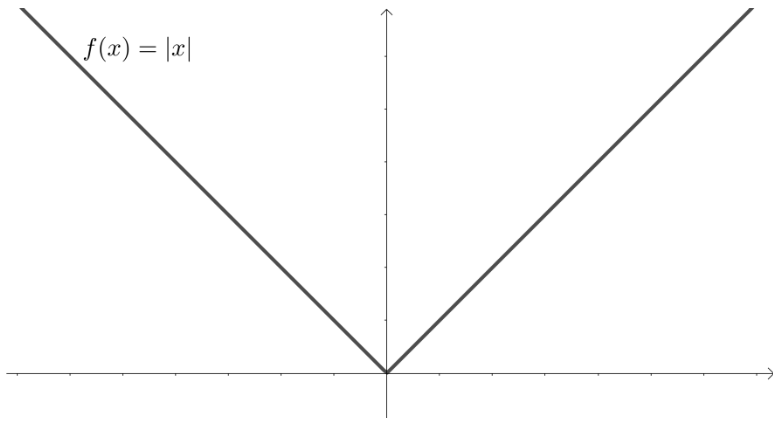
Legenda: (a) Extremo relativo no ponto de abscissa c; (b) Ponto de abscissa c sem extremo relativo.

Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 20. Encontre o ponto crítico da função $f(x) = |x|$.

Solução: Para resolver de uma maneira bem simples, basta representá-la graficamente (Figura 93).

Figura 93 – Gráfico de $f(x) = |x|$.



Fonte: O autor, 2020.

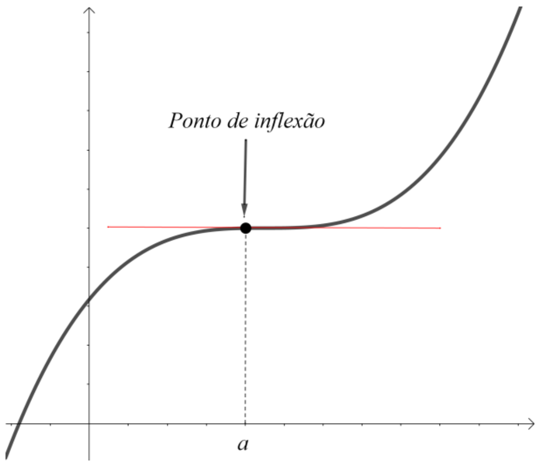
Pelo gráfico anterior, temos um ‘bico’ no ponto $x = 0$, o que nos mostra que, neste ponto, *f(x)* não é derivável (não é diferenciável). Porém, $x = 0$ é um ponto crítico de *f(x)*.

Outro fato interessante é que um ponto crítico pode ser ou não um ponto extremo. Porém, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto *c* é que *c* seja um ponto crítico. Em outras palavras, todo ponto extremo é ponto crítico, porém nem todo ponto crítico é ponto extremo.

4.4 **Concavidade e pontos de inflexão**

Já passamos por momemtos na vida em que sentimos que algo teria que mudar, um ponto em que sentimos a necessidade de alterar um comportamento ou uma atitude. Do ponto de vista matemático, as coisas não são muito diferentes. Para ficar mais fácil explicar o que é um ponto de inflexão, vamor recorrer a um gráfico (Figura 94) que nos mostra os lucros de uma empresa. No eixo horizontal temos a passagem do tempo, no eixo vertical temos os lucros:

Figura 94 – Gráfico de $f(x) = x^3$ ilustrando o ponto de inflexão.



Fonte: O autor, 2020.

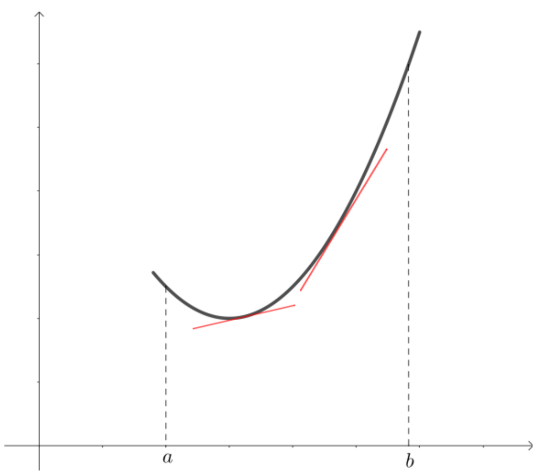
Pela análise do gráfico, conseguimos ver que esta empresa atravessa um bom momento, uma vez que, à medida que o tempo passa, os lucros estão constantemente aumentando. No entanto, parece que no ponto *a* alguma mudança ocorreu. De fato, naquele ponto alguma coisa mudou no comportamento dos lucros da empresa. Apesar de se verificar um constante aumento dos lucros, o comportamento do gráfico não é sempre igual. À esquerda do ponto *a* os lucros aumentavam a um ritmo menor. Se essa tendência continuasse, os lucros iriam diminuir em algum momento. Felizmente, algo mudou na empresa nesse ponto. Isto porque, à direita do ponto *a* observamos que os lucros subiram a um ritmo bem mais acelerado. A esse ponto dá-se o nome de ponto de inflexão.

4.4.1 Como reconhecer um ponto de inflexão?

Se olharmos atentamente para o gráfico anterior verificamos que à esquerda do ponto *a* o sentido da concavidade é voltado para baixo, enquanto que à direita do ponto *a* o sentido da concavidade é voltado para cima. Portanto, o ponto de inflexão localiza-se no exato local em que as concavidades do gráfico mudam de sentido. Claro que os matemáticos não fazem isto por mera observação. Para determinar a localização precisa desse ponto, faz-se o estudo da segunda derivada da função. Sabendo que a declividade da reta tangente nesse ponto é nulo (reta vermelha no gráfico acima), é possível determinar com exatidão a existência de um ponto de inflexão.

Seja *f* uma função diferenciável (pelo menos até a segunda derivada) em um intervalo (*a*, *b*). Se $f''(x) > 0$ para todo *x* em (*a*, *b*), então a função primeira derivada $f'(x)$ é crescente em (*a*, *b*) e a concavidade do seu gráfico é voltada para cima, conforme mostra a figura 95.

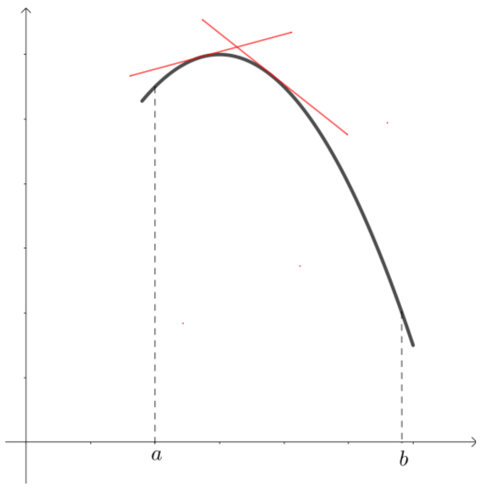
Figura 95 – Gráfico com função primeira derivada crescente.



Fonte: O autor, 2020.

Analogamente, se $f''(x) < 0$ para todo x em (a, b), então a função primeira derivada $f'(x)$ é decrescente em (a, b) e a concavidade do seu gráfico (Figura 96) é voltada para baixo:

Figura 96 – Gráfico com função primeira derivada decrescente.



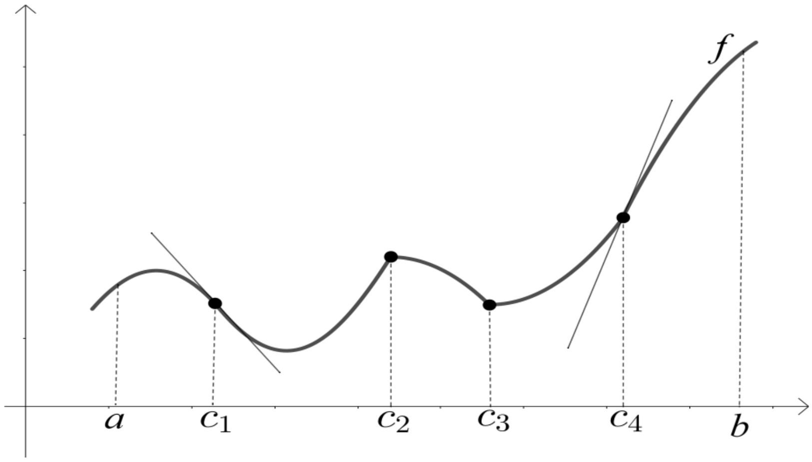
Fonte: O autor, 2020.

Os conceitos de pontos de inflexão e concavidade são muito úteis no esboço do gráfico de uma curva. Tendo em vista que a reta tangente à curva divide o plano em dois semiplanos (um superior e outro inferior), dizer que a curva é côncava para cima no ponto significa que seu gráfico encontra-se no semiplano superior, ou que a reta tangente se encontra por baixo da curva. De forma análoga, dizer que a curva é côncava para baixo no ponto significa que seu gráfico encontra-se no semiplano inferior, ou que a reta tangente se encontra por cima da curva.

Definição 4. *Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado ponto de inflexão se a concavidade do gráfico muda neste ponto.*

Na figura 97, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Vale observar que c_2 e c_3 são pontos extremos relativos de f e que f não é derivável nestes pontos. Nos pontos c_1 e c_4 existem derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f.

Figura 97 – Gráfico com extremos relativos e pontos de inflexão.



Fonte: O autor, 2020.

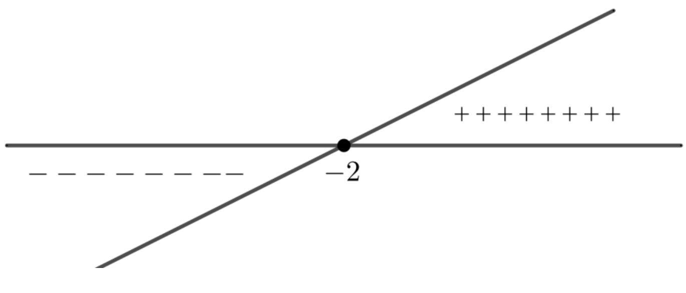
Exemplo 21. Vamos encontrar os pontos de inflexão da função $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Solução: A primeira derivada dessa função será $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$. Adiante, a segunda derivada de $f(x)$ será $f''(x) = 6x + 12$. Igualando a segunda derivada a zero, encontraremos como resultado dessa equação um possível ponto de inflexão:

$$f''(x) = 6x + 12 = 0 \therefore x = -2.$$

Vamos fazer o estudo do sinal da segunda derivada. Como $f''(x)$ é crescente, à direita de $x = -2$ a função $f''(x)$ será positiva e a concavidade de $f(x)$ é voltada para cima, enquanto que à esquerda de $x = -2$ a função $f''(x)$ será negativa e a concavidade de $f(x)$ é voltada para baixo (Figura 98).

Figura 98 – Estudo do sinal da segunda derivada de $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

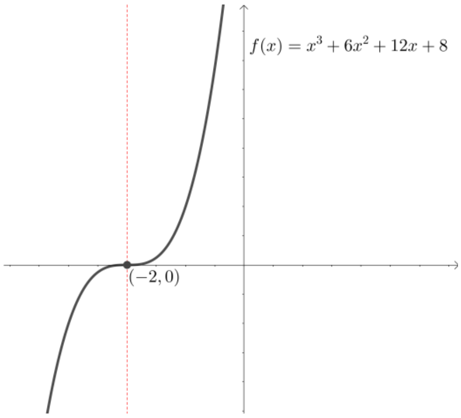


Fonte: O autor, 2020.

Enfim, para se determinar as coordenadas do ponto de inflexão (Figura 99), representadas pelo par ordenado (*x*, *f*(*x*)), onde *x* representa o valor obtido ao resolver a equação da segunda derivada e *f*(*x*) representa o valor da função no ponto de inflexão, devemos proceder:

$$f(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 12(-2) + 8 \Rightarrow f(-2) = 0\,.$$

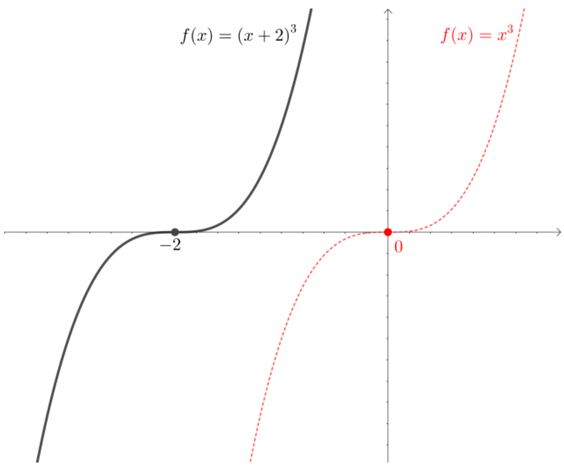
Figura 99 – Gráfico de $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.



Fonte: O autor, 2020.

Uma solução alternativa seria observar que $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$, cujo gráfico (Figura 100) é obtido pela translação horizontal à esquerda do gráfico de $y = x^3$. Tal solução alternativa realça a importância do aluno conhecer as mais variadas técnicas de construção de gráficos.

Figura 100 – Gráfico de $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$.



Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 22. Sobre a função $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x$, vamos encontrar seus pontos críticos e classificá-los, utilizando as técnicas utilizadas até aqui.

Solução: A derivada de primeira ordem de $f(x)$ será $f'(x) = 3x^2 - 15x + 12$, onde seus pontos críticos serão as raízes de $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 15x + 12 = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

A derivada de segunda ordem de $f(x)$ será dada por $f''(x) = 6x - 15$. Analisando o sinal da segunda derivada nos pontos críticos $x = 1$ ou $x = 4$ encontrados na primeira derivada, os resultados serão:

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 15 = -9 \text{ e } f''(4) = 6 \cdot 4 - 15 = 9.$$

Então, $x = 1$é ponto de máximo local, pois $f''(1) = -9 < 0$ e $x = 4$ é ponto de mínimo local, $f''(4) = 9 > 0$. As ordenadas destes pontos serão

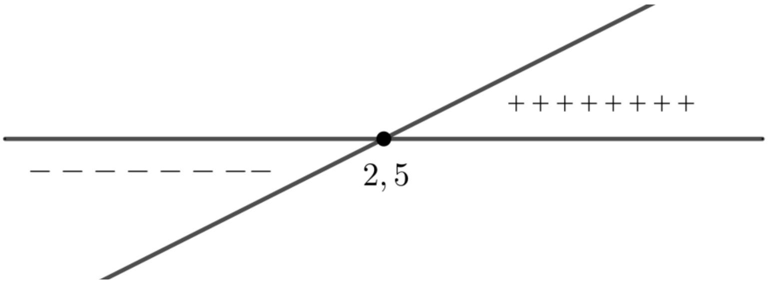
$$f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x$$
$$f(1) = 1^3 - 7{,}5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 5{,}5$$
$$f(4) = 4^3 - 7{,}5 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 = -8$$

Igualando a segunda derivada a zero, encontraremos como resultado dessa equação um possível ponto de inflexão:

$$f''(x) = 6x - 15 = 0 \therefore x = 2{,}5.$$

Vamos fazer o estudo do sinal da segunda derivada. Como $f''(x)$ é crescente, à direita de $x = 2{,}5$ a função $f''(x)$ será positiva e a concavidade de $f(x)$ é voltada para cima, enquanto que à esquerda de $x = 2{,}5$ a função $f''(x)$ será negativa e a concavidade de $f(x)$ é voltada para baixo (Figura 101).

Figura 101 – Estudo do sinal da segunda derivada de $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x$.



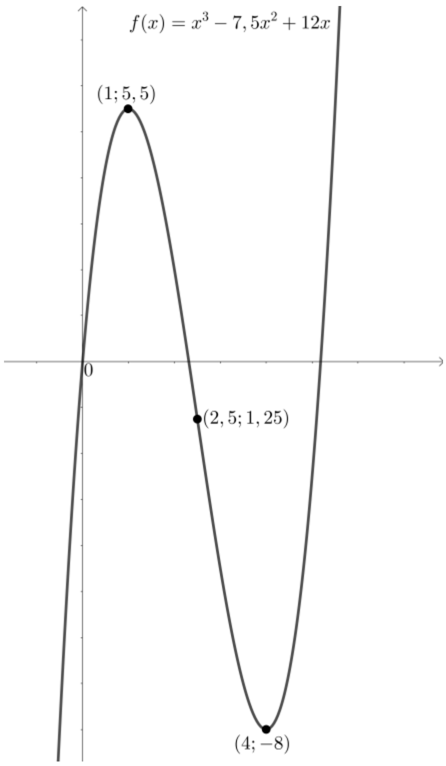
Fonte: O autor, 2020.

A ordenada do ponto de inflexão será dada por

$$f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x \Rightarrow f(2{,}5) = (2{,}5)^3 - 7{,}5(2{,}5)^2 + 12(2{,}5) \Rightarrow f(2{,}5) = -1{,}25.$$

Portanto, o gráfico terá a forma da figura 102:

Figura 102 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x$.



Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 23. Suponha que precisemos encontrar os pontos críticos da função definida nos reais $f(x) = x^3 + 2x - 1$. A primeira derivada dessa função será $f'(x) = 3x^2 + 2$. Igualando $f'(x)$ a zero:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -2$$

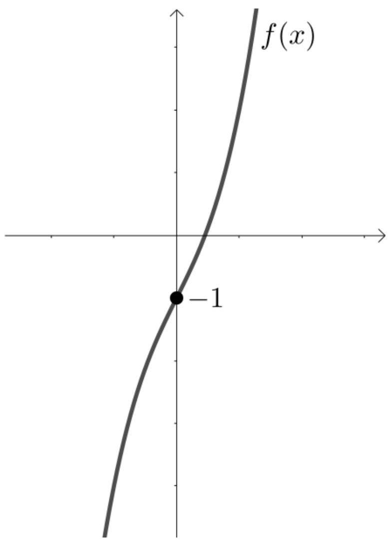
Esta equação não apresenta solução no conjunto dos números reais, e como estamos trabalhando com funções reais de variável real, concluímos que $f(x)$ não possui extremos neste domínio. A segunda derivada de $f(x)$ será $f''(x) = 6x$. Igualando a segunda derivada a zero, encontraremos como resultado dessa equação o seu ponto de inflexão. Assim:

$$f''(x) = 0$$
$$6x = 0$$
$$x = 0$$

Enfim, para se determinar as coordenadas do ponto de inflexão, basta substituir $x = 0$ em $f(x)$ (Figura 103):

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 1 \Rightarrow f(0) = -1.$$

Figura 102 – Gráfico de $f(x) = x^3 + 2x - 1$.



Fonte: O autor, 2020.

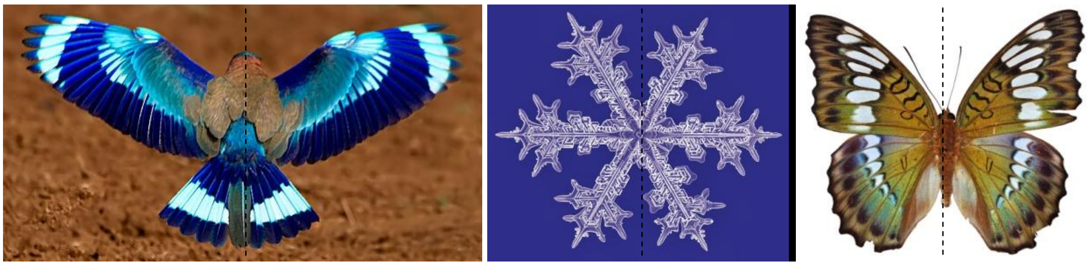
5 SIMETRIAS

O principal objetivo deste capítulo é apresentar, inicialmente, a simetria num conceito mais amplo para, em seguida, introduzir a simetria entre dois pontos, no auxílio da construção gráfica de determinadas funções.

5.1 Alguns tipos de simetrias

Encontramos vários exemplos de figuras simétricas na natureza. Muitos seres vivos têm uma configuração simétrica. Uma ideia de figuras simétricas é a encontrada nas gravuras abaixo. Se dobrarmos a folha de papel ao longo das retas tracejadas, a figura se sobrepõe. Estas retas são chamadas de eixos de simetria. Muitas vezes nem percebemos, mas há várias figuras simétricas na natureza. Veja os eixos de simetria indicados na figura 103.

Figura 103 – Exemplos de simetria na natureza.



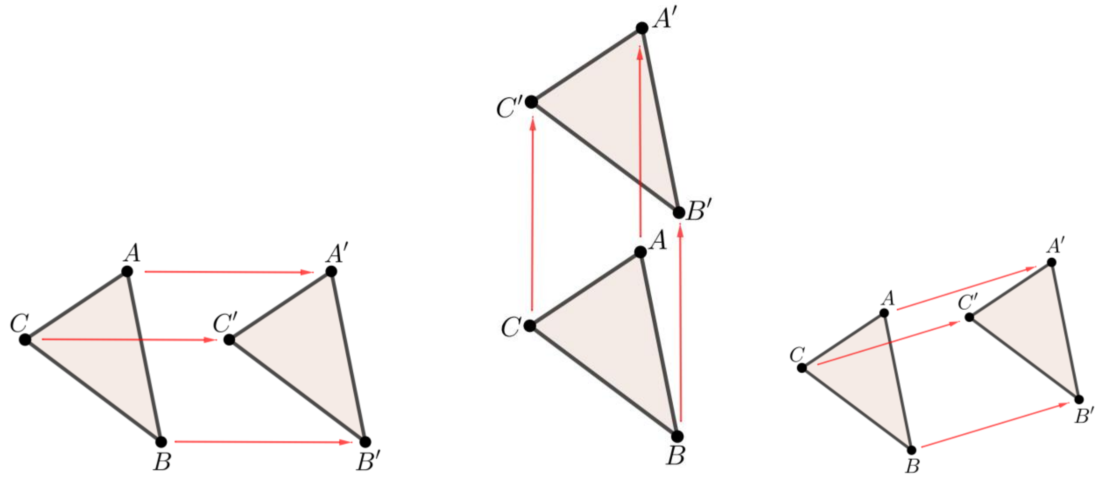
Fonte:https://www.megacurioso.com.br/fenomenos-da-natureza/75491-19-imagens-que-provam-a-simetria-perfeita-da-natureza.htm, 2020

Esse tipo de simetria é chamado de especular, por lembrar a reflexão do espelho. Há outras formas de simetria que são bastante interessantes. Para isso vamos pensar um pouco nos movimentos que podemos fazer com uma figura em um plano.

Podemos definir uma transformação geométrica em um plano como uma correspondência um a um entre pontos do plano. Assim, por meio de uma transformação, os pontos de uma dada figura no plano correspondem a outra figura (sua imagem) no mesmo plano. As transformações que não alteram as distâncias entre os pontos relacionam figuras congruentes, e são ditas transformações isométricas. Por não distorcer as imagens, essas transformações são chamadas de movimentos rígidos no plano. As transformações isométricas de um plano são translação, reflexão e rotação, e todas as combinações entre esses movimentos.

Translação é a transformação em que todos os pontos de uma figura se deslocam numa mesma direção, sentido e de uma mesma distância. Essa direção pode ser horizontal, vertical ou uma combinação delas (Figura 104).

Figura 104 – Exemplos de translações.



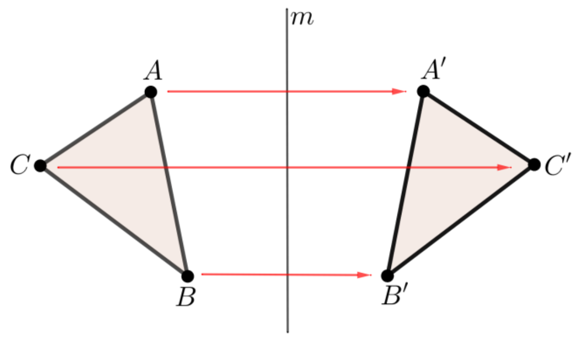
(a) (b) (c)

Legenda: (a) Translação horizontal; (b) Translação vertical; (c) Translação horizontal e vertical.

Fonte: O autor, 2020.

Reflexão em relação a alguma reta *m*, que pode ser chamada de eixo de reflexão ou de simetria, é a transformação que a cada ponto A associa o seu simétrico A’ em relação a *m*, isto é, *m* é a mediatriz do segmento AA’. Se dobrarmos a folha de papel ao longo de *m*, os pontos A e A’ se sobrepõe (Figura 105).

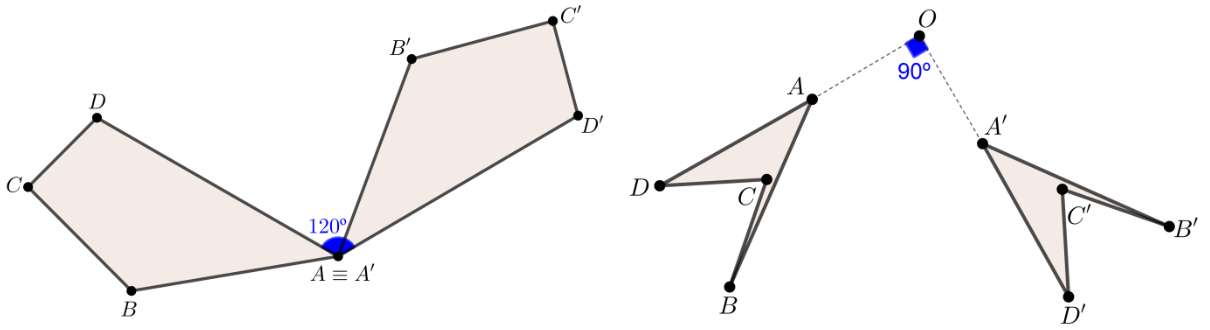
Figura 105 – Reflexão do triângulo ABC em relação à reta *m*.



Fonte: O autor, 2020.

Rotação é o giro da figura em torno de algum ponto e de um determinado ângulo (Figura 106).

Figura 106 – Exemplos de rotações.



(a) (b)

Legenda: (a) Rotação do quadrilátero ABCD de 120º em torno do ponto A; (b) Rotação do quadrilátero ABCD de 90º em torno do ponto O.

Fonte: O autor, 2020.

Considerar esses movimentos no plano pode ser útil para compreendermos as funções matemáticas. Por outro lado, as funções podem nos ajudar a compreender e representar melhor essas e outras transformações.

Definição 5. *Dois pontos A e B são simétricos em relação a uma reta "r", quando são equidistantes da reta "r" e estão situados sobre uma mesma perpendicular à "r".*

Exemplo 24. Vamos obter o ponto A', simétrico do ponto A = (1,1), em relação à reta *r*: *2x + 2y –1 = 0*.

A reta *r* pode ser escrita na forma $y = -x + \frac{1}{2}$, onde o coeficiente angular de *r* é igual a – 1. Vamos encontrar a equação de uma reta *s* perpendicular a *r* passando por A = (1,1). A reta *s* é da forma *y* = *ax* + *b*. Como A = (1, 1) pertence à reta *s* e o coeficiente angular de *s* é igual a 1, pois *r* e *s* são perpendiculares, teremos:

$$1 = 1 \,.\, 1 + b, \text{ onde } b = 0.$$

A reta *s* será dada por $y = x$. Com as equações de *r* e *s*, encontraremos o ponto I de interseção entre estas duas retas, efetuando a resolução do sistema com as suas respectivas equações de reta:

$$\begin{cases} y = -x + \dfrac{1}{2} \\ y = x \end{cases},$$

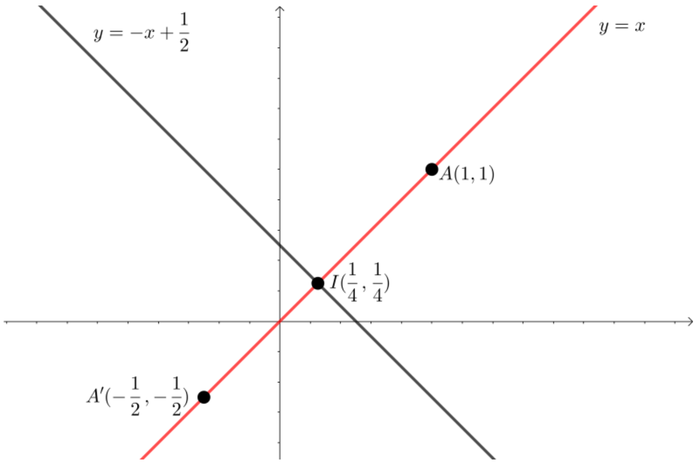
onde o ponto de encontro entre as retas será $I = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.

Portanto, pela definição, temos que o ponto A', simétrico de A = (1, 1), deve estar à igual distância de I sobre a reta *s*. Nesse contexto, I é o ponto médio do segmento AA'. Então:

$$\frac{1}{4} = \frac{(x_A + x_{A'})}{2} \Rightarrow x_{A'} = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{4} = \frac{(y_A + y_{A'})}{2} \Rightarrow y_{A'} = -\frac{1}{2}$$

Enfim, o ponto A', simétrico de A em relação à reta *r* tem coordenadas $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. A figura 107 ilustra o propósito do exemplo:

Figura 107 – Pontos simétricos A e A' em relação à reta *r*.



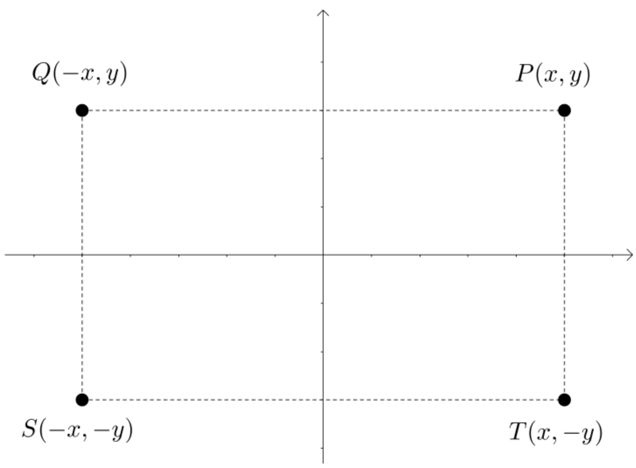
Fonte: O autor, 2020.

5.2 Simetrias nos gráficos

O gráfico de uma função pode apresentar muitos tipos de simetrias ou nenhum. O conhecimento das propriedades de simetria de uma função pode nos ajudar enormemente no traçado de seu gráfico. Podemos, por exemplo, determinar os valores de uma função em uma determinada zona do plano, conhecendo tão somente os valores que essa função assume na zona simétrica.

Os quatro quadrantes em que um plano cartesiano fica dividido por seus dois eixos oferecem várias oportunidades de aplicar a ideia de transformações a gráficos de funções. Para entender como funciona, vamos pensar em um ponto P representado por um par (x, *y*). Se os números *x* e *y* forem positivos não nulos, então o ponto está representado no primeiro quadrante. O que ocorre se tomarmos o ponto Q representado pelo par (–*x*, *y*)? O ponto terá a mesma ordenada *y* que o ponto P, mas vai ocupar o lugar simétrico ao ponto P em relação ao eixo *y*. Se tomarmos o ponto T (*x*, –*y*), esse ponto é simétrico a P em relação ao eixo *x*. Já um ponto S (–*x*, –*y*) está no terceiro quadrante. Ele pode ser obtido a partir de P por meio de uma rotação em torno da origem (0,0) e de ângulo 180°. Note que S pode também ser obtido a partir de P por duas sucessivas reflexões em relação aos eixos coordenados. Veja a figura 108:

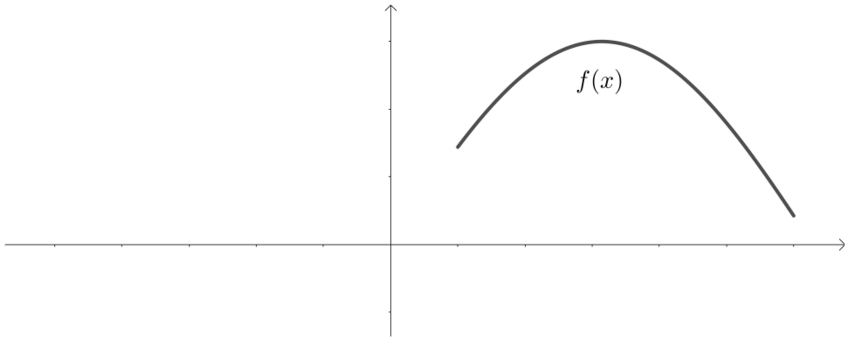
Figura 108 – Pontos simétricos de P em relação aos eixos cartesianos.



Fonte: O autor, 2020.

Estas mesmas relações podem ser empregadas quando fazemos algumas operações com a função ou com a variável independente. Se uma função $f : IR \to IR$ possui uma representação gráfica como na figura 109, vejamos o que ocorre quando tomamos $y = f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, e $y = -f(-x)$.

Figura 109 – Gráfico de $f(x)$.

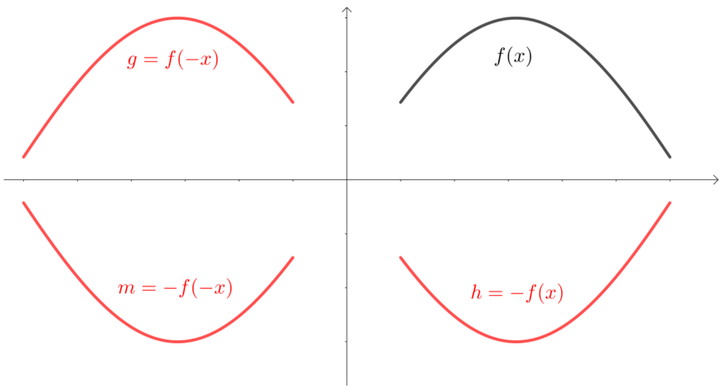


Fonte: O autor, 2020.

Observe a figura 110. Nela estão desenhados os gráficos de $y = f(x)$, $g = f(-x)$, $h = -f(x)$, e $m = -f(-x)$. Perceba que:

- A função g é simétrica a f em relação ao eixo y;
- A função h é simétrica a f em relação ao eixo x; e
- A função m é simétrica em relação à origem.

Figura 110 – Gráficos simétricos a $f(x)$ em relação aos eixos cartesianos.



Fonte: O autor, 2020.

Então, a partir de operações simples (translações, reflexões,...) no gráfico de *f*, é possível construirmos facilmente os gráficos de determinadas funções.

5.3 Função par

A presente seção versa sobre as funções pares, suas características algébricas e, em especial, seu comportamento gráfico. Apresentaremos, inclusive, as funções com gráficos simétricos em relação a uma reta vertical, denominadas funções semi-pares.

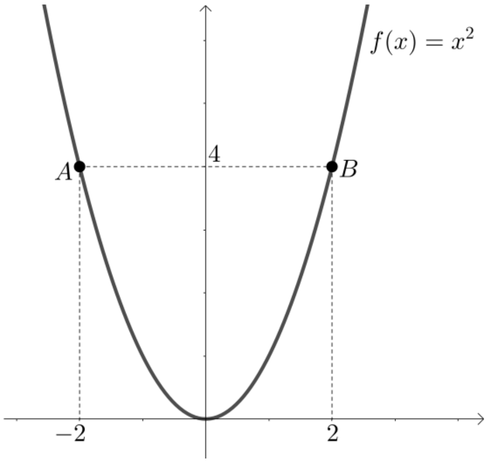
Definição 6. *Seja f(x) uma função cujo dominio Dom(f) é um conjunto simétrico com respeito à origem, isto é, x Є Dom(f) se, e somente se, –x Є Dom(f). Uma função y = f(x) é dita PAR se f(–x) = f(x), para todo x no domínio de f. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y.*

Em geral, se o gráfico de uma função f par tem os pontos A = (a, $f(a)$) e B = (b, $f(b)$), simétricos em relação ao eixo y, sabemos que A e B têm a mesma distância em relação à reta r: $x = 0$. Portanto, $f(a) = f(b) = f(-a)$.

Exemplo 25. Seja a função $f : IR \to IR$, $f(x) = x^2$. De fato, Dom(f) = IR é simétrico com respeito à origem e $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Então, f é uma função par e seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Como exemplo tomamos os pontos A = (–2, 4) e B = (2, 4) do gráfico da figura 111. Vemos que os referidos pontos apresentam imagens iguais para abscissas simétricas. Essa característica se aplica a todos os pontos do gráfico com abscissas simétricas, o que caracteriza a simetria em relação ao eixo y e, com isso, afirmamos que $f(x) = x^2$ é uma função par.

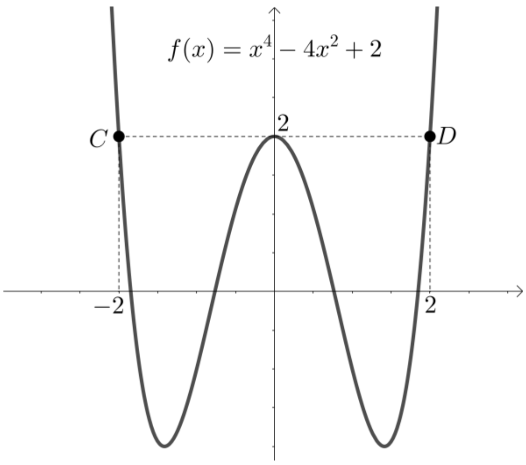
Exemplo 26. Seja a função $f : IR \to IR$, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$. De fato, Dom(f) = IR é simétrico com respeito à origem e $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 2 = x^4 - 4x^2 + 2 = f(x)$. Então, f é uma função par e seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Como exemplo temos os pontos C = (–2, 2) e D = (2, 2) do gráfico da figura 112. Vemos que os referidos pontos apresentam imagens iguais para abscissas simétricas. Essa característica se aplica a todos os pontos do gráfico com abscissas simétricas, o que caracteriza a simetria em relação ao eixo y e, com isso, afirmamos que $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ também é uma função par.

Figura 111 – Gráfico da função par
$f(x) = x^2$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 112 – Gráfico da função par
$f(x) = x^4 – 4x^2 + 2$.



Fonte: O autor, 2020.

Ao constatar que uma determinada função real é par, basta desenhar a metade “direita” ou “esquerda” do gráfico, ou seja, atribuir valores de *x* à direita ou à esquerda da origem e, feito isso, refletir esta parte do gráfico em relação ao eixo *y*.

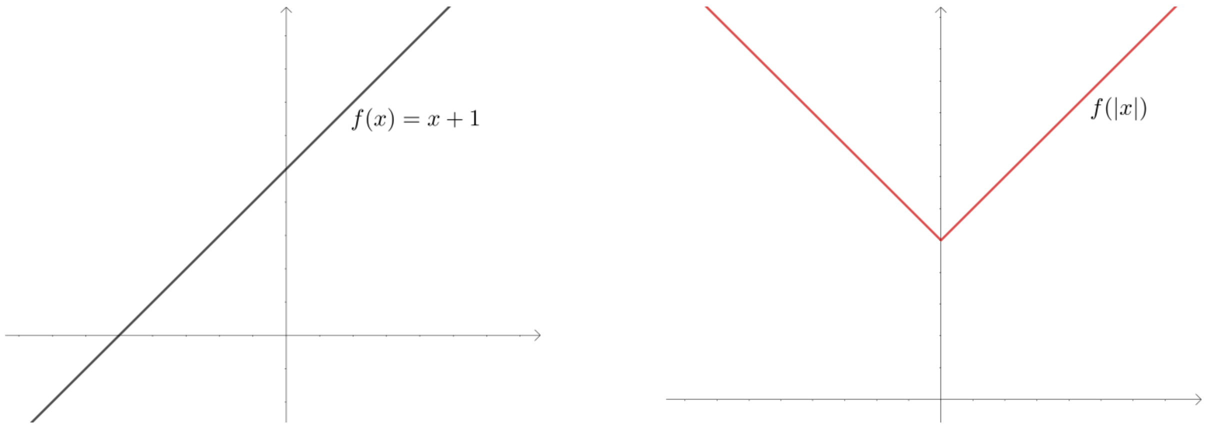
Proposição 2. *Sejam f uma função real e |x| o valor absoluto de x. As funções g(x) = f(|x|) e h(x) = f(–|x|) são funções pares.*

Demonstração:

Como $|x| = |-x|$, teremos $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$ e $h(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = h(x)$.

Exemplo 27. Sejam as funções $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$, $f(|x|)$, $g(|x|)$ e $h(|x|)$ e suas representações gráficas abaixo:

Figura 113 – Exemplos para a proposição 2.

