Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Gabriel Garcia da Costa

Laplace sem equiprobabilidade é um erro

Orientador:
Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Natal - RN
Julho de 2023

Gabriel Garcia da Costa

Laplace sem equiprobabilidade é um erro

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFRN como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

Natal - RN
Julho de 2023

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Costa, Gabriel Garcia.
Laplace sem equiprobabilidade é um erro / Gabriel Garcia da Costa. - 2023.
74 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2023.
Orientação: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

1. Probabilidade - Dissertação. 2. Equiprobabilidade - Dissertação. 3. Laplace - Dissertação. 4. Kolmogorov - Dissertação. I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 519.2

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Gabriel Garcia da Costa

Laplace sem equiprobabilidade é um erro

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira (UFRN - Orientador)
Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana (UFRN - Membro interno)
Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos (UNB - Membro externo)

Natal - RN
Junho de 2023

Dedico este trabalho aos meus pais, Edilson e Edvanda, em especial para minha mãe por estar sempre me apoiando e incentivando em todos os momentos da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, ao meu bom Deus pela sua presença em todos os momentos da minha vida. Pela oportunidade de ter essa experiência profissional na realização deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Edilson e Edvanda que durante toda minha formação me apoiaram e me incentivaram para que eu pudesse chegar aqui. Em especial, minha mãe a professora Edvanda que sempre foi a minha maior incentivadora e sempre acreditou em mim, mais do que eu mesmo. Agradeço também aos meus irmãos, Diego e Matheus pelo companherimos e apoio de sempre.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas que me ajudaram e me apoiaram nessa minha trajetória. Aos meus companheiros de Mestrado, pela convivência, pelo aprendizado, pelas palavras de incentivo e pelos bons momentos que compartilhamos nesta caminhada. Ao meu orientador Prof. Dr. André Gustavo Campos Perreira, pela confiança, colaboração, e incentivo para conclusão deste trabalho.

Agradeço também a todas as pessoas generosas que cruzaram o meu caminho e me ajudaram a chegar até aqui.

"Aonde fica a saída?"
Perguntou Alice ao gato que ria.
"Depende", respondeu o gato.
"De quê?", replicou Alice;
"Depende de para onde você quer ir..." '
Alice no país das maravilhas - Lewis Carroll

Resumo

Laplace sem equiprobabilidade é um exemplo do que não se deve fazer em Matemática, é usar uma definição onde ela não se aplica. Pereira et al. (2020) fez um estudo minuncioso e comprovou que a definição de probabilidade mais utilizada nos livros adotados, não apenas nos Ensinos Fundamental e Médio mas também nas dissertações do PROFMAT, é a definição clássica apresentada por Laplace (1749-1827). No entanto, o trabalho chama atenção que, em inúmeras dessas bibliografias estudadas, a hipótese fundamental de equiprobabilidade para a aplicação da definição clássica nem ao menos é mencionada. O objetivo desse trabalho é mostrar os erros que se comete ao usar a definição de probabilidade de Laplace quando não se tem equiprobabilidade. Destacando diversas situações onde nosso espaço amostral é não equiprovável e exemplos de variáveis aleatórias que podem induzir um novo espaço amostral em um experimento aleatório tanto equiprovável como não equiprovável.

Palavras-chave: Probabilidade, Equiprobabilidade, Laplace, Kolmogorov.

Abstract

Laplace without equiprobability is an example of what should not be done in Mathematics, such as using a definition where it can not be applied. Pereira et al. (2020) developed a study where many middle and high school textbooks, as well as many of PROFMAT's dissertations about probability were analysed and it was noted that the most used definition of probability is Laplace's (1749-1827) and such definition is also called the classical definition of probability. However, Pereira et al. (2020) highlights the fact that numerous bibliographies that were knowledged in the study, did not come to mention the fundamental hypothesis of equiprobability. The goal of this paper is to show the errors one commits when using the classical definition of probability when there is no equiprobability. Highlighting several situations where our sample space is not equiprobable and examples of random variables that can induce a new sample space in a random experiment both equiprobable and non-equiprobable.
Keywords: Probability, Equiprobability, Laplace, Kolmogorov.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

Em Morgado et. al (2004), é explicado que na natureza existem os fenômenos determinísticos e os fenômenos aleatórios ou estocásticos. Os primeiros são aqueles que quando repetidos sob as mesmas condições geram sempre os mesmos resultados, e os segundos são aqueles que mesmo repetidos sob as mesmas condições não necessariamente geram os mesmos resultados.

A Teoria das Probabilidades é a parte da Matemática que estuda experimentos ou fenômenos aleatórios. E como estudar fenômenos que mesmo repetidos sobre as mesmas condições fornecem resultados diferentes?

No capítulo 1 introduzimos os conceitos necessários para que possamos proceder o estudo de fenômenos aleatórios. Começamos com um conjunto que contém todos os possíveis resultados do estudo que estamos realizando, conhecido como espaço amostral, passamos pelo conjunto de todos os subconjuntos do espaço amostral, chamado do conjunto de todos os eventos, e finalmente buscamos uma função que possa medir a chance de ocorrência de um evento. Na tentativa de encontrar tal função discutimos três das mais comentadas nos livros didáticos, a saber: A definição frenquentista, a clássica e a axiomática. No estudo realizado em Pereira et al. (2020) ficou claro que a definição mais utilizada nos livros didáticos é a clássica, creditada ao matemático francês Laplace (1749-1827). O interessante é que, nessa definição, é requerido que a chance de ocorrência de qualquer evento elementar (subconjunto unitário do espaço amostral) seja a mesma independentemente do subconjunto analisado. Quando isso acontece o espaço amostral se diz equiprovável. Em Pereira et al. (2020), nas várias dissertações e livros didáticos analisados, foi verificado que a fórmula de Laplace está sendo utilizada como a definição de probabilidade sem citar a necessidade do espaço amostral ser equiprovável, o que um é erro muito grave. Nesse mesmo trabalho foi apresentado o resultado de um teste aplicado com alunos Universidade Federal do Rio Grande do Norte, e de escolas públicas e privadas das cidades de Natal e de Parnamirim, mais uma vez comprovando que a fórmula de Laplace é a definição de probabilidade que eles conhecem, mas o preocupante é que poucos estudantes se referiram à hipótese necessária de equiprobabilidade. Nesse capítulo, vários exemplos são apresentados a fim de mostrar que mesmo em situações bem simples o conceito de equiprobabilidade pode não ser a hipótese mais adequada.

No Capítulo 2, introduzimos as funções que são utilizadas na modelagem de fenômenos aleatórios que são chamadas de variáveis aleatórias (v.a.). Ao nos utilizarmos das variáveis aleatórias para modelar um problema, induzimos um novo espaço de probabilidade. Essa passagem (da criação de um novo espaço de probabilidade) é omitida nos livros didáticos o que prejudica o entendimento dessa ligação entre o espaço amostral inicial e o espaço amostral induzido pela v.a.. Nesse capítulo desenvolvemos vários exemplos a fim de esclarecer essa passagem simples, muito importante e que sempre é omitida nos textos. Nesse capítulo desenvolvemos outros conceitos como esperança, variância, erro médio quadrático e erro médio absoluto, que serão utilizados no Capítulo 3 a fim de medirmos o erro que cometemos ao supormos que um espaço amostral é equiprovável quando ele não o é.

O Capítulo 3 é o capítulo central do nosso trabalho no qual mostramos através de exemplos as consequências de se supor equiprobabilidade de um espaço amostral quando esse não é equiprovável. Em particular, o erro cometido ao usarmos equiprobabilidade é bem maior que o erro cometido quando utilizamos as probabilidades corretas dos eventos. Notamos que a situação em que mais ocorre essa confusão de considerar o espaço equiprovável sem questionamentos, é quando o experimento apresenta uma quantidade finita de possibilidades. Essa informação parece que induz o aluno a pensar que a chance de cada evento elementar é a mesma. Uma das consequências imediatas disso é que o aluno acaba utilizando a fórmula de Laplace para calcular a probabilidade, quando ele não poderia fazer isso devido ao fato da inexistência de equiprobabilidade.

Finalizamos esse trabalho com nossas considerações finais, onde além de recapitular todos os problemas de se usar a fórmula de Laplace quando não existe equiprobabilidade, propomos a aplicação da definição axiomática que resolve o problema de termos que constatar a equiprobabilidade do espaço amostral.

1 O que é Probabilidade?

1.1 Conceitos iniciais

Em Morgado et. al (2004), é explicado que na natureza existem os fenômenos determinísticos e os fenômenos aleatórios ou estocásticos. Os primeiros são aqueles que quando repetidos sob as mesmas condições geram sempre os mesmos resultados, e os segundos são aqueles que mesmo repetidos sob as mesmas condições não necessariamente geram os mesmos resultados.

Segundo Magalhães e Lima (2005) entende-se por experimentos aleatórios determinada "situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza". Um exemplo de um fenômeno determinístico é que água e óleo não se misturam. Ao misturarmos água e óleo, depois de um certo tempo o óleo estará em cima e a água estará em baixo. Isso acontece porque a água e o óleo possuem densidades diferentes, sendo a do óleo menor do que a da água. Além de possuírem densidades diferentes, eles são imiscíveis, ou seja, não se misturam. Um exemplo de um fenômeno aleatório seria retirar sementes da mesma fruta, plantá-las em um solo com as mesmas características, e depois de um mês observar as mudas. Veremos que as mudas tem formas e tamanhos diferentes.

Henri Poincaré (1946) em seu livro Ciência e Método, no Capítulo 4 também fala sobre os fenômenos aleatórios sob o nome de chance, ele fala:

> Para começar o que é chance? Os antigos distinguiam entre o fenômeno que parece obedecer leis harmoniosas, já estabelecidas, e aqueles que eles atribuem a chance, que são aqueles que não podem ser previstos por não estarem sujeitos a qualquer lei. (Gould(2001),p.401)

Quando falamos em fenômenos que obedecem leis, a primeira coisa que nos vem a mente são os fenômenos físicos, por exemplo, movimento retilíneo constante, movimento retilíneo uniformemente variado, queda livre, etc. Dizem que Einstein defendeu tanto o fator determinístico da Física que cunhou a seguinte frase: "Insanidade é continuar fazendo sempre a mesma coisa e esperar resultados diferentes". Em outra feita, ao responder uma carta ao físico alemão Max Born o qual falava que os choques das partículas, quando do início da teoria quântica, pareciam acontecerem de forma aleatória ou incerta, Einstein respondeu: "A teoria produz um bom resultado, mas dificilmente nos aproxima do segredo do Criador. Estou, em todos os casos, convencido de que Ele não joga dados". Por essas frases vê-se claramente que, nessa época, ele não acreditava que os fenômenos físicos pudessem ser fenômenos aleatórios. Mais a frente em sua vida ele se convenceu que eventos aleatórios de fato existem (Henrique,D. (2022)).

A Teoria das Probabilidades é a parte da Matemática que produz e desenvolve modelos que podem ser empregados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. E como estudar fenômenos que mesmo repetidos sobre as mesmas condições fornecem resultados diferentes?

Em Pereira et al. (2015) é explicado que para estudar tais fenômenos não precisamos saber de antemão o resultado que vai aparecer, mas devemos saber quais resultados podem acontecer. A esse conjunto que conterá todos os possíveis resultados é dado o nome de **espaço amostral**. No caso das plantas seriam todas as mudas depois de um mês. Podemos citar outros exemplos, como jogar um dado e observar o número obtido, remover uma carta do baralho e observar a carta retirada, arremessar uma moeda e olhar o lado superior, etc.

Entretanto o objetivo de um estudo pode estar associado a ocorrência ou não de alguns resultados particulares dentre todos os possíveis resultados, ou seja, você pode estar interessado em subconjuntos do espaço amostral. No exemplo das plantas, suponha que depois de um mês você esteja interessado apenas nas mudas que atingiram a altura de pelo menos 10 cm. A cada um desses subconjuntos do espaço amostral é dado o nome de **evento**.

Um exemplo clássico é quando jogamos um dado e observamos a sua face que cai voltada para cima, embora não saibamos previamente o resultado, sabemos que existem seis possibilidades de ocorrência: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. O conjunto de todos os resultados possíveis do lançamento do dado é o espaço amostral e denotamos esse conjunto por Ω (lê-se: ômega). Suponha que você esteja interessado somente nas ocorrências que aparecem números pares. O subconjunto desse espaço que representa esse resultado desejado é o evento $\{2, 4, 6\}$.

Segundo Morgado (2004) os eventos elementares são qualquer subconjunto unitário do espaço amostral Ω, ou seja, se a, b, então $\{a\}, \{b\} \subset \Omega$, são eventos elementares. Se considerarmos o experimento Jogar um dado, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e os eventos elementares são $\{1\}, \{2\}, ..., \{6\}$.

Sabemos que o conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto, logo $\varnothing \subset \Omega$ onde Ω é um espaço amostral. Também sabemos que todo conjunto é subconjunto de si próprio, ou seja, $\Omega \subset \Omega$. Dessa forma, ao montarmos o conjunto de todos os subconjuntos de Ω devemos ter obrigatoriamente nesse conjunto o $\varnothing$ e o Ω.

Imagine o seguinte exemplo: lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $\Omega= \{cara, coroa\}$, e há 4 eventos possíveis: $\varnothing$, $A = \{cara\}$, $B = \{coroa\}$ e Ω. $\varnothing$ é um evento que não ocorre nunca (uma vez que ao lançarmos uma moeda esperamos como resposta ou cara ou coroa, ou seja, não ter resultado é uma situação impossível de ocorrer) e é chamado de evento impossível. O evento A ocorre se e somente se o lançamento resulta em cara. O evento B ocorre se e somente se o lançamento resulta em coroa. Se A ocorre, como $A \subset \Omega$ temos que Ω ocorreu. Da mesma forma se B ocorreu, logo Ω ocorreu. Assim, Ω ocorre sempre e é chamado de evento certo.

Por fim, precisamos ser capazes de medir a chance de ocorrência de tais eventos. Em Pereira et al. (2020) são apresentadas várias formas de se definir uma função que faça essa medição, dentre elas as obtidas das abordagens: Frequentista, Clássica e Axiomática. O artigo vai além das definições, ele faz um estudo minucioso de como o tema é abordado tanto nos livros atualmente adotados nos ensinos fundamental e médio, quanto nas dissertações do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).

A probabilidade pode ser entendida como uma medida do grau de incerteza de determinado evento aleatório. Em várias situações o conceito de incerteza é levado em conta: Um seguro (de vida, por exemplo) é proporcionalmente mais caro se os fatores de risco envolvidos são maiores; jogos (como os de loteria) foram planejados levando-se em conta as chances de ganho; a análise de eventos ligados ao clima e seus respectivos resultados são estudados em Meteorologia. Atualmente, os estudos sobre probabilidade têm grande aplicabilidade em diversos ramos como: economia, política, esporte, educação, medicina, administração e física.

Hoje em dia, é comum encontrar frases do tipo “a probabilidade de chover hoje é alta”, “a chance do jogador X fazer um gol na partida”, “é mais fácil ser assaltado no bairro A que no bairro B” ou “a chance de eu sair de casa hoje é quase 0”.

Em Hand (2014, p.44) são apresentadas várias palavras associadas à probabilidade

> A longa história da palavra “probabilidade” bem como sua importância e a confusão que ainda a rodeia, são reflexos do fato de que existem muitas outras palavras para conceitos muito relacionados. Estas incluem chances comparativas (“odd”), incerteza, aleatoriedade, chance, sorte, sina, destino, acaso, risco, azar, verossimilhança, imprevisibilidade, propensão e surpresa, além de outros. Existem também outros conceitos que tocam ideias similares tais como dúvida, credibilidade, confiança, plausibilidade e possibilidade e também ignorância e caos.

Notamos então que o uso da palavra chance, probabilidade são utilizadas no cotidiano quase que como sinônimos.

Rifo (2021, p.2) fala sobre probabilidade e se refere como sinônimo de modelar a incerteza:

> Em português, temos diversas palavras para qualificar a incerteza sobre um evento: verossímil, provável, crível, plausível, possível, tem pouca chance, tem muita chance, aleatório, quase nunca ocorre, impossível etc.

Entretanto, o que é de fato probabilidade? Vejamos nas próximas seções os conceitos mais utilizados.

