



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

ANTONIO VILCEMAR DE CASTRO

**A MATEMÁTICA NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO E O ENEM: UM OLHAR  
ANALÍTICO E ATUALIZADOR**

MOSSORÓ

2023

ANTONIO VILCEMAR DE CASTRO

**A MATEMÁTICA NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO E O ENEM: UM OLHAR  
ANALÍTICO E ATUALIZADOR**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dra. Luíza Helena Felix de Andrade.

MOSSORÓ

2023

© Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

CC355 Castro, Antonio Vilcemar de.  
m A Matemática no 3º Ano do Ensino Médio e o  
ENEM: Um Olhar Analítico e Atualizador / Antonio  
Vilcemar de Castro. - 2023.  
155 f. : il.

Orientador: Luiza Helena Félix de Andrade.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em  
Matemática, 2023.

1. ENEM. 2. Ensino Médio. 3. Matemática. 4.  
Análise. 5. Proposta. I. Andrade, Luiza Helena  
Félix de, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade  
com AACR2 e os dados fornecidos pelo autor(a).  
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência  
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva  
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ANTONIO VILCEMAR DE CASTRO

**A MATEMÁTICA NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO E O ENEM: UM OLHAR  
ANALÍTICO E ATUALIZADOR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática.

Defendida em: 06/07/2023

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente  
 LUIZA HELENA FELIX DE ANDRADE  
Data: 14/07/2023 15:00:06-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

Professora Dra Luiza Helena Félix de Andrade (UFERSA)  
Orientadora

Documento assinado digitalmente  
 FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA  
Data: 06/07/2023 17:13:25-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

Professor Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira (UFERSA)  
Membro Examinador

Documento assinado digitalmente  
 FRANCISCO CARPEGIANI MEDEIROS BORG  
Data: 06/07/2023 16:42:34-0300  
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

---

Professor Dr. Francisco Carpegiani Medeiros Borges (UFDPAR)  
Membro Examinador

## **AGRADECIMENTOS**

Aos alunos que se propuseram a colaborar com esse trabalho, trazendo informações tão necessárias para o alcance dos objetivos propostos.

Às colegas de trabalho Claudivânia Ferreira de Queiroz Oliveira, Maria das Dores de Almeida Freire e Núbia Maria Abrantes, pelas ideias sugeridas.

À minha irmã Tania Maria de Castro Marques e à minha sobrinha Gabriela de Castro Marques que, além de proporcionarem sugestões para a construção desse trabalho, auxiliaram-me na correção do texto.

À minha sobrinha Sabrina de Castro Peixoto, pelas orientações, especialmente, no que diz respeito aos aspectos tecnológicos, essenciais para aplicação e coleta dos questionários.

À minha orientadora Professora Doutora Luiza Helena Félix de Andrade. Sempre solícita e atenta para com o andamento e resultado desse trabalho. Agradeço-lhe, imensamente, pela incentivo, pelas horas disponibilizadas, pelas sugestões, correções e colaboração ímpar. Suas orientações foram e sempre serão valiosíssimas.

## RESUMO

Essa dissertação apresenta uma pesquisa que visa a analisar a influência de uma proposta didática no desempenho de alunos, na prova de Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), desenvolvida em turmas do 3º ano do ensino médio da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, em Doutor Severiano/RN. Nela, é traçado um panorama histórico sobre o exame, desde a sua implantação em 1998, no sentido de compreender as mudanças pelas quais ele passou. Considerando que o ENEM avalia o domínio de aprendizagens da educação básica, o trabalho faz também referências ao que está posto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para as diferentes etapas desse nível de ensino, dando ênfase às competências e habilidades previstas para Matemática do ensino médio. Após o tratamento dado aos aspectos históricos do ENEM e às competências e habilidades relacionados à Matemática, principalmente do ensino médio, são feitos esclarecimentos sobre o planejamento, a elaboração e a implementação da proposta que, em seguida, tem seus resultados analisados. Na análise, foram utilizados questionários respondidos por alunos participantes da proposta e do exame e de dados divulgados, a partir de publicações do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que permitiram a obtenção do desempenho médio dos referidos alunos, na prova de Matemática e suas Tecnologias. Os resultados demonstram ter havido avanços no desempenho dos alunos, de 2017 a 2020, período em que se trabalhou com a proposta, o que estimulou a atualização e a sua reimplantação em 2023. O trabalho traz, ainda, uma amostragem do material didático a ser utilizado que consta, basicamente, de questões de provas do ENEM, aplicadas de 2009 a 2022, agrupadas por objetos do conhecimento.

**Palavras-chave:** ENEM, Ensino Médio, Matemática, Análise, Proposta.

## **ABSTRACT**

This dissertation presents a research that aims to analyze the influence of a didactic proposal on the student's performance, in the Mathematics and its Technologies test of the National High School Exam (ENEM), developed in classes of the 3rd grade of high school at the Cristóvão Colombo de Queiroz State School, in Doutor Severiano/RN. In its, is traced a historical overview about the exam, since its implementation in 1998, in order to understand the changes in which it has passed. Taking into account that the ENEM evaluates the learning domain in basic education, this work also makes references to what is written in National Common Curricular Base (BNCC) for the different stages of this level of education, emphasizing the competences and abilities foreseen for Mathematics in high school. After the treatment given to the historical aspects of the ENEM and to the competences and abilities related to Mathematics, mainly in high school, explanations are made on the planning, elaboration and implementation of the proposal, which then has its results analyzed. In the analysis, were used questionnaires answered by students participating in the proposal and of the exam and divulged data, as from publications by the National Institute of Educational Studies and Research Anísio Teixeira (INEP), which allowed obtaining the average performance of the referred students in the Mathematics and its Technologies test. The results demonstrate that there have been advances on the student's performance, from 2017 to 2020, period in which the proposal was worked, which stimulated the update and its preimplantation in 2023. The work still brings a sampling of the didactic material to be used, which basically consists of ENEM test questions, applied from 2009 to 2022, grouped by objects of knowledge.

**Keywords:** ENEM, High School, Mathematics, Analysis, Proposal.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**ANDIFES** – Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior.

**BNCC** – Base Nacional Comum Curricular.

**CF** – Constituição Federal.

**CNE** – Conselho Nacional da Educação.

**DCN** – Diretrizes Curriculares Nacionais

**ENCCEJA** – Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos.

**ENEM** – Exame Nacional do Ensino Médio.

**IES** – Instituições de Ensino Superior.

**INEP** – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

**LDB** – Lei de Diretrizes e Bases da Educação.

**PCN** – Parâmetros Curriculares Nacionais.

**PISA** – Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA)

**Prouni** – Programa Universidade para Todos.

**SAEB** – Sistema de Avaliação da Educação Básica.

**SISU** – Sistema de Seleção Unificada.

**TRI** – Teoria de Resposta ao Item.

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1 - Ilustração da escala de proficiência do ENEM

Figura 2 - Exemplo de alocação de questões e participantes na mesma escala

Figura 3 - Padrão de respostas de dois participantes a 10 questões e suas respectivas proficiências

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Curva característica do item

Gráfico 2 - Momento em que os alunos começaram a intensificar seus estudos para o ENEM

Gráfico 3 - Resposta dos alunos se se sentiam competentes para resolver situações-problema, envolvendo objetos do conhecimento estudados até o 3º ano do ensino médio

Gráfico 4 - Opinião dos alunos a respeito dos objetos do conhecimento estudados por eles durante a educação básica

Gráfico 5 - Opinião dos alunos em relação ao número de questões

Gráfico 6 – Resposta dos alunos à indagação se o encaminhamento de atividades extraclasse contribuiu para ampliar o seu tempo de estudo em casa

Gráfico 7 – Resposta dos alunos sobre se cumpriam as atividades extraclasse propostas

Gráfico 8 - Postura dos alunos em relação às dúvidas surgidas na resolução das atividades extraclasse propostas

Gráfico 9 - Interesse do aluno pela prova de Matemática, com a implementação da proposta

Gráfico 10 - Opinião dos alunos, se a proposta trouxe avanços significativos nos seus conhecimentos

Gráfico 11 - Opinião dos alunos, se a proposta influenciou no seu desempenho no ENEM

Gráfico 12 - Proficiência média dos alunos, em Matemática

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1 - Questão 164 da prova amarela de Matemática do ENEM 2011

Quadro 2 - Estrutura geral da BNCC para as três etapas da Educação Básica

## **LISTA DE TABELAS**

- Tabela 1 - Resultado do ENEM por escola 2015, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz
- Tabela 2 - Resultado do ENEM por escola 2014, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz
- Tabela 3 - Resultado do ENEM por escola 2016, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz
- Tabela 4 - Proficiência em Matemática de 20 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2017
- Tabela 5 - Proficiência em Matemática de 25 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2018
- Tabela 6 - Proficiência em Matemática de 25 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2019
- Tabela 7 - Proficiência em Matemática de 20 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2020
- Tabela 8 - Resultado do ENEM por escola 2017, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz
- Tabela 9 - Resultado do ENEM por escola 2018, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz
- Tabela 10 - Resultado do ENEM por escola 2019, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	10
2. DISCUSSÃO TEÓRICA.....	14
2.1. ENEM (PANORAMA HISTÓRICO).....	14
2.2. COMPETÊNCIAS E HABILIDADES ASSOCIADAS À MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO. ....	27
3. PROPOSTA METODOLÓGICA DESENVOLVIDA NA ESCOLA: CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO .....	37
4. ANÁLISE DE DADOS DE PESQUISA APÓS A APLICAÇÃO DA PROPOSTA .....	43
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	58

REFERÊNCIAS

APÊNDICES

## 1. INTRODUÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) instituído, a princípio, com o objetivo de avaliar as escolas, através do desempenho dos seus alunos, passou por reformulações e vem sendo utilizado pelas universidades, na seleção daqueles que pretendem ingressar no ensino superior. Acreditamos que, por isso, o exame tem despertado a atenção dos alunos, das escolas, dos meios de comunicação e da sociedade como um todo.

Logo que o exame foi instituído, praticamente era ignorado pelos alunos da escola em que trabalho, a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, em Doutor Severiano/RN. Em 2004, quando instituíram o Programa Universidade para Todos (Prouni), começamos a perceber alguns alunos interessados em participar do exame. Não era um número muito expressivo, mesmo porque, praticamente não dispúnhamos de universidades privadas, em nossa região, que incentivassem os alunos à conquista de bolsas de estudo, através do programa. A adesão se intensificou quando as universidades públicas começaram a substituir os vestibulares pelo Sistema de Seleção Unificada (SISU).

Esse momento em que os alunos da nossa escola começaram a participar mais do ENEM coincidiu com a mudança no formato da prova que, de 1998 a 2008, constava da redação e de 63 questões interdisciplinares objetivas e de múltipla escolha, passando a ter, a partir de 2009, 180 questões distribuídas em quatro provas, por áreas do conhecimento, mantendo-se a proposta da redação. A prova de Matemática passou a ser uma delas e, desde que começaram a aplicá-la, notávamos o desinteresse de parte dos alunos pela referida prova, o que se revelava em depoimentos que ouvíamos deles, principalmente após o exame, como “nem li a prova de Matemática” ou “só chutei a maioria das questões de Matemática”. Entendíamos que essa falta de interesse dos alunos decorria, principalmente, do fato de eles serem conscientes das deficiências que foram se acumulando em seu aprendizado, ao longo dos anos, e que os levaram ao último ano do ensino básico sem que dispusessem do domínio das habilidades avaliadas no ENEM.

A falta de motivação dos alunos pela prova de Matemática evidenciava a necessidade de um trabalho mais direcionado para o exame, pois estávamos no último ano da educação básica e, concordando ou não com os padrões do exame, era através dele que os alunos ingressariam no ensino superior. Até tentávamos inseri-lo no planejamento das nossas aulas, propondo atividades em que a contextualização e a interdisciplinaridade estivessem contempladas, no entanto, não íamos muito além dos objetos do conhecimento previstos para o 3º ano do ensino médio.

Diante do exposto, tínhamos a convicção de que o desempenho dos nossos alunos na prova de Matemática e suas Tecnologias não vinha sendo muito favorável, o que foi ratificado pelo INEP ao divulgar, no segundo semestre de 2016, os resultados do ENEM por escola 2015. Esses resultados motivaram uma das pautas de uma reunião da qual participamos em nossa instituição. A proficiência média observada para Matemática e suas Tecnologias nos fez decidir, finalmente, por desenvolver um trabalho que pudesse contribuir para melhorar o desempenho dos nossos alunos no exame, sendo este planejado e implementado a partir de 2017.

O desenvolvimento desse trabalho motivou essa pesquisa, cujo objetivo geral foi analisar uma proposta desenvolvida no 3º ano do ensino médio da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, em Doutor Severiano/RN, de 2017 a 2020, voltada para a retomada de estudos de objetos do conhecimento abordados na educação básica e que estão relacionados às habilidades avaliadas no ENEM.

Já os objetivos específicos foram traçar um panorama histórico do ENEM, bem como enfatizar as competências e habilidades propostas para o ensino médio e que são avaliadas no exame; buscar e analisar informações, para que pudéssemos perceber a influência da proposta no desempenho dos nossos alunos, na prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, e atualizar a proposta para ser reimplantada, a partir de 2023.

Na busca de trabalhos que pudessem auxiliar no alcance dos nossos objetivos, acessamos a plataforma do PROFMAT na internet, pois, fazendo parte do programa, já tínhamos conhecimento da existência de um acervo de dissertações que resultaram de pesquisas direcionadas para o ensino. Como a nossa temática estava relacionada ao Exame Nacional do Ensino Médio, utilizamos, como filtro, o termo ENEM e nos deparamos com 60 registros. Optamos por analisar quatro deles, cujos temas deixavam evidente se tratar de trabalhos que tinham como objetivos trazer contribuições para a melhoria do desempenho de alunos no exame. De fato, as quatro dissertações analisadas, de uma mesma universidade, a Universidade Federal do Cariri (UFCA), em Juazeiro do Norte/CE, tinham seus objetivos associados à elaboração de um material didático que pudesse servir de suporte para estudantes e professores, numa retomada do estudo de objetos do conhecimento avaliados no exame.

O trabalho de Dantas (2020), Um Estudo sobre Funções em Provas do ENEM, como o próprio título expressa, tinha como objetivo principal proporcionar a alunos e professores um material que contemplasse as Funções, no sentido de colaborar para a compreensão de conceitos relacionados ao tema, maximizando as chances dos alunos ingressarem nas universidades.

Alcântara (2020), por sua vez, baseado em dados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), afirmou que boa parte dos estudantes brasileiros terminavam o ensino básico com baixo domínio dos conteúdos estudados em Matemática e, portanto, despreparados para enfrentar a prova do ENEM. Diante disso, o seu trabalho, com título *A Matemática Básica em Provas do ENEM*, visava, principalmente, fornecer a estudantes que desejassem se preparar para a prova e a professores que trabalhavam com a preparação destes, um material didático e prático que pudesse contribuir na consolidação de aprendizagens relacionadas à Aritmética Básica, Razões e Proporções e Métodos de Contagem.

Já o trabalho de Santos (2022), *A Geometria Analítica nas Provas do ENEM*, tinha como principal objetivo, também, elaborar um material de suporte para estudantes e professores do ensino médio, explorando essa temática, pois, segundo ele, era considerável o número de questões de Geometria na prova de Matemática do ENEM e que muitas dessas questões poderiam ser resolvidas por meio de argumentos da Geometria Analítica.

Cruz (2022), reconhecendo a relevância da Estatística para qualquer aluno que estivesse se preparando para realizar a prova do ENEM, em seu trabalho *Tópicos de Estatísticas nas Provas do ENEM*, propôs-se a analisar provas de Matemática e suas Tecnologias, aplicadas de 2009 a 2021, a apresentar um levantamento dos principais tópicos de Estatística que são cobrados na prova do exame e a elaborar um material didático que pudesse servir de suporte para estudantes que pretendessem ingressar no ensino superior.

Os quatro trabalhos a que nos referimos anteriormente, assim como o nosso trabalho, dispõem de uma motivação voltada para a melhoria do desempenho dos alunos no ENEM. Além disso, reconhecemos a necessidade de se disponibilizar para os estudantes um material sistematizado, elaborado de maneira a favorecer a retomada de aprendizagens a serem avaliadas no exame, seja para pesquisa ou para ser utilizado em sala de aula.

Os quatro autores pretendiam elaborar um material mais direcionado para pesquisa e análise. Entendemos que, por isso, eles elaboraram uma espécie de apostila, em que os temas abordados foram divididos em subtemas e, para cada subtema, além das informações relacionadas e das exemplificações, observamos um conjunto de questões já aplicadas em provas do ENEM, resolvidas e comentadas. O de Cruz (2022) vai um pouco além, propondo questões para serem resolvidas pelo aluno, acompanhadas do gabarito.

Já o nosso material foi elaborado para ser utilizado em aulas do 3º ano do ensino médio e para o encaminhamento de atividades extraclasse. Como pretendíamos contemplar todos os objetos do conhecimento que compõem a Matriz de Referência do ENEM, preferimos não inserir definições, fórmulas, exemplificações, questões resolvidas, dentre

outras informações, por entendermos que, à medida que os temas fossem sendo abordados e discutidos, os próprios alunos fariam as anotações que considerassem essenciais. Optamos, portanto, por selecionar questões de provas já aplicadas, a partir de 2009, e estruturar o material agrupando-as por objetos do conhecimento.

O material utilizado no desenvolvimento da proposta muito contribuiu para a retomada das aprendizagens avaliadas no ENEM, melhorando o desempenho dos nossos alunos, conforme evidenciam os dados levantados e analisados nesse trabalho. Entendemos que essa melhoria só foi possível, graças ao envolvimento dos alunos com as atividades propostas e à disposição do professor em orientar e acompanhar essas atividades.

A nossa dissertação está organizada em três capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais.

No Capítulo 2, fazemos, inicialmente, um panorama histórico sobre o ENEM, desde a sua instituição em 1998, refletindo sobre as várias mudanças implementadas no exame, as finalidades que foram sendo incorporadas a ele e sobre as perspectivas de novas mudanças com a implantação do Novo Ensino Médio. Em seguida, ressaltamos a importância dos currículos escolares e fazemos uma análise de documentos que foram referenciais para a elaboração deles, com destaque para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a mais recente referência curricular, que define uma base comum para o currículo das escolas de todo país, definindo competências e habilidades, cujo domínio deve ser garantido aos alunos, inclusive, às associadas à Matemática do ensino médio, foco da nossa pesquisa.

No Capítulo 3, trazemos detalhes sobre a proposta implementada no 3º ano do ensino médio da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, em Doutor Severiano/RN, a partir de 2017: o que a motivou, como foi elaborado o material utilizado, como foi executada, que alterações foram feitas, por que foi interrompida e o que pretendemos com ela.

No Capítulo 4, temos a análise dos resultados obtidos com a execução da proposta. Nessa análise, consideramos as respostas de questionários enviados a participantes do ENEM, que concluíram o ensino médio na Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, de 2017 a 2020; as notas enviadas por esses participantes, expressando o seu desempenho na prova de Matemática do exame e, também, resultados do desempenho médio dos alunos da escola, na prova de Matemática e suas Tecnologias, divulgados pelo INEP e por meios de comunicação, considerando dados do instituto.

Trazemos, ainda, uma amostragem do material didático que foi atualizado para a reimplantação da proposta em 2023 e que, sem dúvidas, servirá como ponto de partida para a elaboração de novas propostas.

## 2. DISCUSSÃO TEÓRICA

### 2.1. ENEM (PANORAMA HISTÓRICO)

A Matemática é um dos componentes curriculares obrigatórios nos currículos do ensino fundamental e médio e está presente em questões de exames aplicados nacionalmente, como é o caso do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A maioria dessas questões é fundamentada em conteúdos estudados no ensino básico, bem como nas competências e habilidades adquiridas pelos alunos, a partir da sua aprendizagem nesse nível de ensino.

O ENEM tornou-se um dos principais instrumentos para avaliar as escolas de ensino médio e os estudantes dessa etapa de ensino. A princípio, a função do ENEM se restringia a avaliar o desempenho dos estudantes ao fim da escolaridade básica; depois, novos objetivos foram sendo incorporados ao exame, transformando-o em um dos principais instrumentos de avaliação para selecionar alunos que almejam ingressar no ensino superior.

A criação do ENEM ocorreu a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) (1996), que introduziu importantes mudanças na educação brasileira. Nessa lei, já está posto que é incumbência da União assegurar um processo nacional de avaliação do rendimento escolar nos ensinos fundamental, médio e superior, em colaboração com os sistemas de ensino, objetivando a definição de prioridades e a melhoria da qualidade do ensino.

