UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS (DCEX)
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA (PROFMAT)

DIEGO AYRES AQUINO

ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: OS NÚMEROS RACIONAIS

Ilhéus/Bahia
2023

DIEGO AYRES AQUINO

ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: OS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana dos Santos Silva

Ilhéus/Bahia
2023

A657 Aquino, Diego Ayres.

Análise do material didático à luz da teoria dos campos conceituais: os números racionais / Diego Ayres Aquino. – Ilhéus, BA: UESC, 2023.

123 f. : il. ; anexos.

Orientadora: Flaviana dos Santos Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. (PROFMAT).

Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Material didático. 3. Números racionais. I. Título.

CDD 510.7

DIEGO AYRES AQUINO

ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: OS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana dos Santos Silva

Ilhéus/Bahia
2023

DIEGO AYRES AQUINO

ANÁLISE DO MATERIAL DIDÁTICO A LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: OS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT (UESC), em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 04 de abril de 2023.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profa. Dra Flaviana dos Santos Silva

Orientadora/Presidente da banca – PROFMAT/UESC

____

Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

Examinador PROFMAT/UESC

____

Dra. Alisandra Cavalcante Fernandes de Almeida

Examinadora Externa – IFCE

Ilhéus, Bahia, 04 de abril de 2023.

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho representa uma inestimável conquista, que faz parte de um antigo desejo que carrego comigo desde minha primeira formação acadêmica: ser professor. Alcançar esse objetivo me fez perceber que o aprendizado é um processo que está em constante transformação, que se inicia na nossa concepção, e continua por toda a vida. Desenvolver este trabalho evidenciou a importância das parcerias que precisamos firmar nessa trajetória de construção do saber.

Quero agradecer a essas parcerias, sem as quais sei que não seria possível chegar até aqui.

À minha esposa, companheira e eterna namorada, Maira, que me fez acreditar ser possível alcançar esse sonho, em todos os momentos; principalmente quando minhas inseguranças pareciam ocupar todos os espaços ao meu redor, ela estava ali, para me ajudara encontrar um caminho.

Aos meus filhos, Gael e Liz, que foram, são e sempre serão as motivações e a inspiração para novos aprendizados, e mostraram compreender, em grande parte dos momentos, a ausência e reclusão que marcam a produção acadêmica.

Aos colegas que fiz no Profmat, por todas as turmas pelas quais passei, em especial, a turma de 2017, Renata, Edmilson, Jucélio, Débora, Aline e Douglas, colegas que foram fundamentais nesse processo, nos momentos de angústia e alívio, e que me ensinaram muito sobre a Matemática.

À equipe de coordenação e direção do Centro Educacional Arraial d’Ajuda, em especial à coordenadora do Ensino fundamental II, Thaís, e à diretora, Eunice, que acreditaram e me deram a oportunidade de iniciar minha trajetória como professor.

À Escola que produziu e permitiu o uso do material objeto da pesquisa, e me faz acreditar nas possibilidades de encontrar a poesia no ensino da Matemática.

Ao Profmat e à equipe de professores da Universidade Estadual de Santas Cruz (Uesc);em especial,aos(às) professores(as) Vinicius; Nestor; Karina; e Mirela, que me instigaram a buscar o conhecimento matemático.

À minha orientadora Flaviana, sempre compreensiva e parceira, me incentivando a seguir em frente e a perceber a potência da minha pesquisa, meu agradecimento especial.

RESUMO

O desenvolvimento do conhecimento matemático tem se mostrado um constante desafio para o ensino escolar, pois na Matemática é que são registrados os piores índices de desempenho dos alunos, no Brasil. A linguagem formal da Matemática pode ser um complicador para a compreensão dos alunos. Diante disso, o objetivo deste trabalho foi avaliar,à luz da Teoria dos Campos Conceituais e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a abordagem do conteúdo do Conjunto dos Números Racionais no Material Didático produzido por uma Escola de São Paulo para o Ensino Fundamental. A fundamentação teórica partiu da Teoria dos Campos Conceituais, concebida pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud, voltada a tornar o aprendizado escolar mais significativo, utilizando como arcabouço teórico os estudos de Piaget sobre o desenvolvimento infantil e os de Vygotski sobre a importância da interação social no aprendizado, suportadas pela BNCC. A metodologia é de natureza qualitativa e com caráteres exploratório e bibliográfico, tendo em vista a avaliação do material didático. Como resultado, foi evidenciado que o material objeto da análise permitiu propor o ensino da Matemática a partir de situações elaboradas com a proposta de despertar reflexões sobre os significados dos números racionais e suas representações, fracionária e decimal. Fez-se esse percurso a partir de uma diversidade de situações que, pelo uso de domínios variados da Matemática, contribui para o desenvolvimento gradual da complexidade dos conceitos que envolvem esse conjunto numérico. Valorizando a ação do aluno como forma de aprendizado efetivo, pretendeu-se proporcionar às aulas um ambiente de pesquisa em Matemática, em que as habilidades de tratamento da informação e tomada de decisão se mostraram necessárias no processo. Além disso,ao apresentar os conteúdos preconizados na BNCC (2018), para os números racionais, para turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, possibilitou-se o desenvolvimento das habilidades e do saber escolar relativos aos números racionais, contribuindo para uma formação humana e coerente com os desafios e as complexidades da vida contemporânea.

Palavras-chaves: Campos Conceituais; Material Didático;

.

ABSTRACT

The development of mathematical knowledge has proven to be a great challenge for school education, since mathematics is where the worst student performance rates are registered in Brazil. The formal language of mathematics can be a complicating facts for student’s understanding. Therefore, the objective of this work is to evaluate, in the light of theTheory of Coceptual Fields and the Common National Curriculum Base (BNCC), the approach of the Rational Numbers in the didactic material produced by a school in São Paulo for elementary education. The theor etical basis will be the Conceptual Fields Theory, conceived by the French psychologist Gerard Vergnaud, who seeks to make school learning more meaningful, using as theoretical frame work the studies of Piaget on child development and Vygotski on the importance of social interaction in learning, supported by the BNCC. The methodology is of a qualitative nature, exploratory and bibliographic, with a view to evaluating of the didactic material. As results were evidenced that the material, object of analysis, proposes the teaching of mathematics from situations designed with the proposal to awaken reflections on the meanings of rational numbers in their fractional and decimal representations. It seeks to do this through a diversity of situations that, through the use of various mathematical do mains, contribute to the gradual development of the complexity of the concepts that involve this number set. Valuing the student's action as a form of effective learning, it intends to provide the classes with an environment of research in mathematics, where information processing and decision making skills are necessary in the process. In addition, by presenting the contents recommended in the BNCC (2018) for rational numbers for 6th grade classes, it allows the development of skills and school knowledge related to rational numbers, contributing to a human education and consistent with the challenges and complexities of contemporary life.

Keywords: Conceptual Fields; courseware

Lista de Ilustrações

Figuras

Quadros

Sumário

Introdução

A motivação para o presente trabalho é resultado de seis anos de experiência com o uso de material elaborado por uma Escola de São Paulo para ensino de Matemática aos alunos do Ensino Fundamental II, no Centro Educacional Arraial d'Ajuda, localizado no município dePorto Seguro, no Estado da Bahia.

Durante essa experiência, foi possível observar o interessante desenvolvimento, nos alunos, da compreensão dos conceitos matemáticos, e, em particular, o estudo dos números racionais com o uso dos materiais. A ênfase dada pelo material ao estudo dos números racionais, distribuindo o conteúdo em blocos específicos ao longo dos 6º, 7º e 8º anos dos anos finais do Ensino Fundamental, e inter-relacionados com outros campos da Matemática, permitiu refletir sobre a importância da compreensão e construção dos conceitos, e suas múltiplas formas de representação, em detrimento da repetição e aplicação de conceitos e procedimentos previamente estabelecidos.

Nessa linha de estimular a construção dos conceitos, com vistas a vencer as dificuldades na aprendizagem matemática, no referido material, desenvolvem-se os conteúdos a partir de situações didáticas variadas, que visam a dar significado às relações que compõem os conceitos envolvidos em cada campo da Matemática (aritmética; álgebra; geometria; estatística; probabilidade).

Com base na ação como forma de produção de conhecimento, busca-se tornar a sala de aula um ambiente de pesquisa, no qual o aluno deve conhecer as noções, das mais simples às mais complexas, necessárias ao seu desenvolvimento cognitivo. Para Vergnaud (2003), os conhecimentos aumentam a partir da atividade do aluno; das situações propostas favoráveis ao aprendizado; da mediação; e das formas linguísticas e simbólicas das representações.

Dentro dos volumes que compõem o material, as situações são propostas a partir de uma dinâmica temporal, que leva em conta o processo gradual de assimilação dos diferentes níveis de relações existentes entre os objetos matemáticos, bem como explora as variadas formas de representações (algébricas; linguagem escrita; tabelas cartesianas; tabelas de relações; etc.), ampliando o repertório de domínios da criança, e sua compreensão de todos os aspectos que envolvem essas relações dentro de suas complexidades.

Diante disso, o material apoia-se, entre outras, na Teoria dos Campos Conceituais que, por sua vez, se fundamenta em noções importantes da Teoria do Desenvolvimento de Piaget, como os esquemas e a noção de invariante operatório, sobre o qual se discorre ao longo deste trabalho, formulando suas implicações para o processo de aprendizado escolar.

Vergnaud (2003) afirma que os campos conceituais são o conjunto de conceitos envolvidos em determinada área de conhecimento, e são compostos por situações; classes de situações; noções; relações; operações; classes de operações; e representações; amparadas na natureza dessas áreas de conhecimento, e refletem o seu domínio. Muitos conceitos estão inseridos em várias áreas de conhecimento, mas a construção desses conceitos é feita de forma diferente, em cada uma delas, à medida que se baseiam nas relações próprias de cada campo conceitual.

A formação do conhecimento depende da compreensão de conceitos que se entrelaçam em determinado campo de estudo, e que são construídos por relações estabelecidas pelo sujeito a partir de sua percepção da realidade, e entre essas relações e as representações (significantes) próprias para cada área de conhecimento (VERGNAUD, 2003).

O desenvolvimento de um conceito envolve a noção de outros conceitos, e cada um deles é um campo conceitual em si. Segundo Vergnaud (2003), a formação de significado se faz à medida que a criança é colocada em contato com um número variado de classes de situações.A variedade de situações contribui para que surjam diferentes concepções das noções e relações estabelecidas, pelas quais a criança percebe aspectos mais complexos dos elementos em estudo.

A evolução cognitiva pode ser analisada pelos esquemas elaborados pelos alunos ao solucionarem as situações que se apresentam. A elaboração dos esquemas está relacionada à compreensão de conceitos e aspectos colocados nas situações, assim como dos invariantes operatórios[1]. Para Vergnaud (2003, p.66),

[1] Conhecimentos implícitos e profundos que compõem o alicerce da construção do conhecimento (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação).

> O esquema é uma totalidade dinâmica funcional, uma organização invariante de conduta, quanto a uma certa classe de situações. Essa organização comporta objetivos e esperas, regras de ação, tomada de informação e controle, e é estruturada por invariantes operatórios, isto é, conhecimentos adequados para selecionar a informação e processá-la (conceitos-em-ato, teoremas-em-ato). As possibilidades de inferência em situação também são parte do esquema, pois sempre há uma certa adaptação do comportamento às varáveis da situação; isso exclui a ideia de que possa haver comportamentos totalmente automáticos.

Ao considerar os princípios da Teoria na avaliação do material, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) considera que o aprendizado escolar não se restringe aos conteúdos definidos na grade curricular, mas enfatiza o desenvolvimento de habilidades importantes para a formação de jovens preparados para lidar com as relações complexas da vida cotidiana, na busca de uma sociedade ética, diversa, socialmente justa, e com consciência ambiental.

Acreditamos que a Educação é um processo contínuo, que se desenvolve gradualmente a partir da ação do sujeito; da mediação; dos erros; da construção de significados; e criação de formas de explicitação desses significados. Esse processo é constantemente influenciado pelos estímulos que os ambientes social e escolar proporcionam ao sujeito que aprende. Para alémdo desenvolvimento de conteúdos e habilidades elencadas como função da educação escolar, o significativo processo de construção do conhecimento deve considerar as múltiplas características culturais e sociais que compõem as subjetividades da criança e do adolescente.

Nesse contexto, o desenvolvimento cognitivo passa pela valorização do sujeito, do conhecimento cultural e de formas didáticas que contribuam para a construção de conhecimento significativo, voltado para a liberdade, a formação do pensamento crítico, assim como de cidadãos conscientes de suas capacidades e responsabilidades dentro da sociedade.

Questão de pesquisa

De que forma o material didático em análise aborda o conteúdo do conjunto dos Números Racionais para contribuir, de forma eficiente, com o aprendizado dos alunos na Educação Básica?

Nesse sentido, serão observados os conteúdos, assim como as habilidades, competências, atitudes e os valores importantes para a formação cidadã, e contribuir para a formação de uma sociedade mais humana e socialmente justa.

Objetivos

Como objetivo geral, pretendeu-se avaliar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais e da BNCC (2018), a abordagem do conteúdo do Conjunto dosNúmeros Racionais no material didático proposto e desenvolvido por uma Escola situada na cidade de São Paulo para o 6º ano do Ensino Fundamental.

Para tal fim, foram desenvolvidos os seguintes objetivos específicos:

I. Análise exploratória da Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, descrevendo os aspectos pedagógicos e didáticos a partir de livros do autor e de artigos relacionados ao tema;
II. Descrição do material didático analisado para o ensino do Conjunto dos Números Racionais no 6º ano do Ensino Fundamental II;
III. Descrição do método e dos indicadores utilizados na análise a partir do referencial teórico, da Teoria dos Campos Conceituais, e da BNCC (2018);
IV. Análise do atendimento aos requisitos estabelecidos, e estabelecimento, a partir dos resultados, de correções, em caso de não atendimento, e de pontos de melhoria, quando identificados.

Metodologia

A motivação desta pesquisa surgiu pela experiência de cinco anos com o uso do material didático em análise, em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), em uma Escola particular localizada em Arraial d'Ajuda, distrito de Porto

Seguro, no Estado da Bahia. A Escola atende a um público de classe média da cidade, composto de muitos alunos que migraram de outros estados, países, ou são nativos, filhos de pais que fizeram esse movimento migratório.

Durante o estágio feito na Escola, como componente de minha graduação de Licenciatura, pude acompanhar o desenvolvimento dos alunos, em especial, nas turmas de 6º e 7º anos, no aprendizado da Matemática, e, em especial, nos estudos dos Números Racionais. Ao ser efetivado como professor, pude observar mais de perto a desenvoltura dos alunos na compreensão dos conceitos matemáticos, e a capacidade em elaborar e conjecturar sobre conceitos novos, assim como relacionar os conteúdos com elementos da vida cotidiana.

A partir dessa experiência,decidi estudar o arcabouço teórico que estava por trás do desenvolvimento das atividades propostas no material, e como esses instrumentos contribuem para o processo de desenvolvimento cognitivo, e aprendizado significativo dos conteúdos que se pretende alcançar no ensino de Matemática nas turmas dos anos finais do Ensino Fundamental.

Foi possível observar, na experiência com profissionais que já utilizavam os materiais de Matemática; em assessorias; e artigos relacionados ao desenvolvimento da proposta pedagógica do material, a influência de autores franceses, com destaque para Régine Douady, com sua Dialética-ferramenta-objeto, e Gérard Vergnaud, com a Teoria dos Campos Conceituais, sendo, esse último autor, e a teoria a ele atribuída, o objeto central da fundamentação teórica que compõe o presente trabalho.

A proposta metodológica desta dissertação é fazer uma análise exploratória e qualitativa do material didático desenvolvido por uma Escola de São Paulo para ensino de Matemática, utilizando como base o material utilizado no ano de 2022.

Elencamos como recorte desta análise o conteúdo dos Números Racionais, que, por seus múltiplos significados, e maior complexidade nas representações, exige a percepção de relações multivariadas, e costuma ser motivo de dificuldade encontrada pelos alunos.

A pesquisa foi dividida em quatro capítulos.No primeiro capítulo, trata-se da Teoria dos Campos Conceituais, em seus aspectos pedagógicos e didáticos, e sua aplicação dentro do ensino da Matemática, a partir da seleção de livros e artigos descritos no Quadro 1.

Quadro 1 – Seleção de livros e artigos sobre a Teoria dos Campos Conceituais, em seus aspectos pedagógicos e didáticos e aplicação no ensino da Matemática

Título	Autor	Ano	Tipo
A criança, a matemática e a realidade: Problemas do ensino de matemática na escola elementar	VERGNAUD, G.	2014	Livro
As ciências da educação	VERGNAUD, G.; PLAISANCE, E.	2003	Livro
Didática da matemática: Uma análise da influência francesa	PAIS, L. C.	2001	Livro
A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área	MOREIRA, M. A.	2002	Artigo
Números racionais: Conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica	MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S.	2004	Artigo
A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores	SANTANA, E.; ALVES, A. A.; NUNES, C. B.	2015	Artigo
A teoria dos campos conceituais: Contribuições da psicologia para a prática docente	MAGINA, S.	2015	Artigo
A teoria dos campos conceituais e o ensino de cálculo	LIMA, M. S.; SANTOS, J. V. C.	2015	Livro
Conceitos e esquemas em uma teoria operatória da representação	VERGNAUD, G.	1985	Artigo

Fonte: Elaboração própria.

No segundo capítulo, apresenta-se o material em análise no ensino de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, com recorte para os Números Racionais nas turmas de 6º ano. Constam algumas sequências desenvolvidas para o aprendizado dos significados e significantes dos Números Racionais, nas formas fracionária e decimal; nas relações de equivalência entre frações e decimais; nas operações do campo aditivo e campo multiplicativo para frações e decimais.

São abordados apenas os materiais voltados para os Números Racionais por séries, e a análise está concentrada apenas no material da turma de 6ºano, etapa em que é desenvolvida a maior parte dos conceitos e das representações relativa aos Números Racionais e suas propriedades.

No terceiro capítulo, consta uma confrontação dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais com foco no aprendizado a partir de seus aspectos pedagógicos e didáticos reproduzidos na construção do material didático. Ainda nesse capítulo, são definidos os índices e critérios utilizados para fazer a análise do material didático com foco na aplicação dos conceitos da Teoria dos Campos Conceituais e atendimento à BNCC (2018).

As atividades escolhidas para fazer a análise são de quatro blocos específicos para o estudo dos Números Racionais, envolvendo prioritariamente aspectos conceituais desse conjunto numérico, como o significado da representação fracionária e suas equivalências; as noções relativas às transformações entre representações fracionária e decimal; as operações com frações e decimais.

No quarto e último capítulo, é feita a análise do material a partir dos índices definidos no terceiro capítulo, e a apresentação dos resultados, com propostas de possíveis melhorias.

1 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais atribuída a Vergnaud (2003) é um quadro teórico de estudo sistemático do processo de construção dos saberes escolar e científico, com base nas noções cotidianas, e na formação de noções e conceitos pertinentes a determinada área de conhecimento, envolvendo o aprendizado de curto prazo (nas situações), e longo prazo (desenvolvimento cognitivo); a dialética da visão do cognitivo em termos de competências e esquemas, de um lado, e conhecimentos e concepções expressas de outro; e a importância da mediação nesse processo.

Vergnaud foi discípulo de Jean Piaget e tem, nesse teórico, uma das suas principias influências. Considera conceitos importantes da Teoria de Piaget para aplicá-los no processo de desenvolvimento cognitivo em um ambiente escolar. Os invariantes operatórios e os esquemas são exemplos da influência de Piaget na Teoria dos Campos Conceituais.

Para Vergnaud (1982, p. 40 *apud* MOREIRA, 2002), o conhecimento está estruturado em Campos Conceituais, cujo domínio desenvolve-se ao longo do tempo, pelas experiências e pelo amadurecimento. Os Campos Conceituais são compostos de um conjunto de conceitos; situações; noções; relações; regras de ação; e representações, que se entrelaçam no processo de aquisição.

Dentro do campo aditivo, por exemplo, o conceito do número em seus múltiplos aspectos (medida contínua; medida discreta; cardinalidade; classificação); as relações possíveis, e suas propriedades, entre elementos simbólicos (“maior que”; “menor que”; “igual a”; “acima de”; “antes de”); noções de transformação; temporalidade; espacialidade; são acionados simultaneamente, em níveis progressivos, no processo de aquisição do domínio desse campo.

A formação desses conceitos não ocorre de forma segmentada, isto é, os conceitos pertencentes a determinada área se desenvolvem de forma conjunta, através das relações que os conectam, e se desenvolvem por situações favoráveis. O conceito de Número Racional na sua forma fracionária envolve vários aspectos do símbolo da fração, e seu domínio abrange o conhecimento dos conceitos de divisão, multiplicação, das noções de equivalência, ordenação, classificação, entre outros que detalharemos mais adiante. Os conceitos estão além de uma definição linguística capaz abarcar toda sua complexidade, e pressupõem o conhecimento de um conjunto de noções (objetos, propriedades, classes de objetos, relações e situações e representações) associadas.

O desenvolvimento das noções que compõem os conceitos acontece desde a primeira infância, pelas experiências cotidianas. À medida que a criança cresce, essas noções ganham contornos cada vez mais complexos, que refletem o grau de desenvolvimento das suas percepções diante das nuances do mundo que a cerca. Consequentemente, os conceitos compostos por essas noções também se tornam mais complexos, e, por isso, estão em constante construção.

De acordo com Pais (2011), o início da construção dos conceitos, pela criança, se mostra na sua capacidade de compreender determinadas relações entre objetos a partir de sua curiosidade, mas também pelos estímulos do ambiente em que está inserida. A mãe, na relação com o bebê, está constantemente gerando estímulos que contribuem para o desenvolvimento dessas percepções e das relações. O desafio didático da escola é levar esses conhecimentos de um lugar fortemente marcado pelos objetos do saber cotidiano, ao nível do saber escolar, e como preparação para o saber científico

O teórico russo Lev Vygotski também foi uma influência importante para Vergnaud. Ao desenvolver o conceitode “zona proximal de desenvolvimento”, que analisa o que a criança é capaz de aprender com apoio dos outros e não conseguiria sozinha (VERGNAUD, 2003), estabelece a importância do papel do mediador nesse processo de desenvolvimento cognitivo. Vygotski liga o conhecimento cotidiano, baseado nas experimentações e ações, ao conhecimento científico, baseado na escola e linguagem, de forma bipolar (VERGNAUD, 2003).

Segundo Moreira (2002), Vergnaud reconhece a influência de Vygotski em sua obra, principalmente no que concerne à importância dispensada à interação social, à linguagem, e aos significantes, no desenvolvimento dos domínios relativos ao campo conceitual em estudo.

Pais (2011) mostra que Vergnaud explica que, para a criança, o significado de um conceito está intimamente ligado à resolução de problemas. Ao passo que Vergnaud (2003) argumenta em favor do estudo dos campos conceituais, em contraponto ao estudo dos conceitos isoladamente: o fato de os conceitos ganharem sentido conforme são explorados em situações variadas, as análises de uma situação remetem ao uso de vários conceitos simultaneamente; e, ainda, os mesmos aspectos de determinado conceito não são adequados para tratar situações diferentes, ou para a mesma situação e diferentes formas de tratamento. Mais adiante, apresenta-se a análise de diferentes classes de situações, que envolvem alguns campos do saber matemático.

Para Vergnaud (1996 *apud* PAIS, 2011, p. 57),

> Um conceito é uma tríade que envolve um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito e um conjunto de significantes que podem representar os conceitos e as situações que permitem aprendê-los.

1.1 Os Campos Conceituais

Existem algumas definições possíveis para os Campos Conceituais, que, em linhas gerais, podem ser descritos como um conjunto de situações; relações; classes de relações conceitos e representações; que, inter-relacionados, dão significado a um campo de conhecimento.

Segundo Moreira (2002), Vergnaud apresenta, em alguns trabalhos, os Campos Conceituais como um conjunto de situações cujo domínio requer conceitos de naturezas distintas. Moreira (2002, p. 2) usa uma definição que considera mais completa:

> O campo conceitual é, para ele, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos, operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição.

Desse modo, a base da teoria é a conceitualização (MOREIRA, 2002). Essa importância da conceitualização demanda dos educadores e da escola a máxima atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e das análises conceituais das situações, que permitem aos alunos a criação de seus esquemas no processo de construção do conhecimento.