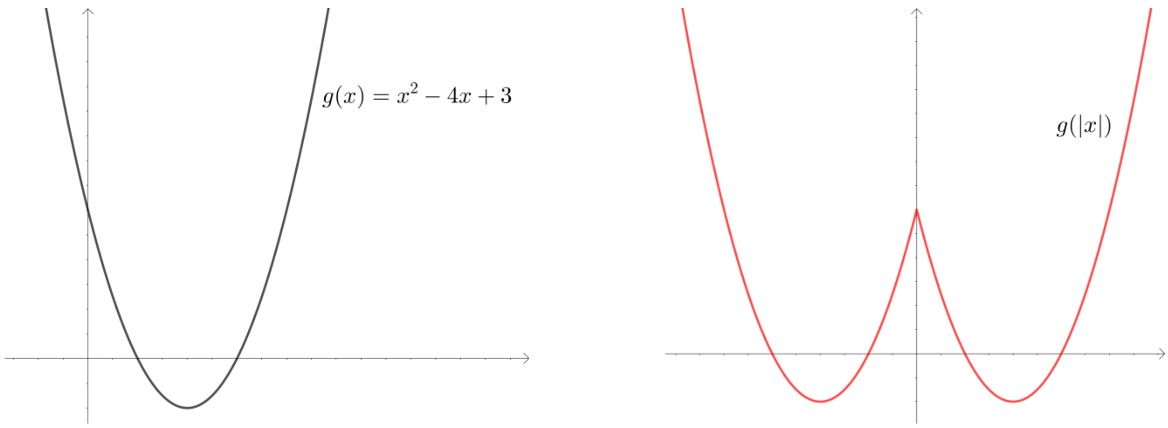


(a) (b)

Legenda: (a) Gráfico de $f(x) = x + 1$; (b) Gráfico da função par $f(|x|) = |x| + 1$.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 114 – Exemplos para a proposição 2.

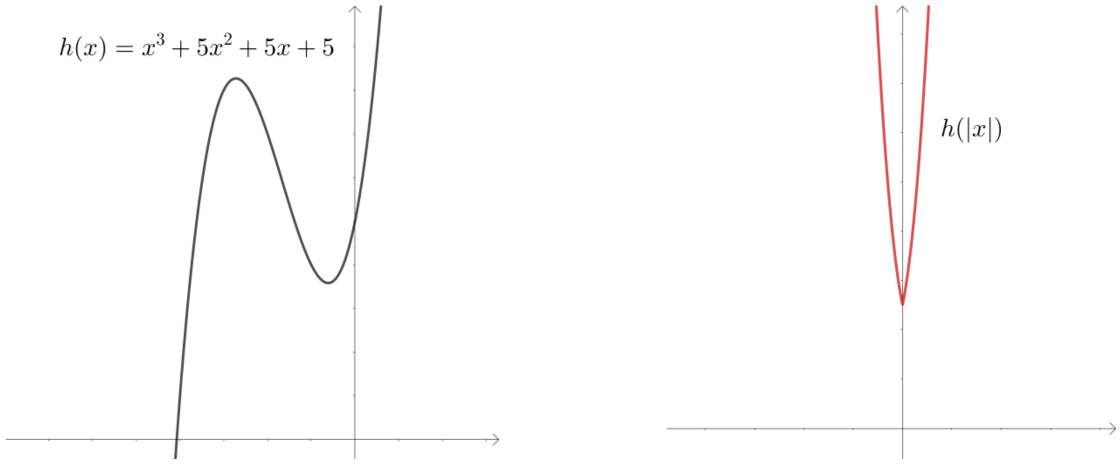


(a) (b)

Legenda: (a) Gráfico de $g(x) = x^2 - 4x + 3$; (b) Gráfico da função par $g(|x|) = |x|^2 - 4|x| + 3$.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 115 – Exemplos para a proposição 2.



(a) (b)

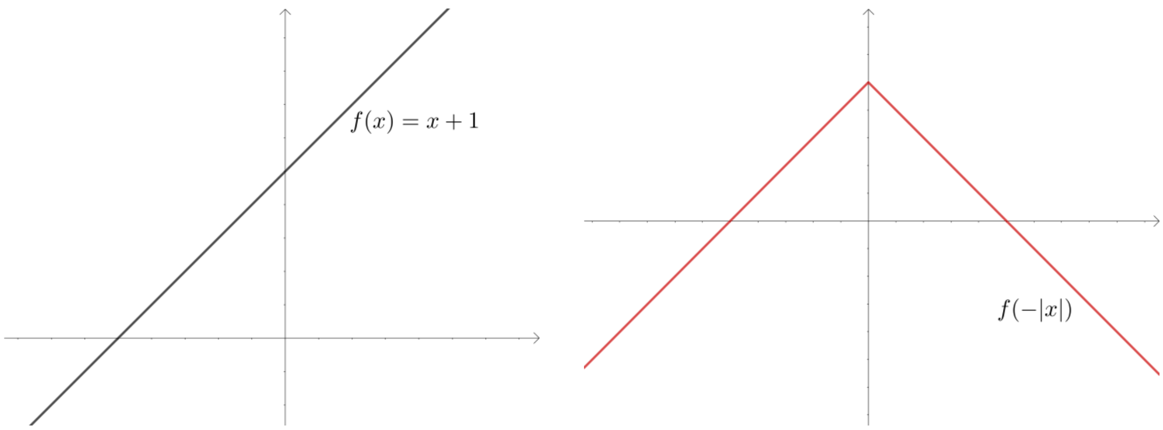
Legenda: (a) Gráfico de $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$; (b) Gráfico da função par $h(|x|) = |x|^3 + 5|x|^2 + 5|x| + 5$.

Fonte: O autor, 2020.

Perceba que os gráficos de $f(|x|)$, $g(|x|)$ e $h(|x|)$ são simétricos com relação ao eixo y, e são obtidos refletindo-se, respectivamente as partes traçadas dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ para x positivo, em relação ao eixo y (pois $|x| \geq 0$).

Exemplo 28. Sejam as funções $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$, $f(-|x|)$, $g(-|x|)$ e $h(-|x|)$ e suas representações gráficas abaixo:

Figura 116 – Exemplos para a proposição 2.

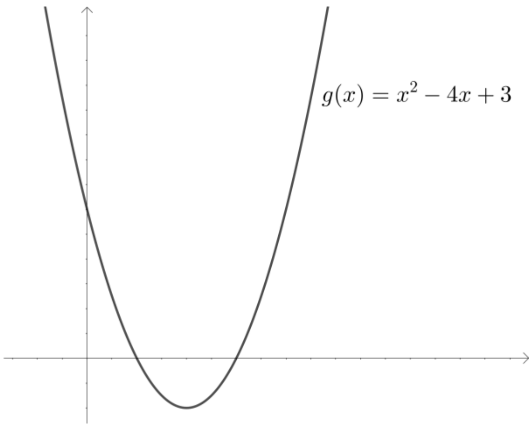


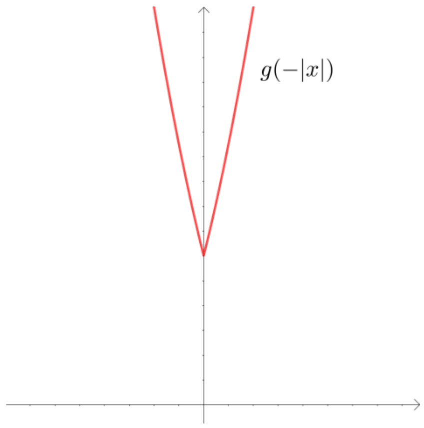
(a) (b)

Legenda: (a) Gráfico de $f(x) = x + 1$; (b) Gráfico da função par $f(-|x|) = -|x| + 1$.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 117 – Exemplos para a proposição 2.



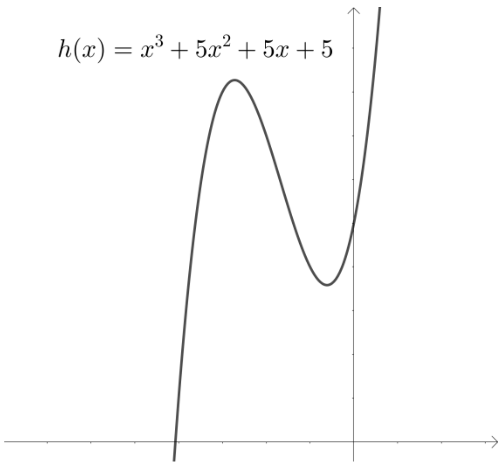


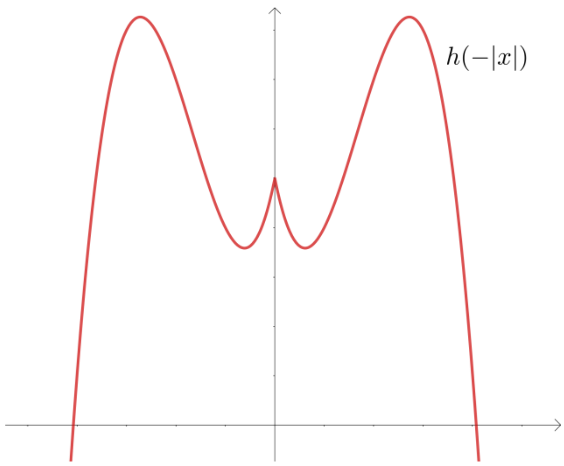
(a) (b)

Legenda: (a) Gráfico de $g(x) = x^2 - 4x + 3$; (b) Gráfico da função par $g(-|x|) = (-|x|)^2 - 4(-|x|) + 3$.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 118 – Exemplos para a proposição 2.





(a) (b)

Legenda: (a) Gráfico de $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$; (b) Gráfico da função par $h(-|x|) = (-|x|)^3 + 5(-|x|)^2 + 5(-|x|) + 5$.

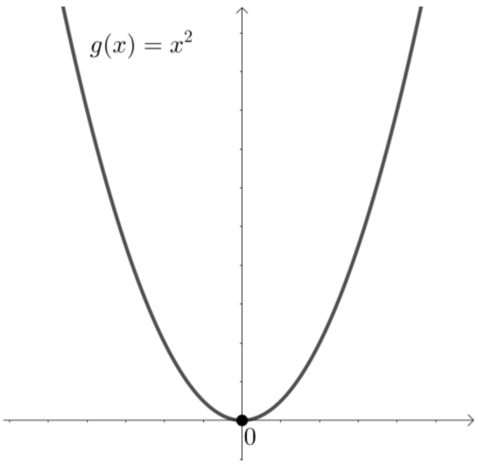
Fonte: O autor, 2020.

Perceba que os gráficos de $f(-|x|)$, $g(-|x|)$ e $h(-|x|)$ são simétricos com relação ao eixo y, e são obtidos refletindo-se, respectivamente as partes traçadas dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ para x negativo, em relação ao eixo y (pois $-|x| \leq 0$).

Exemplo 29. Traçar o gráfico de $f(x) = (|x-2|-2)^2$.

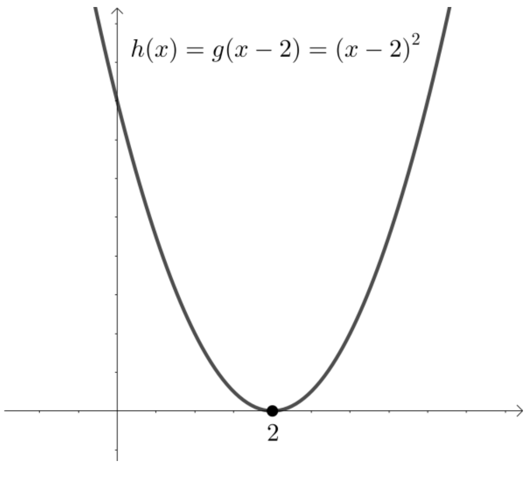
Solução: Vamos começar lembrando os gráficos de algumas funções, que funcionarão como ponto de partida para a construção de outros gráficos. Por exemplo, a função $g(x) = x^2$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima passando pela origem (Figura 119). Vamos considerar o gráfico da função $h(x) = (x-2)^2 = g(x-2)$. Com isso, vamos ter um deslocamento de duas unidades para a direita da parábola anterior (Figura 120).

Figura 119 – Gráfico da função $g(x) = x^2$.



Fonte: O autor, 2020.

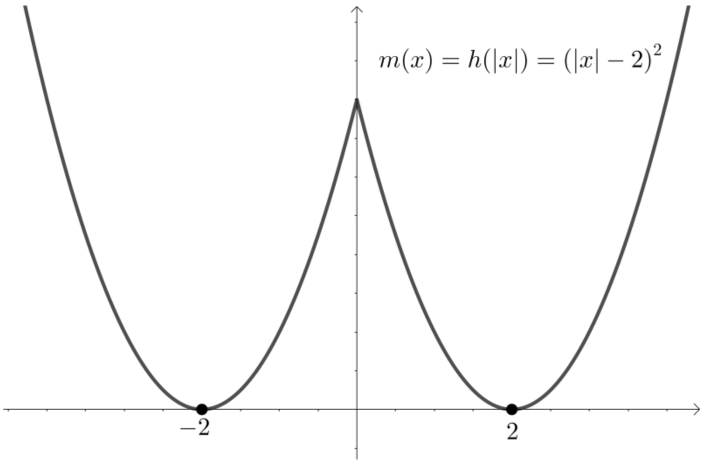
Figura 120 – Translação horizontal de duas unidades à direita do gráfico de $g(x) = x^2$.



Fonte: O autor, 2020.

Portanto, o que faremos é trocar x por $|x|$ para traçarmos o gráfico de $m(x) = h(|x|) = (|x| - 2)^2$. Já sabemos qual o efeito que isso tem no gráfico: $m(x) = h(|x|)$ será uma função par, cujo gráfico é simétrico em relação ao eixo y. A parte do gráfico em que x é maior ou igual a zero permanece a mesma. Mas para x menor que zero, esta mudança de x por $|x|$ fará com que esta parte seja refletida em relação ao eixo y (Figura 121).

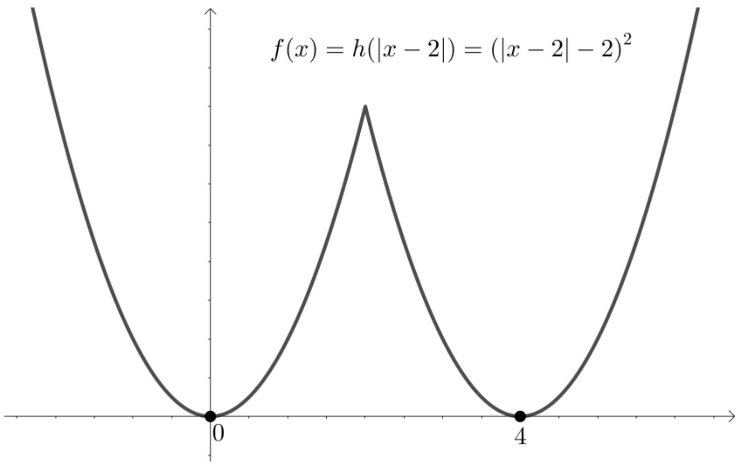
Figura 121 – Substituição de x por $|x|$ em $h(x) = (x - 2)^2$.



Fonte: O autor, 2020.

Por fim, o gráfico desejado da função $f(x) = (|x-2|-2)^2$ é uma translação de $m(x) = h(|x|) = (|x| - 2)^2$ de duas unidades para a direita, pois trocamos o ‘x’ por ‘$x - 2$’, conforme a figura 122.

Figura 122 – Translação horizontal de $m(x) = h(|x|) = (|x| - 2)^2$ de duas unidades à direita.



Fonte: O autor, 2020.

5.3.1 Função semi-par

Definição 7. *Uma função f(x) é dita semi-par se o seu gráfico é simétrico em relação a uma reta vertical.*

Proposição 3. *Seja f uma função. O gráfico de f é simétrico em relação a reta vertical x = a, se e somente se,* $f(x) = f(2a - x)$.

Demonstração: Se o gráfico de f é simétrico em relação à reta r: $x = a$ ($x - a = 0$), podemos considerar os pontos simétricos B = (b, $f(b)$) e C = (c, $f(c)$) do gráfico de f. Logo, as distâncias de B e C à reta r: $x - a = 0$ são iguais. Sendo assim,

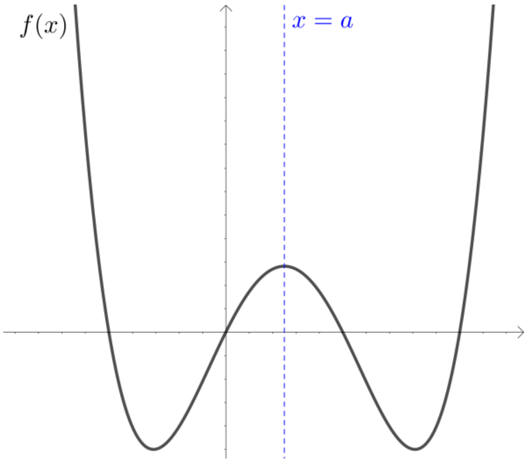
$$a - b = c - a \Rightarrow 2a - b = c.$$

Como $f(b) = f(c)$, teremos $f(b) = f(2a - b)$. Admitindo $b = x$, teremos $f(x) = f(2a - x)$. Portanto, se o gráfico de f é simetrico em relação à reta $x = a$, então $f(x) = f(2a - x)$, $\forall x \in$ Dom (f).

Por outro lado, substituindo x por $x + a$ em $f(x) = f(2a - x)$, teremos $f(x + a) = f(2a - (x + a)) \Rightarrow f(a + x) = f(a - x)$ que, pela definição 6 (página 104), significa o deslocamento do eixo de simetria de $x = 0$ para $x = a$. Portanto, se $f(x) = f(2a - x)$, $\forall x \in$ Dom (f), então seu gráfico é simétrico em relação à reta $x = a$.

Exemplo 30. Considere a função $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$. Vamos verificar se f é uma função semi-par. Para isso, o gráfico de f deve ser simétrico em relação a uma reta $x = a$ (Figura 123).

Figura 123 – Gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$.



Fonte: O autor, 2020.

De acordo com a proposição 5.2, $f(x) = f(2a - x)$. Então:

$$f(x) = f(2a - x) == x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = (2a - x)^4 - 2(2a - x)^3 - (2a - x)^2 + 2(2a - x)$$

Desenvolvendo o segundo membro:

$$\begin{aligned}&x^4 - 8ax^3 + 24a^2x^2 - 32a^3x + 16a^4 + 2x^3 - 12ax^2 + 24a^2x - 16a^3 - x^2 + 4ax - 4a^2 - 2x + 4a = \\ &x^4 - 8ax^3 + 2x^3 + 24a^2x^2 - 12ax^2 - x^2 - 32a^3x + 24a^2x + 4ax - 2x + 16a^4 - 16a^3 - 4a^2 + 4a = \\ &x^4 - (8a - 2)x^3 + (24a^2 - 12a - 1)x^2 - (32a^3 - 24a^2 - 4a)x - 2x + 16a^4 - 16a^3 - 4a^2 + 4a\end{aligned}$$

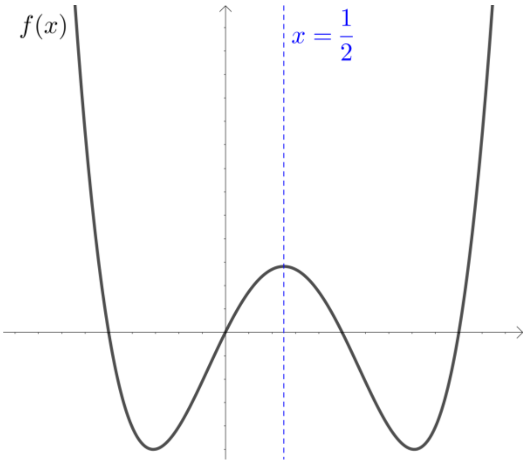
Igualando os termos semelhantes em $f(x) = f(2a - x) =$, temos que

$$-(8a - 2) = -2,$$

onde $a = \dfrac{1}{2}$. Portanto, o gráfico da função $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ é simétrico em relação à reta $x = \dfrac{1}{2}$ (Figura 124).

Figura 124 – Gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

com eixo de simetria $x = \dfrac{1}{2}$.



Fonte: O autor, 2020.

Proposição 4. *Seja f uma função. Os gráficos das funções f(|x – a|) e f(–|x – a|) são simétricos em relação à reta vertical x = a.*

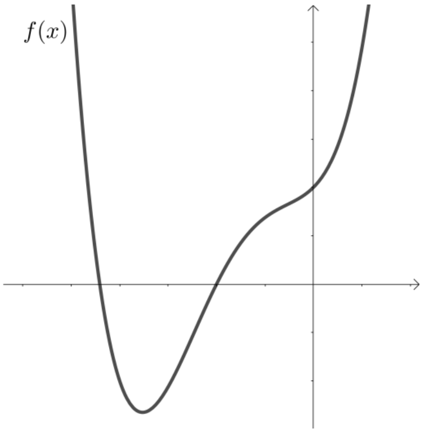
Demonstração: De acordo com a proposição 2, as funções $f(|x|)$ e $f(-|x|)$ são funções pares e, portanto, seus gráficos são simétricos em relação ao eixo y, ou seja, simétricos em relação à reta $x = 0$.

De acordo com as translações horizontais citadas no capítulo 2, seção 2.2, teremos dois casos a considerar:

- Se $a > 0$, os gráficos de $f(|x - a|)$ e $f(-|x - a|)$ serão construídos através do deslocamento de a unidades para a direita dos gráficos de $f(|x|)$ e $f(-|x|)$, respectivamente.
- Se $a < 0$, os gráficos de $f(|x - a|)$ e $f(-|x - a|)$ serão construídos através do deslocamento de a unidades para a esquerda dos gráficos de $f(|x|)$ e $f(-|x|)$, respectivamente.

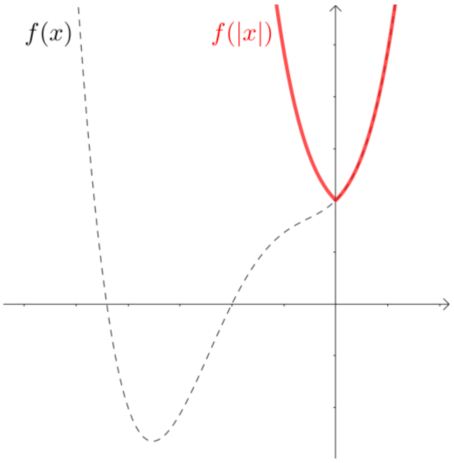
Exemplo 31. Considere a função $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ e seu gráfico representado na figura 125. Os gráficos de $f(|x|)$ e $f(-|x|)$ serão dados pelas figuras 126 e 127, respectivamente.

Figura 125 – Gráfico de $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$.



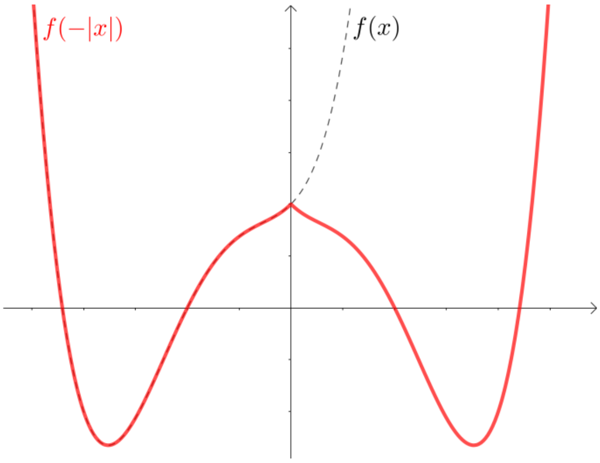
Fonte: O autor, 2020.

Figura 126 – Gráfico de $f(|x|) = |x|^4 + 3|x|^3 + 2|x|^2 + |x| + 1$.



Fonte: O autor, 2020.

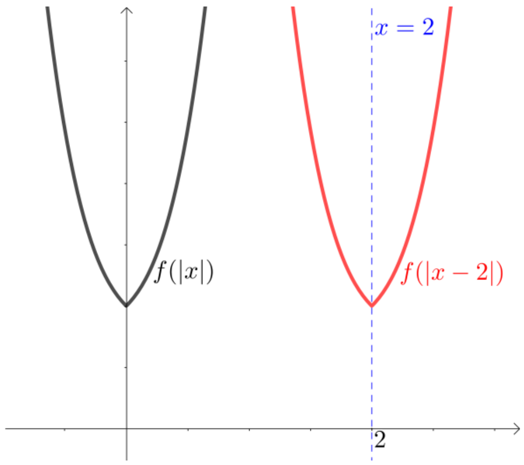
Figura 127 – Gráfico de $f(-|x|) = (-|x|)^4 + 3(-|x|)^3 + 2(-|x|)^2 + (-|x|) + 1$.



Fonte: O autor, 2020.

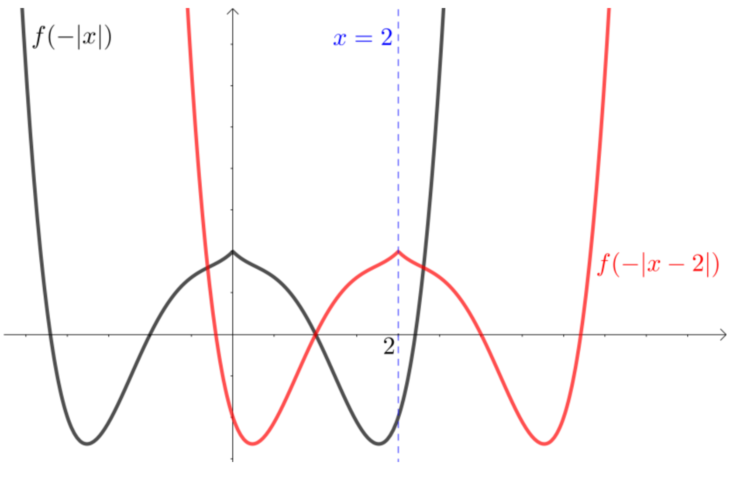
Agora, considere uma reta vertical $x = a$. De acordo com a proposição 5.3, se $a > 0$, os gráficos de $f(|x - a|)$ e $f(-|x - a|)$ serão construídos através do deslocamento de a unidades para a direita dos gráficos de $f(|x|)$ e $f(-|x|)$, respectivamente. Vamos arbitrar a reta $x = 2$ para exemplificar os gráficos de $f(|x - a|)$ e $f(-|x - a|)$, respectivamente representados nas figuras 128 e 129.

Figura 128 – Gráfico de $f(|x - 2|)$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 129 – Gráfico de $f(-|x - 2|)$.

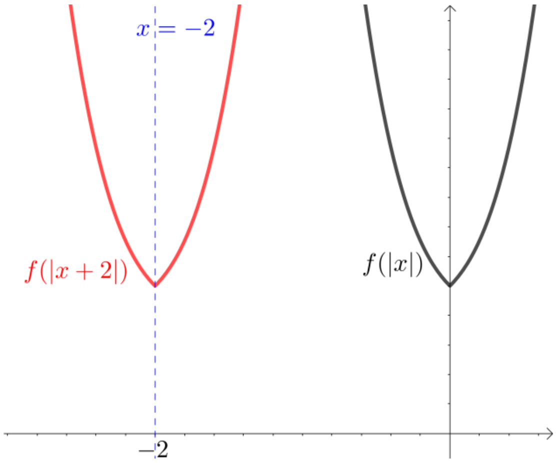


Fonte: O autor, 2020.

Entretanto, se $a < 0$, os gráficos de $f(|x - a|)$ e $f(-|x - a|)$ serão construídos através do deslocamento de a unidades para a esquerda dos gráficos de $f(|x|)$ e $f(-|x|)$, respectivamente.

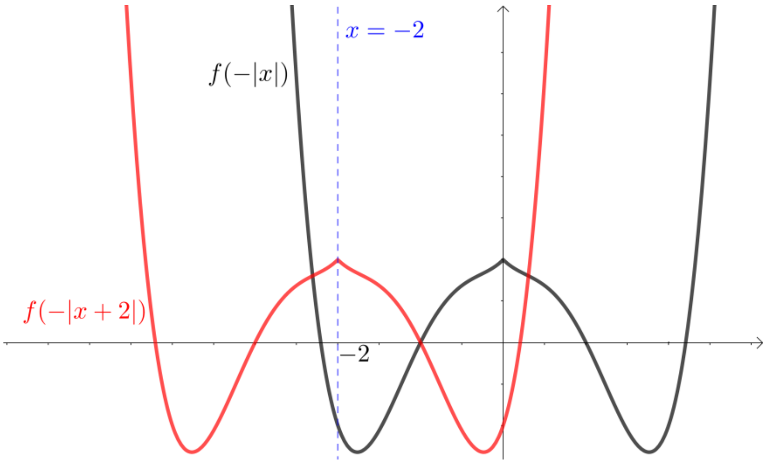
Vamos arbitrar a reta $x = -2$ para exemplificar os gráficos de $f(|x - a|)$ e $f(-|x - a|)$, respectivamente representados nas figuras 130 e 131.

Figura 130 – Gráfico de $f(|x + 2|)$.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 131 – Gráfico de $f(-|x + 2|)$.



Fonte: O autor, 2020.

Proposição 5. *O gráfico de toda função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *é simétrico em relação à reta* $x = \frac{-b}{2a}$ *(note que* $x = \frac{-b}{2a}$ *é o ponto extremo da função).*

Demonstração: Como vimos anteriormente, a simetria em relação à uma reta vertical $x = a$ é equivalente a $f(a+x) = f(a-x)$, $\forall x$ tal que $(a+x)$ e $(a-x) \in$ Dom (*f*). Vimos também que

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

ou seja, efetuamos o deslocamento do vértice (0,0) de $y = ax^2$ para $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, além de transladar a reta $x = 0$ (eixo de simetria de $y = ax^2$) para $x = \frac{-b}{2a}$. Então, teremos:

$$f(a+x) = f(a-x) \Rightarrow f(\frac{-b}{2a} + x) = f(\frac{-b}{2a} - x).$$

Substituindo $\frac{-b}{2a} + x$ e $\frac{-b}{2a} - x$ em $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, tem-se

$$f(\frac{-b}{2a} + x) = a\left(\frac{-b}{2a} + x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

e

$$f(\frac{-b}{2a} - x) = a\left(\frac{-b}{2a} - x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(-x)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, a reta $x = \frac{-b}{2a}$ é eixo de simetria do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5.4 Função ímpar

A presente seção abrange as funções ímpares, suas características algébricas e, em especial, seu comportamento gráfico. Apresentaremos, inclusive, as funções com gráficos simétricos em relação a um ponto do plano cartesiano, denominadas funções semi-ímpares.

Definição 8. *Seja f(x) uma função cujo dominio Dom(f) é um conjunto simétrico com respeito à origem, isto é, x Є Dom(f) se, e somente se, –x Є Dom(f). Uma função y = f(x) é dita ÍMPAR se f(x) = –f(–x), para todo x no domínio de f. O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem cartesiana.*

Sejam A = (x, f(x)) e B = (b, f(b)) pontos do gráfico de f simétricos em relação à origem cartesiana. Logo, a origem será o ponto médio do segmento AB. Então:

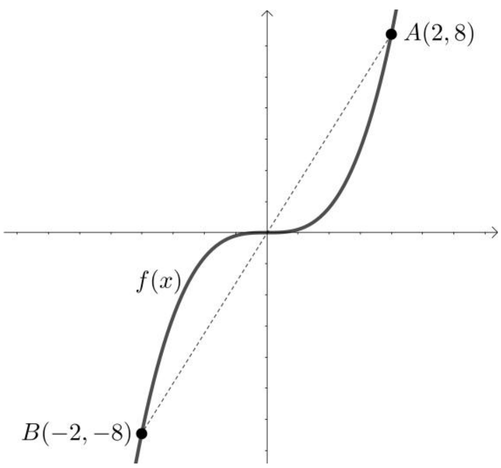
$$\frac{x+b}{2} = 0 \Rightarrow b = -x \text{ e } \frac{f(x)+f(b)}{2} = 0 \Rightarrow f(b) = -f(x).$$

Como $b = -x$, temos $f(-x) = -f(x)$ e, finalmente $f(x) = -f(-x)$

Em outras palavras, valores de domínios simétricos possuem imagens simétricas. Se o gráfico de uma função f ímpar possui o ponto da forma (x, f(x)), o ponto (–x, f(–x)) também estará no gráfico de f, com f(x) = –f(–x).

Como exemplo, considere a função $f(x) = x^3$. Os pontos A = (2, 8) e B = (–2, –8) são simétricos em relação à origem (Figura 132).

Figura 132 – Gráfico de f(–|x + 2|).



Fonte: O autor, 2020.

Proposição 6. *Sejam f(x) uma função real e |x| o valor absoluto de x. As funções* $g(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$ *e* $h(x)=\frac{-|x|}{x}f(-|x|)$, $x\neq 0$, *são funções ímpares.*

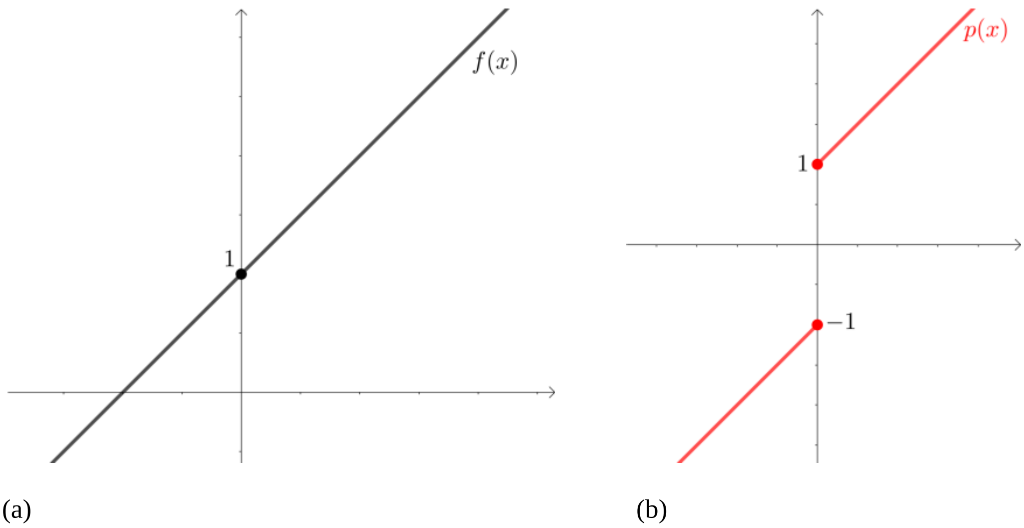
Demonstração: Como $|x| = |-x|$, temos:

$$g(-x)=\frac{|-x|}{-x}f(|-x|)=\frac{|x|}{-x}f(|x|)=-\frac{|x|}{x}f(|x|)=-g(x)\Rightarrow g(x)=-g(-x) \text{ e}$$

$$h(-x)=\frac{-|-x|}{-x}f(-|-x|)=\frac{-|x|}{-x}f(-|x|)=\frac{|x|}{x}f(-|x|)=-h(x)\Rightarrow h(x)=-h(-x)$$

Exemplo 32. Sejam as funções $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$, $p(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$, $q(x)=\frac{|x|}{x}g(|x|)$ e $t(x)=\frac{|x|}{x}h(|x|)$ e suas representações gráficas abaixo:

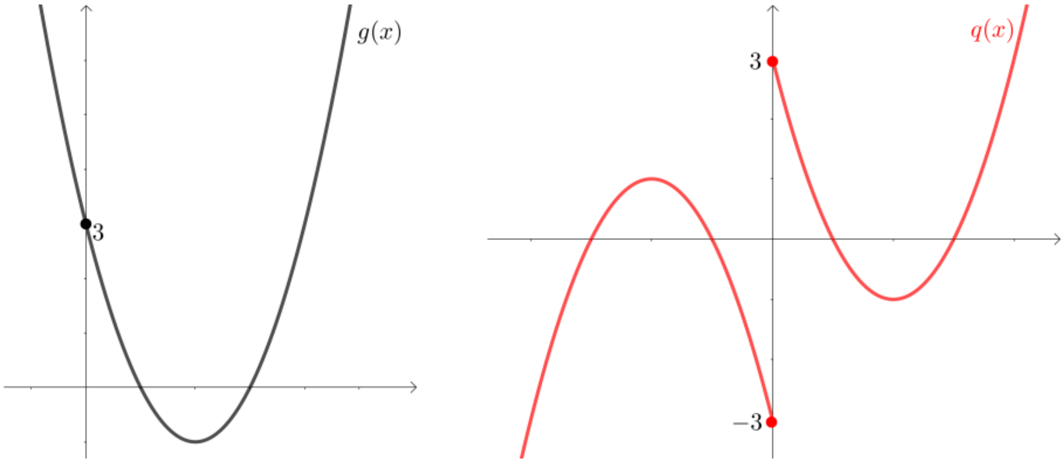
Figura 133 – Exemplos para a proposição 6.



Legenda: (a) Gráfico de $f(x) = x + 1$; (b) Gráfico da função ímpar $p(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 134 – Exemplos para a proposição 6.

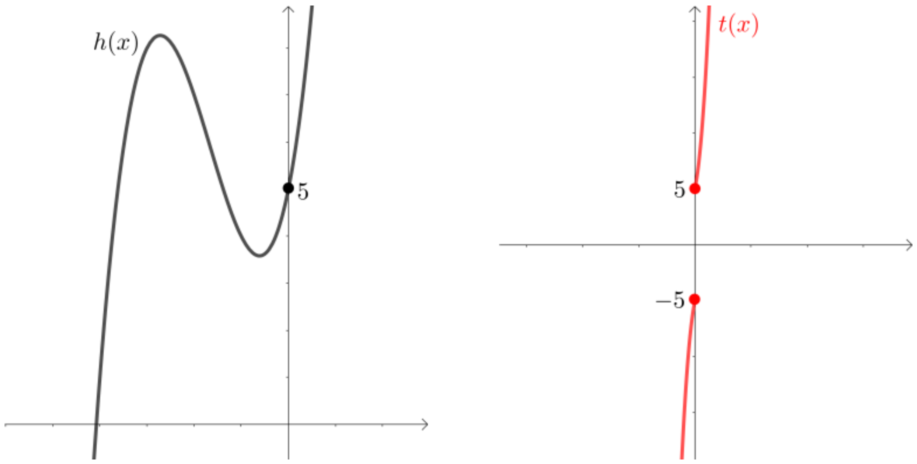


(a) (b)

Legenda: (a) Gráfico de $g(x) = x^2 – 4x + 3$; (b) Gráfico da função ímpar $q(x) = \frac{|x|}{x} g(|x|)$.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 135 – Exemplos para a proposição 6.



(a) (b)

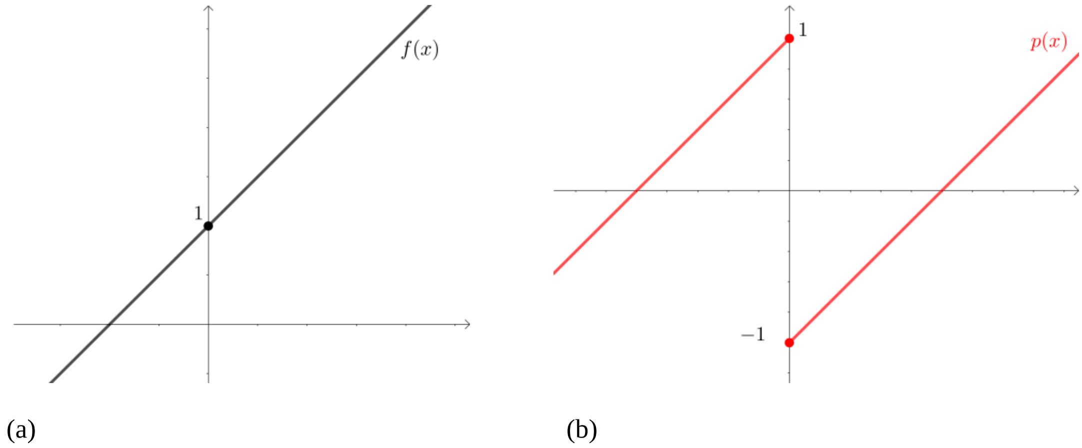
Legenda: (a) Gráfico de $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$; (b) Gráfico da função ímpar $t(x) = \frac{|x|}{x} h(|x|)$.

Fonte: O autor, 2020.

Perceba que os gráficos de $p(x)$, $q(x)$ e $t(x)$ são simétricos com relação à origem cartesiana, e são obtidos refletindo-se, respectivamente as partes traçadas dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ para x positivo, em relação à origem (pois $|x| \geq 0$).