O ENEM foi instituído e normatizado pela Portaria Ministerial N° 438, de 28 de maio de 1998, sendo da responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) o planejamento e a operacionalização do exame. Os objetivos iniciais do exame, definidos na portaria, eram:

- I – conferir ao cidadão parâmetro para auto-avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho;
  - II – criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades do ensino médio;
  - III – fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior;
  - IV – constituir-se em modalidade de acesso a cursos profissionalizantes pós-médio.
- (BRASIL, 1998).

A referida portaria estabeleceu que o exame se constituiria de uma prova de múltipla escolha e de uma redação, em que seriam avaliadas as competências e habilidades desenvolvidas pelos participantes ao longo do ensino fundamental e do ensino médio. Essas

competências e habilidades estavam definidas numa Matriz de Referência, conforme consta na portaria, sendo cinco competências e vinte e uma habilidades.

E assim ocorreu de 1998 a 2008, o ENEM era composto de uma prova de redação e de 63 questões interdisciplinares, de modo que cada uma das vinte e uma habilidades era avaliada por três questões.

Sobre essa primeira versão do ENEM, Torres (2002) reafirma o caráter interdisciplinar das questões. Segundo ele, as 63 questões objetivas versam sobre as diferentes áreas do conhecimento, abordando seus conteúdos disciplinares de uma maneira integrada e complementar (TORRES, p. 35).

Quanto ao modelo de avaliação proposto para o ENEM, vale ressaltar o que está posto nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

O modelo de avaliação do Enem foi desenvolvido com ênfase na aferição das estruturas mentais com as quais construímos continuamente o conhecimento e não apenas na memória, que, importantíssima na constituição de nossas estruturas mentais, sozinha não consegue fazer-nos capazes de compreender o mundo em que vivemos, tal é a velocidade das mudanças sociais, econômicas, tecnológicas e do próprio acervo de novos conhecimentos, com os quais convivemos diariamente. (BRASIL, 2002, p. 11)

Torres (2002) também faz considerações nesse sentido. Para a autora

[...] esse modelo de avaliação busca medir e qualificar as estruturas mentais que permeiam as interações do sujeito com uma realidade física e social hoje repleta de contínuas transformações. Além disso, foca particularmente as competências e habilidades básicas que, teoricamente, são desenvolvidas, transformadas e aperfeiçoadas também por meio da mediação da escola (TORRES, p. 35)

Desde a sua criação, o ENEM passou por algumas mudanças. Duas delas nos chamaram a atenção por terem contribuído para um aumento considerável no número de participantes. A primeira ocorreu em 2001. Com a intenção de democratizar o acesso à participação no exame, o governo isentou do pagamento da taxa de inscrição os participantes que cursaram o ensino médio e a Educação de Jovens e Adultos (EJA) em escolas da rede pública. Com essa isenção, o número de inscritos, segundo dados do MEC, passou de 390.180 no ano de 2000 para 1.624.131 em 2001, correspondendo a um aumento de, aproximadamente, 316,25%. A segunda delas ocorreu a partir de 2005, com a instituição do Prouni. Criado pela Medida Provisória Nº 213 de 10 de setembro de 2004 e institucionalizado pela Lei Nº 11.096, de 13 de janeiro de 2005, o Prouni trata da concessão de bolsas integrais e parciais, em instituições de educação superior (IES) privadas, a participantes do ENEM, aumentando assim as possibilidades dos estudantes

terem acesso ao ensino superior. Com a instituição do programa, o número de inscritos, segundo dados do MEC, passou de 1.552.316 em 2004 para 3.004.491 em 2005, equivalendo a um aumento de, aproximadamente, 93,55%.

Krane (2012) se refere à mudança ocorrida no ENEM, a partir de 2005, como um marco das modificações dos objetivos promovidas no ENEM. Segundo ela:

Esse é um movimento expressivo de modificação em sua característica inicial: o ENEM deixa de ser uma atividade que tem por objetivo retratar a educação como um todo, identificando positivamente e falhas a serem sanadas, para se tornar um instrumento de seleção dos indivíduos, com vistas ao ingresso no ensino superior. (KRANE, p.37)

Vale ressaltar, aqui, a importância do Prouni no seu propósito de inclusão social, por meio de bolsas de estudo, em que considera, para a concessão, o fato dos estudantes terem cursado o ensino médio em escolas públicas, a renda familiar per capita e reservar parte das bolsas para os autodeclarados negros e indígenas. É nesse sentido que Escott (2015) se refere ao Prouni como uma das iniciativas que buscam diminuir a discrepância social, bem como as dificuldades de acesso ao ensino superior. Para ela, parece ser um primeiro passo na reparação das perdas historicamente acumuladas pelos grupos em desigualdade social.

Também em 2005, o INEP publica o documento Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Fundamentação Teórico-Metodológica. Trata-se de textos elaborados pelos autores da Matriz do ENEM, com a concepção teórico-metodológica do exame, que pretendem:

[...] contribuir para uma melhor compreensão dos eixos cognitivos que o estruturam e, mais do que isso, na medida em que professores, educadores, pesquisadores e o público em geral a eles tenham acesso, possam discutir e melhor refletir sobre o significado de seus resultados ao longo desses oito anos de avaliação (BRASIL, 2005, p, 8).

Ainda em 2005, foi divulgado, pela primeira vez, o ENEM por Escola. Segundo informações disponíveis no portal do MEC (2018), o cálculo e a divulgação pelo INEP de uma média para as escolas, baseada no desempenho dos seus alunos, visavam a auxiliar professores, diretores e demais gestores educacionais na identificação de deficiências e boas práticas. Percebemos que a intenção do INEP era criar um recurso para subsidiar o planejamento e o estabelecimento de estratégias em prol da melhoria do ensino, no entanto, os resultados divulgados começaram ser utilizados para estabelecer um *ranking* entre as escolas, estimulando a competição entre elas na busca de melhores resultados. A última edição do ENEM por Escola ocorreu em 2015 e o seu encerramento foi anunciado em 2017, em função da inadequação do uso dos resultados como indicador de qualidade do ensino médio, pelo uso

inapropriado por parte da mídia e de alguns gestores educacionais, que buscavam ranquear as escolas (MEC, 2018). Para o INEP, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) tem instrumentos mais adequados para a avaliação da qualidade da educação ofertada nos sistemas de educação e nas escolas brasileiras. Para fortalecer esse entendimento, desde 2017 o SAEB ampliou a aplicação da prova para o ensino médio da rede pública, tornando-a censitária.

O fato é que as alterações implementadas no ENEM vão consolidando-o, não só como política de avaliação para o ensino médio, mas também como instrumento de acesso ao ensino superior. A partir de 2009, mudanças significativas ocorreram no exame, tanto nos seus objetivos quanto na estrutura da prova, nos procedimentos de aplicação e no cálculo da proficiência das provas.

Ao propor à Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior (ANDIFES) que o novo ENEM passasse a ser utilizado pelas instituições de ensino superior para subsidiar seus processos seletivos, o MEC esclareceu os principais objetivos da proposta. Um deles estava voltado para a democratização das oportunidades de concorrência às vagas federais de ensino superior, descentralizando os exames e possibilitando uma maior mobilidade entre os estudantes nas diferentes unidades da Federação.

De fato, a partir da instituição do agora denominado novo ENEM, a utilização da nota do exame passou a ser parâmetro único na seleção de candidatos para o ingresso nas universidades e nos institutos federais de educação e em grande parte das universidades públicas estaduais. Para tratar dessa seleção de maneira ágil, eficaz e segura, foi concebido o Sistema de Seleção Unificada (SISU), instituído e normatizado pela Portaria Nº 2 de 26 de janeiro de 2010.

Um outro objetivo diz respeito à utilização do novo ENEM como instrumento de indução da reestruturação dos currículos do ensino médio. No que se refere a esse segundo objetivo, é argumentado na proposta que

A nova prova do Enem traria a possibilidade concreta do estabelecimento de uma relação positiva entre o ensino médio e o ensino superior, por meio de um debate focado nas diretrizes da prova. Nesse contexto, a proposta do Ministério da Educação é um chamamento. Um chamamento às IFES para que assumam necessário papel, como entidades autônomas, de 128 protagonistas no processo de repensar o ensino médio, discutindo a relação entre conteúdos exigidos para ingresso na educação superior e habilidades que seriam fundamentais, tanto para o desempenho acadêmico futuro, quanto para a formação humana (BRASIL, 2009).

A utilização da nota do ENEM para que jovens e adultos pudessem obter a certificação de conclusão do ensino médio foi outra novidade trazida pelo exame. Através da Portaria Nº

807, de 18 de junho de 2010, o MEC estabeleceu que participantes do ENEM, com mais de dezoito anos e com nota mínima de 500 (quinhentos) pontos na redação e, pelo menos, 400 (quatrocentos) pontos em cada uma das áreas do conhecimento, poderiam solicitar o certificado de conclusão do ensino médio na instituição certificadora por eles indicada no ato da inscrição.

O novo ENEM é organizado por meio de uma nova Matriz de Referência publicada em 2009, que contempla cinco eixos cognitivos, comuns a todas as áreas do conhecimento. Esses eixos são dominar linguagens, compreender fenômenos, enfrentar situações-problema, construir argumentações e elaborar propostas, cuja matriz continua baseada em competências e habilidades desenvolvidas pelos participantes no decorrer da educação básica, só que, agora, para cada área do conhecimento e não mais associadas aos conteúdos do ensino fundamental e médio, conforme propunha a matriz anterior.

No que se refere à estrutura da prova, conforme consta na Portaria Nº 109, de 27 de maio de 2009 (INEP), ela passa a ter, além da proposta de redação, 180 (cento e oitenta) questões objetivas de múltipla escolha, divididas em 4 (quatro) provas, versando sobre as quatro áreas do conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias, sendo 45 (quarenta e cinco) questões para cada área.

Rabelo (2013), ao se referir ao ENEM e as alterações ocorridas no exame, também faz referência a essa estrutura da prova, a partir de 2009, e enfatiza as mudanças implementadas para a área de Matemática e suas Tecnologias, relacionando elementos que podem ser encontrados na Matriz de Referência para o ENEM, como os cinco eixos cognitivos, que são comuns a todas as áreas avaliadas no exame, as sete competências para a área, que estão desdobradas em 30 habilidades, e os objetos do conhecimento que são utilizados para a elaboração das questões. Além disso, o autor esclarece que, em geral, as questões de Matemática são apresentadas na forma de situações-problema, em que o participante deve resolver mobilizando conhecimentos cognitivos e conceituais adquiridos ao longo da educação básica.

Assim como os professores das demais áreas, nós professores de Matemática devemos estar atentos para essas mudanças, visto que muitas das questões do ENEM, inclusive as da prova de Matemática, são interdisciplinares e/ou contextualizadas, ou seja, não avaliam apenas conhecimentos específicos da área e, além disso, procuram relacionar o que está sendo cobrado nas questões a uma situação hipotética, a um contexto.

O Quadro 1 nos traz um exemplo de questão onde a interdisciplinaridade e a contextualização estão presentes.

Quadro 1 - Questão 164 da prova amarela de Matemática do ENEM 2011

Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil  $\text{km}^2$  de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por  $\text{km}^2$ , é de

- (A) 250.
- (B) 25.
- (C) 2,5.
- (D) 0,25.
- (E) 0,025.

Fonte: BRASIL/MEC/INEP, 2011.

Trata-se de uma questão relativamente fácil que, considerando o conceito avaliado e o contexto abordado, poderia estar na prova de Ciências Humanas e suas Tecnologias. Densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes e a área ocupada por eles. O contexto relacionado à questão e o conceito avaliado por ela são muito abordados em Geografia, no entanto, para resolvê-la o participante faria uso de um conhecimento (razão) que pode ser desenvolvido em aulas de Matemática.

Já é fato que a contextualização e a interdisciplinaridade estão contempladas no ENEM. Rodrigues (2013), ao analisar as questões de Matemática cobradas no exame de 2009 a 2012, evidencia esse fato, mas aponta que as questões de caráter interdisciplinar vêm diminuindo gradativamente. Quanto às questões de caráter contextualizado, ele reconhece que são mais recorrentes nas provas.

A utilização da Teoria da Resposta ao Item (TRI) para análise do desempenho dos participantes é adotada pelo novo ENEM. Com a utilização dessa nova metodologia, não se contabiliza apenas o número total de acertos no teste, mas também o padrão de respostas do aluno.

Sobre o cálculo da nota do ENEM em TRI, o MEC esclarece que

Diferentemente de uma prova comum, a nota do Enem em cada área não representa simplesmente a proporção de questões que o estudante acertou na prova. Em cada uma das quatro áreas avaliadas, a média obtida depende, além do número de

questões respondidas corretamente, também da dificuldade das questões que se erra e se acerta, e da consistência das respostas. Por isso, pessoas que acertam o mesmo número absoluto de itens podem obter médias de desempenho distintas (BRASIL, 2010).

Pacheco (2013) reforça as finalidades da TRI, ao afirmar:

No Enem, o cálculo da proficiência, a partir do uso da TRI, permite acrescentar outros aspectos além do quantitativo de acertos, tais como os parâmetros dos itens e o padrão de resposta do participante, pois a teoria modela a probabilidade de um indivíduo responder corretamente a um item como função dos parâmetros do item e da proficiência (habilidade) do respondente. A estimação da proficiência está relacionada ao número de acertos, aos parâmetros dos itens e ao padrão de respostas. Assim, duas pessoas com a mesma quantidade de acertos na prova são avaliadas de forma distinta, pois o resultado depende de quais itens foram respondidos corretamente e quais não foram, o que expressaria as habilidades diferentes de cada um dos indivíduos. (PACHECO, 2013, p. 222-223).

Estes dois esclarecimentos trazidos pelo MEC e por Pacheco evidenciam que, além de acertar as questões, os participantes precisam demonstrar coerência em suas respostas, uma vez que a TRI calcula a proficiência de cada participante, verificando quais acertos ocorreram em questões consideradas fáceis, médias ou difíceis; se houve mais acertos em questões consideradas médias e fáceis ou se, ao contrário, houve mais acertos em questões consideradas difíceis, o que representaria uma incoerência.

Para calcular a nota do ENEM por meio do modelo TRI, o INEP montou uma escala para cada área do conhecimento, com base no desempenho dos participantes do exame que concluíram o 3º ano do ensino médio no ano de 2009. É como se fosse uma régua para medir o nível de conhecimento dos participantes, conforme podemos ver na Figura 1:

Figura 1 - Ilustração da escala de proficiência do ENEM



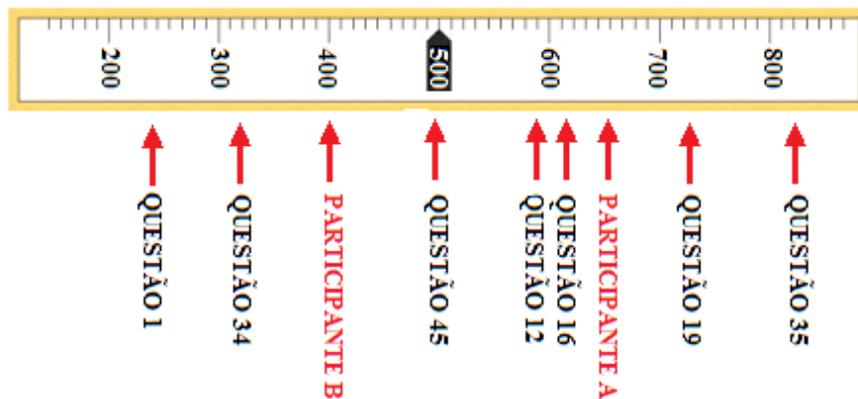
Fonte: BRASIL/INEP/MEC, 2021

Notemos que a pontuação 500 (quinhentos) está posicionada no meio da régua. É o valor de posição ou de referência. Segundo consta no guia do participante do ENEM 2021, essa pontuação representa o desempenho médio dos concluintes regulares do ensino médio de 2009 que realizaram o exame naquele ano. Notemos, ainda, que são utilizados intervalos de

100 pontos, posicionando-se, para baixo, 400 (quatrocentos), 300 (trezentos) e 200 (duzentos) e, para cima, 600 (seiscentos), 700 (setecentos) e 800 (oitocentos). O número 100 (cem) é o valor dispersão, também conhecido como desvio padrão que, conforme o guia, representa uma medida de variabilidade média das notas desses concluintes em relação ao desempenho médio 500 (quinhentos).

Na régua são posicionadas todas as questões de determinada área, por seu grau de dificuldade, considerando uma coerência pedagógica. Assim, cada questão ocupa um lugar na régua e o participante também é posicionado nela, em função do seu desempenho. A figura 2 representa um exemplo desse posicionamento. Vejamos:

Figura 2 - Exemplo de alocação de questões e participantes na mesma escala.



Fonte: BRASIL/INEP/MEC, 2021

Analisando a posição das questões, podemos afirmar que as questões 1 e 34 são mais fáceis, a 45 exigirá um nível médio de conhecimento e as questões 12, 16, 19 e 35 são mais difíceis.

Ampliando a análise para a posição das questões, juntamente com a posição dos participantes A e B, podemos constatar que o participante A desenvolveu as habilidades avaliadas nas questões 1, 12, 16, 34 e 45 e não desenvolveu as avaliadas nas questões 19 e 35. Já o participante B desenvolveu apenas as habilidades cobradas nas questões 1 e 34 e não teve domínio sobre as habilidades cobradas nas questões 12, 16, 19, 35 e 45. Nesse exemplo, em particular, seria possível afirmar que a nota obtida por A seria maior do que a de B, pois A acertou as mesmas questões acertadas por B e mais três outras questões.

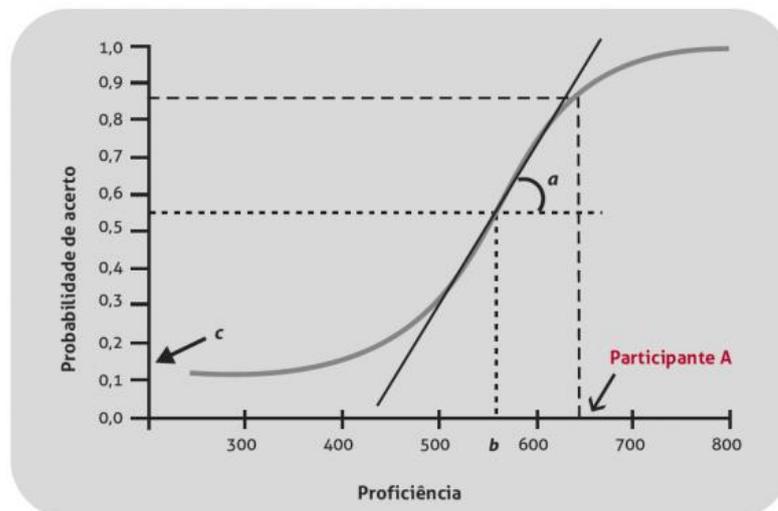
Para se atribuir o posicionamento de cada questão na escala (régua), ela passa por um pré-teste. Os pré-testes são realizados pelo MEC e deles participam alunos de escolas espalhadas por todo país, que resolvem as questões a serem testadas.

Para garantir uma boa qualidade do exame, o INEP considera três parâmetros para a tabulação dos resultados dos pré-testes.

- a) parâmetro de discriminação: é o poder de discriminação que cada questão possui para diferenciar os participantes que dominam dos participantes que não dominam a habilidade avaliada naquela questão (item);
- b) parâmetro de dificuldade: associado à dificuldade da habilidade avaliada na questão, quanto maior seu valor, mais difícil é a questão. Ele é expresso na mesma escala da proficiência. Em uma prova de qualidade, devemos ter questões de diferentes níveis de dificuldade para avaliar adequadamente os participantes em todos os níveis de conhecimento;
- c) parâmetro de acerto casual: em provas de múltipla escolha, um participante que não domina a habilidade avaliada em uma determinada questão da prova pode responder corretamente a um item devido ao acerto casual. Assim, esse parâmetro representa a probabilidade de um participante acertar a questão não dominando a habilidade exigida. (BRASIL, 2021, p. 8).

Vejamos o Gráfico 1 que apresenta, como exemplo, o perfil de uma questão, no que se refere aos três parâmetros. Nele é relacionada a probabilidade de acertos com a proficiência dos respondentes, resultando numa curva obtida pelo modelo de TRI.

Gráfico 1 - Curva característica do item



Fonte: BRASIL/INEP/MEC, 2021

Observando o Gráfico 1, podemos perceber que no ponto onde a reta inclinada tangencia a curva, temos o parâmetro  $b$  de dificuldade. Assim, para essa questão, é esperado que participantes com proficiência superior a esse parâmetro tenham uma maior probabilidade

de acertá-la. Obviamente a probabilidade se reduz para aqueles, cuja proficiência esteja abaixo do parâmetro  $b$ . No caso do participante A exemplificado no gráfico, que dispõe de uma proficiência em torno dos 650 pontos, sua probabilidade de acertar a questão é de aproximadamente 85%. Logo, aproximadamente 85% dos participantes de proficiência em torno dos 650 pontos tendem a acertar a questão exemplificada.

