Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

WELTON PEREIRA DE SOUSA

Teresina
2023

WELTON PEREIRA DE SOUSA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino da Matemática

Orientador: Dr. Pedro Antônio Soares Júnior.

Teresina
2023

S725s Sousa, Welton Pereira de.

Sequência didática utilizada na resolução de problemas matemáticos / Welton Pereira de Sousa. – 2023.

85 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2023.

“Orientador Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior.”

“Área de concentração: Ensino da Matemática.”

1. Ensino de Matemática. 2. Atividades Estruturadas. 3. Resolução de Problemas. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB-3ª/1188

WELTON PEREIRA DE SOUSA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Aprovado por:

Pedro Antonio Soares Júnior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Presidente e examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Documento assinado digitalmente
gov.br NEUTON ALVES DE ARAUJO
Data: 08/07/2023 10:55:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Kelton Silva Bezerra

Prof. Dr. Kelton Silva Bezerra - Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí - UFPI

TERESINA
Julho/2023

Dedico este trabalho a minha esposa Maria Jovelane e a minha filha Maria Júlia por me proporcionarem a motivação necessária para vencer grandes obstáculos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade e por ter me ajudado durante toda esta longa jornada de crescimento pessoal e profissional.

Agradeço a todos os professores da Uespi que fazem o PROFMAT acontecer e que contribuíram de maneira significativa para o término desta caminhada.

Agradeço aos meus familiares, em especial meus avós, que me acolheram durante minhas viagens.

Agradeço aos meus colegas de turma, sem os quais não teria forças suficientes para concluir.

Agradeço aos meus colegas de trabalho pela compreensão e aos meus alunos que me desafiam todos os dias em sala de aula.

A MATEMÁTICA É O ALFABETO COM O QUAL DEUS ESCREVEU O UNIVERSO.

Galileu Galilei

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de propor uma sequência didática com algumas estratégias a fim de que o professor de matemática do 2º ano do Ensino Médio possa utilizá-la para estruturar uma sequência didática com potencialidades de serem solucionadas e estudadas por alunos com dificuldades em matemática. Por meio de uma pesquisa de abordagem qualitativa e quantitativa realizada com alunos de duas turmas do 2º ano do Ensino Médio. Os exercícios matemáticos e a resolução de problemas como metodologia de ensino têm um espaço significativo no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Porém, não poucas vezes, perdem força quando os problemas resolvidos e propostos para os alunos não têm uma sequência adequada, principalmente para aqueles que estão iniciando em algum tópico ou que possuem dificuldades nessa área do conhecimento. Através de um estudo de caso, foi realizado um levantamento das principais características que geravam indiferença dos alunos em relação as atividades propostas e com base nesses resultados, algumas intervenções foram feitas de modo a aperfeiçoar a sequência didática apresentada neste trabalho. Obtivemos uma mudança relevante da atitude dos alunos diante da nova sequência didática proposta, o que confirmou nossas suspeitas iniciais.

Palavras-chave: ensino de matemática; atividades estruturadas; resolução de problemas.

ABSTRACT

The present work aims to propose a didactic sequence with some strategies so that the 2nd year of high school mathematics teacher can use it to structure lists of exercises with the potential to be solved and studied by students with difficulties in mathematics. . Through a research with a qualitative and quantitative approach carried out with students from two classes of the 2nd year of high school. Mathematical exercises and problem solving as a teaching methodology have a significant space in the process of teaching and learning mathematics. However, not infrequently, they lose strength when the problems solved and proposed to students do not have an adequate sequence, especially for those who are starting in some topic or who have difficulties in this area of knowledge. Through a case study, a survey of the main characteristics that generated students' indifference in relation to the proposed activities was carried out and based on these results, some interventions were made in order to improve the didactic sequence presented in this work. We obtained a relevant change in the students' attitude towards the proposed new didactic sequence, which confirmed our initial suspicions.

Keywords: math teaching; structured activity; problem solving.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem o intuito de propor uma sequência didática com algumas estratégias a fim de que o professor de matemática do 2º ano do Ensino Médio possa utilizá-la para estruturar uma sequência didática com potencialidades de serem solucionadas e estudadas por alunos com dificuldades em matemática. Expomos algumas reflexões sobre o ensino de matemática no 2° ano do Ensino Médio através da resolução de problemas, enfatizando alguns aspectos estruturais das atividades propostas que podem dificultar o êxito dessa metodologia. A importância da resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem é destacada na literatura da área de educação matemática e em documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Almeida, Gomes e Madruga (2020) citam a resolução de problemas como tendência da Educação Matemática que tem contribuído para a discussão de novas perspectivas teóricas e metodológicas, além de desenvolver a capacidade de investigação, de argumentação, de compreensão e de levantamento de hipóteses. Nessa perspectiva, diversas pesquisas vêm sendo realizadas por alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), tais como Nascimento (2022), Silva (2023) e Duarte (2022), dentre muitas outras, analisando a resolução de problemas no ensino de conteúdos variados de matemática e mostrando que tal metodologia possibilitou a melhora na aprendizagem dos alunos. Diante da importância e destaque que recebe a resolução de problemas como um caminho frutífero para o ensino da matemática, esta pesquisa investigou o impacto de algumas objeções comuns entre os estudantes de duas turmas de 2º ano do ensino médio sobre os problemas propostos do livro didático, a fim de aperfeiçoar a sequência didática utilizada no processo de ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas. Perante o exposto, apresentamos o tema, o problema, os objetivos e a justificativa desta pesquisa.

1.1 Tema

Sequência didática que favoreça o aprendizado através da resolução de problemas por alunos do ensino médio.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Estruturar sequências didáticas favoráveis de serem resolvidas e estudadas por alunos do ensino médio com dificuldades em matemática.

1.2.2 Objetivos Específicos

a) Fazer um levantamento dos motivos da indiferença dos alunos que não se mobilizam para tentar resolver as atividades propostas e destacar aqueles que podem colaborar em uma reformulação dessas atividades.

b) Realizar algumas intervenções com base nas alegações dos alunos que podem melhorar a estrutura das atividades propostas;

c) Desenvolver e aplicar sequências didáticas.

1.3 Justificativa

Como professor de matemática, este pesquisador tem identificado, alguns impasses durante o uso frequente da resolução de problemas em sala de aula juntamente com os materiais didáticos estruturados recebidos pela escola, em especial o livro didático. O principal deles é a indiferença de uma boa parte dos alunos em relação as atividades propostas. A esse respeito,

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e certo tempo deve ser dedicado a uma apresentação natural e interessante. (PÓLYA, 1995, p.4)

Estudantes que não desejam fazer o mínimo de esforço para resolver os problemas propostos ou que desistem rápido demais em suas tentativas e preferem esperar o professor resolver. Como algumas de suas justificativas, tais como, não conseguir repetir os procedimentos usados pelo professor ou estar diante de situações diferentes das ensinadas em sala de aula, se repetiam, desejamos explorar se haveria uma estrutura de atividades que os levassem a mudar de postura e melhorar este cenário. A participação do aluno é fundamental para a construção de seu conhecimento.

Segundo Vygotsky (1976, p. 78), a relação professor-aluno não deve ser uma relação de imposição, mas sim, uma relação de cooperação, de respeito e de crescimento, no qual o aluno deve ser considerado como um sujeito interativo e ativo no seu processo de construção de conhecimento.

O texto da dissertação está organizado em 7 (sete) seções. Na primeira seção - Introdução - apresentamos o tema, o interesse pela presente pesquisa a partir da nossa experiência pessoal e profissional com o uso materiais didáticos fornecidos para o professor, combinados com o uso da metodologia de resolução de problemas para o ensino da Matemática. Além disso, destacamos o problema de pesquisa, os objetivos geral e específicos e o formato estrutural deste estudo.

O referencial teórico utilizado para fundamentação deste trabalho é apresentado na segunda seção. Primeiramente, refletimos sobre a definição de problema. Em seguida justificamos a importância da resolução de problemas como metodologia de ensino.

A metodologia da pesquisa é discutida na terceira seção. Enfatizamos à abordagem metodológica, o cenário, os sujeitos da pesquisa, os instrumentos utilizados na produção de dados e os procedimentos utilizados para análise dos mesmos.

A quarta seção é dedicada às análises e discussão dos dados produzidos nesta pesquisa.

Na quinta seção - Estrutura da sequência didática - são apresentadas algumas características que podem determinar o êxito de uma atividade proposta aos alunos.

Na quinta seção - Considerações finais - expomos o resumo do estudo e as reflexões dele decorrentes, destacando a resposta do problema de pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Definição de problema

Definir um problema matemático não é tarefa simples, e diversas são as visões sobre este conceito.

Segundo Lorenzato e Vila (1993) e Verçosa, Rocha e Teles (2010), não temos respostas absolutas para explicar o que é um problema.

De acordo com Polya (1995) o indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou com uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos imediatamente disponíveis.

Para Moneno (2006):

> A didática da Matemática define os problemas como aquelas situações que criam um obstáculo a vencer, que promovem a busca dentro de tudo que se sabe para decidir em cada caso aquilo que é mais pertinente, forçando, assim, a utilização dos conhecimentos anteriores e mostrando-os ao mesmo tempo insuficientes e muito difíceis. Rejeitar os não pertinentes e empenhar-se na busca de novos modos de resolução é o que produz o progresso nos conhecimentos (p.51)

Já no ano 2000, Dante (2000) define um problema como sendo "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-lo"(p. 9) e problema matemático como sendo "qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo" (p. 10).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) preconizam a Resolução de Problemas como um dos caminhos para se fazer matemática em sala de aula e define problema matemático como sendo "uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la" (p. 32-33). Segundo Pozo e Echeverría (1998), problema está relacionado a questões abertas que exigem um posicionamento dinâmico do aluno.

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. (POZO; ECHEVERRÍA, 1998, p. 09).

Já segundo Lupinacci e Botin (2004), a Resolução de Problemas é um método a ser utilizado pelo professor, ao ensinar determinado conteúdo de matemática, que distancia a falta de interesse por parte dos alunos, uma vez que os desafia através da exploração do problema.

> A resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI; BOTIN, 2004, p. 1).

Exposto algumas dessas definições e ideias a respeito do que é um problema, em consonância com alguns autores, ao tratarmos sobre as atividades propostas, consideraremos muito mais a atitude do aluno diante das questões, do que o tipo de situação que ele se depara. Em vista disso, não faremos distinção entre exercícios e problemas, desde que desperte o interesse no aluno em tentar resolver e prosseguir nas demais situações propostas, explorando novos conceitos e propriedades matemáticas.

2.2 Resolução de problemas como metodologia de ensino

Atualmente, no Brasil, o documento Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) aponta que os alunos devem desenvolver competências e habilidades ligadas à Matemática, entre estas as associadas à resolução de problemas. De acordo com este documento, a resolução de problemas é uma das habilidades essenciais para o desenvolvimento dos estudantes em todas as áreas do conhecimento, uma vez que exige pensamento crítico, criatividade e habilidades socioemocionais.

A BNCC reconhece que a resolução de problemas é uma habilidade complexa que envolve diferentes competências e exige um processo de aprendizagem contínuo e gradual. Por isso, as escolas devem buscar desenvolver uma cultura de resolução de problemas, onde os estudantes sejam incentivados a enfrentar desafios e a desenvolver soluções criativas e inovadoras.

Vale ressaltar ainda que a BNCC é o principal e mais recente documento orientador da Educação Básica, possuindo força de norma, de modo que não serve simplesmente como um parâmetro ou diretriz, mas um documento obrigatório que deve ser seguido pelos ambientes educacionais, sejam públicos ou privados.

Nesse sentido, resolver um problema é aprender matemática fazendo matemática. É uma experimentação do pensar que proporciona uma postura investigativa, questionadora e reflexiva do aluno. Por isso é um excelente ponto de partida para se apropriar e/ou exercitar o uso das ferramentas e conceitos necessários para aquela situação.

Para isso, é necessária uma interação contínua entre estudantes e professor, para argumentação, levantamento de hipóteses e caminhos alternativos. Mas para que este cenário se configure, o aluno deve estar familiarizado com a postura e atitudes que deve tomar diante das questões propostas. Por isso, a resolução junto com os alunos em aula e na lousa de problemas que irão dar sustentação as tentativas dos alunos se faz tão necessária. Coaduna com este pensamento a seguinte definição:

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é

> a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imita o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendermos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 1995, p.3)

A seleção cuidadosa dos problemas pelo professor é de suma importância, pois eles não devem apenas simular as avaliações escritas que os alunos irão fazer, mas proporcionar condições de os alunos se sentirem confiantes e ao mesmo tempo dispostos em resolve-los. Além disso, sempre que possível deve trazer outros conceitos matemáticos fora do tema em questão, seja como forma de revisar ou de se apropriar deles. Ao se trabalhar com a perspectiva da Resolução de Problemas, os PCN ressaltam que o papel do professor deve ganhar novas dimensões. Inclui nesse novo posicionamento para o professor ser

> organizador da aprendizagem: preocupa-se inclusive com a escolha dos problemas a serem trabalhados. Estes devem propiciar a construção de conceitos, além de levar em consideração competências cognitivas do aluno, sua expectativa e suas questões socioculturais. Uma má organização pode frustrar todo o objetivo previamente construído e possivelmente gerará incômodos nos alunos envolvidos neste processo de aprendizagem; consultor: não está preocupado somente com a exposição do conteúdo, mas em fornecer informações necessárias para que o aluno alcance o objetivo. Para isso, o professor oferece textos, tecnologias, explicações e diversos outros materiais que cooperem com o desenvolvimento das estratégias utilizadas pelos alunos no ataque a um problema; mediador: preocupa-se em contestar o aluno, em promover o confronto das propostas apresentadas por eles, orientar reformulações, além de promover o debate sobre os métodos utilizados, valorizando as soluções mais adequadas e considerando o conhecimento prévio dos alunos; controlador: no sentido de estabelecer prazos e condições para a realização da atividade proposta; incentivador da aprendizagem: visa proporcionar a cooperação entre alunos. É uma significativa forma de aprendizagem, uma vez que na troca com o colega ou mesmo com o professor, o aluno formula argumentos, realiza o exercício de convencimento a partir de sua visão para o problema, exerce a argumentação e promove conhecimento através das trocas proporcionadas pelo incentivo do professor à aprendizagem. Além de desempenhar um fundamental papel na formação afetiva entre os alunos ou mesmo entre o aluno e o professor (BRASIL, 1997, p. 27).

A resolução de problemas nos permite ainda, no decorrer das aulas, fazer uma avaliação mais ampla sobre o processo de ensino-aprendizagem. Perguntas orais sobre os problemas resolvidos durante as aulas são uma excelente ferramenta para verificar outros aspectos da aprendizagem que as avaliações escritas, às vezes, deixam de contemplar, tais como argumentação, entendimento da situação, trabalho em equipe, dentre outros. A esse respeito a BNCC destaca:

> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos,

> mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros. (BRASIL, 2018, p. 529)

Diante de tantas potencialidades e recomendações no uso da resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem, exploramos através deste trabalho, mais alguns aspectos de sua aplicação.

3 METODOLOGIA

Nesta seção iremos detalhar os procedimentos metodológicos que foram empregados para o desenvolvimento da pesquisa, com a finalidade de se atingir os objetivos e o problema apresentados.

3.1 Caracterização da pesquisa

A presente pesquisa se configura como uma pesquisa de campo de natureza descritiva, de abordagem qualitativa e quantitativa. Ela buscou explorar, através de um estudo de caso, quais as características que tornam uma sequência didática favorável de ser resolvida por alunos do 2° do ensino médio com dificuldades em Matemática. Nessa perspectiva, esperamos trabalhar diversos aspectos cognitivos dos alunos, tais como leitura e interpretação de enunciados e textos matemáticos, criatividade, troca de ideias entre pares, argumentação e o pensamento lógico matemático. Como consequência dessas ações esperamos que os alunos se sintam mais confiantes e preparados para obter um bom desempenho em avaliações externas, tais como o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Segundo Bogdan e Biklen (1994),

> a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. [...]. Os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contato direto. Além do mais, os materiais registrados mecanicamente são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise

Estes autores afirmam ainda que os pesquisadores que adotam a pesquisa qualitativa “tentam analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma com que estes registros foram registrados ou transcritos” (BOGDAN ; BIKLEN, 1994, p. 48) e que há preocupação com o processo de pesquisa e não simplesmente com os resultados ou produtos. Na pesquisa em educação matemática, Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 110) destacam que a abordagem qualitativa “busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno e contexto sociocultural”. Para o cumprimento desta proposta de trabalho os estudantes foram organizados em filas duplas de modo que, cada aluno tenha um dupla fixa, para discutir as atividades propostas e exercerem assim uma aprendizagem colaborativa. As duplas foram escolhidas por todos os professores juntamente com a gestão da escola, de forma a potencializar ao máximo a aprendizagem das duplas. Foram entregues atividades impressas para os alunos de acordo com o assunto e o tema trabalhados em sala.

3.2 Campo empírico da pesquisa

A pesquisa foi realizada escola estadual EEMTI Zulmira Agassis, localizada na R. Luísa Leoniza, s.n., Distrito de Araticum, CEP 62350-000, na cidade de Ubajara (CE), com duas turmas do 2º ano do Ensino Médio. O ano em que começou a atividade de ensino da EEMTI Zulmira Agassis foi em 1999, tornando-se escola de tempo integral apenas em 2022. A EEMTI Zulmira Agassis participou do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2021, cujo resultado foi de 4,6. A meta nesse ano era de 4,8. No momento da realização desta pesquisa no ano de 2022, a instituição atendia 216 alunos. Matutino: 74 (Regular); Vespertino: 53 (Regular); Noturno: 32 (EJA), Integral: 57.