Vergnaud (2003, p. 74) afirma que “a parte essencial dos processos cognitivos é a conceitualização”. Assim, é importante que o professor se debruce sobre os problemas de conceitualização apresentados pelos alunos.

Contudo, sua teoria não propõe o ensino de conceitos explícitos e formalizados, mas que se perceba a formação de um conceito como fruto de um conjunto de classificações, relações, formas de representações, construídas a partir de situações que os conectem com uma realidade acessível ao aluno, pertinentes a determinada área de conhecimento, e se desenvolvem ao longo do tempo, em um processo no qual a variabilidade de situações propostas permitam seu aprimoramento.

Segundo Moreira (2002, p. 3),

> Consequentemente, a teoria dos campos conceituais é uma teoria complexa, pois envolve a complexidade decorrente da necessidade de abarcar em uma única perspectiva teórica todo o desenvolvimento de situações progressivamente dominadas, dos conceitos e teoremas necessários para operar eficientemente nessas situações, e das palavras e símbolos que podem representar eficazmente esses conceitos e operações para os estudantes, dependendo de seus níveis cognitivos.

Moreira (2002) ainda afirma que os três principais argumentos pelos quais Vergnaud propôs sua teoria são: um conceito não se constrói com apenas uma classe de situação; a análise de uma situação não se faz a partir de um único conceito; a construção de todas as propriedades de um conceito, e de todos os aspectos de uma situação, ocorre ao longo de muito tempo, através de equívocos nas concepções dos conceitos, de situações, procedimentos e significantes.

Os princípios que norteiam a Teoria de Vergnaud são as situações que proporcionam a construção das relações e dão significado aos conceitos. O significado de esquema, invariantes operatórios e sua concepção de conceito, serão tratados nos itens a seguir.

1.2 Conceitos

A formação dos conceitos no desenvolvimento cognitivo é um processo de longo prazo, que se desenvolve à medida que o sujeito do aprendizado é defrontado com situações relativas a esses conceitos. Para Vergnaud(2008),os conceitos não são entidades isoladas, mas se moldam de significado quando estão em contato com outros conceitos, em situações variadas, nas quais se faz necessário uma ação sobre eles para atingir determinado objetivo.

Segundo Vergnaud (1985) um conceito, no estudo do conhecimento, é um tripé de três conjuntos: C=(S, I, Ƨ). O S refere-se ao conjunto de situaçõesque envolvem as relações e propriedades de um campo de estudo, que permitem a formação de significado do conceito. Daí que o contato com uma variedade de situações e classes de problemas permite ao aluno desenvolver diferentes aspectos de um mesmo conceito, e, para tal, devem ser analisadas e classificadas, em sua ordem funcional (em que situações esse conceito é utilizado, para atender que tipo de questionamento); na ordem estrutural (no que se refere à variedade de atividades cognitivas implicadas por situações variadas); da ordem do desenvolvimento (como se dá o progressivo domínio das estruturas pelo aluno); e da ordem epistemológica (que tipo de contradições pode existir entre a concepção de uma situação e a concepção do aluno, e como fazer para que a concepção do aluno evolua, dando sentido ao processo de aprendizagem).

O conjunto I refere-se aos Invariantes Operatórios, isto é, um conjunto de operações de pensamento que se percebe em determinada classe de situação; essas invariâncias remetem a conceitos e teoremas, mesmo que de forma implícita (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação).

O conjunto Ƨ engloba os Significantes, isto é, as representações simbólicas que podem ser utilizadas para relacionar os elementos da situação, que se mostram como importante ferramenta na construção das relações que se pretende que sejam compreendidas pelos alunos em determinada classe de situação. Podem e devem ser variadas, através do uso da linguagem natural; linguagem algébrica; tabelas cartesianas; plano cartesiano; sistema sagital; e outros. O próprio exercício de transformação das situações descritas, em forma de representação para outra, são também elementos construtivos na formação de relações e dos próprios conceitos.

Conforme a criança se desenvolve, os conceitos conhecidos ganham gradualmente contornos mais complexos, e essa complexidade é, em grande parte, construída através da ação da criança em situações favoráveis. Segundo Magina (2005), o conhecimento adquirido pode se mostrar de forma implícita, ou explicita. Implícita, quando o aluno utiliza, mas não consegue expressar seu uso, pelas formas de representação que lhe estão acessíveis. Explícita, quando o aluno utiliza corretamente os conceitos e as relações, e consegue explicar seu procedimento por alguma forma de representação, seja falada, escrita, ou gestual.

O processo de desenvolvimento cognitivo, portanto, passa também pela capacidade do aluno tornar esses conhecimentos explícitos e, consequentemente, pelo desenvolvimento das representações. Vergnaud (2014, p. 19) afirma que "a noção de representação não se reduz à noção de símbolo ou signo, uma vez que ela cobre também a noção de conceito". O símbolo, para ele, é apenas "a parte diretamente visível do *iceberg*conceitual".

A isso se deve o fato de que, no processo de aquisição do conhecimento, as situações propostas e as formas de representação dessas situações devem ser as mais variadas possíveis, pretendendo abarcar o maior número de relações que se pode ter entre os conceitos do campo estudado, completando-os de significado, e munindo o aprendiz de recursos para explicitar esses conhecimentos.

São, portanto, as situações, as relações e os conceitos que as compõem, que fazem com que a criança perceba os vários aspectos dos conceitos envolvidos na realidade do campo em estudo. Daí que Vergnaud (1988, p. 141; 1990, p.5 *apud* MOREIRA, 2002) considera que a principal entrada do processo de desenvolvimento cognitivo são as situações e não os conceitos, visto que elas é que significam os conceitos, e os coloca em estreita relação com o saber cotidiano.

Para Vergnaud (2014), a relação é uma noção geral e primitiva, pois cobre todas as atividades da criança, e utiliza o termo genérico "relações" para descrever desde as relações estáticas, entre objetos e as transformações, derivadas de relações dinâmicas, até as relações entre objeto e entre conjuntos.

As relações entre as propriedades dos objetos (tamanho; cor; forma); posição espacial entre eles (acima; do lado direito; na frente); relações de parentesco (pai; irmão; tio; avós); relações de temporalidade (chegar antes; dias da semana; meses do ano), são muitos úteis no processo de formação dos conceitos e dos invariantes operatórios para as diversas classes de situação nos campos da Matemática.

Segundo Vergnaud (2014, p. 16): "A matemática forma um conjunto de noções, relações, de sistemas relacionais que se apóiam uns sobre os outros". A compreensão desses conjuntos desenvolve-se de forma gradual no processo de aquisição de conhecimento, e segue um caminho de construção diferente da forma pela qual o matemático as compreende.

Nesse contexto, a busca do professor deve ser pelas situações nas quais as relações sejam coerentes com o grau de desenvolvimento dos seus alunos e se prestem ao cálculo relacional do domínio em estudo, ainda que seja interessante apresentar situações com relações mais complexas, sem, contudo, extrapolar os conjuntos de conceitos acessíveis aos alunos em sua compreensão da realidade.

O número é, sem dúvida, o conceito mais importante da Matemática, na escola básica. Com o domínio desse conceito, é possível atingir relações mais complexas para o desenvolvimento que se pretende na educação escolar. Assim como todos os conceitos, o número possui vários aspectos, que são gradualmente apreendidos. Por isso, conhecer esses aspectos a partir da perspectiva de sua construção no desenvolvimento da criança é um instrumento valioso para o mediador.

1.3 Situações

Para Vergnaud (1996, p. 167 *apud* SANTANA; ALVES; NUNES, 2015), uma situação é uma tarefa, e as situações complexas podem ser analisadas como conjuntos de tarefas, para as quais deve-se conhecer sua natureza e suas dificuldades próprias. E ainda afirma que a complexidade está principalmente relacionada aos conceitos envolvidos na situação, mesmo que outros fatores, como a linguagem, escrita do enunciado e complexidade das relações numéricas envolvidas, também influenciem, ainda que em segundo plano.

Segundo Moreira (2002), Vergnaud recorre ao significado de situação usualmente utilizado por psicólogos: os processos cognitivos e as respostas dadas pelo sujeito são uma função das situações com as quais ele é confrontado. As situações colocam em jogo conceitos e relações possíveis na realidade do campo de estudo, e quanto maior a variedade de situações ofertadas ao aluno, maior a compreensão dos conceitos envolvidos e das relações que existem entre eles.

Os conhecimentos dos alunos são moldados pelas situações que vão, progressivamente, dominando. Quanto maior o grau de complexidade dessas situações, novos e mais complexos aspectos desses conceitos se apresentam (SANTANA; ALVES; NUNES; 2015).

Segundo Moreira (2002, p. 6),

> O sentido é uma relação do sujeito com as situações e com os significantes. Mais precisamente, são os esquemas, i.e., os comportamentos e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante (representação simbólica) que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo (VERGNAUD, 1990, p. 158; 1993, p. 18).

As situações, para Vergnaud (LIMA; SANTOS, 2015), podem ser divididas em duas categorias. A primeira corresponde às situações em que o aluno já possui as competências e conhece os procedimentos para solucioná-las. Por isso, é uma relação de filiação dos conhecimentos já adquiridos. A segunda classe é constituída de relações nas quais as competências do aluno não são suficientes para tratá-las; deve-se, a isso, uma ruptura dos conhecimentos adquiridos, e uma série de tentativas, a partir de procedimentos familiares, que são testados, abrindo espaço para a descoberta, ou até mesmo para criação de novos procedimentos.

Na primeira classe, os procedimentos, já apreendidos e organizados, são aplicados quase que automaticamente. Na segunda classe, abre-se espaço para a reflexão; criação de hipóteses; e verificação da validade delas. Em muitos casos, emergem novos conceitos, e pode-se verificar a mudança do *status* cognitivo pela capacidade de expressar os conceitos subjacentes da ação (LIMA; SANTOS, 2015).

Considerando as situações como a primeira entrada no processo de aquisição de conhecimento, a percepção de invariâncias por parte do indivíduo imbuído na ação, alimenta processo de elaboração do pensamento, e se apresentam pela utilização de conceitos, propriedades e teoremas ainda que implícitos. Esse conjunto de operações de pensamento percebidas como favoráveis para de determinada classe de situação, representam os Invariantes Operatórios.

1.4 Invariantes Operatórios

Para Vergnaud (2014), as questões que envolvem os invariantes operatórios são similares às questões simbólicas, ou seja, a representação da realidade. As representações, para serem funcionais, devem representar a realidade (aspecto semântico) e se prestar ao cálculo (aspecto sintático). São, portanto, os invariantes operatórios decisivos, segundo Vergnaud (2014), para a construção das representações em seus dois aspectos (sintático e semântico).

Vergnaud (2014, p.308) esclarece: “Sem dúvida é de Piaget o grande mérito de ter mostrado o papel da noção do invariante na gênese da inteligência do bebê, na criança”. Os invariantes operatórios podem ser compreendidos, grosso modo, como um conjunto de ações tomadas em determinada classe de situação, chamados por Vergnaud de teoremas-em-ação e conceitos-em-ação.

Um conceito em ação é considerado pertinente ou não em determinada situação, ao passo que um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira, na ação, algo que deve ser validado (VERGNAUD, 2009, p.23 *apud* NOGUEIRA; REZENDE, 2014). São, portanto, os teoremas e conceitos utilizados, mesmo que de forma implícita, em uma situação.

Na situação: “A quantidade de figurinhas de Liz é 5 vezes a quantidade de figurinhas de Sabrina”,a expressão “5 vezes” representa uma relação escalar em medidas de mesma natureza, remetendo ao uso de um teorema de isomorfismo: $f(5 \cdot x) = 5 \cdot f(x)$, um caso particular da propriedade de funções lineares (VERGNAUD, 2003):

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Para Vergnaud (1994, p. 54 *apud* MOREIRA, 2002), os teoremas em ação mais utilizados são as propriedades isomórficas da função linear:

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

$$f(x - x') = f(x) - f(x')$$

Como conceitos-em-ação, podem ser citados os objetos (físicos, numéricos); as relações (“maior que”; “igual a”; “chegou antes”; “abaixo”; “estar entre”), e as noções (classificação; ordenação; transformação; equivalência; e aplicação), que envolvem essas relações. Apesar de se complementarem dialeticamente, no processo de aprendizado, os teoremas em ação e conceitos em ação diferenciam-se, na medida em que os conceitos não permitem inferências, posto que essas derivam das propriedades dos objetos em estudo. De forma recíproca, as propriedades, como derivação de ações sobre os objetos, e as relações que os conectam diante das percepções da realidade, é que dão sentido à existência dos conceitos (MOREIRA, 2002).

Os teoremas em ação e conceitos em ação não são propriamente conceitos e teoremas, no sentido científico, a menos que sejam explícitos; contudo, são eles que dão significado aos conceitos e determinam as ações favoráveis em determinada situação. O uso das representações concretizam a mudança de status do conhecimento, sendo o papel da escola permitir que os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação se tornem explícitos.

Para Vergnaud(2014, p.305),

> Um dos fatos melhor estabelecidos da psicologia cognitiva é o de que o desenvolvimento do pensamento se faz em etapas e que certas grandes etapas são caracterizadas pela construção ou aquisição de novos invariantes operatórios.

Os invariantes podem ser classificatórios, relacionais ou quantitativos. As noções que dão características aos objetos, como tamanho; cor; forma, são os invariantes classificatórios, e as relações que se pode estabelecer entre eles, como “maior que”; “igual a”; “são semelhantes”, os invariantes relacionais.

Os invariantes quantitativos remetem à “noção de conservação de quantidades”, que faz parte da construção do conceito de número, tanto como medida de um conjunto discreto (cardinalidade); conjuntos de objetos distintos que possuem a mesma quantidade; e conjuntos não discretos (comprimento; massa; volume; etc.). Como exemplo nos conjuntos não discretos, a percepção de que um tecido cortado em partes menores, conserva o comprimento total, quando esses pedaços são alinhados.

1.5 Esquemas

O conceito de esquema foi desenvolvido, em grande parte, por Piaget, como sendo as formas de organização das habilidades sensório-motoras e intelectuais, ou um conjunto de ações lógicas que são tomadas em determinadas classes de situação. Piaget percebeu, ao observar exaustivamente o comportamento de seus filhos, que existe uma invariância na organização dessas ações.

Essas invariâncias são a representação do conhecimento adquirido com o êxito de suas ações, que se tornam mais eficientes, à medida que a criança é exposta com maior frequência a essa classe de situação e com a variedade de formas com que essa classe de situações pode se mostrar. Os esquemas não são, no entanto, um estereótipo, visto que a sequência de ações de coleta de dados e controle depende dos parâmetros da situação (MOREIRA, 2002).

A formação dos esquemas deve-se, portanto, às ações tomadas pelo indivíduo em um conjunto variado de situações, nas quais a Educação deve proporcionar a construção de um repertório amplo e diversificado de esquemas sem, contudo, torná-los procedimentos engessados (MOREIRA, 2002).

Segundo Nogueira e Resende (2014), o esquema é fundamental na atividade de construção do conhecimento e, para Piaget, essa construção significa uma adaptação. Vergnaud remete essa adaptação às situações, e propõe que, na teoria de Piaget, onde se fala em “interação sujeito-objeto”, deveria ser substituído por “interação esquema-situação” (MOREIRA, 2002, p. 7).

Moreira (2002) aponta que Vergnaud define os ingredientes que compõem o esquema como: Metas e antecipações: todo esquema é proposto para atender a uma classe de situações na qual o indivíduo deve descobrir uma finalidade para sua atividade, e resultados prováveis; Regras de ação: dão sequência às relações que vão compor o esquema, como conectivos lógicos, dos quais fazem parte a busca de informações e controle das ações, e são, por isso, a parte geradora dos esquemas; Invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação): permitem identificar, de forma implícita ou explícita, os elementos, conceitos e as relações pertinentes à situação, por meio das quais podemser inferidas as ações adequadas para atingir o objetivo; e as Possibilidades de inferência: que permitem, a partir das implicações dos três ingredientes anteriores, com os recursos de que o indivíduo dispõe, manipular adequadamente os elementos.

Os esquemas podem ser gestuais, como a contagem, por gráficos, tabelas, ou mesmo verbais, utilizados para contar histórias. Os algoritmos são esquemas que permitem estabelecer elos entre conhecimento e ação (VERGNAUD, 2014), por uma quantidade finita de operações, mas nem todo esquema é um algoritmo. Os algoritmos, quando usados repetidamente, tornam-se esquemas ordinários ou hábitos (VERGNAUD, 1998, p. 172*apud* MOREIRA, 2002).

Os esquemas mostram-se como conexão entre a conduta do sujeito e suas representações, dentre elas, do produto da interação entre situação e esquema, bem como a conceitualização. Contudo, são os invariantes operatórios que permitem as relações adequadas entre teoria e prática, posto que todas as ações a serem tomadas a partir das informações disponíveis dependem inerentemente dos conceitos-em-ação, dos quais o indivíduo dispõe e dos teoremas-em-ação que colocará em jogo.

2. Apresentação do Material Didático

2.1 O Livro Didático

O livro didático é uma ferramenta intensamente difundida para uso de professores e estudantes no ensino escolar, além de representar uma fonte de orientação e consulta confiável dos conteúdos, de atividades. Trazem propostas de contextualização desses conteúdos e propostas de projetos para tornar o aprendizado mais significativo.

Contudo, existem visões divergentes sobre as características que definem um bom livro didático. Essas divergências refletem, em grande parte, diferentes visões sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

O Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD[2]), gerido pelo Ministério da Educação (MEC), é destinado a avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, e define critérios para a escolha dos materiais didáticos visando a atender as legislações que regulamentam a Educação, no Brasil, a saber: a Constituição Federal de 1988; a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996; o Plano Nacional de Educação (PNE), promulgado pela Lei n. 13.005/2014. O PNLD tem a BNCC (2018) como um dos principais critérios de avaliação. Segundo o Guia do PNLD:

> O que dá a um livro o caráter e a qualidade didático-pedagógicos é, mais que a forma própria de organização interna, o **tipo de uso que se faz dele**; e os bons resultados também dependem diretamente desse uso. [...] O que pode transformá-lo [...] é o **uso adequado à situação particular de cada escola**. Podemos exigir – e obter – bastante de um livro, desde que conheçamos bem nossas necessidades e sejamos capazes de entender os limites do LD e ir além deles (BRASIL, 2007a, p. 14, grifos dos autores).

---

[2]O Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. (Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld.Acesso em: 15 jan 2023.)

A escolha de um Livro Didático adequado deve também levar em conta o Projeto Político-Pedagógico (PPP) da Escola, refletindo a visão pedagógica da equipe gestora, assim como dos professores. Visando a uma educação voltada para o desenvolvimento da autonomia, construção de significados e para o pensamento crítico, a Escola de Arraial d'Ajuda optou por adotar o material desenvolvido pela Escola de São Paulo.

2.2. Objeto da Análise

O material didático avaliado nesta dissertação foi produzido por uma Escola situada em São Paulo, e propõe o estudo dos conteúdos sob a perspectiva da ação da criança. O desenvolvimento desse material iniciou-sena década de 1990, quando a Escola introduziu em sua proposta pedagógica o Projeto de Integração de Matemática.

Esse projeto visava promover a integração entre os agentes envolvidos na educação matemática desde a Pré-escola até o terceiro ano do Nível Médio, com o objetivo de atender aos anseios, da equipe gestora da Escola,de tornar o processo de ensino e aprendizagem mais significativo. A Matemática teve papel importante no projeto, pois se mostrava a área na qual a Escola mais se destacava na construção de um processo inovador de ensino e aprendizagem (MERCADANTE *et al*., 2006).

O contou com a participação de coordenadores, orientadores, professores polivalentes e especialistas e foi coordenado pela doutora em Educação Matemática, Cristina Maranhão, dos segmentos do Ensino Infantil e Fundamental. As reflexões geradas nesse processo tratavam de questões como a aproximação entre teoria e prática; integração das áreas de conhecimento como forma de desenvolver um projeto educacional que valoriza a troca de experiências e concepções entre os profissionais e como construir planejamentos por área e séries, sem perder a visão geral das diversas disciplinas e dos objetivos gerais da escola (MERCADANTE *et al*., 2006).

A construção do material didático objetivou atender a essas demandas desafiadoras da Educação, e contou com a participação de coordenadores e professores em sua elaboração. As situações propostas no material, que são didaticamente pensadas com foco no desenvolvimento de conceitos e teoremas pertinentes a cada conteúdo, são constantemente revisadas com base nas experiências vivenciadas e relatadas pelos professores durante sua aplicação nas aulas.

O processo que levou à escolha em adotar o material, pela Escola de Arraial d'Ajuda, foi tomada pela equipe de direção da escola, no ano de 2004, após uma produtiva experiência com a assessoria que foi prestada para a área de gestão escolar no período de 2001 a2003. Durante as assessorias a direção identificou, no material didático e na proposta pedagógica que englobava, grande afinidade com as propostas da escola e das famílias atendidas. A valorização da ação do sujeito no processo de aprendizado; boas perguntas na mediação, e a promoção de reflexões acerca das conjecturas e sua validade,refletiam os anseios da equipe gestora em promover um ensino permeado de significado.

Desde então, o material tem sido utilizado nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, composto por blocos divididos por conteúdos e em fichas destacáveis (consumíveis). Descrevemos, a seguir, os blocos de Matemática para as turmas dos anos finais do Ensino Fundamental.

Para as turmas de 6º ano:

- Números Racionais III – Representação fracionária;
- Números Racionais III – Representação decimal;
- Números Racionais IV;
- Números Racionais V;
- Porcentagem I;
- Geometria III;
- Múltiplos e Divisores II;
- Expressões.

Para as turmas de 7º ano:

- Múltiplos e Divisores III;
- Números Racionais VI;
- Números Racionais VII;
- Equações I;
- Medidas;
- Geometria IV;
- Porcentagem II;
- Números Inteiros I.

Para as turmas de 8º ano:

- Porcentagem III;
- Números Racionais VIII;
- Proporcionalidade;
- Equações II;
- Geometria V;
- Sistemas Lineares I.

E para as turmas de 9º ano:

- Potenciação;
- Radiciação;
- Números Reais;
- Geometria VI;
- Fatoração;
- Equações III;
- Frações Algébricas.

Além dos blocos de conteúdos compostos por fichas destacáveis, constam no material, blocos de familiarização, com exercícios também divididos por conteúdos, utilizados como apoio para as atividades de casa e também para uso em sala. A Escola de Arraial d'Ajuda deixou de adotar os blocos de apoio devido ao alto custo do material.

A dinâmica de uso do material é complexa e contribui para a construção de estratégias de organização por parte de alunos e professores. Os blocos são compostos por fichas destacáveis, nas quais os alunos devem desenvolver as atividades. Após a execução e correção, quando necessário, as fichas são arquivadas em uma pasta, e o material será utilizado para futuras consultas, na execução de tarefas, ou até mesmo de atividades avaliativas. As pastas de arquivamento das fichas são parte importante do processo, pois trazem todo o histórico de produção do aluno ao longo do trimestre, e por isso fazem parte das produções que vão compor a nota do aluno naquele trimestre.

O professor deve orientar a preparação da ficha, ou das fichas, e de qual bloco o aluno deve destacá-la(as) para a execução naquele dia, e definindo também se será utilizada em aula coletiva (em conjunto com o professor); individualmente; em duplas; ou grupos; de acordo com os objetivos de cada ficha. Normalmente, as fichas que têm por objetivo a introdução, ou institucionalização de um conteúdo, são feitas coletivamente, de modo que haja debate e reflexão sobre as hipóteses levantadas.

Uma característica interessante das fichas destacáveis é que proporcionam maior liberdade no planejamento das aulas, na medida em que o professor pode lançar mão do uso de blocos variados, intercalando fichas de acordo com o desenvolvimento e interesse da turma.

Em paralelo ao uso dos blocos, os alunos utilizam um caderno de regras, no qual são registrados os conceitos e teoremas que se tornam explícitos. O registro no caderno, chamado de institucionalização, ou formalização, é feito no momento em que o professor percebe que o conhecimento se torna explícito.

É interessante observar que a dinâmica de uso do material demanda grande preparo do professor para contextualizar os conteúdos; abertura para a escuta das conjecturas que, porventura, surjam, e debates que podem aflorar a partir dessas hipóteses.

A escolha por tratar o conteúdo dos Números Racionais se deve ao fato de que a sua multiplicidade e complexidade de significados e representações se mostram como uma barreira para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Segundo Oliveira (2016), existem várias pesquisas sobre a dificuldade no aprendizado dos Números Racionais, entre eles,a autora cita Valera (2003); Onuchic e Alevatto(2008); Quaresma e Ponte (2012).