Testadas as questões e obtidos os valores para os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ , elas passam a compor um banco de dados do MEC, de onde são retiradas as questões para a elaboração das provas de cada uma das quatro áreas. São questões em que o domínio das competências, habilidades e objetos do conhecimento previstos na matriz de referência do ENEM possam ser avaliados.

É a utilização da TRI que justifica o fato de, por exemplo, dois participantes com o mesmo número de acertos no ENEM obterem notas diferenciadas. Na figura 3, temos uma demonstração de dois participantes com proficiências diferentes, embora tenham obtido igual número de acertos, para um mesmo número de questões.

Figura 3 - Padrão de respostas de dois participantes a 10 questões e suas respectivas proficiências



Fonte: BRASIL/INEP/MEC, 2021

Notemos que o participante A acertou cinco das dez questões quatro fáceis e uma média. Subentendemos daí que esse aluno dispõe de conhecimentos a respeito dos temas

abordados num nível baixo. O participante B, ao contrário, acerta apenas uma fácil, uma média e três difíceis. Nesse segundo caso, há grande probabilidade de o aluno ter acertado, por acaso, suas respostas, o que fez com que sua nota fosse inferior.

Entendemos ser interessante que o participante tenha algum conhecimento de como será avaliado o seu desempenho no ENEM, até para que ele planeje algumas estratégias para o momento das provas. No entanto, mais interessante ainda é que ele, ao longo da educação básica, disponha de meios que possibilitem desenvolver as competências e habilidades avaliadas no exame. Assim, ele terá convicção das suas respostas e a coerência buscada nelas, através da TRI, não faltará.

Em 2017, diante das reformas por que vinha passando a educação, o MEC efetuou alterações no objetivo principal do ENEM. Segundo consta no Art. 2º da Portaria 468 de 3 abril de 2017, objetivo primordial do exame é:

[...] aferir se aqueles que dele participam demonstram, ao final do ensino médio, individualmente, domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna e se detêm conhecimento das formas contemporâneas de linguagem (BRASIL, 2017).

Nessa mesma Portaria, o MEC excluiu a possibilidade dos participantes obterem certificação de conclusão do ensino médio. Assim, os maiores de dezoito anos que não concluíram na idade prevista podem obter o certificado do ensino médio participando de avaliações próprias, como é o caso do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA).

Já em 2020 o MEC traz uma nova alteração para o objetivo do ENEM. Ao instituir normas complementares consideradas necessárias para o cumprimento da Política Nacional de Avaliação da Educação Básica, ele estabelece, no Art. 18 da Portaria Nº 458 de 5 de maio de 2020, que o ENEM tem como objetivo aferir o domínio das competências e das habilidades esperadas ao final da educação básica, de acordo com a BNCC e as correspondentes diretrizes curriculares nacionais (BRASIL, MEC).

Foi também em 2020 que o ENEM passou a ter aplicação digital. A intenção é que esse formato vá sendo implantado progressivamente, devendo se consolidar em 2026.

No início de 2022, começou-se a colocar em prática uma série de inovações propostas para o ensino médio, cujas mudanças tendem a proporcionar aos alunos direitos a aprendizagens e condições mais favoráveis para aprofundar seus estudos em áreas do

conhecimento, com as quais mais se identificam. Dentre essas mudanças, vale ressaltar a ampliação da carga horária e, principalmente, a implementação de novos currículos fundamentados na BNCC e nos Itinerários Formativos, que têm como foco as áreas do conhecimento.

Para se adaptar às mudanças que estão sendo implementadas no ensino médio, o ENEM também passará por inovações, já previstas para 2024. Essa previsão se justifica porque o MEC, através da Portaria Nº 521, de 13 de julho de 2021, definiu um cronograma nacional de implantação dos referenciais curriculares nos três anos no ensino médio, iniciando pelo 1º ano em 2022, dando continuidade pelo 2º ano em 2023 e concluindo pelo 3º ano em 2024.

A Resolução Nº 03 de 21 de novembro de 2018, do Conselho Nacional da Educação (CNE), que atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o ensino médio, prevê como será ENEM a partir de 2024. Vejamos as alterações que estão postas no Art. 32 da Resolução:

Art. 32. As matrizes do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e dos demais processos seletivos para acesso à educação superior deverão necessariamente ser elaboradas em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o disposto nos Referenciais para a Elaboração dos Itinerários Formativos.

§ 1º O Exame Nacional do Ensino Médio será realizado em duas etapas, em que a primeira terá como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a segunda, o disposto nos Referenciais para a Elaboração dos Itinerários Formativos.

§ 2º O estudante inscrito no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) escolherá as provas do exame da segunda etapa de acordo com a área vinculada ao curso superior que pretende cursar.

§ 3º As instituições de ensino superior deverão considerar para fins de acesso os resultados de ambas as etapas do Exame Nacional do Ensino Médio, quando for o caso. (BRASIL, p. 13)

O mesmo CNE, em 14 de março de 2022, através do Parecer Nº 5/2022, fez recomendações de diretrizes para o novo ENEM. Essas recomendações preveem um exame de caráter voluntário, com a finalidade de avaliar alunos que concluíram o ensino médio e será realizado em duas etapas. Para a primeira etapa, é sugerida a prova de redação e questões abertas e de múltipla escolha, contextualizadas e interdisciplinares, que contemplem as competências e habilidades das quatro áreas do conhecimento, definidas na BNCC para a educação básica. Para a segunda etapa, está previsto que os participantes escolherão a área de conhecimento da prova, dentre os quatro Itinerários Formativos, dependendo do seu interesse. O parecer aprovado pelo CNE não faz menção ao formato das questões da prova da segunda etapa. Nele, também não há nenhuma referência ao número de questões para a nova versão do ENEM.

É importante destacar que o cronograma que vinha sendo seguido, na implantação do Novo Ensino Médio, foi suspenso pelo Ministério da Educação, através da Portaria N° 627 de 4 de abril de 2023. O prazo da suspensão é de 60 (sessenta) dias, após a conclusão da consulta pública para a avaliação da reestruturação da política nacional de ensino médio, direcionada a estudantes, professores e gestores escolares e que se encerrou em 06 de julho de 2023. Acreditamos que as discussões que estão ocorrendo em relação ao ensino médio se estenderão ao ENEM. Assim sendo, as mudanças previstas para o exame, em 2024, poderão não ocorrer conforme o previsto.

A seguir, trataremos das competências e habilidades para a Matemática do ensino médio, as quais estão expressas na BNCC e são referências para os currículos escolares. É necessário que as escolas estejam atentas para as mudanças previstas para o ENEM e seus currículos garantam aos alunos o direito a desenvolver as competências e habilidades dos diferentes níveis de ensino, que são aquelas avaliadas no exame.

## 2.2. COMPETÊNCIAS E HABILIDADES ASSOCIADAS À MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO.

O currículo é um dos principais documentos que embasam o trabalho de uma escola e da prática docente.

Para D'Ambrosio (1998), currículo é a estratégia para a prática educativa. Ao mesmo tempo em que define currículo, ele faz referências a três dos seus componentes: objetivos, conteúdos e métodos e que estes devem estar integrados no processo educativo. Para ressaltar a importância da integração entre os componentes do currículo, o autor faz menção ao que ocorreu com a Matemática Moderna. Segundo ele, uma das razões mais fortes para o seu fracasso foi o fato de terem sido alterados os conteúdos sem uma adequada reformulação de objetivos e de métodos.

Forquin (1993, p. 22) define currículo escolar como sendo um percurso educacional, um conjunto contínuo de situações de aprendizagem, às quais um indivíduo vê-se exposto ao longo de um dado período, no contexto de uma instituição de educação formal.

Já Saviani (2016), ao se referir ao currículo escolar, afirma que:

Currículo é entendido comumente como a relação das disciplinas que compõem um curso ou a relação dos assuntos que constituem uma disciplina, no que ele coincide com o termo programa. Entretanto, no âmbito dos especialistas nessa matéria tem prevalecido a tendência a se considerar o currículo como sendo o conjunto das atividades (incluído o material físico e humano a elas destinado) que se cumprem com vistas a determinado fim. Este pode ser considerado o conceito ampliado de currículo, pois, no que toca à escola, abrange todos os elementos a ela relacionados. (SAVIANI, 2016, p. 54).

Saviani (2016) também ressalta a importância do currículo escolar, ao considerar que o currículo em ato de uma escola não é outra coisa senão essa própria escola em pleno funcionamento, isto é, mobilizando todos os seus recursos, materiais e humanos, na direção do objetivo que é a razão de ser de sua existência: a educação das crianças e jovens.

Definições, como as de D'Ambrosio, Forquin e Saviani, apontam o currículo como um instrumento onde estão definidos os caminhos a serem seguidos pela escola, no seu processo de ensino e aprendizagem. É nele que são estabelecidos os objetivos da aprendizagem, as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, os objetos do conhecimento a serem estudados e como serão abordados em sala de aula, as metodologias e estratégias de aprendizagem adotadas pela escola e os processos de avaliação. Enfim, é o currículo que define os caminhos a serem seguidos pela escola, visando à formação plena dos seus alunos.

Quando nos referimos a currículo escolar, apontamos de imediato a BNCC como documento norteador da sua construção. A sua implementação tem sido motivo das principais discussões sobre a educação brasileira, o que é natural, já que define direitos de aprendizagens e as competências a serem desenvolvidas pelos alunos em cada modalidade da educação básica.

Antes da BNCC, leis e documentos voltados para a educação básica já consideravam a necessidade de se implantar uma base comum curricular para as escolas. A começar pela Constituição Federal (CF/1988) que, no seu Art. 210, estabelece a fixação de conteúdos mínimos que assegurem a formação básica e que respeitem os valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. Em seguida, destacamos a Lei das Diretrizes e Bases da Educação (LDB), os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN), as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e o Plano Nacional da Educação (PND).

A LDB, publicada em 1996, mas com várias alterações ao longo dos anos, vem atender ao que prevê a CF, direcionando-nos para um currículo com uma base comum e com uma outra parte diversificada, visando a atender aos interesses dos alunos, dependendo do meio em que vive.

É nesse sentido que a LDB (1996), no seu artigo 26 (alterado pela Lei Nº 12.796 de 2013), ao contemplar a educação básica, estabelece:

Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 2013).

Regulamentados pela CF e pela LDB, vieram os PCNs (1997). São documentos não obrigatórios, elaborados e publicados pelo governo federal para servirem de referências para elaboração do currículo em todas as etapas da educação básica. É lógico que com a instituição das DCNs e, posteriormente, da BNCC, os PCNs já não dispõem de tanta relevância, mas muito do que neles está proposto pode subsidiar as escolas na construção do seu currículo e, também, os professores na elaboração das suas aulas.

Ao contrário dos PCNs, as DCNs, são normas obrigatórias para a educação básica. Instituídas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) em 1997, elas também dispõem da função de orientar o planejamento curricular das escolas e dos sistemas de ensino. As DCNs têm origem na LDB (1996) que, ao tratar da Organização da Educação Nacional, estabelece, no seu Art. 9º, Inciso IV, que compete à União:

[...] estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum. (BRASIL, 1996)

O Plano Nacional da Educação (2014), de duração decenal, fixa, em sua Meta 7, Estratégia 7.1, que se deve:

[...] estabelecer e implantar, mediante pactuação interfederativa, diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos (as) alunos (as) para cada ano do ensino fundamental e médio, respeitada a diversidade regional, estadual e local BRASIL, 2014).

Eis que, em 22 de dezembro de 2017, foi publicada a Resolução Nº 2, do Conselho Nacional da Educação (CNE), que trata da instituição e da implantação da BNCC, muito discutida ultimamente como norteadora dos currículos escolares.

A BNCC é um documento que deve ser respeitado obrigatoriamente ao longo das etapas e respectivas modalidades da educação básica. A própria BNCC traz uma definição do que ela é:

[...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagens e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação ((BRASIL, 2018, p. 7).

A BNCC também se autodefine como

Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. (BRASIL, 2018, p. 8)

Como referência nacional para os currículos dos sistemas de ensino e das escolas de todo país, a BNCC traz, na sua proposta, um conjunto de aprendizagens a serem garantidas aos alunos, estabelecendo o mínimo de competências e habilidades que eles devem desenvolver em cada etapa do ensino básico. Com isso, ela busca uma equidade entre os

sistemas de ensino, mas sem desconsiderar que os currículos devem atender às diversidades dos Municípios, dos Estados e do Distrito Federal, onde escolas estão inseridas.

Ao mesmo tempo em que a BNCC aponta para a exigência de currículos diferenciados, a depender da realidade de cada ente federado, ela esclarece que as políticas nacionais de formação de professores, de avaliação e de material didático requerem similaridade entre os currículos, para que o país tenha uma referência comum em busca da melhoria da qualidade de educação.

A BNCC é o primeiro documento que dá ênfase às competências e habilidades que, segundo a Resolução Nº 2, do Conselho Nacional da Educação (CNE), devem ser consideradas como equivalentes a direitos e objetivos da aprendizagem.

Competência é definida na BNCC como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8).

Evidenciamos, daí, que a BNCC, na sua definição, vai além dos conhecimentos a serem adquiridos pelos alunos. Ela se preocupa também com a formação de cidadãos que disponham de habilidades, de criatividade, de atitudes e valores exigidos pela sociedade contemporânea. A base propõe, não só o que os alunos devem aprender, mas também, o que devem fazer com o que aprenderam.

Ao longo de toda a BNCC, há uma preocupação com o desenvolvimento de dez competências gerais, que são aquelas que fundamentam toda educação básica, orientando a construção dos currículos, do ensino infantil até o ensino médio. Ao definir essas competências, a BNCC reconhece que a educação deve afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza.

A BNCC lista as dez competências estabelecidas como gerais para todo o ensino básico. Em cada uma delas, é proposto o que deve ser aprendido e qual a finalidade daquela aprendizagem para a formação integral dos alunos. Na primeira competência, em que é dada ênfase ao conhecimento, temos, segundo a BNCC, valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital (o que deve ser aprendido) para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (finalidade da aprendizagem). O mesmo ocorre com as demais competências, que contemplam o pensamento científico, crítico e criativo, o repertório cultural, a comunicação, a cultura digital, o trabalho e projeto de vida,

a argumentação, o autoconhecimento e autocuidado, a empatia e cooperação e responsabilidade e autonomia.

Além das competências gerais, a base define um conjunto de competências específicas para cada uma das áreas do conhecimento, definindo, também, várias habilidades a serem desenvolvidas para cada área.

Em se tratando das habilidades, segundo o que está posto no documento, elas expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares.

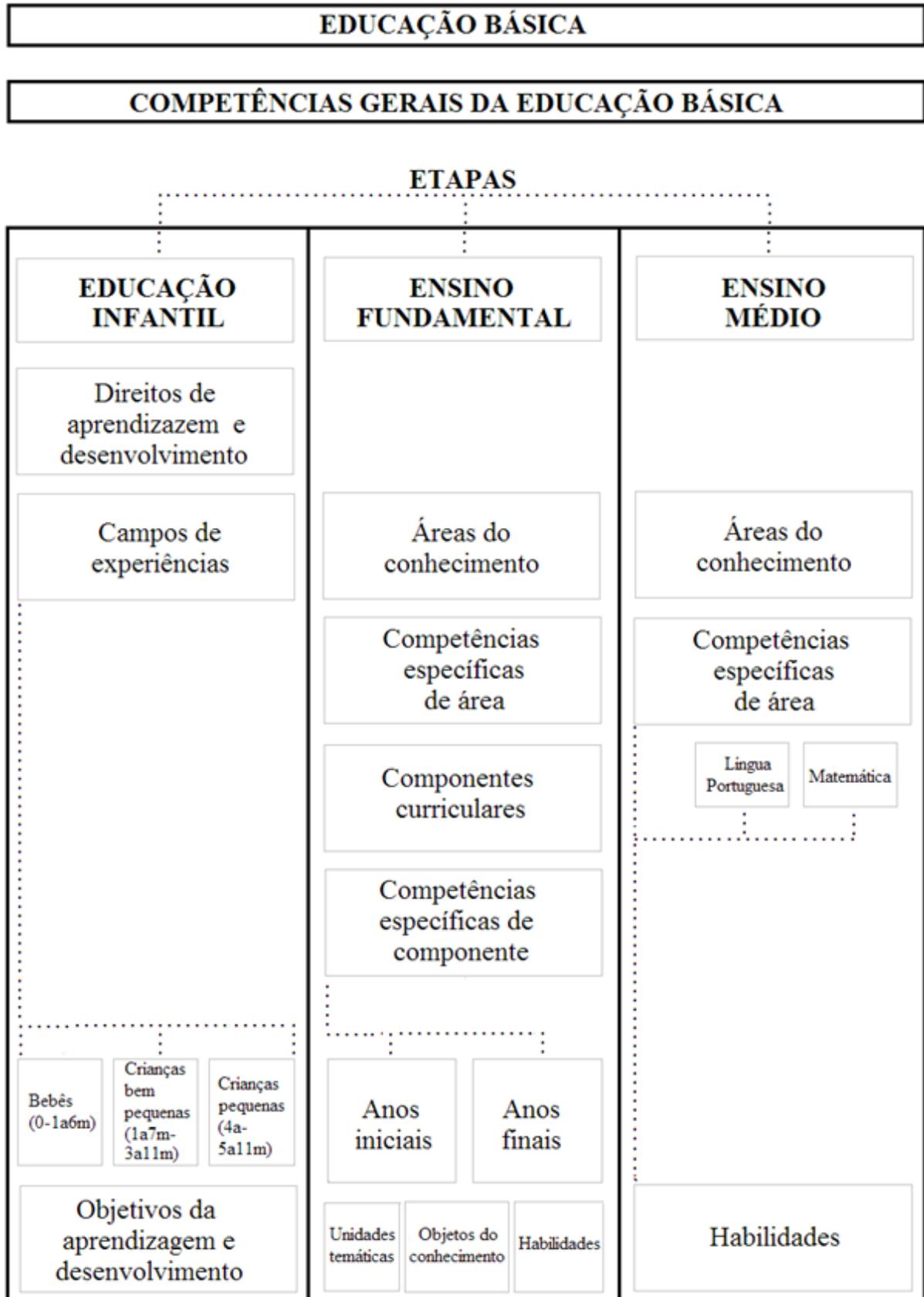
Entendemos que competências e habilidades são termos de significados diferentes, mas que se complementam. São as habilidades desenvolvidas que levam os alunos à construção das competências e que devem ser trabalhadas ao longo da trajetória dos alunos na educação básica, permeando os mais diversos componentes curriculares.

Macedo (2005) nos esclarece a diferença entre competência e habilidade com um exemplo. Para ele,

Resolver problemas, por exemplo, é uma competência que supõe o domínio de várias habilidades. Calcular, ler, interpretar, tomar decisões, responder por escrito, etc., são exemplos de habilidades requeridas para a solução de problemas de aritmética. (MACEDO, 2005, p. 19).

Em se tratando da estrutura da BNCC, o Quadro 2 traz um comparativo entre a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio que, obviamente, estruturam-se de maneiras diferentes.

Quadro 2 - Estrutura geral da BNCC para as três etapas da educação básica



Fonte: BNCC, 2018 (Adaptada)

Notemos que, na educação infantil, a BNCC não se refere a competências e habilidades, conforme ocorre nas outras duas etapas do ensino básico. Ela define os direitos de aprendizagem e desenvolvimento das crianças, que são trabalhados em campos de experiências. Segundo consta na base, esses direitos são: conviver, brincar, participar, explorar, expressar e conhecer-se e os campos de experiências são: o eu, o outro e o nós; corpo, gestos e movimentos; traços, sons, cores e formas; escuta, fala, pensamento e imaginação; espaços, tempos, quantidades, relações e transformações. Temos ainda que, para cada campo de experiência, são estabelecidos objetivos da aprendizagem e desenvolvimento, considerando a faixa etária das crianças.

Já o ensino fundamental é dividido por áreas de conhecimento, com a definição das competências específicas de cada área e por componentes curriculares, com a definição, também, das competências específicas de cada componente curricular. A cada área do conhecimento, temos um ou mais componentes curriculares associados. Segundo a estrutura da BNCC (2018), a área de Linguagens é formada pelos componentes Língua Portuguesa, Arte, Educação Física e Língua Inglesa; a área de Matemática, pela própria Matemática; a área de Ciências da Natureza, por Ciências; a área de Ciências Humanas, por História e Geografia e a área de Ensino Religioso, por Ensino Religioso. O ensino fundamental está dividido em duas etapas: anos iniciais (do primeiro ao quinto ano) e anos finais (do sexto ao nono ano). Para cada componente curricular, têm-se as unidades temáticas, que estão divididas em objetos de conhecimentos que, por sua vez, definem as habilidades.