1.2 Definição Frequentista de Probabilidade

A definição de probabilidade de um evento A na ótica frequentista, é definida como a frequência relativa desse evento, quando o número de repetições do experimento cresce indefinidamente, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

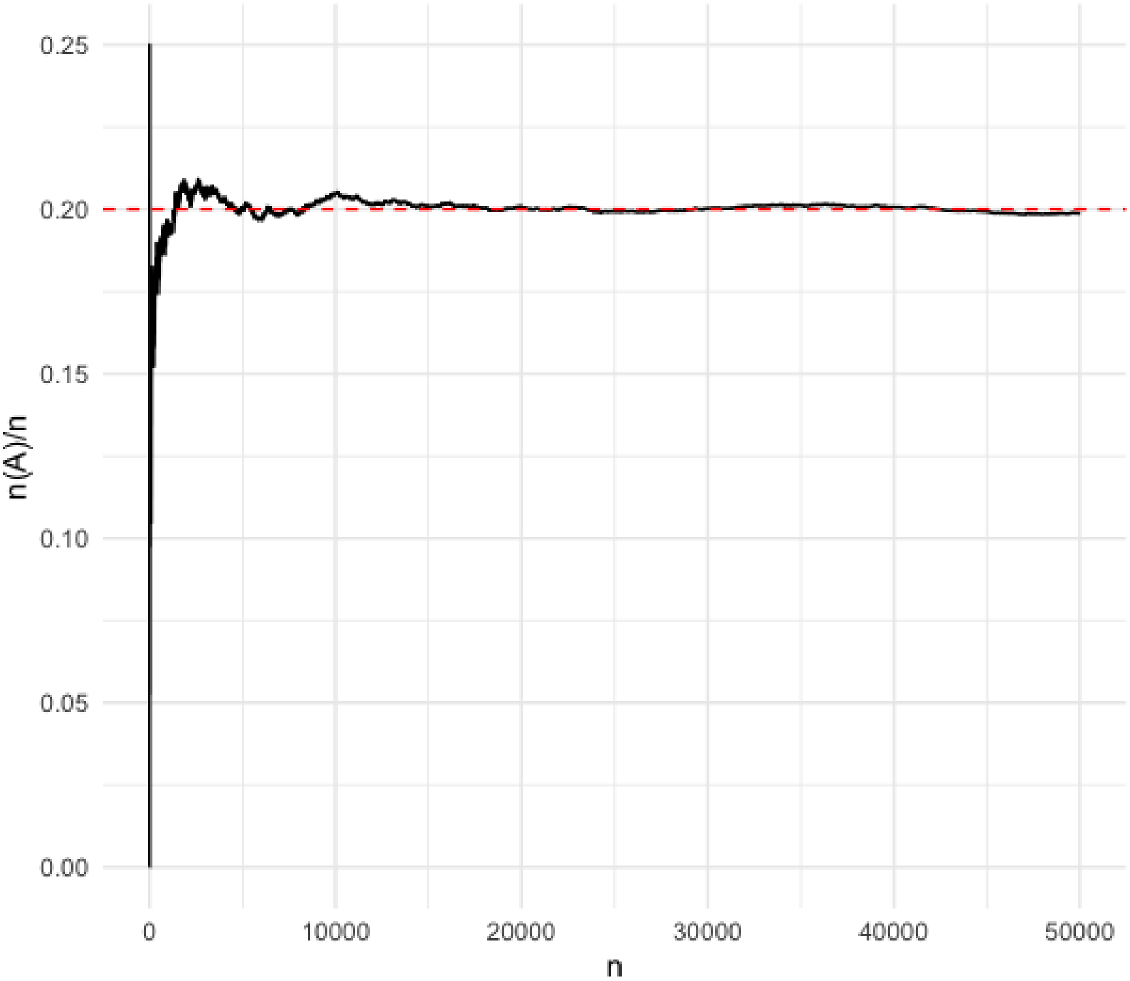
onde $n(A)$ é quantas vezes o evento A aconteceu nas n repetições realizadas. Salsa e Moreira (2008) creditam a Von Misses essa definição e segundo Berstein(1997), ela está bem estabelecida devido à lei dos grande números de Jacob Bernoulli. Berstein (1997) fala que para chegar a esse resultado Bernoulli imaginou um jarro repleto com 3 mil bolas brancas e 2 mil bolas pretas de onde ele retirou um número crescente de bolas, anotando com cuidado a cor de cada bola antes de devolvê-la ao jarro. A retirada de um número crescente de bolas do jarro deu uma aproximação cada vez melhor da proporção entre bolas brancas e pretas. Ele chegou a conclusão que seriam necessárias 25550 repetições para se obter a proporção 3:2 com um erro de 2% no resultado.

O experimento acima pode ser adaptado para o caso de um evento A, ou seja, repetindo o experimento e anotando se o resultado foi ou não um elemento de A, a medida que o número de realizações cresce chegaremos a uma aproximação da proporção do evento A em relação ao de não ocorrência do evento A, ou em relação ao todo. Devido a necessidade de muitas realizações, a definição anterior se tornava restritiva. Entretanto, com o advento dos computadores, esse não é mais um empecilho. Exibimos abaixo o gráfico do seguinte experimento.

Exemplo 1.2.1.

Considere uma urna com 10 bolas enumeradas de 1 a 10, e que desejamos saber a probabilidade do evento $A = \{1, 2\}$. Se repetirmos o experimento de Bernoulli anotando com 1 se a bola retirada for 1 ou 2 e 0 caso contrário, vemos que a proporção das bolas retiradas que estão em A. Uma simulação, nos dá o seguinte gráfico.

Figura 1.1: Experimento de Bernoulli 1



Fonte: Autoria própria

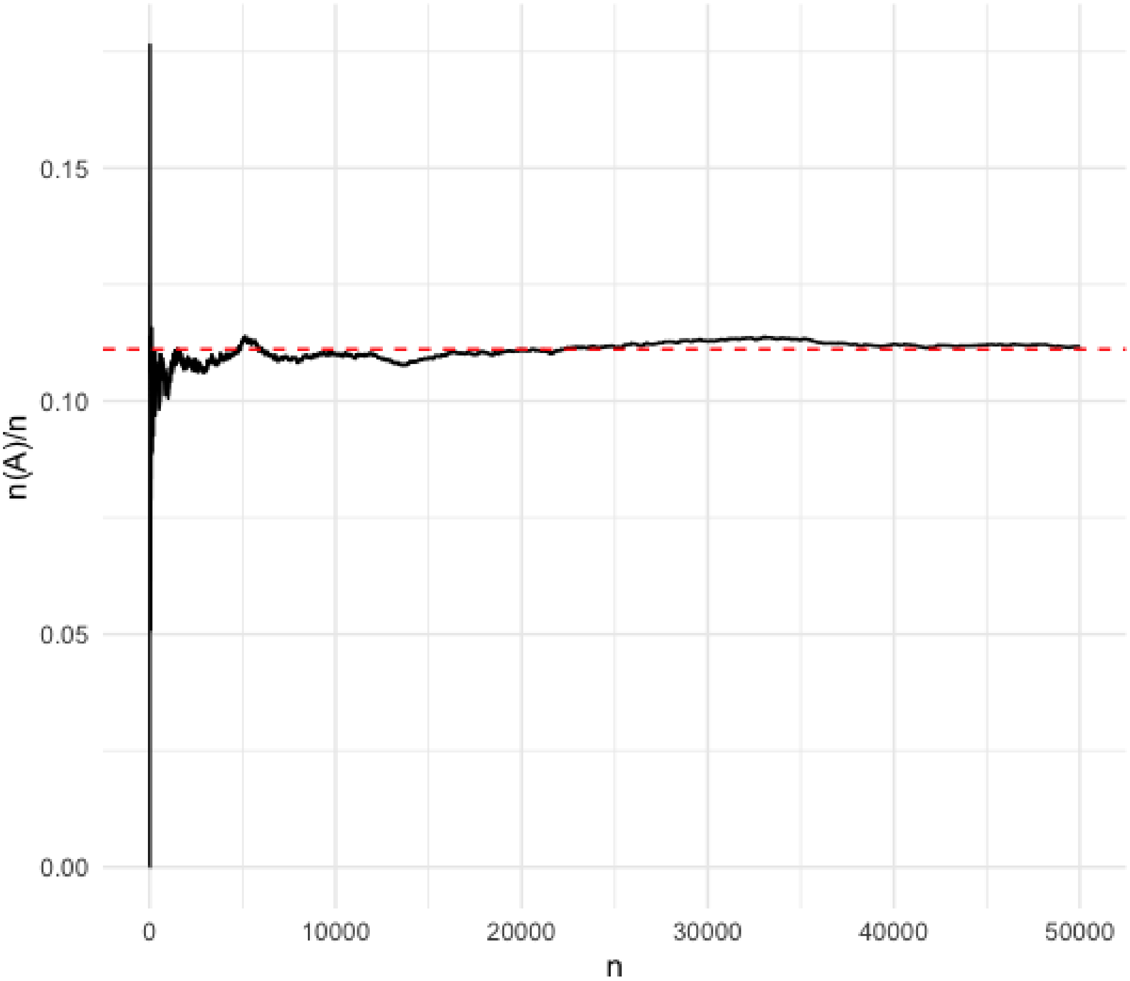
No experimento acima notamos que quanto maior o valor de n, a chance do evento A acontecer se aproxima mais de $0.2 = \dfrac{2}{10}$, usando a definição de probabilidade frequentista $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(A)}{n}$ é razoável concluir que a probabilidade será igual à $0,2 = \dfrac{2}{10}$.

Agora vamos fazer um exemplo um pouco diferente, supondo agora que exista diferença entre as bolas das urnas.

Exemplo 1.2.2.

Considere novamente uma urna com 10 bolas enumeradas de 1 a 10, e que desejamos saber a probabilidade do evento $A = \{1, 2\}$. Porém, nesse exemplo as bolas são de formatos diferentes. Note que mesmo as bolas sendo de tamanhos diferentes de modo que, de alguma forma, as bolas maiores sejam mais fáceis de ser retiradas, o experimento de Bernoulli continua sendo válido. É a lei forte dos grandes números em ação. Para vermos isso acontecendo, imagine que as bolas 1 e 2 tenham a metade da chance de serem retiradas que as demais. Fazendo o experimento de Bernoulli obteremos o seguinte gráfico.

Figura 1.2: Experimento de Bernoulli 2



Fonte: Autoria própria

No experimento acima notamos que quanto maior o valor de n a chance do evento A acontecer se aproxima mais de $0.1111 = \frac{1}{9}$, usando a definição de probabilidade frequentista $\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$ é razoável concluir que a probabilidade será igual à $0,11111 = \frac{1}{9}$.

As simulações dos Exemplos 1.2.1 e 1.2.2 foram feitas no programa RStudio versão 2022.07.1.

1.3 Definição Clássica de Probabilidade

No estudo realizado em Pereira (2020) fica claro que a definição mais comumente utilizada nos livros didáticos é a clássica, creditada ao matemático francês Laplace (1749-1827):

Se o espaço amostral Ω é finito e A é um evento, a probabilidade de A é definida por

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos totais}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

desde que cada cada evento elementar, ou seja, qualquer subconjunto unitário de Ω tenha a mesma chance de ocorrer. Aqui $n(A)$ representa o número de elementos do evento A.

Poincaré (1946) em seu livro Ciência e Hipótese discute a definição clássica de probabilidade quando escreve:

> A definição é bem simples. A probabilidade de um evento é a razão do número de casos favoráveis ao evento sobre o número total de casos possíveis. Um simples exemplo mostra quão incompleta esta definição é: Eu jogo dois dados. Qual é a probabilidade de se obter 6 em pelo menos um deles? Para cada dado temos 6 possíveis resultados; o número total de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$. O número de casos favoráveis é 11, a probabilidade é $\frac{11}{36}$.(Gould(2001)p.138)

Essa solução dada por Poincaré leva em consideração que, por exemplo, o resultado (1,2) é distinto do resultado (2,1), ou seja, sair a face 1 no primeiro dado e a face 2 no segundo dado é diferente de sair a face 2 no primeiro dado e a face 1 no segundo dado, conforme ilustramos na figura abaixo:

Figura 1.3: Espaço amostral lançamento de dois dados 1

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: Autoria própria

Na figura apresentada acima observamos os 36 casos no lançamento de dois dados distintos, e somente os casos: (1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5) são os que apresentaram 6 em pelo menos um deles, totalizando 11 casos. Por isso, Poincaré afirma que probabilidade de se obter 6 em pelo menos um deles é $\frac{11}{36}$.

Além disso, Poincaré destaca a seguinte situação:

> Esta é a solução correta, mas por que não podemos proceder como segue: Os números que aparecem nas faces ao jogarmos dois dados formam $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ diferentes combinações. Entre estas combinações, seis são favoráveis, a probabilidade é $\frac{6}{21}$.(Gould(2001),p.138)

Já nessa segunda solução apresentada, note que os eventos (1,2) e (2,1) não foram considerados distintos, eles representam o mesmo resultado: saiu a face 1 em um dos dados e a face 2 no outro dado, conforme ilustramos na tabela abaixo:

Figura 1.4: Espaço amostral lançamento de dois dados 2

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
		(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
			(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
				(4,4)	(4,5)	(4,6)
					(5,5)	(5,6)
						(6,6)

Fonte: Autoria própria

Nessa situação, temos 21 casos favoráveis no lançamento de dois dados, e somente os casos: (1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6) são os que apresentaram 6 em pelo menos um deles, totalizando 6 casos. Por isso, Poincaré afirma que probabilidade de se obter 6 em pelo menos um deles seria de $\frac{6}{21}$.

E Poincaré complementa:

> Agora porque o primeiro método de calcular o número de casos favoráveis legitima mais do que o segundo? Em qualquer caso não é a definição que nos responde. Somos obrigados então a completar a definição dizendo "... sobre o número total de casos possíveis, desde que os casos sejam igualmente prováveis.(Gould(2001)p.138)

Segundo Kline (1967), a definição clássica de probabilidade já era usada muito antes de Laplace, como podemos verificar no seu relato:

> Suponha que desejamos calcular a probabilidade de obter um três em um lançamento de um dado. Podemos recorrer à experiência, como tanta gente faz, e jogar um dado 100.000 vezes. Encontraríamos que o 3 aparece em aproximadamente um sexto dos lançamentos e concluir que a probabilidade de obter um 3 é $\frac{1}{6}$ (a abordagem de Bernoulli).(Kline,1967,p.524)

Contudo, recorrer à experiência como forma de determinar a probabilidade é difícil e algumas vezes não é possível.

Kline (1967) continua seu relato:

> Pascal (1623-1662) e Fermat (1607-1665) sugeriram a seguinte abordagem. No caso do lançamento de um dado, existem seis possíveis resultados (se excluirmos a possibilidade do dado repousar sobre um de suas arestas). Cada um desses resultados é igualmente provável, e desses seis, um é favorável ao lançamento que resulta em três. Portanto a probabilidade que o 3 apareça é $\frac{1}{6}$.Se estamos interessados na probabilidade que um 3 ou um 4 apareça na face superior do lançamento de um dado, ainda teremos seis possíveis resultados, mas agora dois de seis serão favoráveis. Neste caso, a abordagem de Pascal e Fermat levaria a conclusão que a probabilidade de obter um três ou um quatro é $\frac{2}{6}$. Se o problema fosse para calcular a probabilidade de não obter um três no lançamento de um dado a resposta seria $\frac{5}{6}$, porque nesse problema existem cinco resultados favoráveis dentre os seis possíveis.(Kline,1967,p.524)

Kline continua dizendo que, em geral, a definição de uma medida quantitativa da probabilidade é a seguinte: Suponha que de n resultados igualmente possíveis, m são favoráveis ao acontecimento de um certo evento. A probabilidade desse evento acontecer é $\frac{m}{n}$ e a probabilidade do evento não acontecer é $\frac{n-m}{n}$.

Desta definição geral de probabilidade segue que se nenhum resultado possível for favorável, isto é, se o evento for impossível, a probabilidade do evento deve ser $\frac{0}{n}$, ou 0. Se todos os n possíveis resultados forem favoráveis, isto é, o evento certo, a probabilidade seria $\frac{n}{n}$, ou 1. Portanto a medida numérica da probabilidade pode variar de 0 a 1, da impossibilidade à certeza.

Utilizando a definição de Laplace no Exemplo 1.2.1, vemos que todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer e, portanto: $P(A) = \frac{2}{10} = 0,2$.

Entretanto, no Exemplo 1.2.2 já não podemos usar a fórmula de Laplace para resolver a questão, pois existem eventos elementares com chances diferentes de acontecer.

Como Poincaré destacou, a fórmula de Laplace só é válida quando os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer.

Exemplo 1.3.1.