Entre as dificuldades, Oliveira (2016, p. 2 *apud* VALERA, 2003) cita a localização da representação fracionária na reta numérica; os conceitos de numerador e denominador (OLIVEIRA, 2016 *apud* SEVERO, 2008); e a suposição de rupturas com ideias construídas na aprendizagem dos Números Racionais (OLIVEIRA, 2016); e nos Parâmetros Curriculares Nacionais(BRASIL, 1998). Acrescentamos as relações de equivalência, que permitem que significantes diferentes tenham o mesmo significado.

Em consonância com essas dificuldades, com o tempo para a estabilização desses conceitos e representações no processo de desenvolvimento cognitivo e com a BNCC (2018), o material em estudo neste trabalho apresenta o conteúdo dos Números Racionais em blocos específicos, que se distribuem do 4º ao 8º ano do Ensino Fundamental, e são paralela e gradualmente aplicados nos demais blocos de Matemática (Blocos de Geometria; Porcentagem; Equações; Proporcionalidade; outros).

Nos 4º e 5º anos, os blocos utilizados são, respectivamente, o de Números Racionais I e Números Racionais II, quando são desenvolvidos os conceitos das frações em suas representações fracionária e decimal, a partir de elementos contidos na materialidade dessas faixas etárias, como a divisão de chocolates; pizzas; sacos de balas; e grupos de objetos do imaginário dos alunos.

No 6º ano, faixa etária na qual centramos a análise exposta neste trabalho, são utilizados os blocos: Números Racionais III – Representação Fracionária; Números Racionais III – Representação decimal; Números Racionais IV; e Números Racionais V, que serão descritos com detalhes mais adiante. Vale ressaltar, aqui, o uso, também no 6º ano, do bloco Porcentagem I, no qual os conceitos aprendidos, principalmente os de equivalência e simplificação de frações, e as transformações entre representações, são aplicados à porcentagem. Acrescentamos que esse bloco não será objeto de análise no presente trabalho.

Uma diferença importante entre a proposta de aprendizado dos Números Racionais, apresentada pelo material em relação ao ensino tradicional, que vale ser destacada, é que as operações de adição e subtração de frações, objetos de estudo no bloco Números Racionais IV, são estudadas sem o uso do recurso do Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Os alunos devem, portanto, encontrar as equivalências que permitem realizar essas operações. Os instrumentos do MMC e Máximo Divisor Comum (MDC) são introduzidos no 7º ano.

No 7º ano, os Números Racionais são revisitados através dos blocos Números Racionais VI e VII. No primeiro, as operações com frações são estudadas como maior grau de dificuldade, no que se refere à grandeza dos valores utilizados, e onde novos recursos, como o MMC e MDC podem ser necessários. Esses instrumentos são desenvolvidos no bloco de Múltiplos e divisores, que é trabalhado em paralelo ao bloco

Racionais VI. Além disso, são introduzidos instrumentos, como a simplificação cruzada para as operações de multiplicação, e o cálculo de expressões com frações.

No bloco Números Racionais VII, são revisitadas as operações com decimais. Resgatam-se as conversões entre frações e decimais, e a conversão pela divisão do numerador pelo denominador, e propõe-se reflexões sobre composição e decomposição nas operações do campo multiplicativo, e os inversos multiplicativos, como ferramenta de desenvolvimento dos cálculos mentais. São também objeto de estudo as expressões com uso de decimais e frações, de forma simultânea, e o estudante pode escolher qual das representações utilizará para desenvolvê-las. Vale destacar também o bloco de Porcentagem II, no qual os conceitos dos Números Racionais se apresentam como ferramentas da porcentagem no universo da Matemática Financeira.

No 8º ano, o bloco VIII é o único que trata especificamente dos Números Racionais, em que são estudadas as dízimas periódicas e suas representações fracionárias e decimais; sua ordenação pela localização na reta numérica, com os Números Racionais negativos; as operações com Números Racionais positivos e negativos e as propriedades das operações no conjunto dos Números Racionais (no Anexo A constam as capas dos blocos com o índice das fichas).

2.3 Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária

A descrição dos blocos do 6º ano é o foco principal da análise. O bloco Números Racionais III – Representação Fracionária contém 15 fichas com os conceitos de fração como parte do todo, aplicados aos objetos; aos conjuntos de objetos e às medidas; às noções de equivalência entre frações, de complemento do inteiro; e também o conceito de frações impróprias e as transformações de representações na forma fracionária e na forma mista, e a noção de ordenação, pela comparação entre frações e localização na reta numérica.

Esse bloco é iniciado com exercícios de familiarização, isto é, voltados para relembrar os conceitos vistos nas séries anteriores, utilizando representações gráficas como forma de relacionar as representações fracionárias com os objetos contidos no universo de compreensão dos alunos.

A seguir,nas figuras 1 a 14, constam alguns exemplos de exercícios do bloco Números Racionais III – Representação Fracionária.

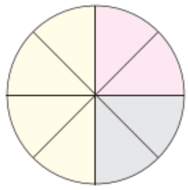
Figura 1– Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações – 1

1. Observe a figura ao lado e responda:

a) $\frac{1}{2}$ dessa figura está amarelo? ____________

b) $\frac{1}{4}$ dessa figura está rosa? ____________

c) $\frac{2}{8}$ dessa figura está cinza? ____________



Objetivos da atividade da figura 1:

Relacionar a representação fracionária (símbolos numéricos) com a representação geométrica na figura do círculo (pode ser uma pizza, por exemplo);

Despertar para a noção de equivalência entre frações.

Na primeira atividade (fig. 1) da primeira ficha, o aluno deve relacionar a representação fracionária com a representação gráfica, a partir de um objeto dividido em oito partes; entretanto, as perguntas apresentam frações nas quais os denominadores não são necessariamente o número 8. É esperado que ocorra o questionamento sobre o significado do denominador, como o total de pedaços da pizza, e a reflexão sobre a relação entre numerador e denominador, na representação fracionária (toda fração cujo numerador é metade do denominador é equivalente a $\frac{1}{2}$).

Figura 2–Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações – 1

3. Complete com a forma de fração.

a) De uma caixa com 6 chocolates, um estava estragado.

____________ dos chocolates estava estragado.

____________ dos chocolates não estavam estragados.

b) Sete meses do ano têm 31 dias.

____________ do ano são meses de 31 dias.

____________ do ano são meses que não têm 31 dias.

Objetivos (fig. 2):

Usara representação fracionária em situação e a noção do complemento;

Reconhecer a noção de representação do inteiro como fração, onde numerador e denominador são iguais, e a noção do complemento do inteiro.

Figura 3 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações – 1

Figura 4– Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações – 1

Objetivos (fig. 3 e 4):

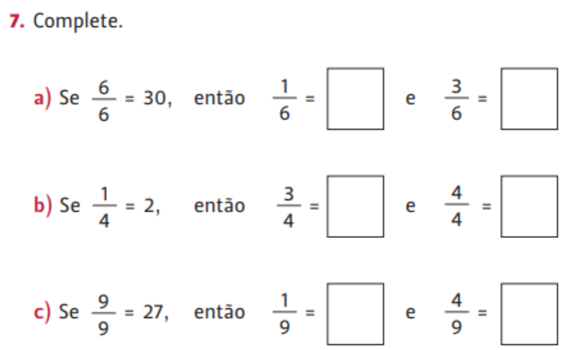
Calcular as frações de conjuntos de objetos através da relação entre representações;

Resgatar os invariantes operatórios para cálculo de frações de conjuntos de objetos.

A graduação no nível de dificuldade apresenta-se também na representação gráfica. No item (a) fica fácil fazer a divisão do conjunto em 4 partes, já no item (d), a divisão em 9 partes, ou seja, grupos de quatro, não é tão evidente.

É comum que os alunos tragam formas diferentes de interpretar as frações: como a parte do todo, no item (d), por exemplo, encontrar $\frac{4}{9}$ de 36 seria dividir o 36 por 9, o que significa encontrar $\frac{1}{9}$ de 36, e multiplicar o resultado por 4 para encontrar $\frac{4}{9}$; ou na forma de proporção, isto é, $\frac{4}{9}$ significa pegar 4 a cada 9, daí tem-se a divisão de 36 por 9, para encontrar quantos conjuntos de 9 bombons tem-se em 36, e multiplicar o resultado por 4, que é a quantidade de bombons que serão pegos em cada conjunto de 9. Apesar de os cálculos serem iguais, os significados que levaram a essas conclusões são de diferentes ordens.

Figura 5– Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações – 1


7. Complete.

a) Se $\frac{6}{6} = 30$, então $\frac{1}{6} = \boxed{}$ e $\frac{3}{6} = \boxed{}$

b) Se $\frac{1}{4} = 2$, então $\frac{3}{4} = \boxed{}$ e $\frac{4}{4} = \boxed{}$

c) Se $\frac{9}{9} = 27$, então $\frac{1}{9} = \boxed{}$ e $\frac{4}{9} = \boxed{}$

Objetivos (fig. 5):

Calcular a parte a partir do todo, e o todo a partir da parte;

Reforçar os invariantes operatórios que vão compor os esquemas de situações envolvendo as frações, e o domínio do conceito.

O desenvolvimento da noção de equivalência de frações é a mais importante desse bloco, e gera muito desconforto nos alunos. Por esse fato, muitas situações são propostas para que os alunos identifiquem essas equivalências, partindo de variadas formas de representações, e se valendo de materiais didáticos, como pizzas de madeira, utilizadas de forma a tornar concreto o desenvolvimento dessa noção.

Seguem, nas figuras 6 a 14, alguns exemplos de situações propostas.

Figura 6 - Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Problemas – 1

1. Resolva.

a) Uma peça de tecido mede 35 metros.

$\frac{1}{5}$ da peça mede ____________________.

$\frac{3}{5}$ da peça medem ____________________.

Objetivo (fig. 6):

Calcular a fração de uma medida de comprimento (número e seu aspecto de medida), a partir do valor do inteiro.

Figura 7 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Problemas – 1

c) $\frac{3}{5}$ da capacidade de um recipiente são 36 litros.

$\frac{1}{5}$ da capacidade do recipiente é ____________ litros.

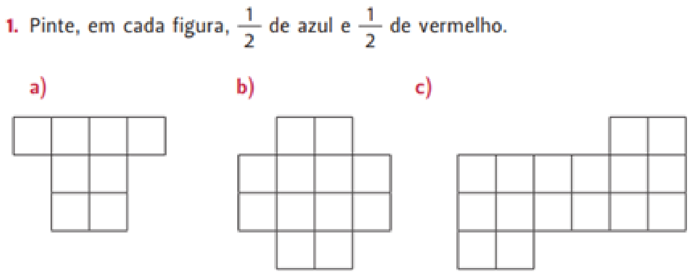
O recipiente tem a capacidade de ____________ litros.

Objetivo (fig. 7):

Calcular a fração de uma medida de capacidade (número e seu aspecto de medida), a partir do valor de outra fração, e calcular o valor do inteiro a partir das partes.

É necessário, para os alunos, na maioria dos casos, encontrar $\frac{1}{5}$ para chegar ao inteiro $\frac{5}{5}$. Alguns alunos percebem, ao serem confrontados com o cálculo para encontrar o inteiro, que faltam para completar o recipiente, $\frac{2}{3}$ de 36 litros, portanto, 24 litros, e daí concluem que o recipiente tem 60 litros.

Figura 8 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações – 2



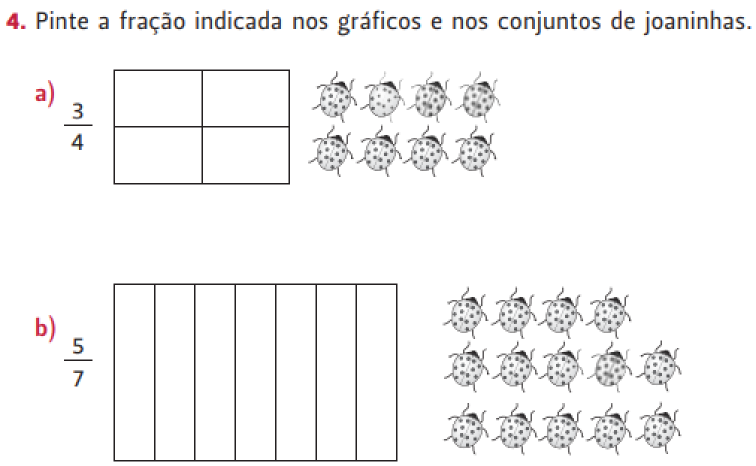
Objetivos (fig. 8):

Definir a fração a partir de formas não regulares;

Em frações, como partes iguais, desenvolver também a noção de equivalência:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16}$$

Figura 9 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações – 2



Objetivos (fig. 9):

Transformar a representação fracionária na representação gráfica e na representação de conjunto;

Desenvolver a nação de equivalência: $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$ no conjunto de joaninhas.

Figura 10- Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações: Problemas – 2

1. Um terço de uma caixa-d'água contém 360 litros. Quantos litros contém a caixa-d'água completa? Represente, graficamente, essa situação.

2. Maria e Claudinha estavam tão alegres que resolveram contar as estrelas do céu. Maria contou 155 estrelas e cansou. Claudinha contou $\frac{2}{5}$ das estrelas que Maria contou e desistiu. Quantas estrelas Claudinha contou?

Objetivos (fig. 10):

Calcular o todo conhecendo a parte e a parte conhecendo o todo, a partir de uma situação-problema;

Usar o número como uma medida (litros), e como cardinalidade (quantidade de estrelas);

Variar a representação da escrita da fração, linguagem escrita (um terço no problema 1) e sua representação fracionária (2/5 no problema 2).

Figura 11– Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações: Problemas – 3

1. Complete.

a) Um homem pintou $\frac{5}{8}$ de um muro antes do almoço e $\frac{1}{4}$ depois do almoço.

Resta ainda pintar ____________

Objetivo (fig. 11):

Desenvolver a noção de adição e complemento de Números Racionais na forma fracionária.

Nessa situação, não há uma medida que possa ser utilizada para fazer o cálculo. O aluno pode utilizar o recurso de definir uma medida, na qual a escolha deve facilitar o cálculo, como 8, ou múltiplo de 8, para o muro, de forma que possa calcular a partir das medidas. Como os alunos ainda não foram confrontados com situações de operações entre frações de denominadores diferentes, podem recorrer às representações gráficas (fig. 12) para encontrar a solução.

Figura 12– Esquema para solução da questão da figura 11, com uso de representações geométricas

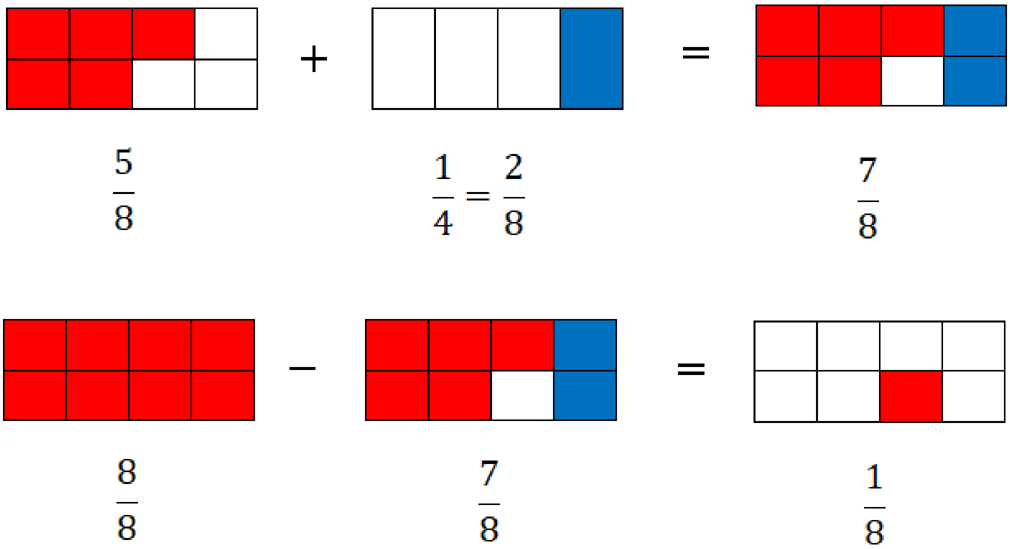


Figura 13– Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações: Equivalência – 1

1. Uma pizzaria servia pizzas de um só sabor, ou seja, não servia pizzas meio napolitana e meio três queijos, por exemplo. Portanto, elas eram de uma só cor.
Além disso, cada pizza era de acordo com o número de pessoas de cada mesa.
Um garçom desastrado, ao atender os pedidos de 6 mesas, cujas pizzas eram de sabores diferentes e divididas em número de partes diferentes, de acordo com o número de ocupantes das mesas, desequilibrou-se, caiu e misturou todos os pedaços.
Utilizando o material com círculos de madeira, ajude o garçom a montar as pizzas.

Figura 14– Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha Frações: Equivalência – 1

2. Resolva.

Recobrir é cobrir sem deixar vãos nem ultrapassar.

a) Pegue um pedaço de pizza da mesa com 2 pessoas e recubra-o com pedaços das outras pizzas; depois, complete.

$\frac{1}{2} = \frac{\_\_}{4}$ ou $\frac{1}{2} = \frac{\_\_}{6}$ ou $\frac{1}{2} = \frac{\_\_}{8}$ ou $\frac{1}{2} = \frac{\_\_}{12}$

b) Pegue um pedaço de pizza da mesa com 4 pessoas e recubra-o com pedaços das outras pizzas; depois, complete.

$\frac{1}{4} = \_\_ = \_\_$

Objetivo (fig. 13 e 14):

A partir do uso do material didático, comprovar as equivalências entre frações, e construir os invariantes operatórios que permitem encontrar outras equivalências.

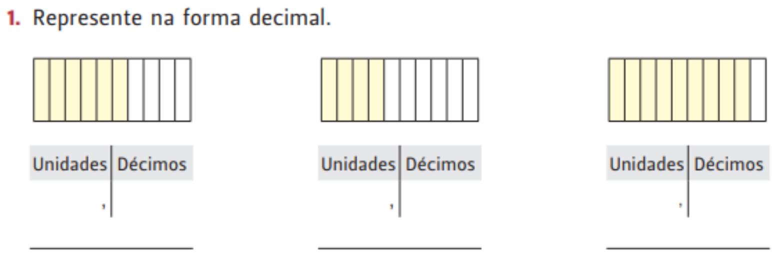
2.4. Bloco Números Racionais III – Representação Decimal

No bloco Números Racionais III – Representação decimal, são introduzidas as transformações de frações em decimais, a partir de frações com denominadores 10, 100, 1000, etc. O uso da nomenclatura para se referir às frações é instrumento de significação importante, e a conversão entre representações é recurso muito utilizado.

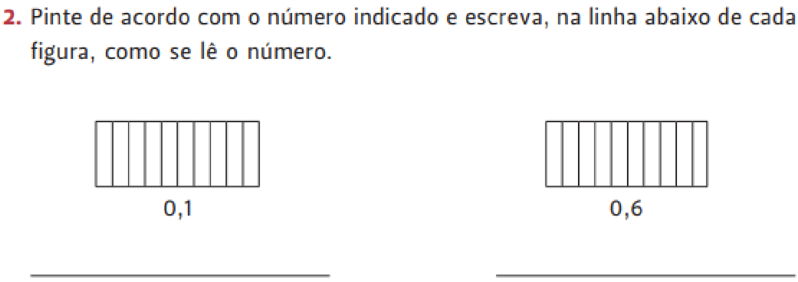
Nesse bloco, existem10 fichas, contendo, além das transformações entre as representações dos Números Racionais, atividades de localização na reta numérica com variações no tamanho das unidades, e situações envolvendo medidas de comprimento, capacidade e massa, e transformações entre unidades desses tipos de medidas.

Nas figuras 15 a 20, constam exemplos de situações propostas nesse bloco.

Figura 15 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha Representações Fracionária e Decimal – 1

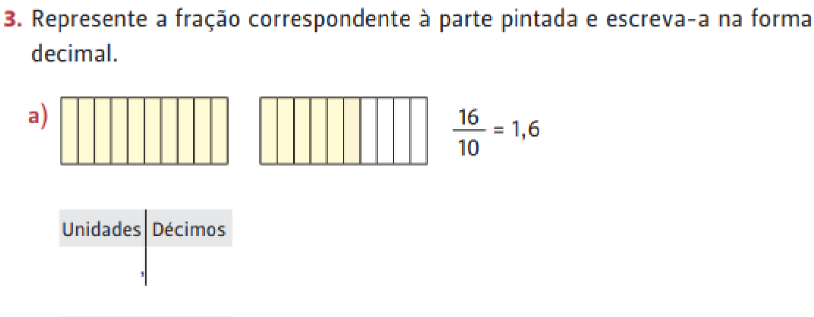

1. Represente na forma decimal.

–Figura 16– Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha Representações Fracionária e Decimal– 1


2. Pinte de acordo com o número indicado e escreva, na linha abaixo de cada figura, como se lê o número.

– 1

Figura 17– Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha Representações Fracionária e decimal – 1


3. Represente a fração correspondente à parte pintada e escreva-a na forma decimal.

1

Objetivo (fig. 15, 16 e17):

Transformar as representações decimal e fracionária,com uso da representação gráfica,

Figura 18 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha Representações Fracionária e Decimal – 2

1. Complete, considerando  como unidade.

Representação decimal	Representação fracionária	Representação com Material Dourado
0,002		
0,011		

Objetivo (fig. 18):

Transformar as representações com uso do material didático.

Figura 19 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha Representações Fracionária e Decimal – 2

4. Escreva como se lê os seguintes números.

a) 321: ______________________________

b) 3,21: ______________________________

5. Escreva os números a seguir na representação decimal.

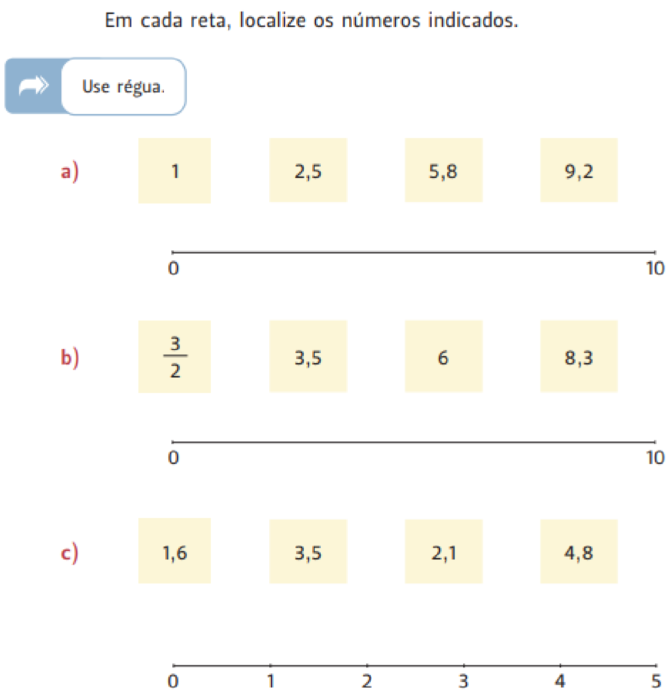
a) Doze décimos: ______________________________

b) Noventa e dois centésimos: ____________________

Objetivo (fig. 19):

Transformar a representação decimal para a língua natural, e a língua natural para a decimal.

Figura 20 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha Reta Numérica



Objetivo (fig. 20):

Desenvolver a noção de ordem no conjunto dos racionais.

Uso de conhecimentos e instrumento de medidas de comprimento, e variação na unidade de medida, como forma de gerar reflexão sobre o conceito de unidade, uso dos invariantes operatórios do cálculo de frações, e noção de proporção entre as representações decimais e sua distribuição pela reta numérica e as medidas de comprimento encontradas, com uso da régua.

2.5 Bloco Números Racionais IV

O bloco Números Racionais IV é composto por 13 fichas, nas quais são desenvolvidas as operações do campo aditivo e multiplicativo pelas representações fracionárias dos decimais. Uma particularidade interessante desse bloco, citada anteriormente, é a construção das operações do campo aditivo pelas equivalências entre frações, sem o uso do dispositivo prático de cálculo do MMC.

Com esse objetivo, os valores utilizados são apropriados ao cálculo mental. O enfoque nas equivalências pretende preencher de significado as transformações entre frações, deixando o uso dos cálculos mais complexos, e o recurso do dispositivo prático, para o material utilizado no 7º ano.