Exemplo 33. Sejam as funções $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$, $p(x) = \frac{-|x|}{x} f(-|x|)$, $q(x) = \frac{-|x|}{x} g(-|x|)$ e $t(x) = \frac{-|x|}{x} h(-|x|)$ e suas representações gráficas abaixo:

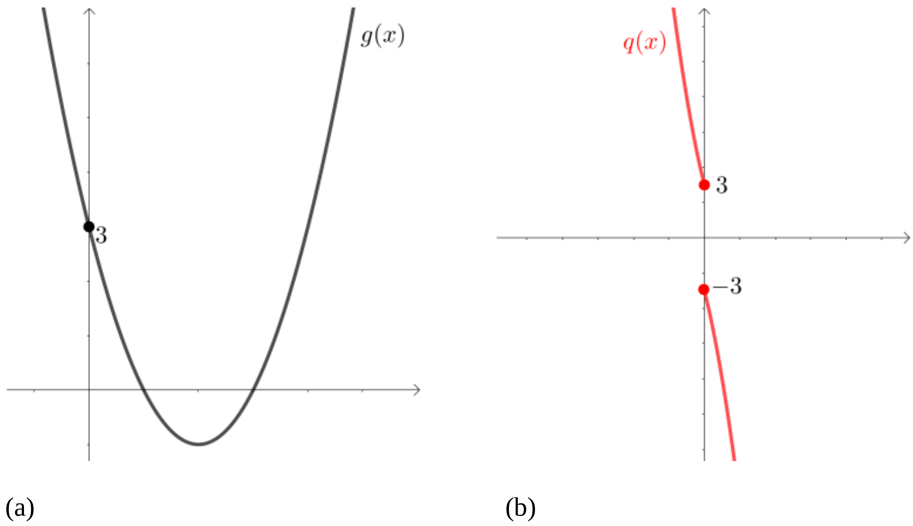
Figura 136 – Exemplos para a proposição 6.



Legenda: (a) Gráfico de $f(x) = x + 1$; (b) Gráfico da função ímpar $p(x) = \frac{-|x|}{x} f(-|x|)$.

Fonte: O autor, 2020.

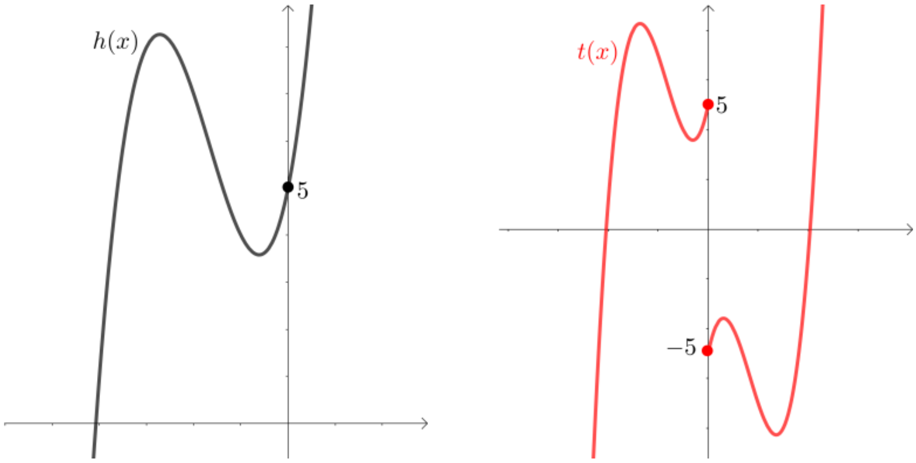
Figura 137 – Exemplos para a proposição 6.



Legenda: (a) Gráfico de $g(x) = x^2 - 4x + 3$; (b) Gráfico da função ímpar $q(x) = \frac{-|x|}{x} g(-|x|)$.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 138 – Exemplos para a proposição 6.



(a) (b)

Legenda: (a) Gráfico de $h(x) = x^3 + 5x^2 + 5x + 5$; (b) Gráfico da função ímpar $t(x) = \dfrac{-|x|}{x} h(-|x|)$.

Fonte: O autor, 2020.

Perceba que os gráficos de $p(x)$, $q(x)$ e $t(x)$ são simétricos com relação à origem cartesiana, e são obtidos refletindo-se, respectivamente as partes traçadas dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ para x negativo, em relação à origem (pois $-|x| \leq 0$).

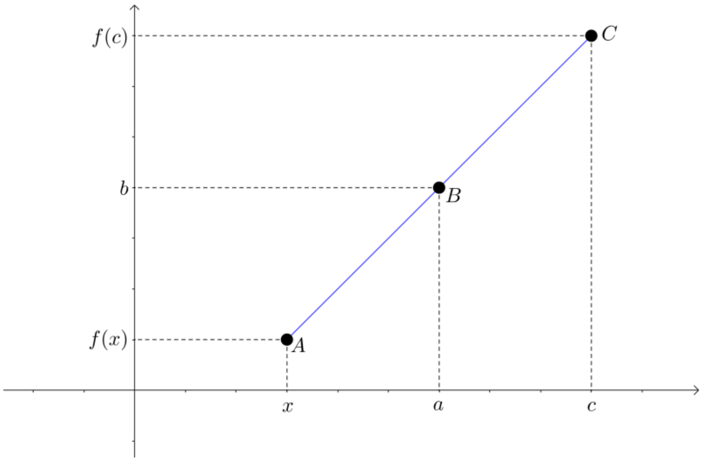
5.4.1 <u>Função semi-ímpar</u>

Definição 9. *Uma função y = f(x) é dita semi-ímpar se o seu gráfico é simétrico em relação a um ponto.*

Proposição 7. *Seja f uma função. O gráfico de f é simétrico em relação ao ponto (a, b) se e somente se,* $f(x) = 2b - f(2a - x)$.

Demonstração: Sejam os pontos A = $(x, f(x))$ e C = $(c, f(c))$ do gráfico de f, simétricos em relação ao ponto de coordenadas B = (a, b), também pertencente ao gráfico de f. Logo, (a, b) será o ponto médio do segmento AC (Figura 139).

Figura 139 – Gráfico de demonstração da proposição 7.



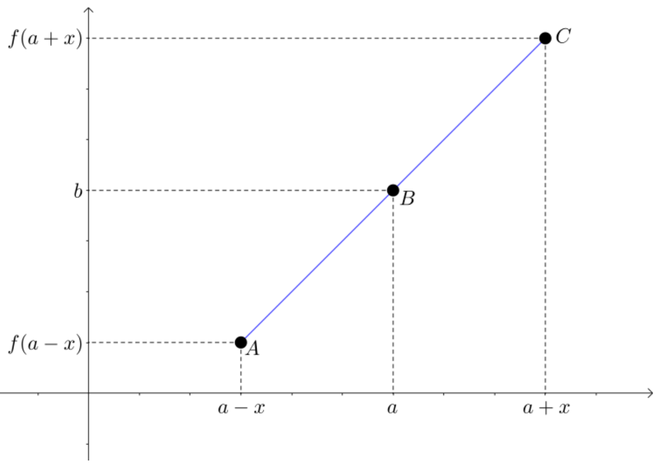
Fonte: O autor, 2020.

Então, $\frac{x+c}{2}=a \Rightarrow x+c=2a \Rightarrow c=2a-x$ e $\frac{f(x)+f(c)}{2}=b \Rightarrow f(c)=2b-f(x)$.

Como $c=2a-x$, temos $f(2a-x)=2b-f(x)$e, finalmente, $f(x)=2b-f(2a-x)$. Portanto, se o gráfico de *f* é simétrico ao ponto (*a*, *b*), então $f(x)=2b-f(2a-x)$.

Por outro lado, substituindo x por x + a em $f(x)=2b-f(2a-x)$, teremos $f(x+a)=2b-f(2a-(x+a)) \Rightarrow f(a+x)=2b-f(a-x)$(Figura 140), o que indica que a abscissa a é equivalente a $\frac{(a+x)+(a-x)}{2}$. Além disso, $b=\frac{f(a+x)+f(a-x)}{2}$. Portanto, se $f(x)=2b-f(2a-x)$, então o gráfico de *f* é simétrico ao ponto (*a*, *b*).

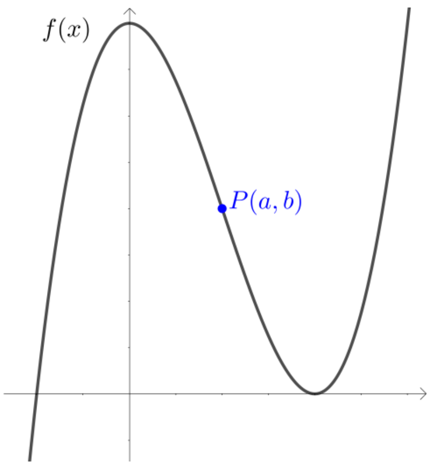
Figura 140 – Gráfico de demonstração de $f(a+x)=2b-f(a-x)$.



Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 34. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Vamos verificar se *f* é uma função semi-ímpar. Para isso, o gráfico de *f* deve ser simétrico em relação a um ponto P(a,b) também pertencente ao gráfico de *f* (Figura 141).

Figura 141 – Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.



Fonte: O autor, 2020.

De acordo com a proposição, $f(x) = 2b - f(2a - x)$. Então:

$$f(x) = 2b - f(2a - x)$$
$$= x^3 - 3x^2 + 4 = 2b - [(2a - x)^3 - 3(2a - x)^2 + 4]$$

Desenvolvendo:

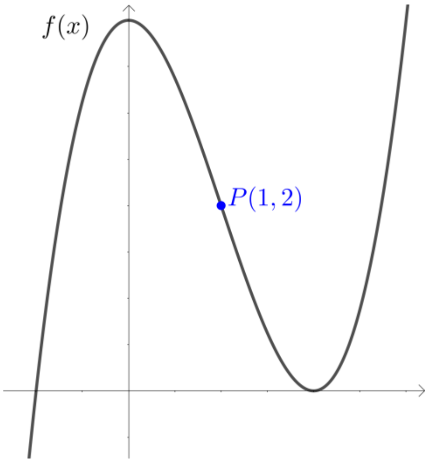
$$x^3 - 3x^2 + 4 = 2b - [8a^3 - 12a^2x + 6ax^2 - x^3 - 12a^2 + 12ax - 3x^2 + 4] =$$
$$= x^3 - 3x^2 + 4 = 2b - [-x^3 + 6ax^2 - 3x^2 - 12a^2x + 12ax + 8a^3 - 12a^2 + 4] =$$
$$= x^3 - 3x^2 + 4 = 2b - [-x^3 + (6a - 3)x^2 - (12a^2 - 12a)x + 8a^3 - 12a^2 + 4] =$$
$$= x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 - (6a - 3)x^2 + (12a^2 - 12a)x - 8a^3 + 12a^2 - 4 + 2b$$

Igualando os termos semelhantes em $f(x) = 2b - f(2a - x)$, temos que

$$-(6a - 3) = -3 \text{ e } -8a^3 + 12a^2 - 4 + 2b = 4,$$

onde $a = 1$ e $b = 2$. Portanto, o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ é simétrico em relação ao ponto P(1,2) (Figura 142).

Figura 142 – Simetria do gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ em relação ao ponto P(1, 2).



Fonte: O autor, 2020.

Proposição 8. *Sejam f(x) uma função real e |x| o valor absoluto de x. Os gráficos das funções* $m(x) = \frac{|x-a|}{x-a} f(|x-a|) + b$ e $n(x) = \frac{-|x-a|}{x-a} f(-|x-a|) + b$, $x \neq a$, *são simétricos em relação ao ponto P(a,b).*

Demonstração: De acordo com a proposição 6, as funções $g(x) = \frac{|x|}{x} f(|x|)$ e $h(x) = \frac{-|x|}{x} f(-|x|)$, $x \neq 0$, são funções ímpares e, portanto, seus gráficos são simétricos em relação à origem cartesiana, ou seja, simétricos em relação ao ponto (0,0).

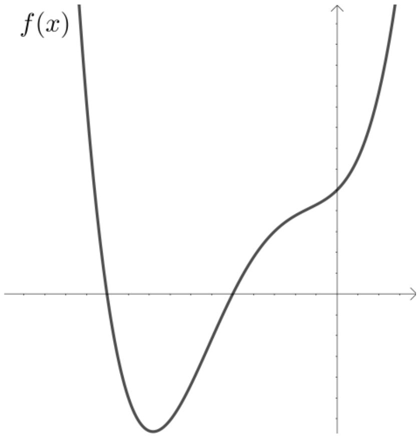
De acordo com as translações horizontais e verticais citadas no capítulo 2, seções 2.1 e 2.2, teremos alguns casos a considerar:

- Se a > 0 e b > 0, os gráficos de $m(x) = \frac{|x-a|}{x-a} f(|x-a|) + b$ e $n(x) = \frac{-|x-a|}{x-a} f(-|x-a|) + b$ serão construídos através de uma translação horizontal de *a* unidades para a direita e de uma translação vertical de *b* unidades para cima dos gráficos de $g(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$ e $h(x)=\frac{-|x|}{x}f(-|x|)$, respectivamente.

- Se a > 0 e b < 0 os gráficos de $m(x)=\frac{|x-a|}{x-a}f(|x-a|)+b$ e $n(x)=\frac{-|x-a|}{x-a}f(-|x-a|)+b$ serão construídos através de uma translação horizontal de *a* unidades para a direita e de uma translação vertical de *b* unidades para baixo dos gráficos de $g(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$ e $h(x)=\frac{-|x|}{x}f(-|x|)$, respectivamente.
- Se a < 0 e b > 0, os gráficos de $m(x)=\frac{|x-a|}{x-a}f(|x-a|)+b$ e $n(x)=\frac{-|x-a|}{x-a}f(-|x-a|)+b$ serão construídos através de uma translação horizontal de *a* unidades para a esquerda e de uma translação vertical de *b* unidades para cima dos gráficos de $g(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$ e $h(x)=\frac{-|x|}{x}f(-|x|)$, respectivamente.
- Se a < 0 e b < 0, os gráficos de $m(x)=\frac{|x-a|}{x-a}f(|x-a|)+b$ e $n(x)=\frac{-|x-a|}{x-a}f(-|x-a|)+b$ serão construídos através de uma translação horizontal de *a* unidades para a esquerda e de uma translação vertical de *b* unidades para baixo dos gráficos de $g(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$ e $h(x)=\frac{-|x|}{x}f(-|x|)$, respectivamente.

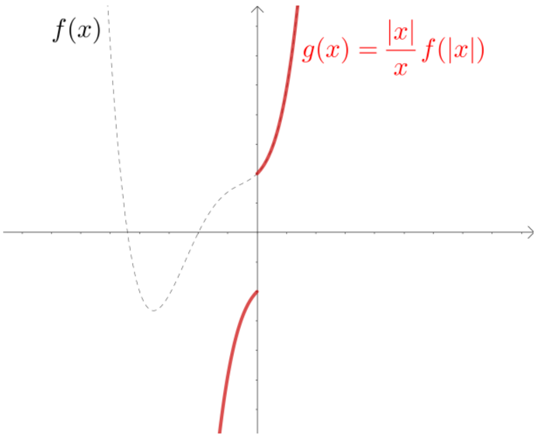
Exemplo 35. Considere a função $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ e seu gráfico representado na figura 143. Os gráficos de $g(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$ e $h(x)=\frac{-|x|}{x}f(-|x|)$ serão dados pelas figuras 144 e 145, respectivamente.

Figura 143 – Gráfico de $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$.



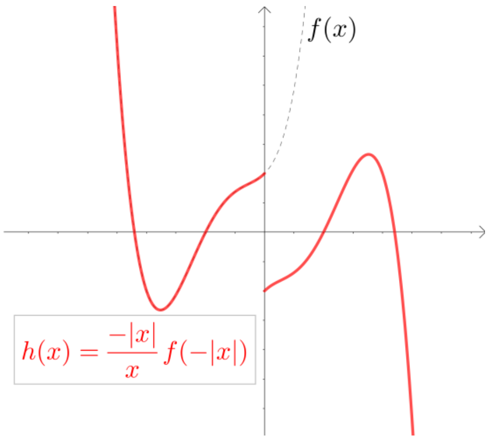
Fonte: O autor, 2020.

Figura 144 – Gráfico de $g(x) = \frac{|x|}{x} f(|x|)$.



Fonte: O autor, 2020.

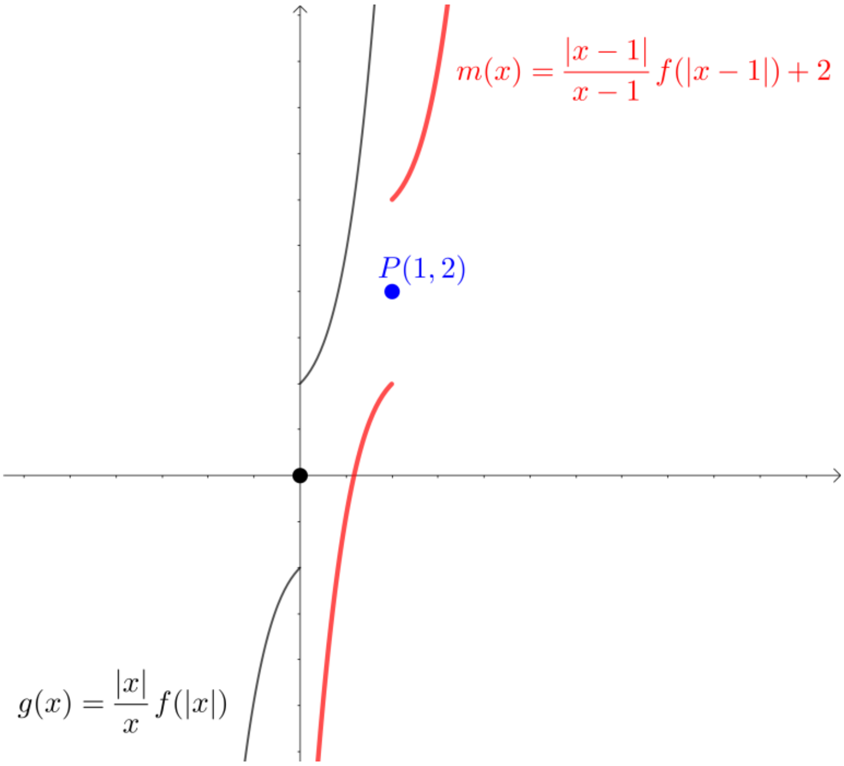
Figura 145 – Gráfico de $h(x) = \frac{-|x|}{x} f(-|x|)$.



Fonte: O autor, 2020.

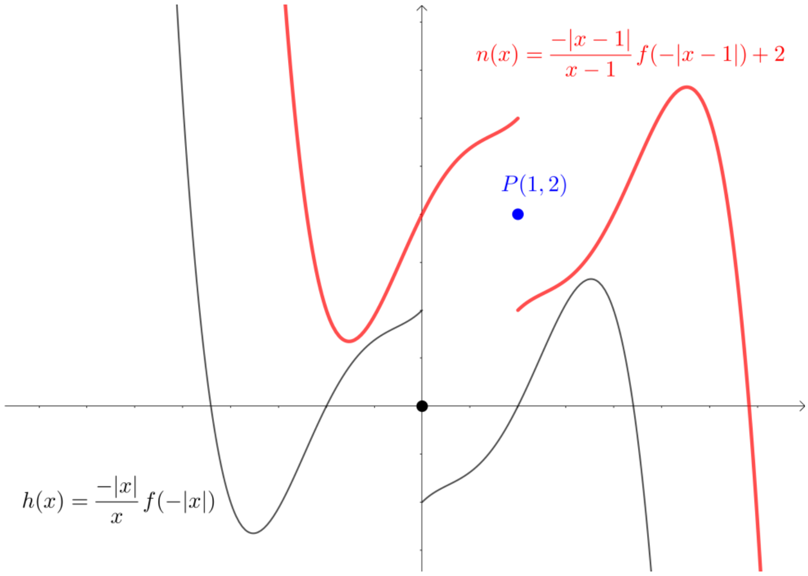
Agora, considere um ponto P(a,b). De acordo com a proposição 8, os gráficos de $m(x)=\frac{|x-a|}{x-a}f(|x-a|)+b$ e $n(x)=\frac{-|x-a|}{x-a}f(-|x-a|)+b$ serão construídos através de translação horizontal de a unidades (para direita se a > 0 e para a esquerda se a < 0) e de translação vertical de b unidades (para cima se b > 0 e para baixo se b < 0) dos gráficos de $g(x)=\frac{|x|}{x}f(|x|)$ e $h(x)=\frac{-|x|}{x}f(-|x|)$, respectivamente. Vamos arbitrar o ponto P(1,2) para exemplificar os gráficos de $m(x)=\frac{|x-a|}{x-a}f(|x-a|)+b$ e $n(x)=\frac{-|x-a|}{x-a}f(-|x-a|)+b$, respectivamente representados nas figuras 146 e 147.

Figura 146 – Gráfico de $m(x)=\frac{|x-a|}{x-a}f(|x-a|)+b$, para a = 1 e b = 2.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 147 – Gráfico de $n(x)=\dfrac{-|x-a|}{x-a}f(-|x-a|)+b$, para a = 1 e b = 2.



Fonte: O autor, 2020.

Proposição 9. *Toda função* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$, *é simétrica em torno do seu ponto de inflexão* $\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$.

Demonstração: Para determinar a localização do ponto de inflexão de $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, calcula-se a segunda derivada da função. A primeira derivada $f'(x)$ será dada por $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Logo, a segunda derivada $f''(x)$ será dada por

$$f''(x)=6ax+2b.$$

Iguale a expressão obtida como segunda derivada a zero e resolva a equação. O resultado da equação será o seu ponto de inflexão.

$$f''(x)=6ax+2b=0 \Rightarrow 6ax=-2b \Rightarrow x=-\frac{2b}{6a}=-\frac{b}{3a}$$

O ponto $\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ é o ponto de inflexão da função $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, e localiza-se no exato local onde as concavidades do gráfico de *f* mudam de sentido.

Mostraremos agora se o gráfico da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, é simétrico em torno do seu ponto de inflexão $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

Vimos anteriormente, na proposição 7, que o gráfico de uma função *f* é simétrico em relação a um ponto (*a*, *b*) se e somente se, $f(x) = 2b - f(2a - x)$.

Então, de acordo com a proposição citada, o gráfico da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é simétrico em relação ao seu ponto de inflexão $(k, f(k))$. Logo:

$$f(x) = 2f(k) - f(2k - x), \text{ onde}$$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$

$f(2k - x) = a(2k - x)^3 + b(2k - x)^2 + c(2k - x) + d$

Desenvolvendo separadamente $f(2k - x) = a(2k - x)^3 + b(2k - x)^2 + c(2k - x) + d$:

$$f(2k - x) = a(2k - x)^3 + b(2k - x)^2 + c(2k - x) + d =$$
$$= f(2k - x) = a(8k^3 - 12k^2x + 6kx^2 - x^3) + b(4k^2 - 4kx + x^2) + c(2k - x) + d =$$
$$= f(2k - x) = 8ak^3 - 12ak^2x + 6akx^2 - ax^3 + 4bk^2 - 4bkx + bx^2 + 2ck - cx + d$$

Desenvolvendo o segundo membro da proposição:

$$2f(k) - f(2k - x) =$$
$$= 2(ak^3 + bk^2 + ck + d) - (8ak^3 - 12ak^2x + 6akx^2 - ax^3 + 4bk^2 - 4bkx + bx^2 + 2ck - cx + d) =$$
$$= 2ak^3 + 2bk^2 + 2ck + 2d - 8ak^3 + 12ak^2x - 6akx^2 + ax^3 - 4bk^2 + 4bkx - bx^2 - 2ck + cx - d =$$
$$= -6ak^3 - 2bk^2 + 12ak^2x - 6akx^2 + ax^3 + 4bkx - bx^2 + cx + d$$

Substituindo *k* por $\frac{-b}{3a}$, teremos que encontrar *f*(*x*). Então:

$$-6a\left(\frac{-b}{3a}\right)^3-2b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2+12a\left(\frac{-b}{3a}\right)^2x-6a\left(\frac{-b}{3a}\right)x^2+ax^3+4b\left(\frac{-b}{3a}\right)x-bx^2+cx+d=$$

$$=\frac{6ab^3}{27a^3}-\frac{2b^3}{9a^2}+\frac{12ab^2x}{9a^2}+2bx^2+ax^3-\frac{4b^2x}{3a}-bx^2+cx+d=$$

$$=+ax^3+bx^2+cx+d+\frac{2b^3}{9a^2}-\frac{2b^3}{9a^2}+\frac{4b^2x}{3a}-\frac{4b^2x}{3a}=$$

$$=ax^3+bx^2+cx+d=f(x).$$

Logo, $(k, f(k))=\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ e o gráfico de $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ é simétrico em torno do seu ponto de inflexão $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

Antes de passarmos ao próximo capítulo, vimos na proposição 5 que o gráfico de toda função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ é simétrico em relação à reta $x=\frac{-b}{2a}$, onde $x=\frac{-b}{2a}$ é o ponto extremo da função, e vimos na proposição 9 que o gráfico de toda função $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$, é simétrica em torno do seu ponto de inflexão $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$. Porém, nem toda função polinomial de grau maior do que três é simétrica em relação à uma reta ou em torno de um ponto. Por exemplo a função $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ é simétrica em relação à reta $x=\frac{-b}{4a}$ se os coeficientes a, b, c, d satisfazem a equação $\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}+d=0$.

Demonstração: Vimos na proposição 3 que o gráfico de f é simétrico em relação a uma reta vertical $x=a$, se e somente se, $f(x)=f(2a-x)$. Portanto, se a reta é $x=\frac{-b}{4a}$, temos $f(x)=f\left(2\left(\frac{-b}{4a}\right)-x\right)\Rightarrow f(x)=f\left(\frac{-b}{2a}-x\right)$. Desenvolvendo o segundo membro $f\left(\frac{-b}{2a}-x\right)$:

$$f\left(\frac{-b}{2a}-x\right)=a\left(\frac{-b}{2a}-x\right)^4+b\left(\frac{-b}{2a}-x\right)^3+c\left(\frac{-b}{2a}-x\right)^2+d\left(\frac{-b}{2a}-x\right)+e=$$

$$=a\left(\frac{b^4}{16a^4}+\frac{4b^3x}{8a^3}+\frac{6b^2x^2}{4a^2}+\frac{4bx^3}{2a}+x^4\right)-b\left(\frac{b^3}{8a^3}+\frac{3b^2x}{4a^2}+\frac{3bx^2}{2a}+x^3\right)+$$

$$+c\left(\frac{b^2}{4a^2}+\frac{2bx}{2a}+x^2\right)+d\left(\frac{-b}{2a}-x\right)+e=$$

$$=\frac{b^4}{16a^3}+\frac{4b^3x}{8a^2}+\frac{6b^2x^2}{4a}+\frac{4bx^3}{2}+ax^4-\frac{b^4}{8a^3}-\frac{3b^3x}{4a^2}-\frac{3b^2x^2}{2a}-bx^3+$$

$$+\frac{b^2c}{4a^2}+\frac{2bcx}{2a}+cx^2-\frac{db}{2a}-dx+e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-b}{2a}-x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+\left(\frac{bc}{a}-\frac{b^3}{4a^2}-d\right)x+\frac{b^2c}{4a^2}-\frac{b^4}{16a^3}-\frac{bd}{2a}+e\,.$$

Como $f(x)=f\left(\frac{-b}{2a}-x\right)$:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=ax^4+bx^3+cx^2+\left(\frac{bc}{a}-\frac{b^3}{4a^2}-d\right)x+\frac{b^2c}{4a^2}-\frac{b^4}{16a^3}-\frac{bd}{2a}+e$$

Pela identidade de polinômios:

$$\frac{bc}{a}-\frac{b^3}{4a^2}-d=d\text{ (I) e }\frac{b^2c}{4a^2}-\frac{b^4}{16a^3}-\frac{bd}{2a}+e=e\text{ (II),}$$

ou seja, a condição para que o gráfico de $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ seja simétrico em relação à reta $x=\frac{-b}{4a}$ deve atender à interseção das equações (I) e (II). Então, na equação (I):

$$\frac{bc}{a}-\frac{b^3}{4a^2}-d=d\Rightarrow\frac{bc}{a}-\frac{b^3}{4a^2}-2d=0\,.$$

Dividindo por (–2), temos $\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}+d=0$.

Na equação (II):

$$\frac{b^2c}{4a^2}-\frac{b^4}{16a^3}-\frac{bd}{2a}+e=e \Rightarrow \frac{-b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}+d\right)=0\text{, onde } \frac{-b}{2a}=0 \text{ ou } \frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}+d=0.$$

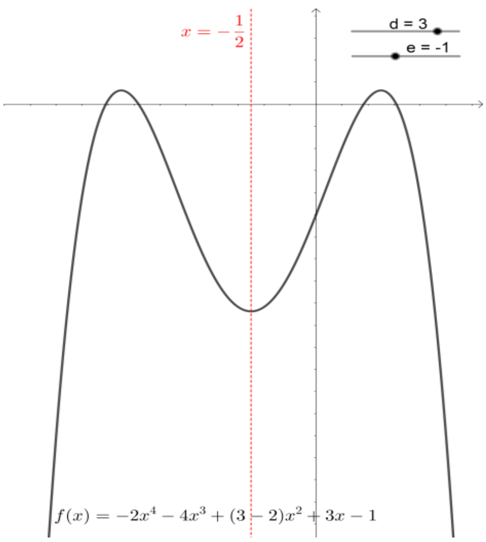
Concluindo, a interseção entre as equações (I) e (II) é $\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}+d=0$, o que demonstra que a função $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ é simétrica em relação à reta $x=\frac{-b}{4a}$ se os coeficientes a, b, c, d satisfazem a equação $\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}+d=0$.

Exemplo 36. Considere $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Se a = –2 e b = –4, temos

$$\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}+d=\frac{(-4)^3}{8\cdot 2^2}-\frac{(-4)c}{2\cdot(-2)}+d=\frac{-64}{32}-\frac{-4c}{-4}+d=-2-c+d=0,$$

onde $c=d-2$ e $f(x)=-2x^4-4x^3+(d-2)x^2+dx+e$. Na figura 148, usaremos o controle deslizante do Geogebra para o parâmetro *d*, uma vez que o coeficiente *e* indica o local onde o gráfico corta o eixo y (veremos com mais detalhes, no capítulo 7, o uso dessa e outras funcionalidades do software Geogebra).

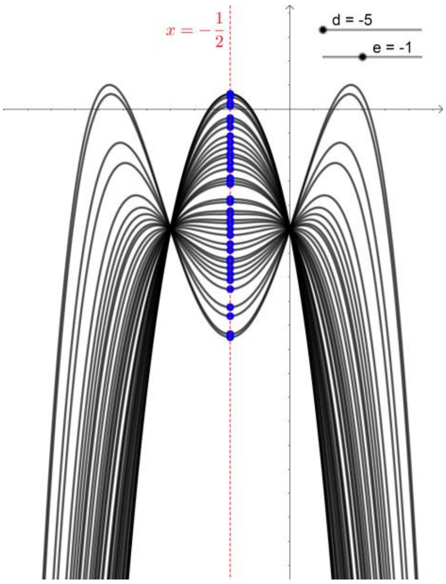
Figura 148 – Gráfico do exemplo 36.



Fonte: O autor, 2020.

Perceba na figura 149 que os gráficos de $f(x) = -2x^4 - 4x^3 + (d-2)x^2 + dx + e$ são simétricos à reta $x = \frac{-(-4)}{4\cdot(-2)} = -\frac{1}{2}$. Habilitando o rastro, tem-se:

Figura 149 – Gráfico do exemplo 36.



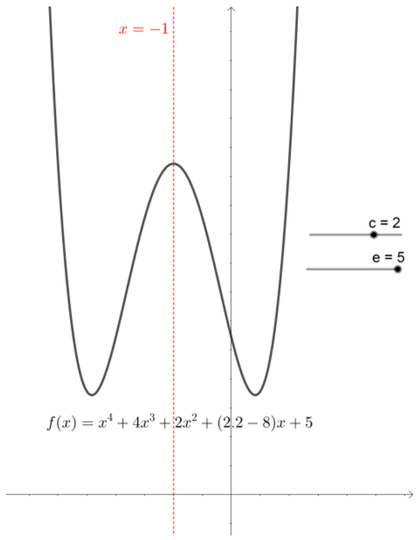
Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 37. Considere $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Se a = 1 e b = 4, temos

$$\frac{b^3}{8a^2} - \frac{bc}{2a} + d = \frac{4^3}{8\cdot 1^2} - \frac{4c}{2\cdot 1} + d = \frac{64}{8} - \frac{4c}{2} + d = 8 - 2c + d = 0,$$

onde $d = 2c - 8$ e $f(x) = x^4 + 4x^3 + cx^2 + (2c-8)x + e$. Usando o controle deslizante do Geogebra para o parâmetro *c*, uma vez que o coeficiente *e* indica o local onde o gráfico corta o eixo y (Figura 150):

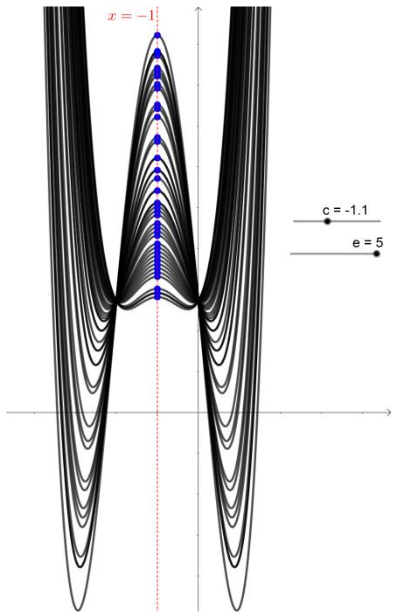
Figura 150 – Gráfico do exemplo 37.



Fonte: O autor, 2020.

Perceba na figura 151 que os gráficos de $f(x) = x^4 + 4x^3 + cx^2 + (2c-8)x + e$ são simétricos à reta $x = \dfrac{-4}{4 \cdot 1} = -1$. Habilitando o rastro, tem-se:

Figura 151 – Gráfico do exemplo 37.



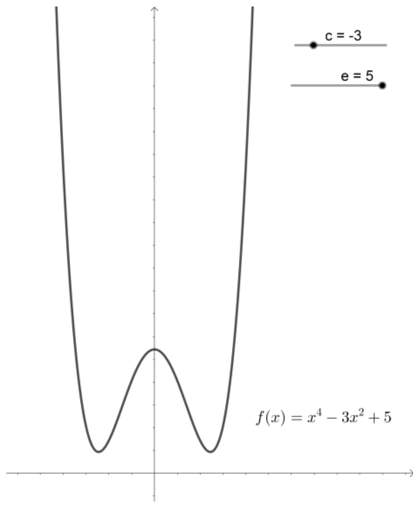
Fonte: O autor, 2020.

Exemplo 38. Considere $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Se a = 1 e b = 0, temos

$$\frac{b^3}{8a^2} - \frac{bc}{2a} + d = \frac{0^3}{8 \cdot 1^2} - \frac{0 \cdot c}{2 \cdot 1} + d = 0 \Rightarrow d = 0,$$

e $f(x) = x^4 + cx^2 + e$. Usando o controle deslizante do Geogebra para o parâmetro *c*, uma vez que o coeficiente *e* indica o local onde o gráfico corta o eixo y (Figura 152):

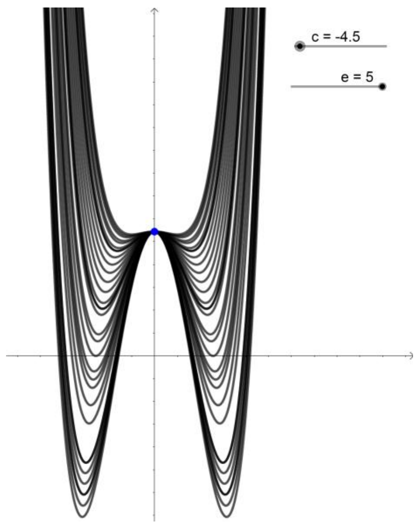
Figura 152 – Gráfico do exemplo 38.



Fonte: O autor, 2020.

Perceba na figura 153 que os gráficos de $f(x) = x^4 + cx^2 + e$ são simétricos à reta $x = 0$. Habilitando o rastro, tem-se:

Figura 153 – Gráfico do exemplo 38.



Fonte: O autor, 2020.

6 FUNÇÃO INVERSA

Neste capítulo será apresentado o conceito sobre funções inversas e suas características gráficas.

6.1 Função inversa

Definição 10. *Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam* x_1 *e* x_2 *de A, se* $x_1 \neq x_2$*, então* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

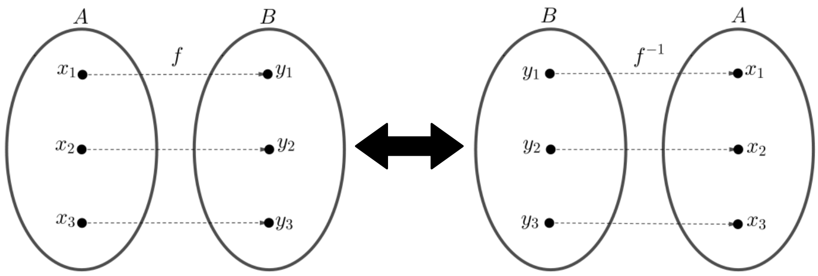
Definição 11. *Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que f(x) = y.*

Definição 12. *Uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.*

Definição 13. *Se f é uma função bijetora de A em B, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos função inversa de f e indicamos por* f^{-1}.

A figura 154 significa que sendo $f : A \to B$ uma função bijetora, com domínio A e contradomínio B, a função inversa f^{-1} é a função $f^{-1} : B \to A$, com domínio B e contradomínio A.

Figura 154 – Função $f : A \to B$ bijetora e sua inversa $f^{-1} : B \to A$.



Fonte: O autor, 2020.

Assim, se o par ordenado (x_1, y_1) está no gráfico de f, o par ordenado (y_1, x_1) estará no gráfico de f^{-1}. Esses pares ordenados são pontos simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes do primeiro e terceiro quadrantes.

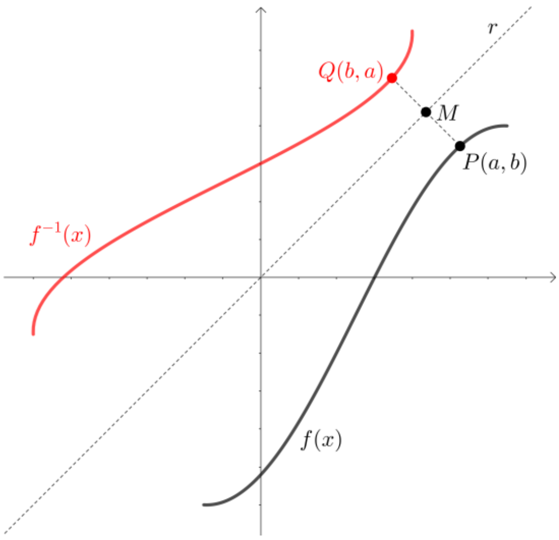
6.2 Gráfico da função inversa

Nos gráficos de uma função f e a sua inversa f^{-1} são formados curvas simétricas em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Observemos inicialmente que, se $(a,b) \in f$, então $(b,a) \in f^{-1}$. Para provarmos que os pontos $P(a, b)$ e $Q(b, a)$ são simétricos em relação à reta r de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes 1 e 3), devemos provar que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r e que as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais.

O ponto M, médio do segmento $\overline{PQ}$, tem coordenadas $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$, portanto M pertence à reta r. Como M é ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, isto é, $\overline{MP} = \overline{MQ}$, $M \in r$, está então provado que os pontos P e Q equidistam da reta r (Figura 155).

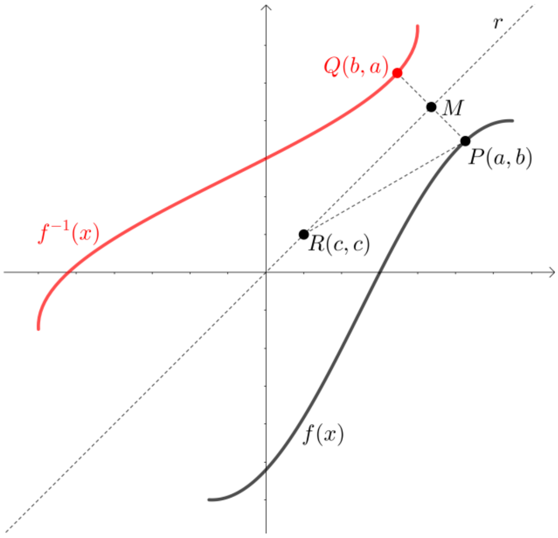
Figura 155 – Gráfico de $f(x)$ e de sua inversa $f^{-1}(x)$.