Um outro exemplo em que a definição clássica de probabilidade não pode ser aplicada é o seguinte.

Um casal quer ter dois filhos. O primeiro filho poderá ser do sexo masculino ou do sexo feminino. O segundo também poderá ser de um dos dois sexos. Sabendo que a chance de nascer um filho do sexo masculino é igual a de nascer um filho do sexo feminino, independentemente do sexo dos filhos já existentes. A probabilidade de nascer dois do sexo masculino, dois do sexo feminino e um casal, é igual?

Se considerarmos como na segunda explicação de Poicaré acima, que o evento nascer um homem primeiro e depois uma mulher (H,M) é o mesmo evento que nascer primeiro uma mulher e depois um homem (M,H), teremos três casos (H,H);(M,M);(H,M). Se imaginarmos que qualquer um desses eventos têm a mesma chance de ocorrência, então a probabilidade de cada um deles ocorrer é igual à $\frac{1}{3}$.

Porém, sabemos que nascer um homem primeiro e depois uma mulher (H,M) tem a mesma chance do caso de nascer primeiro uma mulher e depois um homem (M,H), entretanto eles são dois eventos diferentes. Ou seja, para o nascimento de dois filhos temos 4 possíveis casos (H,H);(H,M);(M,H);(M,M) e a chance de ocorrer dois filhos do sexo masculino seria $\frac{1}{4}$, chance de ocorrer dois filhos do sexo feminino seria $\frac{1}{4}$ e chance de ocorrer um casal seria $\frac{2}{4}$. Logo, A probabilidade de nascer dois do sexo masculino, dois do sexo feminino e um casal, não são iguais.

1.4 Definição Axiomática de Probabilidade

A definição axiomática da probabilidade foi desenvolvida por Kolmogorov e forneceu uma base matemática sólida a partir da qual toda a teoria de probabilidade pôde se desenvolver. Uma vez que nosso estudo está concentrado no ensino de probabilidade no ensino fundamental e no ensino médio, apresentaremos a definição de Kolmogorov adaptada a situação em que o espaço amostral Ω é finito.

Dado um espaço amostral Ω finito e a coleção dos subconjuntos de $\Omega,\mathcal{P}(\Omega)$ as partes de Ω, o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω, uma probabilidade é uma função $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ que a cada subconjunto A de Ω associa um número entre 0 e 1, e essa função satisfaz:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) Se $A_1, \ldots, A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ são eventos disjuntos então

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots . \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Ao se usar essa abordagem, evita-se a necessidade de se comprovar a equiprobabilidade do espaço amostral, que está sendo negligenciado por alguns autores.

Observação: No caso geral a condição (ii) é dada da seguinte forma

(ii') Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos disjuntos então

$$P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Voltando ao Exemplo 1.2.1, onde cada evento elementar tem a mesma chance de ocorrer, aplicando as propriedades (i) e (ii) da definição axiomática, temos que:

$$1 = P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}) = P(\{1\}) + P(\{2\})... + P(\{9\}) + P(\{10\})$$

$$\Rightarrow P(\{1\}) + P(\{2\})... + P(\{9\}) + P(\{10\}) = p + p + ...p + p = 10p$$

$$\Rightarrow 10p = 1$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{10}$$

como queremos saber a probabilidade de A,

$$P(A) = P(\{1,2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = p + p = 2p$$

$$\Rightarrow P(A) = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10}.$$

Já no Exemplo 1.2.2, sem a equiprobabilidade, aplicando as propriedades (i) e (ii) da definição axiomática, temos que:

$$1 = P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}) = P(\{1\}) + P(\{2\})... + P(\{9\}) + P(\{10\})$$

dado que a probabilidade de sair as bolas 1 ou 2 têm a metade da chance de ser retiradas que as demais

$$\Rightarrow P(\{1\}) + P(\{2\})... + P(\{9\}) + P(\{10\}) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + p + ...p + p = 9p$$

$$\Rightarrow 9p = 1$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{9}$$

como queremos saber a probabilidade de A,

$$P(A) = P(\{1,2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$$

.

$$\Rightarrow P(A) = p = \frac{1}{9}$$

Se o espaço amostral Ω possui n elementos, por exemplo, $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e todos os subconjuntos unitários têm a mesma probabilidade de ocorrer, devemos atribuir a cada evento unitário a probabilidade $\frac{1}{n}$, pois

$\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = ... = P(\{a_n\}) = p$, pela definição de probabilidade, temos

$$1 = P(\Omega) = P(\{a_1, a_2, ..., a_n\}) = P(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\})$$

$$1 = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + ... + P(\{a_n\})$$

$$1 = p + p + ... + p = np$$

$$p = \frac{1}{n}$$

Assim, na situação em que cada evento unitário tem a mesma chance de ocorrência, se um evento $A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_x}\}$ tem x elementos então

$$P(A) = P(\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\}) = \sum_{p=1}^{k} P(\{a_{i_p}\}) = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Isto é, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráreis ao evento e o número total de casos possíveis.

$$P = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}},$$

que é a definição de Laplace.

Portanto, quando os eventos unitários (que Morgado et al. (2020) chamam de eventos elementares) tem a mesma chance de ocorrência podemos calcular a probabilidade do evento A da seguinte forma

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Dizemos que um espaço amostral finito é **equiprovável** quando os eventos elementares (ou unitários) possuem probabilidades iguais de ocorrência. Por exemplo, ao jogar um dado honesto e observar o número que aparece, as chances de sair 1,2,3,4,5 ou 6 são iguais. Note que agora apareceu a palavra honesto, ela vai nos dizer que a probabilidade de cada evento elementar é igual.

É fato que a definição de probabilidade de Laplace só é válida quando os eventos são equiprováveis, mas equiprobabilidade não é uma hipótese realista. Como diz Kline (1967):

> A definição de probabilidade que estamos ilustrando é notavelmente simples e aparentemente de fácil aplicação. Suponha que alguém argumente, contudo, que a probabilidade de uma pessoa atravessar a rua em segurança é $\frac{1}{2}$, já que existem dois possíveis resultados: cruzar a rua com segurança ou sem segurança. Se esse argumento

> fosse forte, pessoas em grandes centros urbanos não poderiam esperar ter vidas longas. A falácia nesse argumento é que dois possíveis resultados, atravessar a rua em segurança ou não, não são igualmente prováveis.

Uma situação do nosso cotidiano em que os eventos são equiprováveis são alguns jogos de loteria. Vamos falar um pouco sobre esses jogos e destacar o mais famoso no Brasil: a mega-sena.

Os jogos de loteria estão presentes na vida do povo brasileiro desde 1784, quando aconteceu o primeiro registro de loteria brasileira na, então, capital de Minas Gerais, Vila Rica, atualmente chamada de Ouro Preto. A partir disso, começaram a surgir loterias em todo o país, fazendo sucesso até hoje. Desde 1961, as loterias brasileiras oficiais são administradas pela Caixa Econômica Federal. Atualmente, existem 10 modalidades de jogos, são elas: loteca, federal, lotofácil, lotomania, quina, dupla sena, timemania, mega-sena, dia de sorte e super sete. (XAVIER, 2021)

As loterias são tradicionalmente jogadas, e fazem parte de uma cultura econômica e social da vida de boa parte dos brasileiros. Milhões de brasileiros jogam nas loterias todos os anos, e eles bateram recorde de compra de loterias no ano de 2020, fazendo a Caixa arrecadar cerca de R$ 17,1 bilhões em apostas, superando o recorde de 2019 de R$ 16,7 bilhões. Sendo esse resultado o melhor já registrado em toda a história da Caixa Econômica Federal. A mega-sena foi considerada a favorita pelos jogadores, responsável por aproximadamente 40 % do total arrecadado. Em seguida, a lotofácil com cerca de 19 % e logo atrás a quina em torno de 17 % . (VIEIRA, 2021)

Agora vamos falar um pouco sobre a loteria mais popular do Brasil. A mega-sena, é uma loteria que geralmente paga milhões para o acertador dos 6 números sorteados. O prêmio bruto corresponde a 43,35% da arrecadação. Para jogar você deve marcar de 6 a 15 números dos 60 números disponíveis. A aposta mínima, de 6 números, custa 4,50 reais. Quanto mais números marcar, maior o preço da aposta. Utilizando a análise combinatória podemos calcular quantos jogos de 6 números são possíveis formar com os 60 números disponíveis. Precisamos somente calcular a combinação

$$\binom{60}{6} = 50.063.860$$

Considerando apenas as possibilidades de fazer jogos simples, temos que o conjunto de todos os possíveis jogos simples é dado por

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)/a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 \text{ e } a_i \in \{1, 2, ..., 60\}\}.$$

Note que a mega-sena tem 50.063.860 jogos simples possíveis, então a chance de ganhar fazendo um jogo apenas é 1 em 50.063.860, ou seja, probabilidade de ganhar na mega-sena é

$$P(\{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)\}) = \frac{1}{50.063.860}$$

qualquer que seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \Omega$. Observe que aqui o espaço amostral é equiprovável, pois a chance de qualquer jogo simples ser sorteado é a mesma, uma vez que estamos imaginando que a forma que as bolas são retiradas do globo utilizado no sorteio se dá de forma a não privilegiar nenhuma bola em particular.

1.4.1 Teste Aplicado: Definição Probabilidade

Em Pereira et al. (2020), nas várias dissertações e livros didáticos analisados, foi verificado que a fórmula de Laplace está sendo utilizada como a definição de probabilidade sem citar a necessidade do espaço amostral ser equiprovável, o que um é erro muito grave. Nesse mesmo trabalho foi apresentado o resultado de um teste aplicado a alunos tanto da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, bem como de escolas públicas e privadas das cidades de Natal e de Parnamirim, mais uma vez comprovando que a fórmula de Laplace é a definição de probabilidade que eles conhecem, mas o preocupante é que poucos estudantes se referiram à hipótese necessária de equiprobabilidade.

O teste envolvia outros assuntos da matemática, para que não ficasse caracterizado que a avalição se direcionava ao assunto probabilidade. Entre 5 questões aplicadas somente uma questão foi usada para avaliar os estudantes, a pergunta era: a probabilidade de um evento A é dada por $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ou seja, pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos totais? Os alunos tinham duas opções SIM ou NÃO, a resposta correta esperada apontava para a opção NÃO, pois não havia a informação de que o espaço era equiprovável. O levantamento coletado, entretanto, indicou que, do total de 252 respostas, houve 181 SIM $(71,83\%)$ e 71 NÃO $(28,17\%)$.

Com o intuito de repetir a experiência relatada em Pereira(2020) e obter um novo conjunto de dados que nos fornecesse a noção dos alunos sobre a definição de probabilidade, foi montado um teste apresentado a seguir, envolvendo também outros assuntos, para que não ficasse caracterizado, à primeira vista para os alunos, que a avaliação se direcionava ao assunto probabilidade. Sua resolução das questões não requeria cálculos e envolvia apenas conceitos básicos da matemática do ensino médio.

Executado durante o mês de julho de 2022 para os alunos do 2°ano e 3°ano do ensino médio do Instituto Federal do Rio Grande do Norte Campus Parelhas, o teste alcançou 119 alunos no total.

Visivelmente desprentensioso e simples, tinha como finalidade, detectar a percepção que os avaliados sabiam sobre as definições de probabilidade e equiprobabilidade.

O teste foi aplicado através de um formulário do Google Forms. O conteúdo do teste será reproduzido abaixo.

Assinale SIM ou NÃO em cada uma das questões abaixo.

1. Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, o delta de Bhaskara é calculado por $b^2 - 4ac$?

   ( ) SIM

( ) NÃO

2. O número 1, é um número primo?

   ( ) SIM

   ( ) NÃO

3. Para qualquer triângulo de lados $a > b > c$, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$?

   ( ) SIM

   ( ) NÃO

4. A probabilidade de um evento A é dada por $\frac{n(A)}{n(S)}$, ou seja, pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos totais?

   ( ) SIM

   ( ) NÃO

5. A área de um círculo é $2\pi R$, onde R é o raio do círculo??

   ( ) SIM

   ( ) NÃO

6. Ao lançarmos duas moedas, os resultados possíveis são duas caras, duas coroas ou uma cara e uma coroa. Então a probabilidade de ocorrência de qualquer um desses resultados é $\frac{1}{3}$?

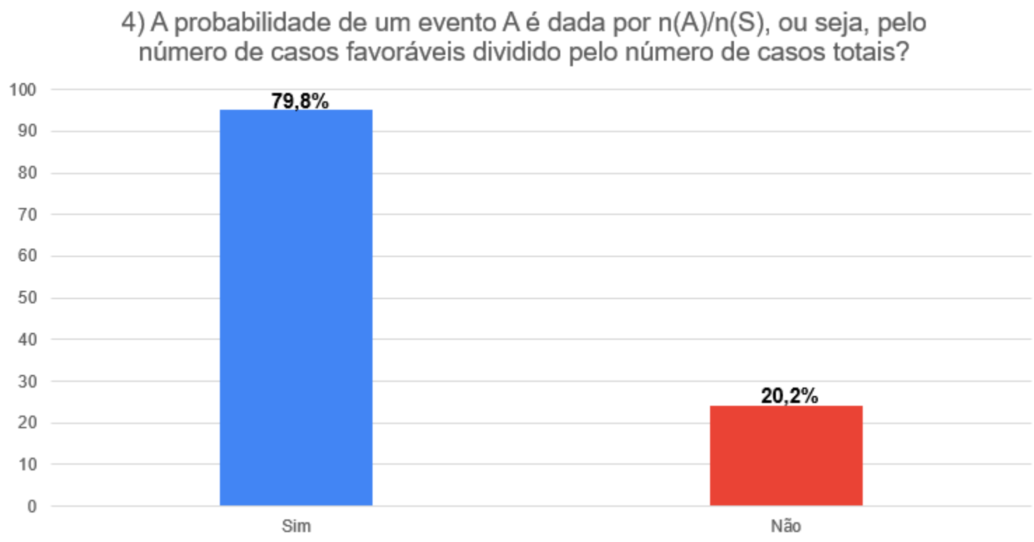
   ( ) SIM

   ( ) NÃO

Da análise do teste em seu todo, destacaremos apenas os aspectos referentes as questões 4 e 6. Vale destacar que não foi falado nada aos alunos sobre equiprobabilidade no espaço amostral.

Na questão 4 a resposta correta esperada apontava para opção NÃO, pois não havia a informação de que o espaço amostral era equiprovável. O levantamento coletado, entretanto, indicou que, do total de 119 respostas, houve 95 SIM $(78,9\%)$ e 24 NÃO $(20,2\%)$.

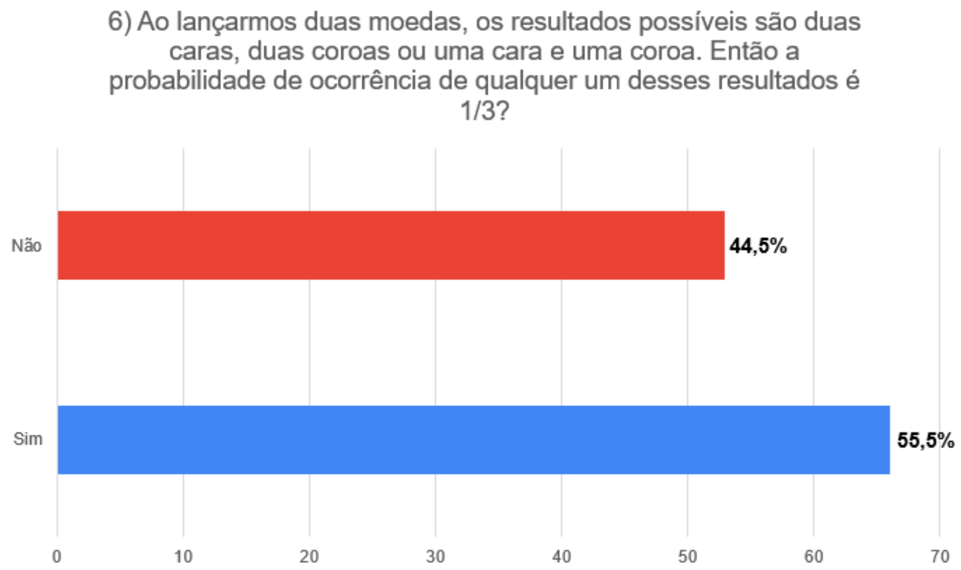
Figura 1.5: Gráfico - Questão 4



Fonte: Autoria própria

Na questão 6 a resposta correta esperada apontava para opção NÃO, pois no lançamento de duas moedas a chance de aparecer duas caras é $\frac{1}{4}$, a chance de aparecer duas coroas é $\frac{1}{4}$ e a chance de aparecer uma cara e uma coroa é $\frac{2}{4}$. O levantamento coletado, entretanto, indicou que, do total de 119 respostas, houve 66 SIM $(55,5\%)$ e 53 NÃO $(44,5\%)$. No próximo capítulo do nosso trabalho iremos resolver esse problema utilizando os conceitos de probabilidade que iremos apresentar mais a frente.