Esse é um dos fatores mais significativos para o desenvolvimento do conceito e das relações existentes nas frações, pois, de fato, o uso do dispositivo prático, em sua complexidade, mostra-se pouco útil nessa construção, à medida que afasta essas relações da conexão com a prática concreta dessa faixa etária. De acordo com Maranhão *et al*. (2006, p. 22):

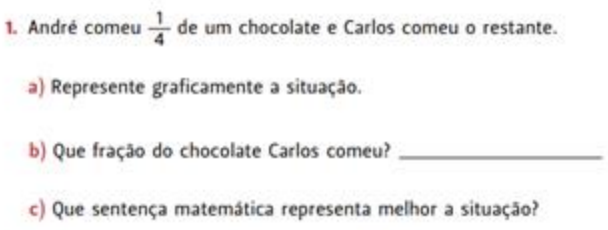
> A verdade é que as frações que encontramos na rua são muito simples[...] As frações são muito raramente somadas ou subtraídas e quando precisamos fazer isso, usamos a representação decimal [...] Temos até uma notação especial para tratar as porcentagens, para evitar as representações por frações. Mas nem todo mundo na rua sabe que 7% é o mesmo que 7 centésimos.

Entretanto, esse fato não diminui o nível de dificuldade, das situações propostas, do que o das atividades que utilizam números de maior grandeza; ao contrário, traz situações variadas em níveis de dificuldade diversas, que são características das relações ternárias, e dão conta de proporcionar a criação de esquemas variados na busca do conhecimento, utilizando, em grande medida, variações nas representações, e mesclando conceitos de diferentes domínios da Matemática, Geometria e Álgebra, por exemplo.

O bloco Números Racionais IV é composto por atividades cujos exemplos são apresentados nas figuras 21 a33.

Figura 21 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Adição e Subtração de Frações – 1:

Representação Gráfica



1. André comeu $\frac{1}{4}$ de um chocolate e Carlos comeu o restante.

a) Represente graficamente a situação.

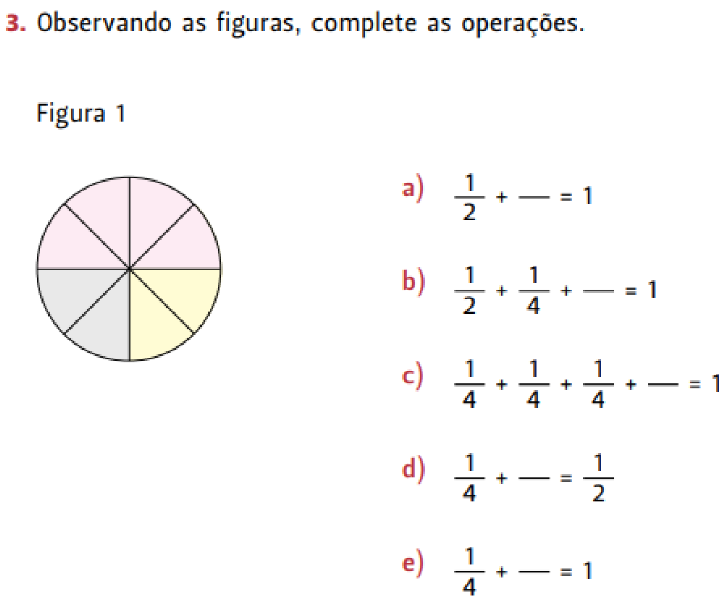
b) Que fração do chocolate Carlos comeu? ________________

c) Que sentença matemática representa melhor a situação?

Objetivo (fig. 21):

Desenvolver a noção do complemento como operação de subtração, dentro de uma realidade acessível, e com uso da representação gráfica e representação aritmética.

Figura 22 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Adição e Subtração de Frações – 1: Representação Gráfica



3. Observando as figuras, complete as operações.

Figura 1

a) $\frac{1}{2} + \_\_ = 1$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \_\_ = 1$

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \_\_ = 1$

d) $\frac{1}{4} + \_\_ = \frac{1}{2}$

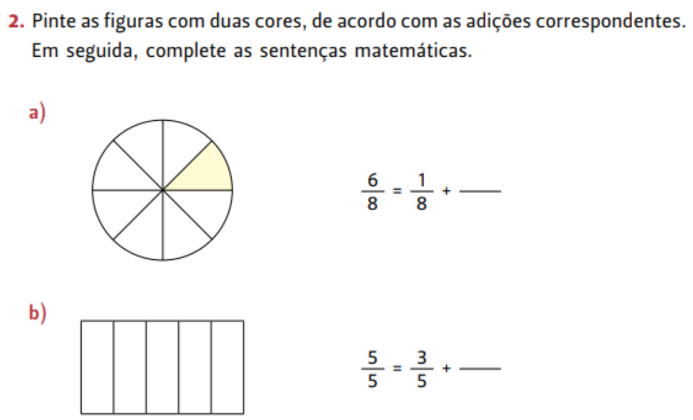
e) $\frac{1}{4} + \_\_ = 1$

Objetivo (fig. 22):

Desenvolver os invariantes operatórios para encontrar representações fracionárias equivalentes com o auxílio da representação gráfica.

Figura 23 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Adição e Subtração de Frações – 1:

Representação Gráfica



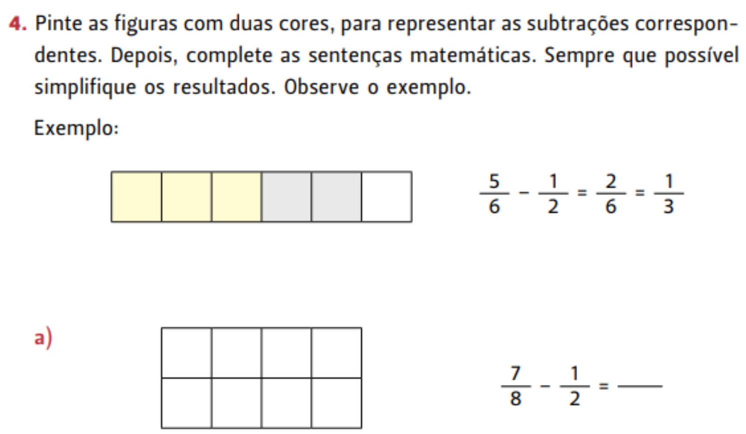
2. Pinte as figuras com duas cores, de acordo com as adições correspondentes. Em seguida, complete as sentenças matemáticas.

a) $\frac{6}{8} = \frac{1}{8} + \_\_\_$

b) $\frac{5}{5} = \frac{3}{5} + \_\_\_$

Figura 24 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Adição e Subtração de Frações – 1:

Representação Gráfica



4. Pinte as figuras com duas cores, para representar as subtrações correspondentes. Depois, complete as sentenças matemáticas. Sempre que possível simplifique os resultados. Observe o exemplo.

Exemplo:

$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

a) $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \_\_\_$

Objetivo (fig. 23 e 24):

Usar diferentes representações de uma situação, e desenvolver a equivalência como igualdade de representações (desenvolvimento do raciocínio algébrico). Conceito de simplificação de frações.

Figura 25 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Adição e Subtração de Frações – 4: Representação Gráfica

2. Roberto gasta $\frac{1}{2}$ de sua semanada em lanches e $\frac{2}{5}$ em condução.

a) Que fração total da semanada Roberto gasta em lanches e condução?

b) No mês passado, o total das semanadas de Roberto foi ____________.
Quanto ele gastou no mês em lanches e condução?

Objetivo (fig. 25):

Encontrar as equivalências que permitem realizar a operação do campo aditivo. Definir um valor que seja "interessante para o cálculo".

Figura 26 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Adição e Subtração de Frações – 4

4. Elabore um problema que, para resolvê-lo, seja necessário utilizar adição ou subtração de frações. Depois, resolva-o.

____

____

____

____

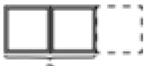
Objetivos (fig. 26):

Identificar situações que se prestem ao cálculo a partir do uso de frações;

Transformar a representação na linguagem escrita em linguagem algébrica.

Figura 27 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Multiplicação de Frações 1: Representação Gráfica, Conceito e Notação

1. Se tenho um chocolate e quero $\frac{2}{3}$ dele, posso representar assim:



$\frac{2}{3}$

Se você quiser $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de um chocolate, como poderá representar?

Desse forma, que parte do chocolate obterá? ____________________

Objetivo (fig. 27):

Compreender a operação de multiplicação de frações como pedaço de um pedaço; fração de uma fração; com o uso de representações gráficas e algébricas.

Figura 28 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Multiplicação de Frações 1: Representação Gráfica, Conceito e Notação

2. Represente as situações graficamente e complete com o resultado.

a) $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{4}$ = ___

Figura 29 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Multiplicação de Frações 1: Representação Gráfica, Conceito e Notação

3. Agora, vamos trabalhar com as seguintes multiplicações de frações.

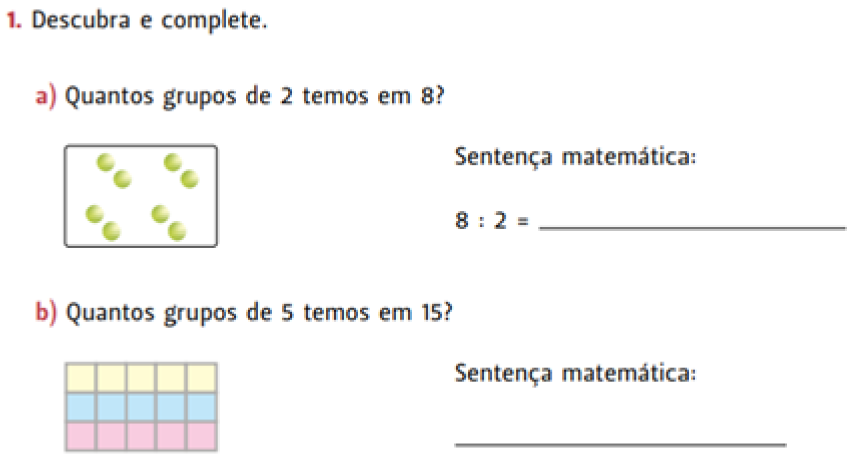
Para resolvê-las, encontre o numerador do resultado multiplicando os numeradores dos fatores. Encontre o denominador do resultado multiplicando os denominadores dos fatores.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}$ = ___

Objetivo (fig. 28 e 29):

Deduzir os invariantes operatórios que vão compor os esquemas das operações de multiplicação de Números Racionais em sua representação fracionária.

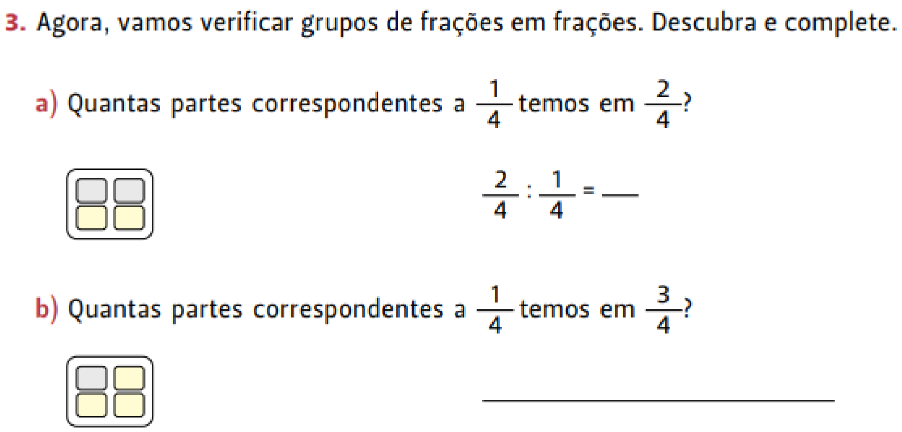
Figura 30 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Divisão de Frações 1: Conceito



Objetivo (fig. 30):

Compreender a divisão de frações pela ideia de “quantas vezes cabe” no inteiro.

Figura 31 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Divisão de Frações 1: Conceito



Objetivo (fig. 31):

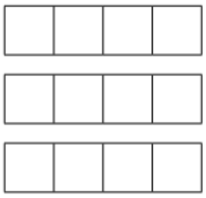
Compreender a divisão de frações pela ideia de “quantas vezes cabe” em uma parte.

Figura 32 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Divisão de Frações 1: Conceito

1. Analise cada situação.

a) Tenho 3 barras iguais de chocolate e quero dividi-las em pedaços correspondentes a $\frac{1}{4}$.

- Como podemos representar a situação?



- Quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em 3? ____________________
- Que sentença matemática representa essa situação?

____

Objetivo (fig. 32):

Deduzir o algoritmo para a divisão de frações pela operação inversa.

Figura 33 – Bloco Números Racionais IV, Ficha Divisão de Frações 1: Conceito

2. Agora, volte ao exercício 1 e verifique se valem as transformações a seguir.

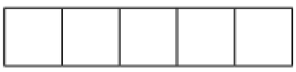
$$3 : \frac{1}{4} = 12 \longrightarrow 3 \cdot \frac{4}{1} = 12$$

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4 \longrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{12}{3} = 4$$

Essas transformações são válidas? ________________________

3. Vamos verificar se a conclusão do exercício anterior vale para outras divisões de frações.

a) $1 : \frac{1}{5}$ $\qquad$ $1 \cdot \frac{5}{1} =$ ________



Objetivo (fig. 33):

Refletir sobre o algoritmo de divisão entre representações fracionárias.

2.6 Bloco Números Racionais V

No bloco Números Racionais V, o último analisado neste trabalho, é desenvolvido o conceito das operações com Números Racionais em sua forma decimal. Para isso, são resgatadas as transformações de frações em decimais, com foco nas frações com denominador 10 e seus múltiplos, dando ênfase à nomenclatura dos décimos, centésimos e milésimos.

Nos problemas apresentados no bloco, são utilizadas, em abundância, as medidas de comprimento, massa e capacidade, além das medidas monetárias, envolvendo, portanto, o número como uma medida, e em relação com questões práticas do uso dos decimais.

A adição e subtração são, em grande parte, compreendidas pelos alunos pelo uso cotidiano do dinheiro. Por isso, o sistema monetário é uma referência importante para conexão com a realidade. O resgate das operações com frações também é utilizado como recurso para a construção das regras que fazem parte desse tipo de operação, como, por exemplo, a soma das casas decimais dos fatores para definir quantas casas decimais terá o produto. Inicialmente, são usadas operações entre unidades de décimos, centésimos, e milésimos, para identificar e concluir essas regras.

No caso das divisões, no bloco, é introduzida a percepção de que, em uma divisão, quando dividendo e divisores são alterados de forma proporcional, isto é, se dobrarmos ambos, ou triplicarmos ambos, terá o mesmo quociente. Por exemplo: $50 \div 5$ terá o mesmo quociente que $(2 \times 50) \div (2 \times 5) = 100 \div 10$.

Essa percepção nos permite utilizar os fatores 10 e seus múltiplos, como forma de tornar dividendo e divisores números inteiros para realizar a divisão, inicialmente, com operações que não deixem resto; que é o mesmo que igualar a quantidade de casas decimais para realizar a divisão.

Nas figuras 34 a 39, constam exemplos de atividades do Bloco Números Racionais V.

Figura 34 – Bloco Números Racionais V, Ficha Multiplicação de Decimais 1

1. Transforme as sentenças matemáticas para a representação fracionária e resolva-as, como no exemplo:

$$2 \cdot 0{,}1 = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

a) $4 \cdot 0{,}1 =$

b) $2 \cdot 0{,}01 =$

c) $5 \cdot 0{,}001 =$

Objetivo (fig. 34):

Usar a representação fracionária e a transformação para representação decimal para concluir o posicionamento da vírgula no resultado, inicialmente, apenas com o multiplicando como decimal.

Figura 35 – Bloco Números Racionais V, Ficha Multiplicação de Decimais 1

3. Agora, transforme os dois números que estão na representação decimal para a fracionária, resolva as multiplicações e dê o resultado na representação decimal, como no exemplo.

$$4 \cdot 0{,}1 = \frac{44}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{44}{100} = 0{,}44$$

a) $0{,}2 \cdot 0{,}03 =$

b) $3{,}5 \cdot 0{,}8 =$

c) $1{,}23 \cdot 0{,}12 =$

Vale observar que, nessa situação, existe um erro de impressão, onde se lê:

$$4 \cdot 0{,}1$$

Deveria ser:

$$4{,}4 \cdot 0{,}1$$

Objetivo (fig. 35):

Aplicar para o caso de multiplicador e multiplicando serem decimais.

Figura 36 – Bloco Números Racionais V, Ficha Multiplicação de Decimais 3

4. Resolva.

a) $35 \cdot 10 =$

b) $0{,}21 \cdot 10 =$

c) $1{,}5 \cdot 10 =$

d) $7 \cdot 100 =$

e) $3{,}5 \cdot 100 =$

Objetivo (fig. 36):

Multiplicar por 10 e seus múltiplos, e concluir sobre o que acontece com o resultado.

Figura 37 – Bloco Números Racionais V, Ficha Divisão de Decimais – 1

1. Resolva.

a) $15 : 5 =$
$30 : 10 =$
$60 : 20 =$

b) $22 : 2 =$
$44 : 4 =$
$132 : 12 =$

Objetivo(fig. 37):

Observar a invariância nos quocientes (função entre kg/R$, por exemplo), e na relação entre dividendos e entre divisores (operador escalar, por exemplo, 15kg custam R$ 5,00, então, o dobro de 15kg, ou seja, 30kg, custam o dobro de R$ 5,00, ou seja, R$ 10,00).

Figura 38 – Bloco Números Racionais V, Ficha Divisão de Decimais – 1

2. Vamos aplicar a conclusão do exercício 1 na divisão de decimais.

> Para efetuar 3,8 : 0,05, por exemplo, podemos multiplicar o dividendo e o divisor por um mesmo número, que o quociente se mantém.
>
> Nesse caso, podemos multiplicar por 100, para dividirmos números inteiros.
>
> 3,8 · 100 = 380
>
> 0,05 · 100 = 5
>
> O resultado de 3,8 : 0,05 é o mesmo que o de 380 : 5,76

Agora, divida utilizando essa propriedade da igualdade.

a) 3,5 : 0,07 =

b) 128 : 0,2 =

Aqui também existe um erro de impressão, pois, na última linha do quadro, onde se lê:

"$O\ resultado\ de\ 3{,}8 : 0{,}05$ é $o\ mesmo\ que\ o\ de\ 380 : 5{,}76$.”.

Deveria ser:

"$O\ resultado\ de\ 3{,}8 : 0{,}05$ é $o\ mesmo\ que\ o\ de\ 380 : 5 = 76$.”

Objetivo (fig. 38):

Aplicar a conclusão de invariância dos quocientes e aplicar, aos decimais, usando 10 e seus múltiplos como multiplicadores do dividendo e divisor.

Figura 39 – Bloco Números Racionais V, Ficha Divisão de Decimais – 3

1. De 11,25 m de fita num rolo, quero recortar pedaços de 2,25 m. Quantos pedaços posso recortar?

2. O problema seguinte refere-se a uma fábrica de violões.

   a) O dono da fábrica nos disse que leva aproximadamente 4,2 horas para fabricar um violão. Quantos violões serão fabricados em 105 horas?

   b) Disse ainda que um operário leva 3,6 horas para envernizar um violão. Quantos violões ele poderá envernizar em 144 horas?

   c) Acrescentou que é necessário 0,5 litro de verniz para envernizar cada violão. Quantos violões poderão ser envernizados com 162 litros de verniz?

Objetivo (fig. 39):

Aplicar, em situações envolvendo decimais, como medidas, e validar o uso da divisão com decimais.

2.7 Base Nacional Comum Curricular

A BNCC (2018) é um documento normativo que tem por objetivo definir as aprendizagens fundamentais para a formação escolar, em consonância com o PNE, e é aplicável apenas para o ensino escolar, de acordo com a LDBEN, Lei n. 9.394/1996. Assim como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs), pretende contribuir para a formação humana integral na construção de uma sociedade eticamente justa, democrática e inclusiva, pautada em princípios éticos, políticos e estéticos(BRASIL, Ministério da Educação, 2018)

A BNCC (2018) traztambém a intenção de produzir maior integração entre as esferas municipais, estaduais e federais da Educação, e ser a balizadora dessa integração, contribuindo para as políticas relativas à formação de professores; avaliação; definição de conteúdos programáticos; e determinação de infraestrutura adequada para o desenvolvimento da Educação.

São definidas, portanto, dez competências, descritas a seguir, que se pretende desenvolver na Educação Básica; as quais, se inter-relacionadas, devem contribuir para a formação de cidadãos capazes de atuar na transformação da sociedade, “tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza" (BRASIL, 2013).

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
>
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
>
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
>
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
>
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
>
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
>
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
>
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
>
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

O conceito de competência tem marcado os debates pedagógicos e sociais nas últimas décadas, e o foco em seu desenvolvimento, como prática pedagógica, também compõe o currículo escolar de países como Austrália; Portugal; França; e Chile, além de ser o enfoque das "avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco)" (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

Ao definir o enfoque da Educação sobre as competências, a BNCC (2018) pretende delinear os conhecimentos, as habilidades, atitudes e os valores, para que os alunos estejam preparados para atuar sobre as complexas demandas da vida cotidiana, da cidadania e do mundo do trabalho.

Outro fator que a BNCC (2018) considera é o compromisso com o ensino integral, que entende o papel da escola como o espaço de formação do cidadão, não apenas no que concerne aos conteúdos, mas também nos aspectos que envolvem o desenvolvimento humano global, tornando-o capaz de enfrentar os desafios da vida na sociedade contemporânea. Propõe, dessa forma, uma educação que venha a promover o acolhimento, reconhecimento, e desenvolvimento pleno, da criança, em suas singularidades e diversidades.

Nesse sentido, a Educação deve se pautar em processos que promovam a aprendizagem em sintonia com as necessidades da vida contemporânea e, também, com as possibilidades e os interesses dos alunos. Promover as condições para que a Educação possa atingir esses objetivos, requer o desenvolvimento de habilidades para aprender a aprender; saber interpretar as informações disponíveis; usar os conhecimentos para solucionar problemas; ter autonomia para tomar decisões; conviver e aprender com as diferenças e diversidades, e ser capaz de reconhecer seu protagonismo nesse processo.

A estrutura da BNCC (2018) está disposta de forma que o Ensino Fundamental esteja dividido em cinco áreas de conhecimento: Linguagens; Matemática; Ciências da Natureza; Ciências Humanas; e Ensino Religioso. Nos anos finais, são subdivididos nos componentes curriculares de Língua Portuguesa; Arte; Educação Física; e Língua Inglesa; na área de Linguagens; em Matemática, na área de Matemática; Ciências, na área de Ciências da Natureza; História e Geografia, na área de Ciências Humanas; e Ensino Religioso, na área de Ensino Religioso.

Para o Ensino Fundamental, Anos Finais:

> [...] os estudantes se deparam com desafios de maior complexidade, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

2.4.1 O Componente Curricular da Matemática

A Matemática não se restringe apenas à quantificação dos fenômenos, naturais, econômicos e sociais, de forma determinística, nem se limita ao estudo das técnicas de cálculo com números e grandezas, mas também se propõe a estudar as incertezas provenientes de fenômenos aleatórios.

Criando sistemas abstratos, capazes de organizar de forma inter-relacionada os fenômenos do espaço, movimento, das formas e dos números, a Matemática permite o desenvolvimento de ideias e objetos fundamentais para a compreensão de fenômenos; a criação de representações significativas e argumentações consistentes (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

Entretanto, o documento acrescenta:

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apóiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

Para tanto, o Ensino Fundamental, segundo esse documento deve se comprometer com o letramento matemático, que define como:

> [...] as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

Com esse enfoque, a BNCC (2018) propõe a divisão do componente de Matemática em cinco unidades temáticas - Números; Geometria; Álgebra; Medidas e Grandezas; e Proporcionalidade e Estatística -, e define, em cada uma das unidades temáticas, de acordo com as séries do Ensino fundamental, os objetos de conhecimentos e as respectivas habilidades.

Apresenta, também, as competências específicas da área de Matemática, e, consequentemente, quais objetivos deve atender:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

Neste trabalho, o estudo está concentrado na unidade temática de números, no objeto de conhecimento dos Números Racionais, e suas respectivas habilidades, para as turmas de 6º ano do Ensino Fundamental.