3.3 Participantes da pesquisa

Participaram dessa pesquisa 62 discentes do 2º ano do ensino médio divididos em duas turmas, uma pela funcionando no turno da manhã e a outra no turno da tarde. Além deles participou o professor de matemática de ambas as turmas, autor deste trabalho. Ele trabalhava com esse grupo de estudantes desde o início de 2021 quando começaram a cursar 1° ano do ensino médio. Foram um total de 28 aulas (1400 min) divididas em 14 encontros de 2 aulas (100 min). O conteúdo das atividades utilizadas para coleta de dados foi geometria plana, com ênfase no cálculo de áreas e seguia o plano de curso previsto para as turmas. Já o conteúdo das atividades estruturadas foi geometria analítica e sua escolha também foi de acordo com o cronograma previsto. A produção e coleta de dados ocorreu em 3 momentos: a cada 2 encontros de 2 aulas com um grupo de 9 questões, totalizando 27 questões. A aplicação das atividades estruturadas ocorreu em 4 momentos: 2 encontros de 2 aulas para cada lista. A seguir, apresentamos um esboço dos encontros/aulas e suas ações, datas e carga horária da pesquisa de campo.

Esboço dos encontros/aulas e suas ações, datas e carga horária da pesquisa de campo.

Encontros	Datas	Carga horária	Ações
1º	08/02/2022	100 min	Produção e coleta de dados em cima do primeiro grupo de questões (1 a 9)
2º	09/02/2022	100 min	Produção e coleta de dados em cima do primeiro grupo de questões (1 a 9)
3º	15/02/2022	100 min	Produção e coleta de dados em cima do segundo grupo de questões (10 a 18)
4º	16/02/2022	100 min	Produção e coleta de dados em cima do segundo grupo de questões (10 a 18)
5º	22/02/2022	100 min	Produção e coleta de dados em cima do terceiro grupo de questões (19 a 27)
6º	23/02/2022	100 min	Produção e coleta de dados em cima do terceiro grupo de questões (19 a 27)
7º	09/08/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 1
8º	10/08/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 1
9º	16/08/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 2
10º	17/08/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 2
11º	23/08/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 3
12º	30/08/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 3
13º	31/08/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 4
14º	06/09/2022	100 min	Aplicação da lista estruturada 4

Fonte: Próprio autor (2023)

3.4 Técnicas/instrumentos de produção de dados

A produção e coleta de dados foi realizada com 62 discentes do 2° ano do ensino médio, durante as aulas de matemática pelo professor da turma. Por meio de perguntas orais realizadas diretamente aos estudantes e observações de suas ações em relação as atividades propostas, procuramos:

- Verificar se eles estavam tentando resolver a lista de exercícios proposta, e se não, quais os motivos de não estarem empenhando-se;

- Fazer um levantamento dos motivos que podem estar relacionados com a estrutura da lista de exercícios, alegados pelos alunos que não estavam tentando resolver;

- Investigar o impacto de algumas intervenções realizadas no momento das aulas que poderiam posteriormente contribuir em uma reestruturação da lista de exercícios;

- Observar o referencial das tentativas dos alunos na resolução das questões.

As atividades propostas que geraram os dados deste trabalho foram retiradas do livro Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 1 / Gelson Iezzi. . . [et. al.]. – 9. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

3.5 Procedimentos de análise de dados

Através de um estudo de caso, procuramos compreender qual a repercussão que a estrutura de uma sequência didática poderia ter no empenho dos alunos de duas turmas de 2° ano do ensino médio em tentar resolvê-la. Desta forma

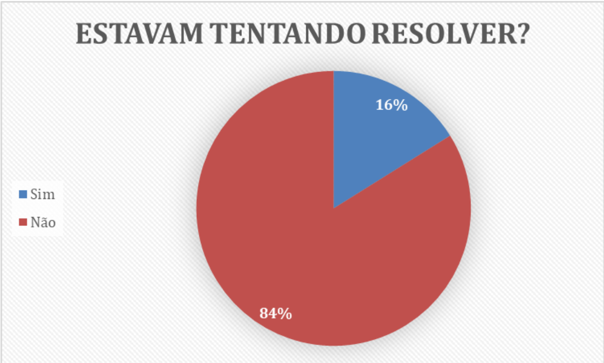
> Mediante um mergulho profundo e exaustivo em um objeto delimitado, o Estudo de Caso possibilita a penetração em uma realidade social, não conseguida plenamente por um levantamento amostral e avaliação exclusivamente quantitativa (MARTINS, 2008a, p. 9).

As análises ocorreram durante o desenrolar das aulas de matemática, ou seja, no momento em que se deram as ações dos sujeitos. Foi avaliado o empenho dos alunos na resolução das questões para tomar decisões sobre aspectos positivos e negativos das atividades propostas. Para análise e interpretação dos dados foi utilizada uma abordagem qualitativa, utilizando-se também um tratamento quantitativo naqueles dados considerados relevantes para o aprofundamento da pesquisa. Os gráficos e quadros foram gerados utilizando-se o programa *Excel*.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Procuramos investigar primeiramente se ao receber a atividade os alunos estavam tentando resolvê-la. Para o primeiro grupo de 9 questões, temos os seguintes resultados: Apenas 10 alunos, inicialmente, se empenharam em tentar resolver a lista. E 52 alunos não quiseram tentar, conforme gráfico abaixo:

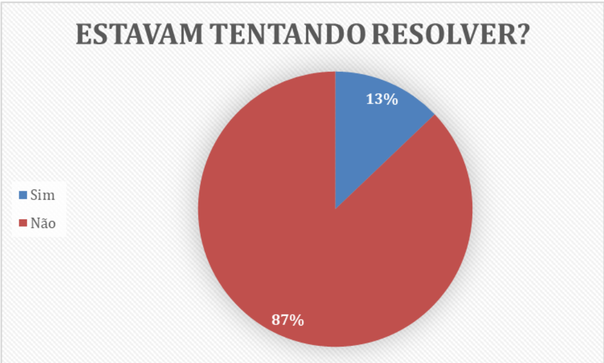
Gráfico 1: Empenho dos alunos no grupo 1



Fonte: Próprio autor (2023)

Para o segundo grupo de 9 questões, temos os seguintes resultados: Apenas 8 alunos, inicialmente, se empenharam em tentar resolver a lista. E 54 alunos não quiseram tentar, conforme gráfico abaixo:

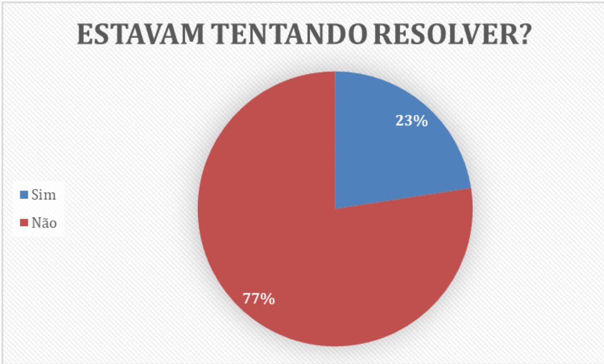
Gráfico 2: Empenho dos alunos no grupo 2



Fonte: Próprio autor (2023)

Para o terceiro grupo de 9 questões, temos os seguintes resultados: Apenas 14 alunos, inicialmente, se empenharam em tentar resolver a lista. E 48 alunos não quiseram tentar, conforme gráfico abaixo:

Gráfico 3: Empenho dos alunos no grupo 3



Fonte: Próprio autor (2023)

Podemos perceber que, nos 3 grupos de questões que foram propostas, a participação inicial dos alunos foi baixíssima. Além disso, vários dos alunos que tentavam resolver, se repetiram nos três casos.

Ao investigar os motivos dos alunos que não estavam tentando, enfatizamos aqueles que estavam de alguma maneira relacionados com a estrutura da lista proposta.

Para o primeiro grupo de 9 questões, os resultados são exibidos no quadro a seguir:

Quadro 1: Motivos no grupo 1

Motivos de não estarem tentando resolver a atividade	
Não sabem por onde começar	17
As questões são diferentes dos exemplos e exercícios resolvidos	10
Os problemas são difíceis demais	5
Outras razões que não se relacionam com a lista de exercícios	20

Fonte: Próprio autor (2023)

Para o segundo grupo de 9 questões, os resultados são exibidos no quadro a seguir:

Quadro 2: Motivos no grupo 2

Motivos de não estarem tentando resolver a atividade	
Não sabem por onde começar	16
As questões são diferentes dos exemplos e exercícios resolvidos	14
Os problemas são difíceis demais	8
Outras razões que não se relacionam com a lista de exercícios	16

Fonte: Próprio autor (2023)

Para o terceiro grupo de 9 questões, os resultados são exibidos no quadro a seguir:

Quadro 3: Motivos no grupo 3

Motivos de não estarem tentando resolver a atividade	
Não sabem por onde começar	13
As questões são diferentes dos exemplos e exercícios resolvidos	12
Os problemas são difíceis demais	6
Outras razões que não se relacionam com a lista de exercícios	17

Fonte: Próprio autor (2023)

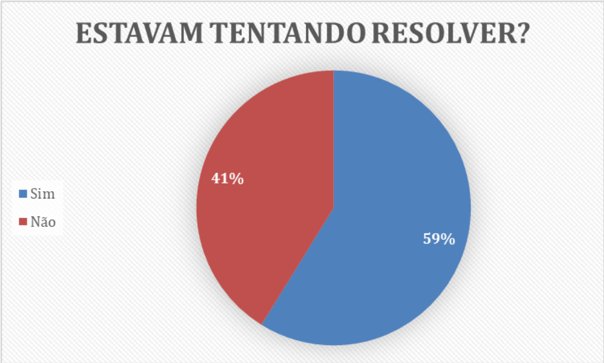
De acordo com os dados dos quadros, confirmamos a suspeita inicial de que uma parte significativa dos alunos (acima de 50%) apresentavam justificativas que tangenciavam a estrutura da lista proposta.

Depois, verificamos o impacto de intervenções que poderiam sanar as alegações dos alunos e posteriormente contribuir em uma reestruturação das sequências didáticas propostas.

A primeira foi: orientando os primeiros passos na resolução dos exercícios, houve mudança na indiferença dos alunos que não estavam fazendo? Para os discentes que falaram não saber por onde começar, descrevemos a seguir os resultados nos três grupos de questões.

No primeiro grupo, 10 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 7 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

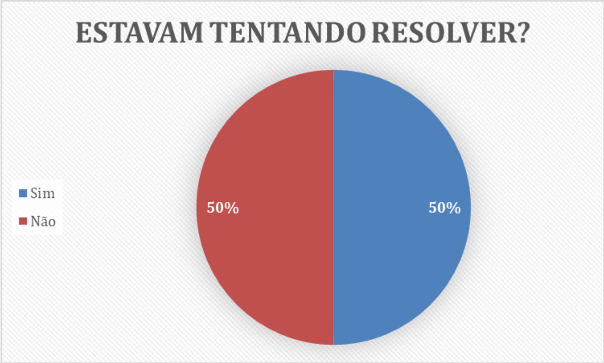
Gráfico 4: Primeira intervenção - grupo 1



Fonte: Próprio autor (2023)

No segundo grupo, 8 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 8 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

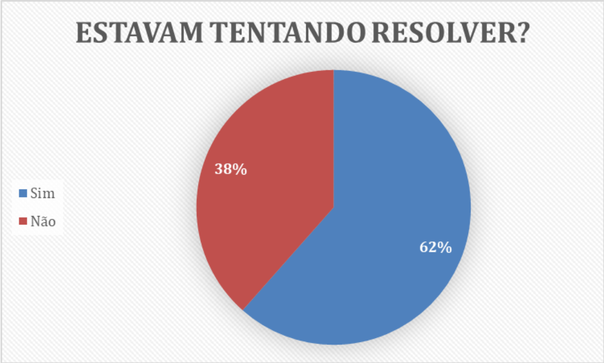
Gráfico 5: Primeira intervenção - grupo 2



Fonte: Próprio autor (2023)

No terceiro grupo, 8 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 5 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

Gráfico 6: Primeira intervenção - grupo 3



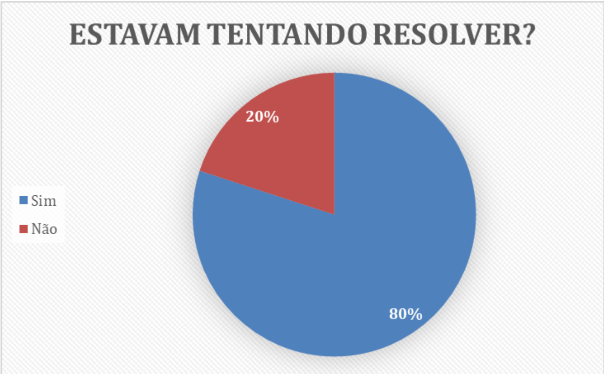
Fonte: Próprio autor (2023)

Pelos gráficos, podemos perceber que, pelo menos metade desses alunos tiveram uma mudança positiva em relação aos exercícios.

Como segunda intervenção: Exibindo exemplos análogos antes de cada exercício, houve mudança na indiferença dos alunos que não estavam tentando fazer? Para os alunos que declararam estar diante de questões diferentes das exibidas anteriormente, descrevemos os resultados a seguir.

No primeiro grupo, 8 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 2 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

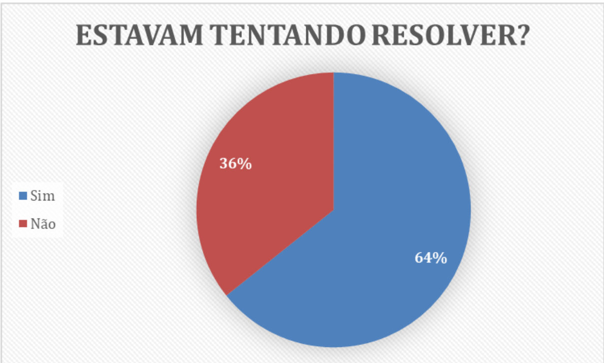
Gráfico 7: Segunda intervenção - grupo 1



Fonte: Próprio autor (2023)

No segundo grupo, 9 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 5 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

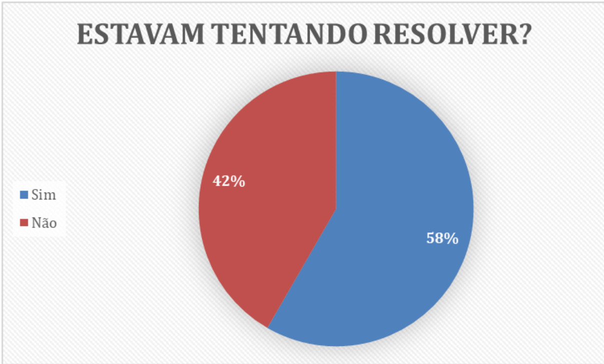
Gráfico 8: Segunda intervenção - grupo 2



Fonte: Próprio autor (2023)

No terceiro grupo, 7 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 5 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

Gráfico 9: Segunda intervenção - grupo 3



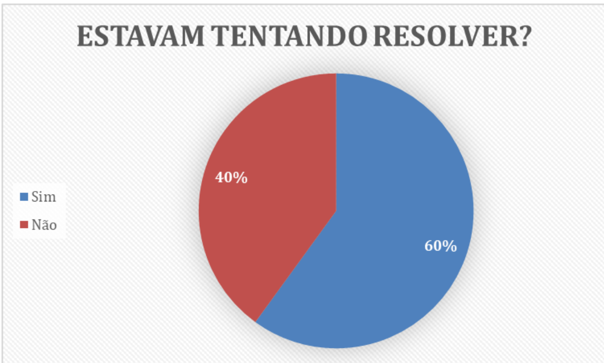
Fonte: Próprio autor (2023)

Nos três casos acima, podemos perceber que propor exercícios análogos, antes das questões propostas na atividade, elevou significativamente o interesse dos alunos em tentar resolver a atividade original.

Terceira intervenção: propondo questões mais simples antes, houve melhora na atitude dos alunos que não estavam tentando resolver? Para os estudantes que disseram estar diante de problemas difíceis demais, seguem os resultados abaixo.