Fonte: O autor, 2020.

Para provarmos que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta *r*, consideremos o ponto *R*(*c*, *c*) da reta *r*, distinto de *M*, e provemos que o triângulo PMR é retângulo em *M* (Figura 156).

Figura 156 – Gráfico de *f*(*x*) e de sua inversa $f^{-1}(x)$.



Fonte: O autor, 2020.

Calculando a medida dos lados do triângulo PMR, encontramos:

$$PM^2 = \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$MR^2 = \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2$$

$$PR^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2,$$

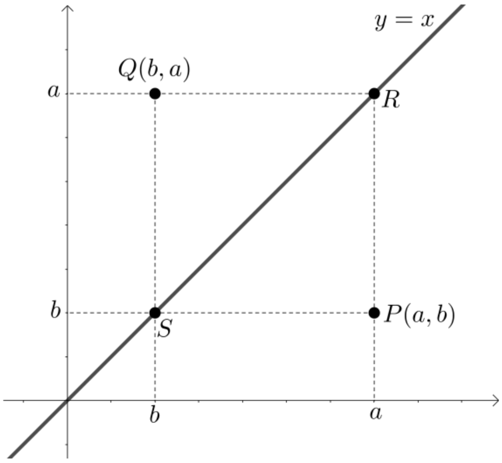
e observamos que:

$$PM^2 + MR^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} - 2(a+b)\cdot c + 2c^2 =$$

$$= a^2 + b^2 - 2ac - 2bc + 2c^2 = (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = (a-c)^2 + (b-c)^2 = PR^2.$$

Uma outra maneira de provarmos que os pontos P(*a*, *b*) e Q(*b*, *a*) são simétricos em relação à reta r de equação *y* = *x* seria a seguinte: uma vez que se tem um ponto P(*a*, *b*) pertencente ao gráfico de uma função *f*, é fato que o ponto Q(*b*,*a*) deve pertencer ao gráfico da função inversa de *f* (f^{-1}), devido ao conceito de função inversa (Figura 157).

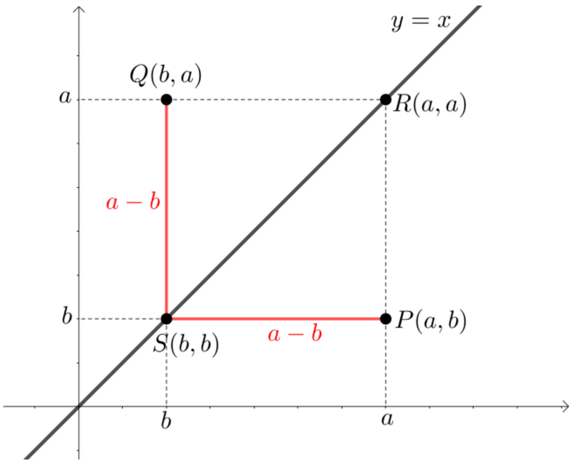
Figura 157 – Simetria dos pontos P e Q em relação à reta *y* = *x*.



Fonte: O autor, 2020.

Observe os pontos R e S da figura 157. Ambos pertencem à reta *y* = *x* e, portanto, têm coordenadas iguais a S(*b*, *b*) e R(*a*, *a*). Outra coisa que podemos observar é que a medida do segmento QS é igual ao módulo de (*a* – *b*) e, analogamente, a medida do segmento PS é igual ao módulo de (*a* – *b*), conforme a figura 158.

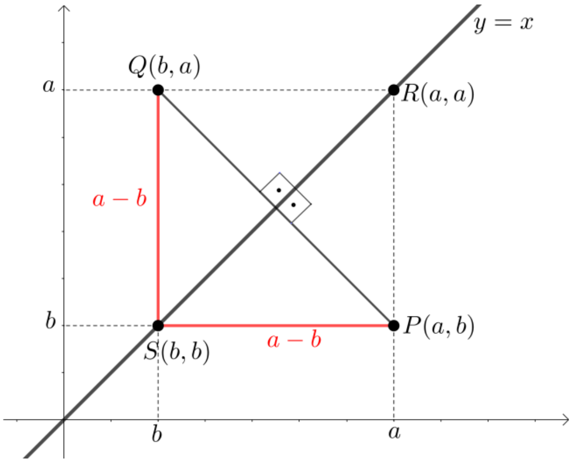
Figura 158 – Simetria dos pontos P e Q em relação à reta *y* = *x*.



Fonte: O autor, 2020.

Então, o quadrilátero PRQS é um quadrado de lado igual ao módulo de ($a - b$), onde a diagonal RS desse quadrado está contida na reta $y = x$. Se traçarmos a outra diagonal PQ (lembrando das aulas de Geometria Plana) teremos que as diagonais PQ e RS são perpendiculares e cortam-se no ponto médio (Figura 159).

Figura 159 – Simetria dos pontos P e Q em relação à reta $y = x$.



Fonte: O autor, 2020.

Portanto, dado um ponto do gráfico da função *f*, existe um ponto simétrico a ele em relação à reta $y = x$, onde este ponto simétrico a ele pertence ao gráfico da inversa de *f*. Conclui-se que o gráfico da função f^{-1} (inversa de *f*) é simétrico ao gráfico da função f em relação à reta $y = x$.

6.3 Composição das funções inversas

Funções inversas, no sentido mais geral, são funções que "revertem" umas às outras. Por exemplo, se uma função *f* leva '*a*' para '*b*', então a sua inversa f^{-1} deve levar '*b*' para '*a*'. Assim, se o par ordenado (a, b) está no gráfico de *f*, o par ordenado (b, a) estará no gráfico de f^{-1}.

Dada uma função $f : A \to B$ e uma função $g : B \to C$, a função composta de *g* com *f* é representada por $g \circ f$ (leia-se "*g* bola *f*"). Já a função composta de *f* com *g* é representada por $f \circ g$ (leia-se "*f* bola *g*").

Exemplo 39. Consideremos as funções reais $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = 5x$. Então:

$$g(f(x)) = 5 \cdot f(x) = 5 \cdot (2x + 2) = 10x + 10$$
$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 10x + 10 \text{, e}$$

$$f(g(x)) = 2 \cdot g(x) + 2 = 2 \cdot 5x + 2 = 10x + 2$$
$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 10x + 2 \text{.}$$

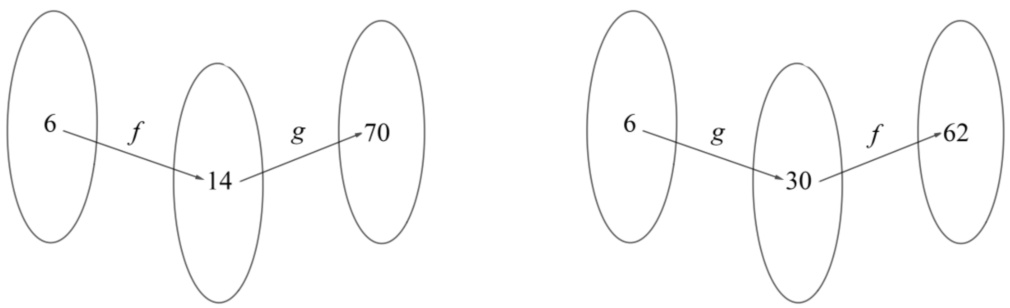
Exemplo 40. Consideremos as funções reais $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = 5x$. Os valores de $g(f(6)) = g \circ f(6)$ e $f(g(6)) = f \circ g(6)$ serão dados por

$$g(f(6)) = 5 \cdot f(6) = 5 \cdot (2 \cdot 6 + 2) = 10 \cdot 6 + 10 = 70 \text{, ou simplesmente}$$
$$g(f(6)) = (g \circ f)(6) = 10 \cdot 6 + 10 = 70 \text{, e}$$

$$f(g(6)) = 2 \cdot g(6) + 2 = 2 \cdot 5 \cdot 6 + 2 = 62 \text{, ou simplesmente}$$
$$f(g(6)) = (f \circ g)(6) = 10 \cdot 6 + 2 = 62 \text{.}$$

Os diagramas de $g(f(6)) = 70$ e $f(g(6)) = 62$ estão representados na figura 160.

Figura 160 – Representação por diagramas de *g*(*f*(6)) e *f*(*g*(6)).



(a) (b)

Legenda: (a) Representação de *g*(*f*(6)) = 70; (b) Representação de *f*(*g*(6)) = 62.

Fonte: O autor, 2020.

Propositalmente, vamos pegar as funções $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = \frac{x+4}{2}$. Observe que:

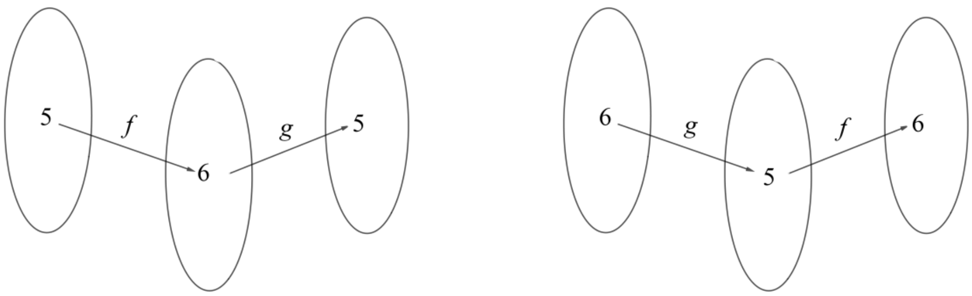
$$f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$$

e

$$g(6) = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Vemos que, quando aplicamos *f* seguida por *g*, obtemos como imagem dessa composição ($g \circ f$) o valor do domínio de *f*, e que, quando aplicamos *g* seguida por *f*, obtemos como imagem dessa composição ($f \circ g$) o valor do domínio de *g*. Os diagramas de $g(f(5)) = 5$ e $f(g(6)) = 6$ estão representados na figura 161.

Figura 161 – Representação por diagramas de *g*(*f*(5)) e *f*(*g*(6)).



(a) (b)

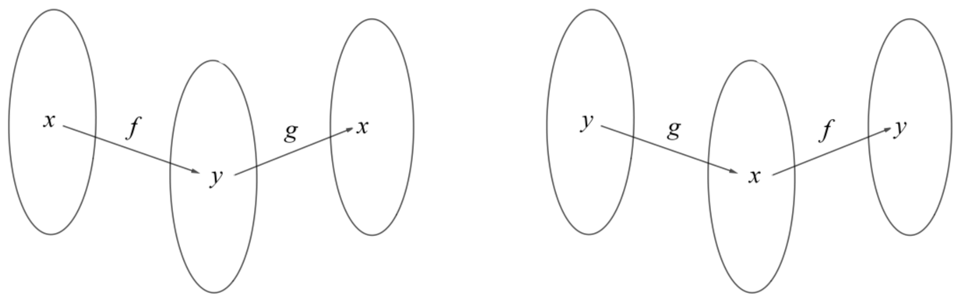
Legenda: (a) Representação de *g*(*f*(5)) = 5; (b) Representação de *f*(*g*(6)) = 6.

Fonte: O autor, 2020.

Temos que mostrar que isso acontece para todos os valores dos domínios de *f* e *g*, independentemente da ordem em que *f* e *g* são aplicadas. Isso dá origem à regra de composição da função inversa.

Sejam as funções reais *f* e *g*, inversas entre si. Temos que $f(x) = y$ e $g(y) = x$. Portanto, substituindo $x = g(y)$ em $f(x) = y$, temos $f(g(y)) = y$, onde y pertence ao domínio de *g*. Por outro lado, substituindo $y = f(x)$ em $g(y) = x$, temos $g(f(x)) = x$, onde *x* pertence ao domínio de *f*. Os diagramas de $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ estão representados na figura 162.

Figura 162 – Representação por diagramas de *g*(*f*(*x*)) e *f*(*g*(*y*)).



(a) (b)

Legenda: (a) Representação de $g(f(x)) = x$; (b) Representação de $f(g(y)) = y$.

Fonte: O autor, 2020.

Essas são as condições para que duas funções *f* e *g* sejam inversas:

- $f(g(x)) = x$, para todos os valores de *x* no domínio de *g*, e
- $g(f(x)) = x$, para todos os valores de *x* no domínio de *f*.

Isso acontece porque, se *f* e *g* são inversas, compor *f* e *g* (em qualquer ordem) cria a função que, para toda *entrada*, retorna essa mesma *entrada*. Chamamos esta função composta de "função identidade". Em geral, para verificarmos se *f* e *g* são funções inversas, podemos fazer sua composição. Se o resultado for *x*, as funções serão inversas. Caso contrário, elas não serão.

Exemplo 41. Vamos usar a regra de composição da função inversa para verificar se as funções reais $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$ e $g(x) = 3x - 1$ são, de fato, inversas entre si. Então, como

$$f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{3} = \frac{3x-1+1}{3} = \frac{3x}{3} = x \quad \text{e} \quad g(f(x)) = 3f(x) - 1 = 3\left(\frac{x+1}{3}\right) - 1 = x,$$

concluímos que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ e as funções *f* e *g* são inversas entre si.

Exemplo 42. Vamos testar para $f(x) = 5x - 7$ e $g(x) = \dfrac{x}{5} + 7$. Então, como

$$f(g(x)) = 5g(x) - 7 = 5\left(\frac{x}{5} + 7\right) - 7 = x + 28 \quad \text{e} \quad g(f(x)) = \frac{f(x)}{5} + 7 = \frac{5x-7}{5} + 7 = x + \frac{28}{5},$$

concluímos que $f(g(x)) \neq x$ e $g(f(x)) \neq x$ e as funções f e g não são inversas entre si. Observe que poderíamos ter concluído que f e g não eram inversas após mostrarmos que $f(g(x)) = x + 28$.

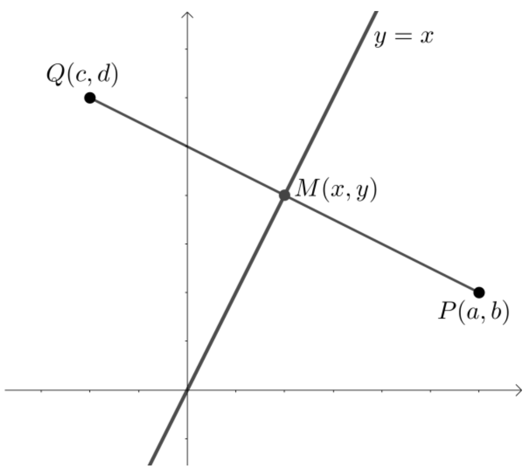
6.4 Funções k-invertíveis

Vimos anteriormente que o gráfico de uma função invertível e o gráfico da sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$. Na verdade, a função *f*(*x*) é invertível quando o gráfico simétrico ao gráfico da função *f*(*x*) em relação à reta $y = x$ também é gráfico de uma função. Usando este fato, podemos definir uma função *k*-invertível.

Definição 14. *A função* $y = f(x)$ *é dita k-invertível se o gráfico simétrico ao gráfico da função* $y = f(x)$*, em relação à reta* $y = kx$*, é gráfico de uma função. Denominamos* $y = f_k^{-1}(x)$ *a função k-inversa de* $y = f(x)$.

Sejam $P(a,b)$ e $Q(c,d)$ pontos simétrico s em relação à reta $y = x$, e o ponto médio $M(x, y)$ do segmento $\overline{PQ}$ (figura 163).

Figura 163 – Pontos simétricos em relação à reta *y* = *x*.



Fonte: O autor, 2020.

Portanto, $x = \dfrac{a+c}{2}$ e $y = \dfrac{b+d}{2}$. Como $M(x, y)$ também pertence à reta $y = x$, temos que $y = x = \dfrac{b+d}{2}$. Igualando, obtemos

$$x = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \Rightarrow a+c = b+d \Rightarrow c-d = -a+b \text{ (I).}$$

Como a reta que contém os pontos P e Q é perpendicular à reta $y = x$, temos a relação entre seus coeficientes angulares:

$$\left(\frac{b-d}{a-c}\right) \cdot 1 = -1 \Rightarrow b-d = c-a \Rightarrow c+d = a+b \text{ (II).}$$

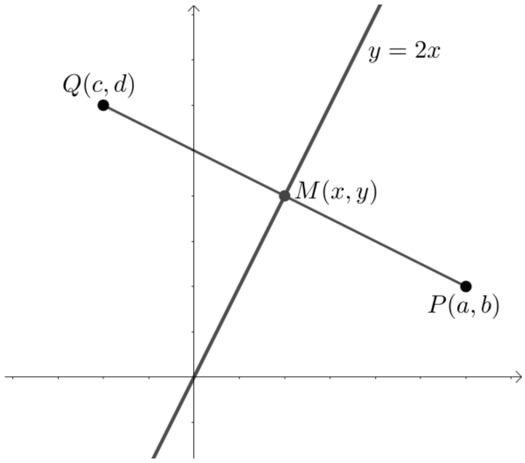
Das equações (I) e (II), temos o sistema $\begin{cases} c-d = -a+b \\ c+d = a+b \end{cases}$. Somando-se as duas equações, obtemos $2c = 2b \Rightarrow c = b$. Resolvendo o mesmo sistema e eliminando a incógnita *c*, obtemos $2d = 2a \Rightarrow d = a$.

De fato, como vimos anteriormente na definição de função inversa, se $P(a,b) \in f$, então $Q(c,d) = (b,a) \in f^{-1}$, onde f^{-1} é a função inversa de *f*, cujos gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$ (aqui podemos notar que a inversa deve ser uma função e seu gráfico é, de fato, gráfico de uma função. Então uma função é invertível se o gráfico simétrico ao gráfico dessa função em relação à reta $y = x$ é gráfico de uma função.

Portanto, os pontos $P(a,b)$ e $Q(c,d) = (b,a)$ pertencem a gráficos simétricos em relação à reta $y = 1x$. Então, o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de *f* se e somente se $Q(b,a)$ também pertencer ao gráfico de f_1^{-1}, onde f_1^{-1} é a função 1-inversa de *f*, cujos gráficos são simétricos em relação à reta $y = 1x$.

Agora, vamos considerar $P(a,b)$ e $Q(c,d)$ pontos simétricos em relação à reta $y = 2x$, e o ponto médio $M(x, y)$ do segmento $\overline{PQ}$ (figura 164).

Figura 164 – Pontos simétricos em relação à reta $y = 2x$.



Fonte: O autor, 2020.

Então, $x = \dfrac{a+c}{2}$ e $y = \dfrac{b+d}{2}$. Como $M(x, y)$ também pertence à reta $y = 2x$, temos que $y = 2x = \dfrac{b+d}{2} \Rightarrow x = \dfrac{b+d}{4}$. Igualando, obtemos

$$x = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{4} \Rightarrow 2a + 2c = b + d \Rightarrow 2c - d = -2a + b \text{ (I).}$$

Como a reta que contém os pontos P e Q é perpendicular à reta $y = 2x$, temos a relação entre seus coeficientes angulares:

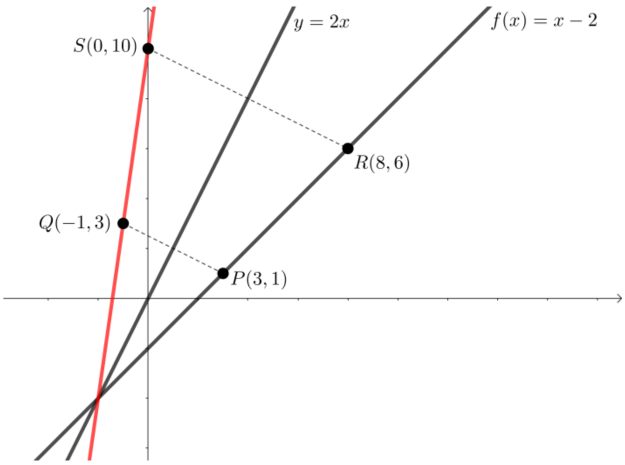
$$\left(\frac{b-d}{a-c}\right) \cdot 2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{b-d}{a-c}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2b - 2d = c - a \Rightarrow c + 2d = a + 2b \text{ (II).}$$

Das equações (I) e (II), temos o sistema $\begin{cases} 2c - d = -2a + b \\ c + 2d = a + 2b \end{cases}$. Multiplicando-se a primeira equação por 2 e somando-a com a segunda equação, obtemos $5c = -3a + 4b \Rightarrow c = \dfrac{-3a + 4b}{5}$. Por outro lado, multiplicando-se a segunda equação por -2 e somando-a com a primeira equação, obtemos $-5d = -4a - 3b \Rightarrow d = \dfrac{4a + 3b}{5}$.

Portanto, os pontos $P(a,b)$ e $Q(c,d)=\left(\frac{-3a+4b}{5},\frac{4a+3b}{5}\right)$ pertencem a gráficos simétricos em relação à reta $y=2x$. Então, o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de *f* se e somente se $Q(c,d)=\left(\frac{-3a+4b}{5},\frac{4a+3b}{5}\right)$ também pertencer ao gráfico de f_2^{-1}, onde f_2^{-1} é a função *2*-inversa de *f*, cujos gráficos são simétricos em relação à reta $y=2x$ (note que, para que a *2*-inversa seja uma função, o seu gráfico deve ser gráfico de uma função).

Por exemplo, considere os pontos $P(3{,}1)$ e $R(8{,}6)$ pertencentes à função $f(x)=x-2$. Então, os pontos $Q=\left(\frac{-3\cdot 3+4\cdot 1}{5},\frac{4\cdot 3+3\cdot 1}{5}\right)=(-1{,}3)$ e $S=\left(\frac{-3\cdot 8+4\cdot 6}{5},\frac{4\cdot 8+3\cdot 6}{5}\right)=(0{,}10)$ são, respectivamente, simétricos aos pontos P e R em relação à reta $y=2x$, e pertencem à função $f_2^{-1}(x)$, *2*-inversa de *f*, cujos gráficos são simétricos em relação à mesma reta (figura 165).

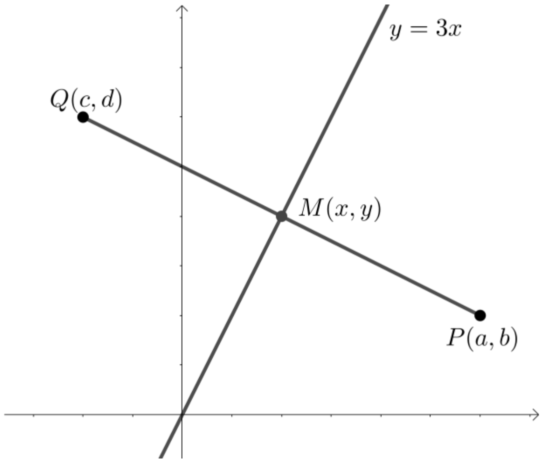
Figura 165 – Funções com gráficos simétricos em relação à reta *y* = 2*x*.



Fonte: O autor, 2020.

Seguindo o raciocínio, vamos considerar $P(a,b)$ e $Q(c,d)$ pontos simétricos em relação à reta $y=3x$, e o ponto médio $M(x,y)$ do segmento $\overline{PQ}$ (figura 166).

Figura 166 – Pontos simétricos em relação à reta $y = 3x$.



Fonte: O autor, 2020.

Então, $x = \dfrac{a+c}{2}$ e $y = \dfrac{b+d}{2}$. Como $M(x, y)$ também pertence à reta $y = 3x$, temos que $y = 3x = \dfrac{b+d}{2} \Rightarrow x = \dfrac{b+d}{6}$. Igualando, obtemos

$$x = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{6} \Rightarrow 3a + 3c = b + d \Rightarrow 3c - d = -3a + b \text{ (I).}$$

Como a reta que contém os pontos P e Q é perpendicular à reta $y = 3x$, temos a relação entre seus coeficientes angulares:

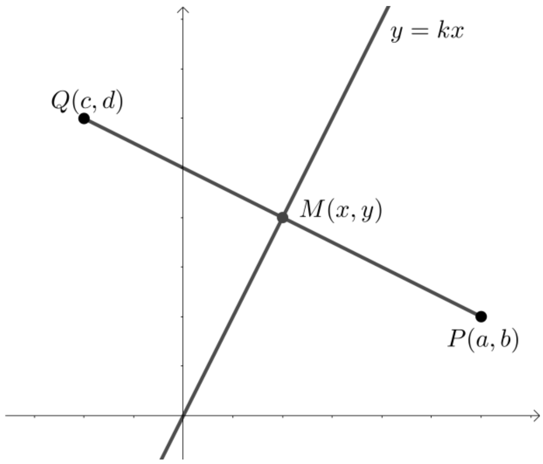
$$\left(\frac{b-d}{a-c}\right) \cdot 3 = -1 \Rightarrow \left(\frac{b-d}{a-c}\right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3b - 3d = c - a \Rightarrow c + 3d = a + 3b \text{ (II).}$$

Das equações (I) e (II), temos o sistema $\begin{cases} 3c - d = -3a + b \\ c + 3d = a + 3b \end{cases}$. Multiplicando-se a primeira equação por 3 e somando-a com a segunda equação, obtemos $10c = -8a + 6b \Rightarrow c = \dfrac{-8a + 6b}{10}$. Por outro lado, multiplicando-se a segunda equação por -3 e somando-a com a primeira equação, obtemos $-10d = -6a - 8b \Rightarrow d = \dfrac{6a + 8b}{10}$.

Portanto, os pontos $P(a,b)$ e $Q(c,d) = \left(\frac{-8a+6b}{10}, \frac{6a+8b}{10}\right)$ pertencem a gráficos simétricos em relação à reta $y = 3x$. Então, o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de *f* se e somente se $Q(c,d) = \left(\frac{-8a+6b}{10}, \frac{6a+8b}{10}\right)$ também pertencer ao gráfico de f_3^{-1}, onde f_3^{-1} é a função *3*-inversa de *f*, cujos gráficos são simétricos em relação à reta $y = 3x$ (note que, para que a *3*-inversa seja uma função, o seu gráfico deve ser gráfico de uma função).

Procedendo de maneira análoga, sejam $P(a,b)$ e $Q(c,d)$ pontos simétricos em relação à reta $y = kx$, e o ponto médio $M(x,y)$ do segmento $\overline{PQ}$ (figura 167).

Figura 167 – Pontos simétricos em relação à reta *y* = *kx*.



Fonte: O autor, 2020.

Portanto, $x = \frac{a+c}{2}$ e $y = \frac{b+d}{2}$. Como $M(x,y)$ também pertence à reta $y = kx$, temos que $y = kx = \frac{b+d}{2} \Rightarrow x = \frac{b+d}{2k}$. Igualando, obtemos

$$x = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2k} \Rightarrow ka + kc = b + d \Rightarrow kc - d = -ka + b \text{ (I).}$$

Como a reta que contém os pontos P e Q é perpendicular à reta $y = kx$, temos a relação entre seus coeficientes angulares:

$$\left(\frac{b-d}{a-c}\right) \cdot k = -1 \Rightarrow \left(\frac{b-d}{a-c}\right) = -\frac{1}{k} \Rightarrow kb - kd = c - a \Rightarrow c + kd = a + kb \text{ (II).}$$

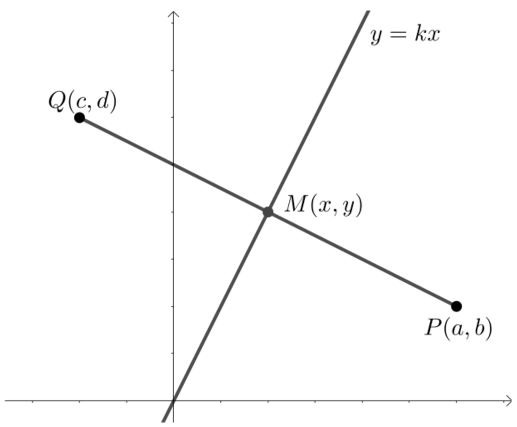
Das equações (I) e (II), temos o sistema $\begin{cases} kc - d = -ka + b \\ c + kd = a + kb \end{cases}$. Multiplicando-se a primeira equação por k e somando-a com a segunda equação, obtemos $k^2c + c = -ak^2 + a + 2bk \Rightarrow c = \dfrac{2kb - (k^2 - 1)a}{k^2 + 1}$. Por outro lado, multiplicando-se a segunda equação por $-k$ e somando-a com a primeira equação, obtemos $-k^2d - d = -2ak - k^2b + b$. Daí, multiplicando por –1 e isolando a incógnita *d*, obtemos $d = \dfrac{2ka + (k^2 - 1)b}{k^2 + 1}$.

Portanto, o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de f se e somente se $Q(c,d) = \left(\dfrac{2kb - (k^2 - 1)a}{k^2 + 1}, \dfrac{2ka + (k^2 - 1)b}{k^2 + 1} \right)$ também pertencer ao gráfico de f_k^{-1}, onde f_k^{-1} é a função *k*-inversa de *f*, cujos gráficos são simétricos em relação à reta $y = kx$.

6.5 Composição de funções k-invertíveis

Vimos que, quando aplicamos *f* seguida por *g*, inversas entre si, obtemos como imagem dessa composição $(g \circ f)$ o valor do domínio de *f*, e que, quando aplicamos g seguida por *f*, obtemos como imagem dessa composição $(f \circ g)$ o valor do domínio de *g*. Agora, veremos o que acontece quando fazemos a composição entre as funções *f* e sua função *k*-invertível f_k^{-1}. Sejam $P(a,b)$ e $Q(c,d)$ pontos simétricos em relação à reta $y = kx$ (figura 168).

Figura 168 – Pontos simétricos em relação à reta *y* = *kx*.



Fonte: O autor, 2020.

Na seção anterior vimos que o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de *f* se e somente se $Q(c,d)=\left(\dfrac{2kb-(k^2-1)a}{k^2+1},\dfrac{2ka+(k^2-1)b}{k^2+1}\right)$ também pertencer ao gráfico de f_k^{-1}, com P e Q simétricos em relação à reta $y=kx$, e f_k^{-1} é a função *k*-inversa de *f*, cujos gráficos são simétricos em relação à mesma reta. Sendo assim, $f(a)=b$ e $f_k^{-1}(c)=d$. Substituindo *a* por *x* em $f(a)=b$, obtemos $f(x)=b$. Como $c=\dfrac{2kb-(k^2-1)a}{k^2+1}$ e $d=\dfrac{2ka+(k^2-1)b}{k^2+1}$, em $f_k^{-1}(c)=d$, teremos

$$f_k^{-1}\left(\frac{2kb-(k^2-1)a}{k^2+1}\right)=\frac{2ka+(k^2-1)b}{k^2+1}$$

e, consequentemente

$$f_k^{-1}\left(\frac{2kf(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)f(x)}{k^2+1},$$

que é a relação entre *f* e f_k^{-1}.

Os valores de $c=\dfrac{2kb-(k^2-1)a}{k^2+1}$ e $d=\dfrac{2ka+(k^2-1)b}{k^2+1}$ foram obtidos do sistema $\begin{cases} kc-d=-ka+b \\ c+kd=a+kb \end{cases}$, visto na seção anterior. Procedendo de maneira análoga para calcular os valores de *a* e *b*, multiplicando-se a segunda equação por *k* e somando-a com a primeira equação, obtemos $k^2b+b=dk^2-d+2ck \Rightarrow b=\dfrac{2kc+(k^2-1)d}{k^2+1}$. Por outro lado, multiplicando-se a primeira equação por $-k$ e somando-a com a segunda equação, obtemos $k^2a+a=2dk-k^2c+c \Rightarrow a=\dfrac{2kd-(k^2-1)c}{k^2+1}$. Sabendo que $f(a)=b$ e $f_k^{-1}(c)=d$, e substituindo *c* por *x*, obtemos $f_k^{-1}(x)=d$. Como $a=\dfrac{2kd-(k^2-1)c}{k^2+1}$ e $b=\dfrac{2kc+(k^2-1)d}{k^2+1}$, em $f(a)=b$, teremos

$$f\left(\frac{2kd-(k^2-1)c}{k^2+1}\right)=\frac{2kc+(k^2-1)d}{k^2+1}$$

e, consequentemente

$$f\left(\frac{2kf_k^{-1}(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)\,f_k^{-1}(x)}{k^2+1},$$

que é a relação entre *f* e f_k^{-1}.

Enfim, no caso 1-invertível, suponha que *g* é uma função satisfazendo

$$g\left(\frac{2kf(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)\,f(x)}{k^2+1},\ \forall x\ \in\ Dom\ (f)$$

e

$$f\left(\frac{2kg(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)g(x)}{k^2+1},\ \forall x\ \in\ Dom\ (g).$$

Então *f* é *k*-invertível e $g\ =\ f_k^{-1}$ e, consequentemente, os gráficos são simétricos em relação à reta *y* = *kx*.

Exemplo 43. Vamos considerar os pontos $A(4,-3)$ e $B(8,-1)$, pertencentes ao gráfico da função $f(x)=\frac{1}{2}x-5$, e os pontos C e D, respectivamente simétricos aos pontos A e B em relação à reta $y=3x$. De acordo com as demonstrações anteriores, o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de *f* se e somente se $Q(c,d)=\left(\frac{2kb-(k^2-1)a}{k^2+1},\frac{2ka+(k^2-1)b}{k^2+1}\right)$ também pertencer ao gráfico de f_k^{-1}, com P e Q simétricos em relação à reta $y=kx$. Sendo assim, para encontrar as coordenadas do ponto C, temos $a=4$, $b=-3$ e $k=3$. Substituindo, teremos

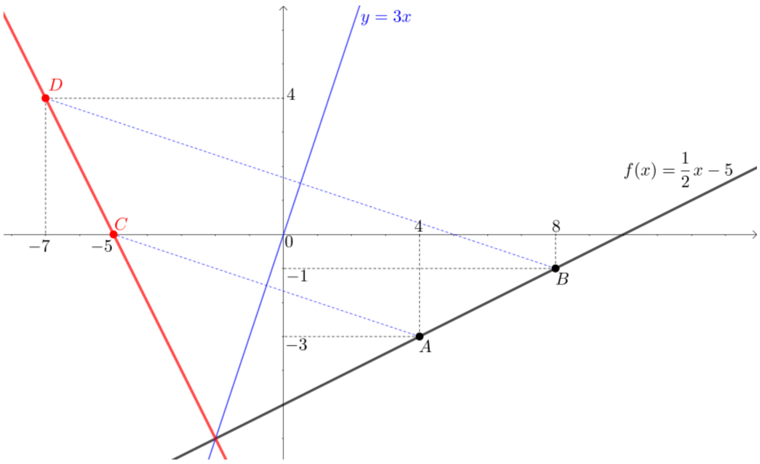
$$C=\left(\frac{2\cdot 3\cdot(-3)-(3^2-1)\cdot 4}{3^2+1},\frac{2\cdot 3\cdot 4+(3^2-1)\cdot(-3)}{3^2+1}\right)=\left(\frac{-18-32}{10},\frac{24-24}{10}\right)=(-5,0).$$

Para encontrar as coordenadas do ponto D, $a=8$, $b=-1$ e $k=3$. Substituindo, teremos

$$D=\left(\frac{2\cdot 3\cdot(-1)-(3^2-1)\cdot 8}{3^2+1},\frac{2\cdot 3\cdot 8+(3^2-1)\cdot(-1)}{3^2+1}\right)=\left(\frac{-6-64}{10},\frac{48-8}{10}\right)=(-7,4).$$

A figura 169 ilustra os pontos $A(4,-3)$ e $B(8,-1)$ respectivamente simétricos aos pontos $C(-5,0)$ e $D(-7,4)$ em relação à reta $y=3x$.

Figura 169 – Pontos C e D simétricos a A e B, em relação à reta y = 3x.



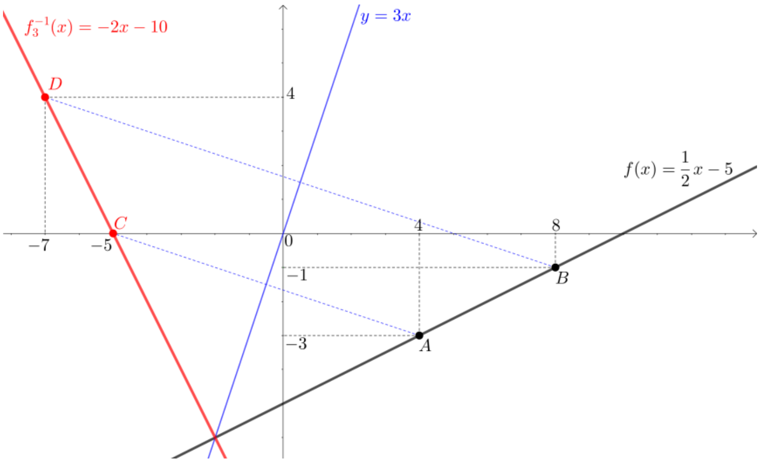
Fonte: O autor, 2020.

Com os pontos $C(-5,0)$ e $D(-7,4)$ podemos encontrar a função *3*-inversa, ou seja, a função f_3^{-1} cujo gráfico é simétrico ao gráfico de *f* em relação à reta $y=3x$. Considerando um ponto genérico $G(x,y)$ pertencente ao gráfico de f_3^{-1}, e usando a condição de alinhamento dos três pontos citados, temos

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -7 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -20-7y+5y-4x=0\Rightarrow y=-2x-10.$$

Portanto, $f_3^{-1}(x)=-2x-10$ (Figura 170).

Figura 170 – Gráfico da função 3-inversa de $f(x)=\frac{1}{2}x-5$.



Fonte: O autor, 2020.

Uma outra forma de encontrar a equação de $f_3^{-1}(x)$ é usar a relação

$$f_k^{-1}\left(\frac{2kf(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)f(x)}{k^2+1},$$

onde $k=3$ e $f(x)=\frac{1}{2}x-5$. Substituindo, temos:

$$f_3^{-1}\left(\frac{2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}x-5\right)-(3^2-1)\cdot x}{3^2+1}\right)=\frac{2\cdot 3\cdot x+(3^2-1)\cdot\left(\frac{1}{2}x-5\right)}{3^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3^{-1}\left(\frac{3x-30-8x}{10}\right)=\frac{6x+4x-40}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3^{-1}\left(\frac{-x-6}{2}\right)=x-4.$$

Substituindo x por $-2x-6$, obtemos

$$f_3^{-1}\left(\frac{-(-2x-6)-6}{2}\right)=(-2x-6)-4\Rightarrow f_3^{-1}(x)=-2x-10$$

Reciprocamente, vamos encontrar a função f cujo gráfico é simétrico à $f_3^{-1}(x) = -2x - 10$ em relação à reta $y = 3x$. Usando a relação

$$f\left(\frac{2kf_k^{-1}(x) - (k^2 - 1)x}{k^2 + 1}\right) = \frac{2kx + (k^2 - 1)f_k^{-1}(x)}{k^2 + 1},$$

onde $k = 3$ e $f_3^{-1}(x) = -2x - 10$. Substituindo, temos:

$$f\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot (-2x - 10) - (3^2 - 1) \cdot x}{3^2 + 1}\right) = \frac{2 \cdot 3 \cdot x + (3^2 - 1) \cdot (-2x - 10)}{3^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-12x + 60 - 8x}{10}\right) = \frac{6x - 16x - 80}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-20x + 60}{10}\right) = \frac{-10x - 80}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-2x + 6) = -x - 8.$$

Substituindo x por $\frac{-x+6}{2}$, obtemos

$$f\left(-2 \cdot \left(\frac{-x+6}{2}\right) + 6\right) = -\left(\frac{-x+6}{2}\right) - 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x - 6 + 6) = \frac{x+6}{2} - 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+6}{2} - 8 = \frac{x-10}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x - 5.$$

Resumidamente, as relações entre as funções $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$ e $f_3^{-1}(x) = -2x - 10$, cujos gráficos são simétricos em relação à reta $y = 3x$, serão dadas por :

$$f_3^{-1}\left(\frac{2kf(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)f(x)}{k^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3^{-1}\left(\frac{2\cdot 3\cdot f(x)-(3^2-1)\cdot x}{3^2+1}\right)=\frac{2\cdot 3\cdot x+(3^2-1)\cdot f(x)}{3^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3^{-1}\left(\frac{6f(x)-8x}{10}\right)=\frac{6x+8f(x)}{10},$$

e

$$f\left(\frac{2kf_3^{-1}(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)f_3^{-1}(x)}{k^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\cdot 3\cdot f_3^{-1}(x)-(3^2-1)\cdot x}{3^2+1}\right)=\frac{2\cdot 3\cdot x+(3^2-1)\cdot f_3^{-1}(x)}{3^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{6f_3^{-1}(x)-8x}{10}\right)=\frac{6x+8f_3^{-1}(x)}{10}.$$

Exemplo 44. Considere, agora, os pontos $A(2,1)$ e $B(4,2)$, pertencentes ao gráfico da função $f(x)=\log_2(x)$, e os pontos C e D, respectivamente simétricos aos pontos A e B em relação à reta $y=x$. Portanto, o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de f se e somente se $Q(c,d)=\left(\frac{2kb-(k^2-1)a}{k^2+1},\frac{2ka+(k^2-1)b}{k^2+1}\right)$ também pertencer ao gráfico de f_k^{-1}, com P e Q simétricos em relação à reta $y=kx$. Sendo assim, para encontrar as coordenadas do ponto C, $a=2$, $b=1$ e $k=1$. Substituindo, teremos

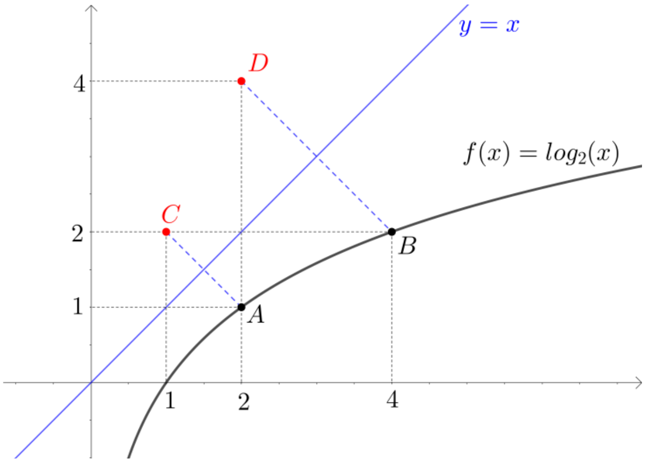
$$C=\left(\frac{2\cdot 1\cdot 1-(1^2-1)\cdot 2}{1^2+1},\frac{2\cdot 1\cdot 2+(1^2-1)\cdot 1}{1^2+1}\right)=(1,2).$$

Para encontrar as coordenadas do ponto D, $a=4$, $b=2$ e $k=1$. Substituindo, teremos

$$D=\left(\frac{2\cdot 1\cdot 2-(1^2-1)\cdot 4}{1^2+1},\frac{2\cdot 1\cdot 4+(1^2-1)\cdot 2}{1^2+1}\right)=(2,4).$$

A figura 171 ilustra os pontos $A(2,1)$ e $B(4,2)$ respectivamente simétricos aos pontos $C(1,2)$ e $D(2,4)$ em relação à reta $y=x$.