2.5 O Conjunto dos Números Racionais

A noção de divisão de unidades em partes menores tem sido utilizada há muitos anos, pelos mesopotâmios, egípcios e gregos, nas medidas de terrenos e construções, também como proporção entre medidas dos lados de triângulos retângulos, ou mesmo no cálculo do número “PI”.

Os primeiros registros do uso dos Números Racionais datam de 3000 a.C., pela necessidade de dividir unidades em partes menores. Nos períodos de inundações do rio Nilo, os terrenos situados às suas margens, que eram utilizados para o cultivo, perdiam suas marcações, usadas para definir a propriedade daquele espaço de terra. Esse movimento sazonal dos períodos de cheia demandava constantes medições para refazer as demarcações (TAKAYA, CUNHA e VIEIRA, 2015, p. 8 *apud* COSTA, 2010).

Os tributos pagos ao rei, pelo uso das terras, eram cobrados de acordo com o tamanho do território, que costumava ser uma porção de terra igual para cada egípcio. Os movimentos de cheia, ao provocarem perdas de produção e de parte da terra cultivável, faziam com que o responsável por aquela porção de terra buscasse o rei para solicitar redução de seus impostos, ao passo que o rei mandava os agrimensores para realizar as medições, avaliar e recalcular, quando cabível, os tributos, de forma proporcional à porção de terra restante (TAKAYA, CUNHA e VIEIRA, 2015, p. 8 *apud* COSTA, 2010).

As medições realizadas por esses agrimensores eram feitas por instrumentos de cordas com nós, com distâncias regulares, que podem ser consideradas as unidades utilizadas nas medições. Mas, com frequência, essas medições não eram exatas, isto é, contemplavam uma quantidade de unidades e mais uma parte desta, demandando subdivisões da unidade. A necessidade de subdivisões revelava a insuficiência das unidades de medida para as medições das terras. A partir daí é que os egípcios desenvolveram o conceito de frações.

Pela inexistência de um sistema de numeração adequado, os egípcios não conseguiram integrar o conceito de frações ao seu sistema de medidas, e essa lacuna fez com que o uso das frações, nas medições, fosse adaptado e impreciso. Dessa forma, as frações não faziam parte do sistema de numeração, e não eram concebidas como a divisão não exata entre números naturais. Por essas limitações, eram utilizadas apenas frações unitárias, ou seja, de numerador igual a um. “[...] com exceção de 2/3, só admitiam fração com numerador 1. Por exemplo, 7/10 no Egito era escrito como 1/3 + 1/5 + 1/6”.

O aprimoramento do conceito das frações, nas atividades de medições, proporcionou a percepção, por parte dos egípcios, de que elas também seguiam as mesmas regras aplicáveis aos inteiros, gerando uma revolução em seu sistema de medidas, assim, novos padrões adaptáveis foram criados, permitindo a comparação entre grandezas de mesma natureza (TAKAYA; CUNHA; VIEIRA, 2015).

Em alguns estudos está relatado que os babilônios foram os primeiros a utilizar as frações com uma notação racional, utilizando seu sistema de base sexagesimal, e os hindus e árabes foram os primeiros a utilizá-las como decimais, em meados do século X.

Segundo Takaya, Cunha e Vieira (2015, p. 9):

> No decorrer da história, outras civilizações foram aprimorando este conceito e deram origem ao que é a representação dos números racionais tal qual a conhecemos hoje e que engloba todos os algarismos na forma de a/b, com b ≠ 0, uma vez que a divisão por zero não tem sentido, pois não existe nenhum número que multiplicado por zero seja diferente de 0.

Na Grécia de Euclides, os Números Racionais eram bem conhecidos e utilizados, ainda que os gregos não os enxergassem como números, mas, sim,como uma razão entre dois números, sabiam bem como utilizá-los (LIMA, 2013).

2.2.1 Panorama do ensino dos Números Racionais no Brasil

A Matemática faz parte dos conteúdos ensinados nas instituições escolares, no Brasil, desde o Império. Desse período, até o final da terceira década do século XX, essas instituições tinham como objetivo preparar para os exames de acesso ao Ensino Superior (GOMES, 2016, p. 2*apud* HAIDAR), quando as disciplinas do conteúdo de Matemática eram apresentadas e exigidas separadamente como trigonometria, aritmética, álgebra e geometria. (GOMES, 2016, p.2 *apud* VALENTE, 2004)

Esses exames preparatórios tiveram importante papel para transformar a Matemática em parte da cultura clássico-literária das elites intelectuais brasileiras, que foi incorporada na cultura geral do ensino escolar voltado para candidatos ao Ensino Superior, e deixando o seu posto de conhecimento técnico aplicável apenas ao ensino militar (GOMES, 2016, p. 2 *apud* VALENTE, 2004).

O conteúdo dos Números Racionais, nesse período, era apresentado pelos livros didáticos com grande circulação, na época, como uma medida não exata na comparação entre um comprimento e a unidade estabelecida para aquela medida. Caso a unidade coubesse uma quantidade exata de vezes no objeto a ser medido, a sua medida era um valor inteiro, caso contrário, a unidade deveria ser quebrada em partes menores, com o objetivo de descobrir a fração da unidade necessária para completar a medida, e assim seguir dividindo as partes até completar a medida (GOMES, 2016).

Caso fosse possível, com esse procedimento, encontrar a medida pretendida, dizia-se que a medida era comensurável (racional). Em caso da impossibilidade de realizar tal medida, mesmo com partes bem pequenas da unidade, chamava-se essa medida de incomensurável (irracional). O número era apresentado como a medida de um objeto relativo à unidade de mesma natureza.

Ao final da década de 1920, alguns livros de grande circulação, como o de Euclides Roxo, de acordo com Gomes (2016), traz algumas modificações, deixando de utilizar expressões como “grandezas comensuráveis” e “grandezas incomensuráveis”, e separando as possibilidades de resultados de grandeza em três partes: a medida será um número inteiro quando a grandeza que se deseja medir é um múltiplo da unidade; a medida é uma fração, quando a grandeza é um múltiplo de uma parte da unidade; e a medida é um número incomensurável, quando a grandeza não for múltiplo de uma parte da unidade, por menor que essa parte seja (GOMES, 2016). Ainda assim, os termos “números racionais” e “números irracionais” ainda não aparecem nessa obra.

Somente a partir de 1929, por influência internacional, sobre a modernização no ensino da Matemática, foi proposta a criação da disciplina de Matemática, incluindo os conhecimentos relativos à aritmética, álgebra e geometria (GOMES, 2016, p. 8*apud*MIORIM, 1998; PITOMBEIRA, 2003; VALENTE, 2004).

No ano de 1931, ocorre a Reforma Francisco Campos, na Educação do país, que concretizou a Matemática como disciplina, e, segundo Gomes (2016, p. 13):

> Essa reforma, primeira iniciativa de organização nacional da educação em nosso país, marca uma mudança fundamental e definitiva quanto à educação matemática brasileira, até então essencialmente propedêutica: a instituição, nos currículos escolares, de uma única disciplina denominada matemática.

Em 1942, a reforma Gustavo Capanema manteve a Matemática como disciplina, e, a partir daí, muitas coleções de materiais de Matemática foram lançadas, no Brasil, que incluíam, em sua folha de rosto, apresentação, ou prefácios, observações sobre estarem de acordo com as determinações estabelecidas nas reformas.

Algumas dessas coleções traziam modificações pertinentes à definição de número, que, em alguns casos, não aparecia mais como resultado da medição de uma grandeza; e a definição de fração, que não mais estaria ligada à medição de comprimentos.

Ainda aqui, o termo Números Racionais aparece referindo-se às frações, apenas como segunda opção, preferindo-se empregar Números Comensuráveis. Mas, em grande parte, a fração aparece como o número que indica uma ou mais partes iguais, em que uma unidade é dividida, e as unidades referem-se a objetos variados, desde uma laranja, até uma barra de madeira dividida em partes iguais (GOMES, 2016).

Contudo, ainda que fossem observadas mudanças importantes nos materiais de ensino de Matemática, principalmente nas conceituações de números e de Números Racionais, mantinha-se a estabilidade na apresentação dos conteúdos. (GOMES, 2016). Mudanças profundas são identificadas a partir da década de 1970, sob influência de um movimento internacional para renovação no ensino de Matemática, que ficou conhecido como o movimento da Matemática moderna (GOMES, 2016).

Esse movimento ganha força no Brasil, a partir de 1961, com um grupo formado com o objetivo de modernizar o ensino da Matemática nas escolas secundárias, que pretendia aproximá-lo do ensino da Matemática científica, sob influência do desenvolvimento de teorias na área de Psicologia e Didática, e em consonância com as exigências de uma sociedade moderna em um acelerado processo de desenvolvimento técnico (GOMES, 2016).

Nesse momento, são observadas modificações nos materiais para ensino de Matemática, principalmente no que se refere à introdução das noções relativas aos conjuntos como forma de preparo para a introdução dos números, que passam a ser definidos como a propriedade de conjuntos com a mesma quantidade de elementos, e os números naturais, pela possibilidade de correspondência biunívoca entre conjuntos com a mesma quantidade de elementos, independentemente de sua forma.

Nessas obras, que caracterizam a Matemática moderna, os Números Racionais ganham um capítulo específico, que é apresentado somente após os capítulos que tratam das operações com inteiros; os conceitos de divisibilidade; MDC e MMC.

Se, anteriormente, os Números Racionais eram apresentados como partes iguais de uma unidade, nos livros dessa fase, são apresentados em sua forma fracionária, trazendo representações gráficas; conceitos de frações próprias e impróprias; as definições de numerador e denominador; e a fração como um par ordenado de números inteiros, onde o denominador não pode ser igual a zero. Adota-se, portanto, maior formalidade na apresentação das frações, e considera-se vulgar o conceito de fração como partes iguais de um inteiro.

Os Números Racionais

Seja AB um segmento de reta, e u um segmento padrão, chamado segmento unitário, e,por definição,u igual a 1. Se $n-1$ pontos internos ao segmento AB o decompuserem em n segmentos congruentes e justapostos, então, esses segmentos cabem n vezes em AB. E se esses segmentos congruentes forem iguais a u, diz-se que a medida de AB é igual a n. Caso o segmento unitário não caiba uma quantidade exata de vezes em AB, então, AB não será um número natural, o que remete à ideia de fração (LIMA, 2013).

Nesse caso, busca-se um segmento de reta menor w, que caiba n vezes em u e m vezes em AB, daí que ue AB são comensuráveis. E w mede $1/n$, e AB mede m vezes w, isto é, m/n.

Os números racionais são, então, aqueles que podem ser escritos na forma de fração, expressos pelo quociente entre números inteiros, e esse conjunto numérico inclui os números inteiros e as frações (racionais não inteiros). Sua denominação deriva de razão (parte do todo), e é uma ampliação do conjunto dos números inteiros.

Em seu enfoque simbólico, o Conjunto dos Números Racionais, representado por $\mathbb{Q}$, é constituído pelo conjunto de números escritos na forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$:

$$\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z} \; e \; n \neq 0\right\}$$

Outro enfoque utilizado na caracterização do Conjunto dos Números Racionais, é o de conjunto $\mathbb{Q}$ dos números da forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. A partir da definição em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ($\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$) da seguinte relação de equivalência)$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$,define-se $\mathbb{Q}$como o conjunto das classes de equivalência da relação ~, ou seja,$\mathbb{Q}$ é o conjunto $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$/~(MOREIRA; DAVID, 2004,p. 9 *apud* FIGUEIREDO, 1975).

O uso dos Números Racionais, pelos gregos, era muito comum, apesar de não os considerarem números, mas, sim, a razão entre dois números (para os gregos, os números eram segmentos, assim, os Números Racionais eram a razão entre dois segmentos de medidas exatas). Eles acreditaram, por muito tempo, que quaisquer dois segmentos eram comensuráveis.

Essa crença manteve-se até, aproximadamente, 400 anos a.C., quando um discípulo da seita filosófico-religiosa, liderada por Pitágoras, observou que a diagonal de um quadrado é um segmento incomensurável (LIMA, 2013).

Seja ABCD um quadrado, e existe u tal que u caiba n vezes nos segmentos AB, BC, CD e AD (os lados do quadrado) e, ainda, u cabe m vezes na diagonal AC, se tomarmos AB como unidade, teremos que a medida de AC é m/n. Então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2;$$

Então, m é par e m^2 possui, em sua composição, uma quantidade par de fatores 2, o que é absurdo, pois, para que a igualdade seja verdadeira n^2 deveria ter uma quantidade ímpar de fatores 2, o que não pode ocorrer em número elevado ao quadrado, visto que esse tem que possuir uma quantidade par de fatores 2.

Essa descoberta abalou a estrutura do pitagorismo e da própria Matemática grega, por algum tempo. A solução que se impôs foi ampliar o conceito dos números, com a inclusão dos números racionais, de forma que, quando fixada uma medida unitária, qualquer segmento de reta pudesse ter sua medida numérica. Caso um segmento seja comensurável com uma unidade estabelecida, esse número é racional, inteiro, ou fracionário; em caso contrário, esse segmento é incomensurável.

3. A Teoria de Campos Conceituais e o Material Didático

Ao relacionar o material didático em análise com a Teoria de Campos Conceituais, faz-se necessário frisar algumas concepções de Vergnaud a respeito do desenvolvimento cognitivo na Matemática. Em grande parte, a aquisição do conhecimento é devida à conceitualização. Como citado no capítulo 1, pela teoria, essa conceitualização é construída pelo sujeito em situação, e é um processo longo, onde a formação dos conceitos é gradualmente desenvolvida.

Por esse fato, as situações precisam ser elaboradas, levando em conta os vários aspectos que envolvem os conceitos do campo de estudo; o nível de desenvolvimento das crianças; e a variedade de formas como as situações podem ser elaboradas levando em conta os vários aspectos de um conceito.

Para realizar a análise qualitativa do material, foi pensado, inicialmente, em analisar todos os blocos que têm por objetivo o estudo específico dos Números Racionais do 6ºao 8º ano. Por ser muito extenso, decidimos analisar apenas os blocos do 6º ano, citados no capítulo anterior.

Com esse intuito, escolhemos algumas situações propostas, usando como base as habilidades descritas na BNCC (2018) para estudo dos Números Racionais, nas turmas de 6º ano. E verificamos, a partir de critérios que descreveremos mais à frente,as concepções que Vergnaud apresenta como determinantes para o desenvolvimento cognitivo e para um aprendizado significativo, que estão intrinsecamente condicionados à formação dos conceitos a partir da sua conexão com a realidade.

Outro fator decisivo nesse processo, que também fará parte da análise, é a variedade de situações propostas e domínios, que vão permitir que os conceitos ganhem contornos mais complexos. Ainda vale ressaltar a importância da variedade nas representações, que devem ser desenvolvidas durante esse percurso, e poderão ampliar o leque de possibilidades de explicitação desses conhecimentos, por parte do sujeito que aprende, para uma significativa construção de seus esquemas.

Para pensar as situações que sejam favoráveis à construção de conceitos, Vergnaud observa que as noções de relação e cálculo relacional são primordiais e estão na base da aquisição do conhecimento matemático, posto que é a partir das relações que a criança é capaz de fazer entre os objetos e conceitos que estão em seu entorno, que os objetos matemáticos ganham seus significados.

3.1 Noção de Relação e o Cálculo Relacional

Segundo Vergnaud (2014), o conhecimento ocorre a partir do estabelecimento de relações em seu sentido geral, e da sistematização dessas relações. Enfatiza que as relações ocorrem em todos os campos do conhecimento, isto é, na Física, Biologia, Psicologia, e outros.

A partir dessas relações, segundo o autor, é possível identificar três categorias: Relações binárias, entre dois elementos; Ternárias, com três elementos; e Quaternárias, com quatro elementos; e acrescenta que, em grande parte, as relações com cinco ou mais elementos podem ser analisadas pela composição dessas três categorias citadas.

A construção dos esquemas que caracterizam o conhecimento é, em última análise, fruto das relações que o indivíduo que aprende é capaz de fazer entre os conceitos e objetos em estudo, e as representações têm importante papel nessa construção. As representações de uma situação permitem explicitar as relações em seus significados em conexão com a realidade percebida, nos aspectos sintáticos e semânticos, e a alternância entre representações distintas de uma mesma situação é um exercício intelectual essencial (VERGNAUD, 2014).

Vergnaud (2014) propõe a análise dessas relações a partir da Psicologia, o que gera descrença, por muitos matemáticos, que tendem a reduzi-las apenas a relações binárias, e complementa que, para compreender seus métodos, deve haver uma abertura dos matemáticos para uma nova linguagem, caso contrário, seria difícil entender o conceito do Cálculo Relacional, que é um dos alicerces de sua teoria.

O cálculo relacional

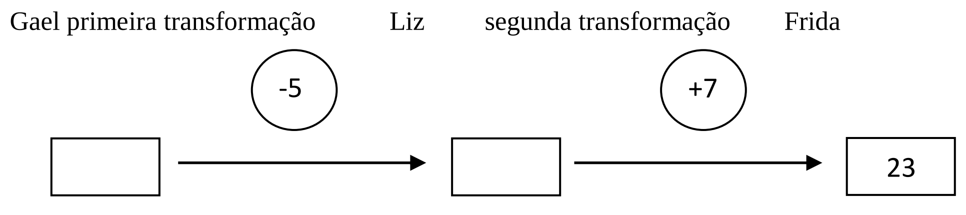
O cálculo relacional propõe-se a tornar mais clara a noção de raciocínio, partindo de simples constatações que fazemos nas relações entre objetos, pessoas, ou qualquer outro elemento de nossa realidade, no que se refere ao tamanho, à distância, posição em relação ao outro, temperatura, etc. A criança faz constatações sobre aquilo que está dentro das capacidades de suas atividades material e intelectual. Através da inteligência, as constatações nos levam a fazer deduções ou inferências, e construção (VERGNAUD, 2014).

Segundo Vergnaud (2014, p. 33):

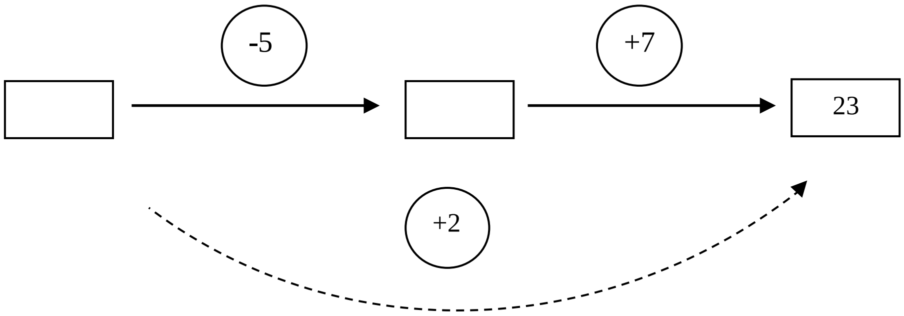
> Se escondermos o brinquedo preferido de um bebê atrás de um pacote colocado em cima de uma mesa, a relação “brinquedo escondido pelo pacote” não é compreendida completamente pelo bebê antes da idade de 18 meses em média (grifos no original).

Vergnaud (2014) divide as deduções em duas grandes formas: as deduções que são feitas a partir de uma conduta, ou regra de conduta de relações percebidas ou aceitas, como quando escondemos um objeto atrás de outro, e a criança percebe, em dado momento, que a conduta de esticar o braço e retirar o objeto que está na frente de seu brinquedo, permite encontrá-lo; e as deduções de novas relações feitas a partir de deduções de uma conduta, ou regra de conduta de relações percebidas ou aceitas, que seria o caso de compor relações para fazer sua dedução.

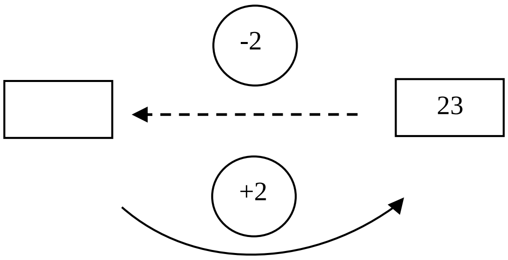
Para exemplificar a segunda forma de dedução, utilizaremos a seguinte situação: “Gael tem 5 figurinhas a mais que Liz, Liz tem 7 figurinhas a menos que Frida, que tem 23 figurinhas. Quantas figurinhas Gael possui?”. Note que, se uma criança tirar 5 de 7, e encontrar 2, depois subtrair 2 de 23 para encontrar o resultado 21, ela fez duas deduções, como se vê na seguinte representação sagital:



A primeira dedução foi feita através de uma composição de duas transformações, encontrando uma terceira, conforme abaixo:



A segunda dedução é a recíproca da transformação +2, isto é -2, no estado final 23.



3.1.1.Propriedades das Relações Binárias

A noção de cálculo relacional deve se apoiar nas propriedades dessas relações, sob risco de perder seu sentido. As propriedades, como bem elucidadas pelos matemáticos, das relações binárias são: simetria; não simetria; antissimetria; transitividade; não transitividade; antitransitividade; reflexividade; não reflexividade; e antirreflexividade.

Ao classificar as relações binárias, teríamos muitas possibilidades de relações, considerando que cada critério, simetria, transitividade e reflexividade, têm três possibilidades, apesar de algumas dessas propriedades serem mutuamente excludentes, por exemplo, “uma relação simétrica e transitiva, não pode ser antirreflexiva” (VERNAUD, 2014, p. 46).

Vergnaud (2014) define as categorias mais importantes das relações binárias como sendo as relações de equivalência, (simétrica, transitiva e reflexiva) e as relações de ordem estrita (antissimétricas, transitivas e antirreflexivas), e dá destaque também para a categoria das relações de ordem ampla, que surge a partir das duas categorias citadas anteriormente.

A relação de equivalência permite criar classes disjuntas, por exemplo, a relação “ter o mesmo nome que”, é uma relação simétrica, transitiva e reflexiva, colocando em uma mesma classe pessoas que tenham o mesmo nome, formando classes disjuntas por nome.

A relação de ordem estrita permite ordenar elementos de tal forma que nenhum elemento poderá estar no mesmo lugar que o outro, daí a palavra “estrita”. Por exemplo, a relação “gostar mais de” é antissimétrica, transitiva e antirreflexiva, porque permite ordenar preferências pessoais ou de um grupo. A relação “ser maior que”, permite ordenar os números dos conjuntos numéricos.

A relação de ordem ampla difere da estrita, porque permite a ordenação de elementos, levando em conta o fato de que mais de um elemento pode estar na mesma posição. A relação “o time A fez mais pontos ou a mesma quantidade que o time B” é antissimétrica, transitiva e antirreflexiva. Portanto, surge da composição das duas categorias anteriores. Nesse caso, devemos considerar uma definição mais completa da propriedade antissimétrica, que considera uma relação antissimétrica se, e somente se, tiver, ao mesmo tempo, a relação entre A e B, e na relação entre B e A, necessariamente, A e B são equivalentes.

Uma quarta relação que também merece destaque é a Conexidade, em que uma relação binária será conexa, pois toda vez que houver uma relação entre dois elementos distintos A e B, também teremos essa relação entre B e A. A relação é dita conexa em um grupo de elementos, quando conseguirmos relacionar todos dois a dois, e todos os pares serem ordenados pela relação (VERNAUD, 2014).

O autor ainda ressalta um tipo especial de equivalência, que é a igualdade, uma relação simétrica, transitiva e reflexiva, portanto, uma equivalência, porém, possui a particularidade que é o fato de permitir representar a identidade única de um elemento e também a equivalência entre símbolos diferentes; nesse último caso, um dos elementos pode ser uma ou várias operações, ou até mesmo uma incógnita.

3.1.2 Relações Ternárias e Transformações

As relações ternárias, como já mencionado, ocorrem entre três elementos entre si, como, por exemplo, João está entre Maria e Natália. Para isso, são apresentados dois modelos de análise. O primeiro, mais tradicional, é a Lei de Composição Binária, que busca, através das quatro operações matemáticas, e do uso das propriedades que lhe são aplicáveis, como a comutativa, distributiva, associativa, elemento neutro, etc., compor relações binárias para formar o terceiro elemento. Essas propriedades permitem ampla variedade de composições binárias, de alto valor para os cálculos relacionais, contudo, são, de fato, cálculos de relações ternárias.

Ainda que permitam analisar a maior parte das relações ternárias, alguns casos, como “estar entre”, não pode ser analisado pela Lei de Composição Binária, afirma o autor Vergnaud (2014).Diante de tal fato, propõe-se um segundo modelo,nomeado de Elemento, Relação-elemento, Elemento.