Quanto ao ensino médio, que é o nosso principal foco, a BNCC organiza as aprendizagens, também, em quatro áreas do conhecimento. Com exceção da área de Matemática, as outras três áreas reúnem mais de um componente curricular. A área de Linguagens engloba Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Arte e Educação Física. A área de Ciências da Natureza é integrada por Biologia, Física e Química. Já a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas reúne Filosofia, História, Geografia e Sociologia.

Para cada área do conhecimento, além das competências gerais da educação básica, a BNCC estabelece competências específicas para serem desenvolvidas nos três anos do ensino médio. Muitas dessas competências estão propostas para o ensino fundamental, cabendo ao ensino médio, aprofundá-las e consolidá-las.

Sobre isso, vejamos o que afirma a BNCC:

Cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área, cujo desenvolvimento deve ser promovido ao longo dessa etapa, tanto no âmbito da BNCC como dos itinerários formativos das diferentes áreas. Essas competências explicitam como as competências gerais da Educação Básica se expressam nas áreas. Elas estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 33).

Vale ressaltar que, no ensino médio, Língua Portuguesa e Matemática são os únicos componentes curriculares para os quais estão definidas habilidades específicas. Isso porque, pela Lei 13.415 de 16 de fevereiro de 2017, esses dois componentes são obrigatórios nos três anos do ensino médio.

Como vimos, a BNCC sugere que seja feita, no ensino médio, uma retomada de alguns objetos do conhecimento, a partir dos quais estão organizadas as habilidades do ensino fundamental, para que os alunos possam ampliar e aprofundar aprendizagens essenciais, inter-relacionando, assim, os conhecimentos das duas etapas. A base demonstra, nessa retomada, uma forma de construir no aluno uma visão mais integrada da Matemática, considerando a sua aplicação em diferentes contextos. Dessa forma, há uma referência a esses objetos, dada a relação que eles têm com os objetos do conhecimento previstos para o ensino médio. São os considerados eixos matemáticos: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Outra proposta trazida pela base para a Matemática do ensino médio visa a assegurar o letramento matemático que, é definido como

[...] competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. O letramento deve também assegurar que todos os estudantes reconheçam que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para compreender e atuar no mundo e para que também percebam o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e que pode também ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 1998, 266).

Na verdade, o letramento matemático é proposto para a educação básica. Raciocinar, representar, comunicar e argumentar são habilidades a serem desenvolvidas em Matemática também do ensino fundamental, cabendo ao ensino médio tornar esse letramento mais eficiente, aprofundando e ampliando essas habilidades propostas no ensino da etapa anterior.

A lei 13.415/2017, conhecida como reforma do ensino médio, alterou o Art. 36 da LDB, estabelecendo que

O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:

- I – linguagens e suas tecnologias;
- II – matemática e suas tecnologias;
- III – ciências da natureza e suas tecnologias;
- IV – ciências humanas e sociais aplicadas;
- V – formação técnica e profissional.

Assim sendo, com a implantação do Novo Ensino Médio, os currículos das escolas já devem estar sendo constituídos por dois blocos, articulados e indissociáveis. Um deles está relacionado com Formação Geral Básica dos alunos, composto pelas áreas do conhecimento obrigatórias para a sua formação e referenciado pela BNCC. O outro é formado pelos Itinerários Formativos, que se trata de um conjunto de unidades curriculares escolhidas pelos alunos, conforme as suas necessidades e aspirações. Com essa nova proposta de ensino, o aluno pode escolher o Itinerário Formativo em que pretende aprofundar e ampliar seus conhecimentos; consolidar sua formação integral, tornando-se autônomo para realizar seu projeto de vida; incorporar valores, como solidariedade, justiça social, democracia, liberdade, ética, pluralidade e sustentabilidade; dispor de uma visão de mundo mais ampla, sendo capaz de tomar decisões e de agir em situações diversas do seu cotidiano. Com isso, ele vai se tornando protagonista da sua própria vida.

Os Itinerários Formativos permitem aos alunos se voltarem para uma das quatro áreas (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas ou Ciências da Natureza e suas Tecnologias), com enfoques que lhes permitam utilizar as competências e habilidades adquiridas em contextos diversos. Quanto aos Itinerários Técnicos e Profissionais, têm a finalidade promover a qualificação dos alunos para o mundo do trabalho, o que pode ocorrer através de cursos técnicos ou de cursos de formação inicial e continuada, desde que articulados entre si.

Para atender a essas mudanças no ensino médio, foi proposta uma nova carga horária que, conforme a Lei 13.415 de 16 de fevereiro de 2017, Art. 24, será ampliada progressivamente para 1.400 (mil e quatrocentas horas anuais). Mas, a lei estabelece que, num prazo máximo de cinco anos, a contar de 2 de março de 2017, as redes de ensino podem oferecer, pelo menos, (1.000) mil horas anuais, correspondendo a (3.000) três mil horas durante os três anos de ensino médio. Dessas três mil horas, 1.800 (mil e oitocentas), no máximo, dever ser destinadas à parte comum da base curricular e 1.200 (mil e duzentas), no mínimo, destinadas aos Itinerários Formativos.

As mudanças que estão sendo promovidas no ensino médio, com a ampliação da carga horária e a implementação dos Itinerários Formativos, que trazem na sua composição Trilhas de Aprofundamento, certamente favorecerão o desenvolvimento de projetos que estejam voltados para o aprofundamento de aprendizagens, competências e habilidades da formação básica do aluno.

A seguir, trataremos de uma proposta que já vem sendo desenvolvida, em aulas de Matemática do 3º ano do ensino médio da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, visando a esse aprofundamento de aprendizagens, competências e habilidades da educação básica, com ênfase para aquelas avaliadas no ENEM. Na verdade, a proposta foi desenvolvida de 2017 a 2020 e foi atualizada para voltar a ser trabalhada a partir de 2023.

Estamos convictos de que as experiências vivenciadas, nos quatro anos em que trabalhamos com a proposta, associadas à ampliação dos nossos conhecimentos a respeito do ENEM, contribuirão para o seu aprimoramento. De fato, as discussões estabelecidas, até aqui, trouxe-nos novas informações sobre o exame, as quais nos fundamentarão melhor para a atualização e execução da proposta. São informações sobre a elaboração da prova e ao formato das questões, a influência da TRI na avaliação, os objetos do conhecimento relacionados às competências e habilidades a serem avaliadas, a importância do exame enquanto instrumento de seleção de estudantes para as universidades, dentre outras.

### 3. PROPOSTA METODOLÓGICA DESENVOLVIDA NA ESCOLA: CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO

Uma das pautas de discussões de uma reunião de que participamos na Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, no final de 2016, estava relacionada ao desempenho dos nossos alunos no ENEM em 2015. A Tabela 1 contém os dados que nos foram apresentados naquela ocasião, obtidos a partir do ENEM por Escola, que havia sido divulgado pelo INEP.

Tabela 1 - Resultado do ENEM por escola 2015, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz

<b>Área de conhecimento</b>	<b>Média de escola</b>
Linguagens	490,69
Matemática	442,53
Ciências Humanas	546,44
Ciências da Natureza	444,39
Redação	559,31
<b>MÉDIA DA ESCOLA</b>	<b>496,67</b>

Fonte: BRASIL/MEC/INEP, 2016

Entendemos que a divulgação dos resultados pela equipe pedagógica da escola, seguida de discussões, tinha por objetivo nos alertar sobre um resultado não muito satisfatório e que não poderia ser ignorado no planejamento das nossas atividades para o ano seguinte. No entanto, não deixaram de haver comparações. A pontuação de Matemática parecia confirmar muitas das afirmações negativas feitas sobre o componente, como por exemplo, disciplina em que os alunos obtêm as piores notas, componente curricular em que os alunos apresentam maior dificuldade ou, ainda, disciplina crítica da escola.

Reconhecemos que há dificuldades de aprendizagem em Matemática, assim como existem nas demais áreas do conhecimento e que podem estar relacionadas a um conjunto de fatores que envolvem o aluno, o professor, a escola, a família, dentre outros.

Ao ser questionado sobre ser a Matemática o componente curricular mais difícil, Lima (1995) nos faz compreender que essa impressão decorre do fato de que o estudo de Matemática exige dedicação, atenção e ordem. Para ele, se essa exigência significasse ser difícil, a resposta seria sim. Lima (1995) vai além nos seus argumentos, enfatizando a importância da disposição do aluno para aprender Matemática e das orientações adequadas de que ele precisa para que a aprendizagem ocorra, apontando, a partir daí, dois motivos para o mau desempenho dos alunos em Matemática. O autor afirma que:

[...] toda pessoa de inteligência média, sem talentos ou pendores especiais, pode aprender toda a Matemática, desde que esteja disposta a trabalhar e tenha uma orientação adequada. Aqui já vão dois dos motivos que você me pediu para o mau resultado no ensino da Matemática: pouca dedicação aos estudos por parte dos alunos (e da sociedade que os cerca, a começar pela própria família) e despreparo dos seus professores nas escolas que frequenta (LIMA, 1995, p. 3).

Ainda em relação às dificuldades de aprendizagem em Matemática, Bessa (2007) também acredita que elas podem estar relacionadas a fatores que envolvem aluno, professor, escola e família. Para a autora:

Fica evidente que as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem ser atribuídas aos mais diversos fatores, os quais podem estar relacionados, por exemplo: ao professor (metodologias e práticas pedagógicas), ao aluno (desinteresse pela disciplina), à escola (por não apresentar projetos que estimulem o aprendizado do aluno ou porque as condições físicas são insuficientes) ou à família (por não dar suporte e/ou não ter condições de ajudar o aluno) (BESSA, 2007, p. 4).

Quando pensamos numa proposta para ser implementada, na última série da educação básica, visando a melhorar o desempenho dos nossos alunos no ENEM, tínhamos consciência dos fatores que poderiam influenciar na aprendizagem em Matemática e que são relevantes durante toda a formação educacional do aluno. Desde os anos iniciais dessa formação, os alunos precisam ser incentivados a aprender, por professores habilitados, assim como estimulados, por uma escola comprometida e por um contexto familiar e social que favoreçam a aprendizagem.

No entanto, ao elaborar a proposta, pensamos mais especificamente em situações que pudessem trazer essa melhoria, a partir do envolvimento mais direto dos alunos e dos professores. Consideramos que, sendo o ENEM uma prova com muitos itens de dificuldade fácil e média e já tendo o aluno cursado praticamente toda a educação básica, aquela nota em Matemática trazida pelo resultado demonstrado na Tabela 1 poderia ter outras motivações, além do não domínio total das habilidades avaliadas. Poderia estar associada ao desinteresse pela disciplina e, conseqüentemente, ao desestímulo em responder a prova; a pouca dedicação aos estudos que, naturalmente, deveriam ser intensificados no ano que antecede o exame, no sentido de consolidar o domínio de habilidades relacionadas a objetos do conhecimento já estudados anteriormente; a pouca familiaridade com o tipo de abordagem trazida pelas questões da prova e, ainda, à indisposição do professor em propor e orientar atividades, em classe e extraclasse.

Muitas das habilidades avaliadas na prova do ENEM estão relacionadas a objetos do conhecimento estudados no ensino fundamental e que são retomados em séries seguintes desse nível de ensino ou nos três anos do ensino médio. As quatro operações fundamentais, por exemplo, estão presentes em praticamente todos os objetos do conhecimento estudados na educação básica. Para citar outros exemplos, o estudo das funções, no ensino médio, permite que os alunos ampliem e consolidem seus conhecimentos sobre o plano cartesiano, as expressões algébricas e as equações estudadas no ensino fundamental; o estudo da geometria plana retoma o estudo das áreas e perímetros; o da geometria espacial, retoma o estudo de volumes; a geometria analítica nos permite retomar, mais uma vez o estudo do plano cartesiano, das equações e até das funções; a matemática financeira nos permite reestudar as porcentagens.

O ideal seria que, ao longo da sua formação educacional, os alunos já fossem ampliando e consolidando o domínio das habilidades propostas para educação básica e que são avaliadas no ENEM. Convictos de que esse ideal não existe, mas que os alunos já dispõem de algum domínio sobre parte das habilidades avaliadas no exame, propomos algumas atividades, através das quais eles pudessem se autoavaliar e retomar o estudo de objetos do conhecimento estudados até então.

Como a carga horária disponibilizada para Matemática não era tão ampla, tivemos que optar por uma proposta que contemplasse atividades para serem iniciadas em aulas de Matemática e sequenciadas extraclasse.

Para facilitar o estudo e até para acompanhar e avaliar as atividades propostas, decidimos pela organização de um material que contivesse, principalmente, exercícios e situações-problema envolvendo objetos do conhecimento relacionados às habilidades a serem avaliadas no ENEM, descritas na Matriz de Referência do exame. Elaboramos, então, uma espécie de caderno com questões já cobradas em provas do ENEM, aplicadas de 2009 a 2016, dispondo-as de maneira a deixar espaços para cálculos e anotações que os alunos considerassem importantes e que precisassem ser revistos.

Optamos por estruturar o caderno a partir dessas provas, para que os alunos já fossem se inteirando sobre o formato das questões e a abordagem trazida por elas. Dessa forma, eles já iriam se conscientizando de que estariam diante de uma prova com questões interdisciplinares e/ou contextualizadas, que exigiriam leitura e compreensão dos enunciados e, principalmente, raciocínio rápido, dado o pouco tempo e a extensão da prova. Por outro lado, perceberiam a existência de questões com níveis diferenciados de complexidade, ficando atentos para não deixarem de resolver aquelas que seriam para eles de nível fácil ou médio.

Ainda no que se refere à estruturação do caderno, buscamos, inicialmente, na página do INEP, as provas aplicadas no exame de 2009 a 2016. Como havia mais de uma prova para um mesmo ano, aplicadas em datas diferentes, analisamos quatorze delas, verificando o(s) objeto(s) do conhecimento relacionado(s) a cada questão.

Feito isso, partimos para a organização do caderno. Achamos conveniente, logo no início do material elaborado, disponibilizarmos a Matriz de Referência. Em seguida, fomos agrupando as questões por objetos do conhecimento. Para cada objeto, selecionamos, no mínimo, dois itens, havendo aqueles para os quais foi selecionado um número maior, considerada a sua abrangência, a sua complexidade ou, ainda, a frequência com que ele era trazido pelo ENEM.

Iniciamos por agrupamento de questões mais associadas a conhecimentos numéricos e demos sequência com blocos de questões que contemplavam conhecimentos geométricos, conhecimentos algébricos, conhecimentos algébricos/geométricos e, finalmente, conhecimentos de estatística e probabilidade.

Vale ressaltar que a maneira escolhida para dispor as questões nos pareceu a mais lógica, mas não pudemos ser rigorosos quanto a ela. E não poderia ser diferente, já que se tratava de uma prova elaborada para avaliar o conhecimento matemático e este não é fragmentado. Desse modo, um objeto estudado em um bloco de questões era retomado em blocos estudados posteriormente.

A primeira versão do caderno, utilizado em 2017, continha 400 (quatrocentas) questões. Depois, fomos atualizando, ano a ano, inserindo novas questões, retirando outras, em função da similaridade entre elas. Em 2020, o nosso caderno já constava de 600 (seiscentas) questões, número que se manteve na versão atualizada para 2023.

Ao iniciar o ano letivo de 2017, procuramos, logo no primeiro dia de aula de Matemática, chamar a atenção dos alunos para o exame que se realizaria no final daquele ano e para a necessidade de eles disponibilizarem um tempo maior para estudos extraclasse, pois, além das atividades relacionadas ao último ano do ensino médio, pretendíamos rever objetos do conhecimento estudados até então e que estivessem relacionados às habilidades que seriam avaliadas no ENEM.

Mesmo conscientes de que a grade curricular do 3º ano do ensino médio permitiria o desenvolvimento e a ampliação de várias dessas habilidades, optamos por dispor de um encontro semanal com atividades mais voltadas para o exame, no sentido de contemplar, principalmente, a retomada daquelas habilidades que o aluno deveria ter desenvolvido e consolidado em anos anteriores da sua escolaridade. Ficou definido, então, que três das quatro

aulas semanais de Matemática seriam direcionadas para o estudo dos objetos do conhecimento previsto para o 3º ano e que a outra aula seria para a apresentação e discussão dos temas a serem revistos, bem como para o encaminhamento de atividades a serem realizadas em casa.

E, assim, trabalhamos a proposta nos anos de 2017, 2018 e 2019. Na aula presencial, iniciávamos o estudo de um determinado objeto do conhecimento, sugerindo que os alunos resolvessem, pelo menos, uma das questões do caderno relacionada ao objeto em estudo. Em seguida, estabelecíamos discussões, fazíamos anotações e encaminhávamos outras questões do caderno para serem resolvidas em casa. Na aula seguinte, antes de abordar um outro tema, questionávamos os alunos sobre possíveis dúvidas encontradas na resolução das questões encaminhadas para casa, verificávamos as anotações feitas por eles, sugeríamos que algum deles apresentasse a resolução para os demais.

À medida que íamos nos aproximando do exame, realizávamos simulados, com o objetivo de o aluno se autoavaliar e, também, para que ele pudesse se organizar para o tempo que utilizaria na resolução de uma prova com 45 questões.

Em 2020, já tínhamos nos articulado para a aquisição do material a ser utilizado em nossos estudos mais direcionados para o ENEM, quando suspenderam as aulas presenciais devido à pandemia da Covid 19. As aulas passaram a ser virtuais, através do Google Meet. Obviamente, tivemos muitas dificuldades para que essas aulas acontecessem, principalmente pelo fato de os alunos não disporem de computadores, celulares e nem de acesso à internet. Quando as dificuldades iniciais foram amenizando, sugerimos aos alunos um encontro semanal em que retomariamos o estudo de objetos do conhecimento relacionados às habilidades avaliadas no ENEM, fazendo uso do material já adquirido por eles. Agendamos o encontro para uma das aulas virtuais estabelecidas para Matemática. Nesse encontro, o tema era introduzido, analisávamos algumas questões relacionadas a ele e propúnhamos atividades para serem resolvidas e enviadas pela plataforma. Logo após o primeiro encontro, os alunos começaram a reclamar das atividades propostas e que seriam devolvidas ao professor, sob a alegação de que não sabiam resolver. Diante dessas reclamações e, como pretendíamos estimulá-los a estudar um pouco mais, sugerimos um outro encontro, de participação opcional, uma vez que não faria parte do horário definido pela escola, para que discutíssemos juntos as questões que compunham aquelas atividades. Consideramos que foi uma ideia oportuna pois, além de ampliarmos o tempo de estudos dos alunos, éramos menos abordados em grupos de aplicativos de mensagens, criados com a finalidade de atender aos alunos, diante de suas dúvidas

Em 2021, não tivemos como nos articular para a aquisição do material. Até cogitamos enviar através da plataforma, mas o acompanhamento através de aparelho celular foi apontado pelos próprios alunos como desfavorável. Vez por outra, introduzíamos alguns itens para discussões, na tentativa de retomar o estudo de objetos do conhecimento estudados em séries anteriores, no entanto, sem o material impresso para ir acompanhando a leitura, a análise e a resolução das questões tornou-se impossível implementar a proposta, pelo menos, como ocorreu no ano anterior.

Em 2022, estivemos afastados da escola, não havendo o retorno do trabalho com a proposta, sendo retomado em 2023. Conforme exposto anteriormente, o material utilizado foi atualizado, com substituições de alguns itens, mas com a manutenção do formato. Como ainda continuamos com uma carga horária de quatro aulas semanais, mantivemos a metodologia aplicada de 2017 a 2019.

Acreditamos que, com a implementação, no 3º ano, das mudanças trazidas pelo novo Ensino Médio e com as inovações previstas para o ENEM em 2024, teremos que repensar a proposta, no sentido de adaptá-la a essas mudanças e inovações.

Consideramos ser inviável trazer aqui todo o material elaborado. Daí, apresentamos, no Apêndice B, uma amostragem de como as questões estão nele dispostas.

#### 4. ANÁLISE DE DADOS DE PESQUISA APÓS A APLICAÇÃO DA PROPOSTA

Como o objetivo principal dessa pesquisa era analisar as contribuições trazidas por uma proposta implementada no 3º ano do ensino médio, visando a contribuir para melhorar o desempenho dos alunos no ENEM, consideramos ser indispensável a opinião deles sobre ela. Assim, elaboramos um questionário direcionado a alunos que concluíram o ensino médio nos anos de 2017 a 2020 e que participaram do ENEM.

Para o envio dos questionários, buscamos, na escola, a relação de alunos que concluíram o ensino médio nos referidos anos.

Enviamos 120 (cento e vinte) questionários, através de aplicativos de mensagens, sendo 30 (trinta) para alunos de cada um dos anos citados. Inicialmente, para aqueles de cujo contato já dispúnhamos e, através destes, fomos conseguindo outros contatos.

Como pretendíamos direcionar os questionários a alunos participantes do ENEM, logo no primeiro contato, além de sondá-los sobre a disposição em responder, perguntamos em que ano eles concluíram o ensino médio e se havia participado do exame naquele ano. À medida que os alunos retornaram o contato, dispondo-se a responder, os questionários foram enviados e, quando devolvidos com as respostas, foram impressos, facilitando, assim, a coleta dos dados.