Figura 1.6: Gráfico - Questão 6



Fonte: Autoria própria

Diante disso, podemos observar que essa amostra experimental e a aplicada em Pereira el al.(2020) manisfesta certa tendência dos alunos considerarem o evento como inserido em um espaço amostral equiprovável, mesmo quando nada for dito a respeito.

Pelo motivo explicitado no parágrafo anterior, os autores propõem para o ensino da probabilidade, o uso da definição axiomática de probabilidade quando o espaço amostral é finito.

Exemplo 1.4.1.

No lançamento de uma dado não viciado (outra forma de dizer honesto), qual a probabilidade de sair um número par?

Ao jogar um dado em uma superfície plana, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Consideremos o evento: "sair um número par na face voltada para cima", logo o evento desejado é $E = \{2, 4, 6\}$. Dizemos que o evento E ocorreu se tiver ocorrido a face 2, 4 ou 6 na face voltada para cima.

Seja um A_1 = sair número 1 na face voltada para cima. A_2 = sair número 2 na face voltada para cima. A_3 = sair número 3 na face voltada para cima. A_4 = sair número 4 na face voltada para cima. A_5 = sair número 5 na face voltada para cima. A_6 = sair número 6 na face voltada para cima. Assim, $E = \{2, 4, 6\} = A_2 \cup A_4 \cup A_6$. Como o dado é honesto, a chance de sair um número na face voltada pra cima é igual para qualquer um dos 6 casos. Logo o espaço amostral do nosso exemplo é equiprovável.

Perceba que os eventos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 são disjuntos então pelas propriedades (i) e (ii),

$$P(\Omega) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 1$$

sabemos que

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6}$$

note também que

$$E = \{2, 4, 6\} = A_2 \cup A_4 \cup A_6$$

logo,

$$P(E) = P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Outra forma de resolver o nosso problema seria usando a informação de que o espaço amostral é equiprovável. Se temos equiprobabilidade, então

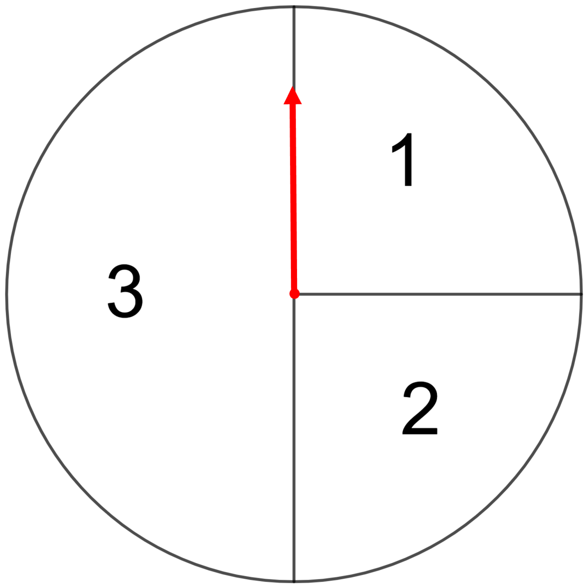
$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{3}{6}$$

Exemplo 1.4.2.

Considere a roleta indicada na figura abaixo. Toda vez que a seta gira, sempre para em um dos setores circulares 1, 2 ou 3. Sabe-se que as áreas dos setores circulares definidos por 1 e 2 são iguais e que a área do setor circular 3 é o dobro da área do setor circular 1. Qual a probabilidade da seta cair no setor circular número 1?

Figura 1.7: Roleta 1



Fonte: Autoria própria

Note que a chance da seta parar na roleta no número 1,2 ou 3 não são necessariamente todas iguais. Podemos observar que o nosso espaço amostral é não equiprovável, diferente do exemplo anterior.

$\Omega = \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(\Omega) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$

Sabemos que $P(\{1\}) = P(\{2\}) = k$ e $P(\{3\}) = 2P(\{1\}) = 2k$

$$\Rightarrow P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$$

$$\Rightarrow k + k + 2k = 1$$

$$\Rightarrow 4k = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

Portanto,

$$P(\{1\}) = k = \frac{1}{4}$$

Note que nesse exemplo não podemos utilizar a definição clássica uma vez que os eventos elementares não tem a mesma chance de ocorrência.

Exemplo 1.4.3.

Numa moeda "viciada", a probabilidade de ocorrer cara no lançamento é quatro vezes a probabilidade de ocorrer coroa. Qual probabilidade de ocorrer cara no lançamento dessa moeda?

Note que o espaço amostral do nosso experimento aleatório é não equiprovável, pois a chance aparecer cara no lançamento é diferente de aparecer coroa.

$\Omega = \{\text{cara,coroa}\}$ nosso espaço não é equiprovável.

$P(\Omega) = P(\{\text{cara}\} \cup \{\text{coroa}\}) = P(\{\text{cara}\}) + P(\{\text{coroa}\}) = 1$

$$P(\{\text{cara}\}) = 4P(\{\text{coroa}\})$$

$$P(\{\text{cara}\}) + P(\{\text{coroa}\}) = 1$$

$$\Rightarrow 4P(\{\text{coroa}\}) + 1P(\{\text{cara}\}) = 1$$

$$\Rightarrow 5P(\{\text{coroa}\}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\{\text{coroa}\}) = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P(\{\text{cara}\}) + P(\{\text{coroa}\}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\{\text{cara}\}) + \frac{1}{5} = 1$$

$$\Rightarrow P(\{\text{cara}\}) = 1 - \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P(\{\text{cara}\}) = \frac{4}{5}.$$

2 Tópicos de Probabilidade

Nesse trabalho analisamos os prejuízos que podemos ter ao assumirmos equiprobabilidade quando ela não existe. Para isso usamos como ferramenta a esperança matemática, o erro médio quadrático, etc. Para que possamos desenvolver os tópicos desejados precisamos definir o que usaremos.

2.1 Probabilidade Condicional

Nesta seção, estudamos a probabilidade condicional. Vamos mostrar que uma informação adicional sobre o experimento que estivermos realizando pode alterar a probabilidade inicial que tínhamos sobre um determinado evento em estudo. Em muitas situações não é possível realizarmos um experimento até o fim, sendo necessária a colaboração de outra pessoa, a qual pode não saber a informação específica que desejamos e nos informa apenas sobre o resultado. Com essa informação adicional, o resultado desejado sofre alteração na sua chance inicial de ocorrer.

Suponha que você está jogando com alguns amigos e o jogo é adivinhar o resultado no lançamento de um dado. Você aposta que o resultado será par, ou seja, que o evento $A = \{\text{o resultado é par}\}$ acontecerá. Sabemos que o dado é honesto, ou seja, que cada face do dado (evento elementar) tem a mesma chance de ocorrer. Logo a probabilidade de você ganhar é:

$$P(A) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Imagine que você, então, lança o dado, mas nesse exato momento o telefone toca e você vai atendê-lo antes de ver o resultado do lançamento. Dentre as muitas situações prováveis, destacamos as que seguem.

Situação 1: Depois de algum tempo, seus colegas gritam que o resultado foi maior que 3. Qual a probabilidade de você ainda acertar, ou seja, de o resultado ser um número par? Você pode ter pensado: eu tinha seis casos possíveis e três favoráveis, então, minha chance era $\frac{3}{6}$; agora, tenho três casos possíveis (já que alguém falou que o resultado foi maior que 3 $(\{4,5,6\})$ e, dentre estes, me restaram dois favoráveis, $(\{4,6\})$. Portanto, três casos possíveis e dois casos favoráveis, então, minha chance é $\frac{2}{3}$.

Situação 2: Depois de algum tempo, seus colegas gritam que o resultado foi 4.

Qual a probabilidade de você ainda acertar, ou seja, do resultado ser um número par? Desenvolvendo o mesmo raciocínio usado na situação 1, você chega à conclusão de que sua probabilidade de ganhar será 1.

Situação 3: Após algum tempo, seus colegas gritam que o resultado foi 3. Usando o mesmo raciocínio das situações anteriores, conclui-se que a probabilidade de você ainda acertar, ou seja, de o resultado ser um número par será 0.

O que está acontecendo no final das contas? Uma informação adicional pode mudar tanto assim nossa probabilidade de ganhar? O resultado está condicionado a essa informação adicional? Na interpretação das três situações estudadas, aconteceram alguns fatos que merecem um olhar mais atento.

Inicialmente, quando modelamos um problema, precisamos ter bem definido o espaço amostral Ω, o conjunto $\mathcal{A}$ formado por todos os eventos possíveis e uma função que meça esses eventos, a função probabilidade P. Quando calculamos a probabilidade, observamos que os possíveis resultados se transformaram em $(\{4,5,6\})$ na situação 1, $(\{4\})$ na situação 2 e $(\{3\})$ na situação 3. Isso está indicando que o espaço amostral está mudando? Isso não pode acontecer! Então, como estudar esse tipo de situação?

2.1.1 Definição

Para estudar este tópico, precisamos definir uma probabilidade que leve em consideração a informação adicional dada sem alterar o espaço de probabilidade que construímos ao modelar o problema original.

Sejam dois eventos A e B tais que $P(A) > 0$. Define-se a **probabilidade condicional** de B dado A, representada por $P(B \mid A)$, como sendo

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Se $P(A) = 0$, definimos $P(B \mid A) = 0$.

Aplicando essa definição às situações anteriores 1, 2 e 3 temos que o conjunto B, em todas as situações é o mesmo, ou seja, $B = \{2,4,6\}$.

Situação 1: $A = \{4,5,6\}$ cuja probabilidade é $P(A) = \dfrac{1}{2} > 0$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\})}{P(\{4,5,6\})} = \frac{P(\{4,6\})}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Situação 2: $A = \{4\}$ cuja probabilidade é $P(A) = \dfrac{1}{6} > 0$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{2,4,6\} \cap \{4\})}{P(\{4\})} = \frac{P(\{4\})}{\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$$

Situação 3: $A = \{3\}$ cuja probabilidade é $P(A) = \dfrac{1}{6} > 0$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{2,4,6\} \cap \{3\})}{P(\{3\})} = \frac{P(\varnothing)}{\frac{1}{6}} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0$$

Quem mede a chance de um evento ocorrer ou não é a função probabilidade. Então, chegamos a conclusão que a probabilidade condicional, dado um evento de probabilidade positiva, é também uma função probabilidade. Em outras palavras, dado um evento A tal que $P(A) > 0$, a função $P(\cdot \mid A) : \mathcal{A} \to [0,1]$ é um função de probabilidade.

Concluímos que o nosso experimento inicial de lançar um dado honesto e observar o número que aparece na face é um experimento em um espaço equiprovável, porém após uma informação adicional em relação ao resultado obtido no lançamento podemos ter novas situações onde as chances de ocorrer eventos elementares não são mais iguais.

Exemplo 2.1.1.

Considere a Tabela 2.1, em que contém um total de 220 professores, sendo alguns deles de matemática e outros português, e também com as nacionalidades brasileira e argentina.

Tabela 2.1: Exemplo 2.1.1 - Probabilidade condicional

	Matemática (M)	Português (P)	Total
Brasileiro (B)	70	50	120
Argentino (A)	30	70	100
Total	100	120	220

Fonte: Autoria própria

Considere que cada um desses professores tem a mesma probabilidade de ser escolhido, ou seja, trata-se de um espaço amostral equiprovável. Dessa forma, escolhendo-se um professor, ao acaso, desse grupo, qual a probabilidade de ele ser:

a) Professor de matemática?

b) Professor de matemática, sabendo que é argentino?

c) Argentino, sabendo que é professor de matemática?

d) Professor de português, sabendo que é brasileiro?

No item a), tem-se 100 professores de matemática em um total de 220 professores. Como o espaço amostral é equiprovável podemos aplicar a definição de Laplace

$$P(M) = \frac{100}{220} = \frac{5}{11}.$$

No item b), existe uma informação adicional em comparação ao item anterior, pois agora, além de calcular a probabilidade de ser professor de matemática, esse professor deve estar no grupo dos argentinos. Em primeiro instante, algumas pessoas podem achar que essas perguntas são idênticas, mas na verdade não são. A mensagem a mais fornecida no segundo item significa dizer que o novo espaço amostral não é mais aquele de 220 professores, e sim um espaço amostral "reduzido" com 100 professores argentinos. Vamos resolver o item b) usando probabilidade condicional

$$P(M \mid A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)}.$$

$$\Rightarrow P(M \mid A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}.$$

Vamos resolver o item c) aplicando a mesma fórmula

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}.$$

$$\Rightarrow P(A \mid M) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}.$$

Observe que o resultado do item b e do item c foram iguais, será que isto sempre vai acontecer? A resposta é não. Nesse caso como podemos perceber a quantidade de professores de matemática e de argentinos é igual a 100, essa peculiaridade faz com que as probabilidades do item b e item c sejam as mesmas. Vamos resolver a mesma situação para os brasileiros e observar que as respostas serão diferentes, pois a quantidade de brasileiros é diferente da quantidade de matemáticos.

$$P(M \mid B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)}.$$

$$\Rightarrow P(M \mid B) = \frac{70}{120} = \frac{7}{12}.$$

$$P(B \mid M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)}.$$

$$\Rightarrow P(A \mid M) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}.$$

No item d) aplicando a fórmula da probabilidade condicional temos

$$P(P \mid B) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)}.$$

$$\Rightarrow P(P \mid B) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.$$

Exemplo 2.1.2.

Consideremos duas extrações de duas bolas de uma urna contendo uma bola branca e duas bolas pretas, e definamos os eventos B_1: obter bola branca na primeira extração e B_2: obter bola branca na segunda extração. Analisaremos os dois casos, de as extrações serem feitas com ou sem reposição.

No caso com reposição, antes de cada extração, conhecemos com certeza a configuração da urna, segundo a qual $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{3}$. Sendo assim, a informação sobre o resultado de uma das extrações não altera a probabilidade sobre o resultado da outra extração. Dizemos nessa situação que os eventos B_1 e B_2 são **eventos independentes**, ou seja, a informação da ocorrência de B_1 não altera a probabilidade da ocorrência de B_1. Isto é,

$$P(B_2 \mid B_1) = P(B_2) = \frac{1}{3} \text{ e } P(B_1 \mid B_2) = P(B_1) = \frac{1}{3}.$$

Se as extrações forem sem reposição, então não temos certeza da composição da urna antes da segunda extração. Neste caso, a informação adicional sobre um dos eventos pode alterar a probabilidade do outro. Desse modo, para a primeira extração, sabemos que $P(B_1) = \frac{1}{3}$. Agora, se ficarmos sabendo que a segunda bola é branca, ou seja, sabendo que B_2 ocorre, então, claramente, a primeira bola não pode ter sido branca. Isto é,

$$P(B_1 \mid B_2) = 0 \neq P(B_1).$$

A situação simétrica ocorre se sabemos ou supomos que a primeira bola é branca,

$$P(B_2 \mid B_1) = 0 \neq P(B_2).$$

2.2 Váriáveis Aleatórias

Segundo Rifo (2021) quando observamos a execução de um experimento aleatório, geralmente estamos interessados em explorar uma ou mais características numéricas dos resultados possíveis. Rifo (2021, p.50) nos cita um exemplo,

> em um estudo sobre saúde pública, um questionário sobre o estado de saúde individual tipicamente traz questões com diversos tipos de variáveis, númericas ou não. Por exemplo, dentre as não numéricas, pode haver questões sobre sexo, região onde mora, estado civil, nível de sedentarismo (baixo, médio ou alto), nível de escolaridade (nenhuma, fundamental, médio, superior), etc. Dentre as numéricas, podemos considerar idade, número de filhos, peso, altura, níveis de colesterol, pressão sanguínea sistólica e diastólica, etc.

Observe que muitas dessas características podem estar em ambas as categorias, e também podem ser relacionadas entre duas ou mais variáveis.