No primeiro grupo, 3 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 2 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

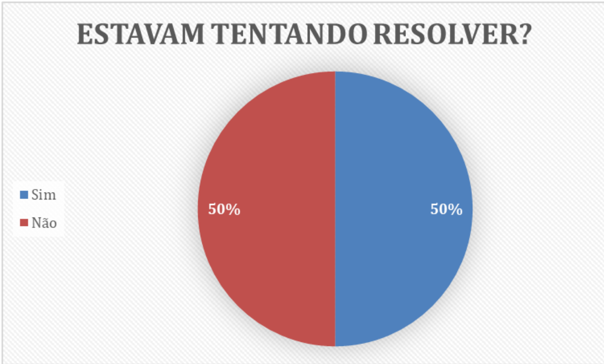
Gráfico 10: Terceira intervenção - grupo 1



Fonte: Próprio autor (2023)

No segundo grupo, 4 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 4 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

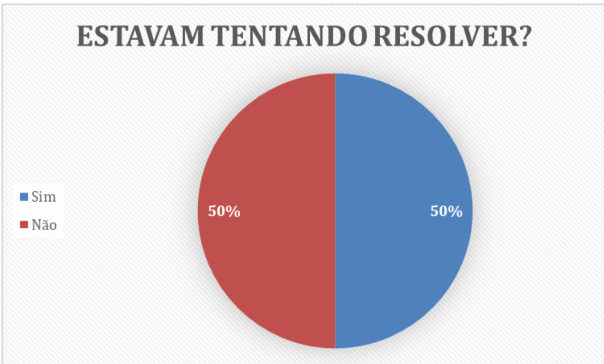
Gráfico 11: Terceira intervenção - grupo 2



Fonte: Próprio autor (2023)

No terceiro grupo, 3 apresentaram uma mudança positiva de atitude em relação a atividade, enquanto que 3 permaneceram indiferentes, conforme gráfico abaixo:

Gráfico 12: Terceira intervenção - grupo 3



Fonte: Próprio autor (2023)

Nos três casos acima, obtemos uma melhora de pelo menos 50% em relação a indiferença dos estudantes.

Foi explorado também a eficiência dessas intervenções nos demais alunos que alegaram motivos diversos para não estarem tentando resolver a atividade. A seguinte investigação foi realizada:

Qual o impacto das ações acima nos alunos que alegaram outros motivos na indiferença deles em relação a atividade proposta? Os resultados estão expostos logo abaixo.

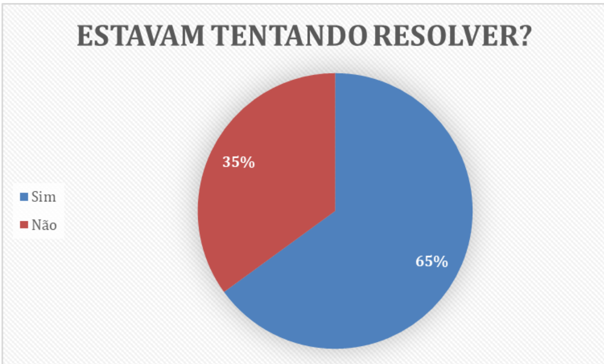
Para o primeiro grupo, segue:

Quadro 4: Impacto nos demais alunos - grupo 1

Alunos que tiveram mudança de atitude	
Orientação dos primeiros passos	4
Exemplos análogos	6
Questões mais simples	3

Fonte: Próprio autor (2023)

Gráfico 13: Mudança de atitude - grupo 1



Fonte: Próprio autor (2023)

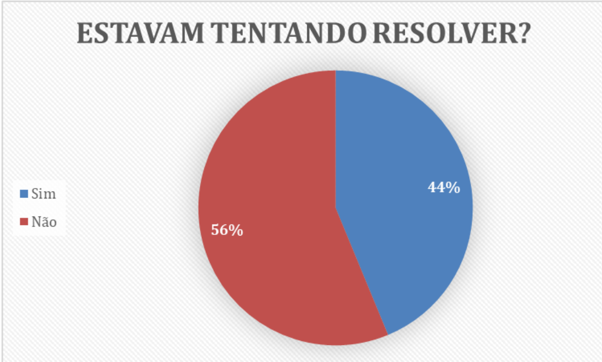
Para o segundo grupo, temos:

Quadro 5: Impacto nos demais alunos - grupo 2

Alunos que tiveram mudança de atitude	
Orientação dos primeiros passos	2
Exemplos análogos	2
Questões mais simples	3

Fonte: Próprio autor (2023)

Gráfico 14: Mudança de atitude - grupo 2



Fonte: Próprio autor (2023)

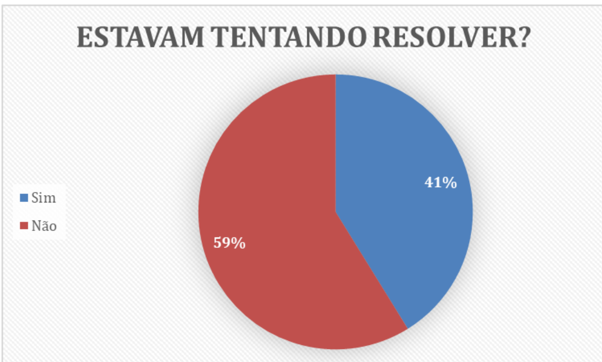
Para o terceiro grupo, obtemos:

Quadro 6: Impacto nos demais alunos - grupo 3

Alunos que tiveram mudança de atitude	
Orientação dos primeiros passos	3
Exemplos análogos	1
Questões mais simples	3

Fonte: Próprio autor (2023)

Gráfico 15: Mudança de atitude - grupo 3



Fonte: Próprio autor (2023)

Constata-se que mesmo entre aqueles que alegaram motivos diversos e não relacionados com a lista, houve ainda uma mudança próxima dos 50%.

Em relação aos alunos que prontamente se esforçavam em realizar a atividade proposta, observamos qual era o referencial de suas tentativas. Os resultados estão descritos no quadro a seguir.

Quadro 7: Referência na tentativa

Base da tentativa	
Exemplos feitos pelo professor	7
Anotações no caderno	1
Livro	1
Raciocínio diferente do exposto	1

Fonte: Próprio autor (2023)

Nota-se que os cálculos feitos pelo professor são o principal referencial de execução dos alunos. A maioria deles tentam imitar o que o professor fez para resolver os exemplos.

A última observação feita pensada na reestruturação das atividades foi: Ao se deparar com uma questão diferente, qual a atitude do aluno?

Quadro 8: Atitude diante de problemas diferentes

Atitude em relação a questões que fogem do padrão trabalhado	
Desistir logo e esperar o professor resolver	45
Procurar investigar uma forma de resolver	12
Pesquisar uma solução	5

Fonte: Próprio autor (2023)

Nesta última observação percebe-se que, ao invés de se sentirem desafiados e terem sua curiosidade estimulada, a maioria dos alunos preferem ficar passivos.

Resultados após aplicação de atividade estruturada

Lista 1

Quadro 9: Resultados com atividade estruturada 1

Motivos de não estarem tentando resolver a atividade	
Não sabem por onde começar	4
As questões são diferentes dos exemplos e exercícios resolvidos	1
Os problemas são difíceis demais	2
Outras razões que não se relacionam com a lista de exercícios	12

Fonte: Próprio autor (2023)

Podemos observar que houve uma queda expressiva nas razões relacionadas as atividades para justificarem o fato de não estarem tentando resolver. As questões que geraram as alegações restantes foram o exercício 5, onde os alunos apresentaram dificuldades em compreender a movimentação do cavalo para poderem identificar as coordenadas corretamente, no exercício 8 que apresentava coordenadas com números irracionais e na última seção que traz questões de provas do ENEM. Nesta seção, a preferência foi pesquisar as soluções na internet e depois tentar compreendê-las.

Lista 2

Quadro 10: Resultados com atividade estruturada 2

Motivos de não estarem tentando resolver a atividade	
Não sabem por onde começar	2
As questões são diferentes dos exemplos e exercícios resolvidos	0
Os problemas são difíceis demais	4
Outras razões que não se relacionam com a lista de exercícios	15

Fonte: Próprio autor (2023)

Essa lista foi muito bem recebida, apesar dos cálculos trabalhosos, pois os alunos mostraram uma preferência por problemas de aplicações de fórmulas e procedimentos já estabelecidos. Os 6 alunos que alegaram dificuldades na atividade, o fizeram na última seção que traz problemas do ENEM e de outros vestibulares.

Lista 3

Quadro 11: Resultados com atividade estruturada 3

Motivos de não estarem tentando resolver a atividade	
Não sabem por onde começar	2
As questões são diferentes dos exemplos e exercícios resolvidos	1
Os problemas são difíceis demais	5
Outras razões que não se relacionam com a lista de exercícios	17

Fonte: Próprio autor (2023)

Nessa lista, as dificuldades se concentraram em torno do exercício 6.

Lista 4

Quadro 12: Resultados com atividade estruturada 4

Motivos de não estarem tentando resolver a atividade	
Não sabem por onde começar	2
As questões são diferentes dos exemplos e exercícios resolvidos	1
Os problemas são difíceis demais	3
Outras razões que não se relacionam com a lista de exercícios	19

Fonte: Próprio autor (2023)

Novamente tivemos uma queda nas alegações relacionadas as atividades propostas. As dificuldades encontradas foram elencadas na última seção que traz problemas do ENEM e de outros vestibulares, em especial nos problemas 2 e 3.

5 ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Diante dos resultados obtidos na seção anterior, as características presentes nos problemas propostos que mais provocaram um baixo aproveitamento de sua utilização pelos alunos foram:

1. Exercícios resolvidos que não auxiliaram nos exercícios propostos;

2. Mudanças rápidas demais nos procedimentos de resolução, apesar de abordarem o mesmo assunto.

3. Abordagens diferentes dos exercícios resolvidos para os propostos.

4. Questões que exigem ir além do que foi ensinado para serem resolvidas.

Nesta seção apresentamos uma proposta de reformulação dos principais aspectos da sequências didática que geraram desistência e desânimo nos estudantes.

5.1 Possibilidade de espelhamento pelo aluno do que foi ensinado

Este foi o aspecto mais protestado pelos estudantes. O nível de frustração acarretado ao tentar executar o que foi feito nos exercícios resolvidos ou ensinado pelo professor e não obter êxito, provoca a desistência e passividade em quase todos os alunos.

Os alunos precisam ter condições de se espelharem no que foi feito pelo professor em suas próprias tentativas. Isso não significa necessariamente uma repetição mecânica pelo aprendiz do que o professor fez. Coaduna com este pensamento a seguinte definição de Polya:

> o professor que deseja desenvolver nos alunos o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Por meio desta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

As questões que o professor fizer devem servir de modelo para o que os alunos deverão executar. Neste ponto é importante que as questões sejam de fato, parecidas. Vejamos o seguinte exemplo:

Questão resolvida pelo professor

Durante quanto tempo devo aplicar um capital de R$ 40000,00 a 20% a.a., para obter de juro uma importância igual ao capital aplicado?

Questão proposta para os alunos

Durante quanto tempo devo aplicar um capital de R$ 5000,00, a 10% a.m., para obter de juro uma importância igual ao dobro do capital aplicado?

O problema proposto para os alunos é possível de ser resolvido aplicando o mesmo procedimento utilizado pelo professor. Assim ficará claro para os alunos os passos que eles devem executar para chegar na solução. Os alunos quase sempre tentam resolver seguindo os mesmos passos executados pelo professor. Por isso diferenciar algum dos passos, irá atrapalhar a tentativa deles. Não pode haver espaço para a fala "não sei nem por onde começar"ou "não sei fazer"

Apesar de as diferenças serem pequenas entre as duas situações, o estudante para chegar na solução correta, deverá ler o problema novamente com atenção, treinando o hábito da leitura e tentar aplicar o que foi feito pelo professor.

Este é um ponto crucial. Estimular o aluno a sair do estado de passividade e ter a atitude de tentar resolver os problemas propostos é um trabalho árduo. Depois de finalmente alcançado pode ser facilmente colocado a perder com uma sequência de exercícios que desencoraja quem está iniciando e só quer uma desculpa para voltar ao estado de passividade.

A ideia aqui é construir no caderno do aluno uma coleção de exercícios resolvidos que sirvam de auxílio na hora de tentar resolver os demais problemas. O aluno não pode ficar perdido na hora de estudar. Deve estar bem claro para ele, quando for tentar resolver os problemas na lista, onde consultar e em quê se espelhar para tentar.

A maioria dos estudantes param e desistem justamente nesta etapa. Às vezes até querem e gostariam de resolver a lista toda, mas sentem grandes dificuldades de iniciar e entrar no ritmo.

5.2 Intencionalidade

A lista deve ter um objetivo bem claro ao ser organizada. Assim, como as aulas que são ministradas, as atividades devem passar por um planejamento. Portanto,

> todo professor quando começa a trabalhar com resolução de problemas que exijam habilidades matemáticas deve ter objetivos concretos que favoreçam seus alunos na produção de determinadas transformações, isto é, que estes adquiram certos conhecimentos e capacidades. O ensino, os métodos didáticos empregados, devem estar em função destes objetivos (Vallejo,1979).

Planejar uma sequência de objetivos que, distribuídos entre as várias atividades, ajudem a alcançar objetivos maiores levando os alunos a dominarem o conteúdo que está sendo estudado. Algumas perguntas que devem ser feitas no processo de elaboração da lista:

1. Que habilidades e competências desejo que meu aluno desenvolva com essa atividade?

2. Como esse exercício se relaciona com os demais da lista?

3. De que forma essa atividade se relaciona com as demais para alcançar a aprendizagem do conteúdo que está sendo trabalhado?

Exemplo 1
Objetivo: Dominar o cálculo de porcentagens de um valor.

Exercício resolvido Em uma cesta há 60 laranjas das quais 20% estão estragadas. Quantas laranjas estão estragadas?

Resolvendo por uma regra de três simples, temos:

$$\frac{60}{x} = \frac{100\%}{20\%} \Rightarrow 100x = 60 \cdot 20 \Rightarrow x = \frac{1200}{100} \Rightarrow x = 12.$$

Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Em uma urna há 40 bolas das quais 30% são verdes. Quantas são as bolas verdes?

Exercício 2. Em uma cidade há 20000 habitantes dos quais 60% são mulheres. Quantas são as mulheres nessa cidade?

Exercício 3 Numa escola com 800 alunos, 36% estudam Inglês. Quantos não estudam inglês?

Exercício 4 Uma televisão custa R\$ 900,00 a prazo; à vista tem um desconto de 20%. Comprando à vista, quanto pouparei?

Exercício 5 Um rádio que custava R\$ 400,00 sofreu um desconto de 12%. Quanto pagarei por ele?

Exercícios que permitem o treino do procedimento adotado para calcular a porcentagem de um valor. Comandos pequenos e simples. Fica claro ao aluno o que ele deve executar e fazer.

5.3 Progressão lenta na complexidade das questões

Um aumento rápido na dificuldade das questões, ao invés de motivar a curiosidade, pesquisa e discussão, provocou desistência na tentativa de solucionar as questões ou espaço para desculpas para voltar ao estado de passividade.

Tomando as mesmas nomenclaturas utilizadas no caderno do Portal da Matemática temos a seguir uma divisão que obteve um resultado satisfatório no envolvimento dos alunos:

1. Exercícios Introdutórios - Aqui temos basicamente uma repetição do que foi ensinado. As questões devem ser claras o suficiente para não deixar espaço para subterfúgios por parte dos alunos do tipo "não sei fazer", "não sei nem por onde começar"ou "isso não entra na minha cabeça".

2. Exercícios de Fixação - Nesta parte, dois aspectos devem ser levados em consideração: O que vem sendo feito nos exercícios anteriores deve continuar servindo aqui, mas somente isso não é mais suficiente.

3. Exercícios de Aprofundamento e de Exames - A seção que deve ser almejada por todos. Pesquisa, discussão e exploração de ideias devem ser os aspectos que devem guiar a escolha destes exercícios. O procedimento para resolver as questões não deve estar claro e direto e o que foi estudado até o momento pode não ser o suficiente, havendo necessidade da pesquisa e troca de ideias. Está parte da lista também pode ser utilizada para resolver questões dos exames e vestibulares de interesse dos alunos. Nas atividades aqui estruturadas, privilegiamos questões do ENEM.

Podemos propor a continuação da lista anterior aumentando lentamente a complexidade dos exercícios da seguinte maneira:

Exercícios de Fixação

Exercício 6. Um trabalhador ganha R$ 1500,00 por mês. São reservados 25% para o aluguel, 35% para a alimentação, 22% para gastos diversos e o restante ele deposita numa poupança. Qual o valor em R$ depositado?

Exercício 7. Comprei um computador por R$ 1200, 00, e paguei do seguinte modo: 15% de entrada e o restante em 6 prestações iguais. Quanto paguei por cada prestação?

Exercício 8. Um vendedor ganha um salário fixo mensal de R$ 1300,00 acrescido de 3% do valor das vendas efetuadas durante o mês. Qual o salário mensal quando vende no mês R$ 1600,00?

Exercício 9. Pedro ganhava R$ 1400,00 por mês. Em maio teve um aumento de 20% e em junho teve um novo aumento de 20%. Qual passou a ser o salário de Pedro, depois de junho?

Exercício 10. Um senhor contrata um advogado e ele consegue receber 90% do valor da questão, avaliada em R$ 80 000,00, cobrando a título de honorários, 25% da quantia recebida. Qual a importância que sobra para quem contratou o advogado?

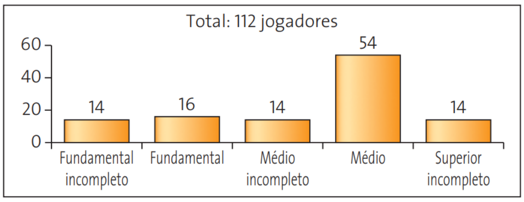
O que foi feito nos exercícios iniciais continua servindo aqui, mas é necessário ir um pouco além. A interpretação dos enunciados fica levemente mais exigente.

Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 11. O fluxo de veículos em determinada rua passou de 3 por hora para 3 por minuto depois que ela foi asfaltada. Qual foi o aumento percentual do fluxo de veículos nessa rua?