As três primeiras perguntas objetivaram ratificar o que foi informado pelos alunos nos contatos que precederam o envio dos questionários.

Nas perguntas de números 01 e 02, questionamos sobre o ano de conclusão do ensino médio e a participação dos alunos no ENEM. Foram respondidos e devolvidos 90 (noventa) questionários, sendo 20 (vinte) de concluintes de 2017, 25 (vinte e cinco) de 2018, 25 (vinte e cinco) de 2019 e 20 (vinte) de 2020. Todos participantes do ENEM no ano em que concluíram.

Na pergunta de número 03, lembramos aos alunos que, de 2017 a 2020, foi trabalhada em turmas do 3º ano do ensino médio, em aulas de Matemática, uma proposta voltada para a retomada de objetos do conhecimento relacionados às habilidades avaliadas no ENEM. Em seguida, questionamos se eles tinham participado dessa proposta. Os 90 (noventa) alunos afirmaram ter participado, o que já era esperado, pois a participação não era opcional, já que, além de dispormos de uma das aulas da carga horária para orientações e discussões, havia um acompanhamento do cumprimento das atividades extraclasse propostas.

Entendíamos que o 3º ano do ensino médio não deveria, e não deve, ser transformado na série preparatória para o ENEM. Essa preparação deverá ocorrer, naturalmente, ao longo

de toda a educação básica. No entanto, o resultado do ENEM por escola nos apresentado em 2016, sobre o desempenho da nossa escola em 2015, levou-nos a perceber que o desempenho dos nossos alunos não vinha sendo muito favorável. Com essa pesquisa, resolvemos buscar as médias do ENEM da nossa escola, pelo menos, para o ano que antecedeu 2015. Encontramos dados levantados e publicados para o ENEM por escola 2014, a partir da divulgação do INEP. Esses dados estão na Tabela 2 e comprovam um pouco da nossa percepção. Observemos:

Tabela 2 - Resultado do ENEM por escola 2014, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz.

<b>Área do conhecimento</b>	<b>Média da escola</b>
Linguagens	481,42
Matemática	458,19
Ciências Humanas	511,02
Ciências da Natureza	463,78
Redação	478,11
<b>MÉDIA DA ESCOLA</b>	<b>478,50</b>

FONTE: <http://especiais.g1.globo.com/educacao/enem/2014/enem-2014-medias-por-escola> (Adaptado)

Buscamos também dados que pudessem refletir o desempenho dos nossos alunos, no ano que antecedeu a implementação da proposta. Para 2016, o INEP já não mais divulgou o ENEM por escola, mas publicava microdados, a partir dos quais repartições de ensino e meios de comunicação interessados faziam levantamentos e divulgavam as médias das escolas. A Tabela 3 contém dados levantados e publicados para o ENEM 2016, partindo desses microdados do INEP.

Tabela 3 - Resultado do ENEM por escola 2016, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz.

<b>Área do conhecimento</b>	<b>Média da escola</b>
Linguagens	482,08
Matemática	432,53
Ciências Humanas	491,11
Ciências da Natureza	456,08
Redação	518,67
<b>MÉDIA DA ESCOLA</b>	<b>476,09</b>

Fonte: <https://arte.folha.uol.com.br/cotidiano/2017/resultado-das-escolas-no-enem-2016> (Adaptado)

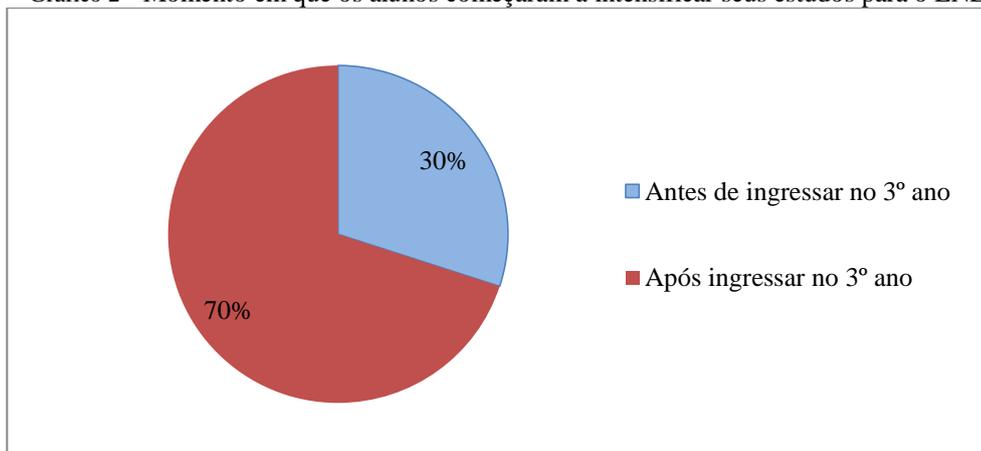
Embora todas as áreas motivassem preocupações, a de Matemática, na qual se concentrou o nosso interesse, apresentou detalhes que nos chamaram a atenção. Em 2014 e 2015, a média de Matemática foi a mais baixa das cinco, conseqüentemente, abaixo da média da escola. O mesmo ocorreu em 2016, que nos fez concluir que os nossos alunos não tinham um domínio consolidado sobre as habilidades avaliadas no exame.

Mesmo considerando que melhorar significativamente o desempenho dos nossos alunos num exame como o ENEM requereria muito mais do que implementar uma proposta às vésperas da sua realização, acreditávamos que desenvolver um trabalho, no ano em que os alunos participariam do exame, despertaria o seu interesse para a tão necessária retomada de temáticas relacionados às habilidades a serem avaliadas, estimulando-os a disponibilizarem mais horas de estudos extraclasse. Considerávamos, ainda, que os alunos, ao ingressarem na última série ensino médio, já dispunham de algumas competências e habilidades avaliadas no ENEM, pois, mesmo não tendo ainda a BNCC servindo de referência para as escolas elaborarem seus currículos, estas já contemplavam muitos dos objetos do conhecimento presentes nas questões. Assim, a proposição de atividades retomando temas que aparecem com mais frequência no exame poderia auxiliar na consolidação de aprendizagens, contribuindo, então, para a melhoria do desempenho dos alunos.

Nas perguntas de 04 a 07, buscamos respostas que justificassem, ou não, a implementação de uma proposta voltada para a retomada de objetos do conhecimento relacionados às habilidades avaliadas no ENEM, no último ano da educação básica.

Os alunos pesquisados, em sua maioria, dispõem de um poder aquisitivo baixo, o que obviamente dificultaria o acesso a um curso de nível superior, tendo que custeá-lo. Daí, introduzimos a pergunta de número 04, ressaltando a importância de um bom desempenho na prova do ENEM para aqueles que pretendessem ingressar em uma universidade gratuita, através do SISU ou do Prouni. Em seguida, questionamos: “Se você tinha a pretensão de conquistar uma vaga em uma universidade gratuita, a partir do seu desempenho no ENEM, em que momento começou a se preocupar em intensificar seus estudos para o exame?”. As respostas obtidas resultaram no Gráfico 2.

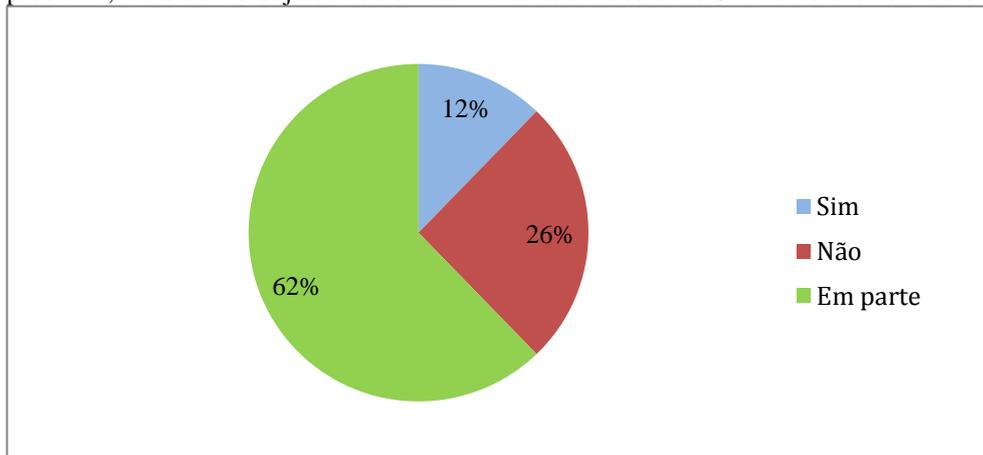
Gráfico 2 - Momento em que os alunos começaram a intensificar seus estudos para o ENEM



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

No pergunta de número 05, após lembrarmos aos alunos que a prova do ENEM exige dos participantes o domínio de competências e habilidades desenvolvidas durante a educação básica e que estruturam uma Matriz de Referência para o exame, questionamos: “Ao ingressar no 3º ano do ensino médio, você se sentia competente para resolver situações-problema relacionadas a objetos do conhecimento estudados no ensino fundamental e nas duas séries iniciais do ensino médio?”. O gráfico 3 expressa as respostas obtidas.

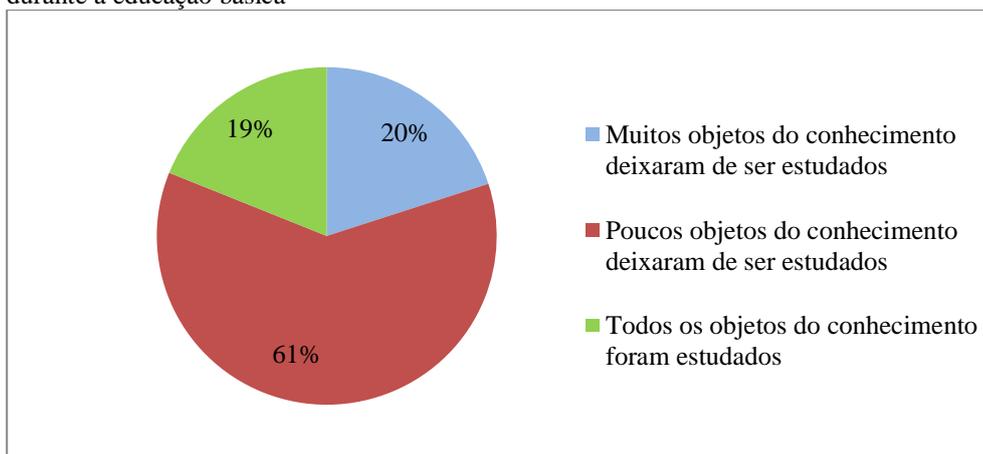
Gráfico 3 – Resposta dos alunos se se sentiam competentes para resolver situações-problema, envolvendo objetos do conhecimento estudados até o 3º ano do ensino médio



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

Já, na pergunta de número 06, procuramos respostas dos alunos, no sentido de percebermos em que nível as escolas em que estudaram contemplaram os objetos do conhecimento que compõem a Matriz de Referência do ENEM. As respostas estão expressas no Gráfico 4, a seguir:

Gráfico 4 - Opinião dos alunos a respeito dos objetos do conhecimento estudados por eles durante a educação básica



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

Questionamos o aluno, na pergunta de número 07: “Você considera que direcionar uma das aulas de Matemática da carga horária prevista para o 3º ano do ensino médio, para atividades voltadas especificamente para o ENEM, é necessário ou desnecessário?”. Aqui, houve unanimidade, com todos respondendo ser necessário.

Nas quatro respostas, além de reconhecerem a necessidade de, na última série do ensino médio, disponibilizarmos um espaço na carga horária de Matemática para a proposição e discussões de atividade mais voltadas para o ENEM, os alunos justificam essa necessidade, com 70% deles afirmando que somente intensificam seus estudos após ingressarem no 3º ano do ensino médio. E mais, apenas 12% dos pesquisados, ao ingressarem na última série do ensino médio, sentiam-se competentes para resolver situações-problema relacionadas a objetos do conhecimento estudados até então. Notamos, ainda, que 61% reconheceram que poucos objetos do conhecimento da Matriz de Referência para o ENEM deixaram de ser estudados, associados a outros 19% que afirmaram ter estudado todos, não deixando dúvidas de que o currículo da escola está contemplando os objetos do conhecimento relacionados às habilidades avaliadas no ENEM. Os alunos pesquisados passaram por processos avaliativos que os promoveram para séries posteriores, nos quais eles devem ter demonstrado o desenvolvimento de muitas dessas habilidades, mas que as não consolidaram ao ponto de lhes proporcionar um bom desempenho no exame. Daí, consideramos ser necessário, sim, um planejamento para a última série do ensino básico que contemple a proposição de atividades que auxiliem o aluno a uma retomada.

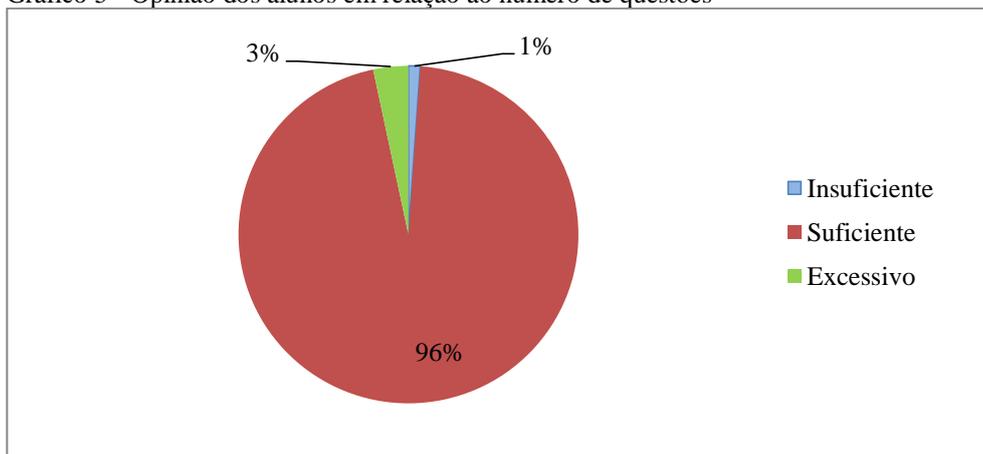
Na implementação da proposta, não desconsideramos o quanto a internet já era importante no processo de ensino-aprendizagem. Como muitas das atividades foram pensadas para ampliar o tempo de estudo extraclasse, sugeríamos que buscassem vídeo-aulas sobre os objetos em estudo, não deixando de anotar informações que considerassem significativas. Buscar a internet para pôr fim a dúvidas encontradas na resolução das questões propostas também foi sugerido, pois, como se tratavam de questões já aplicadas em provas do ENEM, o que não faltam são vídeos-aula orientando a resolução delas.

Mesmo reconhecendo a importância da internet nessa retomada de aprendizagens voltadas para o ENEM, em que os próprios alunos costumam dizer que “lá se encontra tudo”, não pudemos prescindir de um material sistematizado que favorecesse o estudo deles e o acompanhamento pelo professor, no que diz respeito às resoluções de situações-problema propostas e às anotações sugeridas. Quanto a esse material preparado e utilizado na implementação da proposta, buscamos a opinião dos alunos, nas perguntas de números 08 e 09.

Os alunos foram unânimes ao responderem “Sim”, na pergunta de número 08, ao serem indagados se o material favoreceu a retomada de objetos do conhecimento relacionados às habilidades avaliadas no ENEM. Essa unanimidade contribuiu para que optássemos por mantê-lo na reimplantação da proposta para 2023 e, certamente, para 2024, valendo lembrar que, em 2024, serão implantadas, no 3º ano, as mudanças propostas para o ensino médio e, com elas, estão previstas mudanças para o ENEM, o que requererá adaptações e aprimoramento da proposta.

Na pergunta de número 09, lembramos aos alunos que o material disponibilizado dispunha de um número considerável de questões, já que a intenção era contemplar todos os objetos do conhecimento estudados na educação básica, propondo atividades extraclasse, em que eles pudessem dar sequência, em casa, a um estudo iniciado em sala de aula. Lembramos, ainda, que o material dispunha de 400 (quatrocentas) questões, em 2017, atingindo os 600 (seiscentas) questões, em 2020. Dando sequência, buscamos a opinião dos alunos a respeito desse número de questões. O Gráfico 5 nos traz essa opinião.

Gráfico 5 - Opinião dos alunos em relação ao número de questões



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

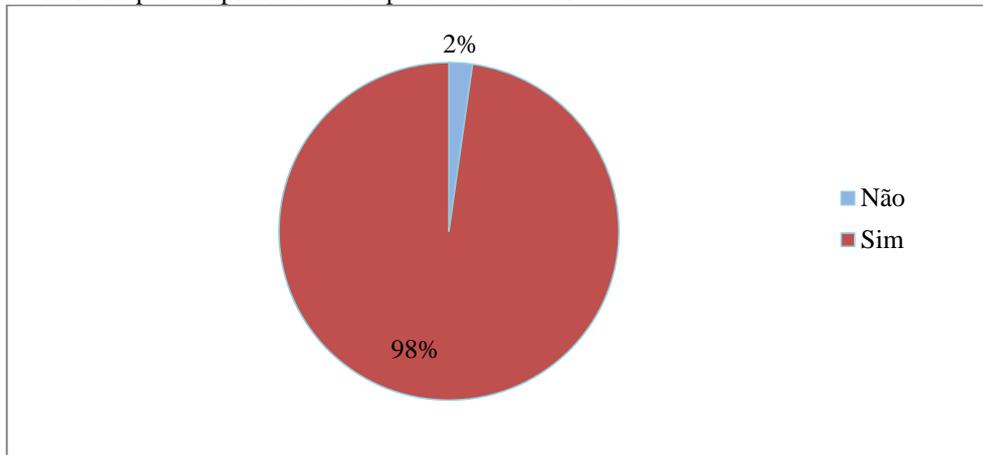
As opiniões manifestadas pelos alunos vêm ao encontro da nossa pretensão, que era organizar um caderno com questões suficientes para contemplar todos os objetos do conhecimento a serem avaliados no ENEM, com um ou dois itens para discutirmos juntos e outros para que fossem resolvidos como atividade extraclasse.

Conforme já exposto, um dos objetivos da proposta era sugerir atividades que levassem o aluno a ampliar o seu tempo de estudos extraclasse, resolvendo situações-problema, fazendo anotações, pesquisando em livros ou na internet, dentre outras metodologias que pudessem favorecer a ampliação e a consolidação de suas aprendizagens.

Nas perguntas de números 10, 11 e 12, procuramos obter respostas sobre a postura dos alunos em relação a essas atividades.

Quando indagados, na pergunta de número 10, se o encaminhamento de atividades extraclasse havia contribuído para a ampliação do seu tempo de estudos em casa, os alunos, em sua maioria, concordaram. As respostas estão demonstradas no Gráfico 6. Vejamos:

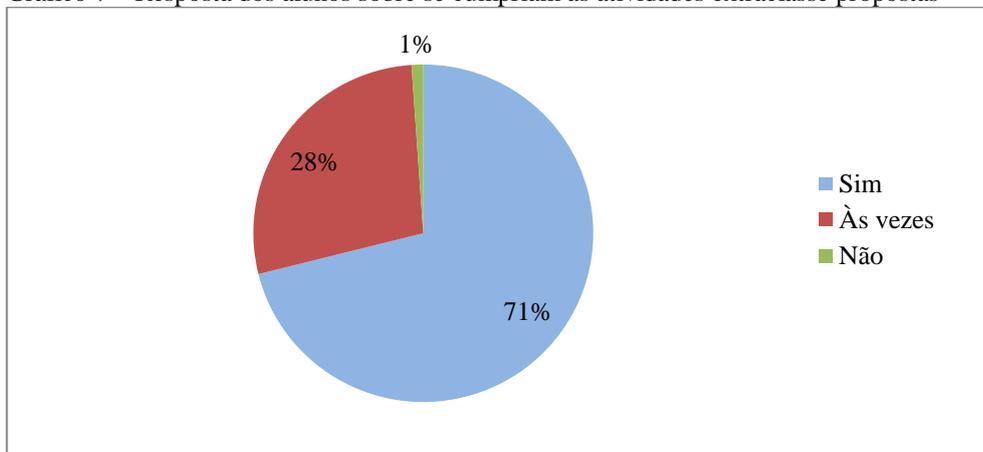
Gráfico 6 – Resposta dos alunos à indagação se o encaminhamento de atividades extraclasse contribuiu para ampliar o seu tempo de estudos em casa



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

As respostas para a pergunta de número 11, na qual os alunos foram questionados se cumpriam as atividades extraclasse propostas, evidenciaram que, além de concordarem com a proposição delas, eles as cumpriam. De fato, 71% deles responderam “Sim”. Essas respostas estão expressas no Gráfico 7.