De acordo com Dantas (1997), os eventos que ocorrem quando se realizam experimentos aleatórios variam a cada execução dos mesmos, também variarão os valores númericos que lhes são associados. Em alguns experimentos os resultados já são descritos numericamente; no Exemplo 1.2.1 se observarmos o número da bola que será retirada da urna, será um número inteiro de 1 a 10; no Exemplo 1.4.2 sabemos que a roleta irá parar em um número inteiro de 1 a 3; no exemplo citado por Poincaré o número que aparece na face superior de um dado é sempre um número inteiro de 1 a 6; a quantidade de mudas de plantas que irão nascer em uma plantação é uma quantidade inteira não negativa, e se observarmos o tempo de duração de uma ligação de celular, é um número real não negativo.

No entanto, em uma grande quantidade de situações, os elementos do espaço amostral não são expressos numericamente. No Exemplo 1.3.1 o gênero do homem é representado pela letra H e da mulher pela letra M, neste caso nosso espaço amostral é o conjunto $\{HH, MM, HM, MH\}$. No Exemplo 1.4.3 do lançamento de uma moeda, destacamos cara (c) ou coroa (k), nosso espaço amostral neste caso é o conjunto $\{c, k\}$. Na maioria das vezes modelamos via uma função que associa a cada elemento do espaço amostral, ou cada possível resultado, a um número real.

Exemplo 2.2.1.

Consideremos que uma moeda honesta é lançada duas vezes. Seja X a função definida no espaço amostral que a cada elemento do espaço associa o número de caras nos dois lançamentos. Temos:

Tabela 2.2: Exemplo 2.2.1 - Lançamento de duas moedas

Espaço Amostral	Valores de X
cc	2
ck	1
kc	1
kk	0

Fonte: Autoria própria

A correspondência entre os elementos do espaço amostral e os valores da variável X também podem ser expressas da seguinte maneira:

$X(cc) = 2$, $X(ck) = 1$, $X(kc) = 1$, $X(kk) = 0$

2.2.1 Definição Variáveis aleatórias

Neste trabalho usaremos apenas variáveis aleatórias discretas por esse motivo definiremos apenas esse tipo de função. Aproveitamos para lembrar que quando Ω é finito o $\mathcal{A}$ é o conjunto das partes de Ω.

Uma **variável aleatória discreta** em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, onde Ω é finito, $\mathcal{A}$ é o conjunto das partes de Ω e P é uma função de probabilidade, é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}, \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

No Exemplo 1.4.3 do lançamento de uma moeda, onde

$$\Omega = \{c, k\} \text{ e } \mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega, \{c\}\ , \{k\}\}\text{e } P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1],$$

defina a função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ da seguinte forma: $X(c) = 1$ e $X(k) = 0$. Vamos calcular as imagens inversas pela váriável aleatória X dos intervalos do tipo $(-\infty, x]$,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{w \in \Omega / X(w) \in (-\infty, x]\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\}.$$

Note que X só assume os valores 0 e 1, assim se $x < 0$, temos que

$$\{w \in \Omega / X(w) \leq x\}$$

ou seja, são os pontos de Ω em que X assume valores menores que zero. Não existe tais pontos, ou seja, para $x < 0$ temos que

$$\{w \in \Omega / X(w) \leq x\} = \varnothing \in \mathcal{A}.$$

Para $0 \leq x < 1$ temos que

$$\{w \in \Omega / X(w) \leq x\} = \{w \in \Omega / X(w) = 0\} = \{k\} \in \mathcal{A}.$$

Para $1 \leq x$ temos que

$$\{w \in \Omega / X(w) \leq x\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq 1\} = \{c, k\} = \Omega \in \mathcal{A}.$$

Vimos que se $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória, então

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}.$$

Por que isso é importante? Queremos ser capazes de medir a probabilidade de X assumir certos valores, por exemplo,

$$P(\{w \in \Omega / X(w) \in (a, b)\}) = P(X^{-1}((a, b))).$$

Por X ser uma variável aleatória temos que $X^{-1}((a,b)) \in \mathcal{A}$ e portanto podemos calcular a probabilidade acima.

Seja X uma variável aleatória que assume apenas dois valores $\{a, b\}$ onde a probabilidade dela assumir o valor a é igual a p (e portanto a probabilidade dela assumir o valor b é $1 - p$). Em outras palavras, $Im(X) = \{a, b\}$ em que

$$P(X = a) = p \text{ e } P(X = b) = 1 - p.$$

Diante disso, podemos elaborar uma tabela que nos apresenta as informações da variável aleatória X.

Tabela 2.3: Variável aleatória X

X	$P(X)$
a	p
b	$1-p$

Fonte: Autoria própria

Esta tabela é chamada distribuição da variável aleatória X.

Variáveis aleatórias que assumem apenas dois valores, são usadas para modelar problemas que envolvem respostas dicotômicas: V ou F, sucesso ou fracasso, funcionando ou quebrado, etc. Quando é esse o caso, usamos o valor 0 para associar ao fracasso e 1 para associar ao sucesso.

Se a probabilidade de sucesso for p, temos a distribuição dada por

Tabela 2.4: Variável aleatória X

X	$P(X)$
1	p
0	$1-p$

Fonte: Autoria própria

Vamos determinar a distribuição de probabilidade da variável aleatória X do Exemplo 2.2.1. Para cada valor de X determinamos os pontos amostrais em que X é igual a esse valor, em outras palavras determinamos a imagem inversa de cada valor de X.

Tabela 2.5: Variável aleatória X - Exemplo 2.2.1

Valores de X	Imagem inversa	Probabilidades
0	$\{kk\}$	$\frac{1}{4}$
1	$\{ck\ , kc\}$	$\frac{2}{4}$
2	$\{cc\}$	$\frac{1}{4}$

Fonte: Autoria própria

Os valores das probabilidades, na tabela acima, são obtidos da seguinte maneira:

$$P(X = 0) = P(X^{-1}(\{0\})) = P(\{kk\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{ck\} \cup \{kc\}) = P(\{ck\}) + P(\{kc\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$P(X = 2) = P(X^{-1}(\{2\})) = P(\{cc\}) = \frac{1}{4}$$

Na prática, investigar um fenômeno aleatório significa estudar o comportamento de uma variável aleatória associada a ele, e tal comportamento é descrito através da sua distribuição de probabilidade.

A distribuição de probabilidade de uma v.a. X é uma função P_X que associa a cada subconjunto $\{i\}$ da imagem da v.a. X, a probabilidade do evento cuja imagem pela v.a. X é i, ou seja,

$$P_X(\{i\}) = P(\{w \in \Omega / X(w) \in \{i\}\}) = P(\{w \in \Omega / X(w) = i\}),$$

também denotado por $P(X = i)$.

Para a v.a. definida no Exemplo 2.2.1, que assume os valores 0, 1 e 2, a função de distribuição é assim calculada:

i) $P_X(\{0\}) = P(X = 0) = P(\{kk\}) = \frac{1}{4}$;

ii) $P_X(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{ck\}) + P(\{kc\}) = \frac{2}{4}$;

iii) $P_X(\{2\}) = P(X = 2) = P(\{cc\}) = \frac{1}{4}$

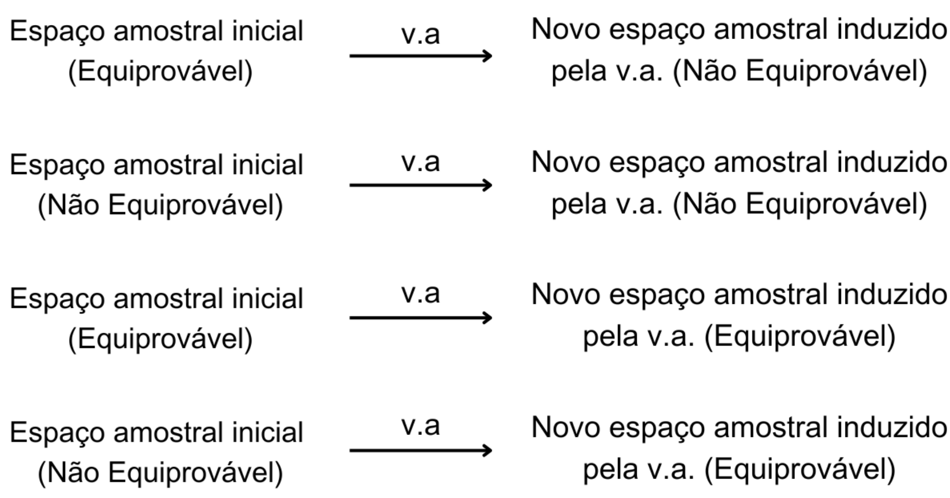
O valor $P_X(\{0\})$ significa a probabilidade de, ao lançar uma moeda, não se obter nenhuma cara. De maneira geral, P_X é uma função de probabilidade definida no conjunto dos subconjuntos da $Im(X) = \{0, 1, 2\}$. Desta forma, a v.a. X induz um novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1, 2\}$ com uma nova função de probabilidade, a P_X. É interessante notar, pelos cálculos anteriores, que os eventos elementares $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2\}$, não tem mais a mesma chance de ocorrer. Assim, apesar de $\Omega = \{kk, ck, kc, cc\}$ ser equiprovável, o novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1, 2\}$ não é equiprovável. Portanto, não se pode usar Laplace e afirmar que $P_X(\{0\}) = P_X(\{1\}) = P_X(\{3\}) = \frac{1}{3}$.

Confirmando assim que a questão 6 do teste aplicado, comentado no Capítulo 1 deste trabalho, tem como correta a resposta não, como foi provado acima.

De maneira geral, dado um experimento aleatório tem-se inicialmente um conjunto formado por três elementos: o espaço amostral Ω, a coleção das partes de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, e uma probabilidade P. Essa terna $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ é chamada espaço de probabilidade. Ao se modelar o experimento aleatório por uma v.a. X, obtém-se um novo espaço de probabilidade, o **espaço de probabilidade** induzido: $(Im(X), \mathcal{P}(Im(X)), P_X)$. Foi visto no exemplo anterior, que o espaço de probabilidade induzido pode não preservar a equiprobabilidade do espaço de probabilidade inicial.

Apresentaremos agora quatro exemplos onde trabalhamos todas as possibilidades quando modelamos um experimento aleatório por uma v.a. X, e obtemos um novo espaço de probabilidade, que pode ser equiprovável ou não, dependendo da função que foi definida. O esquema abaixo mostra as situações que iremos apresentar.

Figura 2.1: Equiprovável x Não Equiprovável



Fonte: Autoria própria

Exemplo 2.2.2.

No lançamento de dois dados D_1 e D_2, distintos e não viciados, qual a probabilidade da soma das faces observadas ser 3?

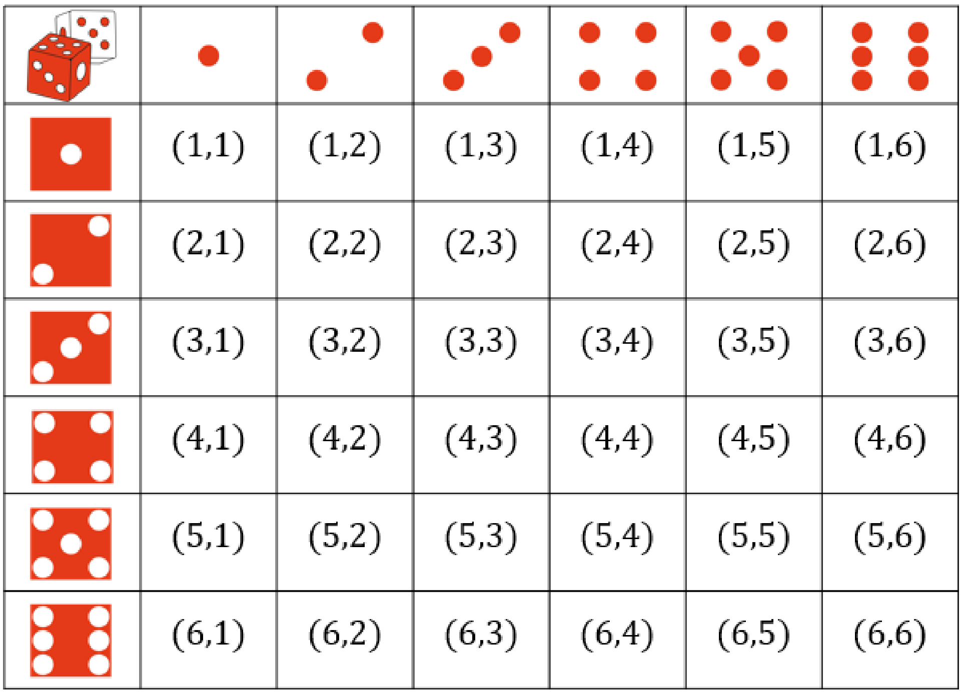
Antes de iniciamos a resolução desse exemplo, vamos definir a seguinte variável aleatória X : a soma das faces observadas no lançamento de dois dados

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(d_1, d_2) \to d_1 + d_2 = X(d_1, d_2),$$

onde nosso espaço amostral será todas as possibilidades de todos os pares de números dos dados. Como temos 6 possibilidades $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para cada dado, nosso espaço amostral será o seguinte:

Figura 2.2: Espaço amostral lançamento de dois dados 3



	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: Autoria própria

O número de elementos do nosso espaço amostral será 36, ou seja, $n(\Omega) = 36$, podemos perceber que para cada dado a chance de sair um número de 1 a 6 é igual a $\frac{1}{6}$. No lançamento de dois dados o número de casos possíveis é $6 \cdot 6 = 36$ e a probabilidade de cada um desses casos ocorrer é a mesma, logo nosso espaço amostral é equiprovável.

$$\Rightarrow P(\{(d_1, d_2)\}) = \frac{1}{36}.$$

Para respondermos a pergunta do Exemplo 2.2.2, precisamos calcular $P(X = 3)$, ou seja, calcular a probabilidade da soma das faces observadas ser 3.

$$P_X(\{3\}) = P(X = 3) = P(X^{-1}\{3\}) = P(\{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\})$$

$$P_X(\{3\}) = P(\{(1, 2)\}) + P(\{(2, 1)\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P_X(\{3\}) = P(X = 3) = \frac{2}{36}.$$

Diante disso, podemos concluir que a probabilidade da soma das faces observadas ser 3 é igual a $\dfrac{2}{36}$.

Para a v.a. definida no Exemplo 2.2.2, que assume os valores 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, a função de distribuição é assim calculada:

$$P_X(\{2\}) = P(X = 2) = P(X^{-1}\{2\}) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}.$$

$$P_X(\{3\}) = P(X = 3) = P(X^{-1}\{3\}) = P(\{(1,2)\} \cup \{(2,1)\})$$

$$P_X(\{3\}) = P(\{(1,2)\}) + P(\{(2,1)\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$\Rightarrow P_X(\{3\}) = P(X = 3) = \frac{2}{36}.$$

$$P_X(\{4\}) = P(X = 4) = P(X^{-1}\{4\}) = P(\{(1,3)\} \cup \{(2,3)\} \cup \{(3,1)\})$$

$$P_X(\{4\}) = P(\{(1,3)\}) + P(\{(2,2)\}) + P(\{(3,1)\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$
$$\Rightarrow P_X(\{4\}) = P(X = 4) = \frac{3}{36}.$$

De maneira análoga ao que fizemos para 2,3 e 4 podemos fazer para os outros valores assumidos pela nossa v.a. X, na Tabela 2.6. apresentamos todos os pontos amostrais de X, ou seja, determinamos a imagem inversa de cada valor de X.

Tabela 2.6: Exemplo 2.2.2 - Lançamento de dois dados distintos

Valores de X	Imagem Inversa	Probabilidades
2	$\{(1,1)\}$	$\frac{1}{36}$
3	$\{(1,2),(2,1)\}$	$\frac{2}{36}$
4	$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$\frac{3}{36}$
5	$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$	$\frac{4}{36}$
6	$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$	$\frac{5}{36}$
7	$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$	$\frac{6}{36}$
8	$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(5,2)\}$	$\frac{5}{36}$
9	$\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$	$\frac{4}{36}$
10	$\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$	$\frac{3}{36}$
11	$\{(5,6),(6,5)\}$	$\frac{2}{36}$
12	$\{(6,6)\}$	$\frac{1}{36}$

Fonte: Autoria própria

O valor $P_X(\{2\})$ significa a probabilidade de, ao lançar dois dados distintos a soma das duas faces ser igual a 2. De maneira geral, P_X é uma função de probabilidade definida no conjunto dos subconjuntos da $Im(X) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Desta forma, a v.a. X induz um novo espaço amostral $Im(X) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ com uma nova função de probabilidade, a P_X. É interessante notar, pelos cálculos anteriores, que os eventos elementares $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$, $\{11\}$, $\{12\}$ não têm mais a mesma chance de ocorrer. Assim, apesar de

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), ..., (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

ser equiprovável, o novo espaço amostral $Im(X) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ não é equiprovável. Portanto, não se pode usar Laplace e afirmar que

$$P_X(\{2\}) = P_X(\{3\}) = P_X(\{4\}) = P_X(\{5\}) = ... = P_X(\{10\}) = P_X(\{11\}) = P_X(\{12\}) = \frac{1}{11}.$$

Exemplo 2.2.3.