Figura 171 – Pontos A e B simétricos a C e D, em relação à reta $y = x$.



Fonte: O autor, 2020.

Com os pontos $C(1,2)$ e $D(4,2)$ podemos encontrar a função 1-inversa, ou seja, a função f_1^{-1} cujo gráfico é simétrico ao gráfico de f em relação à reta $y=1x$. Usaremos a relação

$$f_k^{-1}\left(\frac{2kf(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)f(x)}{k^2+1},$$

onde $k=1$ e $f(x)=log_2(x)$. Substituindo, temos:

$$f_1^{-1}\left(\frac{2\cdot 1\cdot \log_2(x)-(1^2-1)\cdot x}{1^2+1}\right)=\frac{2\cdot 1\cdot x+(1^2-1)\cdot \log_2(x)}{1^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1^{-1}\left(\frac{2log_2(x)}{2}\right)=\frac{2x}{2}\Rightarrow$$

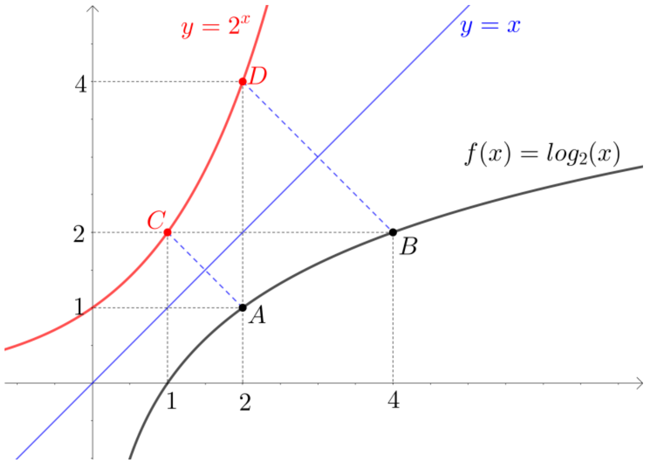
$$\Rightarrow f_1^{-1}(log_2(x))=x.$$

Substituindo x por 2^x, obtemos:

$$f_1^{-1}\left(\left(\log_2(2^x)\right)\right)=2^x \Rightarrow f_1^{-1}\left(\left(x\cdot\log_2 2\right)\right)=2^x \Rightarrow f_1^{-1}(x)=2^x.$$

Enfim, a função *1*-inversa de $f(x)=\log_2(x)$ é $f_1^{-1}(x)=2^x$, cujos gráficos são simétricos em relação à reta $y=1x$ (Figura 172).

Figura 172 – Gráfico da função 1-inversa de $f(x)=\log_2(x)$.



Fonte: O autor, 2020.

Este resultado era esperado, uma vez que as funções $f(x)=log_2(x)$ e $f_1^{-1}(x)=2^x$ (com $f: IR_+^* \rightarrow IR$) são inversas entre si, pois a imagem de $f(x)$ é igual ao domínio de $f_1^{-1}(x)$ e o domínio de $f(x)$ é igual à imagem de $f_1^{-1}(x)$, ou de maneira mais 'informal', trocando o x pelo y e vice –versa:

$$f(x)=\log_2(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\log_2(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\log_2(y).$$

Usando a definição de logaritmos, obtemos

$$y=2^x \Rightarrow f_1^{-1}(x)=2^x$$

Exemplo 45. Porém, nem sempre é fácil encontrar a expressão que representa a função *k*-invertível f_k^{-1}. Considere, agora, os pontos $\mathrm{A}(2{,}1)$ e $\mathrm{B}(4{,}2)$, pertencentes à função $f(x)=\log_2(x)$, e os pontos C e D, respectivamente simétricos aos pontos A e B em relação à reta $y=2x$. Portanto, o ponto $P(a,b)$ pertence ao gráfico de f se e somente se $Q(c,d)=\left(\frac{2kb-(k^2-1)a}{k^2+1},\frac{2ka+(k^2-1)b}{k^2+1}\right)$ também pertencer ao gráfico de f_k^{-1}, com P e Q simétricos em relação à reta $y=kx$. Sendo assim, para encontrar as coordenadas do ponto C, $a=2$, $b=1$ e $k=2$. Substituindo, teremos

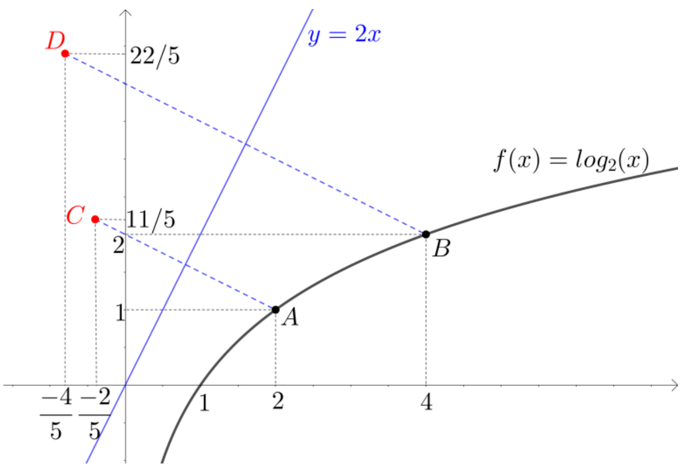
$$C=\left(\frac{2\cdot 2\cdot 1-(2^2-1)\cdot 2}{2^2+1},\frac{2\cdot 2\cdot 2+(2^2-1)\cdot 1}{2^2+1}\right)=\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right).$$

Para encontrar as coordenadas do ponto D, $a=4$, $b=2$ e $k=2$. Substituindo, teremos

$$D=\left(\frac{2\cdot 2\cdot 2-(2^2-1)\cdot 4}{2^2+1},\frac{2\cdot 2\cdot 4+(2^2-1)\cdot 2}{2^2+1}\right)=\left(-\frac{4}{5},\frac{22}{5}\right).$$

A figura 173 ilustra os pontos $\mathrm{A}(2{,}1)$ e $\mathrm{B}(4{,}2)$ respectivamente simétricos aos pontos $\mathrm{C}\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right)$ e $\mathrm{D}\left(-\frac{4}{5},\frac{22}{5}\right)$ em relação à reta $y=2x$.

Figura 173 – Pontos A e B simétricos a C e D, em relação à reta *y* = 2*x*.



Fonte: O autor, 2020.

Com os pontos $C\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right)$ e $D\left(-\frac{4}{5},\frac{22}{5}\right)$ podemos encontrar a função 2-inversa, ou seja, a função f_2^{-1} cujo gráfico é simétrico ao gráfico de *f* em relação à reta $y=2x$. Usamos novamente a relação

$$f_k^{-1}\left(\frac{2kf(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)f(x)}{k^2+1},$$

onde $k=2$ e $f(x)=\log_2(x)$. Substituindo, temos:

$$f_2^{-1}\left(\frac{2\cdot 2\cdot \log_2(x)-(2^2-1)\cdot x}{2^2+1}\right)=\frac{2\cdot 2\cdot x+(2^2-1)\cdot \log_2(x)}{2^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2^{-1}\left(\frac{4\log_2(x)-3x}{5}\right)=\frac{4x+3\log_2(x)}{5}.$$

Nos exemplos 43 e 44, foi relativamente fácil encontrar as expressões que representam as funções $f_k^{-1}(x)$. Porém, em $f_2^{-1}\left(\frac{4\log_2(x)-3x}{5}\right)=\frac{4x+3\log_2(x)}{5}$, perceba a complexidade de encontrar tal expressão.

Observe que neste trabalho estamos empenhados em esboçar gráficos e, no exemplo citado, sabemos que o gráfico de $f_2^{-1}(x)$ é simétrico ao gráfico de $f(x)=\log_2(x)$ em relação à reta $y=2x$. Nesse contexto, as coordenadas dos pontos do gráfico de $f_2^{-1}(x)$ podem ser escritas como o par de equações dadas como funções de uma terceira variável *t* (denominada parâmetro), ou seja,

$$x=f(t) \text{ e } y=g(t),$$

chamadas equações paramétricas. Cada valor de *t* determina um ponto (x,y), o qual podemos marcar no plano cartesiano. Quanto *t* varia, o ponto $(x,y)=(f(t),g(t))$ também varia, fazendo com que o gráfico de $f_2^{-1}(x)$ apareça. É o que chamamos de curva parametrizada, e suas equações denominadas equações paramétricas.

Sendo assim, para $f_2^{-1}\left(\frac{4\log_2(x)-3x}{5}\right)=\frac{4x+3\log_2(x)}{5}$, seu gráfico pode ser descrito como a curva parametrizada definida pelas equações paramétricas

$$x=\frac{4\log_2(t)-3t}{5}\Rightarrow x=\frac{-3t}{5}+\frac{4\log_2(t)}{5}\Rightarrow x=-0{,}6t+0{,}8\log_2(t),\ t>0$$

e

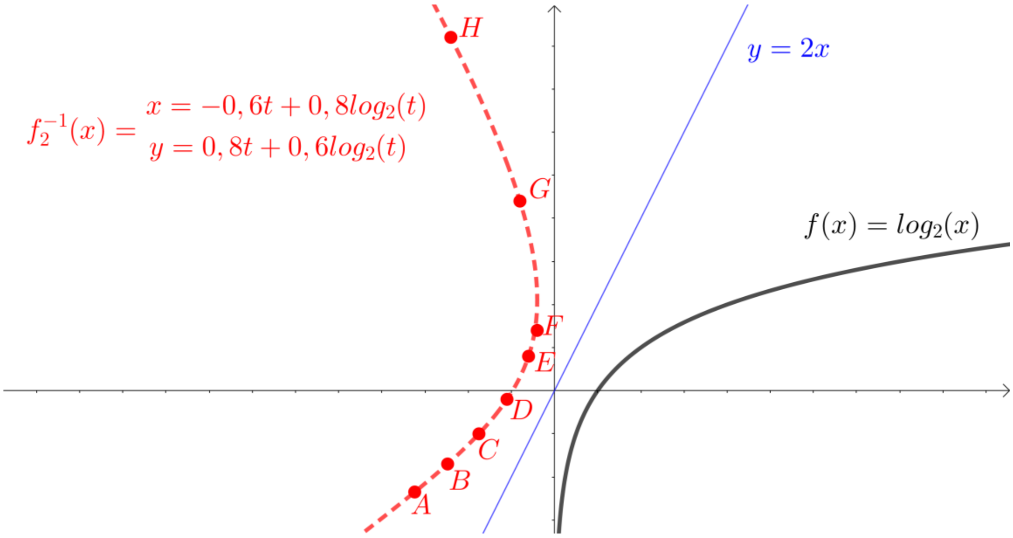
$$y=\frac{4t+3\log_2(t)}{5}\Rightarrow y=\frac{4t}{5}+\frac{3\log_2(t)}{5}\Rightarrow y=0{,}8t+0{,}6\log_2(t),\ t>0.$$

Cada valor de t fornece um ponto no gráfico de $f_2^{-1}(x)$, como mostrado na tabela abaixo:

Ponto	t	$x=-0{,}6t+0{,}8\log_2(t)$	$y=0{,}8t+0{,}6\log_2(t)$
A	$\frac{1}{16}$	$-3{,}2375$	$-2{,}35$
B	$\frac{1}{8}$	$-2{,}475$	$-1{,}7$
C	$\frac{1}{4}$	$-1{,}75$	$-1{,}0$
D	$\frac{1}{2}$	$-1{,}1$	$-0{,}2$
E	1	$-0{,}6$	$0{,}8$
F	2	$-0{,}4$	$1{,}4$
G	4	$-0{,}8$	$4{,}4$
H	8	$-2{,}4$	$8{,}2$

Por exemplo, se $t=1$, então $x=-0{,}6$ e $y=0{,}8$, e assim o ponto correspondente é $E(-0{,}6;0{,}8)$. Na figura 174 marcamos os pontos (x,y) determinados pelos valores dos parâmetros da tabela anterior e os unimos para, enfim, esboçar o gráfico de $f_2^{-1}(x)$.

Figura 174 – Gráfico da função 2-inversa de $f(x)=\log_2(x)$ não corresponde à grafico de função.



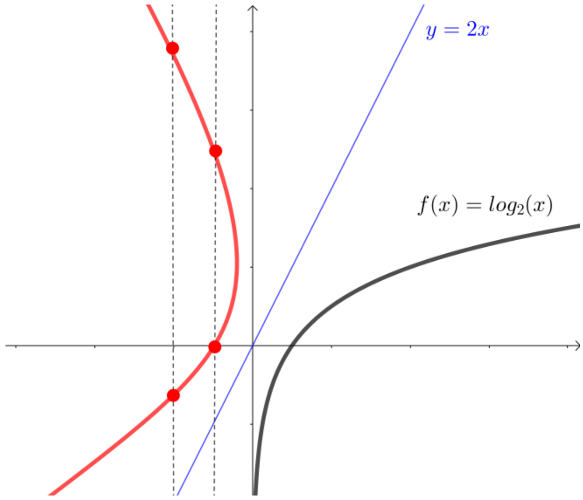
Fonte: O autor, 2020.

Neste ultimo exemplo, vemos que a função $f(x)=\log_2(x)$ é 1-invertível, porém não é 2-invertível, pois o gráfico de $f_2^{-1}(x)$ não é gráfico de uma função, pois cada elemento *x* do domínio deve fazer correspondência com exatamente um elemento do contradomínio – chamado de imagem de *x* pela função – e, a partir disso, podemos constatar que a reta vertical que passa por um ponto qualquer do domínio da função deverá ter exatamente um ponto em comum com o gráfico da função. Este é o chamado critério da vertical:

No plano de coordenadas cartesianas, uma curva é o gráfico de uma função se, e somente se, toda reta vertical intersecta essa curva em nenhum ou em exatamente um ponto.

De fato, segundo o critério da vertical, o gráfico de $f_2^{-1}(x)$ não pode ser de uma função, pois existem retas verticais que intersectam a curva em mais de um ponto (Figura 175). Então, a função $f(x)=\log_2(x)$ não é *k*-invertível para *k* = 2., mas é *k*-invertível para *k* = 1, ou seja, $f_1^{-1}(x)=2^x$, conforme o exemplo 45.

Figura 175 – Gráfico da função 2-inversa de $f(x) = \log_2(x)$ não corresponde a um gráfico de função.



Fonte: O autor, 2020.

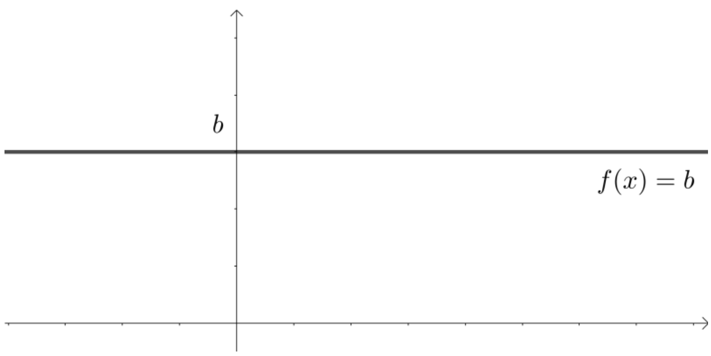
Existe outro critério geométrico que permite descobrir se uma função é invertível. Trata-se do critério da horizontal:

Se existe uma reta horizontal r que intersecta o gráfico da função f, então a interseção do gráfico de f com a reta horizontal r é um conjunto unitário.

De modo equivalente, com este critério da horizontal, estamos determinando se uma função é ou não injetora, onde para valores diferentes do domínio de uma função f teremos valores diferentes para suas imagens (lembre-se que uma função é invertível se for bijetora).

Exemplo 46. Vamos observar a função constante $f(x) = b$, $\forall x \in IR$, e o seu respectivo gráfico (Figura 176).

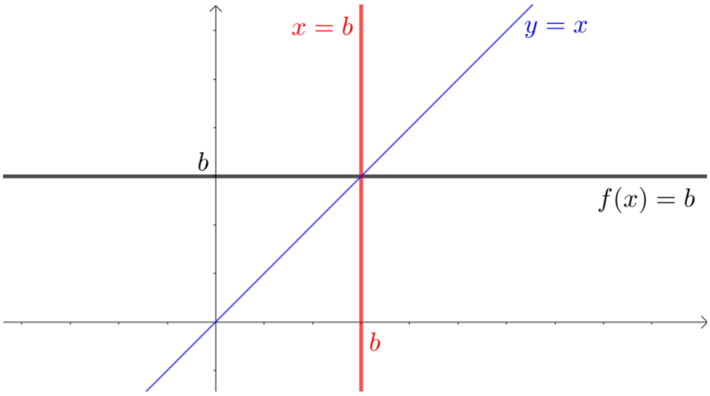
Figura 176 – Gráfico da função constante $f(x) = b$.



Fonte: O autor, 2020.

Sabemos que o gráfico de $f(x) = b$ é uma reta horizontal. Consequentemente, o gráfico simétrico ao gráfico de $f(x)$ em relação à reta $y = x$, será uma reta vertical de equação $x = b$ (Figura 177).

Figura 177 – Gráfico simétrico ao gráfico de $f(x) = b$, em relação à reta $y = x$.



Fonte: O autor, 2020.

Pelo critério da vertical observado anteriormente, constatamos que o gráfico de $x = b$ não corresponde a gráfico de uma função. Sendo assim, a função $f(x) = b$ não é k-invertível quando $k = 1$. Entretanto, para $k = 2$, teremos:

$$f_k^{-1}\left(\frac{2kf(x)-(k^2-1)x}{k^2+1}\right)=\frac{2kx+(k^2-1)f(x)}{k^2+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_2^{-1}\left(\frac{2\cdot 2\cdot b-(2^2-1)x}{2^2+1}\right)=\frac{2\cdot 2\cdot x+(2^2-1)\cdot b}{2^2+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_2^{-1}\left(\frac{4b-3x}{5}\right)=\frac{4x+3b}{5}.$$

Substituindo x por $\dfrac{-5x+4b}{3}$, obtemos:

$$f_2^{-1}\left(\frac{4b-3\left(\frac{-5x+4b}{3}\right)}{5}\right)=\frac{4\left(\frac{-5x+4b}{3}\right)+3b}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2^{-1}\left(\frac{4b-(-5x+4b)}{5}\right)=\frac{\frac{-20x+16b}{3}+3b}{5}\Rightarrow$$

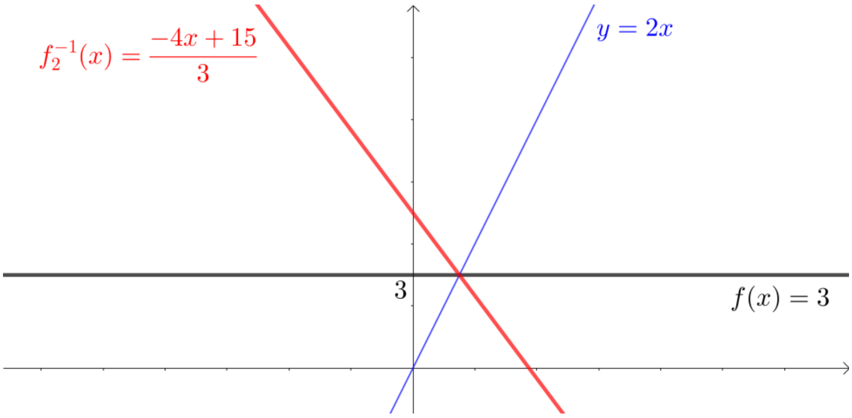
$$\Rightarrow f_2^{-1}\left(\frac{4b+5x-4b}{5}\right)=\frac{\frac{-20x+16b+9b}{3}}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2^{-1}(x)=\frac{-20x+25b}{15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2^{-1}(x)=\frac{-4x+5b}{3}.$$

Portanto, a função $f(x) = b$ é k-invertível para $k = 2$, e sua equação será dada por $f_2^{-1}(x)=\frac{-4x+5b}{3}$. Supondo $b = 3$ (Figura 178):

Figura 178 – Gráfico simétrico ao gráfico de $f(x) = 3$, em relação à reta $y = 2x$.

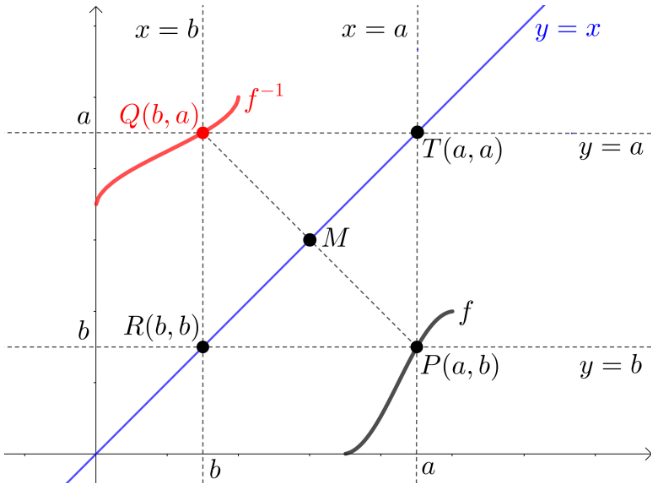


Fonte: O autor, 2020.

Diante dos expostos, para que uma função seja k-invertível, é necessário que sua função k-inversa seja, de fato, uma função, ou seja, obedeça ao critério da vertical. Vamos observar o exemplo das funções inversas.

Para que uma função f possua inversa, é necessário que f seja bijetora, onde deve ser obedecido o critério da horizontal (obviamente o critério da vertical também deve ser obedecido). Como visto anteriormente, o gráfico da inversa de f – chamada de f^{-1} – será simétrico ao gráfico de f com relação à reta $y = x$. Se considerarmos que existe um conjunto infinito de retas horizontais $y = b$, b real, que intersectam o gráfico de f em somente um ponto do gráfico de f, o gráfico de f^{-1}, por ser simétrico ao gráfico de f em relação à reta $y = x$, conterá um conjunto infinito de retas verticais $x = b$, b real, que interceptarão o seu gráfico em somente um ponto, o que valida o critério da vertical. Analogamente, se considerarmos um conjunto infinito de retas verticais $x = a$, a real, que intersectam o gráfico de f em somente um ponto (critério da vertical), o gráfico de f^{-1} conterá um conjunto infinito de retas horizontais $y = a$, a real que intersectarão o seu gráfico em somente um ponto, o que corrobora o critério da horizontal (Figura 179).

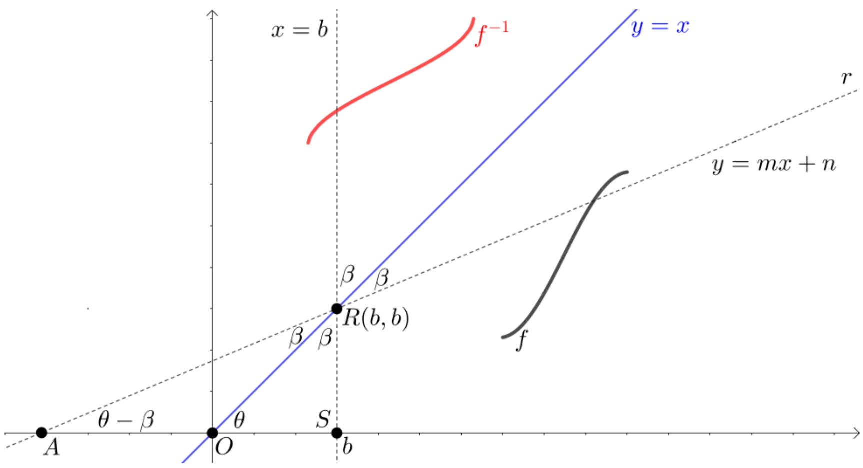
Figura 179 – Critérios da horizontal e vertical para função 1-invertível.



Fonte: O autor, 2020.

Observe a figura 180 e vamos considerar as retas $x = b$, $y = x$ e $y = mx + n$, concorrentes no ponto R. A reta vertical $x = b$ indica o critério da vertical para a função f^{-1}, portanto temos que descobrir qual o formato da reta de equação $y = mx + n$, que deverá ser simétrica à reta $x = b$ com relação à reta $y = x$.

Figura 180 – Critérios da horizontal e vertical para função 1-invertível.



Fonte: O autor, 2020.

Sabemos que o coeficiente angular da reta $y = x$ é igual à $tg\ \theta = 1$. Como o ponto R pertence simultaneamente às retas $x = b$ e $y = x$, suas coordenadas serão R(b, b). Considerando o ângulo $O\hat{R}S = \beta$ do triângulo retângulo ORS, a concorrência das retas $x = b$, $y = x$ e $y = mx + n$, e a simetria em relação à reta $y = x$ das retas $x = b$ e $y = mx + n$, temos a igualdade entre os ângulos β indicados na figura 180.

Como o ponto R tem coordenadas iguais a b, e o cateto OS do triângulo ORS tem medida b, então o cateto RS tem medida igual a b e o triângulo retângulo ORS é isósceles. Sendo assim, $tg\ \beta = 1$.

Observe o triângulo AOB. Seu ângulo externo $R\hat{O}S$ mede θ, que é igual à soma dos ângulos não adjacentes $O\hat{A}R$ e $O\hat{R}A$. Portanto:

$$R\hat{O}S = O\hat{A}R + O\hat{R}A \Rightarrow \theta = O\hat{A}R + \beta \Rightarrow O\hat{A}R = \theta - \beta\ .$$

Perceba que $tg(\theta - \beta)$ é o coeficiente angular da reta de equação $y = mx + n$, que é igual a

$$tg(\theta - \beta) = \frac{tg\ \theta - tg\ \beta}{1 + tg\ \theta \cdot tg\ \beta} = \frac{1-1}{1+1\cdot 1} = \frac{0}{2} \Rightarrow tg(\theta - \beta) = 0\,.$$

Com o ponto R(b, b) e $tg(\theta - \beta) = m = 0$, podemos encontrar a equação da reta $y = mx + n$:

$$y = mx + n \Rightarrow b = 0 \cdot b + n \Rightarrow n = b\,.$$

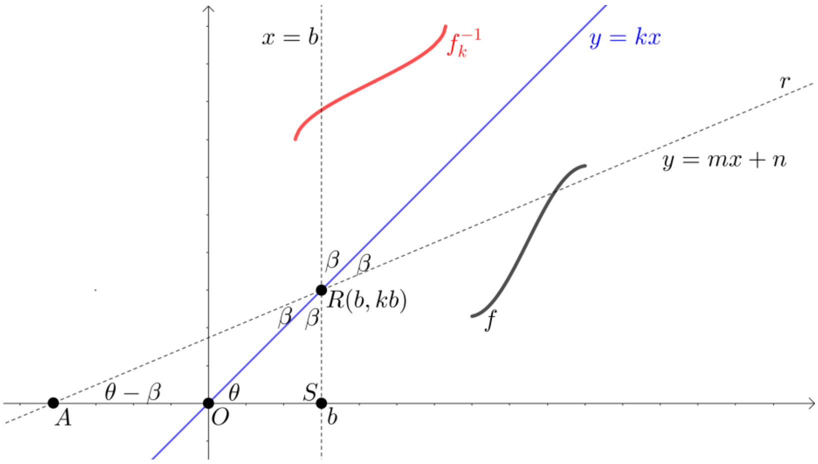
Como esperado, a equação da reta r é dada por

$$y = 0 \cdot x + b \Rightarrow y = b\,,$$

que é a reta simétrica à reta $x = b$ em relação à reta $y = x$. Por este motivo, a reta $y = b$ também intersecta o gráfico da função f em somente um ponto, uma vez que a reta $x = b$ intersecta em somente um ponto o gráfico de f^{-1}.

Podemos, a partir destes exemplos, adotar critérios para saber se uma função real de variável real pode ser *k*-invertível. Para que exista a função *k*-inversa f_k^{-1}, é necessário que obedeça ao critério da vertical. Portanto, se considerarmos que existe um conjunto de retas verticais $x = b$ que intersectam o gráfico de f_k^{-1} em somente um ponto, teremos que o gráfico de *f*, por ser simétrico ao gráfico de f_k^{-1} em relação à reta $y = kx$, conterá um conjunto infinitos de retas de equação $y = mx + n$ que intersctarão o seu gráfico em somente um ponto (Figura 181).

Figura 181 – Critérios da horizontal e vertical para função *k*-invertível.



Fonte: O autor, 2020.

Procedendo de maneira análoga à demonstração anterior, considere a figura 8.25 e as retas $x = b$, $y = kx$ e $y = mx + n$, concorrentes no ponto R. A reta vertical $x = b$ indica o critério da vertical para a função f_k^{-1}, portanto temos que descobrir qual o formato da reta de equação $y = mx + n$, que deverá ser simétrica à reta $x = b$ com relação à reta $y = kx$.

Sabemos que o coeficiente angular da reta $y = kx$ é igual à $tg\ \theta = k$. Como o ponto R pertence simultaneamente às retas $x = b$ e $y = kx$, suas coordenadas serão R(*b*, *kb*). Considerando o ângulo $O\hat{R}S = \beta$ do triângulo retângulo ORS, a concorrência das retas $x = b$, $y = kx$ e $y = mx + n$, e a simetria em relação à reta $y = kx$ das retas $x = b$ e $y = mx + n$, temos a igualdade entre os ângulos β indicados na figura 6.25.

Como o ponto R tem coordenadas (*b*, *kb*), e o cateto OS do triângulo ORS tem medida *b*, então o cateto RS tem medida igual a *kb*, onde obtemos $tg\ \beta = \dfrac{1}{k}$.

Observe o triângulo AOR. Seu ângulo externo $R\hat{O}S$ mede θ, que é igual à soma dos ângulos não adjacentes $O\hat{A}R$ e $O\hat{R}A$. Portanto:

$$R\hat{O}S = O\hat{A}R + O\hat{R}A \Rightarrow \theta = O\hat{A}R + \beta \Rightarrow O\hat{A}R = \theta - \beta \text{ .}$$

Perceba que $tg(\theta - \beta)$ é o coeficiente angular da reta de equação $y = mx + n$, que é igual a

$$tg(\theta - \beta) = \frac{tg\ \theta - tg\ \beta}{1 + tg\ \theta \cdot tg\ \beta} = \frac{k - \frac{1}{k}}{1 + k \cdot \frac{1}{k}} = \frac{\frac{k^2 - 1}{k}}{2} \Rightarrow tg(\theta - \beta) = \frac{k^2 - 1}{2k} \text{ .}$$

Com o ponto R(b, kb) e $tg(\theta - \beta) = m = \dfrac{k^2 - 1}{2k}$, podemos encontrar a equação da reta $y = mx + n$:

$$y = mx + n \Rightarrow kb = \left(\frac{k^2 - 1}{2k}\right) \cdot b + n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow kb \cdot 2k = bk^2 - b + 2kn \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2bk^2 - bk^2 = -b + 2kn \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bk^2 + b = 2kn \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{b(k^2 + 1)}{2k} \text{ .}$$

Portanto, a equação da reta $y = mx + n$ é dada por

$$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{(k^2 - 1)}{2k} x + \frac{b(k^2 + 1)}{2k} \text{ ,}$$

que é a reta simétrica à reta vertical $x = b$ em relação à reta $y = kx$. Por este motivo, a reta $y = \dfrac{(k^2 - 1)}{2k} x + \dfrac{b(k^2 + 1)}{2k}$ também intersecta o gráfico da função f em somente um ponto, uma vez que a reta $x = b$ intersecta em somente um ponto o gráfico de f^{-1}.

De maneira geral, para que uma função f seja invertível, nenhuma reta horizontal deve encontrar o gráfico de f em mais de um ponto, além do fato de que nenhuma reta vertical simétrica a esta reta horizontal – em relação à reta $y = x$ – deve encontrar o gráfico de sua inversa f^{-1} em mais de um ponto. De maneira semelhante, para que uma função f seja k-invertível, nenhuma reta da forma

$$y = \frac{(k^2 - 1)}{2k} x + \frac{b(k^2 + 1)}{2k}$$

– simétrica à reta vertical $x = b$, b real, em relação à reta $y = kx$ – deve encontrar o gráfico de f em mais de um ponto, onde pela função k-inversa f_k^{-1} passam infinitas retas verticais do formato $x = b$, b real, que encontram o gráfico de f_k^{-1} em somente um ponto.

Com estas ponderações, podemos notar que na reta $y = \frac{(k^2 - 1)}{2k} x + \frac{b(k^2 + 1)}{2k}$ a constante $\frac{b(k^2 + 1)}{2k}$ pode ser qualquer número real, pois b é um número real qualquer, e $\frac{(k^2 + 1)}{2k}$ é diferente de zero. Então, podemos constatar que o critério para que uma função $y = f(x)$ seja k-invertível é que nenhuma reta com inclinação $\frac{(k^2 - 1)}{2k}$ encontre o gráfico de $f(x)$ em mais de um ponto.

7 O SOFTWARE GEOGEBRA

A utilização das tecnologias tem possibilitado aos professores de Matemática inúmeras possibilidades didáticas com o intuito de favorecer a aprendizagem de conceitos matemáticos de forma mais eficiente e prazerosa. No contexto tecnológico atual não se pode permitir que as aulas sejam as mesmas ministradas há décadas atrás, que se utilizava somente giz e lousa. Porém ainda hoje, na educação básica, é comum verificarmos a construção de gráficos como objeto de ensino que parece estático e não suscetíveis à interação dinâmica de seus coeficientes, ao invés de serem trabalhadas como atividade para analisar o comportamento do gráfico das funções. Com o subsídio do software livre Geogebra, o tempo aplicado com a simples construção de gráficos pode ser otimizado com atividades que exaltem a reflexão e a análise da variação do comportamento das funções.

7.1 Aplicação do software Geogebra na função afim

O objetivo desta seção é analisar o comportamento do gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ quando variamos um dos seus coeficientes e mantemos o outro constante. Porém, devemos lembrar que o gráfico de tal função é uma reta não vertical, se $a \neq 0$.

Demonstração: Considere a função afim dada por $f(x) = ax + b, a \neq 0$, e três pontos distintos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pertencentes ao gráfico de *f(x)*. Para demonstrar que o gráfico de *f(x)* é uma reta, vamos provar que os pontos A, B e C estão alinhados. Como os pontos fazem parte do gráfico da função, podemos substituir os valores de *x* e *y* na lei de formação. Assim:

$$y_A = ax_A + b \quad \text{(I)} \qquad y_B = ax_B + b \quad \text{(II)} \qquad y_C = ax_C + b \quad \text{(III)}$$

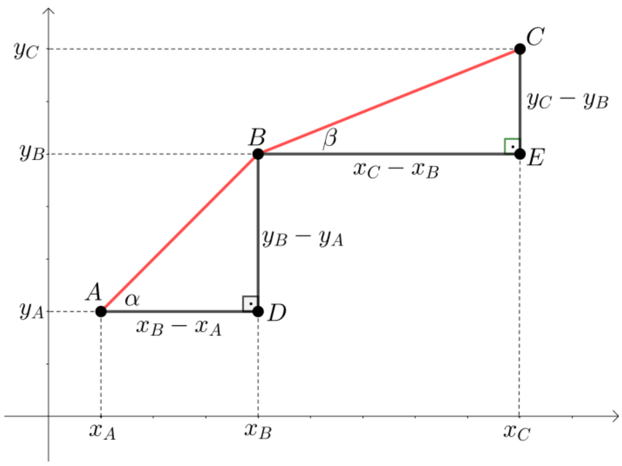
Fazendo (III) – (II) e (II) – (I), temos:

$$y_C - y_B = a(x_C - x_B) \Rightarrow a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \text{ e } y_B - y_A = a(x_B - x_A) \Rightarrow a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Portanto, $\dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (IV).

Agora, vamos supor que A, B e C não estejam alinhados, como mostra a figura 182. Observe que $\overline{CE} = y_C - y_B$, $\overline{BE} = x_C - x_B$, $\overline{BD} = y_B - y_A$ e $\overline{AD} = x_B - x_A$. Substituindo em (IV), temos $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, ou seja, os lados correspondentes dos triângulos BEC e ADB são proporcionais. Além disso, os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{E}$ são retos. Então os triângulos BEC e ADB são semelhantes e os ângulos α e β têm mesma medida e, portanto, os pontos A, B e C estão alinhados. Logo, o gráfico de uma função afim é uma reta.

Figura 182 – Demonstração do alinhamento dos pontos A, B e C.



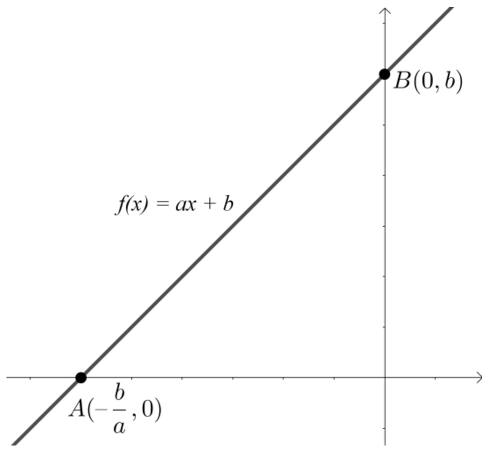
Fonte: O autor, 2020.

Como o gráfico de uma função afim é uma reta, precisamos determinar apenas dois pontos quaisquer pertencentes ao gráfico da função para traçá-lo. Sendo assim, vamos estudar como os coeficientes *a* e *b* influenciam na posição do gráfico da função afim no plano cartesiano.

O coeficiente *b* é denominado valor inicial ou coeficiente linear. Ele é a ordenada do ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo *y*, pois para $x = 0$, $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Dessa forma, temos o ponto $B(0, b)$. Também sabemos que a raiz de uma função *f* é um valor de $x \in D_f$ tal que *f(x) = 0*, ou seja, é o valor de *x* que anula a função. Para o caso da função afim dada por $f(x) = ax + b$, basta resolver a equação $ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$. Dessa forma, temos o ponto $A(\frac{-b}{a}, 0)$. Vamos considerar os seguintes casos:

1º caso: Quando a > 0 e *b > 0*, então $x = \frac{-b}{a} < 0$, ou seja, reta inclinada à direita (Figura 183).