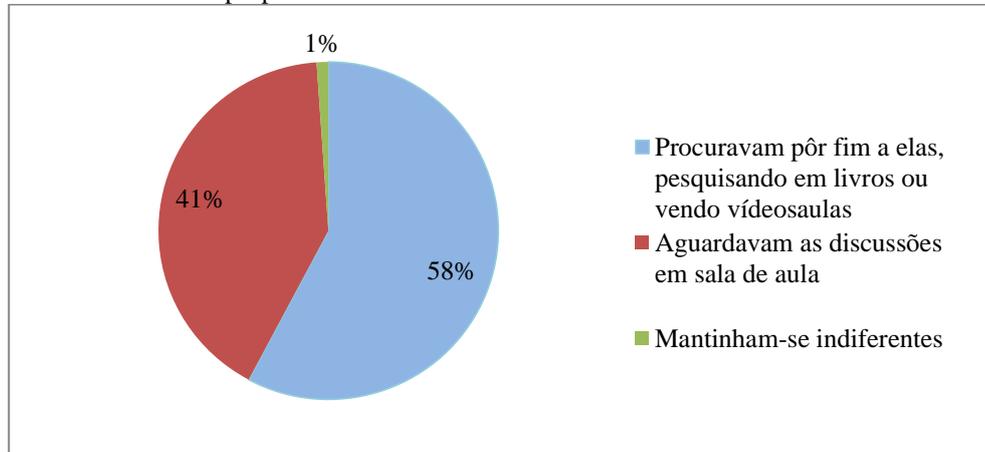
Gráfico 7 – Resposta dos alunos sobre se cumpriam as atividades extraclasse propostas



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

Na pergunta de número 12, abordamos os alunos sobre a postura assumida por eles, diante das dúvidas surgidas, na resolução das atividades propostas para casa. O gráfico 8 nos traz informações sobre essa postura. Vejamos:

Gráfico 8 - Postura dos alunos em relação às dúvidas surgidas na resolução das atividades extraclasse propostas



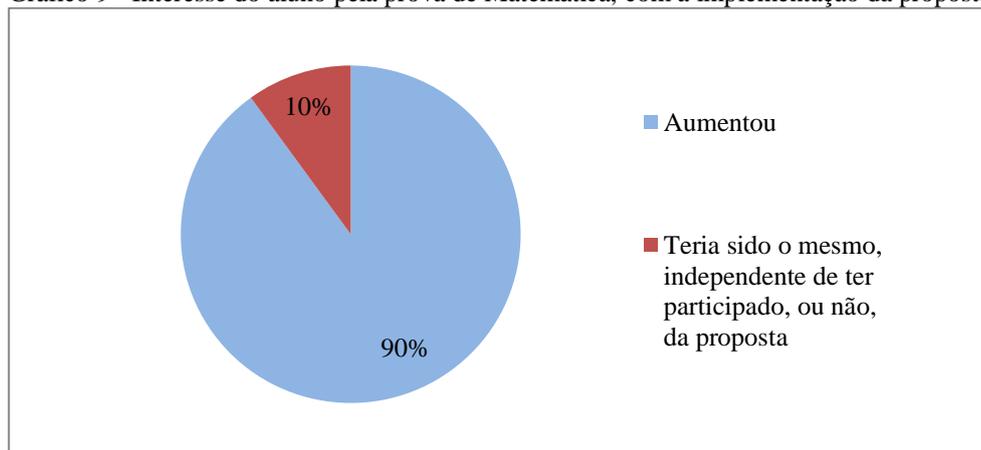
FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

Notemos que poucos alunos se mantiveram indiferentes às dúvidas encontradas na resolução das atividades extraclasse propostas. Deprendemos daí um interesse maior desses alunos em consolidarem suas aprendizagens e, também, que a proposição de atividades extraclasse os conduziram a ampliar as suas horas de estudo. Sem essa ampliação, tornar-se-ia impossível a retomada de tantos objetos do conhecimento por eles já estudados, não havendo, por consequência, a consolidação das habilidades avaliadas no ENEM, relacionadas a esses objetos.

A partir da observação dos registros no material utilizado, das intervenções no momento dos encontros, das participações em sala, ao apresentarem resoluções, percebíamos haver interesse e dedicação da maioria dos alunos pelo que estava sendo proposto, o que certamente resultaria na consolidação de aprendizagens a serem avaliadas no ENEM e os estimularia a resolver mais atentamente a prova de Matemática. Além disso, os comentários pós-prova sobre as questões de Matemática também evidenciavam ter havido um interesse considerável pela prova e que muito do que foi avaliado não era desconhecido por eles. As questões de números 13 a 15 objetivaram ratificar essas nossas impressões.

Questionamos o aluno, na pergunta de número 13: “Você acredita que, participando da proposta referente à retomada das habilidades avaliadas no ENEM, o seu interesse pela prova de Matemática aumentou ou teria sido o mesmo, independente de ter participado ou não na proposta?”. Vejamos as informações trazidas pelo Gráfico 9 para essa pergunta:

Gráfico 9 - Interesse do aluno pela prova de Matemática, com a implementação da proposta

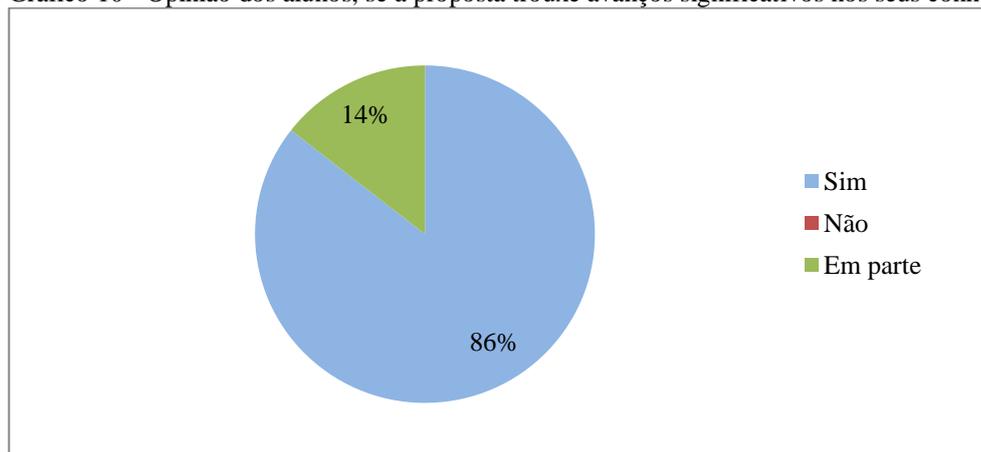


FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

Na pergunta de número 14, fizemos a seguinte indagação: “Ao participar da proposta referente à retomada das habilidades avaliadas no ENEM, houve avanços significativos nos seus conhecimentos?”.

As respostas para essa indagação, estão demonstradas no Gráfico 10.

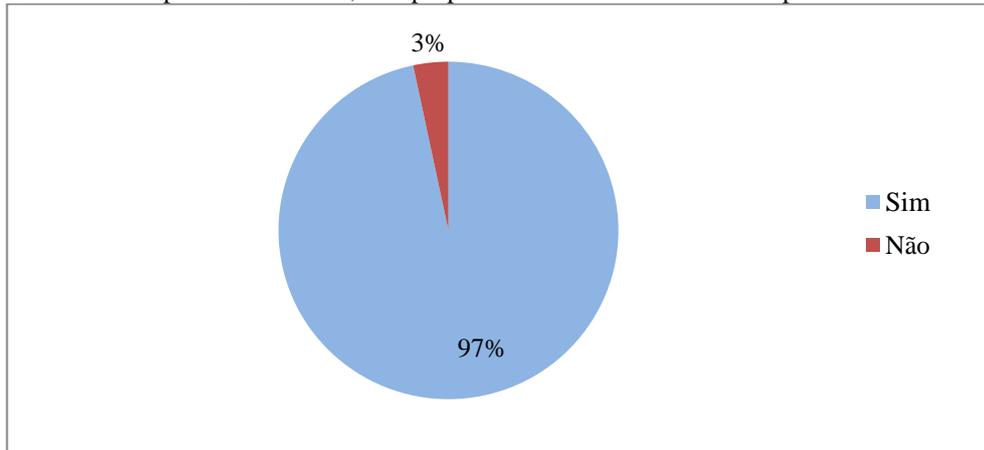
Gráfico 10 - Opinião dos alunos, se a proposta trouxe avanços significativos nos seus conhecimentos



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

Ao fazermos a pergunta de número 15, questionamos os alunos sobre a importância da proposta para ampliar e consolidar as habilidades avaliadas no ENEM e, assim, influenciar no seu desempenho no exame. Os dados do Gráfico 11 deixam evidente a opinião sobre o que a proposta significou para eles.

Gráfico 11 - Opinião dos alunos, se a proposta influenciou no seu desempenho no ENEM

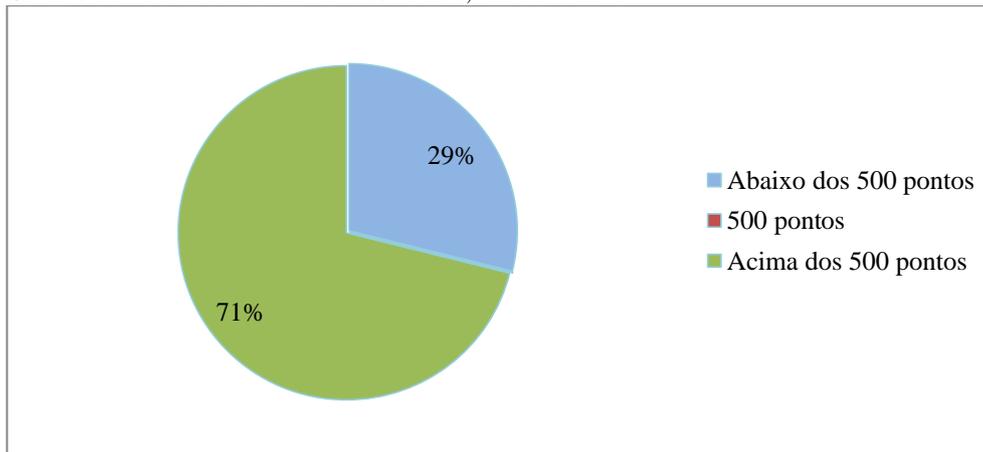


FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

De fato, as respostas dos alunos para as três últimas perguntas confirmaram ter havido um interesse maior pela prova de Matemática, que os seus conhecimentos em relação à área avançaram e que a proposta influenciou no seu desempenho na prova do ENEM.

Mesmo assim, pretendíamos ter um padrão numérico, com o qual pudéssemos perceber mais claramente o nível de evolução trazido pela implementação da proposta, para cada ano em que trabalhamos com ela. Como não mais dispomos do ENEM por escola, já que o INEP deixou de divulgá-lo, a partir da edição 2016, optamos por perguntar ao aluno, no questionamento de número 16, se a sua proficiência em Matemática havia sido abaixo dos 500 pontos, 500 pontos ou acima de 500 pontos. Utilizamos 500 pontos como referência porque, além de representar a média dos pontos que poderiam ser obtidos, foi dada muita ênfase ao estar abaixo da média, nas já mencionadas discussões ocorridas na escola, no final de 2016, sobre as médias obtidas no ENEM de 2015. Sabemos que essa média não é tão significativa para quem deseja ingressar em uma universidade gratuita, através dela, no entanto, tínhamos consciência de que, dependendo do nível de domínio das habilidades avaliadas no exame, das quais o aluno já dispunha, não seria uma aula semanal, com algumas horas a mais de estudos extraclasse, que levariam o aluno a ampliar e consolidar todas essas habilidades ou a maioria delas. Assim, a nossa pretensão, enquanto professores de Matemática da última série da educação básica, era executar uma proposta que estimulasse os alunos a estudar um pouco mais, nas proximidades do ENEM, proporcionando-lhes algum espaço na carga horária para discussões e um material mais sistematizado, que permitisse a eles a retomada dos objetos do conhecimento cobrados no exame. As respostas obtidas para a pergunta 16 estão demonstradas no Gráfico 12. Vejamos:

Gráfico 12 - Proficiência média dos alunos, em Matemática



FONTE: Elaborado pelo Autor (2023)

Optamos, inicialmente, pelas alternativas, no questionamento anterior, temendo que os alunos se recusassem a fornecer a sua nota que, por sinal, foi solicitada e por eles enviada.

A partir das notas enviadas pelos alunos, organizamos as tabelas 4, 5, 6 e 7.

Tabela 4 - Proficiência em Matemática de 20 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2017

Nº de Inscrição	NOTA		Nº de Inscrição	NOTA
7xxxxxx5903	380,9		17xxxxxx4429	521,4
17xxxxxx6822	431,8		17xxxxxx0998	521,6
17xxxxxx1048	438,0		17xxxxxx1675	527,6
17xxxxxx6275	452,5		17xxxxxx9601	551,7
17xxxxxx2315	456,4		17xxxxxx1135	557,2
17xxxxxx7812	476,8		17xxxxxx2167	580,9
17xxxxxx3367	479,0		17xxxxxx2747	607,0
17xxxxxx5036	485,5		17xxxxxx3754	630,3
17xxxxxx7002	510,2		17xxxxxx1650	660,8
17xxxxxx9890	512,2		17xxxxxx5738	694,7
<b>MÉDIA PARA OS 20 ALUNOS: 523,82</b>				

FONTE: Elaborada pelo autor

Tabela 5 - Proficiência em Matemática de 25 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2018

<b>Nº de Inscrição</b>	<b>NOTA</b>		<b>Nº de Inscrição</b>	<b>NOTA</b>
18xxxxxx7825	416,9		18xxxxxx1261	602,4
18xxxxxx5479	447,6		18xxxxxx4368	614,5
18xxxxxx2913	467,2		18xxxxxx3851	615,5
18xxxxxx9356	472,8		18xxxxxx9976	648,6
18xxxxxx9884	499,1		18xxxxxx6522	655,7
18xxxxxx7372	505,9		18xxxxxx9570	661,0
18xxxxxx0526	515,8		18xxxxxx8968	669,4
18xxxxxx0159	518,8		18xxxxxx9913	673,7
18xxxxxx0127	519,0		18xxxxxx6937	681,9
18xxxxxx3886	524,5		18xxxxxx0813	694,9
18xxxxxx6210	538,7		18xxxxxx0337	728,0
18xxxxxx4446	578,2		18xxxxxx0391	748,2
18xxxxxx8358	594,6			
<b>MÉDIA PARA OS 25 ALUNOS: 583,71</b>				

FONTE: Elaborada pelo autor

Tabela 6 - Proficiência em Matemática de 25 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2019

<b>Nº de Inscrição</b>	<b>NOTA</b>		<b>Nº de Inscrição</b>	<b>NOTA</b>
19xxxxxx7847	434,7		19xxxxxx6287	566,4
19xxxxxx7501	453,4		19xxxxxx4905	573,3
19xxxxxx5248	484,4		19xxxxxx6827	578,5
19xxxxxx3373	491,9		19xxxxxx4237	584,4
19xxxxxx9615	494,0		19xxxxxx1864	599,7
19xxxxxx1049	502,6		19xxxxxx8376	614,9
19xxxxxx3602	503,6		19xxxxxxxxxxx	630,4
19xxxxxx7764	528,4		19xxxxxx8866	640,1
19xxxxxx7525	542,1		19xxxxxx3794	648,7
19xxxxxx1204	551,9		19xxxxxx7626	651,8
19xxxxxx9644	555,0		19xxxxxx1169	655,1
19xxxxxx6479	557,6		19xxxxxx1684	753,6
19xxxxxx6367	562,5			
<b>MÉDIA PARA OS 25 ALUNOS: 566,36</b>				

FONTE: Elaborada pelo autor

Tabela 7 - Proficiência em Matemática de 20 alunos da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, Doutor Severiano/RN, que realizaram o ENEM em 2020.

Nº de Inscrição	NOTA		Nº de Inscrição	NOTA
20xxxxxxx6137	404,3		20xxxxxxx8828	568,8
20xxxxxxx1781	408,3		20xxxxxxx2987	571,7
20xxxxxxx1943	429,6		20xxxxxxx9514	575,3
20xxxxxxx2291	437,7		20xxxxxxx3332	596,7
20xxxxxxx8328	470,3		20xxxxxxx3712	600,2
20xxxxxxx4600	471,3		20xxxxxxx5378	624,1
20xxxxxxx0266	489,1		20xxxxxxx0120	641,9
20xxxxxxx7853	493,1		20xxxxxxx6877	645,1
20xxxxxxx5695	525,5		20xxxxxxx3125	678,4
20xxxxxxx2861	529,9		20xxxxxxx4221	714,5
<b>MÉDIA PARA OS 20 ALUNOS: 543,79</b>				

FONTE: Elaborada pelo autor

Observando os dados das tabelas, notamos que, para cada ano, a partir de 2017, ano em que foi implementada a proposta, e nos três anos seguintes, a maioria dos alunos pesquisados obteve proficiência acima dos 500 pontos, o que deixa claro ter havido uma melhoria no resultado da prova de Matemática do ENEM, se comparado com o resultado divulgado pelo INEP, para o ENEM de 2015.

As amostras coletadas representam 25,64% dos 78 (setenta e oito) alunos que concluíram o ensino médio em 2017; 35,71% dos 70 (setenta) concluintes de 2018; 31,25% dos 80 (oitenta) concluintes de 2019 e 30,76% dos 65 (sessenta e cinco) alunos que concluíram o ensino médio em 2020. Do ponto de vista quantitativo, consideramos um percentual satisfatório, até porque nem todos esses alunos participaram do ENEM. Mesmo assim, resolvemos buscar outros dados levantados, a partir de uma amostra mais ampla e que refletisse melhor o desempenho dos alunos no exame.

Conforme já exposto, de 2005 a 2015, o INEP publicava o ENEM por escola, deixando de fazê-lo, a partir de 2016. Mesmo descontinuada a classificação das escolas pelo INEP, este disponibilizou, de 2016 a 2019, microdados, com os quais foram levantados resultados obtidos por instituições de ensino para esses anos, conforme o desempenho dos seus alunos no ENEM. Não encontramos dados levantados para 2020. O INEP até disponibilizou microdados do ENEM para a edição de 2020, mas sem informações sobre a escola e o município dos participantes do exame, atendendo a Lei Geral de Proteção de Dados. Acreditamos que isso impossibilitou o levantamento e a publicação.

Apresentamos, a seguir, os dados levantados e divulgados para os anos de 2017, 2018 e 2019, a partir de microdados publicados pelo INEP. Segundo eles, os dados são de

participantes que, ao se inscreverem no exame, declararam estar cursando e que concluiria o ensino médio no ano para o qual foi realizado o levantamento.

Tabela 8 - Resultado do ENEM por escola 2017, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz.

<b>Área do conhecimento</b>	<b>Média da escola</b>
Linguagens	475,03
Matemática	485,34
Ciências Humanas	480,93
Ciências da Natureza	459,63
Redação	544,62
<b>MÉDIA DA ESCOLA</b>	<b>489,11</b>

Fonte: <https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2018/06/veja-o-desempenho-da-sua-escola-no-enem-2017.shtml>. (Adaptada)

Tabela 9 - Resultado do ENEM por escola 2018, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz.

<b>Área do conhecimento</b>	<b>Média da escola</b>
Linguagens	519,62
Matemática	542,08
Ciências Humanas	544,24
Ciências da Natureza	473,83
Redação	535,00
<b>MÉDIA DA ESCOLA</b>	<b>522,95</b>

Fonte: <https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2019/06/veja-o-desempenho-da-sua-escola-no-enem-2018.shtml>. (Adaptada)

Tabela 10 - Resultado do ENEM por escola 2019, para a Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz

<b>Área do conhecimento</b>	<b>Média da escola</b>
Linguagens	492,90
Matemática	530,44
Ciências Humanas	480,09
Ciências da Natureza	440,32
Redação	572,00
<b>MÉDIA DA ESCOLA</b>	<b>503,15</b>

FONTE: <https://enem2019.evolutcional.com.br/RD.html> (Adaptada)

Notemos que as médias de Matemática no ENEM para a nossa escola, de 2017 a 2019, estavam um pouco abaixo das coletadas por nós, o que é compreensível, uma vez que foram levantadas a partir de uma amostra mais ampla e, certamente, mais diversificada. Entretanto, elas também demonstraram uma melhoria no desempenho dos nossos alunos, se comparadas com as de 2014, 2015 e de 2016.