Considere o experimento aleatório que consiste em extrair duas bolas com reposição de uma urna com três bolas vermelhas (V) e duas bolas brancas (B). O espaço amostral associado a esse experimento é:

$$\Omega = \{(V, V), (V, B), (B, V), (B, B)\}$$

Podemos definir a variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{Z}$, que a cada elemento de Ω associa o número de bolas vermelhas obtidas nas duas retiradas, ou seja,

$$X((B, B)) = 0,\ X((B, V)) = 1,\ X((V, B)) = 1,\ X((V, V)) = 2.$$

Para a v.a. definida no Exemplo 2.2.3, que assume os valores 0, 1 e 2, a função de distribuição é assim calculada:

i) $P_X(\{0\}) = P(X = 0) = P(\{(B, B)\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$;

ii) $P_X(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{(B, V)\}) + P(\{(V, B)\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$;

iii) $P_X(\{2\}) = P(X = 2) = P(\{(V, V)\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

O valor $P_X(\{0\})$ significa a probabilidade de, ao extrair duas bolas com reposição de uma urna com três bolas vermelhas (V) e duas bolas brancas (B), não se obter bola vermelha. De maneira geral, P_X é uma função de probabilidade definida no conjunto dos subconjuntos da $Im(X) = \{0, 1, 2\}$. Desta forma, a v.a. X induz um novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1, 2\}$ com uma nova função de probabilidade P_X. É interessante notar, pelos cálculos anteriores, que os eventos elementares $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2\}$, não tem mais a mesma chance de ocorrer. Assim como o $\Omega = \{(B, B), (B, V), (V, B), (V, V)\}$ não é equiprovável, o novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1, 2\}$ também não é equiprovável. Portanto, não se pode usar Laplace e afirmar que $P_X(\{0\}) = P_X(\{1\}) = P_X(\{2\}) = \dfrac{1}{3}$.

Exemplo 2.2.4.

Considere agora o seguinte experimento aleatório: será sorteado um número de uma rifa de 100 bilhetes numerados de 1 a 100 de mesmo formato. O espaço amostral associado a esse experimento é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 97, 98, 99, 100\}$$

Figura 2.3: Bilhete rifa

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Autoria própria

Note que Ω é equiprovável. Podemos definir a variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{N}$, que cada elemento de Ω associa com a paridade do bilhete sorteado da seguinte forma para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq n \leq 50$:

$$X(2n) = 0$$

$$X(2n - 1) = 1$$

essa v.a assume os valores 0 (se for par) e 1 (se for ímpar), e sua distribuição é assim calculada:

$$i) P_X(\{0\}) = P(X = 0) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup ... \cup \{96\} \cup \{98\} \cup \{100\}) =$$

$$P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) + ... + P(\{96\}) + P(\{98\}) + P(\{100\}) =$$
$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + ... + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$ii)P_X(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup ... \cup \{95\} \cup \{97\} \cup \{99\}) =$$

$$= P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) + ... + P(\{95\}) + P(\{97\}) + P(\{99\}) =$$

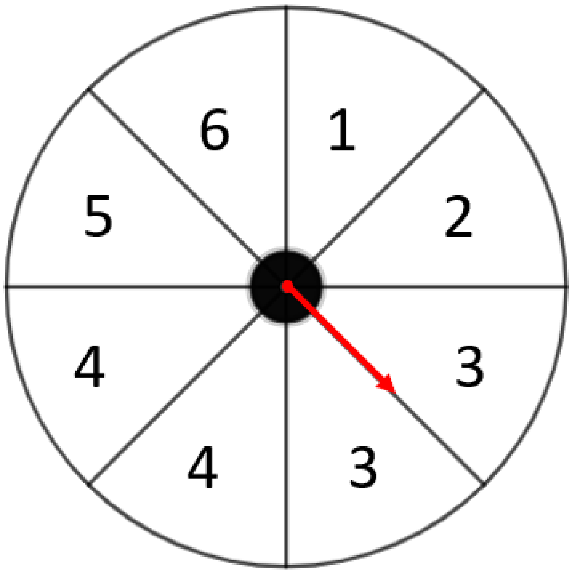
$$= \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + ... + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

O valor $P_X(\{0\})$ significa a probabilidade de, ao sortear um bilhete o número premiado ser par. $P_X(\{1\})$ significa a probabilidade de, ao sortear um bilhete o número premiado ser ímpar. De maneira geral, P_X é uma função de probabilidade definida no conjunto dos subconjuntos da $Im(X) = \{0, 1\}$. Desta forma, a v.a. X induz um novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1\}$ com uma nova função de probabilidade P_X. É interessante notar, pelos cálculos anteriores, que os eventos elementares $\{0\}$, $\{1\}$ tem a mesma chance de ocorrer. Assim como o $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 97, 98, 99, 100\}$ é equiprovável, o novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1\}$ também é equiprovável. Portanto, nesse caso se pode usar Laplace e afirmar que $P_X(\{0\}) = P_X(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 2.2.5.

Considere a roleta indicada na figura abaixo. Toda vez que a seta gira, sempre para em um dos setores circulares 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8. Sabe-se que as áreas dos setores circulares definidos por 1, 2, 5, 6 são iguais e que a área dos setores circulares 3 e 4 é o dobro da área do setor circular 1.

Figura 2.4: Roleta 2



Fonte: Autoria própria

O espaço amostral associado a esse esperimento é

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Veja que Ω é não equiprovável, pois a área do setor circular 3 e 4 é o dobro da área do setor circular 1, e podemos concluir que a probabilidade de sair 3 ou 4 é o dobro da probabilidade de sair 1.

$P(\Omega) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$

Sabemos que $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = k$ e $P(\{3\}) = P(\{4\}) = 2P(\{1\}) = 2k$

$$\Rightarrow P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1$$

$$\Rightarrow k + k + 2k + 2k + k + k = 1$$

$$\Rightarrow 8k = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{8}.$$

Portanto,

$$P(\{1\}) = k = \frac{1}{8}$$

$$P(\{3\}) = 2k = \frac{2}{8}.$$

Podemos definir a variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{N}$, que cada elemento de Ω associa com a paridade do número do setor circular que a seta para da seguinte forma para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq n \leq 3$:

$$X(2n) = 0$$

$$X(2n - 1) = 1$$

essa v.a assume os valores 0 (se for par) e 1 (se for ímpar), e sua distribuição é assim calculada:

$$i) P_X(\{0\}) = P(X = 1) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$ii) P_X(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

O valor $P_X(\{0\})$ significa a probabilidade de, ao girar a roleta a seta parar em um número par. $P_X(\{1\})$ significa a probabilidade de, ao girar a roleta a seta parar em um número ímpar. De maneira geral, P_X é uma função de probabilidade definida no conjunto dos subconjuntos da $Im(X) = \{0, 1\}$. Desta forma, a v.a. X induz um novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1\}$ com uma nova função de probabilidade, a P_X. É interessante notar, pelos cálculos anteriores, que os eventos elementares $\{0\}$, $\{1\}$ tem a mesma chance de ocorrer. Diferente de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que não é equiprovável, o novo espaço amostral $Im(X) = \{0, 1\}$ é equiprovável. Portanto, nesse caso se pode usar Laplace e afirmar que $P_X(\{0\}) = P_X(\{1\}) = \dfrac{1}{2}$.

2.3 Esperança Matemática

A esperança matemática é a média da variável aleatória ponderada pela sua distribuição de probabilidade, ou seja,

$$E(X) = \sum_{i \in Im(X)} i \cdot P_X(\{i\}).$$

Uma de suas importantes propriedades é a da soma de duas variáveis aleatórias: dadas duas v.a.'s X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Vamos agora calcular a esperança matemática da variavél aleatória do Exemplo 2.2.3. Para isso precisamos saber os valores da nossa v.a. e as suas probabilidades. Para ter certeza que sabemos montar todas as etapas de acordo com o problema vamos fazer passo a passo.

$i)\Omega = \{(B, B), (B, V), (V, B), (V, V)\}$

$ii)P : \mathcal{A} \to [0, 1]$

$$P(\{(B, B)\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(\{(B, V)\}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(\{(V, B)\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(\{(V, V)\}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$iii)P(X = i)$

$$P(X = 0) = P(\{(B, B)\}) = \frac{4}{25}$$

$$P(X = 1) = P(\{(B, V)\} \cup \{(V, B)\}) = P(\{(B, V)\}) + P(\{(V, B)\})$$

$$P(X=1) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

$$P(X=2) = P(\{(V,V)\}) = \frac{9}{25}$$

$iv) E(X)$

$$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2)$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{25} + 1 \cdot \frac{12}{25} + 2 \cdot \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Mas o que esse valor significa? Segundo Rifo (2021) esse número diz que ao se realizar 25 vezes esse experimento, deve-se esperar que apareçam 30 bolas vermelhas ou se realizarmos 5 vezes deve-se esperar que apareçam 6 bolas vermelhas.

Exemplo 2.3.1. *Jogo Justo? Vamos apostar?*

Imaginemos que o jogo é o seguinte: de uma urna com três bolas brancas e duas bolas pretas você vai tirar 2 bolas sem reposição. Você ganha 100,00 reais por cada bola preta retirada.

O nosso jogo é um experimento aleatório que consiste em extrair duas bolas sem reposição de uma urna com três bolas brancas (B) e duas bolas pretas (P). O espaço amostral associado a esse experimento é:

$$\Omega = \{(P,P),(P,B),(B,P),(B,B)\}.$$

Podemos definir a variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{Z}$, que a cada elemento de Ω associa o número de bolas pretas obtidas nas duas retiradas, ou seja,

$$X((B,B)) = 0,\ X((B,P)) = 1,\ X((P,B)) = 1,\ X((P,P)) = 2.$$

Com isso concluimos que podemos ganhar R$ 0,00 (caso saia duas bolas brancas), R$ 100,00 (caso uma preta e uma branca sejam escolhidas) ou R$ 200,00 (caso saia duas bolas pretas). Só que o primeiro caso acontece com probabilidade 0,3 (30%), o segundo caso acontece com probabilidade 0,6 (60%) e o último caso com probabilidade de 0,1 (10%).

Se a aposta fosse de 10,00, você jogaria? Com esse preço de aposta, temos que você perderia R$ 10,00 com probabilidade 0,3 ou 30%, ganharia R$ 100,00 menos o valor da aposta com probabilidade 0,6 (60%) e ganharia R$ 200,00 menos o valor da aposta com probabilidade 0,1 (10%).

O valor esperado que você receberia nessa situação seria

$$E(X) = -10 \cdot 0,3 + (100 - 10) \cdot 0,6 + (200 - 10) \cdot 0,1 = 70,00.$$

Se o preço da aposta aumentasse para R$ 200,00? Seu valor esperado nessa situação seria

$$E(X) = -200 \cdot 0,3 + (100 - 200) \cdot 0,6 + (200 - 200) \cdot 0,1$$

$$E(X) = -200 \cdot 0,3 - 100 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,1 = -120,00.$$

O -100 que aparece é que mesmo ganhando R$ 100,00 você pagou R$ 200,00, logo ainda perdeu R$ 100,00. E o 0 no final, você apostou R$ 200,00 e ganhou R$200,00, logo você não ganhou nada realmente. Dizemos que o jogo é honesto quando o valor esperado do resultado é zero, ou seja, ninguém tem vantagem. Nesse nosso problema, se o preço da aposta for R$ $x,00$ qual o valor esperado do resultado?

$$E(X) = -x \cdot 0,3 + (100 - x) \cdot 0,6 + (200 - x) \cdot 0,1$$

$$E(X) = -x + 60 + 20$$

$$\Rightarrow E(X) = -x + 80.$$

No jogo justo o valor esperado, ou seja, a esperança, deve ser 0 de modo que as chances de ganhos entre o dono do jogo e quem aposta deve ser a mesma. Então,

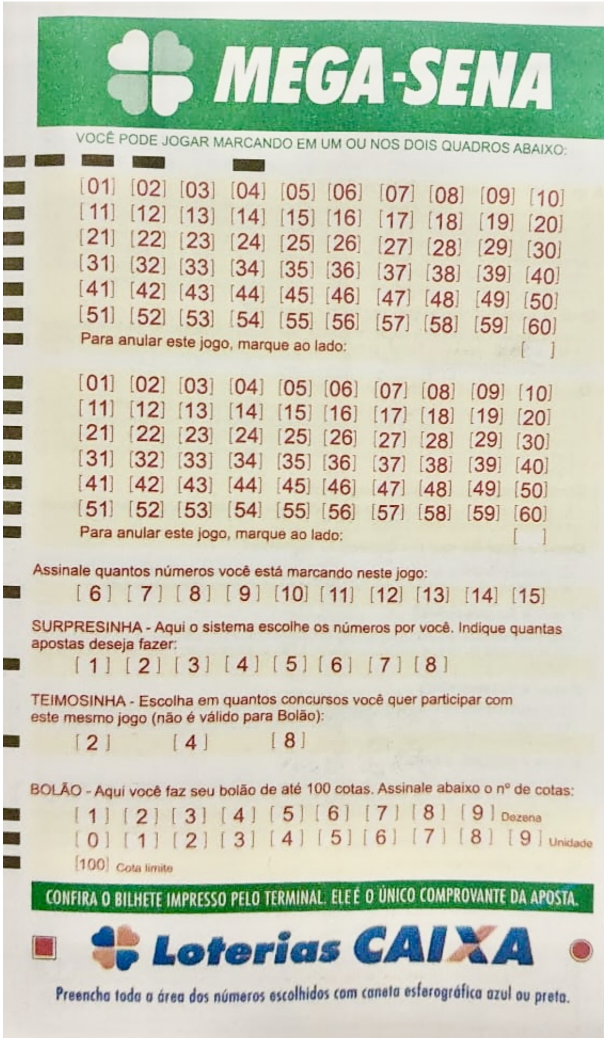
$$E(X) = 0 \Rightarrow 0 = -x + 80 \Rightarrow x = 80.$$

Esse é o valor da aposta para que o jogo seja justo.

Agora pense no seguinte problema: qual deveria ser o prêmio pago na mega-sena para que o jogo fosse considerado justo?

Vamos considerar o problema para uma aposta simples, ao preço de R$ 4,50. (Desconsidere os prêmios da quina e da quadra).

Figura 2.5: Cartela física da mega-sena



Fonte: Autoria própria

Lembrando que uma aposta simples é uma aposta de 6 números do total de 60, a quantidade de jogos simples possíveis é

$$\binom{60}{6} = 50.063.860$$

Como no jogo da mega-sena o espaço amostral é equiprovável, podemos afirmar que

$$P(\text{Ganhar na mega-sena}) = \frac{1}{50.063.860}$$
$$P(\text{Perder na mega-sena}) = \frac{50.063.859}{50.063.860}.$$

Como desejamos que o jogo seja justo, devemos ter $E = 0$. Assim, temos que

$$E = P(Ganhar) \cdot (\text{Prêmio} - 4,50) + P(Perder) \cdot (-4,50)$$

$$0 = \frac{1}{50.063.860} \cdot (\text{Prêmio} - 4,50) + \frac{50.063.859}{50.063.860} \cdot (-4,50)$$

$$\text{Prêmio} = 225.287.370,50.$$

Assim, quando o prêmio estiver em torno de R$ 225 milhões, o jogo se torna justo para o apostador.