Exercício 12. O que você prefere quando vai comprar algo: receber um único desconto de 55% ou dois descontos sucessivos de 30%? Justifique do ponto de vista financeiro.

Exercício 13. (Enem) A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa abaixo, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.



Fonte: *O Globo*, 27 jul. 2005.

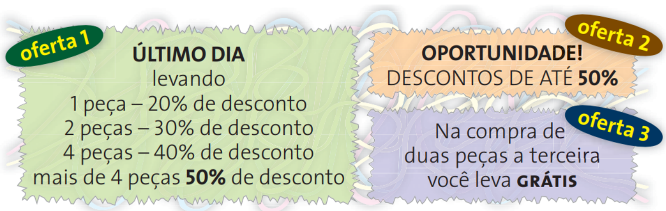
De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:

a) 14%. b) 48%. c) 54%. d) 60%. e) 68%.

Exercício 14. (Enem) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1500 são casos diagnosticados de câncer e 500 são casos diagnosticados de enfisema. Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2000 pessoas é, aproximadamente:

a) 740. b) 1100. c) 1310. d) 1620. e) 1750.

Exercício 15. Ana Maria quer aproveitar as liquidações para fazer compras. Observe algumas ofertas que ela encontrou.



a) Qual dessas ofertas vale a pena aproveitar? Discuta com seus colegas.

b) Compare a OFERTA 1 com a OFERTA 3. Em qual delas é mais vantajoso comprar 2 peças?

5.4 Contextualização

A maioria dos alunos não possuem o hábito da leitura, e pior do que isso, às vezes fazem uma separação entre a matemática e a nossa língua materna, no caso a Língua portuguesa, como se fossem entes antagônicos. Essa desarmonia acaba por inviabilizar uma apropriação adequada do conhecimento matemático. Portanto,

> a Matemática e a Língua Materna representam elementos fundamentais e complementares, que constituem condição de possibilidade do conhecimento, em qualquer setor, mas que não podem ser plenamente compreendidos quando considerados de maneira isolada. (MACHADO, 1998, p.83)

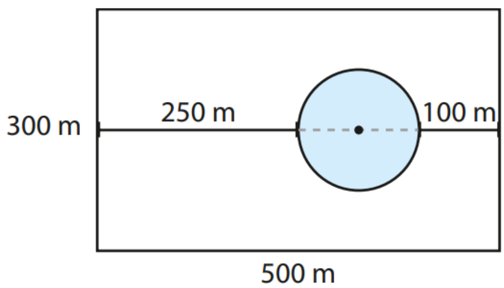
Queremos aqui exercitar a leitura, a compreensão e interpretação dos enunciados, a aquisição de vocabulário (principalmente matemático). Uma consequência direta é que, ao fortalecer estes aspectos, os alunos terão melhores condições de argumentar e redigir soluções sozinhos ou em grupos. Assim,

> uma verdadeira autonomia intelectual, a que toda educação deve visar, somente se viabiliza na medida em que os indivíduos em geral sentem-se capazes de lidar com a Língua Materna e com a Matemática de modo construtivo e não apenas na condição de meros usuários. (MACHADO, 1998, p.15)

Perceba que, ao colocar problemas contextualizados nas lista, a intenção não é simplesmente simular uma prova externa como o ENEM, ou forçar uma contextualização artificial da matemática para tentar deixá-la mais atraente e justificar para os alunos a aprendizagem desta. A contextualização aqui sugerida deve mesclar problemas com contextos dentro da própria matemática e problemas com contextos diversos, tais como atividades humanas e fatos das Ciências da Natureza e Humanas. Os problemas com contexto dentro da matemática servem para o aluno relembrar ou até mesmo se apropriar de conceitos e propriedades que ele ainda não tinha entrado em contato. A seguir exibimos alguns exemplos.

Exemplo 1

Conta uma lenda que um tesouro foi escondido em algum lugar de um terreno, abaixo da superfície da terra. A figura seguinte mostra a vista superior do terreno, em que o círculo mostrado é a projeção ortogonal, sobre o plano do solo, de um reservatório de água vazio com formato cilíndrico. Observe as dimensões indicadas.



Qual é a probabilidade de que o tesouro não tenha sido escondido abaixo da região limitada pelo reservatório? Use $\pi = 3$.

Tendo como objetivo principal nesta questão exercitar o cálculo de probabilidades, os estudantes têm uma oportunidade de revisar o cálculo de áreas de algumas figuras planas. Temos ainda os conceitos de projeção ortogonal e cilindro que podem ser comentados pelo professor ou pesquisado pelos alunos.

Exemplo 2 Considere a expressão $\log_3 m$, em que m é um número inteiro, positivo e menor ou igual a 100. Se m for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de que o valor da expressão resulte em um número inteiro?

Ainda tratando sobre o cálculo de probabilidades, nesta questão podemos revisar a definição de logaritmo e números inteiros.

Exemplo 3 (UFG-GO) Uma indústria consome mensalmente 150 m^3 de um certo reagente. Uma unidade dessa indústria passou a produzir esse reagente e, no primeiro mês de produção, produziu 10% do seu consumo mensal. Se a unidade aumenta a produção do reagente em 3 m^3 por mês, quantos meses serão necessários, a partir do início da produção, para que a unidade produza, em um único mês, 70% do volume mensal desse reagente consumido pela indústria?

Neste terceiro exemplo temos um exercício cujo enunciado não pode simplesmente ser ignorado e irmos direto para a pergunta no final. É necessário para resolver o problema, ler o comando por inteiro e compreendê-lo. A este respeito a BNCC traz:

> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido tratou de um tema relevante para a EEMTI Zulmira Agassis, pois vai ao encontro das exigências dessa comunidade escolar no que diz respeito ao uso da resolução de problemas como metodologia para promover a aprendizagem e capacitar os alunos, tanto para provas externas (ENEM e Spaece) como para o mercado de trabalho.

A pesquisa apresentada foi capaz de analisar algumas dificuldades manifestadas pelos alunos de duas turmas de 2° ano do ensino médio no uso da resolução de problemas em sala de aula com os materiais didáticos estruturados, no caso, o livro didático.

O problema que se apontou foi a necessidade de uma sequência didática de atividades que favorecessem um maior envolvimento dos alunos em sua resolução, de forma a aprimorar o uso da resolução de problemas como forma de promover o processo de aprendizagem.

O referencial teórico apontou a necessidade e a importância de se utilizar a resolução de problemas como forma de aperfeiçoar e promover o ensino-aprendizagem da matemática. Sendo assim, esta pesquisa procurou colaborar com o seu uso, organizando atividades que despertassem um maior interesse no público em questão.

Podemos concluir através dos resultados deste trabalho que a sequência didática proposta pode ter uma influência significativa na motivação dos alunos em resolvê-las. Organizá-las de forma que os alunos possam utilizar as orientações do professor e obter êxito, propiciam o desejo de prosseguir em uma ordem crescente de complexidade dos problemas, amadurecendo, assim, a postura que se deseja que os estudantes tenham diante do aprendizado matemático.

Conseguimos, ainda, reestruturar algumas sequências didáticas que despertaram um maior envolvimento dos alunos e que estão ajudando na confecção das próximas.

Referências

[1] POLYA. - *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo.* – 2. Reimpr. – Rio de Janeiro : interciência, 1995

[2] BRASIL. - *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.*

[3] BALESTRI, R. - *Matemática: interação e tecnologia - Volume 1, 2 e 3.* - 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

[4] BRASIL. - *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação.*

[5] BRASIL. - *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação..*

[6] DANTE, L. R. - *Matemática: contexto e aplicações - Volume 1,2 e 3.* 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

[7] ALMEIDA, Carlson Guerreiro de; GOMES, Larissa Pinca Sarro; MADRUGA, Zulma Elizabete de Freitas. Modelagem Matemática e Resolução de Problemas na Educação: um panorama de pesquisas recentes. Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 4, n.10, p. 1-21, 2020. Disponível em <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/2070/2847>. Acesso em 20 de março de 2023.

[8] LORENZATO, S.; VILA, M. do C. Século XXI: qual matemática é recomendável?. Zetetiké, Campinas, v. 1, n. 1, p. 41-50, 1993.

[9] VERÇOSA, M.; ROCHA, S.; TELES, R. A. M. Resolução de problemas matemáticos: aproximações e distanciamentos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Revista TCC - Revista de divulgação científica do curso de Pedagogia - UFPE, v. 1, p. 1-20, 2010

[10] DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de matemática. São Paulo: Ática, 2000

[11] POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

[12] MORENO, B. (2006). O ensino do número e do sistema de numeração na Educação Infantil e na 1ª série. In: PANIZZA,M. Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas Séries Iniciais. Porto Alegre: Artmed.

[13] BRASIL, Ministério da Educação, (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF.

[14] DUARTE, Rosangela Volobueff do Nascimento; Resolução de problemas: uma metodologia de ensino envolvendo funções e interdisciplinaridade informacional. Orientador: Prof. Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos. 2022. Artigo (Mestrado Profissional) – Matemática em Rede Nacional – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2022. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6495&id2=171054084> Acesso em 15 fev. 2023.

[15] SILVA, Erik de Oliveira; O Ensino de Matemática Financeira por meio da resolução de problema. Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2023. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6964&id2=171056853> Acesso em 15 fev. 2023.

[16] NASCIMENTO, Cledson Santos do. Elaboração e resolução de problemas como estratégias didático pedagógicas para o ensino de geometria analítica. Orientadora: Profa. Dra. Lusitonia da Silva Leite. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional) – Curso de Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, 2022. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6587&id2=171054758> Acesso em 15 fev. 2023.

[17] IEZZI, G. - *Matemática: ciência e aplicações - Volume 1,2 e 3*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[18] Mestrado Proissional em Rede - PROFMAT. Disponível em <www.profmat-sbm.org.br/>. Acesso em 23 de abril de 2023.

[19] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em <https://www.obm.org.br/>. Acesso em 19/10/2022.

[20] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em <http://www.obmep.org.br/index.htm>. Acesso em 15/01/2023.

[21] SOUZA, J. R. de. - *Contato Matemática - Volume 1, 2 e 3*. - . 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

[22] VALLEJO, P. M. Manual de avaliação escolar. Coimbra: Almedina, 1979.

7 APÊNDICES

7.1 Sequências didáticas reestruturadas

As atividades que expomos aqui foram organizadas de forma a sanar a indiferença dos alunos em relação aos problemas propostos, de acordo com os motivos elencados por eles e trabalhadas durante as aulas.

Tema: Geometria Analítica
Assunto: Ponto e reta
Nossa primeira lista tem o objetivo de familiarizar o estudante com o plano cartesiano.

7.1.1 Lista 1

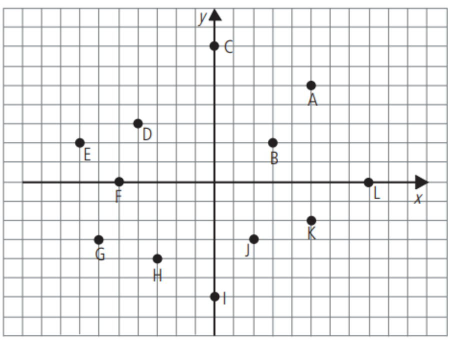
Exercícios introdutórios

Habilidade Principal: Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

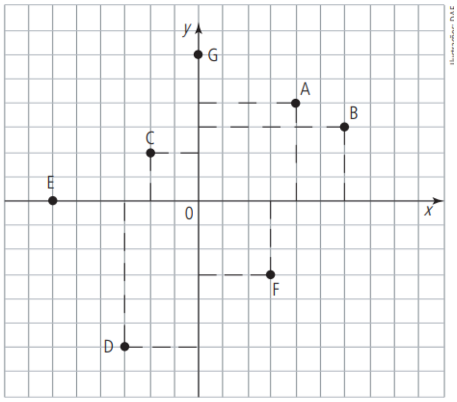
Exercício 1
Marque em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais os pontos:

a) A(1, -2)
b) D(0, 3)
c) C(4, 4)
d) B(-3, 3)
e) P(-1, -5)
f) M(-4, 0)
g) Q(3, -2)
h) N(0, -4)
i) R(3, 0)

Exercício 2
Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano.



Exercício 3
Indique qual dos pontos A, B, C, D, E, F e G, abaixo, verifica cada uma das seguintes afirmações:



a) A abscissa é igual à ordenada.

b) A ordenada é negativa.

c) A abscissa é metade da ordenada.

d) A abscissa é o dobro da ordenada.

e) A ordenada é nula.

f) A abscissa é nula.

Exercício 4

(Obmep) Gabriel testou sua pontaria lançando cinco flechas que atingiram o alvo nos pontos A, B, C, D e E. As coordenadas desses pontos são:

$A(-1, 0)$

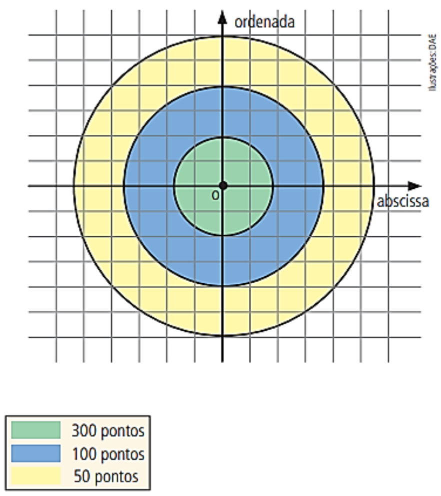
$B(3, 0)$

$C(-3, -4)$

$D(4, 3)$

$E(-6, 5)$

A tabela mostra quantos pontos são obtidos quando a flecha acerta um ponto dentro de cada uma das três regiões, conforme mostra a figura.



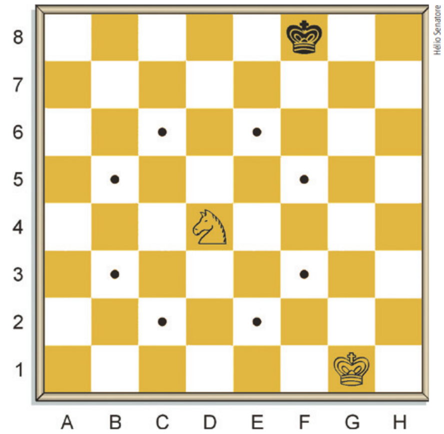
a) Marque os pontos A, B, C, D e E.

b) Quantas flechas Gabriel acertou no interior do menor círculo?

c) Quantos pontos Gabriel fez ao todo?

Exercício 5

(Saeb-MEC) Num tabuleiro de xadrez, jogamos com várias peças que se movimentam de maneiras diferentes. O cavalo se move para qualquer casa que possa alcançar com movimentos na forma de "L", de três casas. Na figura abaixo, os pontos marcados representam as casas que o cavalo pode alcançar, estando na casa D4.

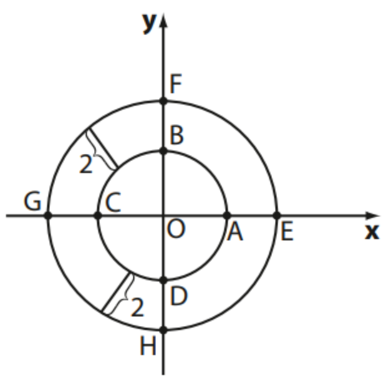


Quais as casas que o cavalo poderá alcançar, partindo da casa F5 e fazendo uma única jogada?

Exercícios de fixação

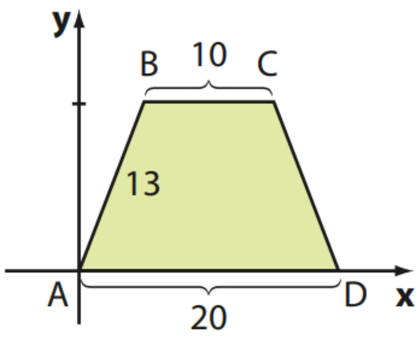
Exercício 6

Na figura a seguir as duas circunferências têm centro na origem. Sabendo que a abscissa de A é igual a 3, determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H.



Exercício 7

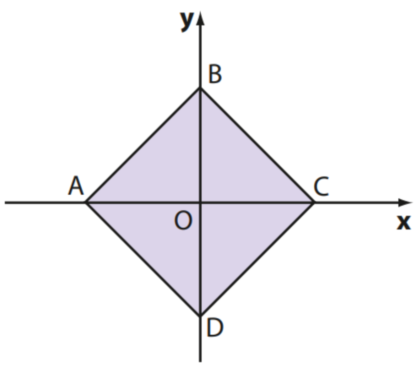
Determine as coordenadas dos vértices A, B, C e D do trapézio isósceles abaixo.



Dica: Utilize o teorema de Pitágoras

Exercício 8

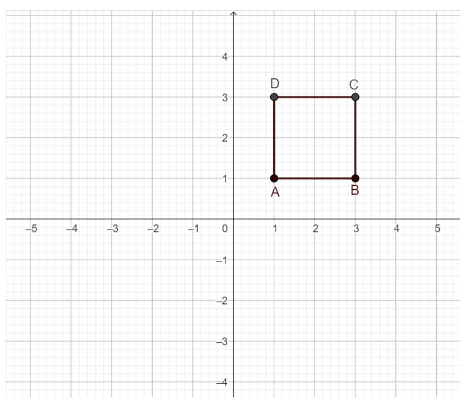
Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede 6. Obtenha as coordenadas dos quatro vértices do quadrado.