Os avanços observados na média de Matemática nos incentivaram a atualizar a proposta e reimplantá-la em 2023, buscando sempre resultados mais significativos. Esperamos que, com a BNCC, as escolas construam currículos e assumam posturas que, de

fato, garantam aos alunos o direito de desenvolver as habilidades previstas para a educação básica. Entretanto, sabemos que as mudanças implementadas no ensino não proporcionarão resultados imediatos; daí, pretendemos ir, além de 2023, com esse trabalho de retomada de aprendizagens que são avaliadas no ENEM. Se for o caso, com aprimoramento das metodologias dos recursos didáticos a serem utilizados, no sentido de atender às possíveis mudanças que ocorrerão no exame.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ENEM, instituído em 1998 com a finalidade de proporcionar informações sobre a situação da educação básica, passou por adequações, tanto na estrutura das provas como nos seus objetivos, tornando-se num instrumento de seleção dos estudantes para o ingresso no ensino superior. Dada a essa função de substituir os vestibulares de grande parte das universidades públicas e de ter seus resultados utilizados como referência para a concessão de bolsas de estudo em universidades privadas, não podemos, enquanto professores do ensino médio, ficar indiferentes ao exame, até porque uma das finalidades para esse nível de ensino, segundo a LDB, é a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos.

Considerando essa finalidade e conscientes de que nossos alunos estão chegando ao último ano da educação básica, sem que tenham consolidado muitas das habilidades a serem avaliadas no ENEM, sentimos a necessidade de, no 3º ano do ensino médio, desenvolver um trabalho que vise a contribuir para um bom desempenho deles no exame. É certo que os alunos não dispuseram de um ensino de qualidade em todos os níveis da sua escolaridade, resultando no acúmulo de deficiências no seu aprendizado e que parte delas não será sanada com uma proposta a ser desenvolvida nas proximidades do exame. Por outro lado, acreditamos que muitas dessas deficiências dizem respeito a conhecimentos não consolidados e que a proposição, orientação e acompanhamento de atividades direcionadas para a ampliação e a consolidação desses conhecimentos conduzirão os alunos ao domínio das habilidades a eles relacionadas.

Nesse sentido, buscamos identificar positivities e falhas a serem aperfeiçoadas numa proposta desenvolvida, no último ano do ensino médio, que pudessem nos orientar no seu replanejamento e na sua reimplantação, em 2023 e em anos posteriores. Daí, o nosso objetivo principal, que foi analisar uma proposta desenvolvida no 3º ano do ensino médio da Escola Estadual Cristóvão Colombo de Queiroz, em Doutor Severiano/RN, de 2017 a 2020, voltada para a retomada de objetos do conhecimento estudados ao longo da educação básica e que estão relacionados às habilidades avaliadas no ENEM.

Dessa forma, nosso primeiro objetivo específico era traçar um panorama histórico do ENEM, bem como enfatizar as competências e habilidades propostas para o ensino médio e que são por ele avaliadas. Para entendermos as mudanças por que passou o exame, principalmente nos seus objetivos, realizamos uma pesquisa em documentos oficiais e em outras publicações do MEC. Além disso, fundamentamo-nos em Torres (2007), Krane (2012),

Rabelo (2013), dentre outros. No que se refere às competências e habilidades propostas para o ensino médio, procuramos analisar o que está posto na BNCC, já que se trata do documento que, mais recentemente, vem servindo de base na elaboração dos currículos escolares, mas, antes, procuramos ressaltar a importância do currículo para as escolas, amparados em autores, como D'Ambrosio (1998), Forquin (1993) e Saviani (2016) e, também, fizemos considerações sobre documentos que serviram de referenciais, antes das BNCC.

Nosso segundo objetivo específico era buscar e analisar informações, para que pudessemos perceber a influência da proposta no desempenho dos nossos alunos, na prova de Matemática do ENEM. Para isso, distribuímos questionários a alunos que concluíram o Ensino Médio e participaram do exame, de 2017 a 2020. Aqui, encontramos algumas dificuldades, especificamente na distribuição e coleta dos questionários, pois, a princípio, dispúnhamos de poucos contatos e pretendíamos uma amostra de, pelo menos, 25% dos participantes, para cada ano em que trabalhamos com a proposta, e que contemplasse alunos das zonas urbana e rural. Mas, através dos primeiros contatos, fomos conseguindo outros, obtendo, assim, as amostras pretendidas. Como tínhamos conhecimento de que, embora o ENEM por escola não houvesse mais sido publicado pelo INEP, a partir de 2015, mas que este continuou publicando microdados, com os quais meios de comunicação levantavam e publicavam a proficiência média das escolas, para cada área do conhecimento, resolvemos pesquisar essas publicações. Sem grandes dificuldades, pesquisamos dados para os três anos que antecederam a implementação da proposta e para os três que a sucederam. Tanto a análise dos questionários como a dos resultados publicados, a partir de dados do INEP, sinalizam para a melhoria do desempenho dos alunos, em Matemática, o que justifica a continuidade da proposta.

O nosso terceiro objetivo específico era atualizar a proposta para ser reimplantada, a partir de 2023. Como há uma previsão de mudanças para o ENEM, a partir de 2024, e ainda não tendo muita clareza de como elas se concretizarão, as atualizações ficaram mais restritas ao material a ser utilizado. Como a última atualização havia sido realizada em 2020, resolvemos introduzir itens de objetos do conhecimento pouco contemplados, até então, com a exclusão de outros que se repetiam, no que diz respeito ao tema abordado. Em se tratando da metodologia, mantivemos a proposta da aula presencial, para apresentação e exposições consideradas essenciais sobre a temática ser retomada, com o encaminhamento de atividades extraclasse, como a proposição de situações-problema, formação de grupos de estudo para resolução e discussões das atividades propostas e sugestões de fontes de pesquisa, que possam auxiliá-los no aprofundamento e na consolidação das suas aprendizagens.

A análise dos dados coletados na pesquisa nos fez perceber que a implementação da proposta despertou um interesse maior pela prova de Matemática do ENEM, o que está evidenciado nos depoimentos dos alunos e nos dados detalhados, nas Tabelas de 1 a 3 e de 8 a 10, onde percebemos que a Matemática, a partir de 2017, não mais se apresentou como a área mais “crítica”, aquela em que os alunos, ano a ano, vinham obtendo o pior desempenho no exame. Obviamente, esse interesse maior pela prova proporcionou avanços, embora não muito expressivos, na proficiência média para a área. De fato, observando os dados das Tabelas de 1 a 10, notamos que, nos três anos que antecederam a proposta, a proficiência média da nossa escola, em Matemática, esteve bem abaixo dos 500 pontos; a partir daí, constatamos que, em 2017, elevou-se um pouco e, nos anos de 2018, 2019 e 2020, esteve acima dos 500 pontos. São resultados positivos, mas reveladores de que estamos distantes de um ensino médio que garanta aos alunos as aprendizagens a que eles têm direito.

Em 2024, teremos a implantação, no 3º ano, das mudanças previstas para o ensino médio que, em nosso Estado, recebeu a nomenclatura de Ensino Médio Potiguar. Atendendo às orientações da BNCC, a grade curricular estará dividida em dois blocos, um deles destinado à formação geral dos alunos e o outro, aos itinerários formativos. Composto esses itinerários, teremos as trilhas de aprofundamento, implantadas com a finalidade de aplicar, utilizar e aprofundar aprendizagens, competências e habilidades da formação básica. Acreditamos que, na trilha que contempla Matemática, iremos dar continuidade à proposta, mas, para isso, precisaremos replanejá-la, não só para adaptá-la ao que será proposto para a trilha como também para atender às mudanças que ocorrerão no ENEM.

Estamos convictos da importância de que, no último ano da educação básica, intensifiquemos a proposição de atividades que motivem os alunos à retomada do estudo de objetos do conhecimentos relacionados às competências e habilidades avaliadas no ENEM. No entanto, entendemos que as deficiências de aprendizagens trazidas do ensino fundamental, precisam ser diagnosticadas, retomadas e consolidadas, desde o 1º ano do ensino médio. Além disso, precisamos inserir o ENEM no planejamento das nossas aulas, buscando um ensino em que a contextualização e a interdisciplinaridade estejam presentes.

Os resultados não deixaram dúvidas da evolução no desempenho dos nossos alunos na prova de Matemática do ENEM, ao mesmo tempo, fizeram-nos perceber que muitas das deficiências de aprendizagens não foram superadas e que devemos buscar outros caminhos que possam proporcionar resultados mais significativos, como o engajamento de professores de Matemática das series iniciais do ensino médio e das outras áreas do conhecimento.

## REFERÊNCIAS

ALCÂNTARA, Érica Ferreira de. **A Matemática Básica em provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Cariri, 2020. Juazeiro do Norte.

BESSA, Karina Petri. **Dificuldades de aprendizagem em matemática na percepção de professores e alunos do ensino fundamental**. Universidade Católica de Brasília, 2007. Disponível em: <https://docplayer.com.br/12671732-Dificuldades-de-aprendizagem-em-matematica-na-percepcao-de-professores-e-alunos-do-ensino-fundamental.html>. Acesso em: 19 de dez, 2022.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, 1988.

BRASIL. Educação. **Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: MEC, 1996.

Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394\\_ldbn1.pdf](http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf) Acesso em: 10.de nov.2022.

BRASIL. **Portaria nº 438 de 28 de maio de 1998**. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Brasília: MEC, 1998.

Disponível em: [http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes\\_p0178-0181\\_c.pdf](http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178-0181_c.pdf). Acesso em 10 nov. 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Relatório Pedagógico**. Brasília: MEC, 2002.

Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me0000119.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2022.

BRASIL. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM): Fundamentação Teórico- Metodológica**. Brasília: MEC/INEP, 2005.

BRASIL. **Lei nº 11.096, de 13 de janeiro de 2005**. Institui o Programa Universidade para Todos (PROUNI) e regula a atuação de entidades beneficentes de assistência social do ensino superior, altera a Lei nº 10.891, de 9 de julho de 2004, e dá outras providências. Brasília, 2005. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2004-2006/2005/lei/111096.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2005/lei/111096.htm). Acesso em: 11 nov. 2022.

BRASIL. **Portaria Nº 109, de 27 de maio de 2009**. Estabelece a sistemática para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio no exercício de 2009. Brasília: MEC/INEP, 2009. Disponível em: <https://www.legisweb.com.br/legislacao/?id=214657>. Acesso em: 22 nov. 2022.

BRASIL. **Proposta à Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior**. Brasília: MEC/ACS, 2009. Disponível em [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=768-](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=768-)

proposta-novovestibular1-pdf&category\_slug=documentos-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 12 de nov. 2022.

BRASIL. **Portaria Nº 2 de 26 de janeiro de 2010.** Institui e regulamenta o Sistema de Seleção Unificada (SISU). Brasília: MEC, 2010. Disponível em: [http://ces.ufpel.edu.br/vestibular/download/2009i/portaria\\_sisu\\_diario.pdf](http://ces.ufpel.edu.br/vestibular/download/2009i/portaria_sisu_diario.pdf) Acesso em: 12 nov. 2022.

BRASIL.. **Portaria 807 de 18 de junho de 2010.** Certificação do Ensino Médio. Brasília/MEC, 2010. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=6206-port-2010-807&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=6206-port-2010-807&Itemid=30192). Acesso em: 22 de nov. de 2022.

BRASIL. **Perguntas e respostas explicam notas do exame em cada área.** Brasília: MEC/Assessoria de Imprensa do INEP, 2010. <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/14960-perguntas-e-respostas-explicam-as-notas-do-exame-em-cada-area>. Acesso em 24 nov. 2022.

BRASIL. **Lei nº 13.005 de 25 de junho de 2014.** Aprova o Plano Nacional da Educação – PNE e dá outras providências. Brasília, 2014. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2011-2014/2014/lei/113005.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/lei/113005.htm). Acesso em: 25 de nov. 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. **Portaria 468 de 3 de abril de 2017.** Dispõe sobre a realização do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Brasília: MEC, 2017. Disponível em: [https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/legislacao/2017/Portaria\\_mec\\_gm\\_n468\\_de\\_03042017\\_dispoe\\_sobre\\_a\\_realizacao\\_do\\_enem.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/legislacao/2017/Portaria_mec_gm_n468_de_03042017_dispoe_sobre_a_realizacao_do_enem.pdf). Acesso em 25 de nov. de 2022.

BRASIL. **Resolução Nº 2 do Conselho Nacional da Educação, de 22 de dezembro de 2017.** Institui e orienta a implantação da Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/CNE, 2017. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/RESOLUCAOCNE\\_CP222DEDEZE MBRODE2017.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/RESOLUCAOCNE_CP222DEDEZE MBRODE2017.pdf). Acesso em: 25 de nov. 2022.

BRASIL. **Microdados do Enem por Escolas são divulgados pela primeira vez.** Brasília: MEC/Assessoria de Comunicação Social, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/418-enem-946573306/72191-microdados-do-enem-por-escola-sao-divulgados-pela-primeira-vez>. Acesso em 17 nov. 2022.

BRASIL. **Resolução Nº 3 do Conselho Nacional da Educação, de 21 de novembro de 2018.** Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/CNE, 2018. Disponível em: [https://normativasconselhos.mec.gov.br/normativa/view/CNE\\_RES\\_CNECEBN32018.pdf](https://normativasconselhos.mec.gov.br/normativa/view/CNE_RES_CNECEBN32018.pdf) Acesso em: 29 nov. 2022.

BRASIL. **Portaria Nº 458 de 5 de maio de 2020.** Institui normas complementares necessárias ao cumprimento da Política Nacional de Avaliação da Educação Básica. Brasília: MEC, 2020 Disponível em:

[https://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/saeb/2020/legislacao/portaria\\_n458\\_05052020.pdf](https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2020/legislacao/portaria_n458_05052020.pdf). Acesso em 25 nov. 2022.

BRASIL. **Portaria nº 521, de 13 de julho de 2021**. Institui o cronograma Nacional de Implantação do Novo Ensino Médio. Brasília: MEC, 2021. Disponível em: <https://www.legisweb.com.br/legislacao/?id=417213>. Acesso em 30 nov. 2022.

BRASIL. **Guia do Participante**: Entenda sua nota no ENEM. Brasília: MEC/INEP, 2021. Disponível em: <file:///K:/Enem%20Guia%20do%20Participante%202021.pdf> Acesso em 24 jan. 2023.

BRASIL. **Parecer nº 5 do Conselho Nacional de Educação, de 14 de março de 2022**. Recomendações de Diretrizes Nacionais para a Avaliação da Educação Básica: Novo Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Brasília: MEC/CNE, 2022. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=234681-pcp005-22&category\\_slug=marco-2022-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=234681-pcp005-22&category_slug=marco-2022-pdf&Itemid=30192). Acesso em: 24 de nov. 2022.

CRUZ, Alice Gonçalves. **Tópicos de Estatísticas nas Provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Cariri, 2022. Juazeiro do Norte.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 4. ed. Campinas: Papirus, 1996.

DANTAS, Matheus Siqueira Araújo. **Um Estudo sobre Funções em Provas do ENEM**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Cariri, 2020. Juazeiro do Norte.

ESCOTT, Clarice Monteiro. A participação como indicador de inclusão social na educação superior. **Revista de Educação do Cogeime**, v.24, Nº 46, 2015.

FORQUIN, Jean-Claude. **Escola e Cultura**: a sociologia do conhecimento escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

KRANE, Elizabeth D. FORUM: O novo ENEM é melhor do que o antigo? **Pátio**, Porto Alegre/RS, ANO IV, 13, p. 17, Junho/Agosto, 2022.

LIMA, Elon Lages. Sobre o ensino de matemática. **Revista do Professor de Matemática**, n. 28, 1995.

MACEDO, Lino de. Competências e habilidades: elementos para uma reflexão pedagógica. *In: Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)*: fundamentação teórico-metodológica. Brasília: INEP, 2005.

PACHECO, Joao Alves. **As metamorfoses do Enem**: de avaliação coadjuvante para protagonista chave das políticas públicas de acesso à Educação Superior. Tese de Doutorado em Educação (Currículo). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2013.

RABELO, Mauro Luiz. **Avaliação educacional**: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013

RODRIGUES, Márcio Urel. **Análise das questões de matemática do novo ENEM (2009 a 2012): reflexões para professores de matemática.** Curitiba: SBEM, 2013.

SANTOS, Felipe Rodrigues dos. **A Geometria Analíticas nas Provas do ENEM.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Cariri, 2022. Juazeiro do Norte.

SAVIANI, Dermeval. **Educação Escolar, Currículo e Sociedade:** o problema da Base nacional Comum Curricular. Movimento, Rio de Janeiro, ano 3, n. 4, p. 54–84. 2016.

## APÊNDICE A

### QUESTIONÁRIO DIRECIONADO A EX-ALUNOS DA ESCOLA ESTADUAL CRISTÓVÃO COLOMBO DE QUEIROZ, QUE CONCLUÍRAM O ENSINO MÉDIO DE 2017 A 2020.

**OBJETIVO DOS QUESTIONAMENTOS:** Verificar em que ano o aluno concluiu o ensino médio, se fez o ENEM e se participou da proposta implementada.

01. Em que ano você concluiu o ensino médio?

- 2017.
- 2018.
- 2019.
- 2020.

02. No ano em que concluiu o ensino médio, você realizou a prova do ENEM?

- Sim.
- Não.

03. De 2017 até 2020, foi trabalhada em turmas do 3º ano do ensino médio, em aulas de Matemática, uma proposta voltada para a retomada de objetos do conhecimento (conteúdos) relacionados às habilidades avaliadas no ENEM. Você participou dessa proposta?

- Sim.
- Não.

**Se você participou do ENEM, responda as questões que seguem.**

**OBJETIVO DOS QUESTIONAMENTOS:** Justificar o porquê de a proposta ser aplicada no 3º ano do ensino médio.

04. Sabemos que aqueles que almejam cursar uma universidade gratuita, devem buscar um bom desempenho no ENEM. Se você tinha a pretensão de conquistar uma vaga em uma universidade, a partir do seu desempenho no ENEM, em que momento começou a se preocupar em intensificar seus estudos para o exame?

- Antes de ingressar o 3º ano.
- Após ingressar no 3º ano.

05. A prova do ENEM exige dos participantes o domínio de competências e habilidades desenvolvidas durante a educação básica e que estruturam uma Matriz de Referência para o exame. Ao ingressar no 3º ano do ensino médio, você se sentia competente para resolver situações-problema relacionadas a objetos do conhecimento (conteúdos) estudados no ensino fundamental e nas duas séries iniciais do ensino médio?

- Sim.
- Não.
- Em parte.

06. Conhecendo a Matriz de Referência do ENEM, você considera que, nas aulas de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio
- muitos objetos do conhecimento (conteúdos) deixaram de ser estudados.
  - poucos objetos do conhecimento (conteúdos) deixaram de ser estudados.
  - todos os objetos do conhecimento (conteúdos) foram estudados.
07. Você considera que direcionar uma das aulas de Matemática da carga horária prevista para o 3º ano do ensino médio para atividades voltadas especificamente para do ENEM
- é necessário.
  - é desnecessário.

**OBJETIVO DO QUESTIONAMENTO: Buscar informações sobre o material disponibilizado.**

08. Você participou de uma proposta que visava a retomar objetos conhecimento (conteúdos) relacionados às habilidades que são avaliadas no ENEM. Você considera que o material disponibilizado favoreceu a essa retomada?
- Sim.
  - Não.
09. O material disponibilizado dispunha de um número considerável de questões, já que a intenção era contemplar todos os objetos do conhecimento (conteúdos) estudados na educação básica, propondo atividades extraclasse em que você pudesse dar sequência, em casa, a um estudo iniciado em sala de aula. Começamos com 400 questões, em 2017, atingindo os 600 itens, em 2020. Quanto ao número de questões, você considera
- insuficiente.
  - suficiente.
  - excessivo.

**OBJETIVO DO QUESTIONAMENTO: Buscar informações sobre a metodologia utilizada.**

10. Você considera que o encaminhamento de atividades extraclasse contribuiu para a ampliação do seu tempo de estudos em casa?
- Sim.
  - Não.
11. Após cada encontro presencial eram sugeridas atividades extraclasse, como resolução de situações-problema contidas no caderno e registro dos cálculos efetuados, pesquisa sobre os objetos do conhecimento que estavam sendo retomados, visualização de vídeos-aula. Você cumpria essas atividades?
- Sim
  - Às vezes.
  - Não.
12. Nos seus estudos extraclasse, ao surgirem dúvidas, você
- procurava pôr fim a elas, pesquisando, vendo vídeos-aula.
  - aguardava as discussões em sala de aula.
  - mantinha-se indiferente a elas.