2.4 Variância

A variância é uma medida que mostra o quão distante estão os valores assumidos pela v.a. da sua esperança matemática, ou seja,

$$Var(X) = \sum_{i \in Im(X)} (i - E(X))^2 \cdot P(X = i).$$

Calculemos a variância da v.a. do Exemplo 2.2.3,

$$Var(X) = \left(0 - \frac{30}{25}\right)^2 \cdot P(X = 0) + \left(1 - \frac{30}{25}\right)^2 \cdot P(X = 1) + \left(2 - \frac{30}{25}\right)^2 \cdot P(X = 2)$$

$$Var(X) = \left(0 - \frac{30}{25}\right)^2 \cdot \frac{4}{25} + \left(1 - \frac{30}{25}\right)^2 \cdot \frac{12}{25} + \left(2 - \frac{30}{25}\right)^2 \cdot \frac{9}{25}$$

$$Var(X) = \frac{900}{625} \cdot \frac{4}{25} + \frac{25}{625} \cdot \frac{12}{25} + \frac{400}{625} \cdot \frac{9}{25}$$

$$Var(X) = \frac{3600}{15625} + \frac{300}{15625} + \frac{3600}{15625}$$

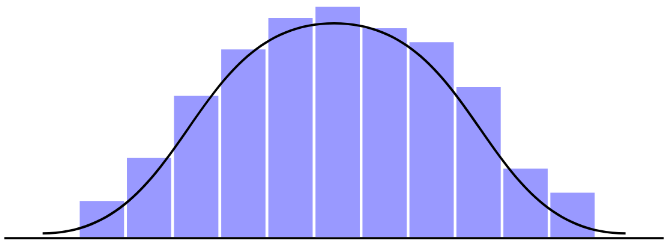
$$\Rightarrow Var(X) = \frac{7500}{15625} = \frac{12}{25} = 0,48.$$

2.5 Erros

Erros podem ser entendidos como discrepâncias entre o que se espera e o que realmente ocorre em um processo. Na ciência, os erros podem ser classificados como erros aleatórios ou erros sistemáticos. Erros aleatórios são aqueles que ocorrem de forma imprevisível, enquanto os erros sistemáticos ocorrem devido a um problema com a metodologia ou instrumentos utilizados na pesquisa. Em matemática, os erros comumente usados são os erros absolutos, que são a diferença entre o valor real e o valor medido ou calculado.

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss desenvolveu uma curva para descrever a distribuição de probabilidade dos erros em suas observações astronômicas. Ele percebeu que os erros experimentais tendiam a seguir uma distribuição de probabilidade simétrica em forma de sino, onde a maioria dos erros era pequena e poucos erros eram grandes.

Figura 2.6: Curva Gaussiana



Fonte: Autoria própria

Um problema bastante comum em estatística é estudar se duas grandezas se relacionam de alguma forma, ou seja, num estudo sobre obesidade podemos estar interessados em saber se o IMC (índice de massa corporal - essa é uma das formas de se medir a adiposidade corporal) está relacionado com a altura das pessoas. Então o procedimento realizado para responder a essa pergunta é coletar dados de várias pessoas e medir seus IMC e alturas.

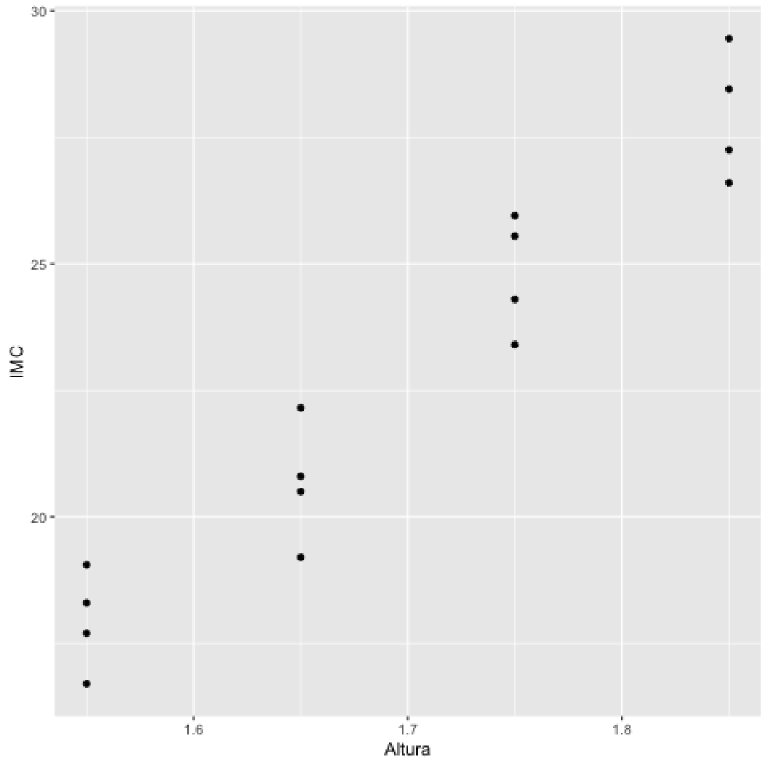
No exemplo a seguir, montamos uma tabela de uma coleta de dados fictícia.

Observação	IMC	Altura
1	16,7	1,55
2	18,3	1,55
3	17,7	1,55
4	19,05	1,55
5	19,7	1,65
6	20,3	1,65
7	20,7	1,65
8	22,05	1,65
9	23,7	1,75
10	24,3	1,75
11	25,7	1,75
12	25,05	1,75
13	26,7	1,85
14	28,3	1,85
15	27,7	1,85
16	29,05	1,85

Tabela 2.7: Tabela do IMC e altura

Nesse conjunto de dados temos pessoas de mesma altura com IMCs diferentes. Ao plotarmos os pontos (IMC_i, h_i) onde IMC_i e h_i são respectivamente o IMC e altura da i-ésima pessoa analisada, obtemos:

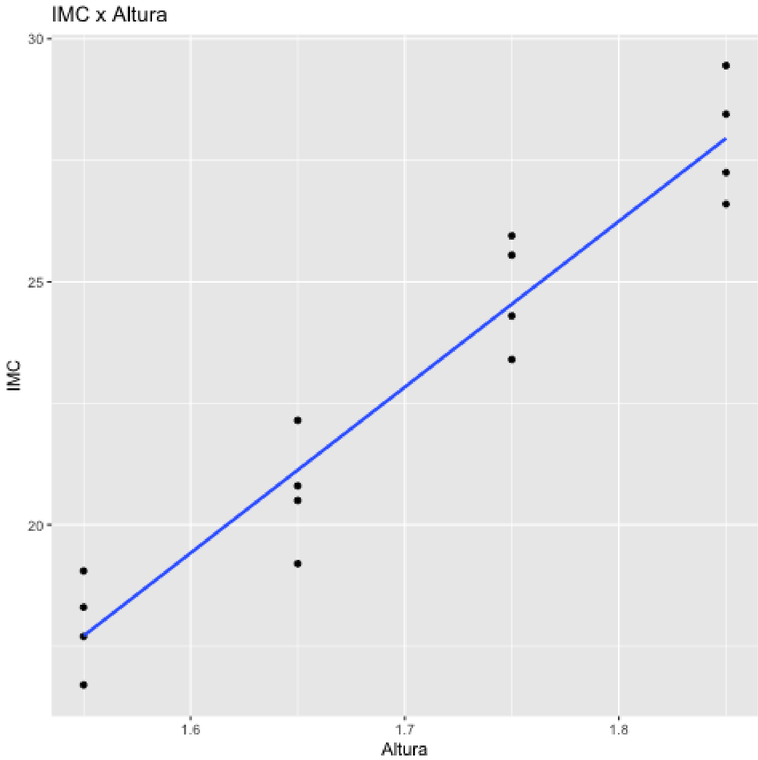
Figura 2.7: Gráfico de dispersão



Fonte: autoria própria

A primeira relação que se tenta é a relação linear, ou seja, uma relação da forma $IMC = \alpha + \beta.Altura$. Sabemos que o gráfico dessa relação é uma reta, portanto ao plotarmos essa reta independentemente dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ essa reta não passará por todos os pontos.

Figura 2.8: Reta de regressão linear 1



Fonte: Autoria própria

Note que para a altura 1,55 m temos as 4 primeiras observações da Tabela 2.7 e agora ainda temos o valor de $IMC(1,55) = \alpha + \beta.1,55$. Considerando $\epsilon_i = IMC_i - IMC(h_i)$, ou seja, a diferença entre o valor do IMC de uma pessoa e o valor da coordenada $IMC(h_i)$ da altura daquela mesma pessoa. Podemos então escrever o conjunto de dados como

$$IMC_i = \alpha + \beta h_i + \epsilon_i,$$

onde IMC_i, h_i e ϵ_i são respectivamente o IMC da i-ésima pessoa analisada, a altura dessa pessoa e o erro cometido entre a relação proposta e o valor do IMC observado.

A próxima etapa é construir uma medida que expresse o erro que comete-se ao utilizar a relação $IMC = \alpha + \beta.Altura$ para modelar o IMC como função da altura. Como já comentamos, não vai ter uma reta que passe por todos os pontos, logo qualquer que seja a reta utilizada teremos erro. O que queremos é conseguir uma reta que apresente o menor erro possível.

Duas dessas formas são o erro quadrático médio e o erro absoluto médio, ou seja,

$$EQM(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \epsilon_i^2}{N} \text{ e } EAM(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^{N} |\epsilon_i|}{N}.$$

onde o α, β que aparecem na expressão diz respeito aos coeficientes da reta que está sendo utilizada e que está gerando esses erros.

O passo seguinte é encontrar, com base nos dados apresentados, os valores de α e β que fazem com que o erro cometido ao se utilizar os valores α e β como os parâmetros da reta, seja mínimo. Em outras palavras,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = argmin_{\alpha,\beta} EQM(\alpha, \beta) \text{ ou } (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = argmin_{\alpha,\beta} EAM(\alpha, \beta).$$

Esses valores $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ são chamados estimadores de α, β, respectivamente e $I\hat{C}M_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Altura_i$ é chamada de equação da regressão.

Em seguida assume-se que o modelo é representado por essa equação e podemos fazer previsões para outros valores de IMC de alturas que não aparecem na tabela. Por exemplo, a estimação do IMC de uma pessoa com 1,70 é dado por

$$IM\hat{C}_{1,70} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} 1,70.$$

Uma vez conhecido o $IMC_{1,70}$ da pessoa com 1,70m de altura, o erro quadrático da previsão é dado por $(IMC_{1,70} - IM\hat{C}_{1,70})^2$, ou seja, o quadrado da diferença entre o valor real e a previsão.

Entretanto, pode acontecer de termos apenas uma grandeza, e não vai ser possível obter uma relação como a apresentada na Tabela 2.7 e nosso conjunto de dados será da forma:

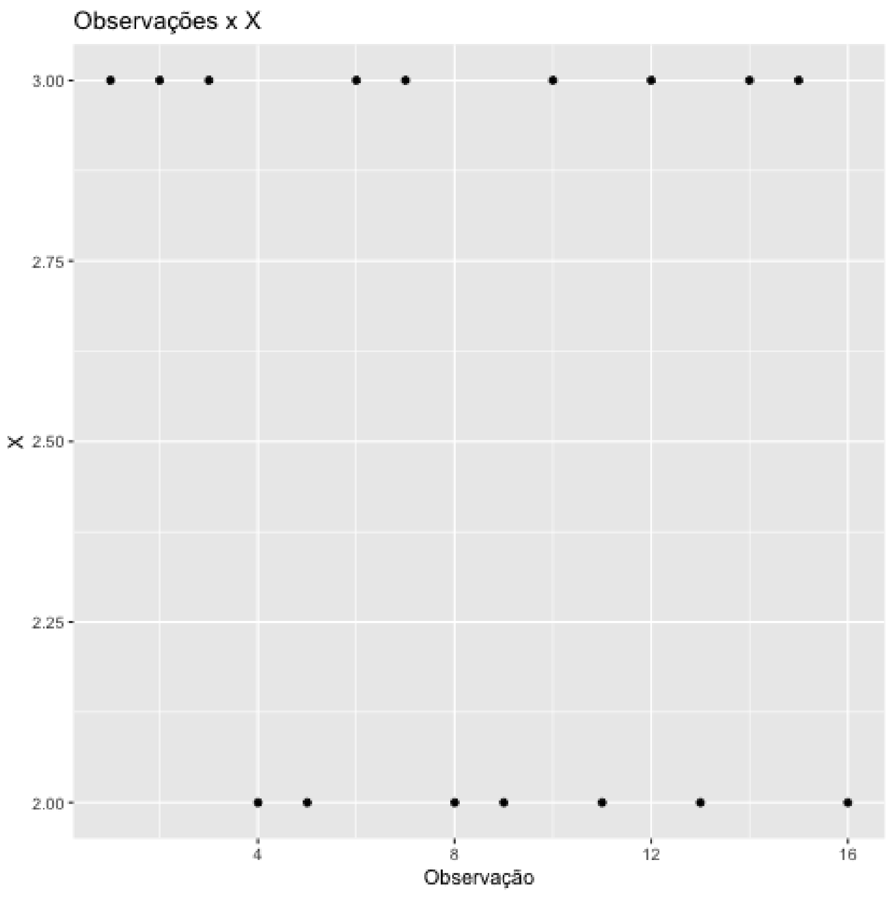
Observação	X
1	3
2	3
3	3
4	2
5	2
6	3
7	3
8	2
9	2
10	3
11	2
12	3
13	2
14	3
15	3
16	2

Tabela 2.8: Tabela do IMC e altura

Quando isso acontece imaginamos que os dados são provenientes de realizações de uma váriavel aleatória que possui uma dada distribuição P_X. O que significa provenientes de realizações de uma v.a. com distribuição P_X? Imagina que temos um dado honesto, podemos imaginar uma v.a. que assume os valores 1,2,...,5 ou 6 com probabilidade $P_X(\{1\}) = ... = P_X(\{6\}) = \frac{1}{6}$, de fato, considere $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $X : \Omega \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definida por $X(i) = i$. Definida dessa maneira, pela definição da probabilidade induzida temos que $P_X(\{i\}) = P(X = i) = P(\{i\}) = \frac{1}{6}$ uma vez que o dado é honesto. Fazer uma realização da v.a. é escolher aleatoriamente um ponto em Ω e calcular $X(i)$, isso será igual a i o que significa que naquela realização o resultado foi i. Isso está sendo equivalente a jogar um dado.

Assim, quando trabalhamos com uma v.a. discreta X, que assume uma quantidade finita de valores com distribuição P_X, e quando fazemos realizações de X, obtemos uma sequência de valores que X pode assumir e esses números vão aparecendo de acordo com P_X, ou seja, aqueles com maiores probabilidades aparecerão mais frequentemente nessa sequência de realizações. A Tabela 2.8 foi obtida de realizações de uma v.a. X que assume os valores $\{1, 2, 3\}$ com probabilidades $(0.1, 0.3, 0.6)$ respectivamente. Note que embora o 1 seja um possível valor que X pode assumir, nas realizações realizadas não apareceu esse valor. Isso é equivalente a você jogar 20 vezes o dado e nessas 20 vezes não aparecer algum dos possíveis números. Da mesma forma que plotamos esses dados, podemos fazer isso usando o eixo x para marcar a realização e no eixo y o valor obtido naquela realização como na figura abaixo.

Figura 2.9: Reta de regressão linear 2



Fonte: Autoria própria

Novamente vemos que se traçarmos uma reta para passar por esses pontos a reta terá que ser paralela ao eixo x e não passará por todos os pontos, ou seja, uma reta cuja equação seja da forma $y = a$, onde $a \in \mathbb{R}$. Logo se utilizarmos a reta para fazermos previsão obrigatoriamente cometeremos erro, que pode ser medido pelo EQM ou pelo EAM. Utilizando a mesma ideia desenvolvida anteriormente, vemos que os erros são dados por $\epsilon_i = X(i) - a$ onde $X(i)$ representa o valor que X assume na i-ésima realização e a representa o valor horizontal que a reta assume em todos seus pontos. Mais uma vez a ideia é em encontrar a que minimiza a soma dos erros:

$$EQM(a,X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(i) - a)^2 \text{ e } EAM(a,X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|X(i) - a|.$$

Em Rifo (2021), o Teorema 5.6 estabelece que: Dada uma v.a. X, o preditor de X com menor EQM é a sua esperança $a = E(X)$. Podemos demonstrar esse resultado da seguinte forma: dada uma variável X, a previsão a de X tem EQM dado por

$$EQM(a;X) = E[(X-a)^2]$$

$$EQM(a;X) = E[X^2 - 2Xa + a^2]$$

$$EQM(a;X) = E(X^2) - 2aE(X) + a^2$$

$$EQM(a;X) = [a - E(X)]^2 + E(X^2) - [E(X)]^2$$

Na maioria das situações estamos interessados em encontrar o menor erro, ou seja, queremos a previsão com o menor EQM, o valor mínimo do erro será alcançado quando $a - E(X) = 0$, ou seja, quando a previsão é $a = E(X)$. Logo,

$$EQM(a;X) = [a - E(X)]^2 + E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$EQM(a;X) = [0]^2 + E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$EQM(a;X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Logo no nosso exemplo, temos que o a procurado é

$$E(X) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.6 = 2.5.$$

Agora que sabemos o que estamos procurando, vamos ilustrar em alguns exemplos o que acontece com as previsões de uma v.a. X, que assume uma quantidade de valores finitos com uma certa distribuição P_X, quando usamos erroneamente que o espaço $(Im(X), \mathcal{P}(Im(X)), P_X)$ como um espaço equiprovável quando ele de fato não o é.