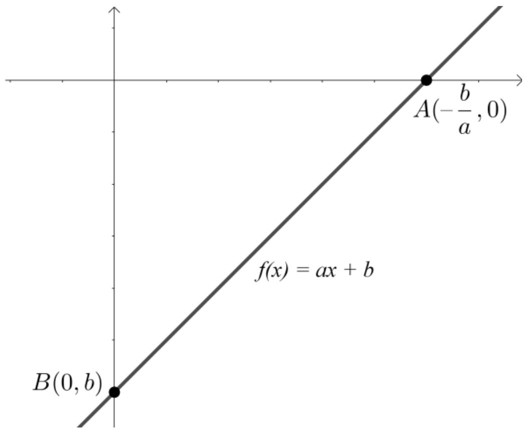
Figura 183 – Gráfico da função afim com *a* > 0 e *b* > 0.



Fonte: O autor, 2020.

2º caso: Quando a > 0 e *b < 0*, então $x = \frac{-b}{a} > 0$, ou seja, reta inclinada à direita (Figura 184).

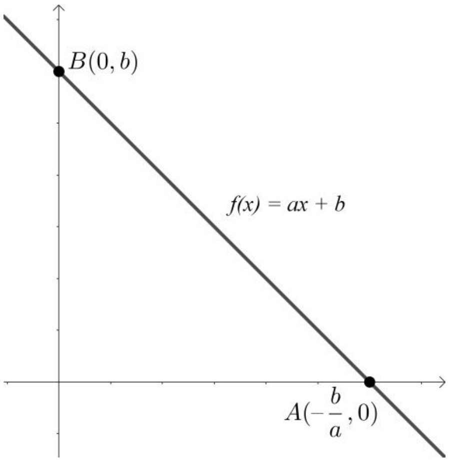
Figura 184 – Gráfico da função afim com *a* > 0 e *b* < 0.



Fonte: O autor, 2020.

3º caso: Quando a < 0 e $b > 0$, então $x = \frac{-b}{a} > 0$, ou seja, reta inclinada à esquerda (Figura 185).

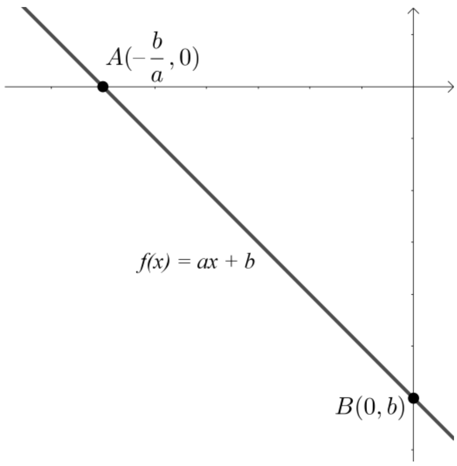
Figura 185 – Gráfico da função afim com $a < 0$ e $b > 0$.



Fonte: O autor, 2020.

4º caso: Quando a < 0 e $b < 0$, então $x = \frac{-b}{a} < 0$, ou seja, reta inclinada à esquerda (Figura 186).

Figura 186 – Gráfico da função afim com $a < 0$ e $b < 0$.



Fonte: O autor, 2020.

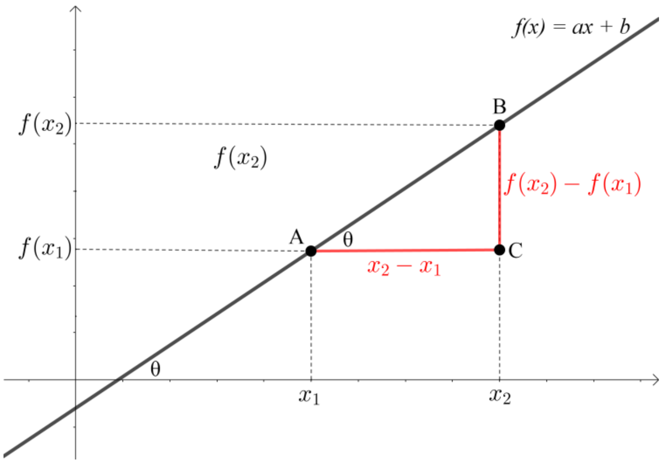
Perceba que nos 1º e 2º casos, quando *a > 0*, o gráfico de *f(x)* será uma reta inclinada à direita, enquanto que nos 3º e 4º casos, quando *a < 0*, será uma reta inclinada à esquerda.

Já o coeficiente *a* mostra como a variação de *f(x)* se relaciona com a variação de *x*, por isso é chamado de taxa de variação, declividade ou coeficiente angular. Considere os pontos $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$. Como os pontos fazem parte do gráfico da função, podemos substituir os valores de *x* e *y* na lei de formação. Assim:

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e } f(x_2) = ax_2 + b.$$

Considere o ângulo θ que caracteriza a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (Figura 187).

Figura 187 – Gráfico da função afim com *a* < 0 e *b* < 0.



Fonte: O autor, 2020.

Então, no triângulo ABC, temos $tg\theta = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = a$, ou seja, o coeficiente *a* corresponde à tangente do ângulo que o gráfico de *f(x)* faz com o eixo *x* no sentido anti-horário. Com isso, temos as hipóteses a respeito dos sinais de *a* e *b*:

- Quando $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, temos

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \text{ e } x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_2 > x_1$$

ou

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \text{ e } x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow x_2 < x_1$$

Então, quando *a > 0*, a função *f(x)* é crescente e seu gráfico é uma linha reta inclinada à direita.

- Quando $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, temos

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \text{ e } x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow x_2 < x_1$$

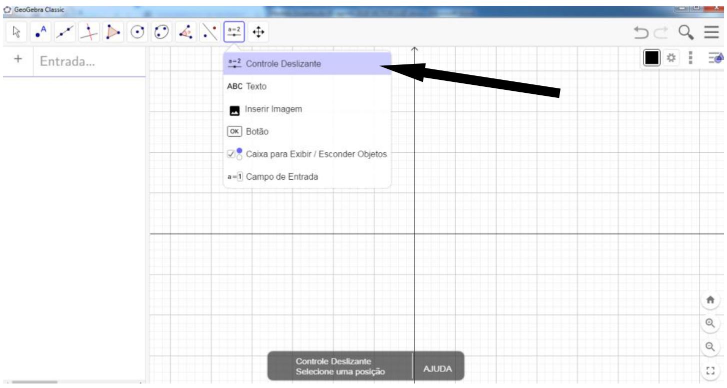
ou

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \text{ e } x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_2 > x_1$$

Então, quando *a < 0*, a função *f(x)* é decrescente e seu gráfico é uma linha reta inclinada à esquerda.

Veremos agora como podemos utilizar o software Geogebra em uma aplicação envolvendo função afim. Descreveremos a seguir, o roteiro de como podemos montar essa aplicação. Para isso, vamos criar dois controles deslizantes. Clique na ferramenta ‘controle deslizante’ na parte superior da janela de visualização para criar o controle deslizante dos parâmetros *a* e *b*, conforme a figura 188.

Figura 188 – Controle deslizante do Geogebra.

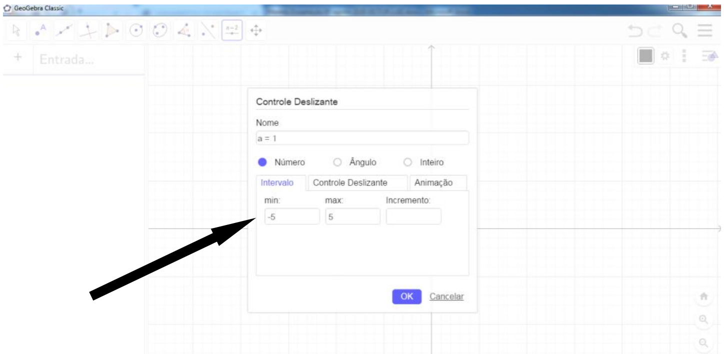


Fonte: O autor, 2020.

Clicando na janela de visualização onde deve ficar o controle deslizante *a*, aparecerá um quadro com vários dados, entre eles a letra *a* e o valor máximo 5 e o valor mínimo −5 (já inseridos automaticamente) e outros parâmetros que devem ser observados (Figura 189).

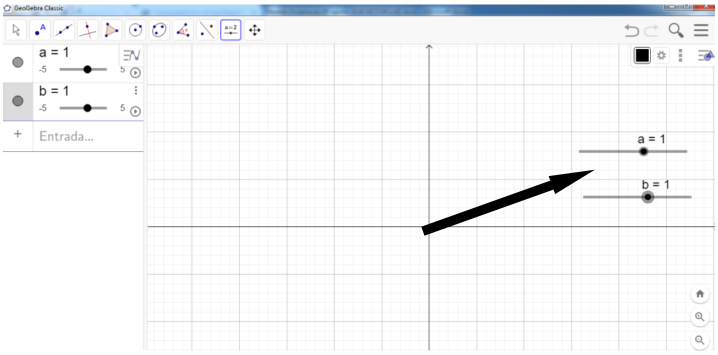
Clicando em aplicar, aparecerá o controle deslizante *a*, e clicando novamente em outro lugar da janela de visualização, aparecerá o controle deslizante *b* (Figura 190).

Figura 189 – Controle deslizante do Geogebra.



Fonte: O autor, 2020.

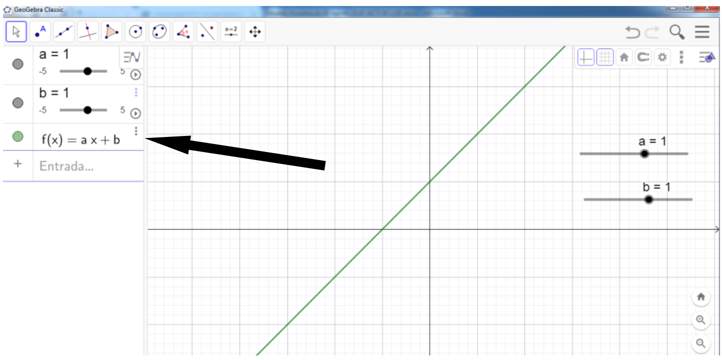
Figura 190 – Controle deslizante dos parâmetros *a* e *b* de $f(x) = ax + b$.



Fonte: O autor, 2020.

Vamos para o campo de entrada onde digitamos *f(x) = ax + b* e clique enter, aparecendo na janela de visualização o gráfico da função afim (Figura 191).

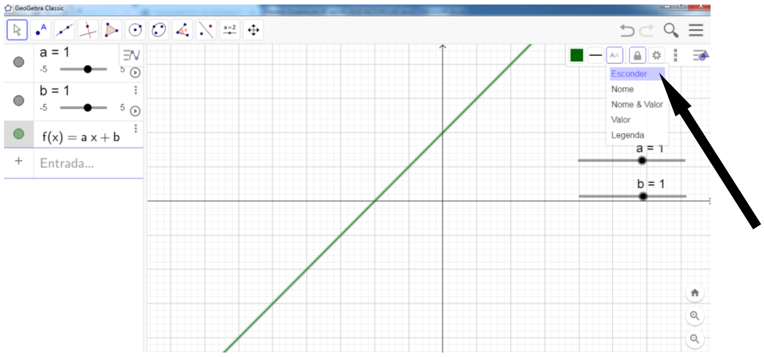
Figura 191 – Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ usando controles deslizantes .



Fonte: O autor, 2020.

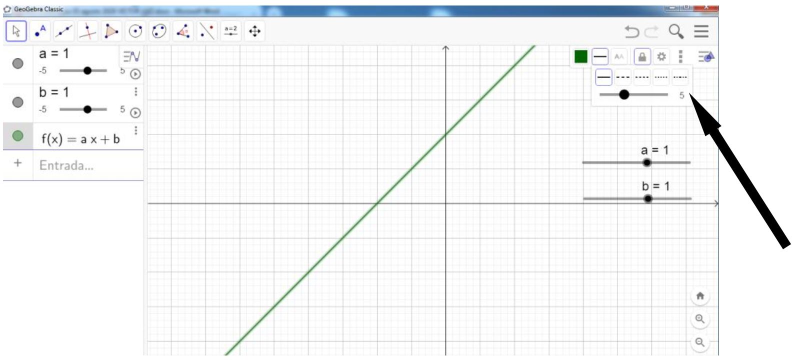
Vamos selecionar o gráfico e ocultar o rótulo (Figura 192), que é o nome dado pelo usuário à função na linha de entrada, escolhendo em seguida uma linha mais grossa (Figura 193) e pintando-a de azul (Figura 194). Feito isso, temos o gráfico da função afim desenhado na janela de visualização.

Figura 192 – Ocultação do rótulo do gráfico da função $f(x) = ax + b$.



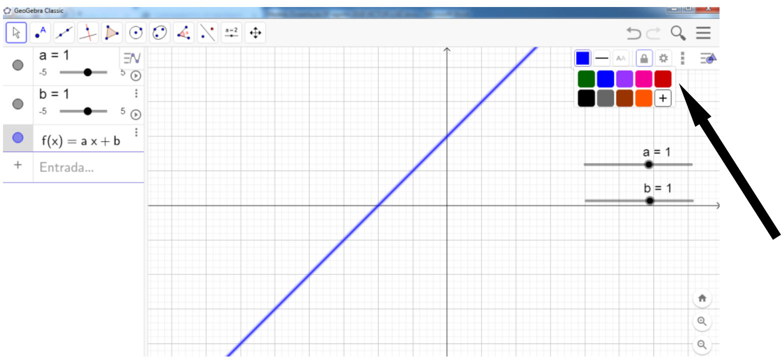
Fonte: O autor, 2020.

Figura 193 – Escolha da espessura da linha do gráfico da função $f(x) = ax + b$.



Fonte: O autor, 2020.

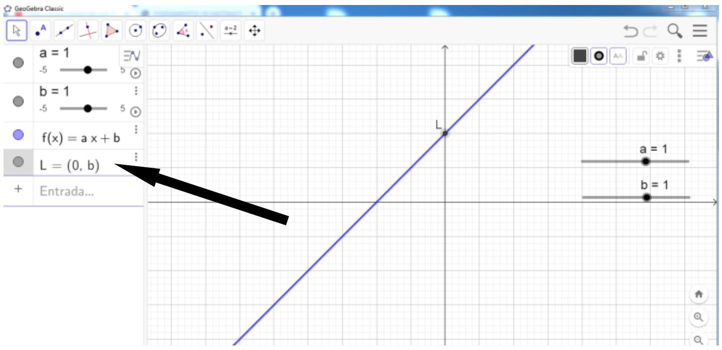
Figura 194 – Escolha da cor da linha do gráfico da função $f(x) = ax + b$.



Fonte: O autor, 2020.

Agora vamos criar o ponto L(0, *b*), que é o coeficiente linear de *f(x)* = *ax* + *b* e cujo gráfico toca o eixo *y*. Digite na linha de entrada as suas coordenadas, conforme ilustrado na figura 195.

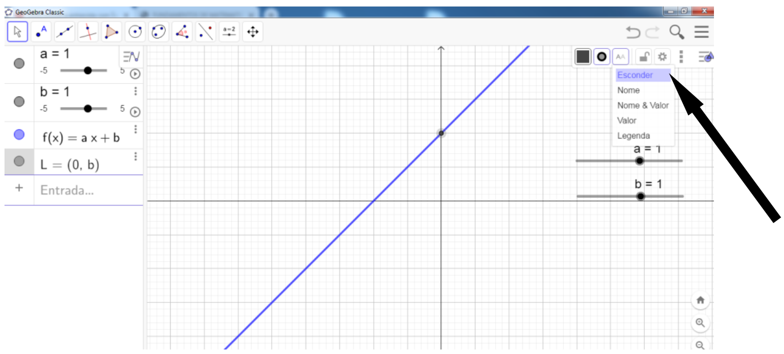
Figura 195 – Criação do ponto L(0, *b*) do gráfico da função *f*(*x*) = *a*x + *b* .



Fonte: O autor, 2020.

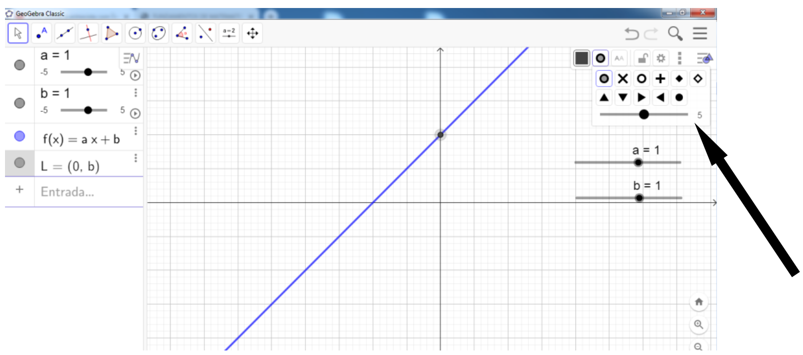
Oculte o rótulo (Figura 196) e coloque esse ponto um pouco maior (Figura 197) e pinte-o de preto (Figura 198).

Figura 196 – Ocultação do rótulo do ponto L(0, *b*) do gráfico da função *f*(*x*) = *a*x + *b* .



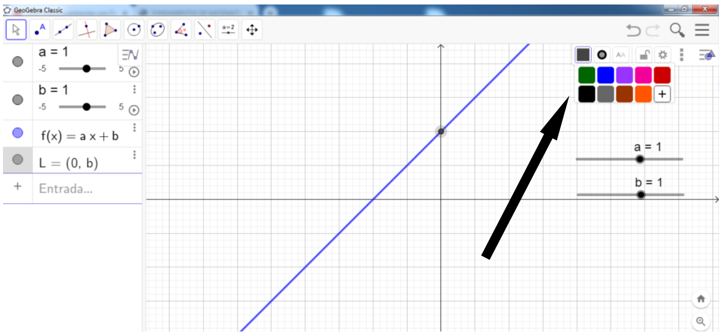
Fonte: O autor, 2020.

Figura 197 – Aumento do tamanho do ponto L(0, *b*) do gráfico da função *f*(*x*) = *a*x + *b* .



Fonte: O autor, 2020.

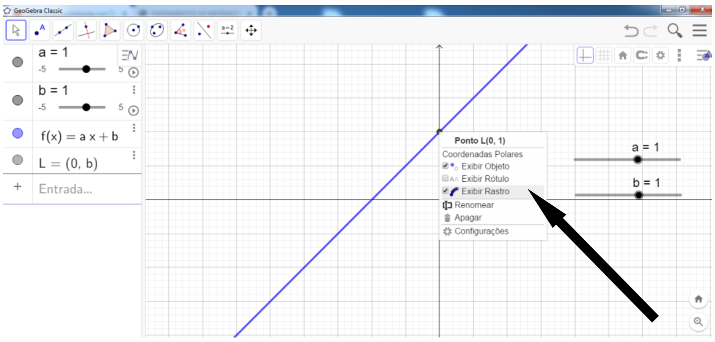
Figura 198 – Escolha da cor do ponto L(0, *b*) do gráfico da função *f*(*x*) = *a*x + *b* .



Fonte: O autor, 2020.

A ideia agora é variar um desses parâmetros e analisar o comportamento da reta e do ponto L. Para isso, clique com o botão direito do mouse no ponto L e habilite o rastro, como indica a figura 199.

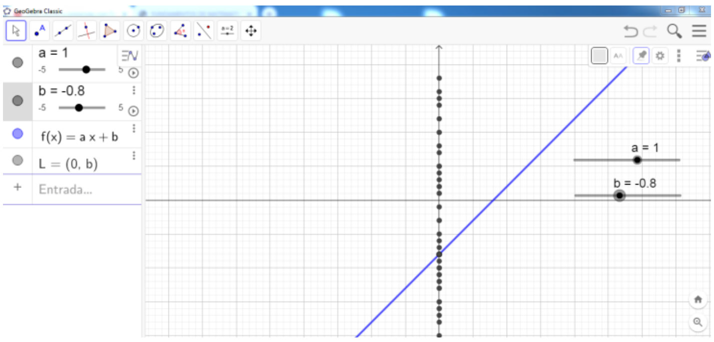
Figura 199 – Habilitando o rastro do gráfico da função *f*(*x*) = *a*x + *b* .



Fonte: O autor, 2020.

Vamos começar variando o parâmetro *b*. É simples perceber que a reta sofre um movimento vertical, isto é, o ponto L da reta ‘sobe e desce’ pela reta vertical de equação $x = 0$ (Figura 200).

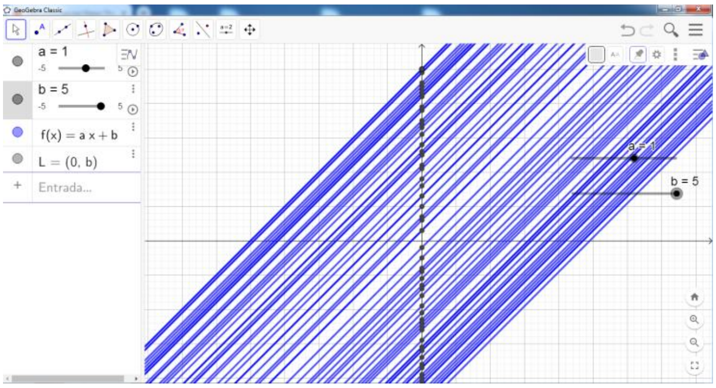
Figura 200 – Variação do parâmetro *b* do gráfico de *f*(*x*) = *a*x + *b* .



Fonte: O autor, 2020.

Como o coeficiente $a = tg\theta$ não varia, teremos retas paralelas ao gráfico de *f(x)* = *ax* + *b*, passando pelos pontos de coordenadas $(0, b+k)$, $k \in \Re$. Habilitando o rastro para a reta, percebemos esse fato com mais clareza (Figura 201).

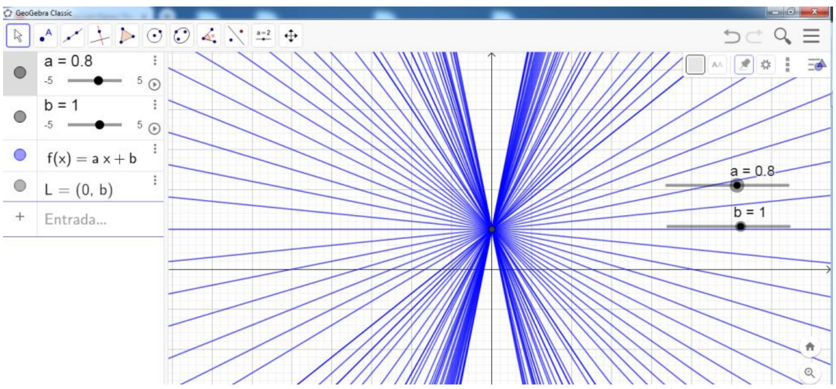
Figura 201 – Variação do parâmetro *b* do gráfico de *f*(*x*) = *a*x + *b* .



Fonte: O autor, 2020.

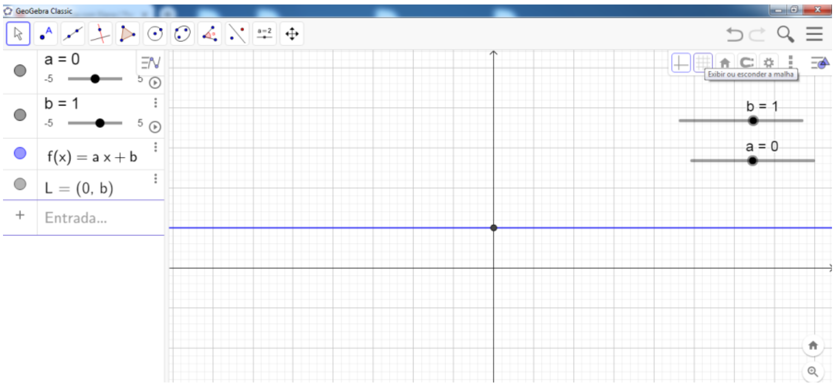
Vamos analisar o que acontece quando variamos o parâmetro *a*, fixando *b*. Mantenha os rastros da reta e do ponto. Utilizando o controle deslizante do coeficiente *a* (que está limitado no intervalo [–5, 5]), observamos que o gráfico da função afim sofre uma rotação em torno do ponto L (Figura 202). Devemos atentar para o fato de que limitamos o valor de *a* em [–5, 5] , no qual teremos *a* = *0*. Neste caso, teremos a função constante *f(0)* = *b*, cujo gráfico será uma reta horizontal, paralela ao eixo das abscissas (Figura 203).

Figura 202 – Variação do parâmetro *a* do gráfico de *f*(*x*) = *a*x + *b* .



Fonte: O autor, 2020.

Figura 203 – Gráfico de $f(x) = a\text{x} + b$ quando $a = 0$.

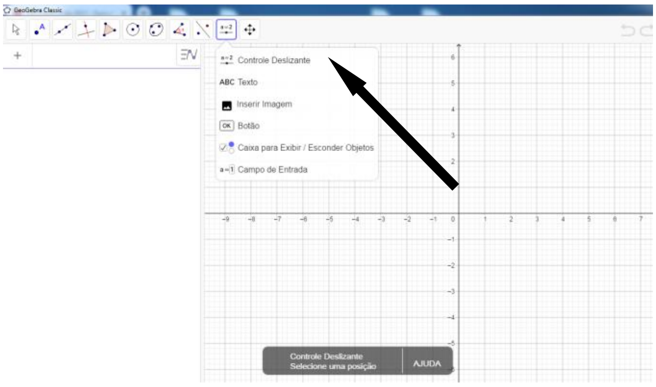


Fonte: O autor, 2020.

7.2 Aplicação do software Geogebra na função quadrática

O objetivo desta seção é analisar o comportamento do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando variamos um dos seus coeficientes e mantemos os outros dois constantes, e também analisar o comportamento do vértice V da parábola. Para isso, vamos criar três controles deslizantes. Clicamos na ferramenta 'controle deslizante' na parte superior da janela de visualização para criar o controle deslizante do parâmetro *a*, conforme a figura 204.

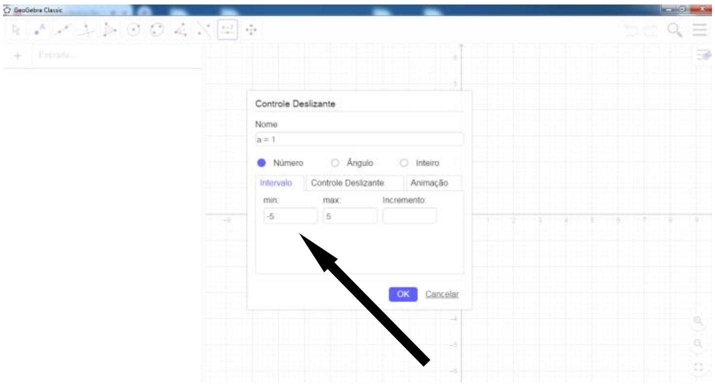
Figura 204 – Controle deslizante para o parâmetro *a* de $f(x) = ax^2 + b\text{x} + c$.



Fonte: O autor, 2020.

Vamos manter o intervalo –5 até 5, originalmente criado pelo Geogebra (Figura 205).

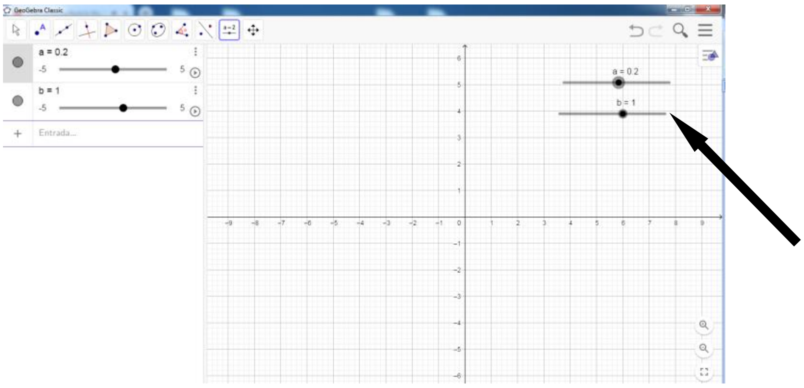
Figura 205 – Controle deslizante para o parâmetro *a* de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

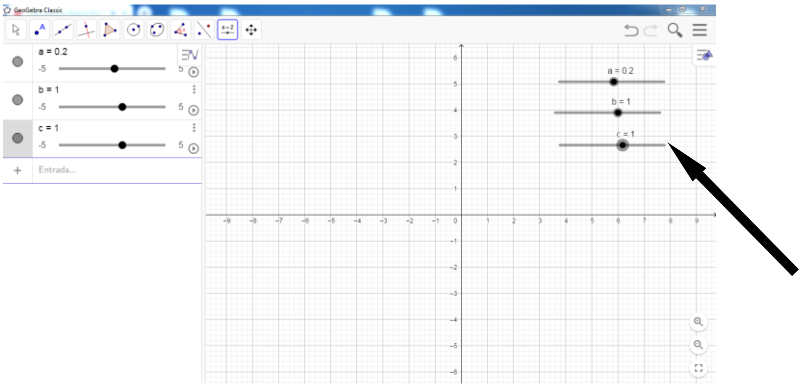
Neste momento surge uma observação importante: para uma função ser de 2º grau, o parâmetro *a* deve ser diferente de zero. Portanto, *a* pertence a duas semirretas distintas (disjuntas), a semirreta $a > 0$ e a semirreta $a < 0$. Adiante mostraremos o porquê desta observação. Novamente, clique na parte superior da janela de visualização para criar os controles deslizantes dos parâmetros *b* (Figura 206) e *c* (Figura 207).

Figura 206 – Controle deslizante para o parâmetro *b* de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

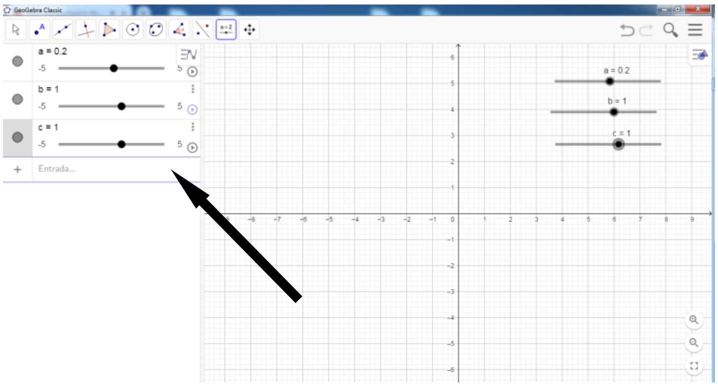
Figura 207 – Controle deslizante para o parâmetro *c* de
$f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

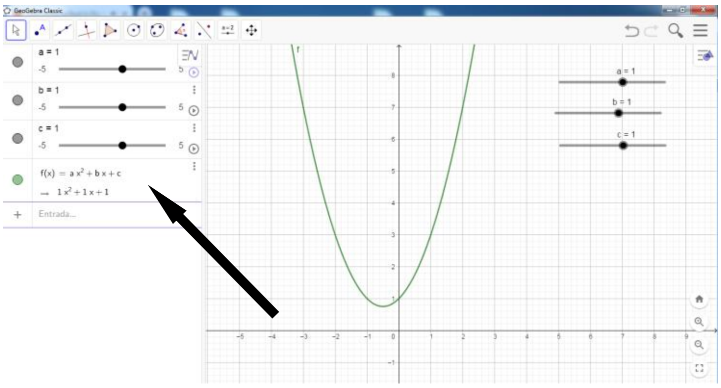
Agora que temos os três controles deslizantes criados, vamos entrar com a expressão da função quadrática na linha de entrada digitando $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Figuras 208 e 209).

Figura 208 – Digitação no campo ‘entrada’ de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

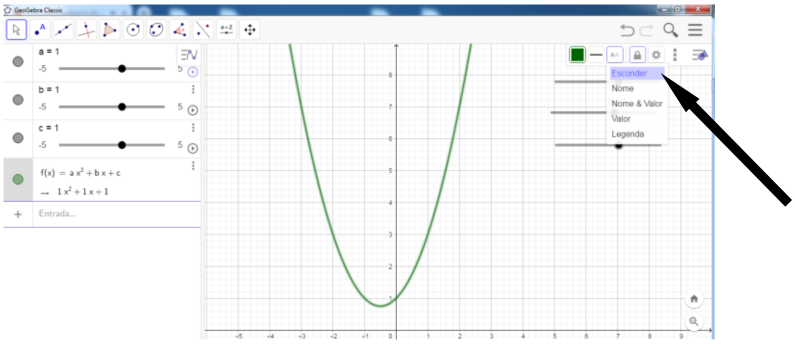
Figura 209 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ utilizando os
controles deslizantes dos parâmetros *a*, *b* e *c*.



Fonte: O autor, 2020.

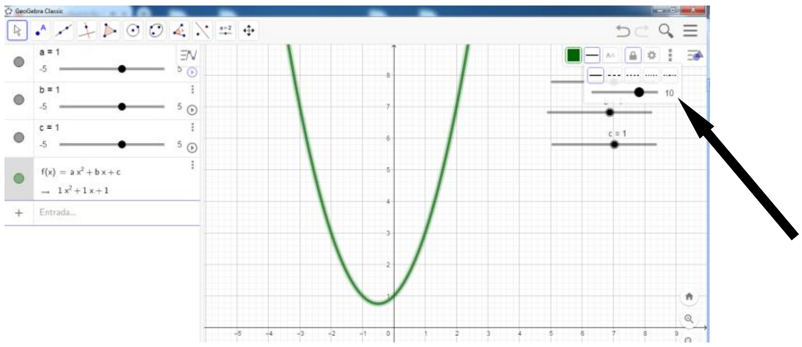
Vamos selecionar o gráfico e ocultar o rótulo (Figura 210), que é o nome dado pelo usuário à função na linha de entrada, escolhendo em seguida uma linha mais grossa (Figura 211) e pintando-a de azul (Figura 212). Feito isso, temos o gráfico da função quadrática desenhado na janela de visualização.

Figura 210 – Ocultação do rótulo do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



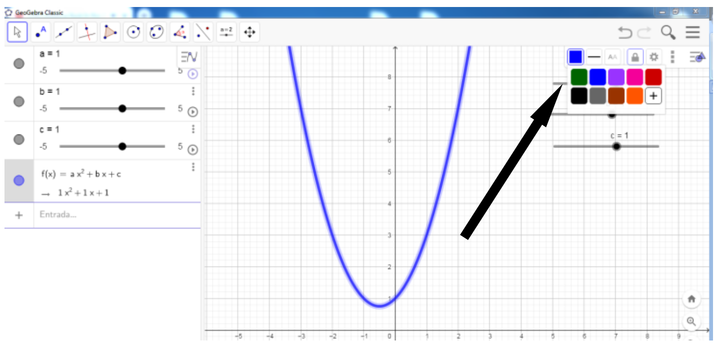
Fonte: O autor, 2020.

Figura 211 – Escolha da espessura da linha do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

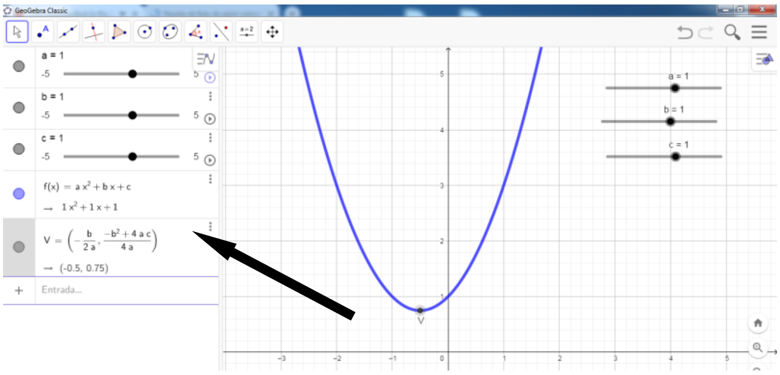
Figura 212 – Escolha da cor do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

Agora vamos criar o vértice da parábola, que é um ponto neste plano cartesiano. Criamos o ponto do vértice V digitando na linha de entrada as suas coordenadas. Digite as coordenadas $x = \frac{-b}{2a}$ e $y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, conforme ilustrado na figura 213.

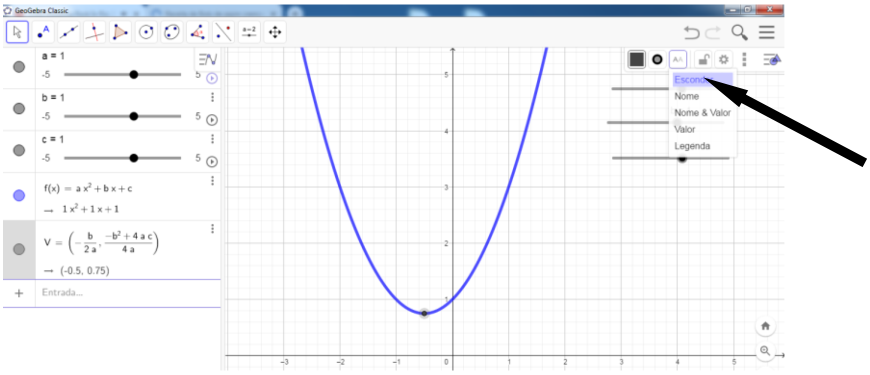
Figura 213 – Vértice do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

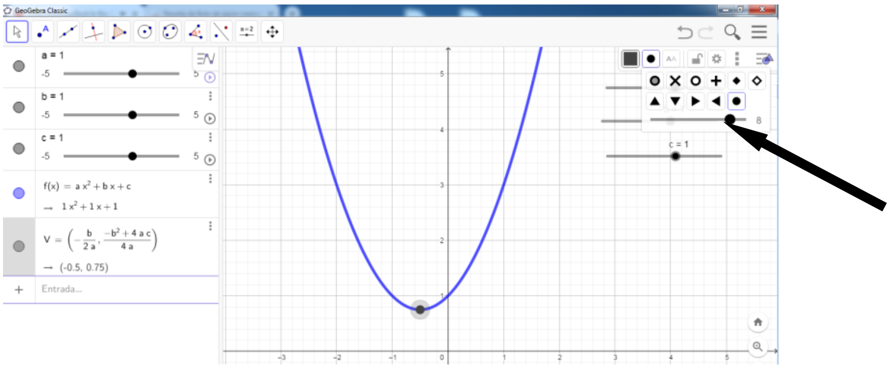
Oculte o rótulo (Figura 214) e coloque esse ponto um pouco maior (Figura 215) e pinte-o de preto (Figura 216). Agora, temos na janela de visualização a parábola e o vértice.

Figura 214 – Ocultação do rótulo do vértice do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



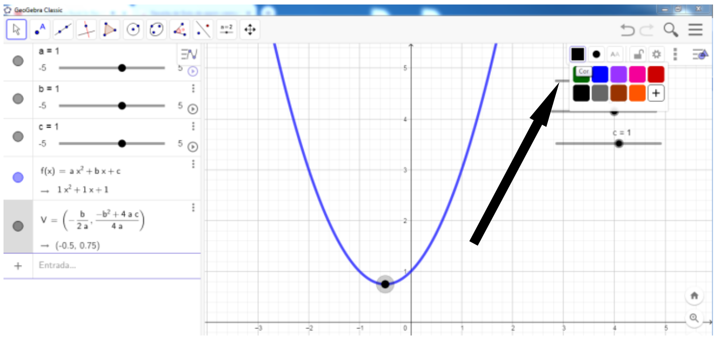
Fonte: O autor, 2020.

Figura 215 – Aumento do ponto do vértice do gráfico
de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

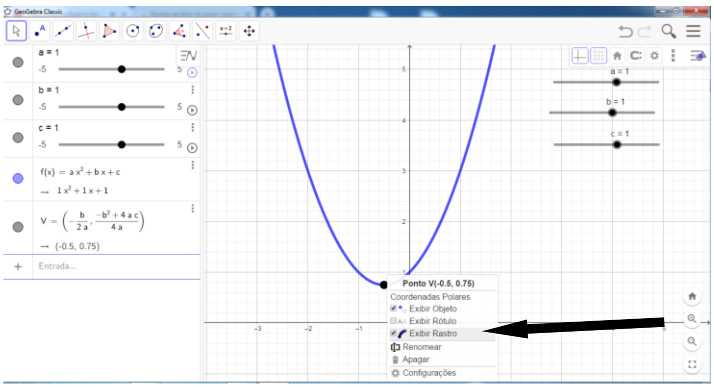
Figura 216 – Escolha da cor do ponto do vértice do
gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

A ideia agora é variar um desses parâmetros e analisar o comportamento da parábola e do vértice. Para isso, clique com o botão direito do mouse no vértice e habilite o rastro, como indica a figura 217.