Nesse modelo, a relação ternária dá-se pela ligação de dois elementos, através de uma relação-elemento, que é o terceiro elemento. A relação-elemento é a transformação que o primeiro elemento, estágio inicial, sofrerá para resultar no segundo elemento, estágio final. Problemas como esse são fartos na Matemática, como, por exemplo,10 - 3 =7, onde “-3” é a relação-elemento.

Noção de Transformação

As relações, no mundo real, podem se dar de forma dinâmica, isto é, não simultâneas; ou de forma estática, simultâneas, mas, para Vergnaud (2014), para que essas relações fiquem mais claras, devemos nos ater a observar as transformações. As relações dinâmicas podem ser vistas como sequências de relações ternárias.

$$\text{Estado inicial} \xrightarrow{\text{transformação}} \text{Estado final}$$

Um exemplo de relação ternária dinâmica é: “Comprei pacotes de figurinha por R$ 12,00, fiquei com R$ 8,00. Quantos reais eu tinha?”.

$$x \xrightarrow{-12} 8$$

Nesse caso, temos o estágio final 8; a transformação -12; e a incógnita é o estágio inicial. Nessa configuração, analisada sob o ponto de vista de uma relação ternária estado-transformação-estado, os elementos postos não têm o mesmo *status*, porque são dois estados e uma relação-estado (transformação)

Segundo Vergnaud (2014), essa análise permite uma leitura mais fina das situações e dos problemas propostos, diferentemente do prisma da Lei de Composição Binária ($x - 12 = 8$) em que os elementos considerados são todos da mesma natureza.

As relações ternárias podem ser simples, com apenas uma transformação, ou complexas, com várias transformações.

i) Caso Simples: uma só transformação

Identificam-se, aqui, três categorias: a primeira, diz respeito a encontrar o estado final; a segunda, a encontrar o estado inicial; e, a terceira, a encontrar a transformação.

No exemplo: “Em um jogo de bafo, perdi 12 figurinhas, se eu tinha 20, com quantas figurinhas eu fiquei?”. Temos a primeira categoria, em que é preciso encontrar o estado final:

$$20 \xrightarrow{-12} x$$

Na segunda categoria, é exemplo: “Em um jogo de bafo, perdi 12 figurinhas, fiquei com 8. Quantas figurinhas eu tinha?”.

$$x \xrightarrow{-12} 8$$

Na terceira categoria: “Em um jogo de bafo, comecei com 20 figurinhas e fiquei com 8. O que aconteceu no jogo?”.

$$20 \xrightarrow{x} 8$$

Os três casos resumem-se em uma subtração simples, porém, apresentam níveis de dificuldades diferentes, e nada mais são do que as três possíveis questões que podem ser apresentadas nas relações binárias. Ocorre que, no caso das relações ternárias, a transformação é um elemento, porém, com características diferentes dos outros dois elementos.

ii) Caso Complexo: várias transformações

Os casos complexos são divididos em duas categorias. Na primeira, o problema diz respeito a um estado; e a segunda diz respeito a uma transformação.

Na primeira categoria, podemos, por exemplo, usar um caso em que uma conta bancária sofre sucessivos depósitos e retiradas, e sabemos o saldo inicial. A pergunta refere-se ao saldo final, e há várias formas de fazer esse cálculo.

Na segunda categoria, os problemas podem ser para encontrar uma transformação elementar, sobre a transformação composta, resultado das várias transformações, ou, ainda, sobre uma transformação composta intermediária. Apesar da grande variedade de problemas dessa natureza, Vergnaud (2014) destaca a diferença entre dois casos - o cálculo da transformação a partir do conhecimento dos estados inicial e final, e de algumas transformações e, de forma mais complexa, sem saber os estados, em que seria necessário fazer o cálculo a partir da composição de transformações. Nesse último caso, segundo Vergnaud (2014), 75% das crianças da faixa etária de 10 anos são incapazes de resolver.

Utilizando o exemplo de depósitos e retiradas, pode-se propor um problema em que se sabe os estados inicial e final, e algumas das movimentações, e o cálculo deve ser feito para saber o valor de uma retirada. Também é possível propor esse problema sem informar o estado inicial e o final, informando as movimentações, e o cálculo deve ser feito para descobrir qual foi o saldo dessas movimentações. Ou, ainda, sem saber os estados, mas conhecendo a diferença entre eles, informar algumas das transformações e solicitar o cálculo de um determinado depósito.

Esses casos de composição de transformações são particulares da composição de relações (VERNAUD, 2014). Apesar de os exemplos serem todos de relações dinâmicas, as composições de transformações, para os casos de relações estáticas, também apresentam relevante grau de dificuldade para determinadas faixas etárias, mas, pelo fato de serem atemporais, permitem mais formas de ordenar as relações.

3.1.3Relações Quaternárias

Com frequência, as relações quaternárias são colocadas da forma: “a está para b assim como c está para d”. Esse tipo de relação é o foco das relações quaternárias apresentadas aqui, visto que muitas relações quaternárias não são passíveis de análise matemática utilizando estrutura algébrica simples (VERNAUD, 2014).

Alguns exemplos:

→ Salvador está para a Bahia, assim como Aracajú está para Sergipe.
→ Cauã gosta tanto de futebol quanto Tiê gosta de tênis.
→ A quantidade de andares deste prédio está para a quantidade de andares desta casa, assim como a altura do prédio está para a altura da casa.

As relações quaternárias podem ser vistas como duas relações binárias, e, assim como essas, podem ocorrer a partir de elementos de mesma natureza, ou entre elementos de naturezas diferentes.

Na relação,

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15},$$

os objetos são de mesma natureza (números), já no caso: “A quantidade de andares deste prédio está para a quantidade de andares desta casa, assim como a altura do prédio está para a altura da casa”, estão sendo relacionados objetos de natureza diferente (quantidade de andares e altura).

Os problemas apresentados na escola são, em grande parte, relacionados a elementos de naturezas diferentes. Apesar de representarem duas relações binárias, colocam em jogo não apenas um conjunto de referência, mas dois, e ainda as relações entre eles. Dessa forma, além das noções matemáticas de elemento e elemento-relação, e suas diferenças, mencionadas nas relações ternárias, faz-se necessário lançar mão de duas noções fundamentais na Matemática, são elas: as noções de correspondência e de aplicação.

3.1.3.1 Noção de correspondência e aplicação

Vergnaud (2014) separa a noção de correspondência em três casos:

i) Correspondência biunívoca (unívoca nos dois sentidos)

Nesse caso, “cada elemento do primeiro conjunto se relaciona a um, e somente um, elemento do segundo conjunto, e a recíproca é verdadeira”.

ii) Correspondência bimultívoca (multívoca nos dois sentidos)

Aqui, “cada elemento do primeiro conjunto se relaciona com um ou mais elementos do segundo conjunto e a recíproca é verdadeira”. O que torna a correspondência bem mais complexa, pois pode-se ter, nessas relações entre primeiro conjunto e segundo: um elemento do primeiro relacionando-se com um do segundo; um do primeiro,relacionando-se com vários do segundo; vários do primeiro, relacionando-se com um do segundo; e vários do primeiro relacionando-se com vários do segundo.

iii) Correspondência co-unívoca (unívoca em um só sentido)

Na correspondência co-unívoca, a relação é unívoca em apenas um sentido, isto é, do primeiro para o segundo ou do segundo para o primeiro, e multívoca no sentido oposto. Assim, tem-se que “um elemento do primeiro ou do segundo conjunto se relaciona a um, e somente um, elemento do outro, mas a recíproca não é verdadeira”.

Noção de Aplicação

Essa noção, de extrema importância na Matemática, “generaliza a noção de função a casos não numéricos” (VERNAUD, 2014, p.71), devendo, por isso, ser bastante explorada.

Quando existe uma relação unívoca em um sentido, por exemplo, do conjunto A para o conjunto B, dizemos que existe uma aplicação de A em B. Quando se trata de relações binárias entre elementos do mesmo conjunto, não faz muito sentido as noções de correspondência e aplicação, ao passo que ganham sentido quando a relação binária se dá entre elementos de conjuntos diferentes. De forma análoga, as propriedades das relações binárias descritas anteriormente (simetria, transitividade, reflexividade, etc.),não se aplicam para elementos de conjuntos distintos.

O encadeamento das relações binárias sujeitas às noções de correspondência e aplicação, também pode ocorrer, porém, esse encadeamento se dá por diferentes relações, como no exemplo a seguir.

Tempo de banho   KWh   Custo em R$

$$\text{Relações Elementares} \begin{cases} x \xrightarrow{\text{gera um consumo de}} y \\ y \xrightarrow{\text{custam}} z \end{cases}$$

$$\text{Relação Composta} \quad x \xrightarrow{\text{gera um custo de}} z$$

Sob a ótica das relações e dos cálculos relacionais, faremos uma análise do material didático, no que se refere ao 6º ano do Ensino Fundamental, com foco na aprendizagem do conjunto dos Números Racionais.

Os critérios definidos são:

- Construção de conceitos através de situações que envolvam determinado campo de estudo;
- Variação das situações propostas: alternância dos objetivos das situações;
- Variação das representações nas situações: uso de representações diferentes para uma situação;
- Situações propondo transformação entre situações de representação de uma mesma situação: usar determinada situação através de uma representação, e representá-la com outra linguagem;
- Desenvolvimento das relações entre os significados e significantes próprios da escrita matemática;
- Entrelaçamento de domínios da Matemática nas situações: uso de domínios variados, como geometria, aritmética, medidas e álgebra dentro das situações propostas;
- Atendimento de conteúdos e habilidades da BNCC (2018).

4. Critérios e Análise

A análise de todo o material que envolve o conteúdo de números racionais do 6º ano apresentava-se como um trabalho muito extenso, e não era a proposta deste estudo. O objetivo foi identificar, no material, a aplicação de princípios do TCC, bem como o atendimento aos conteúdos e habilidades estabelecidos na BNCC (2018).

Por esse motivo,os seguintes tópicos foram definidos para a análise: Construção do conceito dos Números Racionais em sua representação fracionária,nos aspectos: parte do todo; medida; razão (medida relativa); divisão (número racional na representação decimal); e, como operador, noção de equivalência entre frações; transformação entre representações fracionária e decimal; operações com frações e com decimais.

Importante também identificar, aqui, os conteúdos e as habilidades estabelecidos na BNCC (2018) para o aprendizado dos Números Racionais no 6º ano do Ensino Fundamental. Em consonância com o que estabelece Vergnaud (2014), a BNCC (2018) enfatiza que o aprendizado nos anos finais do Ensino Fundamental em Matemática:

> [...] está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

O quadro 2 contém os conteúdos e as habilidades relativos ao ensino dos Números Racionais.

Quadro 2 – Conteúdos de conhecimento dos Números Racionais e habilidades esperadas

Unidades Temáticas	Objetivos de Conhecimento	Habilidades
Números	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de

		números naturais e números racionais em sua representação decimal
	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"	(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

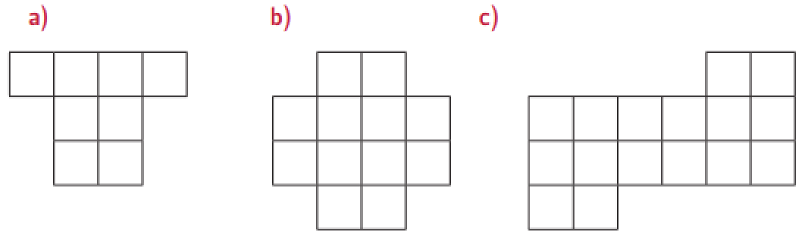
Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Com o intuito de organizar a análise, as habilidades descritas na BNCC (2018)foram utilizadas como parâmetro, e, a partir delas, foi analisado o atendimento dos critérios relativos ao que preconiza o TCC.

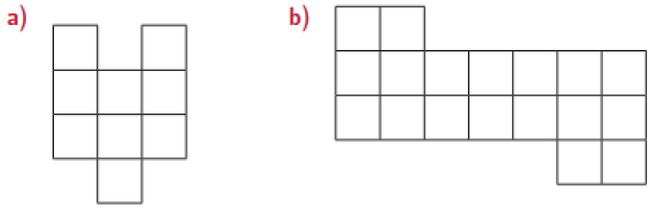
Habilidade: (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes

Figura 40–Bloco Números Racionais III– Representação Fracionária, Ficha: Frações – 2, p. 9

1. Pinte, em cada figura, $\frac{1}{2}$ de azul e $\frac{1}{2}$ de vermelho.



2. Pinte $\frac{1}{3}$ de cada figura.



O conceito (fig. 40) de fração como parte do todo usando representações gráficas simétricas e não simétricas tem por objetivo desenvolver os significados do numerador, como a quantidade a ser pintada, e, o denominador, como o total de pedaços do inteiro. Coloca em jogo a possibilidade de uso da representação fracionária como parte de um inteiro, onde o denominador não condiz com a quantidade de pedaços. O aluno deve, então, dividir a figura em duas partes iguais e pintar uma delas.

Outra possibilidade é observar a fração como proporção, isto é, pintar 1/2 da figura significa pintar um quadradinho a cada 2, ou seja, o aluno divide em grupinhos de 2 e pinta um dos quadrados. Ou, ainda, pode enxergar a fração como medida, contar o total de quadradinhos e calcular 1/2 desse total, então, pintar a quantidade relativa ao valor encontrado.

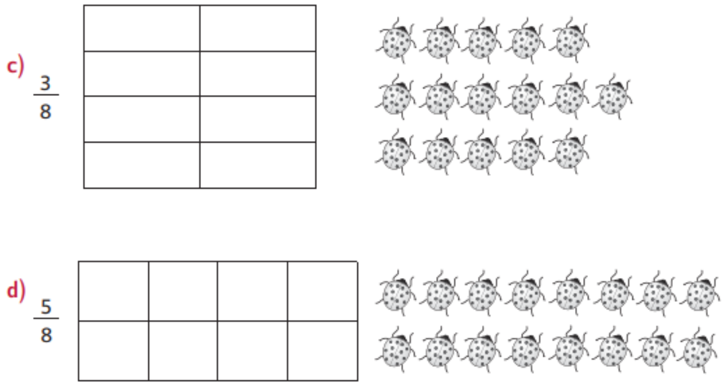
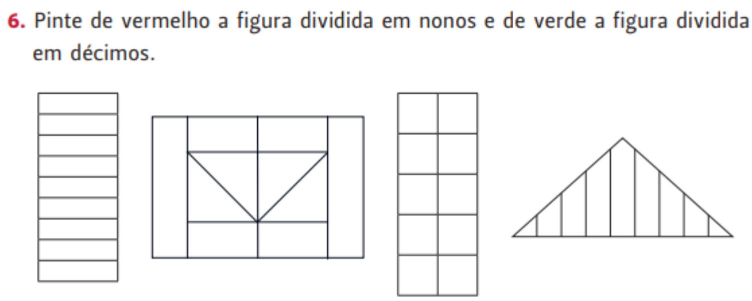


Figura 41 – Bloco Números Racionais III– Representação Fracionária, Ficha: Frações – 2, p. 10

Conceito de fração como parte do todo e como medida de um conjunto (fig. 41). Uso da variação na forma de dividir o inteiro em oito partes (um corte vertical e quatro horizontais, ou um corte horizontal e quatro verticais), e mudança na disposição dos elementos do conjunto, visando a desenvolver as habilidades de cálculo mental.

Interessante observar os caminhos que o aluno utiliza para encontrar o total de elementos dos conjuntos de joaninhas. Se ele faz a contagem um a um, ou identifica os grupos e soma os grupos, ou adota estratégias utilizando multiplicação. São elementos que permitem compreender o nível de compreensão do aluno com relação ao uso dessas operações.

Figura 42 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha: Frações – 2, p. 11



Identificar frações como partes com o mesmo tamanho iguais. (fig. 42)

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

1. Um terço de uma caixa-d'água contém 360 litros. Quantos litros contém a caixa-d'água completa? Represente, graficamente, essa situação.

2. Maria e Claudinha estavam tão alegres que resolveram contar as estrelas do céu. Maria contou 155 estrelas e cansou. Claudinha contou $\frac{2}{5}$ das estrelas que Maria contou e desistiu. Quantas estrelas Claudinha contou?

Figura 43 – Bloco Números Racionais III– Representação Fracionária, Ficha: Frações: Problemas – 2, p. 13

3. A estada de Luísa em um hotel ficou em R$ 2.000,00. Ela gastou $\frac{3}{4}$ desse total para pagar duas diárias. O restante foi gasto em refeições.

   a) Quanto custou cada diária do quarto?

   b) Quanto Luísa gastou em refeições?

Figura 44 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha: Frações: Problemas – 2, p. 14

4. João saiu de sua casa para ir ao sítio de um amigo, que fica a 600 km de distância.

   a) Quando havia percorrido $\frac{1}{5}$ do trajeto, ele parou para abastecer o carro. Quantos quilômetros João percorreu até o posto?

   b) Quando João estava na metade do caminho entre sua casa e o sítio, um pneu furou e ele parou para trocá-lo. Quantos quilômetros havia percorrido?

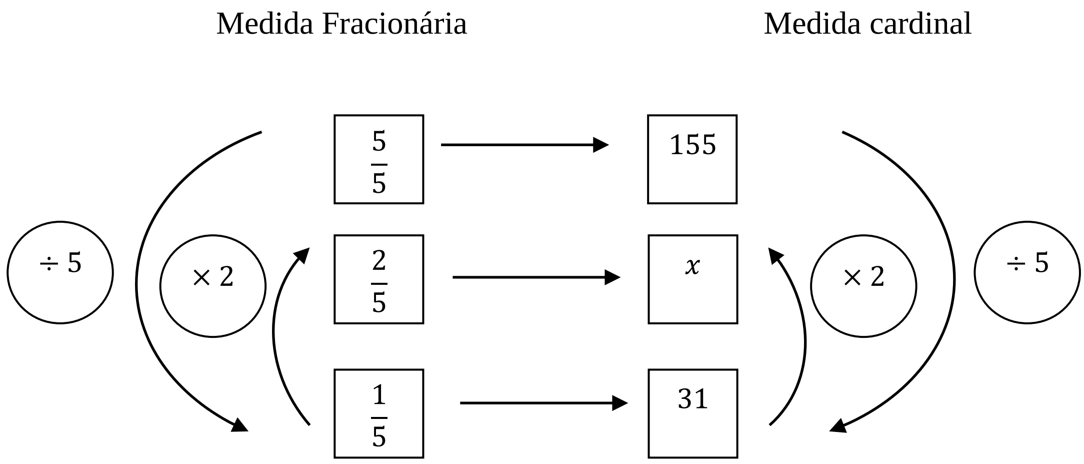
   c) Quando faltavam 150 km para chegar ao sítio, João parou para tomar um lanche. Que fração do caminho total ele já havia percorrido? Represente essa situação num desenho.

Figura 45 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha: Frações: Problemas – 2, p. 15

Resolução de problemas envolvendo frações, aplicadas a medidas de diferentes naturezas (medida de capacidade, cardinalidade, unidade monetária, medidas de comprimento), discretas e contínuas.

As frações aparecem representadas pela língua natural e na forma fracionária. Os problemas trazem diferentes objetivos. Em alguns casos (questões 2, 3, 4a e 4b, nas fig’s. 43 a 45), deve-se encontrar a parte conhecendo o todo, o que exige do aluno o conhecimento do significado da representação fracionária. Podem ser analisadas como questões de isomorfismo de medidas, em que as medidas das diferentes grandezas devem ser relacionadas com as medidas em frações.

Nas questões 2 e 3(figuras 42 e 43), como se referem a frações com numerador diferente de 1, o caminho mais comum é encontrar o valor da medida fracionária de numerador 1 para depois encontrar a fração procurada, incorrendo na necessidade de uma divisão e posterior multiplicação. Esquema possível da questão 2 (fig. 42):

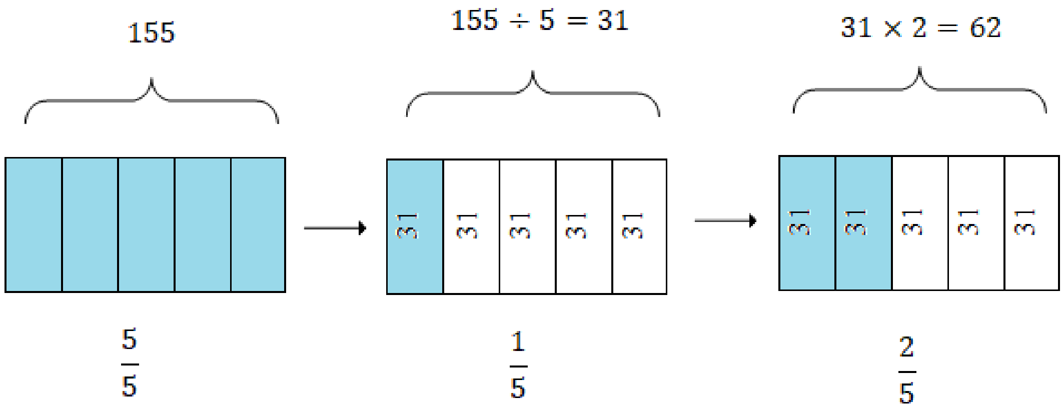


Representação algébrica:

$$155 \div 5 = 31$$

$$31 \times 2 = x$$

Representação gráfica:



Já na questão 1 (fig. 42), deve-se calcular o todo, conhecendo-se a parte, incorrendo na necessidade de fazer uma única multiplicação.

Na questão 4c (fig. 44), deve-se encontrar a fração que 150 km representa em relação ao inteiro. Normalmente, para encontrar a fração, os alunos têm mais dificuldade. Uma resposta possível, que demonstra a compreensão da fração como parte do todo é $\frac{450}{600}$. Nessa situação, também é solicitada a representação gráfica, ou seja, fazer mais uma representação da mesma situação.

Os tipos variados de situações propostas contribuem para a construção dos conceitos e dos invariantes operatórios relacionados ao conceito das frações como parte do todo e como medida.

Habilidade: (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

Figura 46– Bloco Números Racionais III– Representação Fracionária, Ficha: Frações: Equivalência – 1, p. 22

3. Três pessoas foram à mesma pizzaria três vezes nessa semana.

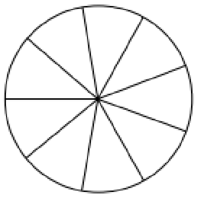
- No primeiro dia, pediram uma pizza cortada em 3 pedaços e cada pessoa comeu um pedaço.
- No segundo dia, pediram a mesma pizza cortada em 6 pedaços e cada pessoa comeu 2 pedaços.
- No terceiro dia, pediram a mesma pizza cortada em 9 pedaços e cada pessoa comeu 3 pedaços.

a) Escreva a fração da pizza que cada pessoa comeu em cada dia.

1º dia: ——

2º dia: ——

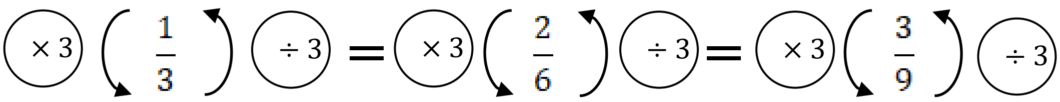
3º dia: ——



Nessa atividade (fig. 46), é proposto o material didático de pizzas de madeira (Anexo B) e, por sobreposição das frações, é possível identificar as equivalências. No material didático, não há frações de nonos, de modo que o aluno deve também utilizar a representação gráfica disposta na questão para concluir a equivalência entre 1/3 e 3/9, 2/6 e 3/9.

O uso de frações com numerador igual a 1 e suas equivalências possibilitam a percepção da invariância da relação existente entre numerador e denominador de frações equivalentes, por ser uma transformação cujo operador é um número natural. Essa conclusão traz a noção de relação unívoca; a noção de recíproca; e a noção de aplicação, é, portanto, um teorema-em-ação, que remete à própria definição de função injetiva. (fig. 47)

Figura 47– Esquema: relação de invariância entre numeradores e denominadores de frações equivalentes



b) Em que dia cada pessoa comeu a maior fração da pizza?

____

c) Complete com = ou ≠.

$\frac{1}{3} \square \frac{2}{6} \square \frac{3}{9}$

d) Como são chamadas as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$? ____________________

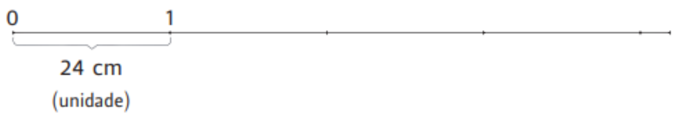
Figura 48 - Bloco Números Racionais III– Representação Fracionária, Ficha: Frações: Equivalência – 1, p. 22

Na continuidade da questão (fig. 48), é solicitada a comparação entre os diferentes significantes de mesmo significado, estabelecendo uma relação binária de equivalência nas as relações entre numerador e denominador.