3 Prejuízos ao se supor equiprobabilidade quando ela não existe

Neste capítulo utilizaremos o EQM para medir o erro que comete-se ao usar a equiprobabilidade quando ela não existe.

3.1 Exemplos

Exemplo 3.1.1.

Imagine que você está em um jogo onde, em caso de vitória, você recebe R$ 1,00 e, em caso de derrota, paga R$1,00. Quanto você espera ganhar ou perder depois de n partidas?

Se você supor que a probabilidade de ganhar ou de perder é a mesma, ou seja, se você acredita que seu adversário tem a mesma habilidade que você, então você estará na seguinte situação:

$$P(\text{ganhar uma partida}) = P(\text{perder uma partida}).$$

Uma maneira de modelar esse problema é definir a seguinte variável aleatória:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se você vencer a i-ésima partida} \\ -1 & \text{se você perder a i-ésima partida} \end{cases}$$

Assim, a soma $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$ representa o quanto você ganhou ou perdeu depois de n partidas. Já que a probabilidade de ganhar uma partida é a mesma de perder uma partida, ou seja, $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, depois de n jogadas o valor esperado é:

$$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} (1 \cdot P(X_i = 1) - 1 \cdot P(X_i = -1))$$

$$\Rightarrow E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0,$$

ou seja, depois de n partidas, em média, você terá ganho 0 reais. Mas, e se você mensurou erroneamente a chance de ganhar? Se, por exemplo, seu adversário é bem melhor que você e a sua chance de ganhar é $\frac{1}{3}$? Veja como o resultado esperado se altera:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} (1 \cdot P(X_i = 1) - 1 \cdot P(X_i = -1))$$

$$\Rightarrow E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{n}{3},$$

ou seja, depois de n partidas, em média, você terá perdido $\frac{n}{3}$ reais. Note que pelo fato de existirem duas possibilidades, imaginar que elas são equiprováveis, quando nem sempre elas o são, pode levar a um resultado final inesperado como a perda de $\frac{n}{3}$ reais.

Exemplo 3.1.2.

Suponha agora um jogo que, ao lançar uma moeda, se sair cara, seu capital é dobrado; se sair coroa, seu capital é reduzido à metade. Você começa com R$1,00. Quanto você espera ganhar ou perder depois de 2 partidas?

Se você supor que a probabilidade de ganhar ou de perder é a mesma, ou seja, a probabilidade de sair cara e coroa são iguais, então você estará na seguinte situação:

$$P(\text{sair cara}) = P(\text{sair coroa}).$$

Tabela 3.1: Jogo das moedas

X	$P(X)$
$0,25$	$\frac{1}{4}$
$1,00$	$\frac{2}{4}$
$4,00$	$\frac{1}{4}$

Fonte: Autoria própria

$$E(X) = 0,25 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{16} = 1,5625$$

Nessa situação, podemos concluir que o valor esperado após dois lançamentos é de $\frac{25}{16} = 1,5625 > 1$, ou seja, superior ao valor inicial, logo o jogo é lucrativo para o jogador em dois lançamentos. Mas, e se a moeda não for balanceada e por exemplo a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{3}$. Quanto você espera ganhar ou perder depois de 2 partidas?

Tabela 3.2: Jogo das moedas

X	$P(X)$
$0,25$	$\frac{4}{9}$
$1,00$	$\frac{4}{9}$
$4,00$	$\frac{1}{9}$

Fonte: Autoria própria

$$E(X) = 0,25 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

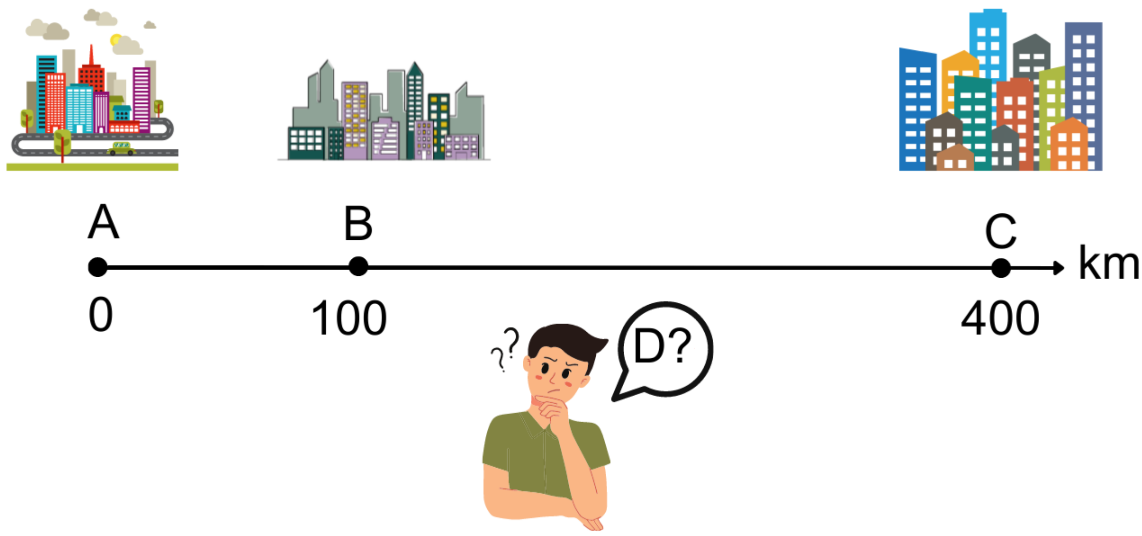
Nessa situação, podemos concluir que o valor esperado após dois lançamentos é de $\frac{9}{9} = 1$, ou seja, igual ao valor inicial, logo é de se esperar que o jogador continue com o dinheiro inicial.

Exemplo 3.1.3.

Imagine que uma distribuidora de remédios atende a 3 cidades: A, B e C, onde a distância de A até B é de 100 km e a de B até C é de 300 km. Essa distribuidora só recebe uma ligação por dia vinda de alguma das três cidades, e atende ao chamado imediatamente. Pelo histórico de ligações verificou-se que a probabilidade da ligação recebida ser da cidade A é $0,1$, ser da cidade B é $0,2$ e ser da cidade C é $0,7$. Em qual ponto sobre a reta que liga as três cidades, o dono deve construir o depósito da sua empresa de modo a minimizar a distância ao quadrado dos deslocamentos?

Para modelar o problema suponha que a cidade A esteja no ponto 0, a cidade B no ponto 100, a cidade C no ponto 400 e que o depósito seja construído em um ponto D sobre a reta que liga as três cidades.

Figura 3.1: Modelagem do problema



Fonte: Autoria própria

Seja X a variável que representa a cidade que ligou. A resposta para o dono da distribuidora, segundo o Teorema 5.6 em Rifo (2021), é o ponto $a = E(X)$, que minimiza a distância média quadrática do deslocamentos até D, ou seja, que minimiza a função:

$$EMQ(D, X) = d(A, D)^2 \cdot P(X = A) + d(B, D)^2 \cdot P(X = B) + d(C, D)^2 \cdot P(X = C).$$

Como X representa a cidade que ligou, então X assume os valores 0, 100 e 400 com probabilidades $0,1$, $0,2$ e $0,7$, respectivamente. Portanto,

$$E(X) = 0 \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,2 + 400 \cdot 0,7 = 300$$

Assim, o depósito deve ficar a uma distância de 300 km da cidade A, 200 km da cidade B e 100 km da cidade C.

Se tivéssemos assumido a equiprobabilidade, o depósito ficaria situado à uma distância

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 100 \cdot \frac{1}{3} + 400 \cdot \frac{1}{3} = \frac{500}{3},$$

ou seja, aproximadamente à $166,67$ km da cidade A, $66,67$ km da cidade B e $233,33$ km da cidade C.

Vamos calcular agora o erro quadrático médio nas duas situações:

$$EMQ(300, X) = 300^2 \cdot 0,1 + 200^2 \cdot 0,2 + 100^2 \cdot 0,7 = 24000$$

$$EMQ(166,67,X) = (166,67)^2 \cdot 0,33 + (66,67)^2 \cdot 0,33 + (233,33)^2 \cdot 0,33 = 28599,99$$

Analisando o $EMQ(300,X) = 24000$ e $EMQ(166,67,X) = 28599,99$ fica comprovado que a distância média quadrática diária, ao se usar equiprobabilidade, quando de fato ela não existe, leva a uma diferença dos erros médios quadráticos , em valores absolutos, de mais de 4599. Lembrando que o erro médio quadrático está relacionado à distância média quadrática diária percorrida, isso dá um acréscimo considerável de quilometragem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho abordou a importância de definir corretamente o que é probabilidade, destacando a definição axiomática de Kolmogorov que pode ser usada em todos os casos sem precisar supor a equiprobabilidade e frisou a impossibilidade em usarmos a definição de Laplace sem supor a equiprobabildiade. Muitos livros e trabalhos cometem esse erro usando somente Laplace e não falando sobre equiprobabilidade. Para que os alunos compreendam corretamente o conceito de probabilidade destacamos as diversas situações no nosso cotidiano em que usamos a probabilidade e que na maioria dessas situações temos que o nosso espaço amostral é não equiprovável.

Em muitas situações até nós professores deixamos a desejar pelo fato de destacar muito a definição de Laplace, resolvendo muitos exemplos com Laplace e supondo muitas vezes que as chances de eventos ocorrerem são iguais. É necessário mudar essa visão e apresentar aos alunos diversos exemplos e situações. No nosso trabalho apresentamos um teste aplicado para os alunos do 2°ano e 3°ano do ensino médio do Instituto Federal do Rio Grande do Norte Campus Parelhas. O teste alcançou 119 alunos no total. Visivelmente desprentensioso e simples, tinha como finalidade, detectar a percepção que os avaliados sabiam sobre as definições de probabilidade e equiprobabilidade. Pelos resultados, ficou claro que uma ênfase precisa ser dada no conceito de equiprobabilidade e também na apresentação de uma outra maneira de proceder quando não existir a probabilidade e a fórmula de Laplace não puder ser usada.

Diante disso, podemos observar que essa amostra experimental manisfesta certa tendência dos alunos considerarem o evento como inserido em um espaço amostral equiprovável, mesmo quando nada for dito a respeito.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), ao estudar probabilidade, os alunos serão capazes de compreender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente. Além disso, outras ideias importantes que incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos e para estimar probabilidades.

Durante o desenvolvimento desta dissertação, apresentamos também alguns exemplos, mais precisamente 4 exemplos, de experimentos aleatórios onde definimos uma variável aleatória e criamos um novo espaço amostral induzido a partir da variável aleatória que pode ser equiprovável ou não equiprovável, dependendo da função que você definiu.

Esses exemplos muitas vezes passam despercebidos por nós professores ou em muitas vezes não temos o conhecimento sobre. Destacamos isso no nosso trabalho com objetivo de trazer esse conhecimento para os nossos docentes e discentes também.

Por fim, trouxemos também no nosso trabalho alguns exemplos que destacam os prejúizos ao supor a equiprobabilidade quando ela não existe. Frisando o erro que cometemos quando fazermos essa suposição.

Acreditamos também que este trabalho venha a contribuir no processo de ensino-aprendizagem, auxiliando o fundamental papel do professor enquanto orientador, mediador e instigador de reflexões entre seus alunos, mais do que conduzi-los à resolução mecânica de exercícios e aplicação de fórmulas.

Referências Bibliográficas

[1] MORGADO, A. et al **Análise Combinatória e Probabilidade**. edição, Rio de Janeiro, editora, 2004.

[2] MAGALHAES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 6 ed. São Paulo: EDUSP, 2005.

[3] POINCARÉ, H. **Ciência Y Método**. Espanha: Espasa Calpe, 1946.

[4] GOULD, S. **The Value of Science: Essential writings of Henry Poicaré**, 1 ed. The Morden Library, 2001.

[5] HENRIQUE, D. **O que Einstein quis dizer com Deus não joga dados?** URL https://socientifica.com.br/o-que-einstein-quis-dizer-com-deus-não-joga-dados/, 2022.

[6] KLINE, M. **Mathematics for the Nonmathematician** 1 ed. Dover Publications, 1967.

[7] Pereira, A. G. C., Cortes, G. L. C., Medeiros, G. H. B., Almeida, F. M. P., Almeida Júnior, F. E., Nunes, I. B. D., Silva, A. H., Souza, G. M. **Algumas reflexões sobre a definição de probabilidade** REVEMAT, 15, 1–22. 2020.

[8] Hand, D. J. **The improbability principle: Why coincidences, miracles, and rare eventes happen every day** New York: Scientific American. 2014.

[9] Rifo, L. **Probabilidade e Estatística: Aspectos de tomadas de decisões e incertezas para o Ensino Fundamental e Médio** 1 ed. SBM, 2021.

[10] Salsa, I. S., Moreira, J. A. **Probabilidade e Estatística** 1 ed. SEDIS, 2008.

[11] Bernstein, P. **Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco** 21 ed. Campus, 1997.

[12] Pereira, A. Campos, V. **Análise Combinatória e Probabilidade** 2 ed. UFRN, 2012.

[13] Pereira, A. Campos, V., Gomes, C. **Introdução à Combinatória e Probabilidade** 1 ed. Ciência Moderna, 2015.

[14] VIEIRA , Edilson. **Brasileiros bateram recorde de jogos na loteria em 2020. Caixa arrecadou R$ 17,1 bilhões em apostas** : resultado foi considerado o melhor já registrado em toda a história da Caixa Econômica Federal e representa um crescimento de 2,35% em relação às vendas de 2019. [S. l.], 1 fev. 2021. Disponível em: https://jc.ne10.uol.com.br/economia/2021/02/12025102-brasileiros-bateram-recorde-de-jogos-na-loteria-em-2020–caixa-arrecadou-r–17-1-bilhoes-em-apostas.html. Acesso em: 4 agosto 2021.

[15] XAVIER, Keila. **História da loteria no Brasil e a grande chance de ficar rico** : as loterias brasileiras já sorteiam prêmios milionários há muitos anos. Algumas foram lançadas pela Caixa antes dos anos 2000, mas fazem sucesso até hoje entre os apostadores. [S. l.], 4 fev. 2021. Disponível em: https://www.dci.com.br/financas/loterias/historia-loteria-brasil/89157/. Acesso em: 3 agosto 2021.

[16] **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Volume 2 - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: DF: MEC/SEB, 2006. 135p.

[17] **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**– Ensino Médio (PCN+). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2006.

A Teste Aplicado

Teste aplicado pelo Professor Gabriel Garcia aos alunos do Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN) Campus Parelhas.

Teste de conhecimentos básicos matemáticos - IFRN/PAAS

Respondam as perguntas de forma individual e sem consultas.
Prof. Gabriel Garcia

aprendamatematicaprofgabriel@gmail.com Mudar de conta

* Indica uma pergunta obrigatória

Email *

☐ Registar **aprendamatematicaprofgabriel@gmail.com** como o email a incluir na minha resposta

Nome: *

A sua resposta

Qual ano você estuda? *

- ○ 1°ano
- ○ 2°ano
- ○ 3°ano

1) Na equação $ax^2 + bx + c = 0$, o delta de Bhaskara é calculado por $b^2 - 4ac$? *

- Sim
- Não

2) O número 1, é um número primo? *

- Sim
- Não

3) Para qualquer triângulo de lados $a > b > c$, vale a relação $a^2=b^2+c^2$? *

- Sim
- Não

4) A probabilidade de um evento A é dada por n(A)/n(S), ou seja, pelo número de casos favoráveis dividido pelo número de casos totais? *

- Sim
- Não

5) A área de um círculo é 2piR, onde R é o raio do círculo? *

- Sim
- Não

6) Ao lançarmos duas moedas, os resultados possíveis são duas caras, duas coroas ou uma cara e uma coroa. Então a probabilidade de ocorrência de qualquer um desses resultados é 1/3? *

- Sim
- Não

Enviar

Limpar formulário

Nunca envie palavras-passe através dos Google Forms.

Este formulário foi criado dentro de IFRN. Denunciar abuso

Google Formulários