Dica: Utilize o teorema de Pitágoras

Exercício 9

No Plano Cartesiano abaixo está representado o quadrado ABCD.



a) Multiplique as coordenadas dos vértices por 3, reescreva as novas coordenadas e represente-as no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

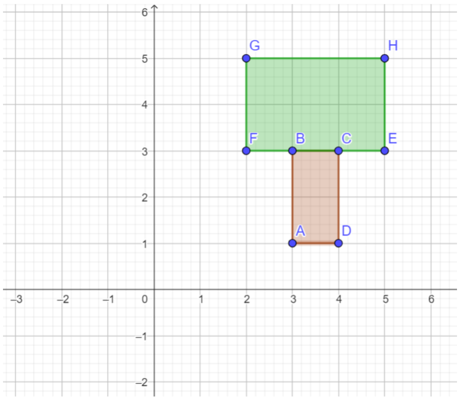
b) Multiplique as coordenadas dos vértices por -1, reescreva as novas coordenadas e represente-as no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

c) Multiplique a abscissa dos vértices por -1, reescreva as novas coordenadas e representeas no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

d) Multiplique a ordenada dos vértices por -1, reescreva as novas coordenadas e represente-as no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

Exercício 10

No Plano Cartesiano abaixo está representado uma árvore poligonal.



a) Multiplique as coordenadas dos vértices por -2, reescreva as novas coordenadas e represente-as no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

b) Multiplique as coordenadas dos vértices por $1/2$, reescreva as novas coordenadas e represente-as no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

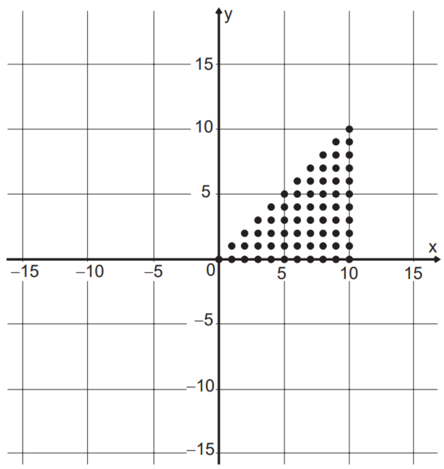
c) Multiplique a abscissa dos vértices por -2, reescreva as novas coordenadas e representeas no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

d) Multiplique a ordenada dos vértices por -2, reescreva as novas coordenadas e represente-as no plano cartesiano acima. Explique o que ocorreu.

Problemas de exames e aprofundamento

Problema 1

(Enem 2018) Para criar um logotipo, um profissional da área de design gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.



Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico. Esse conjunto é dado pelos pares ordenados $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que

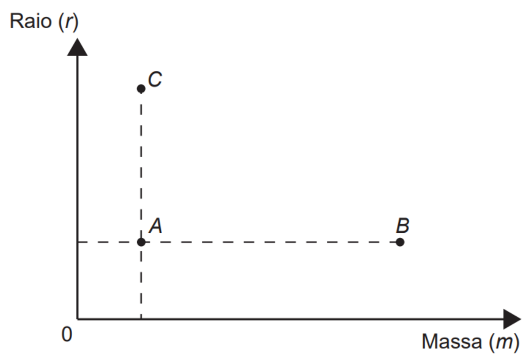
a) $0 \leq x \leq y \leq 10$
b) $0 \leq y \leq x \leq 10$
c) $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$
d) $0 \leq x + y \leq 10$
e) $0 \leq x + y \leq 20$

Problema 2

(Enem 2018) De acordo com a Lei Universal de Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional F que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa m do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio r da órbita, ou seja,

$$F = \frac{km}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto $(m; r)$ cujas coordenadas são respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.



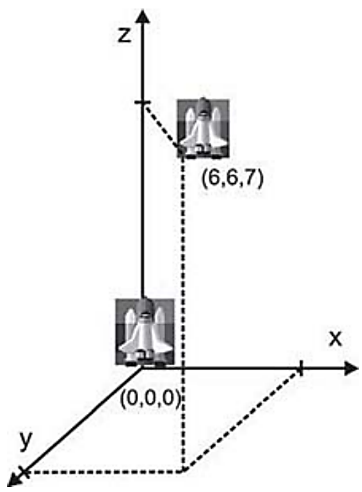
Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades FA, FB, FC da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites A, B e C, respectivamente.

As intensidades FA, FB, FC expressas no gráfico satisfazem a relação

a) $FC = FA < FB$
b) $FA = FB < FC$
c) $FA < FB < FC$
d) $FA < FC < FB$
e) $FC < FA < FB$

Problema 3

(Enem 2010 – 2° aplicação) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.

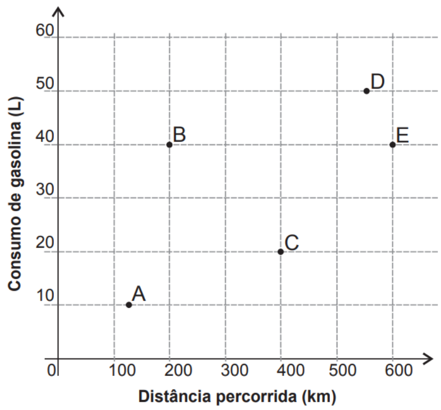


Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z, então o foguete atingiu a posição

a) (17, 3, 9).
b) (8, 3, 18).
c) (6, 18, 3).
d) (4, 9, - 4).
e) (3, 8, 18).

Problema 4

A economia no consumo de combustível é um fator importante para a escolha de um carro. É considerado mais econômico o carro que percorre a maior distância por litro de combustível. O gráfico apresenta a distância (km) e o respectivo consumo de gasolina (L) de cinco modelos de carros.



O carro mais econômico em relação ao consumo de combustível é o modelo

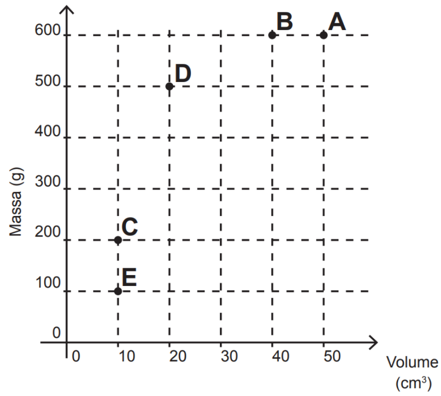
a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

Problema 5

Possivelmente você já tenha escutado a pergunta: "O que pesa mais, 1 kg de algodão ou 1 kg de chumbo?". É óbvio que ambos têm a mesma massa, portanto, o mesmo peso. O truque dessa pergunta é a grande diferença de volumes que faz, enganosamente, algumas pessoas pensarem que pesa mais quem tem maior volume, levando-as a responderem que é o algodão. A grande diferença de volumes decorre da diferença de densidade (ρ) dos materiais, ou seja, a razão entre suas massas e seus respectivos volumes, que pode ser representada pela expressão:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Considere as substâncias A, B, C, D e E representadas no sistema cartesiano (volume $\times$ massa) a seguir:



A substância com maior densidade é

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

Dando continuidade ao estudo do ponto e reta no plano cartesiano, vejamos a segunda lista de exercícios que continua diretamente a primeira.

7.1.2 Lista 2

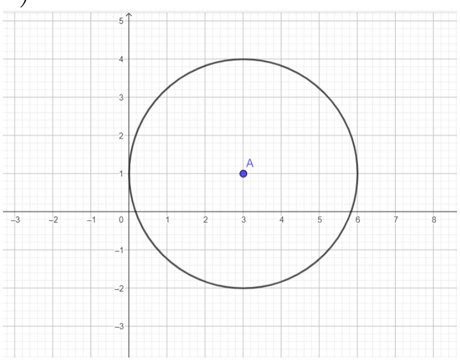
Habilidades principais: Calcular a distância entre pontos no plano cartesiano, determinar o ponto médio de um segmento e o baricentro de um triângulo no plano cartesiano.

Exercícios introdutórios

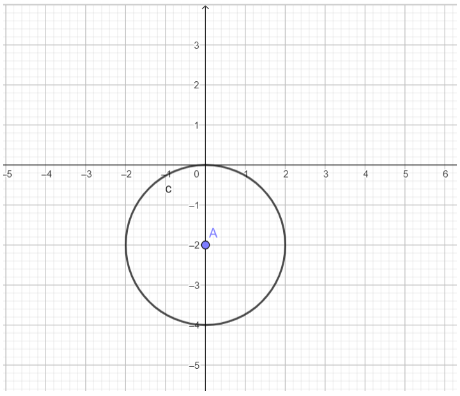
Exercício 1

Calcule a área e o perímetro das circunferências a seguir:

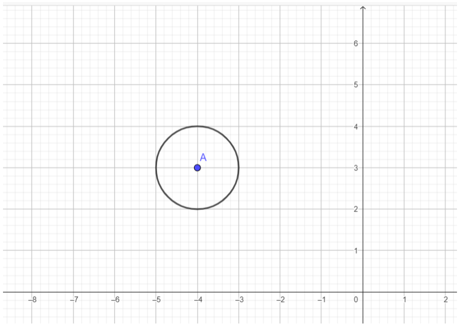
a)



b)



c)



Exercício 2

Calcule a distância entre os pontos dados:

a) A(2,-3) e B(1,1)

b) C(-4,-2) e D(0,4)

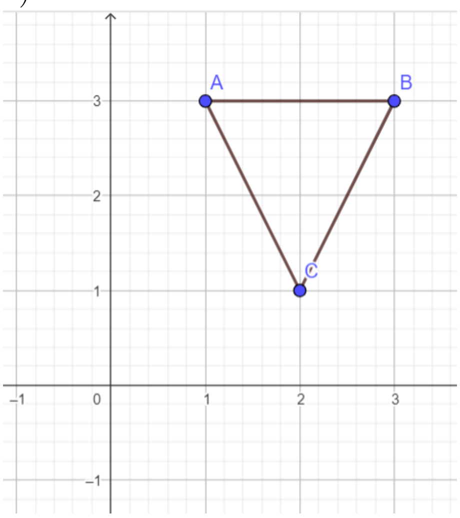
c) E(-5,3) e F(3,-2)

d) G(0,0) e H(7,1)

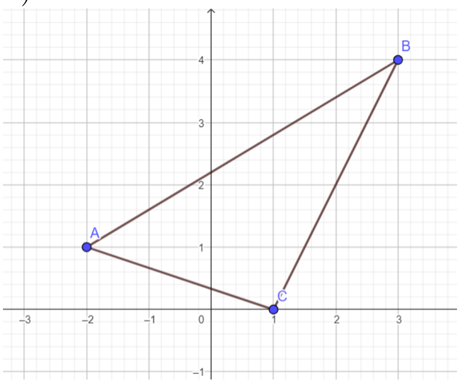
Exercício 3

Calcule o perímetro dos triângulos a seguir:

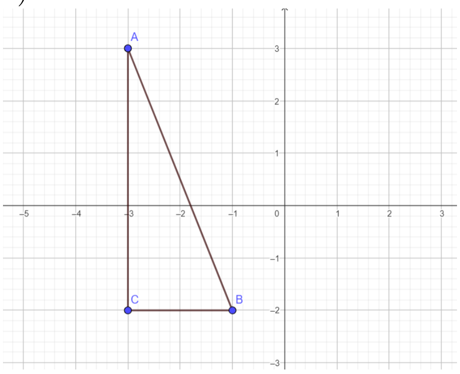
a)



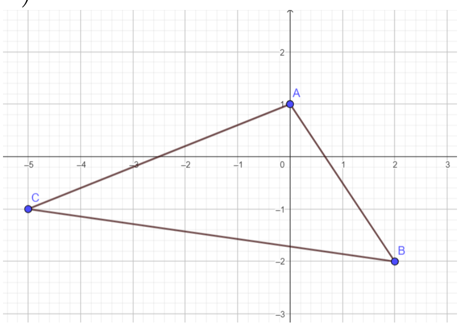
b)



c)



d)



Exercício 4

Determine M, ponto médio de $\overline{AB}$, nos seguintes casos:

a) A(-3,3) e B(-2,1);

b) A(0,2) e B(-1,-1);

c) A(12,7) e B(-6,11);

d) A(20,0) e B(0,-10).

Exercício 5

Obtenha o baricentro G do triângulo ABC nos seguintes casos:

a) A(-10,-2), B(-6,-3) e C(-11,-6);

b) A(-2,8), B(-1,6) e C(3,7);

c) A(-2,1), B(0,-4) e C(2,1);

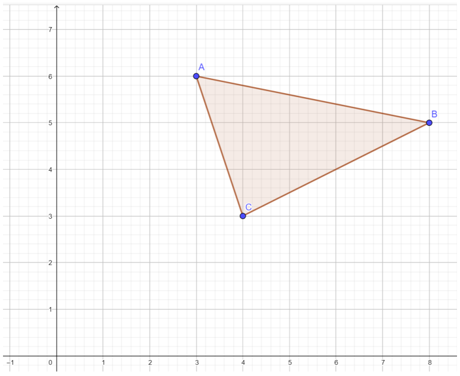
d) A(7,-2), B(13,-3) e C(2,-6).

Exercícios de fixação

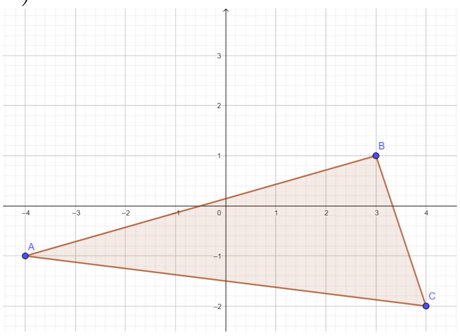
Exercício 6

Calcule o comprimento das medianas dos triângulos a seguir:

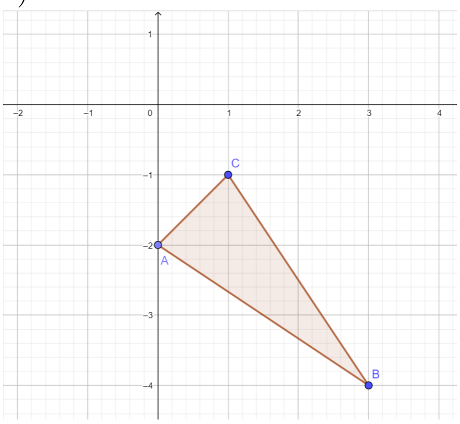
a)



b)

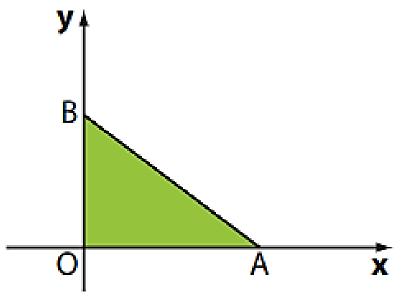


c)



Exercício 7

Na figura a seguir, o triângulo de vértices A(6,0), O(0,0) e B é retângulo, e sua hipotenusa mede 8.



Determine:

a) as coordenadas de B;

b) a medida da mediana relativa à hipotenusa;

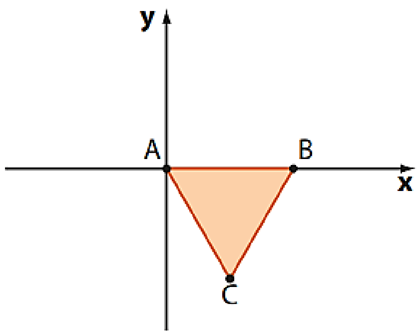
c) o baricentro do triângulo e sua distância à origem.

Exercício 8

Dados A(-13, 21) e B(3, 5), determine as coordenadas dos pontos que dividem $\overline{AB}$, em quatro partes iguais.

Exercício 9

Na figura, o triângulo ABC é equilátero, e seu lado mede 4 cm.



Determine:

a) as coordenadas de C;

b) a área do triângulo ABC.

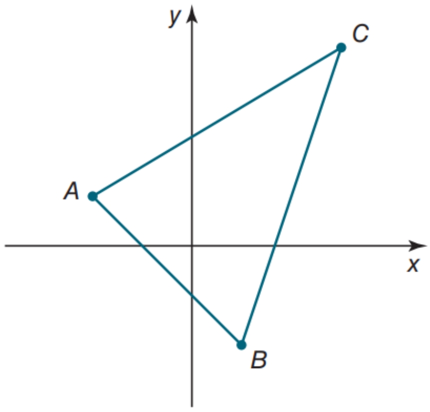
Exercício 10

Um losango possui como vértices os pontos (2, -4), (4, 4) e (-6, -2). Sendo (-1, 1) o ponto de encontro das diagonais, determine o quarto vértice e a área do losango.

Problemas de exames e aprofundamento

Problema 1

(Vunesp) Dados dois pontos, A(-2, 1) e B(1, -2), conforme a figura seguir:

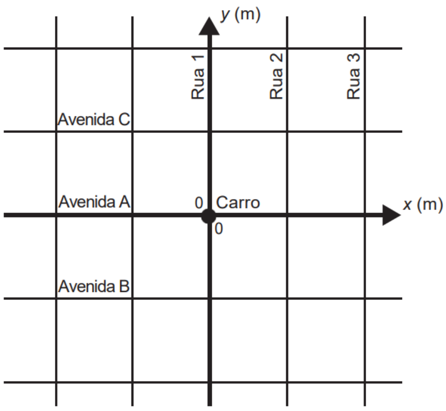


a) Calcule a distância entre A e B.

b) Sabendo-se que as coordenadas cartesianas do baricentro G do triângulo ABC são $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$, calcule as coordenadas do vértice C do triângulo.