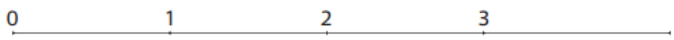
Figura 49 – Bloco Números Racionais III– Representação Fracionária, Ficha: Frações: Reta Numérica, p. 45

1. Numa faixa de papel.

a) Desenhe uma reta e marque os pontos zero e um. Assim:



b) Marque agora os pontos 2, 3, ..., mantendo os intervalos com a mesma medid
da unidade. Assim:



c) Descubra o lugar das frações abaixo na reta numérica e represente-as.

$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{6}{4}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{2}{8}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{10}{4}$
$\frac{8}{6}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{12}{4}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{3}{1}$

Figura 50 – Bloco Números Racionais III – Representação Fracionária, Ficha: Frações: Reta Numérica, p. 45

Na atividade acima, (fig. 49 e 50) o aluno deve ordenar e comparar frações através de sua localização na reta numérica. Na faixa utilizada, retirada de uma cartolina, cabe um pouco mais do que duas unidades da medida proposta, por isso, algumas frações da tabela não podem ser encontradas na reta. Essa situação gera grande desconforto nos alunos, levando-os a se questionar sobre seus cálculos e tomar a decisão de como proceder. Esses questionamentos, fruto da desestabilização gerada, são de grande valor no desenvolvimento cognitivo como ferramenta de verificação, revisão e tomada de decisão.

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

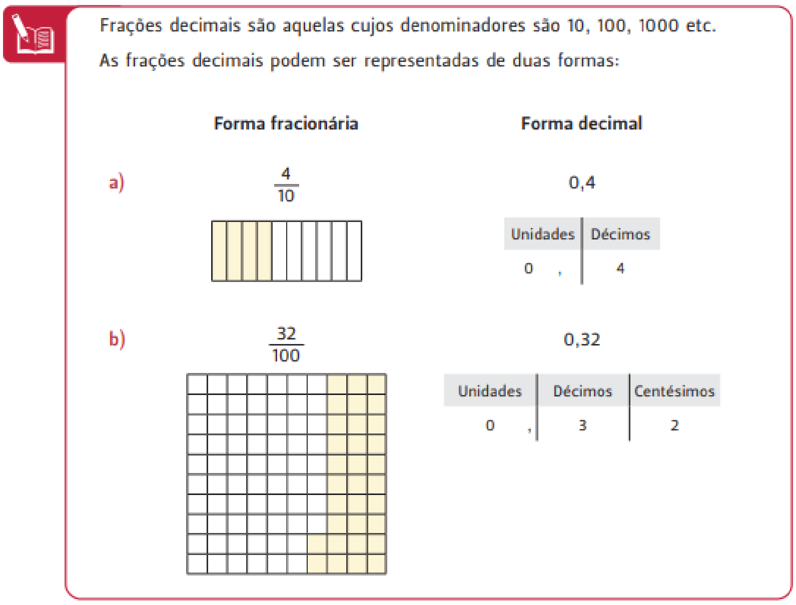


Figura 501 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha: Representação Fracionária e decimal – 1, p. 1

Apresentação, através de formas gráfica, fracionária e decimal, das representações dos Números Racionais. (fig. 51)

3. Represente a fração correspondente à parte pintada e escreva-a na forma decimal.

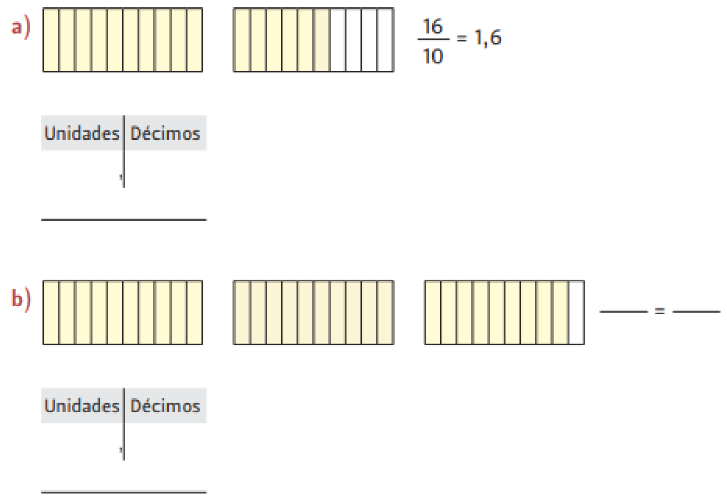


Figura 52 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha: Representação fracionária e decimal – 1, p. 3

Transformação entre as representações fracionária e decimal (fig. 52) com uso de representação gráfica, para Números Racionais menores e maiores do que o inteiro. A representação gráfica e o uso da nomenclatura (décimos, centésimos, milésimos...) têm papel importante na construção dos conceitos das ordens decimais como pedaços cada vez menores da unidade e nas transformações para frações com denominadores 10, 100, 1000, e assim por diante.

4. Escreva como se lê os seguintes números.

a) 321: ______________________

b) 3,21: ______________________

c) 0,321: ______________________

d) 1,02: ______________________

Figura 53 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha: Representações Fracionária e decimal – 2, p. 9

5. Escreva os números a seguir na representação decimal.

a) Doze décimos: ____________________

b) Noventa e dois centésimos: ____________________

c) Cinco milésimos: ____________________

d) Quinhentos e vinte e seis centésimos: ____________________

Figura 54 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha: Representação fracionária e decimal – 2, p. 9

Transformações entre representação decimal e língua natural. (fig. 53 e 54)

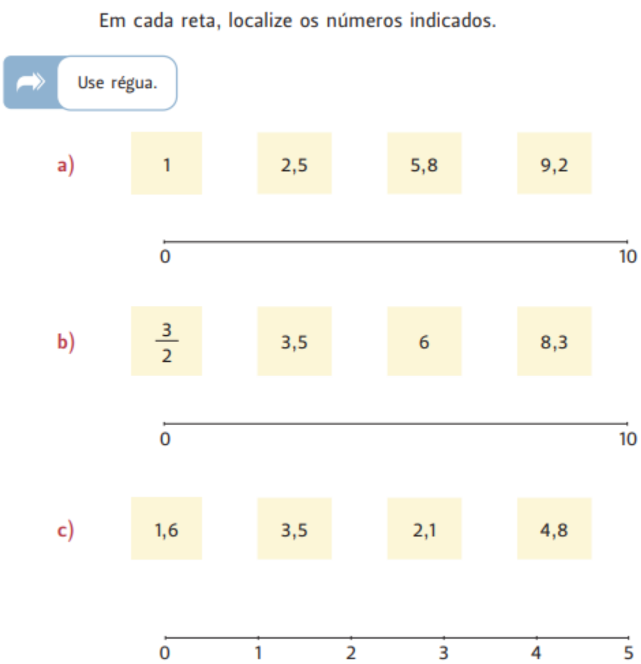


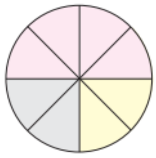
Figura 55 – Bloco Números Racionais III – Representação Decimal, Ficha: Reta Numérica, p. 21

Localização dos números decimais na reta numérica, utilizando representação decimal e fracionária, e com variação da medida das unidades. E uso das unidades de medida de comprimento para encontrar a localização (fig. 55).

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

3. Observando as figuras, complete as operações.

Figura 1



a) $\frac{1}{2} + \_\_ = 1$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \_\_ = 1$

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \_\_ = 1$

d) $\frac{1}{4} + \_\_ = \frac{1}{2}$

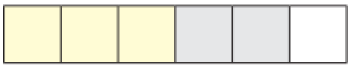
e) $\frac{1}{4} + \_\_ = 1$

Figura 56 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Adição e Subtração de Frações –1 – Representação Gráfica, p. 3

Na figura 56, partindo da representação gráfica, o aluno deve completar as parcelas para marcar a relação de igualdade. Como o inteiro está dividido em 8 partes, existem algumas soluções possíveis, e os alunos devem avaliar e perceber a relação de equivalência entre as soluções corretas. Pode-se observar a composição de relações nessa atividade, uma quaternária na relação de equivalência entre as frações, e outra ternária, onde a transformação é o elemento a ser descoberto.

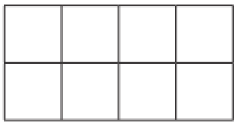
4. Pinte as figuras com duas cores, para representar as subtrações correspondentes. Depois, complete as sentenças matemáticas. Sempre que possível simplifique os resultados. Observe o exemplo.

Exemplo:



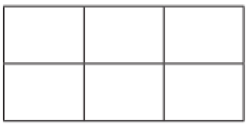
$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

a)



$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \underline{\qquad}$$

b)



$$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \underline{\qquad}$$

Figura 517 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Adição e Subtração de Frações –1 –Representação Gráfica, p. 4

De forma análoga, as subtrações são apresentadas (fig. 57) com o uso do gráfico, e devem concluir as equivalências.

2. Observe as figuras do exercício 1 e complete as adições transformando as frações em frações equivalentes de mesmo denominador.

a)
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\frac{}{6} + \frac{}{6} =$$

b)
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} =$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$\frac{}{8} + \frac{}{8} =$$

Figura 528 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Adição e Subtração de Frações – 2 – Equivalência, p. 8.

Cálculo da adição de frações pelo uso das equivalências. (fig. 58).

3. No mês passado, Cláudio gastou $\frac{1}{2}$ de seu salário em alimentação e $\frac{3}{4}$ em outras despesas.

a) Sobrou ou faltou dinheiro para Cláudio?

b) Se o salário de Cláudio fosse ____________, quanto ele teria gasto? Isso seria possível?

c) Considerando o mesmo salário de Cláudio, quanto faltou para que ele cobrisse as despesas?

Figura 539 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Adição e Subtração de Frações – 4, p. 16 e17

. Resolução de problemas envolvendo frações como medida e como divisão. (fig. 59) Nessa situação, o aluno deve escolher o valor do salário para calcular os gastos, proporcionando uma reflexão sobre a melhor relação entre o valor escolhido e os denominadores, qual seja, aquele que é um múltiplo do denominador.

4. Elabore um problema que, para resolvê-lo, seja necessário utilizar adição ou subtração de frações. Depois, resolva-o.

Figura 60 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Adição e Subtração de Frações – 4, p. 17

A elaboração de problemas envolvendo o conteúdo em estudo mostra-se também como um instrumento compreensão e conexão com a realidade que envolve o conceitos aplicados. (fig. 60)

Nas situações das figuras 61 e 62, diferentes aspectos do conceito de multiplicação de racionais são explorados, com uso de formas distintas de representação, por um lado a linguagem natural, “metade de dois quartos”, que é compreensível para a maior parte dos alunos, e remete a uma divisão, e por outro a linguagem aritmética, que pretende evidenciar o significado de um o operador racional, sem dúvida, um aspecto mais complexo.

2. Represente as situações graficamente e complete com o resultado.

a) $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{4}$ = ___

b) $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ = ___

Figura 54 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Multiplicação de frações 1 – Representação Gráfica, Conceito e Notação, p. 19

3. Agora, vamos trabalhar com as seguintes multiplicações de frações.

Para resolvê-las, encontre o numerador do resultado multiplicando os numeradores dos fatores. Encontre o denominador do resultado multiplicando os denominadores dos fatores.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}$ = ___

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ = ___

4. O que você observou em relação aos resultados dos exercícios 2 e 3?

___

___

Utilizando essa observação, a qual operação você associaria a palavra "de"? ___

Figura 62 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Multiplicação de Frações 1 – Representação Gráfica, Conceito e Notação, p. 20

Um recurso gráfico interessante para a multiplicação, mostrado na figura abaixo (fig. 63), é dividir o retângulo em direções perpendiculares, por exemplo: 1/2 de 1/3; repartir em três partes, na vertical, e pintar uma das partes; em seguida, dividir em duas partes, na horizontal, e marcar uma das partes; os quadrados resultantes, que tiverem as duas marcações, serão o produto procurado.

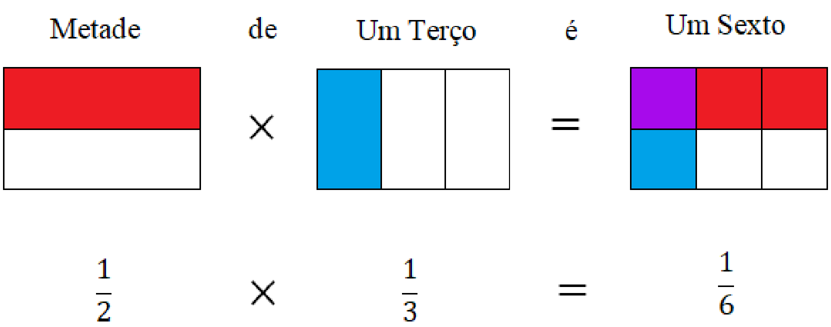


Figura 55 – Uso da representação gráfica na multiplicação de frações

Divisão de frações é apresentada como parte do todo, pela relação estabelecida na expressão “quantas partes cabem”, sendo, o dividendo, um número natural, e o divisor, uma fração (fig. 64). O fato de o quociente ser um Número Natural, gera questionamento por parte dos alunos, por isso, a noção de divisão como sendo a quantidade de vezes que o divisor cabe no dividendo, auxilia na compreensão da veracidade do quociente natural.

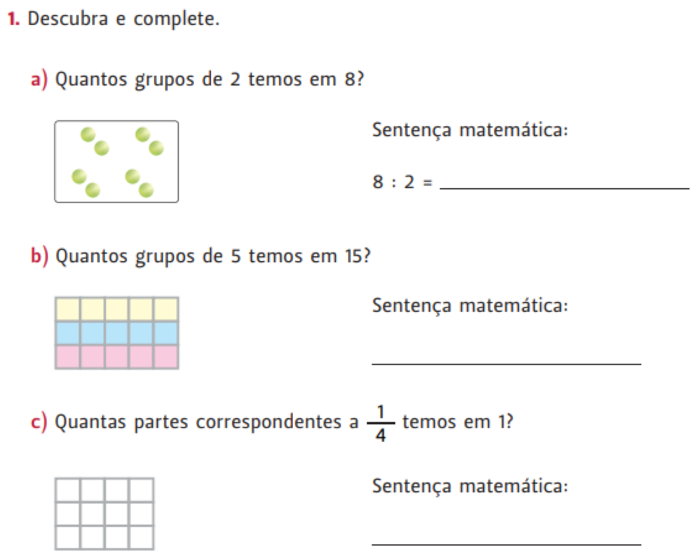


Figura 64 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Divisão de Frações 1 – Conceito, p. 35

Na sequência (fig. 65) o dividendo passa a ser um Número Racional,e o dividendo e divisor são frações de mesmo denominador. Utilizando a divisão como a relação de “quantas vezes cabe”, a dúvida sobre o quociente ser um número natural é mais facilmente assimilada.

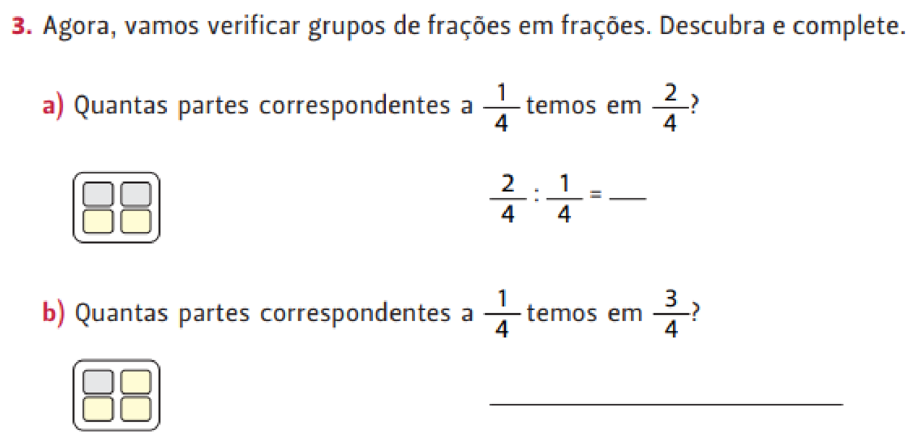


Figura 56 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Divisão de Frações 1 – Conceito, p. 36

A introdução do divisor como um Número Racional de denominador diferente do denominador do dividendo (com o divisor menor do que o dividendo), e do divisor como um número natural, ocorre com auxílio da representação gráfica (fig. 66). Um recurso interessante é o uso das equivalências, para o primeiro caso (dividendo e divisor com denominadores diferentes) e, no segundo (divisor sendo um número natural),é o caso de utilizar a divisão como a relação de repartir em partes iguais.

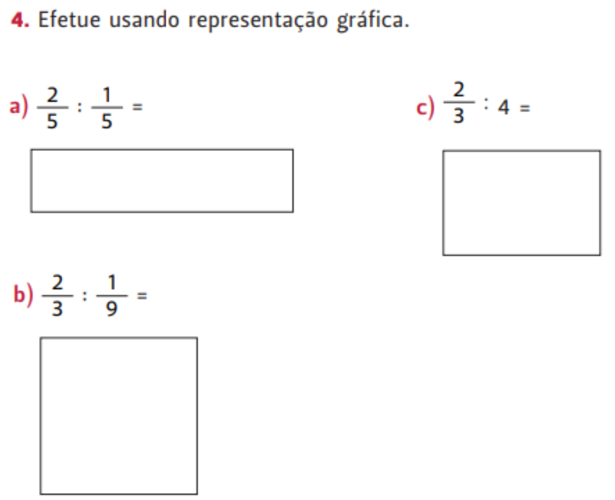
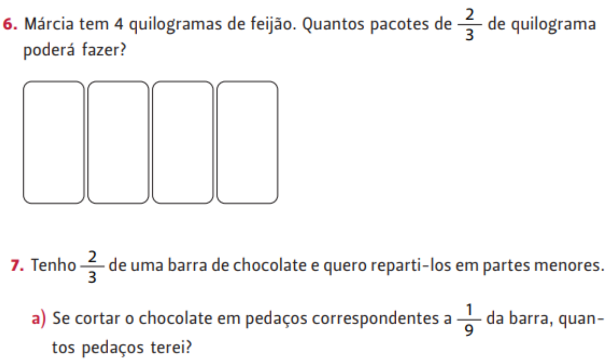


Figura 57 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Divisão de Frações 1 – Conceito, p. 37

Situações-problemas (fig. 67) envolvendo a divisão de racional por racional e natural por racional, a partir de conceitos e noções que foram desenvolvidos.



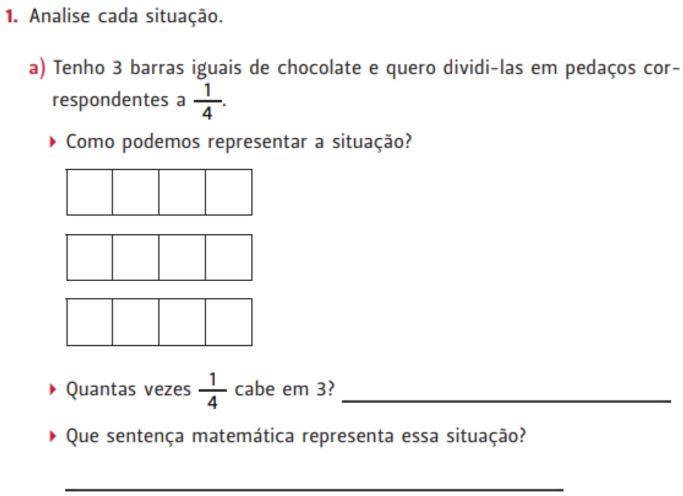
6. Márcia tem 4 quilogramas de feijão. Quantos pacotes de $\frac{2}{3}$ de quilograma poderá fazer?

7. Tenho $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate e quero reparti-los em partes menores.

a) Se cortar o chocolate em pedaços correspondentes a $\frac{1}{9}$ da barra, quantos pedaços terei?

Figura 58 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Divisão de frações 1 – Conceito p. 38

O uso da representação gráfica (fig. 68 e 69) é utilizado como recurso à percepção do uso da relação de equivalência entre frações e naturais, a divisão como relação "de quantas vezes cabe", além de servir como uma ferramenta de validação dos resultados. O registro do raciocínio matemático que levou ao êxito, é o desfecho para explicitar o os conhecimentos.



1. Analise cada situação.

a) Tenho 3 barras iguais de chocolate e quero dividi-las em pedaços correspondentes a $\frac{1}{4}$.

- Como podemos representar a situação?
- Quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em 3? ______________________
- Que sentença matemática representa essa situação?

____

Figura 68 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Divisão de Frações 1 – Conceito, p. 38

.

b) Como podemos representar, graficamente, $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$?

- Quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{2}{3}$? ______________

- Que sentença matemática representa essa situação?

____

Figura 59 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Divisão de Frações 1 – Conceito, p. 38

Diante das conclusões registradas , anteriormente, o debate agora (fig. 70) é estabelecido sobre a validade do algoritmo da divisão de racionais na forma de fração, como implicação daquilo que foi verificado com as relações estabelecidas na atividade anterior. Esse momento pode ser utilizado para institucionalizar esse algoritmo. Ainda neste bloco, seguem atividades de familiarização como prática do algoritmo em situações diversas, envolvendo domínios variados da Matemática, como medidas, geometria; e conceituação, como a de frações inversas.

2. Agora, volte ao exercício 1 e verifique se valem as transformações a seguir.

$$3 : \frac{1}{4} = 12 \longrightarrow 3 \cdot \frac{4}{1} = 12$$

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{6} = 4 \longrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{12}{3} = 4$$

Essas transformações são válidas? ______________________________

Figura 60 – Bloco Números Racionais IV – Ficha: Divisão de Frações 1 – Conceito, p. 39

(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

Situações envolvendo operações de adição e subtração de decimais. As operações do campo aditivo são constantemente encontradas no cotidiano, pelo uso das medidas monetárias, medidas de comprimento, medidas de massa, entre outras, por isso, estão assimiladas por grande parte dos alunos do 6º ano. (fig. 71 e 72)

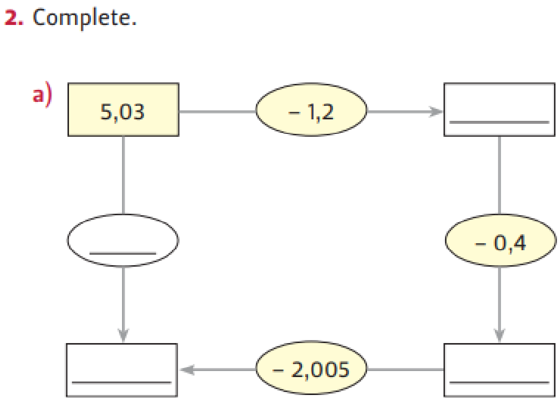


Figura 61 – Bloco Números Racionais V – Ficha: Adição e Subtração de Decimais – 1, p. 12

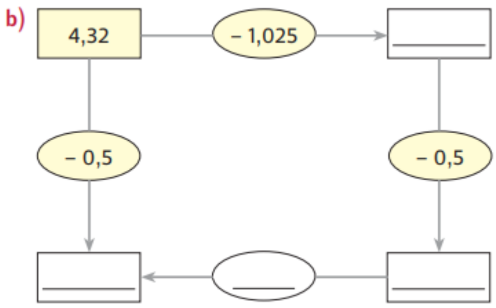


Figura 62 – Bloco Números Racionais V – Ficha: Adição e Subtração de Decimais – 1, p. 12

Construção da relação das operações de decimais com o uso da transformação em fracionário, com o objetivo de observar a relação da quantidade de ordens decimais nos fatores e a quantidade de ordens decimais no produto. (fig. 73)

1. Transforme as sentenças matemáticas para a representação fracionária e resolva-as, como no exemplo:

$$2 \cdot 0{,}1 = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

a) $4 \cdot 0{,}1 =$

b) $2 \cdot 0{,}01 =$

c) $5 \cdot 0{,}001 =$

Figura 63 – Bloco Números Racionais V – Ficha: Multiplicação de Decimais – 1, p. 17

Observação das regularidades nas multiplicações de decimais por 10, 100 e 1000 (fig. 74)

4. Resolva.

a) $35 \cdot 10 =$

b) $0{,}21 \cdot 10 =$

c) $1{,}5 \cdot 10 =$

d) $7 \cdot 100 =$

e) $3{,}5 \cdot 100 =$

f) $0{,}432 \cdot 100 =$

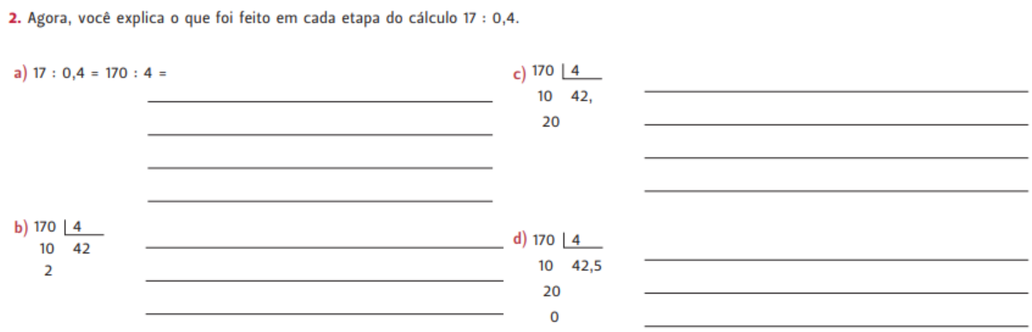
g) $14 \cdot 1000 =$

h) $4{,}21 \cdot 1000 =$

i) $12{,}3 \cdot 1000 =$

Figura 64 – Bloco Números Racionais V – Ficha: Multiplicação de Decimais – 3, p. 24

Uso da transformação entre representações para divisão com quociente decimal. (fig. 75)



2. Agora, você explica o que foi feito em cada etapa do cálculo 17 : 0,4.

a) 17 : 0,4 = 170 : 4 =

b) 170 | 4
10 42
2

c) 170 | 4
10 42,
20

d) 170 | 4
10 42,5
20
0

Figura 65 – Bloco Números Racionais V – Ficha: Divisão de Decimais – 4, p. 44 e 45

Resultados

Os resultados desta pesquisa estão baseados nos critérios definidos no capítulo 3. A seguir, apresentamos nossa percepção do atendimento desses critérios no Material Didático estudado.