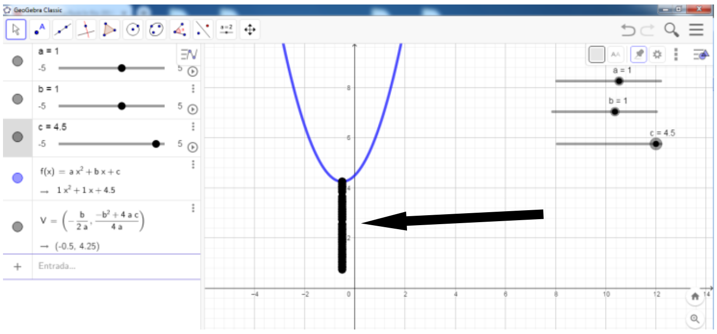
Figura 217 – Habilitando o rastro do vértice do gráfico
de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

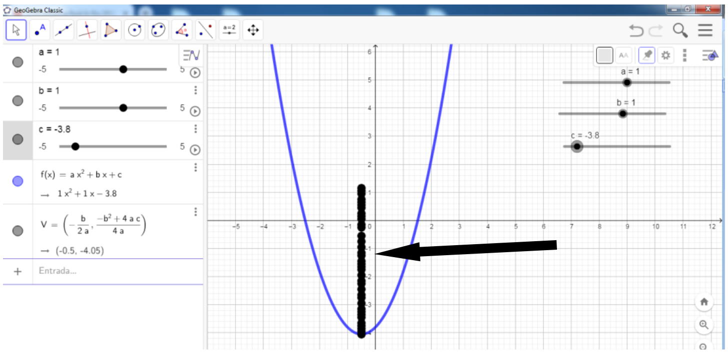
Vamos começar variando o parâmetro *c*. É simples de perceber que a parábola sofre um movimento vertical, isto é, o vértice da parábola ‘sobe e desce’ (Figuras 218 e 219) pela reta vertical de equação $x = \frac{-b}{2a}$ (Figura 220).

Figura 218 – Variação do parâmetro *c* de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



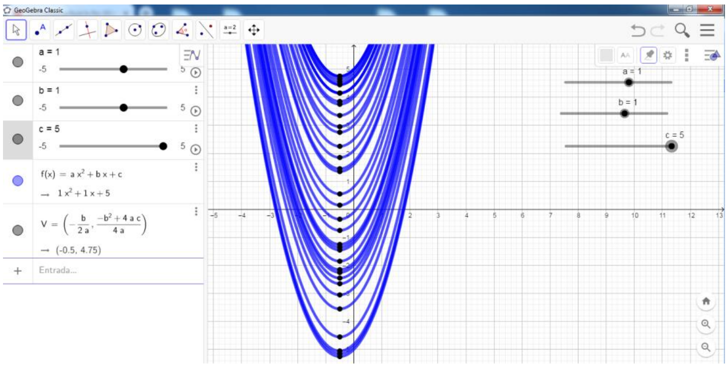
Fonte: O autor, 2020.

Figura 219 – Variação do parâmetro *c* de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

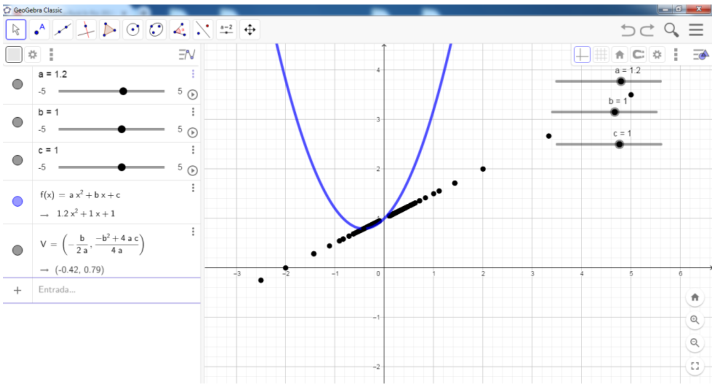
Figura 220 – Variação do parâmetro *c* de $f(x) = ax^2 + bx + c$ sobre a reta $x = -b/2a$.



Fonte: O autor, 2020.

Selecione as teclas CTRL + F para apagar o rastro e analisemos o que acontece quando variamos o parâmetro *a*. Aparentemente, temos a sensação de que o vértice está variando sobre uma reta, que contém o seguinte conjunto de pontos indicados na figura 221.

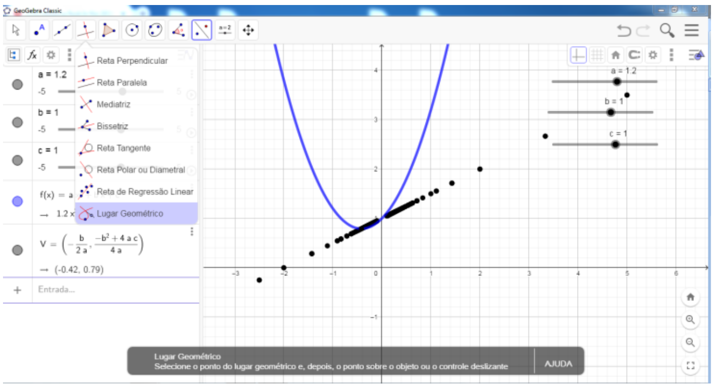
Figura 221 – Variação do parâmetro *a* de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

O programa Geogebra possui uma função que permite desenhar o lugar geométrico (LG) dos pontos V quando o parâmetro *a* varia. Para fazer isso, selecione o ícone da opção ‘lugar geométrico’. Se você deixar o mouse parado sobre o ícone, o Geogebra mostra uma pequena ajuda de como usar essa ferramenta (Figura 222).

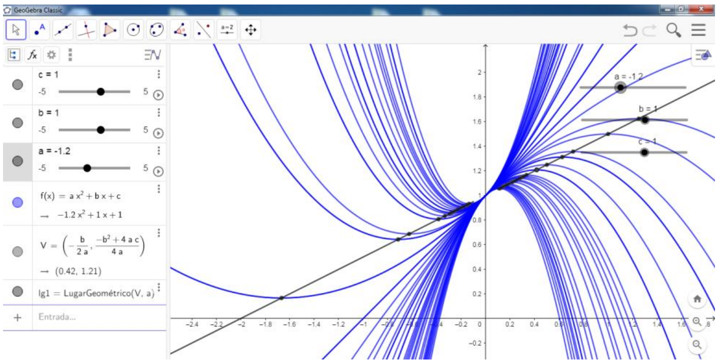
Figura 222 – Lugar geométrico do vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$
quando variamos o parâmetro *a*.



Fonte: O autor, 2020.

Vamos raciocinar da seguinte maneira: queremos desenhar o lugar geométrico dos pontos V da parábola quando o parâmetro *a* varia. Para isso, clicamos primeiro no ponto V e, em seguida, no parâmetro *a*. Após esses comandos, o Geogebra nos mostra o LG dos pontos no qual o vértice V da parábola se desloca. Possivelmente, parece se tratar de uma reta (Figura 223).

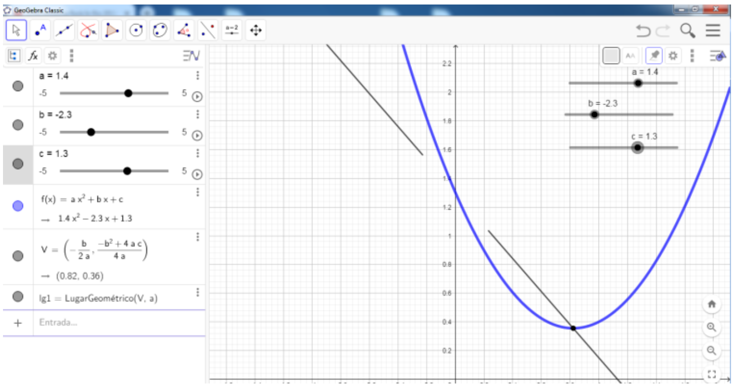
Figura 223 – Lugar geométrico do vértice de $f(x) = ax^2 + b\text{x} + c$ quando variamos o parâmetro a.



Fonte: O autor, 2020.

Para cada parâmetro b e c fixados, variando a, o vértice varia sobre uma outra possível reta. Variando os parâmetros b e c novamente, para ver o que acontece (Figura 224).

Figura 224 – Variação dos parâmetros a, b e c de $f(x) = ax^2 + b\text{x} + c$.



Fonte: O autor, 2020.

Demonstraremos adiante que realmente o vértice V da parábola desloca-se sobre uma reta, à medida que variamos o parâmetro a e fixamos os parâmetros b e c. Por ora, vamos atentar para um detalhe: por que o Geogebra não desenhou toda a linha reta? Por que a reta está 'partida' perto do eixo Y? A explicação é a seguinte, e tem a ver com a observação citada anteriormente: as coordenadas do vértice da parábola são descontínuas em $a = 0$. Se fizermos o limite da expressão $x = \dfrac{-b}{2a}$ quando a tende a zero em valores absolutos, esse limite vai a ∞ em valores absolutos. O que significa isso? Quando aproximamos o a do zero pela direita ou pela esquerda, cada vez mais o vértice se afasta da origem do sistema cartesiano, e sua coordenada *x* é cada vez maior em valor absoluto. O mesmo acontece para a coordenada *y*. Se fizermos o limite da expressão $x = \frac{-b}{2a}$ quando *a* tende para ∞ em valores absolutos, a coordenada *x* do vértice tende a zero à esquerda e à direita, e o limite da coordenada *y*, quando *a* tende a ∞ em valores absolutos, é *c*. Então, quanto maior *a* em valores absolutos, mais próximo o vértice V estará do eixo *y*. Como limitamos o parâmetro *a* no intervalo [–5,5] o Geogebra desenhou somente uma parte desta reta.

Agora, faremos a demonstração da equação do lugar geométrico na qual se desloca o vértice V quando o coeficiente *a* varia no conjunto dos números reais, ao mesmo tempo em que os coeficientes *b* e *c* são fixados.

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Sabe-se que a função *f(x)* tem vértice no ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Então:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \Rightarrow$$

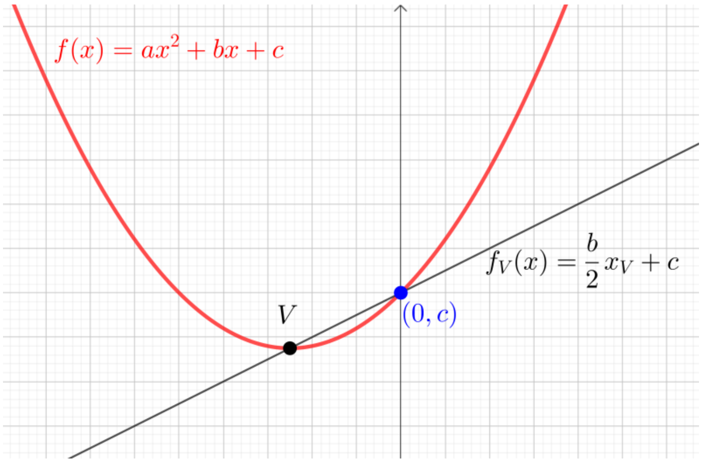
$$\Rightarrow y_V = \frac{b}{2}\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = \frac{b}{2}x_V + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_V(x) = \frac{b}{2}x_V + c \,.$$

Observe que $f_V(x) = \frac{b}{2}x_V + c$ é uma função do 1º grau cujo gráfico é uma reta que intersecta o eixo *y* no ponto (0, *c*), ou seja, no mesmo ponto que intercepta a parábola de *f(x)*. Logo, ao variar o coeficiente *a* da função *f* (*x*), o vértice desloca-se sobre esta reta (Figura 225).

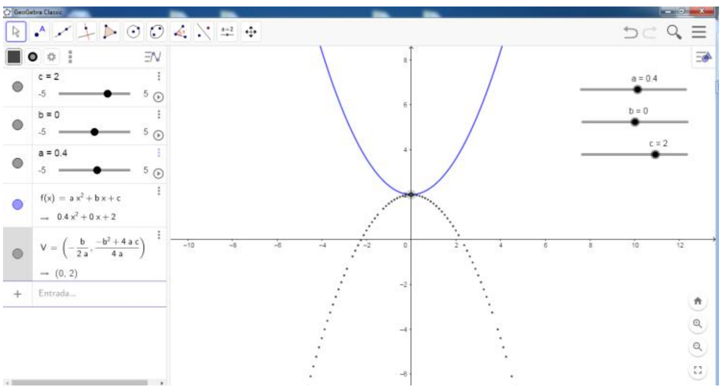
Figura 225 – Lugar geométrico do vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando variamos o parâmetro a, mantendo fixos os parâmetros b e c.



Fonte: O autor, 2020.

Falta agora analisar o comportamento da parábola e do vértice quando variamos o parâmetro b. Aparentemente, o vértice da parábola está ‘andando’ sobre outra parábola no plano cartesiano. Por que nesta parábola que contém o conjunto de pontos por onde ‘anda’ o vértice não vemos toda a linha contínua? A explicação é simples: o controle deslizante varia num conjunto discreto de valores, isto é, no exemplo varia de décimo em décimo, $b = 0$, $b = 0{,}1$, $b = 0{,}2$, $b = 0{,}3$, e assim por diante. Então, para cada um desses valores, o Geogebra desenha o correspondente vértice na janela de visualização (figura 226).

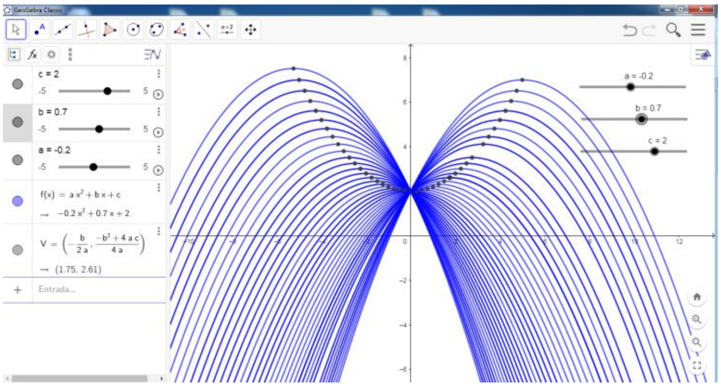
Figura 226 – Variação do parâmetro b de $f(x) = ax^2 + bx + c$, fixando os parâmetros a e c.



Fonte: O autor, 2020.

Vamos considerar o coeficiente *a* negativo. Variando o coeficiente *b*, observe que, como no exemplo anterior, o vértice da parábola está variando sobre uma parábola preta (Figura 227).

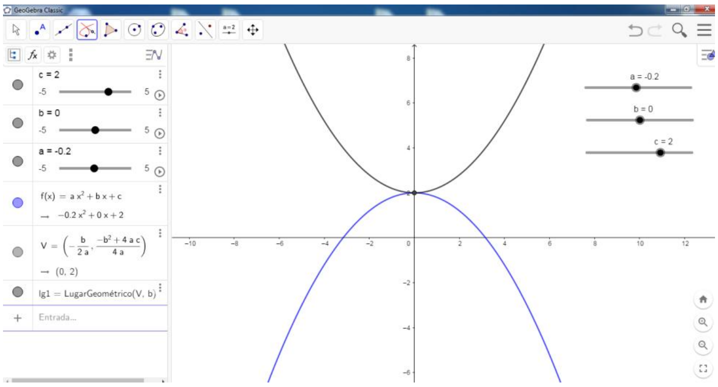
Figura 227 – Comportamento do vértice de $f(x) = ax^2 + bx + c$, variando-se o parâmetro *b* e considerando o parâmetro *a* negativo.



Fonte: O autor, 2020.

Para visualizar o lugar geométrico descrito pelo vértice V quando *b* varia, use a ferramenta de mesmo nome, citada anteriormente (Figura 228).

Figura 228 – Uso da ferramenta ‘lugar geométrico’ do parâmetro *b* de $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: O autor, 2020.

Vamos determinar a equação do lugar geométrico na qual se desloca o vértice V quando o coeficiente *b* varia no conjunto dos números reais, fixando-se os coeficientes *a* e *c*.

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Sabe-se que a função $f(x)$ tem vértice no ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Então:

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = \frac{-ab^2}{4a^2} + c = -a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = -a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = -a \cdot {x_V}^2 + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_V(x) = -a \cdot {x_V}^2 + c.$$

Observe que $f_V(x) = -a{x_V}^2 + c$ é uma função quadrática cuja parábola é semelhante a de $f(x)$, porém com concavidade inversa. Observe ainda que o vértice de $f_V(x)$ é o ponto (0, c), isto é, o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas. Logo, ao variar o coeficiente b da função $f(x)$, seu gráfico descreve um movimento parabólico de concavidade inversa e cujo eixo de simetria coincide com o eixo y.

8 SUGESTÕES DE ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresentaremos algumas sugestões de atividades para a sala de aula referentes a alguns tópicos abordados neste trabalho. Será mostrado um modelo de atividade que pode ser aplicado a alunos do primeiro ano do Ensino Médio, e que traz como assunto central as construções gráficas de funções reais através de métodos pouco trabalhados pela maioria das aulas referentes ao assunto, haja vista o resultado da aula ministrada como laboratório.

Este modelo de atividade foi aplicado para alunos que já possuíam o Ensino Médio completo e que estavam preparando-se para prestar concurso público para escolas militares e vestibulares, de um curso preparatório localizado no município do Rio de Janeiro. As duas primeiras aulas, dadas para a turma preparatória ao Curso de Formação de Sargentos de Aeronáutica, foram executadas de maneira remota (on-line, pelo aplicativo Zoom), devido à pandemia do novo coronavírus. Já as duas aulas seguintes, dadas para uma turma mista preparatória ao Curso de Formação de Sargentos do Exército e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), foram ministradas de forma presencial, com todas as recomendações das autoridades sanitárias.

Para a realização da atividade foram necessárias 2 aulas com duração de 2,5 horas cada, e os pré-requisitos de elementos essenciais de uma função, tais como Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função, explorando especialmente as representações gráficas desses conceitos no plano cartesiano.

8.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

A execução da primeira aula foi idêntica em ambas as turmas, diferenciando-se apenas pelo fato de uma delas ter sido trabalhada de forma remota, devido à pandemia do novo coronavírus. Especificamente para esta aula on-line, foi utilizado o aplicativo Zoom, que permite se reunir com até cem pessoas em videoconferência.

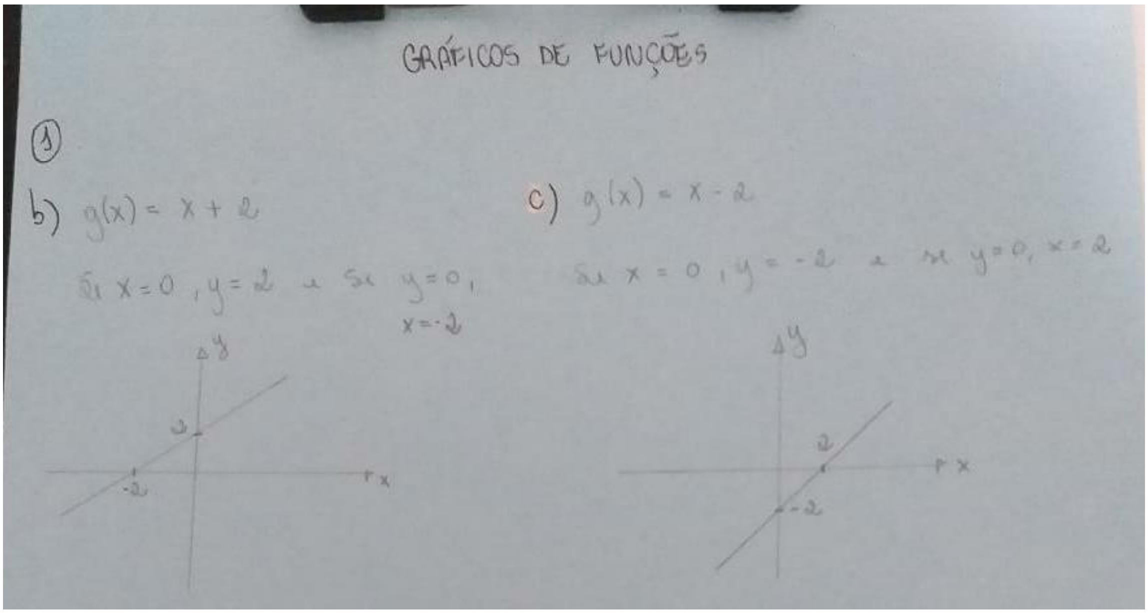
O intuito da atividade era expôr o nível de conhecimento dos alunos sobre o assunto, especialmente sobre as translações e simetrias nos gráficos.

Tendo em vista a heterogeneidade dos alunos, com seus diferentes níveis de ensino e oriundos de diversas escolas públicas/particulares, ficou explícito o desconhecimento do assunto pela quase totalidade dos alunos. As figuras a seguir demonstram claramente o desconhecimento sobre os movimentos que podemos fazer com os gráficos de funções.

Sobre o trabalho em si, na primeira aula foi solicitado aos alunos que tentassem fazer as cinco primeiras questões do questionário do anexo A, sem nenhuma orientação de como proceder, tampouco utilizar softwares específicos para construção dos gráficos das funções em questão. As soluções encontradas pelos alunos deveriam ser enviadas ao professor no prazo máximo de um dia após a liberação do questionário (para a aula on-line). Já na aula presencial, as soluções foram entregues após 45 minutos.

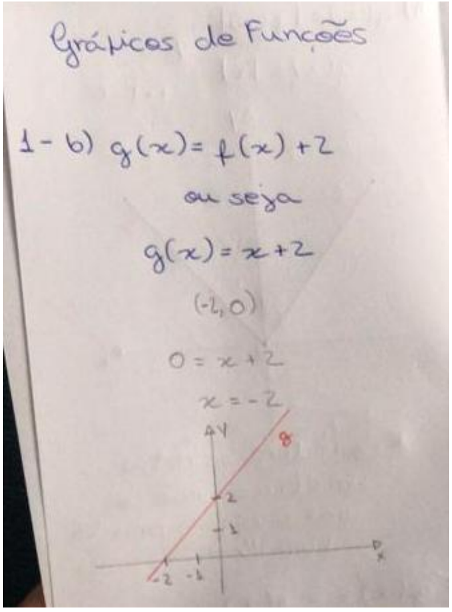
Apresentando algumas soluções a seguir, percebemos que os alunos procederam de forma bem parecida, usando o método de obtenção de gráficos de funções através de pontos, ou seja, atribui-se um valor de domínio para se obter sua respectiva imagem (figuras 229 a 231).

Figura 229 – Resolução apresentada na aula proposta sobre a questão 1.

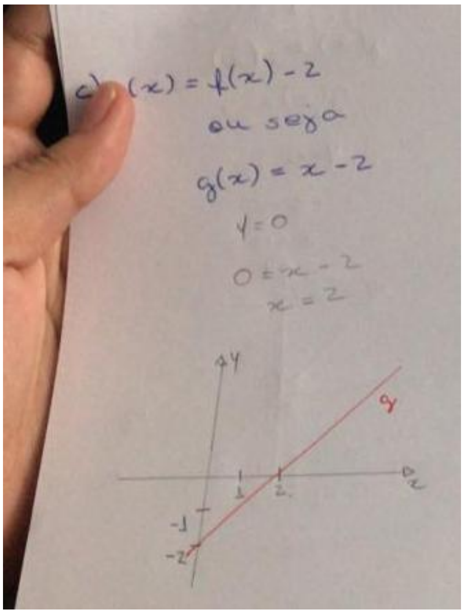


Fonte: O autor, 2020.

Figura 230 – Resolução apresentada na aula proposta sobre a questão 1.



(a)

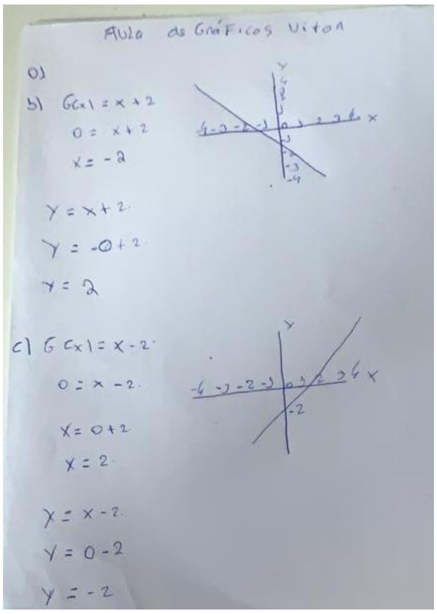


(b)

Legenda: (a) Solução apresentada para a questão 1-b; (b) Solução apresentada para a questão 1-c.

Fonte: O autor, 2020.

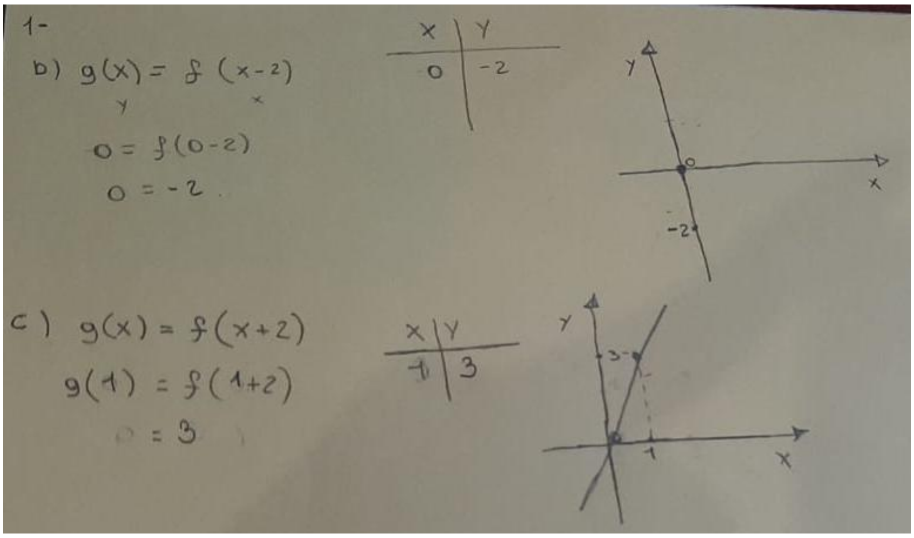
Figura 231 – Resolução apresentada na aula proposta sobre a questão 1.



Fonte: O autor, 2020.

Na questão 1, que trata dos gráficos de uma função afim, notamos que não houve dificuldades para esboçar os gráficos dos itens *b* e *c*. Porém, um dos alunos apresentou dificuldades em separar os conceitos de domínio e imagem de uma função, conforme ilustrado na figura 232.

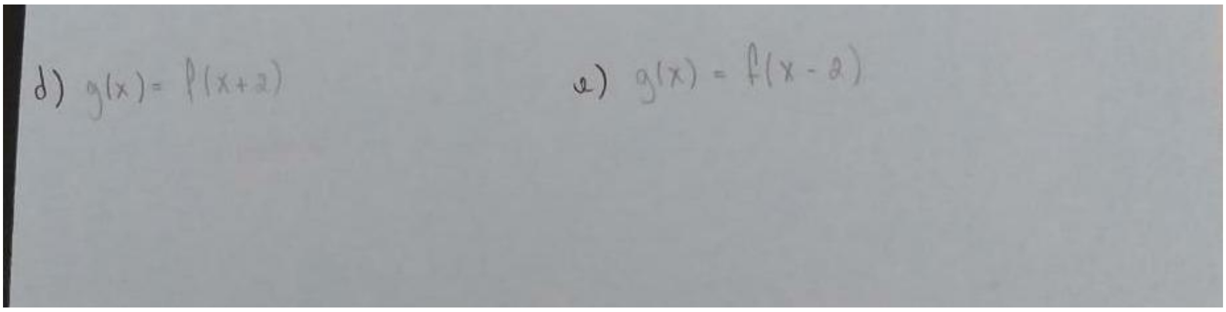
Figura 232 – Dificuldades encontradas na aula proposta sobre a questão 1.



Fonte: O autor, 2020.

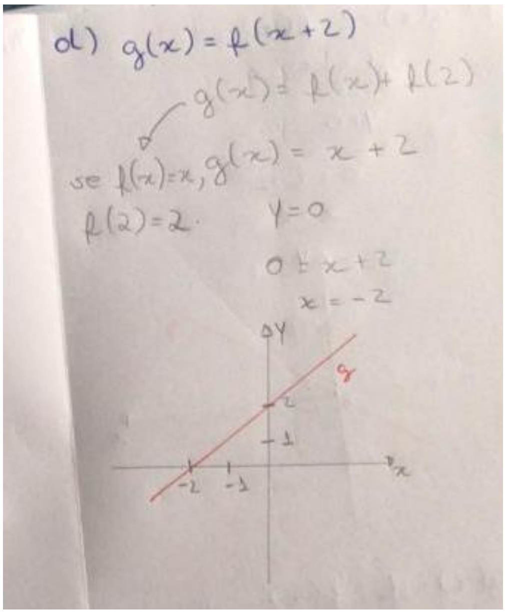
Prosseguindo com mais algumas soluções, ficou claro o desconhecimento dos conceitos básicos de uma função, que são os conjuntos Domímio e Imagem, e como são localizados no plano cartesiano. Isto fica evidente nos itens *d* e *e* das questões de 1 a 5 (figuras 233 a 237).

Figura 233 – Dificuldades encontradas na aula proposta das questões 1-d e 1-e.

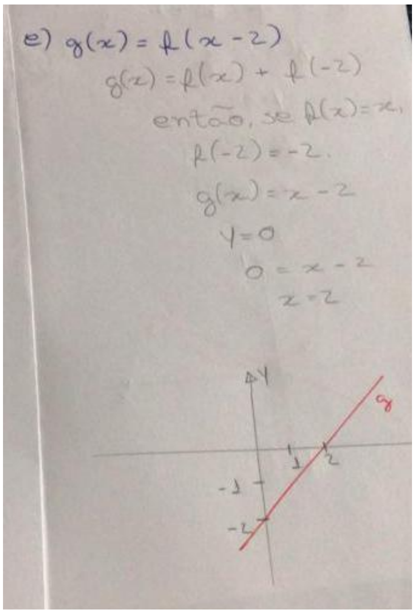


Fonte: O autor, 2020.

Figura 234 – Dificuldades encontradas na aula proposta.



(a)

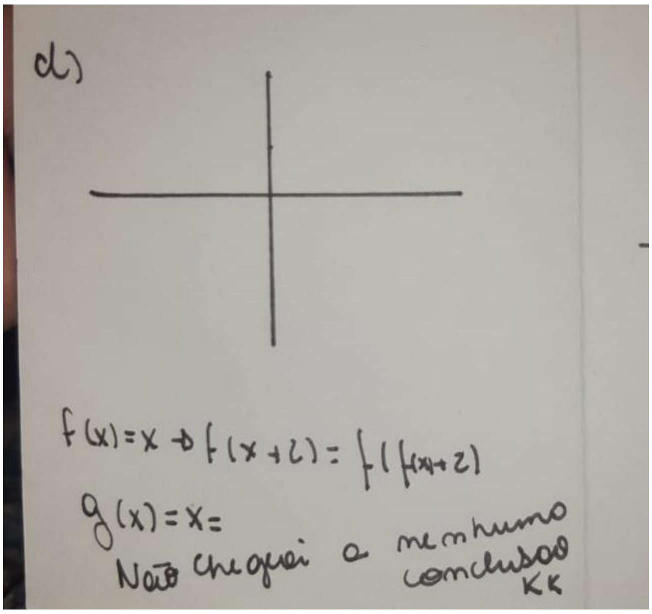


(b)

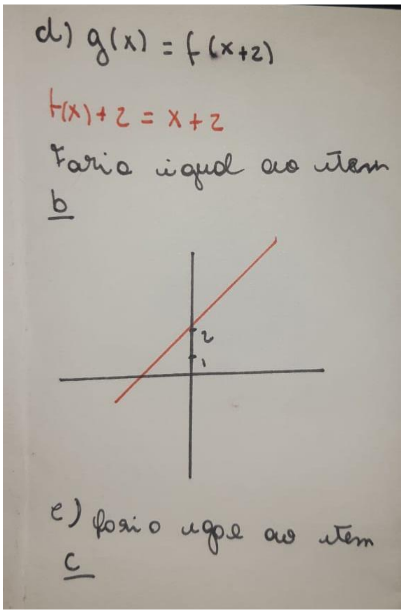
Legenda: (a) Dificuldade apresentada na questão 1-d; (b) Dificuldade apresentada na questão 1-e.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 235 – Dificuldades encontradas na aula proposta.



(a)

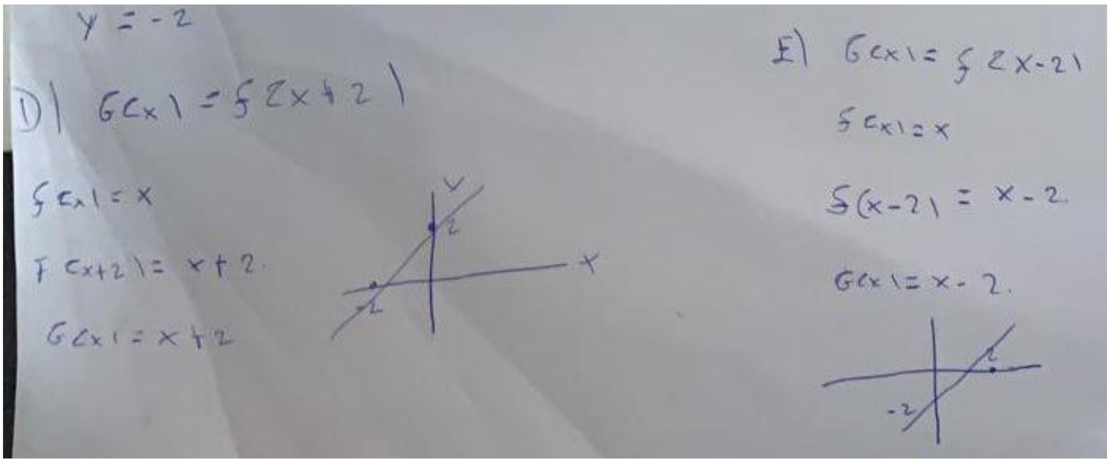


(b)

Legenda: (a) Dificuldade apresentada na questão 1-d; (b) Dificuldade apresentada na questão 1-d.

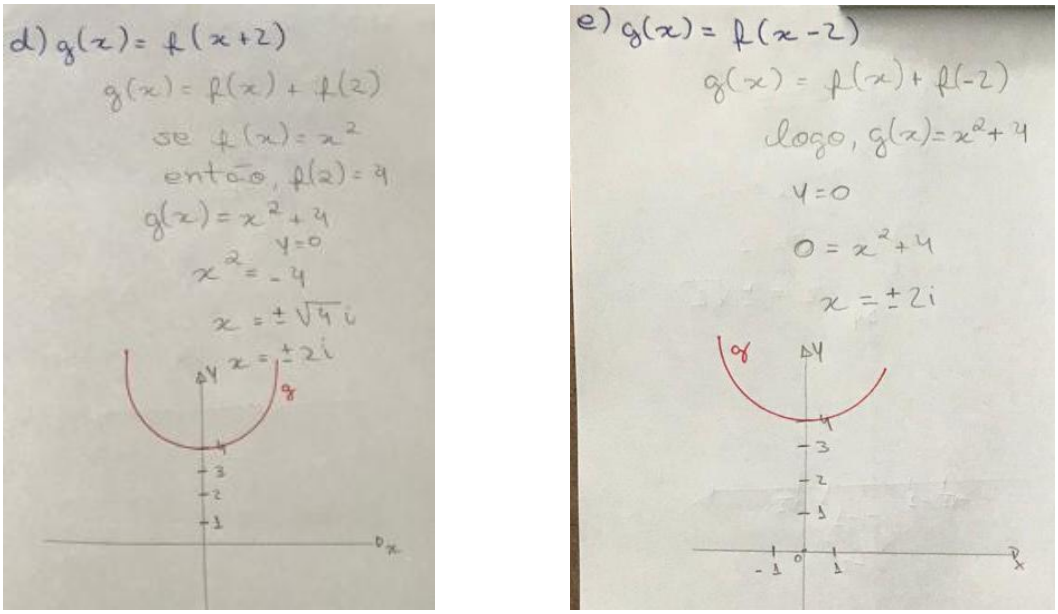
Fonte: O autor, 2020.

Figura 236 – Dificuldades encontradas na aula proposta das questões 1-d e 1-e.



Fonte: O autor, 2020.

Figura 237 – Dificuldades encontradas na aula proposta.



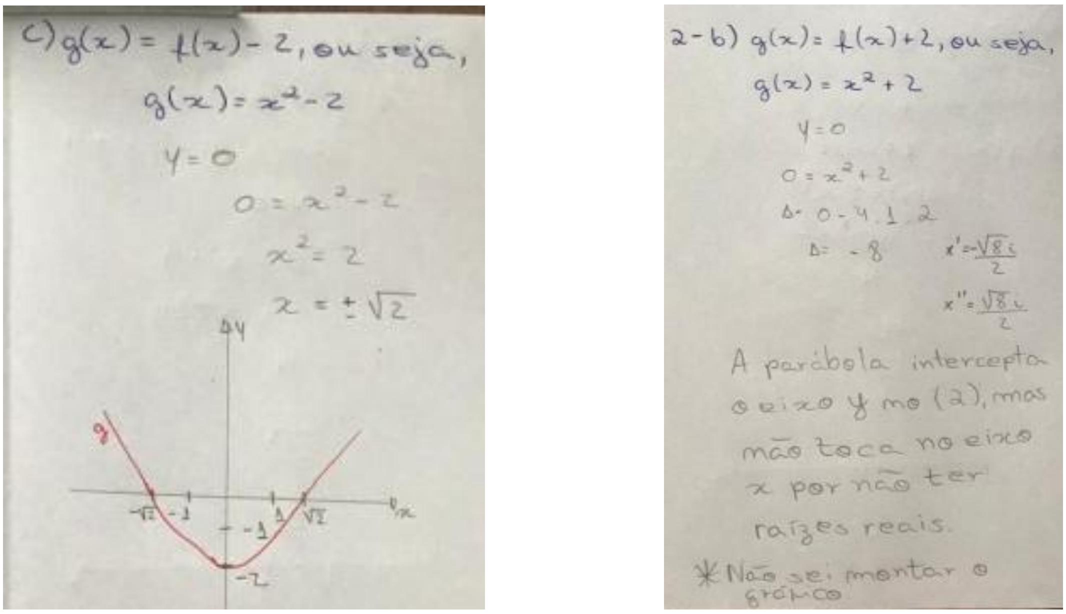
(a) (b)

Legenda: (a) Dificuldade apresentada na questão 1-d; (b) Dificuldade apresentada na questão 1-e.

Fonte: O autor, 2020.

Outra constatação interessante diz respeito sobre a construção do gráfico da função quadrática. Conforme as conversas desenvolvidas durante a aula, percebeu-se que os alunos conheciam o fato de que, quando o gráfico corta o eixo das abscissas em um ou dois pontos, a função tem raízes reais (iguais ou distintas) e, quando não intercepta, não possui raízes reais. Sabiam, inclusive, da relação do discriminante com essas afirmações. Porém, para construir os gráficos solicitados a partir do gráfico de $f(x) = x^2$, ficaram presos à obtenção dos zeros da função ou simplesmente não os fizeram por falta de conhecimento (Figura 238), ou fizeram por meio da obtenção de pares ordenados (figuras 239 e 240).

Figura 238 – Soluções e dificuldades apresentadas na aula proposta.