Problema 2

(ENEM 2021) Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B. No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem (0, 0) o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.



A ordenada do ponto que representa a localização do hotel é

a) -60.

b) -40.

c) 0.

d) 40.

e) 60.

Problema 3

(Uece) Se o triângulo de vértices nos pontos A(0, 0), B(3, 1) e C(2, k) é retângulo, com o ângulo reto em B, então k é igual a:

a) 3

b) 4

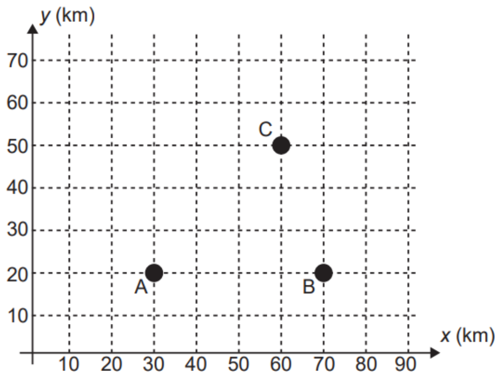
c) 5

d) 6

e) 7

Problema 4

(ENEM 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) A (65 ; 35).

b) B (53 ; 30).

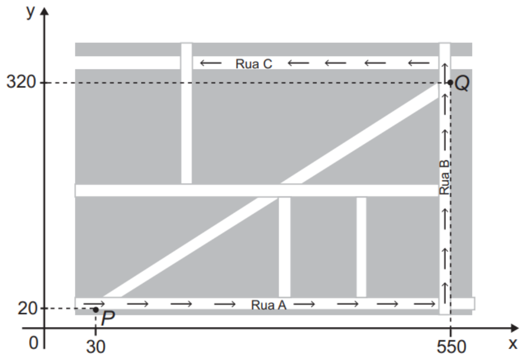
c) C (45 ; 35).

d) D (50 ; 20).

e) E (50 ; 30).

Problema 5

(ENEM 2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) (290 ; 20).

b) (410 ; 0).

c) (410 ; 20).

d) (440 ; 0).

e) (440 ; 20).

7.1.3 Lista 3

Habilidades principais: Verificar a colinearidade de três pontos e calcular a área de polígonos no plano cartesiano.

Exercício introdutórios

Exercício 1

Verifique se os pontos a seguir são colineares, em caso negativo, calcule a área do triângulo por eles formado.

a) (1,5), (5,2) e (3,5)

b) (-4,1), (-2,3) e (-1,4)

c) (3,-5), (0,-2) e (-2,0)

d) (-3,-4),(2,-3) e (-1,-1)

e) (-8,-3), (-7,-5) e (-5,-2)

f) (0,-3), (2,-3) e (-5,-3)

Exercício 2

Encontre um ponto que esteja alinhado com os pontos P e Q nos seguintes casos:

a) P(0,8) e Q(6,4)

b) P(0,0) e Q(10,2)

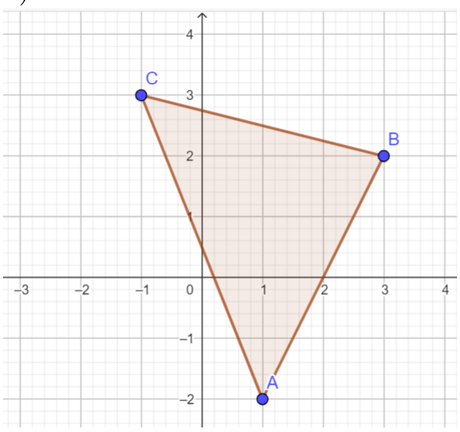
c) P(-8,-6) e Q(-2,-2)

d) P(-6,6) e Q(4,4)

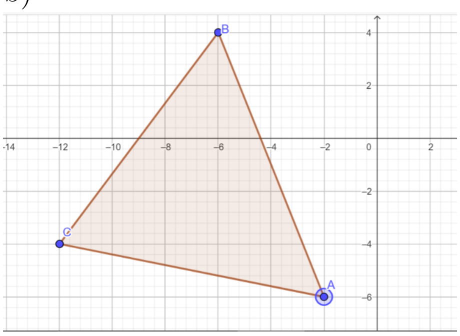
Exercício 3

Calcule a área dos triângulos a seguir:

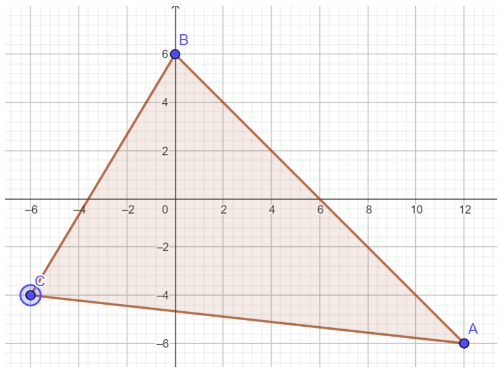
a)



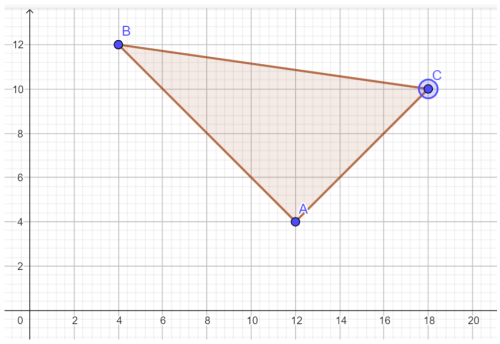
b)



c)



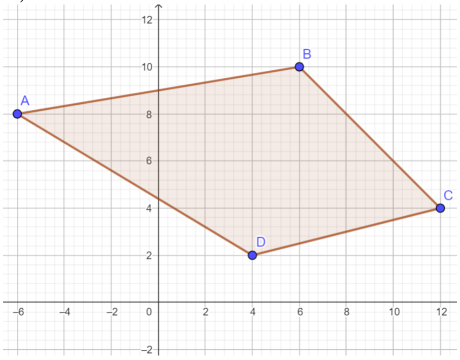
d)



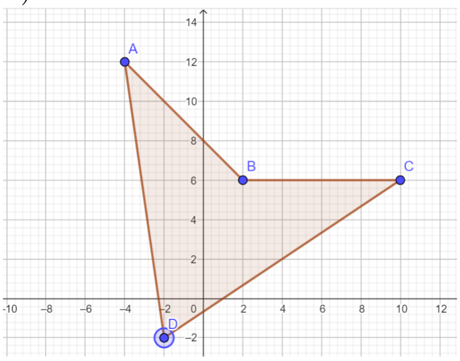
Exercício 4

Calcule a área dos polígonos a seguir.

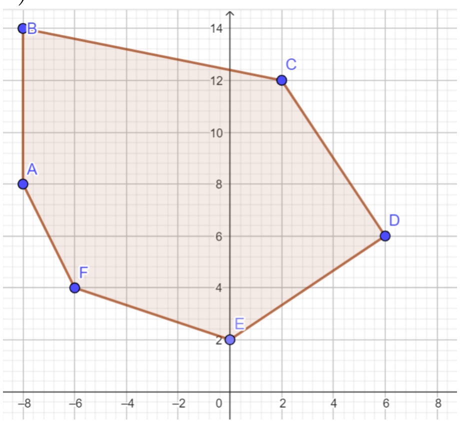
a)



b)



c)



Exercício 5

Para que valor de m os pontos (3, 1), (m, 2) e (0, 22) são colineares?

Exercícios de fixação

Exercício 6

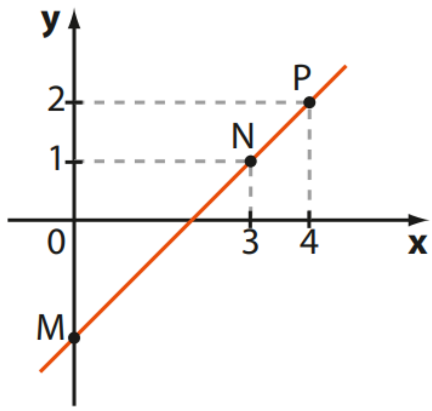
O ponto P(3, m) é interno a um dos lados do triângulo A(1, 2), B(3, 1) e C(5, 24). Determine m.

Exercício 7

Dados A(10, 9) e B(2, 3), obtenha o ponto em que a reta AB intercepta o eixo das abscissas.

Exercício 8

Na figura, M, N e P estão alinhados. Qual é a ordenada de M?



Exercício 9

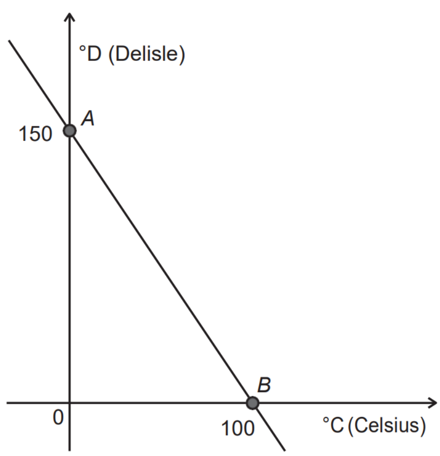
Calcule a área do polígono de vértices:

1. (1,2), (2,4), (5,4) e (2,-2).
2. (-8,0), (-4,2), (4, -2) e (-2,-4).

Problemas de exames e aprofundamento

Problema 1

(ENEM 2021) A escala de temperatura Delisle (°D), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph-Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius (°C) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B.



Qual é a relação algébrica entre as temperaturas nessas duas escalas?

a) 2D + C = 100

b) 2D + 3C = 150

c) 3D + 2C = 300

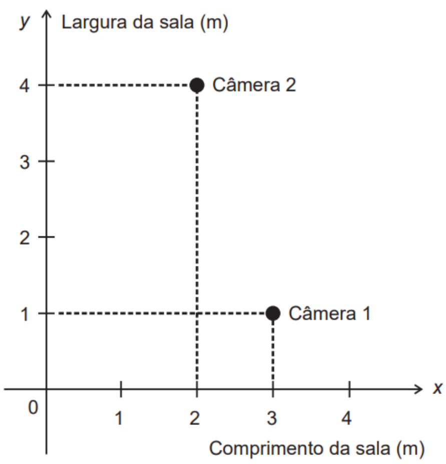
d) 2D + 3C = 300

e) 3D + 2C = 450

Problema 2

Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

(i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.



(ii) cinco relações entre as coordenadas (x ; y) da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

$R1 : y = x$

$R2 : y = -3x + 5$

$R3 : y = -3x + 10$

$R4 : y = 1/3x + 5/3$

$R5 : y = 1/3x + 1/10$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera. A relação escolhida pelo instalador foi a

a) R1.

b) R2.

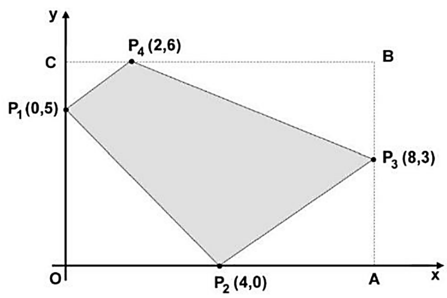
c) R3.

d) R4.

e) R5.

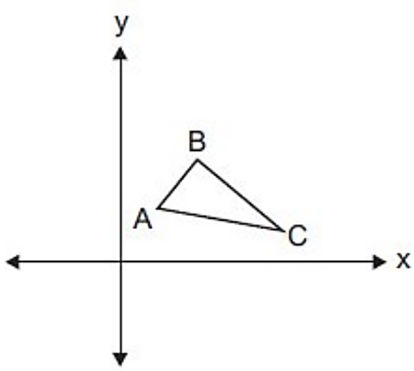
Problema 3

(UFPR) Calcule a área do quadrilátero $P1P2P3P4$, cujas coordenadas cartesianas são dadas na figura abaixo.



Problema 4

(PUC-RIO 2009) Calcule a área do triângulo de vértices A = (1,2), B = (2,4) e C = (4,1).



a) $\dfrac{5}{2}$

b) 3

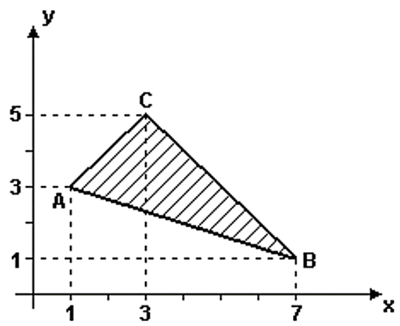
c) $\dfrac{7}{2}$

d) 4

e) $\dfrac{9}{2}$

Problema 5

(UERJ) No sistema de coordenadas cartesianas a seguir, está representado o triângulo ABC.



Em relação a esse triângulo,

a) demonstre que ele é retângulo;

b) calcule a sua área.

7.1.4 Lista 4

Habilidade principal: Determinar a equação da reta em situações diversas e de formas variadas.

Exercício 1

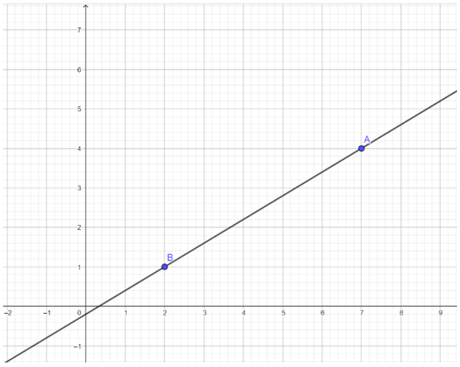
Encontre uma equação geral da reta que passa pelos pontos e represente-as graficamente.

1. (-4,3) e (-1,-3)
2. (2,-1) e (-4,-2)
3. (0,4) e (-4,1)
4. (1,6) e (-1,1)

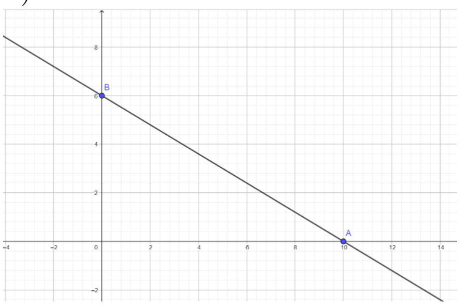
Exercício 2

Encontre a equação reduzida das retas a seguir e determine o coeficiente angular e linear.

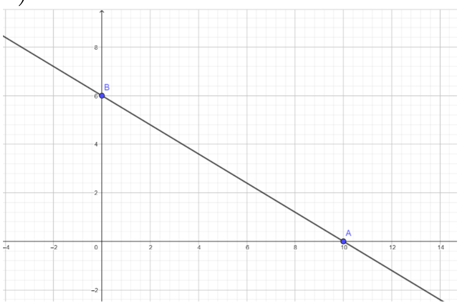
a)



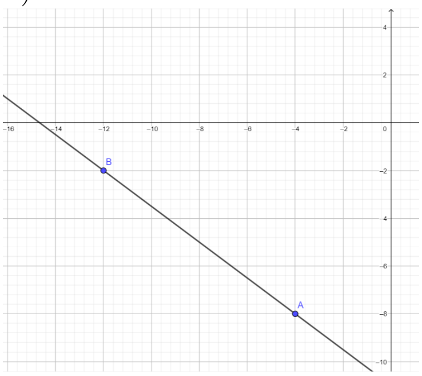
b)



c)

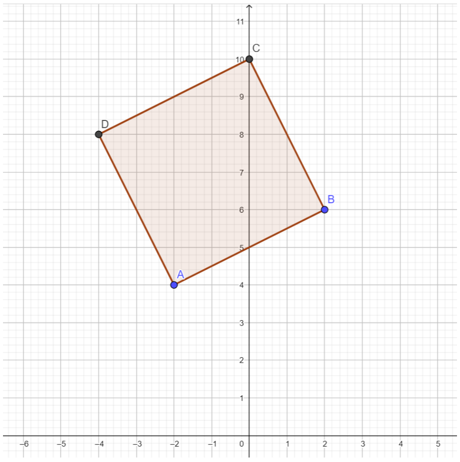


d)



Exercício 3

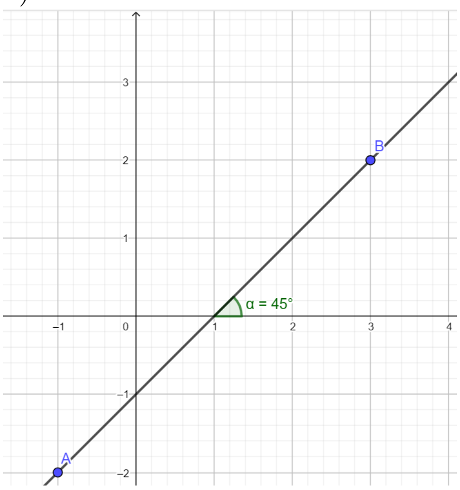
Determine as equações das retas suportes dos lados do quadrado abaixo.



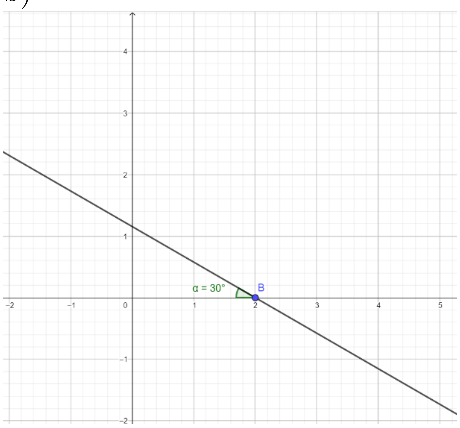
Exercício 4

Escreva as equações das retas abaixo nas formas reduzida e geral.