Construção de conceitos através de situações que envolvem determinado campo de estudo

Os conteúdos de Matemática são, costumeiramente, apresentados, nos livros didáticos, trazendo, em primeiro lugar, as definições, demonstrações, proposições propriedades, e regras de operação, que compõem o objeto de estudo; muitas vezes,utilizando uma linguagem formal, característica da teoria matemática, que permitem a generalização desses conceitos para aplicação em situações de mesma natureza. E complementam essas definições com sua aplicação em um exemplo numérico, tornando mais compreensível suas aplicações.

A formalidade, que tem papel decisivo no desenvolvimento da Ciência e definição do conjunto de regras, em muitos casos, torna-se uma barreira para o desenvolvimento do conhecimento, na medida em que é usada uma linguagem descolada do nível de compreensão do estudante. Essa desconexão com os objetos da materialidade dos alunos dificulta a formação de significado para esses objetos.

A construção de significados é feita, em primeiro lugar, pela familiaridade que a criança tem com os objetos em estudo; com as relações que pode fazer entre esses objetos, a partir de uma linguagem apropriada para sua fase de desenvolvimento. As relações, por sua vez, são compreensíveis, quando os conceitos que elas envolvem proporcionam sentido para o aprendiz.

Nesse sentido, o desenvolvimento do conhecimento escolar, deve partir do saber cotidiano, "[...] pelos objetos do mundo material, pelas experiências e pelo uso de instrumentos próprios do mundo em que vivemos" (PAIS, 2011, p. 59).

O material em análise propõe o aprendizado pela ação do sujeito em situações elaboradas, partindo de objetos da materialidade da criança, de maneira a confrontá-la com os conceitos que se pretende que sejam alcançados. Sem uma apresentação teórica prévia, as situações propostas exigem uma contextualização, por parte do professor, e o uso de objetos didáticos que dão uma dimensão experimental ao aprendizado, pretendendo tornar a sala de aula um ambiente de pesquisa.

Variação das situações propostas: alternância dos objetivos das situações

Conforme mencionado no capítulo 1, a situação é a primeira entrada para o processo da formação dos conceitos. Nas situações é que se estabelecem as relações entre os objetos de estudo, e que vão compor os vários aspectos dos conceitos colocados em jogo.

Os problemas do campo aditivo, por exemplo, que exigem apenas as operações de adição e subtração, Vergnaud (2014) define em seis grandes categorias, pelos diferentes níveis de dificuldade que cada uma dessas categorias traz para as crianças. A primeira categoria é a composição de duas medidas para formar uma terceira medida. A segunda,surge quando uma transformação opera sobre uma medida para encontrar uma nova medida. Na terceira, ocorre uma relação que liga duas medidas; nesse caso, é uma relação estática entre duas medidas, que difere das relações anteriores, onde ocorreram transformações. Na quarta, consta a composição de duas transformações, que resulta em uma única transformação. A quinta categoria é quando uma transformação opera sobre um estado relativo, gerando outro estado relativo; e a sexta categoria acontece quando há a composição de dois estados relativos, gerando um terceiro estado relativo, caso que guarda semelhança com o quarto caso, de composição de transformações, mas que, segundo Vergnaud (2014, p. 205):

> a diferença entre estado e transformação justifica, em nosso entender que se tenha uma categoria a parte. Em particular, não há qualquer ordem temporal entre dois estados relativos e eles são necessariamente considerados como contemporâneos quando são compostos; este não é o caso das transformações.

Dentro dessas seis categorias, ainda tem-se as classes e subclasses de cada uma delas, que dão ampla possibilidade de construção dos aspectos diversos dos conceitos que abrangem esse campo da Matemática.

O olhar criterioso para a elaboração das situações, levando em conta as noções, proposição, propriedades, relações e conceitos, de cada uma, quando adequadas para os objetivos que se pretende alcançar, tornam o aprendizado mais significativo, na medida em que contribuem para a assimilação das ideias fundamentais que compõem os campos da Matemática, de modo que a conceitualização se dê pela ação da criança em situação.

Consideramos como um fator positivo do material, enquanto instrumento de desenvolvimento de conhecimento, a participação dos professores em sua elaboração, pois, ao acompanhar as crianças em ação, encontram-se em posição privilegiada para avaliar o atendimento efetivo dos objetivos propostos, e opinar sobre as atualizações que consideram necessárias.

Variação das representações nas situações: uso de representações diferentes para uma mesma situação

O processo de aprendizagem ocorre através de esquemas elaborados pela criança, a partir das relações feitas entre as propriedades dos objetos, suas medidas e as situações da vida cotidiana. Nesse contexto, as tarefas escolares são representações dessas situações, que carregam em si as demandas das situações reais. Interpretar a situação, fazer representações dela, conjecturar sobre possíveis soluções, aplicar a melhor solução, e reiniciar o processo em caso de insucesso.

Ao fazer a representação, a conjectura, e tomar a decisão, a criança lança mão das representações que conhece, o que muitas vezes, torna difícil a compreensão das relações que a levaram a uma determinada solução, exigindo do mediador o conhecimento profundo desse processo, a fim de auxiliar nas dificuldades encontradas pelos alunos.

As representações são ferramentas que possibilitam aos alunos criar seus esquemas, e desenvolvera percepção das relações, além de fornecer ao professor instrumentos para a compreensão do processo de formação desses esquemas. Essas representações podem se mostrar por registros na língua natural; expressões algébricas; tabelas cartesianas; desenhos; de forma oral; ou até gestual. Construir essas representações, a partir de situações reais, e reconstruí-las em outras representações, constitui um "exercício intelectual essencial" (VERGNAUD, 2014, p. 86). Daí a importância da alternância das representações dentro do processo de aprendizagem matemática.

Segundo Vergnaud(2014, p. 301),

> É com a ajuda simultânea dessas diferentes representações que a criança raciocina, passando de um plano a outro em função da necessidade e relações com as quais ela tem que tratar. Pensar consiste não apenas em passar de uma situação real a uma representação, mas de passar de uma representação a outra e a ela retornar.

As fichas propostas no material trazem essa ampla diversidade de representações, no que se refere ao conjunto dos números racionais, através da imagem de conjuntos de objetos; representações gráficas, algébricas; tabelas; sistema sagital e linguagem natural, que, pelos motivos expostos, contribuem em grande medida para o desenvolvimento de esquemas característicos dos conceitos, invariantes operatórios, significantes e operações que envolvem esse conjunto numérico.

Situações propondo transformação entre representações de uma mesma situação: usar uma determinada situação através de uma representação, e representá-la com outra linguagem

Como também mencionado, propor ao aprendiz o exercício de alterar as representações se constitui como um exercício fundamental no processo de aquisição do conhecimento, e concluímos que esse tipo de atividade é constantemente utilizado no material.

Desenvolvimento das relações entre os significados e significantes próprios da escrita matemática

Vergnaud(2014, p. 81) afirma que "[...] a noção de relação abrange todas as outras noções matemáticas" pois que todo raciocínio matemático pode ser analisado como um cálculo relacional. Mas ressalva a importância de tratar, de forma mais detalhada, questões como a classificação, as medidas, os sistemas de numeração e outros.

O uso das relações de parentesco é excelente para trabalhar simetrias, transitividade, reflexividade e suas derivações. As relações “ser ascendente de” e “ser descendente de”, por serem recíprocas, estabelecem uma noção de ordem parcial, na medida em que existem elementos que estão no mesmo nível da árvore genealógica.

Sem dúvida que os números são, na escola básica, um domínio especial para estudo das relações binárias, ternárias e quaternárias. Binárias, como “igual a”, “maior que”, “ser múltiplo de”; Ternárias, através da composição de relações binárias, nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; e Quaternárias, nas relações de proporcionalidade, por exemplo.

Segundo Vergnaud (2014, p. 85),

> Tudo é matéria para a relação, e uma das tarefas do educador é a de utilizar a matemática para analisar as relações e para levar a crianças a descobrir, por trás da variedade das coisas, um pequeno número e a simplicidade das relações que a estruturam.

Daí que o desenvolvimento das relações que se estabelecem entre os símbolos matemáticos ganha sentido na medida em que permitem estabelecer relações, que, em princípio, partem daquilo que é compreensível para as crianças, os objetos do cotidiano e os conceitos, que já conseguem compreender, e de sua experiência na manipulação desses objetos, com uso de representações que se prestem a manter conexão com a realidade e ao cálculo.

Vergnaud(2003) considera que os fatores que podem proporcionar o aumento do conhecimento é a atividade do sujeito que aprende, a oferta de situações favoráveis ao aprendizado, a mediação por parte das pessoas que o rodeiam, a utilização de formas linguísticas e de formas simbólicas para comunicar e representar.

De fato, percebeu-se, no material analisado, a proposição de situações favoráveis ao desenvolvimento das relações que se pretende estabelecer pelas representações características do conjunto dos Números Racionais, mantendo a conexão com objetos próprios da materialidade dessa faixa etária, que são potenciais geradores dos esquemas que esse conjunto numérico pretende alcançar.

Entrelaçamento de domínios da matemática nas situações: uso de domínios variados, como geometria, aritmética, medidas e álgebra, dentro das situações propostas

O estudo dos números decimais pressupõe o conhecimento da noção de divisão sobre seus vários aspectos, como repartir um objeto em partes iguais; distribuir em quantidades iguais; pela relação de "quantas vezes cabe", relacionadas aos objetos e aos conjuntos de objetos. A noção básica de área, e de conservação da área, quando da divisão de uma superfície em partes iguais.

O desenvolvimento da equivalência com uso da igualdade como relação entre diferentes significantes com o mesmo significado, e não como apenas um cálculo, são componentes importantes para o desenvolvimento algébrico, assim como operações nas quais o aluno é levado a tentar descobrir uma das parcelas de uma adição, sabendo o seu resultado. As medidas discretas e contínuas são utilizadas, com bastante frequência, nos problemas e nas situações propostas no material.

Uma característica do material, que consideramos muito construtiva, é o fato de os materiais serem compostos por fichas destacáveis, que permitem que blocos de domínios diferentes possam ser utilizados simultaneamente, e, como consequência, torna o entrelaçamento dos domínios inerente ao uso dos blocos.

Atendimento de Conteúdos e Habilidades da BNCC

Na BNCC (2018), a Matemática é percebida como um conjunto de domínios matemáticos que compõe suas ideias fundamentais, quando relacionados, dentre eles, cita a equivalência; a noção de ordem; interdependência; proporcionalidade; representação; variação; e aproximação. E propõe cinco unidades temáticas, para o ensino da Matemática, que correlacionadas, vão direcionar as habilidades que se pretende desenvolver no Ensino Fundamental -os Números; a Álgebra; Geometria; as Grandezas e Medidas; e a Proporcionalidade e Estatística (BRASIL, Ministério da Educação, 2018).

No presente trabalho, evidenciou-se a Unidade Temática de Números, nas habilidades orientadas para o conjunto dos Números Racionais para o 6º ano do Ensino Fundamental, e, através das habilidades, verificar se estão contempladas nas situações que compõem o objeto de nossa análise. E demonstramos esse fato na primeira parte deste capítulo.

Percebemos que o material atende à BNCC (2018) quase em sua totalidade. A única ressalva que fazemos é sobre a habilidade EF06MA11, descrita no Quadro 2, no início deste capítulo, referente à potenciação com números decimais, ainda que as potências de inteiros e algumas de suas propriedades, como multiplicação e divisão, de potências de mesma base, sejam objeto de estudo no bloco de Múltiplos e Divisores, que faz parte do conjunto de blocos do 6º ano.

Quanto ao desenvolvimento das atividades propostas, encontramos diversos exemplos da aplicação de princípios que compõem o TCC no processo de construção do conhecimento matemático. A principal característica que percebemos é a proposição de atividades a partir da ação do aluno em situações como a forma de construção dos conceitos, das relações e propriedades colocadas em jogo.

As propostas levam em conta as diferentes classes de situações, nas quais as formas variadas de explorar os conceitos envolvidos permitem que a criança perceba gradativamente aspectos mais complexos desses elementos contribuindo para um aprendizado significativo.

Vale ressaltar, contudo, que o uso do material exige do professor conhecimento e compreensão dos objetivos que se pretende alcançar em cada ficha desenvolvida; ter escuta para as conjecturas dos alunos; e boas perguntas, que os estimulem e auxiliem a seguir no caminho das hipóteses verdadeiras. A inexistência de uma versão do professor para os materiais de Matemática, que entendemos ser uma forma de não enquadrar o processo criativo de construção de significados e relações, por outro lado, dificulta a percepção dos professores quanto aos objetivos que se pretende alcançar em algumas situações propostas.

Para tanto, as assessorias prestadas pela escola que produz o material são fundamentais para o processo de formação do professor que os utiliza, mas o alto custo que envolve esse processo limita seu acesso apenas às escolas que atendem às classes sociais privilegiadas.

Ainda observamos que a contextualização das situações são peças cruciais para a significação dos conteúdos que se pretende alcançar, e que o fato de a elaboração do material atender às demandas de alunos de uma capital, dificulta essa aproximação com a realidade de alunos de outras localidades, ainda que as tecnologias modernas as aproximem, a mediação, por parte do professor, torna-se mais trabalhosa.

Considerações Finais

O desenvolvimento do pensamento matemático como parte do crescimento cognitivo apresenta-se como ferramenta de compreensão das complexidades do mundo que nos cerca, das tecnologias desenvolvidas e dos diversos campos de estudo científico. Para além disso, o pensamento matemático é um instrumento de compreensão das relações que se estabelecem dentro da própria Matemática. Estabelecer essas relações para a criança está, em última análise, na conexão que ela é capaz de fazer entre os conceitos e noções que compõem as matemáticas e que se entrelaçam,dando significado às relações.

Porém,a forma como o cientista compreende a Matemática é diferente da maneira como a criança aprende. Por esse fato, o professor deve se debruçar sobre o processo de ensino e aprendizagem, de modo a ocupar o papel de mediador de forma coerente com as habilidades e os conhecimentos disponíveis para o aprendiz.

A mediação, no Ensino Fundamental, tem o objetivo de construir os alicerces sobre os quais as relações mais complexas da Matemática vão se apoiar, levando em conta o estágio de desenvolvimento da criança, e do mundo de significados que molda sua percepção sobre os objetos e fenômenos do seu cotidiano.

A construção do conhecimento matemático passa, portanto, pela assimilação dos conceitos matemáticos, em seus campos de atuação, mantendo a conexão com a realidade, por um longo período, quando o aprendiz, confrontado por situações didaticamente favoráveis, é levado a perceber as invariâncias das relações e seus significados.

Portanto, a experimentação é parte importante do processo, segundo Pais (*apud* BACHELARD, 2001), os primeiros obstáculos para o desenvolvimento do conhecimento matemático ocorrem nas experiências iniciais, quando a conceitualização transcorre de forma apressada, sem qualquer reflexão. Nesse sentido, os livros didáticos costumam simplificar os conteúdos por um formalismo que não corresponde aos desafios do fenômeno cognitivo.

Com essa percepção pedagógica, entendemos a importância do material didático como instrumento capaz de trazer situações em que as experimentações sejam também objetos de interpretação, reflexão e de espaço para criação e validação de hipóteses, sem que a Matemática pareça, aos alunos, uma ciência cristalizada, pronta e desinteressante, mas que traga o sentido de busca e construção de significados e caminhos.

Referências

BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais.** Curitiba: CRV, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Direitos Humanos da Presidência da República. **Caderno de educação em direitos humanos**. **Educação em direitos humanos**: diretrizes nacionais. Brasília: Coordenação-Geral de Educação em SDH/PR, Direitos Humanos, Secretaria Nacional de Promoção e Defesa dos Direitos Humanos, 2013. Disponível em:. Acesso em: 6 mar. 2023

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia do programa nacional do livro didático**: apresentação. Brasília: MEC, 2007a. Anos Finais do Ensino Fundamental. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Avalmat/pnldapres07.pdf . Acesso em: 23 jan. 2023.

GOMES, L. M. Os **Números racionais em três momentos da história da matemática escolar brasileira**. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1878#. Acesso em: 10 mar. 2023

LIMA, E. L. **Números e funções reais**.Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Coleção Profmat, 2013.

LIMA, M. S.; SANTOS, J. V. C. **A teoria dos campos conceituais e o ensino de cálculo.** Curitiba: Appris, 2015.

MAGINA, S. **A teoria dos campos conceituais**: contribuições da psicologia para a prática docente. Disponível em:https://www.scielo.br/j/bolema/a/6rHfN88Ccn67444CKmgssDQ/?lang=pt . Acesso em: 18 jan. 2023.

MARANHÃO, C.; MERCADANTE, S. G. **Sala de aula**: um espaço de pesquisa em matemática. São Paulo: Vera Cruz, 2006.

MOREIRA, M. A.**A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Porto Alegre: URFGS, 2002.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **Números racionais**: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. Rio Claro, 2004. Disponível em: www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br. Acesso em: 14 mar. 2023.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. **A teoria dos campos conceituais no ensino de números irracionais**: implicações da teoria piagetiana no ensino de matemática. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/3950. Acesso em: 20 nov. 2022.

OLIVEIRA, J. N. de. **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais**: confrontando dois níveis de escolaridade. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5901_2523_ID.pdf. Acesso em: 14 fev. 2023.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

SANTANA, E.; ALVES, A. A.; NUNES, C. B. **A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores**. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/6rHfN88Ccn67444CKmgssDQ/abstract/?lang=pt. Acesso em: 10 jan. 2023.

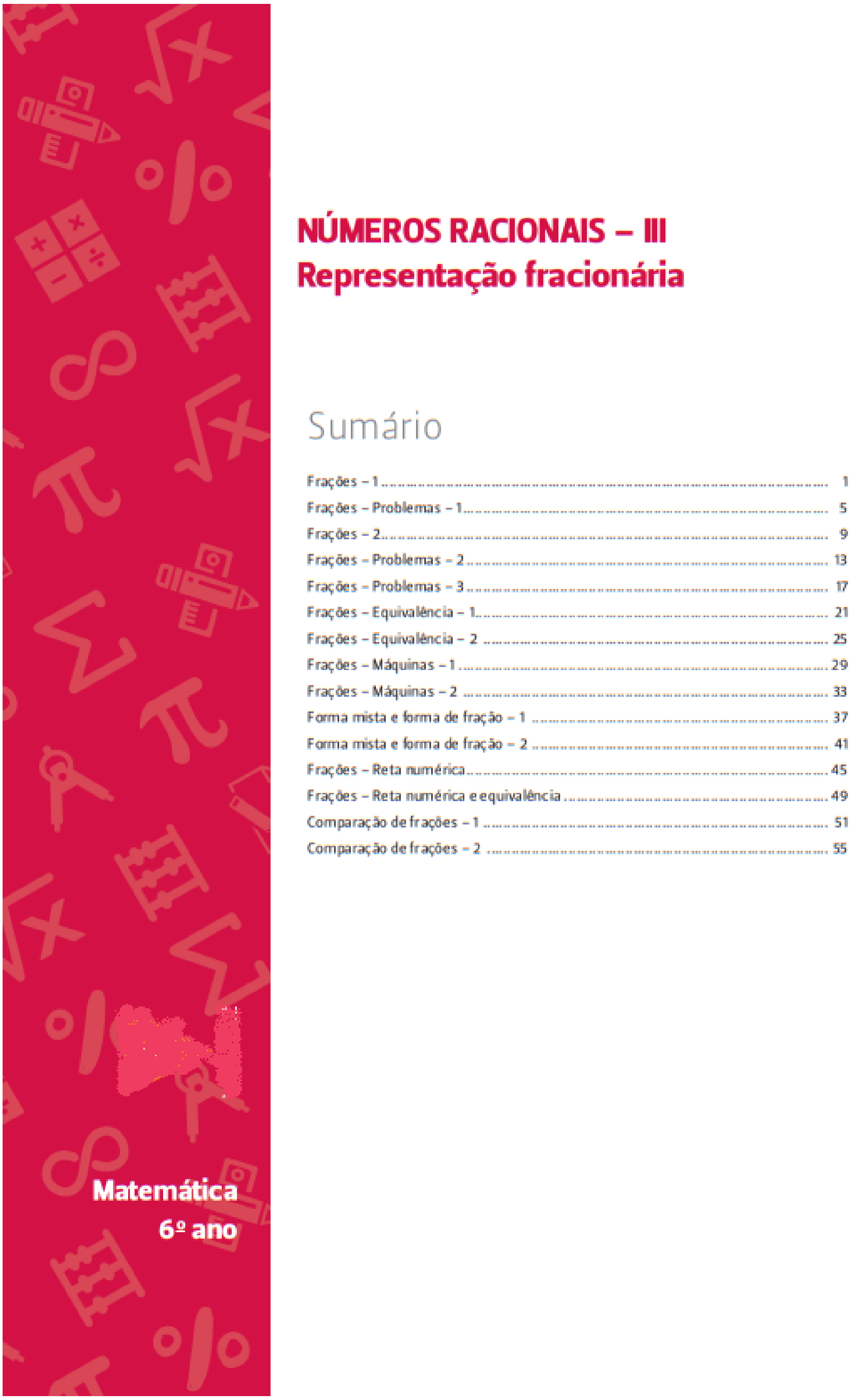
TAKAYA, C.; CUNHA, C. R. da; VIEIRA J. L. de A. **Unidade didática – números racionais**: representações fracionárias**.** Trabalho de Conclusão **(**Disciplina Metodologia para Ensino da Matemática**)** **-**Curso de Pedagogia da Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo,2015.

VERGNAUD, Gérard. **Conceitos e esquemas em uma teoria operatória da representação**. Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares, do original em francês: VERGNAUD, G. (1985). Concepts et schèmesdans une théorieopératoire de larépresentation. Psychologie Française

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino de matemática na escola elementar. Trad. de Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba:UFPR, 2014.

VERGNAUD, G.; PLAISANCE, E. **As ciências da educação**. São Paulo: Loyola, 2003.

Anexo A – Capa dos Blocos Analisados



NÚMEROS RACIONAIS – III
Representação fracionária

Sumário

Matemática
6º ano

NÚMEROS RACIONAIS – III
Representação decimal

Sumário

Matemática
6º ano

Matemática
6º ano

NÚMEROS RACIONAIS – IV

Sumário

NÚMEROS RACIONAIS – V

Sumário

Matemática
6º ano

Anexo B – Pizzas de Madeira