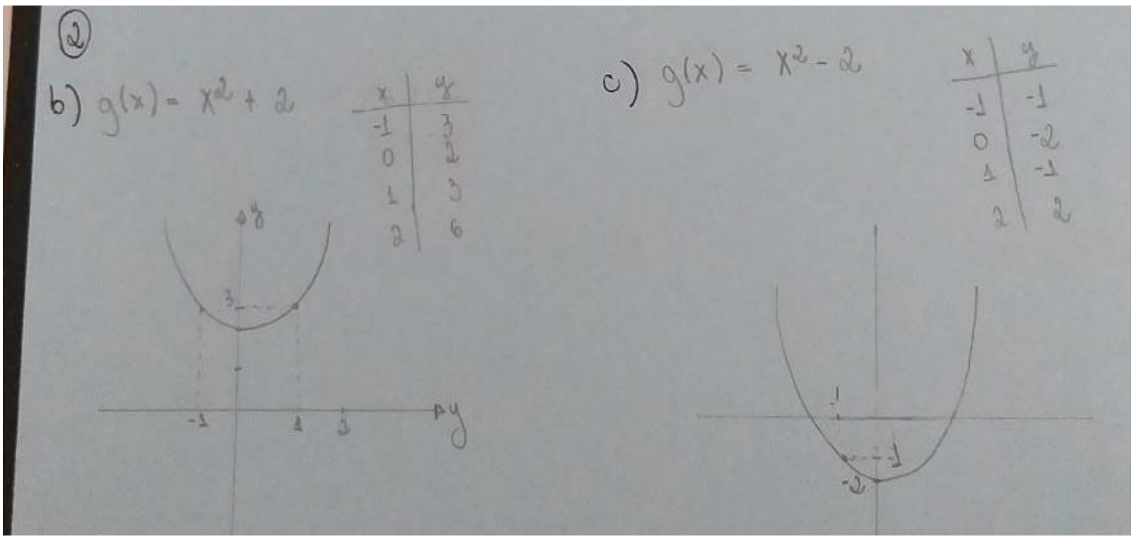


(a) (b)

Legenda: (a) Solução apresentada na questão 2-c; (b) Dificuldade apresentada na questão 2-b.

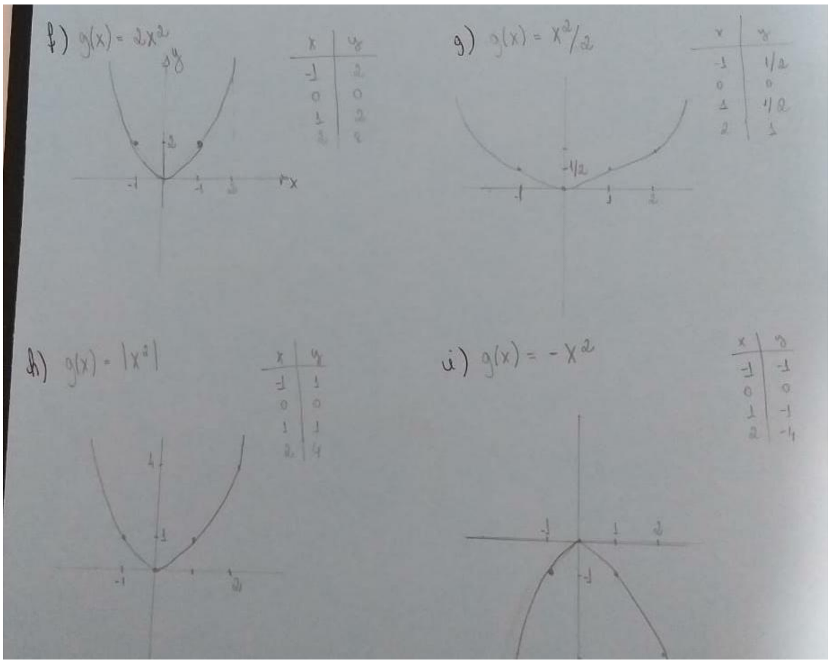
Fonte: O autor, 2020.

Figura 239 – Soluções apresentadas na aula proposta das questões 2-b e 2-c.



Fonte: O autor, 2020.

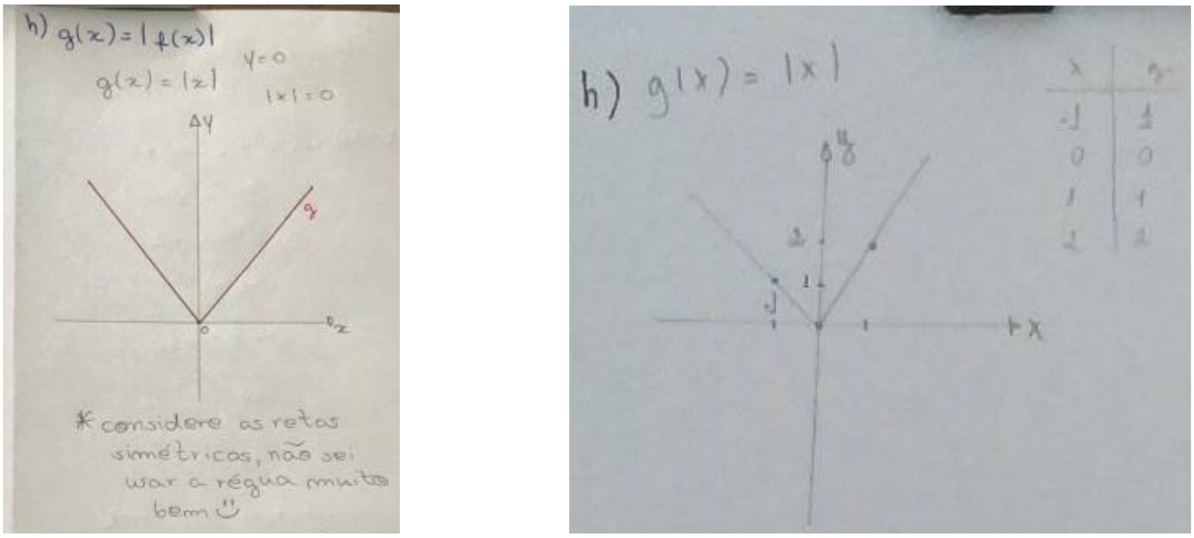
Figura 240 – Soluções apresentadas na aula proposta das questões 2-f, 2-g, 2-h e 2-i.



Fonte: O autor, 2020.

Com relação aos gráficos das funções modulares, exponenciais e logarítmicas, surpreendeu o fato de que praticamente não houve soluções (nem tentativas de soluções). Com isso, poucas são as imagens que podemos apresentar neste trabalho (figuras 241 e 242)

Figura 241 – Soluções e dificuldades apresentadas na aula proposta.

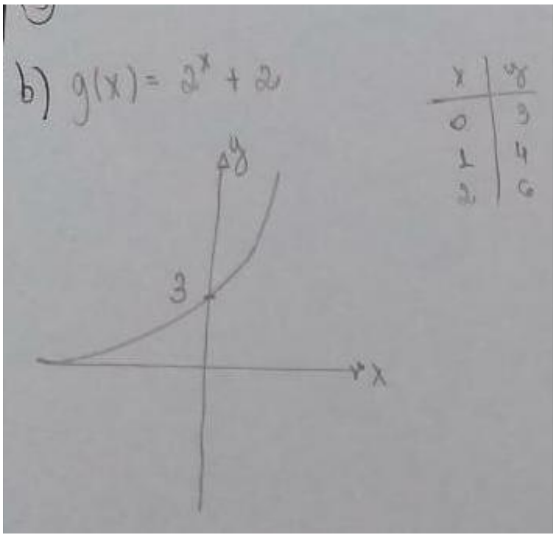


(a) (b)

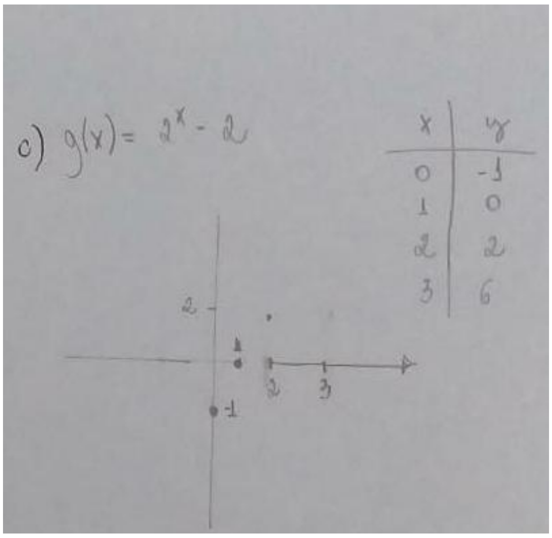
Legenda: (a) Solução apresentada na questão 3-h; (b) Dificuldade apresentada na questão 3-h.

Fonte: O autor, 2020.

Figura 242 – Soluções e dificuldades apresentadas na aula proposta.



(a)



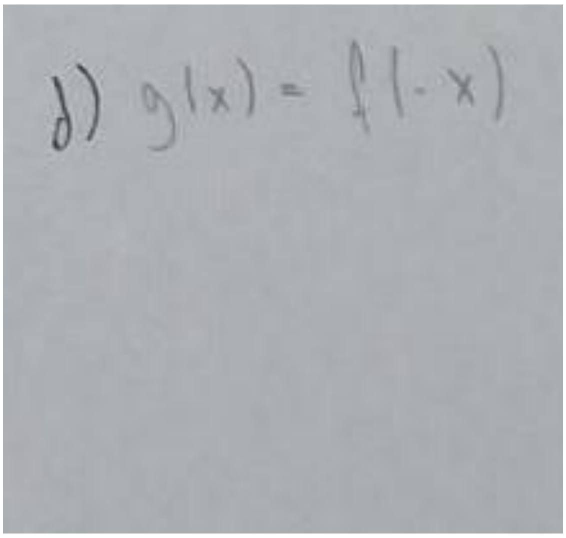
(b)

Legenda: (a) Solução apresentada na questão 4-b; (b) Dificuldade apresentada na questão 4-c.

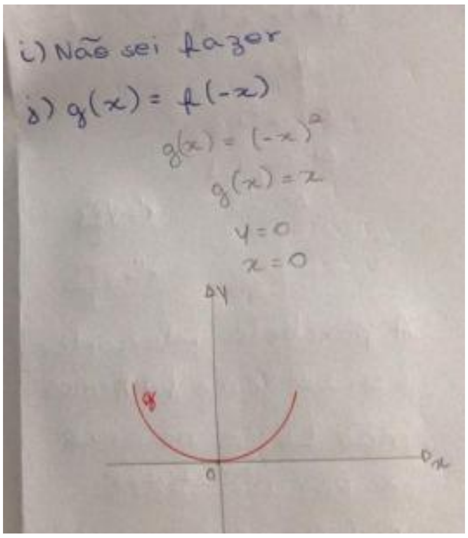
Fonte: O autor, 2020.

O mesmo aconteceu com respeito às simetrias em relação aos eixos coordenados (figura 243).

Figura 243 – Soluções e dificuldades apresentadas na aula proposta.



(a)



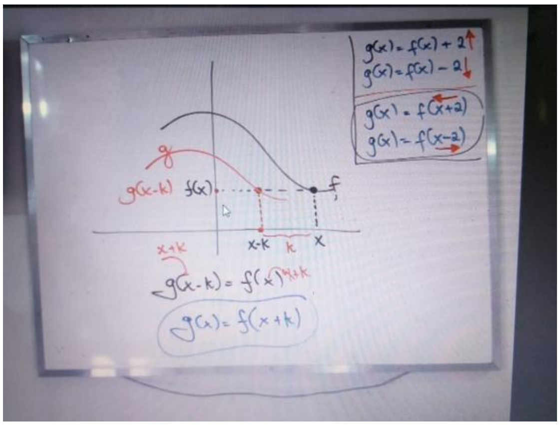
(b)

Legenda: (a) Dificuldade apresentada na questão 4-j; (b) Dificuldade apresentada nas questões 2-i e 2-j.

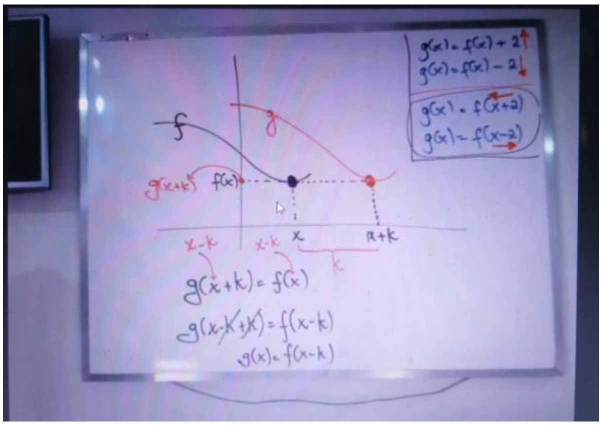
Fonte: O autor, 2020.

Após a entrega das soluções, foi efetuada a correção das questões com a temática desta dissertação, que é apresentar ferramentas que possibilitam ‘desenhar’ as funções através dos deslocamentos que seus gráficos podem fazer, de acordo com as suas expressões algébricas. Inicialmente, foram apresentados aos alunos os conceitos iniciais sobre as translações, alongamentos e encolhimentos, reflexões aos eixos coordenados e módulo de uma função, enfatizando as visualizações do domínio e da imagem no plano cartesiano em cada caso. Durante esta introdução os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em acompanhar o conteúdo já que os mesmos possuem relativa base de Álgebra e Geometria. Seguem algumas imagens da aula online (Figura 244).

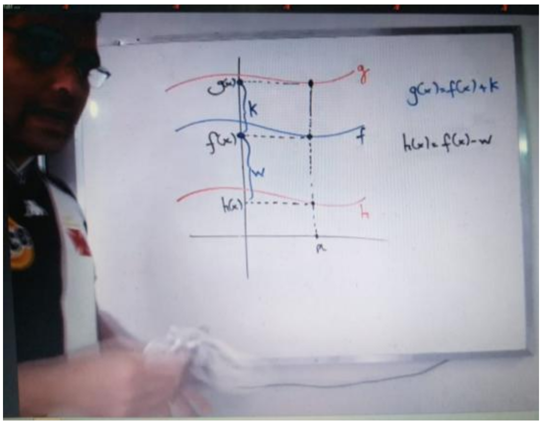
Figura 244 – Imagens da aula proposta on-line (continua).



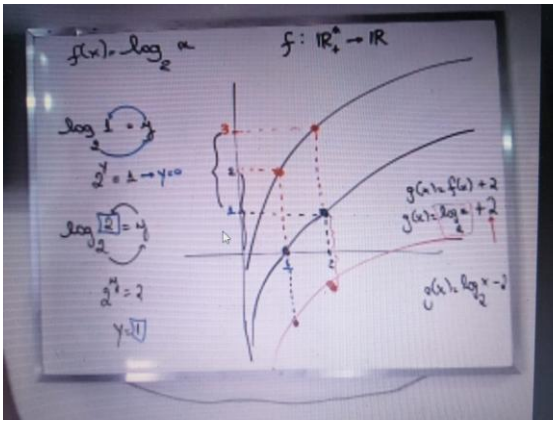
(a)



(b)

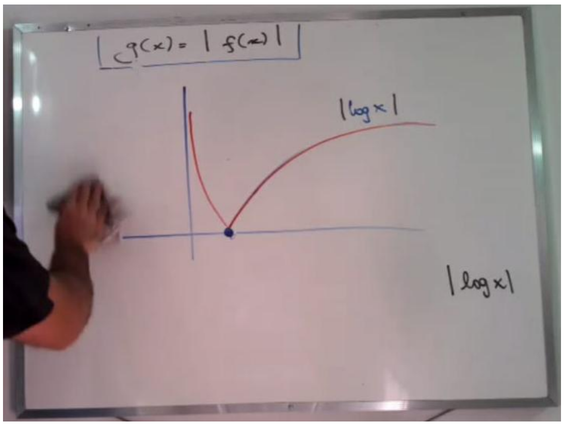


(c)

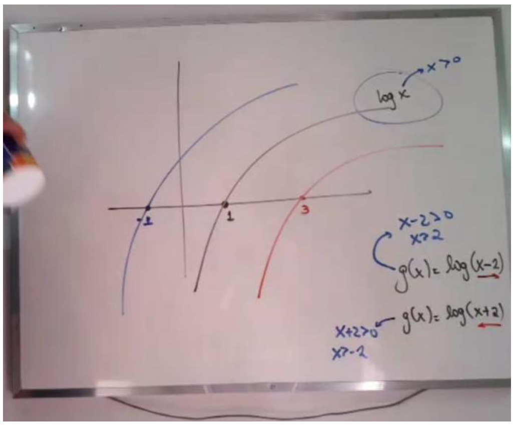


(d)

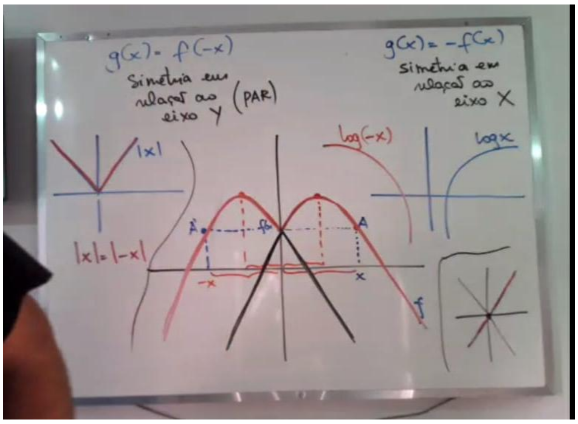
Figura 244 – Imagens da aula proposta on-line (conclusão).



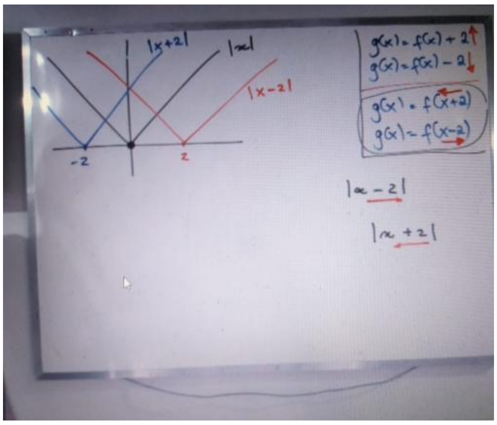
(e)



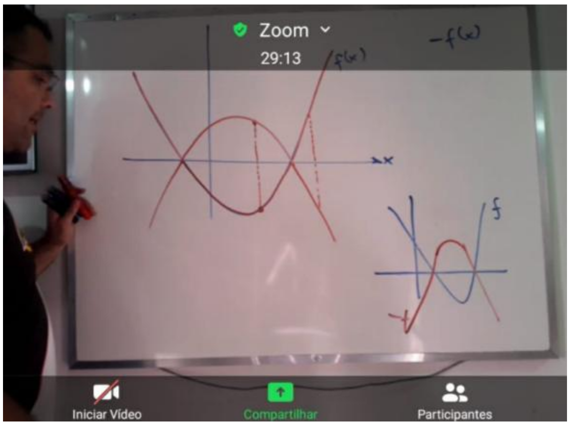
(f)



(g)



(h)



(i)

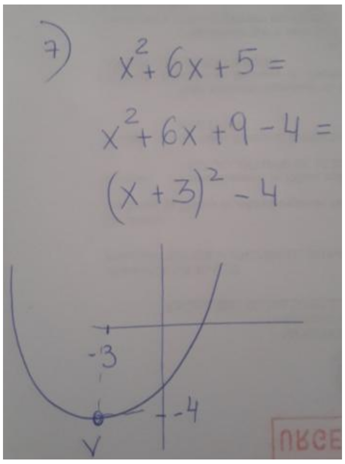
Legenda: (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h) e (i): Correção das questões 1 a 5 da atividade proposta.

Fonte: O autor, 2020.

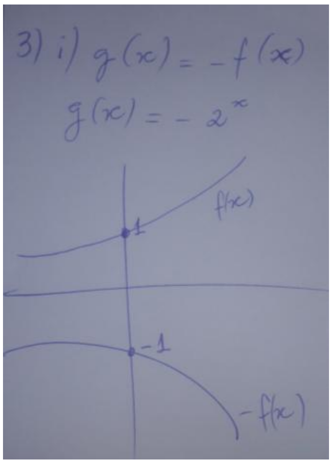
Após a explicação das questões de 1 a 5, efetuamos algumas correções utilizando o conhecimento ora adquirido nas questões de 6 a 14, e foi solicitado aos alunos que tentassem resolver o restante do questionário antes da segunda aula.

Concluímos que nas duas turmas foi obtido o resultado esperado. Apesar das dificuldades encontradas, principalmente na turma preparatória para o Curso de Formação de Sargentos do Exército, os alunos assimilaram de forma satisfatória os conteúdos apresentados. Seguem algumas figuras exemplificando o êxito obtido (Figura 245).

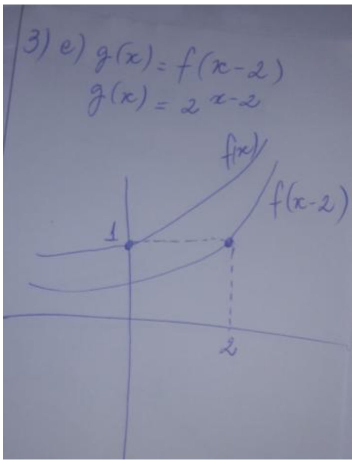
Figura 245 – Soluções apresentadas pelos alunos das questões 6 a 14 (continua).



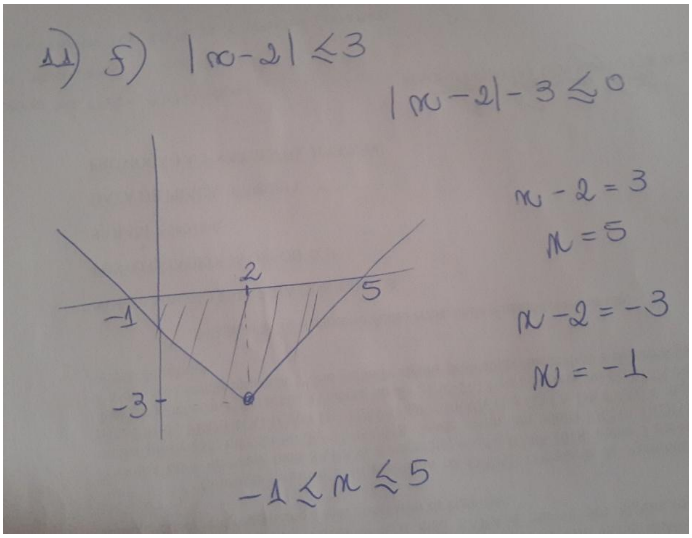
(a)



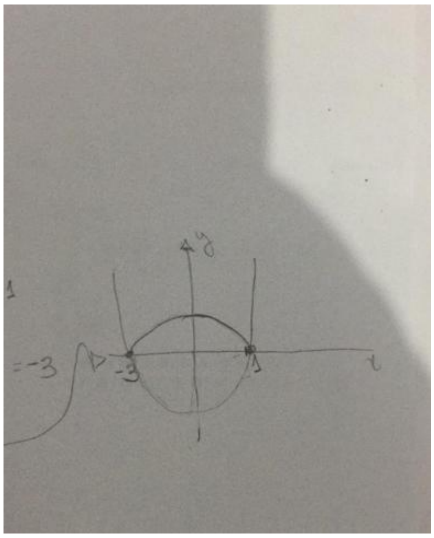
(b)



(c)

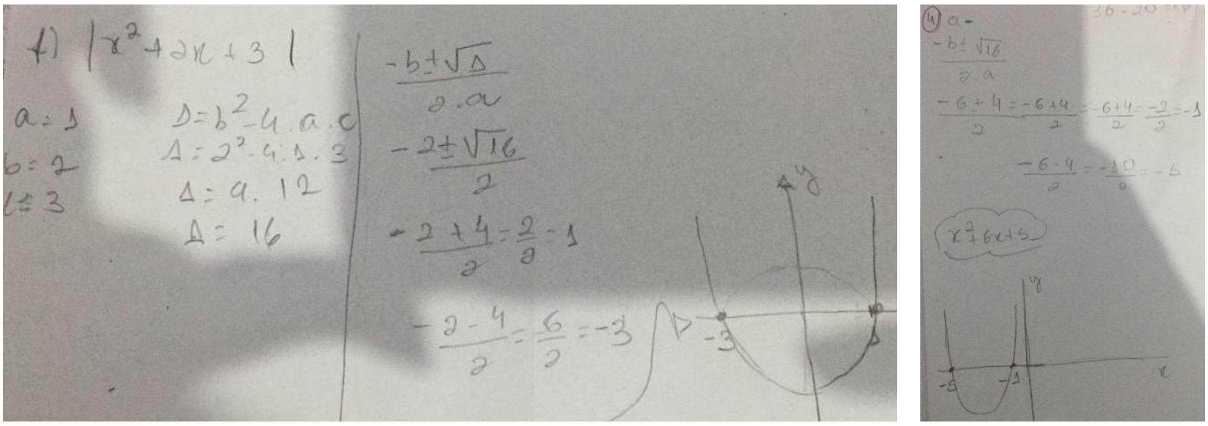


(d)



(e)

Figura 245 – Soluções apresentadas pelos alunos das questões 6 a 14 (conclusão).



(f) (g)

Legenda: (a), (b), (c), (d), (e), (f) e (g): Soluções apresentadas pelos alunos a respeito das questões 6 a 14 da atividade proposta.

Fonte: O autor, 2020.

Embora nós, professores, tenhamos um cronograma de aulas, sabemos que cada turma deve ser tratada unicamente e, mediante isso, deixamos a sugestão da aula citada apenas como exemplo, ficando a critério do profissional a melhor maneira de aplicá-la em aula, em momento devidamente oportuno.

CONCLUSÃO

Embora o ensino da Matemática tenha melhorado com a interdisciplinaridade, não nos causa surpresa que uma parte expressiva dos alunos não goste de estudá-la, especialmente o capítulo que, geralmente, inicia os conteúdos para o Ensino Médio, além de servir de base para um estudo aprofundado: as funções.

Nesse contexto, os gráficos representam importante alicerce, uma vez que os textos e símbolos inerentes às várias definições que encontramos acerca do assunto são, para a maioria dos alunos, em um primeiro momento, 'indecifráveis'. Esse fato não é novidade para nós, professores, pois constantemente nos deparamos com a fragilidade de interpretação que os alunos possuem sobre os mais diversos assuntos, em particular na linguagem matemática.

No decorrer da aula proposta, antes de introduzirmos o conteúdo desta dissertação, ficou nítido o despreparo e o desconhecimento sobre os movimentos que poderíamos efetuar nos gráficos de funções, partindo de um gráfico conhecido. Dentre os vários pontos de dificuldade, dois chamaram a atenção: a imensa dificuldade de entender a linguagem matemática aplicada nas várias definições que existem na disciplina, e como estas definições estavam 'desenhadas' no plano cartesiano.

Com o desenrolar das atividades, percebemos que a dificuldade inicial foi substituída por entusiasmo, pois questões antes não resolvidas foram solucionadas e, principalmente, compreendidas, tanto na parte contextual quanto gráfica. O resultado preliminar deste pequeno experimento de cinco horas foi suficiente para constatar a necessidade de que seja bem compreendido e inicializado o quanto antes os estudos referentes à parte gráfica das mais diversas funções, concomitantemente com um bom embasamento teórico a respeito deste tema tão importante.

Por fim, o uso do software Geogebra, que muitos alunos desconheciam, aumentou a capacidade de fazer conjecturas e interações com os conceitos matemáticos, contribuindo de maneira significativa no estudo de construções e análises gráficas de funções mais complexas. Sendo assim, o uso de tecnologias, aliado à vontade de todos em atingirem seus objetivos, proporcionam um ambiente interativo e instigante, onde quem lucra é a sociedade como um todo. Enfim, esperamos com este trabalho contribuir com aqueles que têm a difícil tarefa de orientar seus alunos na compreensão da importância da visualização das funções no plano cartesiano.

REFERÊNCIAS

[1] BOURBAKI, N. Elementos de historia de las matemáticas. Madrid, Aliança Editorial, 1976.

[2] BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomides. São Paulo, Edgard Blücher, 1999.

[3] DANTE, L. R., Matemática, Volume Único, São Paulo: Ática, 2011.

[4] GEL'FAND, I.M.; GLAGOLEVA, E.G. e SHNOL, E.E.; Functions and Graphs. Rússia, 1990.

[5] GIOVANNI, José Ruy e BONJORNO, José Roberto; Matemática Completa. São Paulo, FTD. 2005.

[6] GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; BONJORNO, José Roberto e SOUSA, Paulo Roberto Câmara; Matemática Completa. Volume 1, 4ª edição. São Paulo, FTD. 2016.

[7] GÓMES, Jorge J. Delgado e VILLELA, Maria Lucia; Matemática (Funções Reais). Rio de Janeiro; Curso de Extensão para Professores. Consórcio Cederj. Fundação Cecierj, 2004.

[8] IEZZI, Gelson; Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 7, 6ª edição. São Paulo, Editora Atual, 2013.

[9] IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos; Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 1, 9ª edição. São Paulo, Editora Atual, 2013.

[10] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos e MACHADO, Nilson José; Fundamentos de Matemática Elementar. Volume 8, 7ª edição. São Paulo, Editora Atual, 2013.

[11] LIMA, Elon Lages; Análise real. Vol. 1. Rio de Janeiro, IMPA. 1989.

[12] LIMA, Elon Lages; Números e Funções Reais. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[13] PIRES, Rogério Fernandes; O Conceito de Função: Uma Análise Histórico Epistemológica. XII Encontro Nacional de Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

[14] PONTE, J. P. The History of the concept of function and some educational implications. The Mathematics Educator, v. 3, n. 2, p.3-8, 1992.

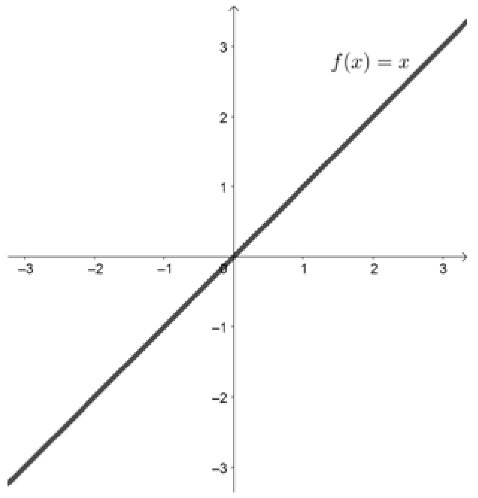
[15] YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de function jusqu'au milieu du XIX e siècle. Fragments d'historie des Mathématiques. Brochure A.P.M.E.P.,n.41, p.7-67, 1981.

ANEXO – Atividade proposta

Aluno(a): ______________________________ Turma:________ Data: _________ Prof. Victor Luiz

QUESTÃO 1

Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.



Esboce os gráficos de:

a) $g(x) = f(x)$, ou seja, $g(x) = x$

b) $g(x) = f(x) + 2$, ou seja, $g(x) = x + 2$

c) $g(x) = f(x) - 2$, ou seja, $g(x) = x - 2$

d) $g(x) = f(x + 2)$

e) $g(x) = f(x - 2)$

f) $g(x) = 2f(x)$

g) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

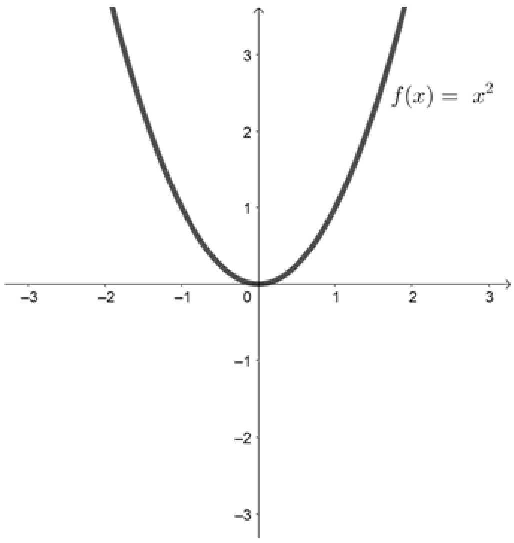
h) $g(x) = |f(x)|$

i) $g(x) = -f(x)$

j) $g(x) = f(-x)$

QUESTÃO 2

Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.



Esboce os gráficos de:

a) $g(x) = f(x)$, ou seja, $g(x) = x^2$

b) $g(x) = f(x) + 2$, ou seja, $g(x) = x^2 + 2$

c) $g(x) = f(x) - 2$, ou seja, $g(x) = x^2 - 2$

d) $g(x) = f(x + 2)$

e) $g(x) = f(x - 2)$

f) $g(x) = 2f(x)$

g) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

h) $g(x) = |f(x)|$

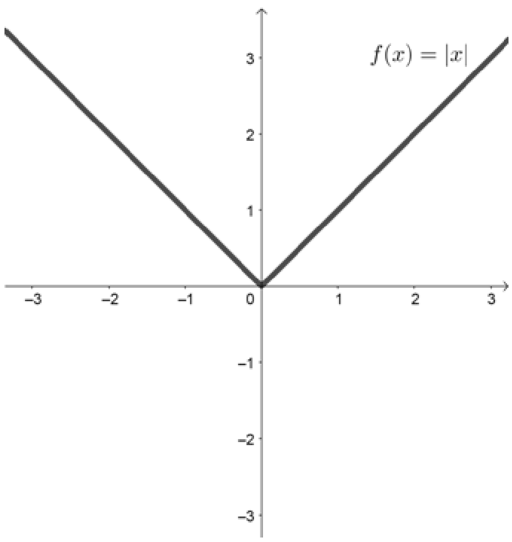
i) $g(x) = -f(x)$

j) $g(x) = f(-x)$

Aluno(a): ______________________________________ Turma:________ Data: _________ Prof. Victor Luiz

QUESTÃO 3

Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.



Esboce os gráficos de:

a) $g(x) = f(x)$, ou seja, $g(x) = |x|$

b) $g(x) = f(x) + 2$, ou seja, $g(x) = |x| + 2$

c) $g(x) = f(x) - 2$, ou seja, $g(x) = |x| - 2$

d) $g(x) = f(x + 2)$

e) $g(x) = f(x - 2)$

f) $g(x) = 2f(x)$

g) $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$

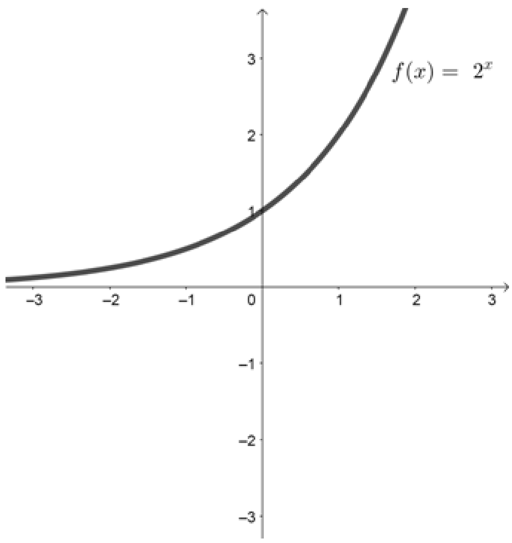
h) $g(x) = |f(x)|$

i) $g(x) = -f(x)$

j) $g(x) = f(-x)$

QUESTÃO 4

Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.



Esboce os gráficos de:

a) $g(x) = f(x)$, ou seja, $g(x) = 2^x$

b) $g(x) = f(x) + 2$, ou seja, $g(x) = 2^x + 2$

c) $g(x) = f(x) - 2$, ou seja, $g(x) = 2^x - 2$

d) $g(x) = f(x + 2)$

e) $g(x) = f(x - 2)$

f) $g(x) = 2f(x)$

g) $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$

h) $g(x) = |f(x)|$

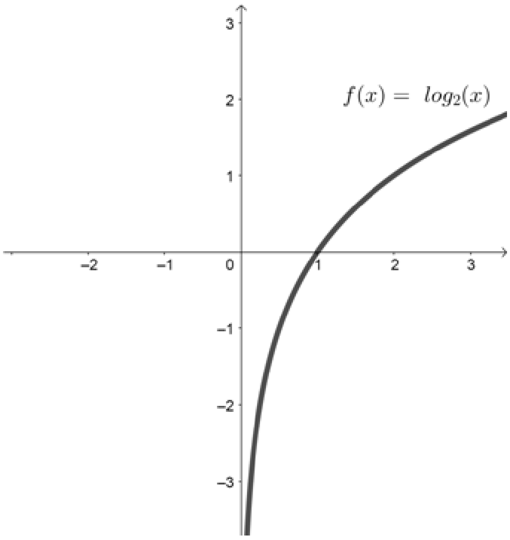
i) $g(x) = -f(x)$

j) $g(x) = f(-x)$

Aluno(a): ______________________________ Turma:_______ Data: ________ Prof. Victor Luiz

QUESTÃO 5

Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$.



Esboce os gráficos de:

a) $g(x) = f(x)$, ou seja, $g(x) = \log_2(x)$

b) $g(x) = f(x) + 2$, ou seja, $g(x) = \log_2(x) + 2$

c) $g(x) = f(x) - 2$, ou seja, $g(x) = \log_2(x) - 2$

d) $g(x) = f(x + 2)$

e) $g(x) = f(x - 2)$

f) $g(x) = 2f(x)$

g) $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$

h) $g(x) = |f(x)|$

i) $g(x) = -f(x)$

j) $g(x) = f(-x)$

QUESTÃO 6

Esboce o gráfico das seguintes funções reais a seguir.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

d) $f(x) = -x^2 - 6x - 5$

e) $f(x) = |x^2 + 6x + 5|$

f) $f(x) = |x^2 + 2x + 3|$

g) $f(x) = |-x^2 + 4x - 7|$

h) $f(x) = |-x^2 - 6x - 5|$

i) $f(x) = |x - 2| - 3$

j) $f(x) = |2x - 3| + 5$

Aluno(a): ________________________________ Turma:________ Data: ________ Prof. Victor Luiz

QUESTÃO 7

Sem utilizar a fórmula da ordenada do vértice $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, encontre o menor valor da função $f: IR \to IR$, $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

QUESTÃO 8

Sem utilizar a fórmula da ordenada do vértice $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, encontre o menor valor da função $f: IR \to IR$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

QUESTÃO 9

Sem utilizar a fórmula da ordenada do vértice $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, encontre o maior valor da função $f: IR \to IR$, $f(x) = -x^2 + 4x - 7$.

QUESTÃO 10

Sem utilizar a fórmula da ordenada do vértice $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, encontre o maior valor da função $f: IR \to IR$, $f(x) = -x^2 - 6x - 5$.

QUESTÃO 11

Utilizando somente gráficos, determine o conjunto solução das inequações abaixo:

a) $x^2 + 6x + 5 \geq 0$

b) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$

c) $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$

d) $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$

e) $|x - 2| \geq 3$

f) $|x - 2| \leq 3$

g) $(x^2 - 8x + 12)(x - 1) \geq 0$

h) $(x^2 - 8x + 12)(x - 1) \leq 0$

i) $|x^2 - 8x + 12| \leq 5$

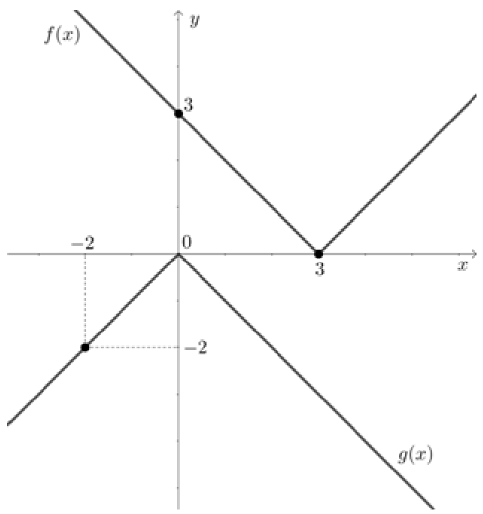
QUESTÃO 12

Sobre o conjunto M dos pontos de interseção dos gráficos das funções definidas por f(x) = |2x – 1| e g(x) = x + 1 é possível afirmar, corretamente, que M:

a) é o único conjunto vazio.
b) possui dois elementos.
c) é um conjunto unitário.
d) possui três elementos.

QUESTÃO 13

No sistema cartesiano representado a seguir, tem-se os gráficos das funções modulares $f: IR \to IR$ e $g: IR \to IR$.

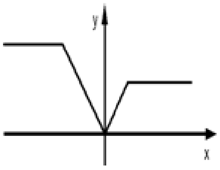


Qual das igualdades representa uma relação entre as funções *f* e *g*?

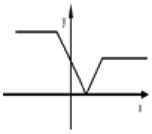
a) $g(x) = f(x+3)$
b) $g(x-3) = f(x)$
c) $g(x) = f(-x-3)$
d) $g(-x) = f(-x+3)$
e) $g(3-x) = -f(x)$

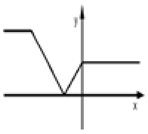
QUESTÃO 14

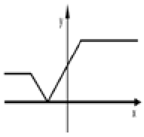
Na figura, está representado o gráfico da função y = f(x).



Com base nas informações desse gráfico, assinale a alternativa cuja figura melhor representa o gráfico da função g(x) = f(1 − x).

a) 

b) 

c) 

d)