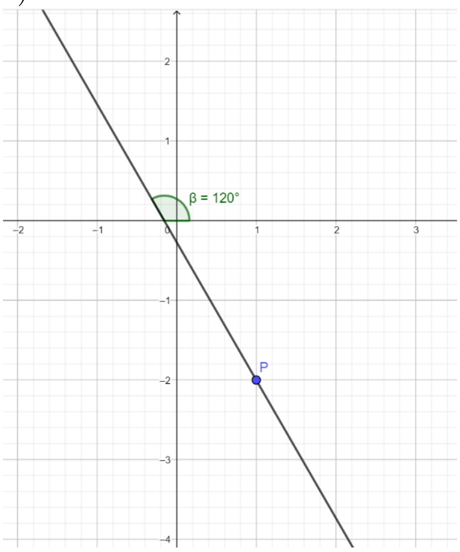
a)



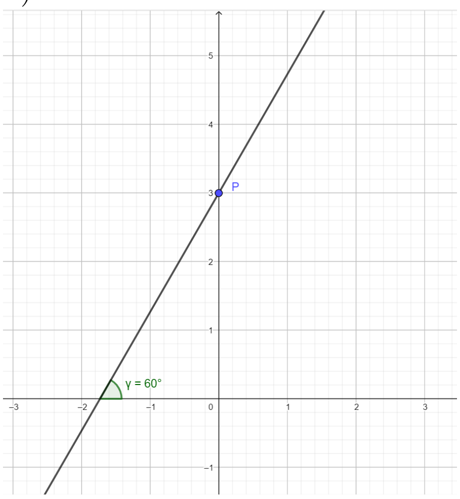
b)



c)



d)



Exercício 5

Qual é a equação da reta que:

a) passa pelo ponto (6,8) e tem coeficiente angular $m = 2$?

b) passa pelo ponto (-3,-4) e tem coeficiente angular $m = -1$?

c) passa pelo ponto (12,7) e é paralela ao eixo das ordenadas?

d) passa pelo ponto (-2,8) e é paralela ao eixo das abscissas?

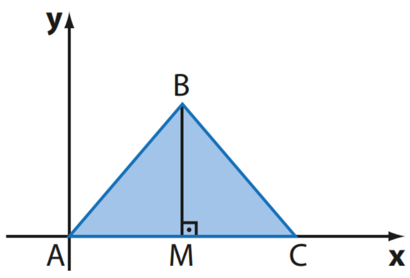
Exercícios de fixação

Exercício 6

(Unicamp - adaptada) No plano cartesiano, a reta de equação $2x - 3y = 12$ intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B. Quais as coordenadas do ponto médio do segmento AB?

Exercício 7

Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$. Sabendo que $\overline{AB} = 5$ e $\overline{AC} = 6$, obtenha:



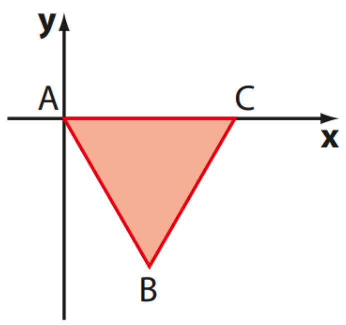
a) a equação geral da reta AB;

b) a equação reduzida da reta BC;

c) a equação geral da reta BM.

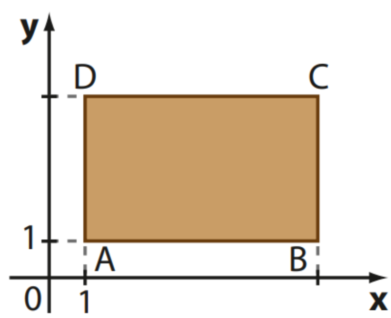
Exercício 8

Na figura, o triângulo ABC é equilátero e seu lado mede 3. Determine as equações reduzidas das retas suportes AB, BC e AC.



Exercício 9

Na figura, $ABCD$ é um retângulo. O lado CD mede 6 e a diagonal BD mede $4\sqrt{3}$.



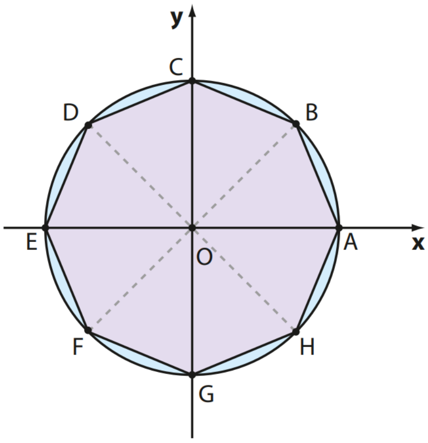
Determine:

a) o coeficiente angular da reta que passa por A e C;

b) a equação reduzida da reta que passa por B e D.

Exercício 10

Na figura, o octógono regular $ABCDEFGH$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 2.



Determine:

a) as coordenadas dos vértices do octógono;

b) a equação geral da reta BF;

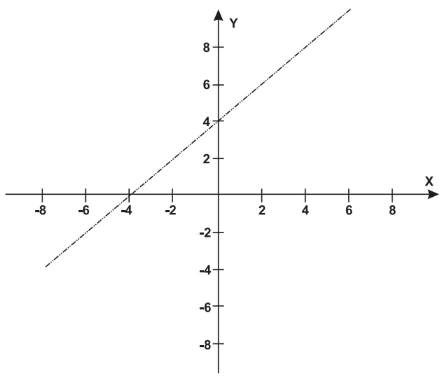
c) o coeficiente angular da reta DH;

d) o coeficiente angular da reta AH.

Problemas de exames e aprofundamento

Problema 1

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação y = x + 4 representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

a) (-5, 0).

b) (-3, 1).

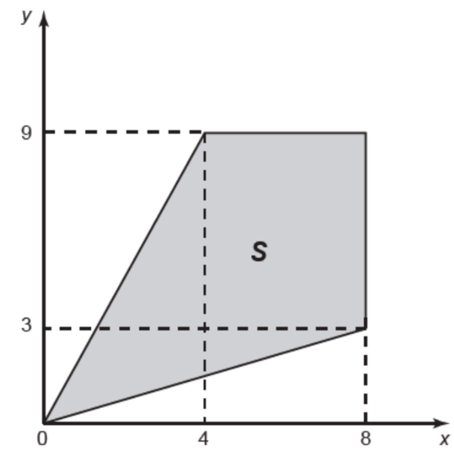
c) (-2, 1).

d) (0, 4).

e) (2, 6).

Problema 2

Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área S) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, um programador utilizará um software que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas. As desigualdades que devem ser utilizadas no referido software, para o desenho da região de isolamento, são

a) $3y - x \leq 0; 2y - x \geq 0; y \leq 8; x \leq 9$

b) $3y - x \leq 0; 2y - x \geq 0; y \leq 9; x \leq 8$

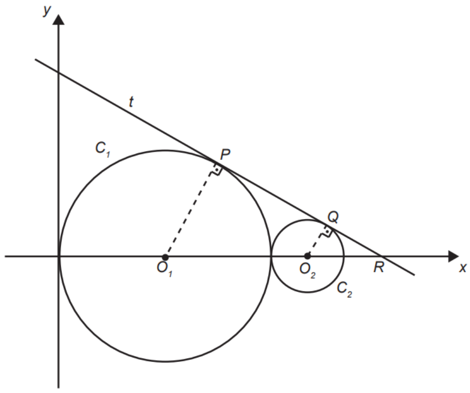
c) $3y - x \geq 0; 2y - x \leq 0; y \leq 9; x \leq 8$

d) $4y - 9x \leq 0; 8y - 3x \geq 0; y \leq 8; x \leq 9$

e) $4y - 9x \leq 0; 8y - 3x \geq 0; y \leq 9; x \leq 8$

Problema 3

Na figura estão representadas, em um plano cartesiano, duas circunferências: C_1 (de raio 3 e centro O_1) e C_2 (de raio 1 e centro O_2), tangentes entre si, e uma reta t tangente às duas circunferências nos pontos P e Q.



Nessas condições, a equação da reta t é

a) $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$

b) $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$

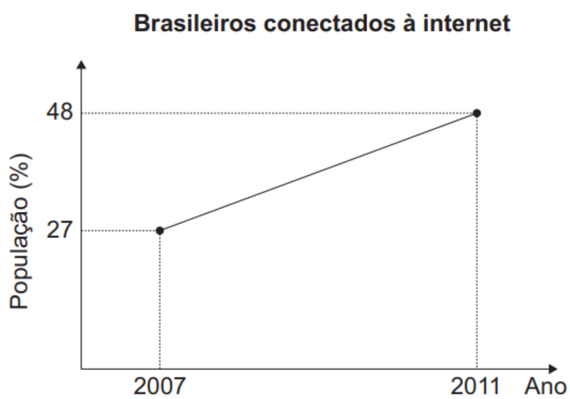
c) $y = -x + 4$

d) $y = -\dfrac{2x}{3} + 4$

e) $y = -\dfrac{4x}{5} + 4$

Problema 4

O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.



Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011. A estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a

a) $56,40\%$.

b) $58,50\%$.

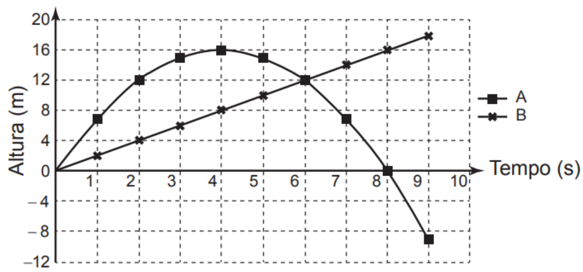
c) $60,60\%$.

d) $63,75\%$.

e) $72,00\%$.

Problema 5

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.

b) diminuir em 4 unidades.

c) aumentar em 2 unidades.

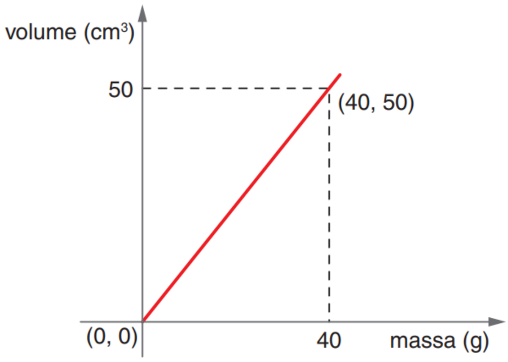
d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

7.1.5 Lista 5

Problema 1

(Vunesp-SP) Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0°C.



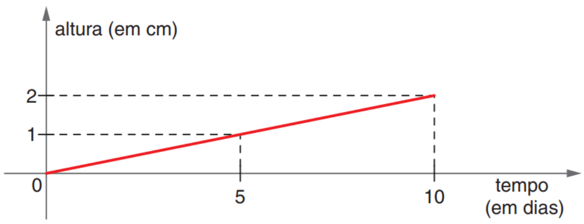
Baseado nos dados do gráfico determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico;

b) qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool.

Problema 2

(UERN) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.



Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá no trigésimo dia, uma altura igual a:

a) 5

b) 150

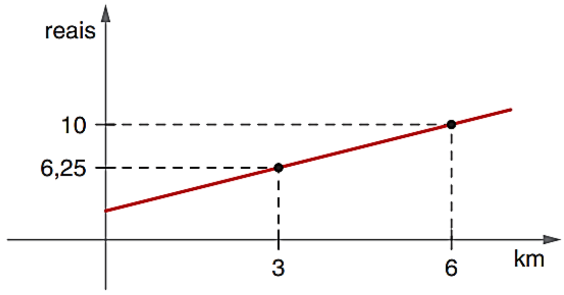
c) 15

d) 30

e) 6

Problema 3

(UFSM-RS) Na figura, é indicado o preço pago por uma corrida de táxi, em função da distância percorrida.



Nessas condições, o valor a ser pago num trajeto de 5 km é, em reais:

a) 8,00

b) 8,13

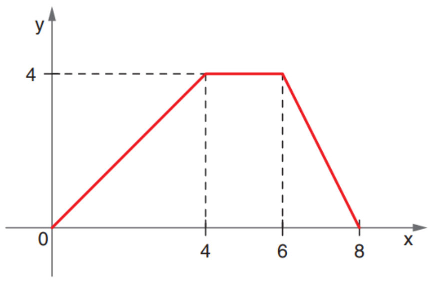
c) 8,50

d) 8,75

e) 9,00

Problema 4

(UFF-RJ) O gráfico da função f está representado na figura a seguir.



Sobre a função f é falso afirmar que:

1. f(1) + f(2) = f(3)

2. f(2) = f(7)

3. f(3) = 3f(1)

4. f(4) - f(3) = f(1)

5. f(2) + f(3) = f(5)

Problema 5

(Furg-RS) Seja g uma função do tipo $g(x) = ax + b$ com $x \in \Re$. Se $g(-2) = -4$ e $2g(3) = 12$, os valores de a e b são, respectivamente:

a) $-\dfrac{1}{2}$ e 0

b) 0 e $\dfrac{1}{2}$

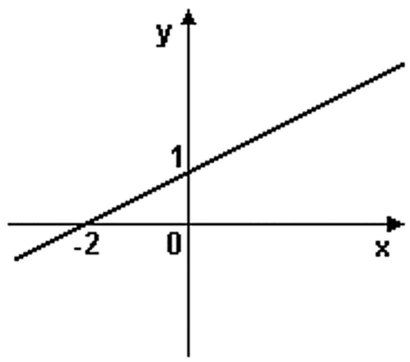
c) 0 e 2

d) $\dfrac{1}{2}$ e 0

e) 2 e 0

Problema 6

(PUC-MG) O gráfico da função $f(x) = ax + b$ está representado na figura.



O valor de $a + b$ é:

a) –1.

b) 2/5.

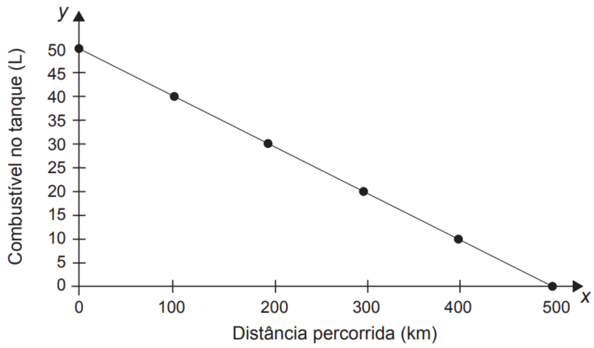
c) 3/2.

d) 2.

e) 1.

Problema 7

(ENEM 2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

a) $y = -10x + 500$

b) $y = -\dfrac{x}{10} + 50$

c) $y = -\dfrac{x}{10} + 500$

d) $y = \dfrac{x}{10} + 50$

e) $y = \dfrac{x}{10} + 500$

Problema 8

(PUC-MG) Em certa cidade, durante os dez primeiros dias do mês de julho de 2003, a temperatura, em graus Celsius, foi decrescendo de forma linear de acordo com a função $T(t) = -2t + 18$, em que t é o tempo medido em dias. Nessas condições, pode-se afirmar que, no dia 8 de julho de 2003, a temperatura nessa cidade foi:

a) 0°C.

b) 2°C.

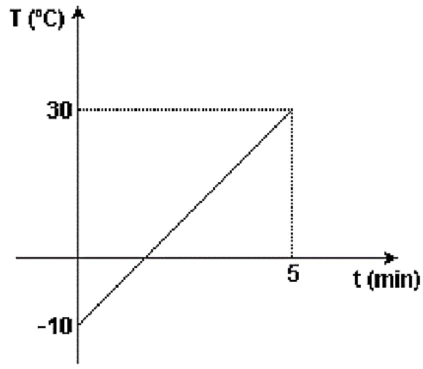
c) 3°C.

d) 4°C.

e) 5°C.

Problema 9

(PUC-MG) O gráfico representa a variação da temperatura T, medida em graus Celsius, de uma barra de ferro em função do tempo t, medido em minutos.



Com base nas informações do gráfico, pode-se estimar que a temperatura dessa barra atingiu 0 °C no instante t igual a:

a) 1 min e 10 s.

b) 1 min e 15 s.

c) 1 min e 20 s.

d) 1 min e 25 s.

e) 1 min e 30 s.

Problema 10

(UFMS) Para custear seus estudos, um estudante oferece serviços de digitação de textos. O preço a ser pago pela digitação de um texto inclui uma parcela fixa e outra parcela que depende do número de páginas digitadas. Se a parcela fixa for de R$ 4,00 e cada página digitada custar R$ 1,60, então a quantidade de páginas digitadas de um texto, cujo serviço de digitação custou R$ 39,20, será igual a:

a) 29

b) 24

c) 25

d) 20

e) 22

8 ANEXOS

8.1 Questões do livro didático

Exercício resolvido

Um artesão pretende usar retalhos para fazer uma colcha de formato retangular com as seguintes dimensões: 2,40 m de comprimento por 1,80 m de largura. Se os retalhos forem recortados em pedaços quadrados, cada qual com 20 cm de lado, quantos pedaços serão necessários para compor tal colcha?

Solução:

• Determinemos a área A_1 da superfície da colcha:

$A_1 = b \cdot h = (2,40m) \cdot (1,80m) = 4,32m^2$

• Seja n o total de pedaços de retalho que deverão compor a colcha.

Cada pedaço deverá ter a forma de um quadrado de 20 cm de lado, então a área A_2 de sua superfície é dada por

$A_2 = l^2 = (20cm) \cdot (20cm) = (0,2m) \cdot (0,2m) = 0,04m^2$.

Como as medidas de comprimento e largura da colcha são divisíveis pela medida do lado do retalho, a área da superfície dos n pedaços reunidos — que deverão revestir os $4,32m^2$ — será igual a $n \cdot A_2 = n \cdot 0,04m^2$.

Logo, como devemos ter $n \cdot A_2 = A_1$, então $n \cdot 0,04 = 4,32$, ou seja, $n = 108$ pedaços.

EXERCÍCIOS

1. Determine a área de:

   a) um retângulo cujas dimensões são 6,5 cm e 12 cm;

   b) um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{3}$ m;

   c) um retângulo cuja base mede 16 dm e cuja diagonal mede 20 dm;

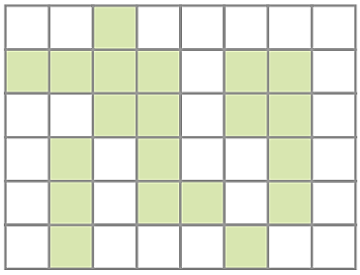
   d) um quadrado que tem 24 m de perímetro;

   e) um retângulo cuja diagonal forma um ângulo de 30° com o lado que tem 12 dm de comprimento;

   f) um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2}$ mm.

2. Um mapa de certa região foi construído na escala 1 : 20 000, isto é, cada centímetro no mapa corresponde a 20 000 cm = 200 m de medida real. Determine, em metros quadrados, a área real de uma chácara que, nesse mapa, é representada por um quadrado cujo lado mede 0,3 cm.

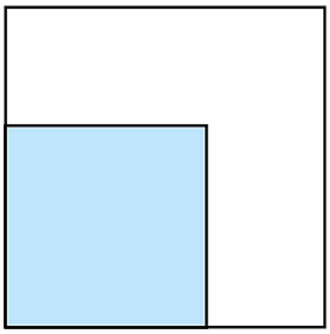
3. A figura apresenta uma malha quadriculada em que a medida do lado de cada quadradinho é 2,5 u.c. (unidades de medida de comprimento). Determine a área da região colorida.



4. Um jardim tem a forma de um retângulo cujas dimensões estão entre si na razão $\frac{3}{4}$. Se esse jardim tem 28 m de perímetro, determine sua área.

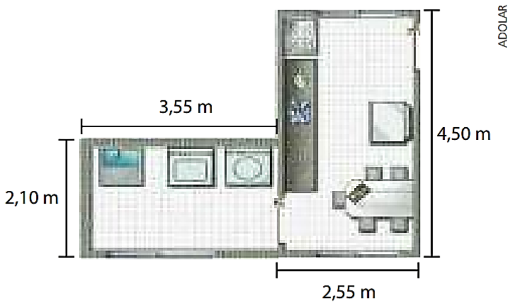
5. Um azulejo tem a forma de um quadrado cuja diagonal mede $15\sqrt{2}$ cm. Se as paredes de um salão de formato retangular, cujas dimensões são (54 m) $\times$ (4,5 m), deverão ser totalmente revestidas por tais azulejos, então, supondo que nenhum deles se quebre no ato da colocação, quantos azulejos serão usados?

6. Na figura, a região colorida representa uma piscina de formato quadrado, construída no quintal de uma casa. Pretende-se reduzir de 2 m as dimensões da superfície dessa piscina, de modo que ela passe a ocupar 36% da área do quintal. Se o quintal tem a forma de um quadrado cuja área é 225 m^2, determine quantos metros quadrados aumentará a superfície do quintal não ocupada pela piscina.

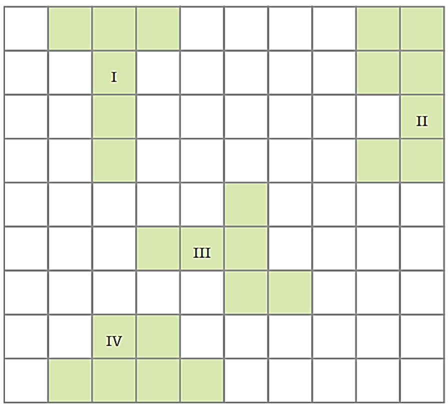


7. Sobre uma mesa plana de formato retangular, um arquiteto montou a maquete de um projeto de construção de um edifício. Sabendo que a superfície dessa mesa tem $52dm$ de perímetro e área igual a 144 dm^2, determine suas dimensões.

8. A figura abaixo mostra a planta baixa da cozinha e da área de serviço de um apartamento. Considerando desprezível a espessura das paredes, determine a área total da superfície das dependências mostradas.



9. Na malha quadriculada apresentada abaixo, as regiões sombreadas – I, II, III e IV – representam as superfícies de quatro sítios planos onde, respectivamente, os irmãos – Artur, Lucas, Edson e Luiza – pretendem construir suas casas.



Sabendo que a área total da malha é $36000m^2$, responda:

a) Quais sítios têm perímetros iguais?

b) Qual dos irmãos pretende construir no sítio que tem a superfície de maior área? Qual é a área dessa superfície?

10. Afrânio dispõe de um terreno plano e de formato retangular. Pretendendo vendê-lo, dividiu-o em 4 lotes retangulares cujas medidas das superfícies, em metros quadrados, são indicadas na figura seguinte:

750	300
600	X

Se o metro quadrado de cada lote for vendido por R$ 86,00, determine o preço de venda do lote cuja superfície tem X m^2 de área.

11. Para a apresentação de um espetáculo ao ar livre, foi destinada aos espectadores uma área retangular medindo 180 m de comprimento por 60 m de largura. Supondo que uma única pessoa ocupe uma área média de 2500 cm^2, qual é o número máximo de pessoas que poderão assistir ao espetáculo na área reservada?

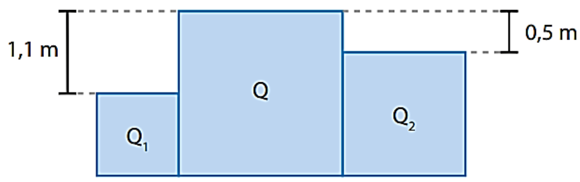
12. O piso retangular de uma sala, com 9,60 m de comprimento por 4,50 m de largura, deve ser revestido com ladrilhos quadrados. Admitindo- -se que não haverá perda de material e que será utilizado o menor número de ladrilhos inteiros, pergunta-se:

    a) Quantos ladrilhos deverão ser colocados?

    b) Qual a área da superfície de cada ladrilho?

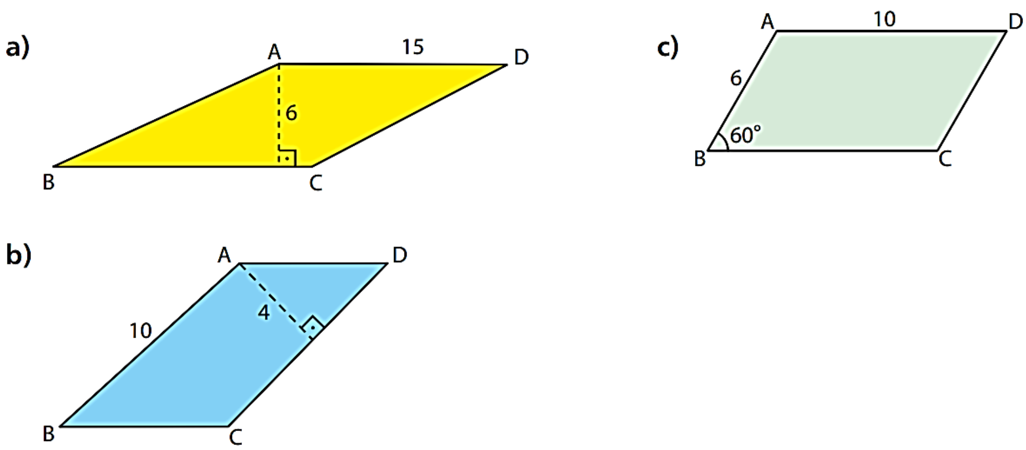
13. Paulo e Carlos possuem tabletes de chocolate de formas quadrada e retangular, respectivamente. O tablete de Paulo tem 12 cm de perímetro e o de Carlos tem a medida da base igual ao triplo da medida da altura e perímetro igual a 12 cm. Sabendo que os tabletes possuem a mesma espessura e que Paulo propôs a troca com Carlos, verifique se é vantagem para Carlos aceitar a troca.

14. Três mesas, cujos tampos têm a forma de um quadrado, foram justapostas lado a lado, conforme é mostrado na figura abaixo.



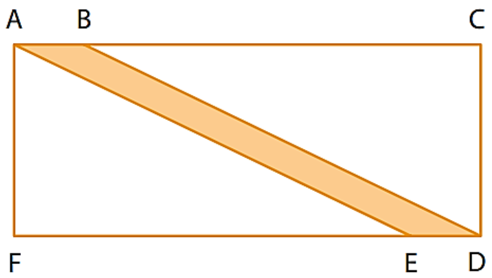
    Sabendo que as áreas das superfícies dos tampos dessas mesas somam 7,06 m^2 , determine a área de Q (superfície do tampo da maior mesa).

15. Em cada caso, determine a área do paralelogramo ABCD, considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro.



16. A superfície plana de um jardim, no formato de um paralelogramo cujos lados medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo de 60°, deve ser coberta de grama. Qual é a área desse jardim?

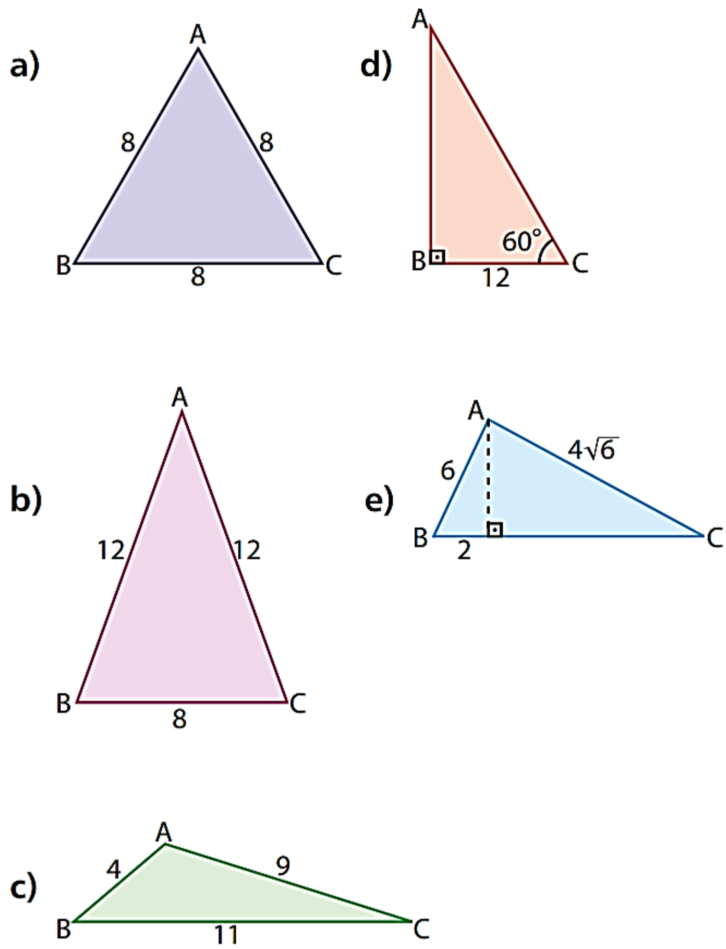
17. A figura abaixo apresenta o esquema de um projeto para a construção de um jardim, em um terreno plano de formato retangular (ACDF), cuja superfície tem 504 m^2.



Nesse esquema, a região destacada (ABDE) é um paralelogramo que representa uma passagem para pedestres que dividirá o jardim em dois canteiros triangulares (AFE e DCB).

Se $AE = 30m$ e $AF = \frac{3}{4} \cdot FE$, qual será a área da passagem para pedestres?

18. Determine a área de cada um dos triângulos representados nas figuras seguintes, nas quais a unidade das medidas indicadas é o metro.



19. Calcule a área do triângulo em cada um dos seguintes casos:

    a) A medida de um lado é 12 cm, e a altura relativa a esse lado mede 8 cm.

    b) As medidas dos lados são 8 m, 10 m e 14 m.

    c) O triângulo é equilátero, e os lados medem 6 dm.

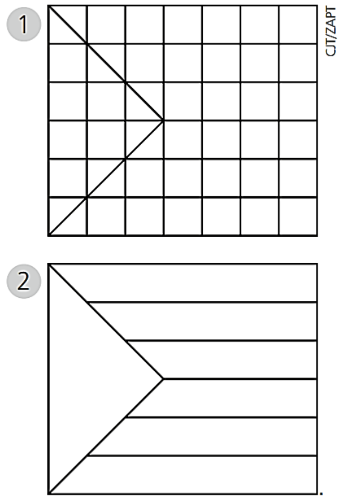
    d) O triângulo é isósceles, os lados congruentes medem 12 m, e o outro lado mede 6 m.

    e) O triângulo é retângulo, e os catetos medem 3,6 cm e 4,8 cm.

    f) O triângulo é retângulo, com um dos catetos e a hipotenusa medindo 12 dm e 18 dm,respectivamente.

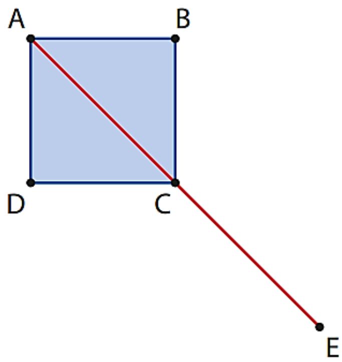
    g) Dois lados, que medem 14 m e 18 m, determinam entre si um ângulo que mede 30°.

20. Sabe-se que para desenhar uma bandeira, inicialmente, Valentina dividiu uma folha de papel em quadradinhos congruentes e, depois, para poder pintá-la, apagou parte do quadriculado para que ela ficasse da forma como é mostrado na segunda figura.

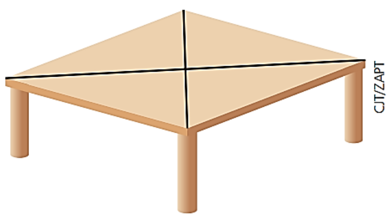


Se as dimensões da folha eram $(0,24m) \times (0,28m)$, determine a área da superfície triangular da bandeira, em centímetros quadrados.

21. Sobre a figura ao lado sabe-se que ABCD é um quadrado, $AB = 6$ cm e C é ponto médio do segmento $\overline{AE}$. Determine a área do triângulo BCE, em centímetros quadrados.



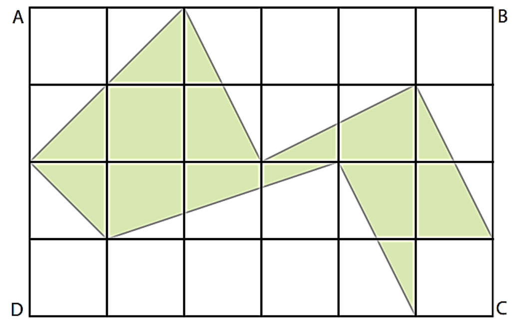
22. A superfície do tampo da mesa mostrada na figura é um quadrado, composto de quatro triângulos isósceles congruentes cujos lados congruentes medem $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$ m.



Determine a área da superfície do tampo dessa mesa.

23. Determine a área de um triângulo retângulo tal que a soma das medidas dos catetos é igual a 28 cm e a soma dos quadrados das medidas dos três lados é igual a $800cm^2$.

24. Na figura abaixo, o retângulo ABCD foi dividido em quadrados de 2 cm de lado.

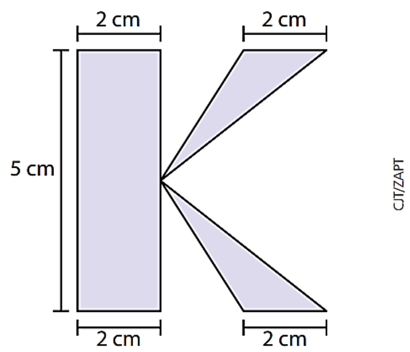


Qual é a área da região sombreada, em centímetros quadrados?

25. Em um terreno, com a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 32 m e 27 m, pretende-se construir um edifício de base retangular, de lados paralelos aos catetos. Quais devem ser as dimensões da base desse edifício de modo a haver maior aproveitamento do terreno?

26. Um triângulo equilátero ABC tem 8 cm de lado. Se a medida de cada lado desse triângulo for acrescida de seus 25%, que porcentagem de acréscimo sofrerá a área de ABC?

27. Kátia levou 20 peças de seu enxoval a uma costureira, para que ela confeccionasse e aplicasse, em cada peça, o monograma mostrado na figura abaixo.



Considerando que para fazer esse monograma a costureira cobra pelo tecido usado, ao custo de R$ 120,00 o metro quadrado, e pela sua mão de obra, R$ 7,50 por monograma confeccionado e aplicado, determine a quantia que Kátia deverá desembolsar pelo serviço contratado.