**APÊNDICE B**

**AMOSTRAGEM DO MATERIAL DIDÁTICO DISPONIBILIZADO PARA O ALUNO**

**MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS  
(COMPETÊNCIA E HABILIDADES)**

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
<p><b>Competência de área 1:</b> Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.</p>	<p><b>H1:</b> Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.</p>
	<p><b>H2:</b> Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.</p>
	<p><b>H3:</b> Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.</p>
	<p><b>H4:</b> Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.</p>
	<p><b>H5:</b> Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.</p>
<p><b>Competência de área 2:</b> Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.</p>	<p><b>H6:</b> Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.</p>
	<p><b>H7:</b> Identificar características de figuras planas ou espaciais.</p>
	<p><b>H8:</b> Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.</p>
	<p><b>H9:</b> Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.</p>
<p><b>Competência de área 3:</b> Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.</p>	<p><b>H10:</b> Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.</p>
	<p><b>H11:</b> Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.</p>
	<p><b>H12:</b> Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.</p>
	<p><b>H13:</b> Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.</p>
	<p><b>H14:</b> Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.</p>

<p><b>Competência de área 4:</b> Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.</p>	<p><b>H15:</b> Identificar a relação de dependência entre grandezas.</p> <p><b>H16:</b> Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.</p> <p><b>H17:</b> Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.</p> <p><b>H18:</b> Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.</p>
<p><b>Competência de área 5 -</b> Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.</p>	<p><b>H19:</b> Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.</p> <p><b>H20:</b> Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.</p> <p><b>H21:</b> Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.</p> <p><b>H22:</b> Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.</p> <p><b>H23:</b> Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.</p>
<p><b>Competência de área 6:</b> Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.</p>	<p><b>H24:</b> Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.</p> <p><b>H25:</b> Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.</p> <p><b>H26:</b> Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.</p>
<p><b>Competência de área 7:</b> Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.</p>	<p><b>H27:</b> Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.</p> <p><b>H28:</b> Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.</p> <p><b>H29:</b> Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.</p> <p><b>H30:</b> Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.</p>

## OBJETOS DO CONHECIMENTO ASSOCIADOS ÀS MATRIZES DE REFERÊNCIA PARA A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

### CONHECIMENTOS NUMÉRICOS

Operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

### SISTEMA DE NUMERAÇÃO

#### Exercício 01

(ENEM 2012.1 – Questão 161 da Prova Azul)

João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 1 3 \_ 9 8 2 0 7, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu.

De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de

- (A) centena.
- (B) dezena de milhar.
- (C) centena de milhar.
- (D) milhão.
- (E) centena de milhão.

#### Exercício 02

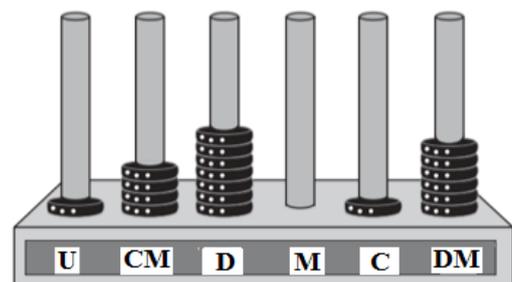
(ENEM 2016.1 – Questão 148 da Prova Azul)

O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.

Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.

Nessa disposição, o número que está representado na figura é

- (A) 46 171.
- (B) 147 016.
- (C) 171 064.
- (D) 460 171.
- (E) 610 741



**SIGNIFICADOS, REPRESENTAÇÕES E OPERAÇÕES EM CONJUNTOS NUMÉRICOS (NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS E REAIS)**

**Exercício 03**

**(ENEM 2011.1 – Questão 136 da Prova Azul)**

O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.

Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa.

Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

- (A) 68,21 mm.
- (B) 68,102 mm.
- (C) 68,02 mm.
- (D) 68,012 mm.
- (E) 68,001 mm.

**Exercício 04**

**(ENEM 2017.1 – Questão 157 da Prova Azul)**

Uma pessoa ganhou uma pulseira formada por pérolas esféricas, na qual faltava uma das pérolas. A figura indica a posição em que estaria faltando esta pérola.



Ela levou a joia a um joalheiro que verificou que a medida do diâmetro dessas pérolas era 4 milímetros. Em seu estoque, as pérolas do mesmo tipo e formato, disponíveis para reposição, tinham diâmetros iguais a: 4,025 mm; 4,100 mm; 3,970 mm; 4,080 mm e 3,099 mm.

O joalheiro então colocou na pulseira a pérola cujo diâmetro era o mais próximo do diâmetro das pérolas originais.

A pérola colocada na pulseira pelo joalheiro tem diâmetro, em milímetro, igual a

- (A) 3,099.
- (B) 3,970.
- (C) 4,025.
- (D) 4,080.
- (E) 4,100.

**Exercício 05****(ENEM 2019.1 – Questão 140 da Prova Azul)**

A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus *influenza*. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões.

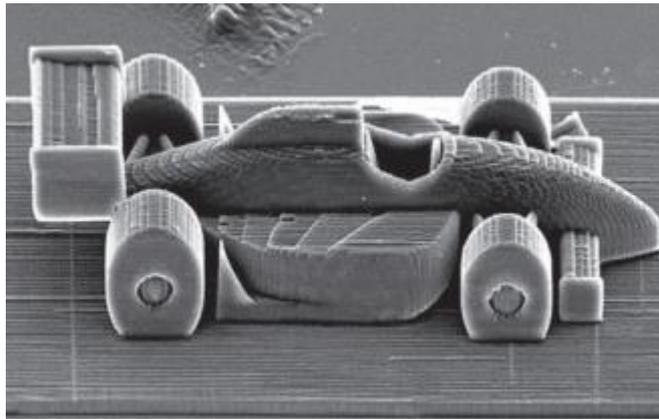
O vírus *influenza* é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza*, em mm, é

- (A)  $1,1 \times 10^{-1}$ .
- (B)  $1,1 \times 10^{-2}$ .
- (C)  $1,1 \times 10^{-3}$ .
- (D)  $1,1 \times 10^{-4}$ .
- (E)  $1,1 \times 10^{-5}$ .

**Exercício 06****(ENEM 2020.1 – Questão 154 da Prova Azul)**

Pesquisadores da Universidade de Tecnologia de Viena, na Áustria, produziram miniaturas de objetos em impressoras 3D de alta precisão. Ao serem ativadas, tais impressoras lançam feixes de laser sobre um tipo de resina, esculpindo o objeto desejado. O produto final da impressão é uma escultura microscópica de três dimensões, como visto na imagem ampliada.



A escultura apresentada é uma miniatura de um carro de Fórmula 1, com 100 micrômetros de comprimento. Um micrômetro é a milionésima parte de um metro.

Usando notação científica, qual é a representação do comprimento dessa miniatura, em metro?

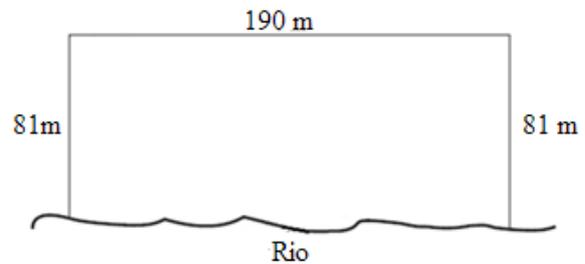
- (A)  $1,0 \times 10^{-1}$
- (B)  $1,0 \times 10^{-3}$
- (C)  $1,0 \times 10^{-4}$
- (D)  $1,0 \times 10^{-6}$
- (E)  $1,0 \times 10^{-7}$

**Exercício 07****(ENEM 2013.1 – Questão 147 da Prova Azul)**

Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.

A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

- (A) 6.
- (B) 7.
- (C) 8.
- (D) 11.
- (E) 12.

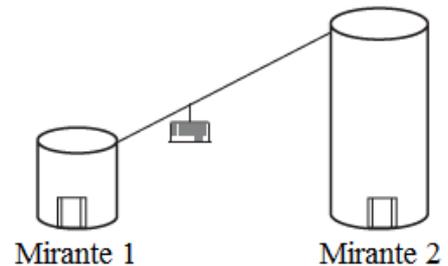
**Exercício 08****(ENEM 2017.1 – Questão 163 da Prova Azul)**

Em um parque há dois mirantes de alturas distintas que são acessados por elevador panorâmico. O topo do mirante 1 é acessado pelo elevador 1, enquanto que o topo do mirante 2 é acessado pelo elevador 2. Eles encontram-se a uma distância possível de ser percorrida a pé, e entre os mirantes há um teleférico que os liga que pode ou não ser utilizado pelo visitante.

O acesso aos elevadores tem os seguintes custos:

- Subir pelo elevador 1: R\$ 0,15;
- Subir pelo elevador 2: R\$ 1,80;
- Descer pelo elevador 1: R\$ 0,10;
- Descer pelo elevador 2: R\$ 2,30.

O custo da passagem do teleférico partindo do topo do mirante 1 para o topo do mirante 2 é de R\$ 2,00 e, do topo do mirante 2 para o topo do mirante 1, é de R\$ 2,50.



Qual é o menor custo em real para uma pessoa visitar os topos dos dois mirantes e retornar ao solo?

- (A) 2,25.
- (B) 3,90.
- (C) 4,35.
- (D) 4,40.
- (E) 4,45.

**Exercício 09****(ENEM 2009.1 – Questão 152 da Prova Azul)****Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani**

O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1.200.000 quilômetros quadrados, dos quais 840.000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.

Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do aquífero Guarani é

- (A)  $1,5 \times 10^2$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- (B)  $1,5 \times 10^3$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- (C)  $1,5 \times 10^6$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- (D)  $1,5 \times 10^8$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- (E)  $1,5 \times 10^9$  vezes a capacidade do reservatório novo.

**Exercício 10****(ENEM 2011.1 – Questão 141 da Prova Azul)**

Você pode adaptar atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:

- Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.
- Meia hora de supermercado: 100 calorias.
- Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.
- Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.
- Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.
- Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.
- 

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias.

A partir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?

- (A) 50 minutos.
- (B) 60 minutos.
- (C) 80 minutos.
- (D) 120 minutos.
- (E) 170 minutos.

**Exercício 11****(ENEM 2018.1 – Questão 162 da Prova Azul)**

Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com  $2n$  competidores, então na 2ª fase restarão  $n$  competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

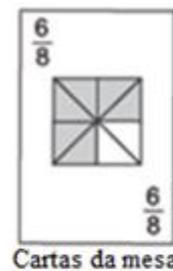
Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

- (A)  $2 \times 128$ .  
 (B)  $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$ .  
 (C)  $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ .  
 (D)  $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$ .  
 (E)  $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ .

**Exercício 12****(ENEM 2015.1 – Questão 139 da Prova Azul)**

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

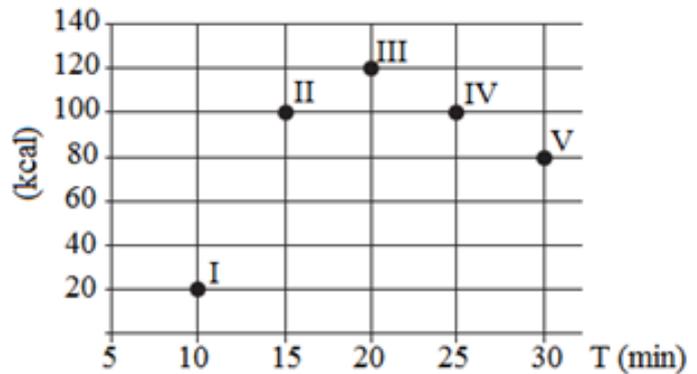


Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

- (A) 9.  
 (B) 7.  
 (C) 5.  
 (D) 4.  
 (E) 3.

**Exercício 13****(ENEM 2019.1 – Questão 143 da Prova Azul)**

Os exercícios físicos são recomendados para o bom funcionamento do organismo, pois aceleram o metabolismo e, em consequência, elevam o consumo de calorias. No gráfico, estão registrados os valores calóricos, em kcal, gastos em cinco diferentes atividades físicas, em função do tempo dedicado às atividades, contado em minuto.



Qual dessas atividades físicas proporciona o maior consumo de quilocalorias por minuto?

- (A) I.  
 (B) II.  
 (C) III.  
 (D) IV.  
 (E) V.

**Exercício 14****(ENEM 2020.1 – Questão 169 da Prova Azul)**

Um grupo sanguíneo, ou tipo sanguíneo, baseia-se na presença ou ausência de dois antígenos, A e B, na superfície das células vermelhas do sangue. Como dois antígenos estão envolvidos, os quatro tipos sanguíneos distintos são:

- Tipo A: apenas o antígeno A está presente;
- Tipo B: apenas o antígeno B está presente;
- Tipo AB: ambos os antígenos estão presentes;
- Tipo O: nenhum dos antígenos está presente.

Foram coletadas amostras de sangue de 200 pessoas e, após análise laboratorial, foi identificado que em 100 amostras está presente o antígeno A, em 110 amostras há presença do antígeno B e em 20 amostras nenhum dos antígenos está presente.

Dessas pessoas que foram submetidas à coleta de sangue, o número das que possuem o tipo sanguíneo A é igual a

- (A) 30.  
 (B) 60.  
 (C) 70.  
 (D) 90.  
 (E) 100

**Exercício 15****(ENEM 2018.1 – Questão 146 da Prova Azul)**

Numa atividade de treinamento realizada no Exército de um determinado país, três equipes – Alpha, Beta e Gama – foram designadas a percorrer diferentes caminhos, todos com os mesmos pontos de partida e de chegada.

- \* A equipe Alpha realizou seu percurso em 90 minutos com uma velocidade média de 6,0 km/h.
- \* A equipe Beta também percorreu sua trajetória em 90 minutos, mas sua velocidade média foi de 5,0 km/h.
- \* Com uma velocidade média de 6,5 km/h, a equipe Gama concluiu seu caminho em 60 minutos.

Com base nesses dados, foram comparadas as distâncias  $d_{\text{Beta}}$ ,  $d_{\text{Alpha}}$  e  $d_{\text{Gama}}$  percorridas pelas três equipes. A ordem das distâncias percorridas pelas equipes Alpha, Beta e Gama é

- (A)  $d_{\text{Gama}} < d_{\text{Beta}} < d_{\text{Alpha}}$ .
- (B)  $d_{\text{Alpha}} = d_{\text{Beta}} < d_{\text{Gama}}$ .
- (C)  $d_{\text{Gama}} < d_{\text{Beta}} = d_{\text{Alpha}}$ .
- (D)  $d_{\text{Beta}} < d_{\text{Alpha}} < d_{\text{Gama}}$ .
- (E)  $d_{\text{Gama}} < d_{\text{Alpha}} < d_{\text{Beta}}$ .

**Exercício 16****(ENEM 2009.1 – Questão 156 da Prova Azul)**

Pessoas Físicas (CPF) é composto por um número de 9 algarismos e outro número de 2 algarismos, na forma  $d_1d_2$ , em que os dígitos  $d_1$  e  $d_2$  são denominados dígitos verificadores. Os dígitos verificadores são calculados, a partir da esquerda, da seguinte maneira: os 9 primeiros algarismos são multiplicados pela sequência 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 (o primeiro por 10, o segundo por 9, e assim sucessivamente); em seguida, calcula-se o resto  $r$  da divisão da soma dos resultados das multiplicações por 11, e se esse resto  $r$  for 0 ou 1,  $d_1$  é zero, caso contrário  $d_1 = (11 - r)$ . O dígito  $d_2$  é calculado pela mesma regra, na qual os números a serem multiplicados pela sequência dada são contados a partir do segundo algarismo, sendo  $d_1$  o último algarismo, isto é,  $d_2$  é zero se o resto  $s$  da divisão por 11 das somas das multiplicações for 0 ou 1, caso contrário,  $d_2 = (11 - s)$ .

Suponha que João tenha perdido seus documentos, inclusive o cartão de CPF e, ao dar queixa da perda na delegacia, não conseguisse lembrar quais eram os dígitos verificadores, recordando-se apenas que os nove primeiros algarismos eram 123.456.789.

Neste caso, os dígitos verificadores  $d_1$  e  $d_2$  esquecidos são, respectivamente,

- (A) 0 e 9.
- (B) 1 e 4.
- (C) 1 e 7.
- (D) 9 e 1.
- (E) 0 e 1.

**Exercício 17****(ENEM 2022.1 – Questão 175 da Prova Azul)**

Ao escutar a notícia de que um filme recém-lançado arrecadou, no primeiro mês de lançamento, R\$ 1,35 bilhão bilheteria, um estudante escreveu corretamente o número que representa essa quantia, com todos os seus algarismos. O número escrito pelo estudante foi

- (A) 135 000,00.
- (B) 1 350 000,00.
- (C) 13 500 000,00.
- (D) 135 000 000,00.
- (E) 1 350 000 000,00.

**Exercício 18****(ENEM 2020.1 – Questão 159 da Prova Azul)**

Uma pessoa precisa comprar 15 sacos de cimento para uma reforma em sua casa. Faz pesquisa de preço em cinco depósitos que vendem o cimento de sua preferência e cobram frete para entrega do material, conforme a distância do depósito à sua casa. As informações sobre preço do cimento, valor do frete e distância do depósito até a casa dessa pessoa estão apresentadas no quadro.

<b>Depósito</b>	<b>Valor do saco de cimento</b> (R\$)	<b>Valor do frete para cada quilômetro</b> (R\$)	<b>Distância entre a casa e o depósito</b> (km)
A	23,00	1,00	10
B	21,50	3,00	12
C	22,00	1,50	14
D	21,00	3,50	18
E	24,00	2,50	2

A pessoa escolherá um desses depósitos para realizar sua compra, considerando os preços do cimento e do frete oferecidos em cada opção.

Se a pessoa decidir pela opção mais econômica, o depósito escolhido para a realização dessa compra será o

- (A) A.
- (B) B.
- (C) C.
- (D) D.
- (E) E.

## PROGRESSÃO ARITMÉTICA

### Exercício 19

(ENEM 2013.1 – Questão 173 da Prova Azul)

O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número

- (A) 32.
- (B) 34.
- (C) 33.
- (D) 35.
- (E) 31.

### Exercício 20

(ENEM 2019.1 – Questão 149 da Prova Azul)

O *slogan* “Se beber não dirija”, muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1 050	900	850

Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015.

Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de

- (A) 150.
- (B) 450.
- (C) 550.
- (D) 700.
- (E) 800.

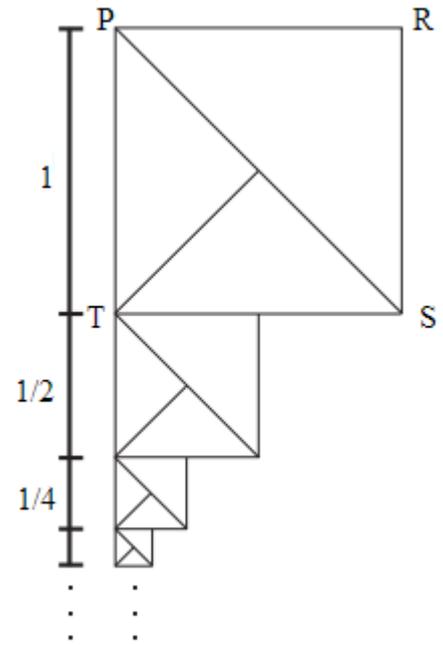
## PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

### Exercício 21

(ENEM 2020.1 – Questão 155 da Prova Azul)

O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.

O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.



Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

- (A)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
- (B)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$
- (C)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$
- (D)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$
- (E)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

## PRINCÍPIOS DE CONTAGEM E ANÁLISE COMBINATÓRIA

### Exercício 22

(ENEM 2011.1 – Questão 174 da Prova Azul)

O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

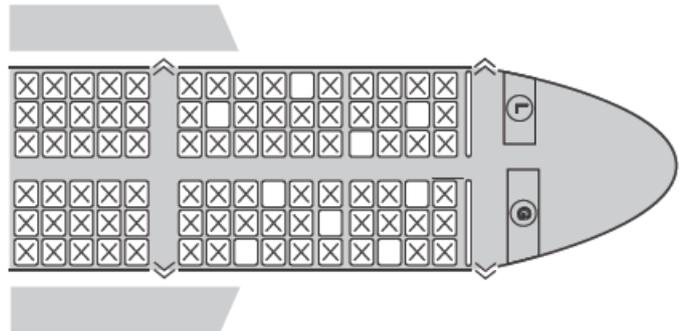
Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

- (A) 24.
- (B) 31.
- (C) 32.
- (D) 88.
- (E) 89.

### Exercício 23

(ENEM 2015.1 – Questão 164 da Prova Azul)

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: [www.gebh.net](http://www.gebh.net). Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

- A)  $\frac{9!}{2!}$ .
- B)  $\frac{9!}{7! \times 2!}$ .
- C)  $7!$ .
- D)  $\frac{5!}{2!} \times 4!$ .
- E)  $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$ .

**Exercício 24****(ENEM 2020.1 – Questão 163 da Prova Azul)**

Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem “TOM MARVOLO RIDDLE” gerou a frase “I AM LORD VOLDEMORT”. Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase “I AM POTTER”, de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

- (A)  $9!$   
 (B)  $4! 5!$   
 (C)  $2 \times 4! 5!$   
 (D)  $\frac{9!}{2!}$   
 (E)  $\frac{4! 5!}{2!}$

**Exercício 25****(ENEM 2021.1 – Questão 179 da Prova Azul)**

Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas e representada pela expressão

- (A)  $\frac{6!}{4! 2!} \cdot \frac{15!}{10! 5!}$   
 (B)  $\frac{6!}{4! 2!} + \frac{15!}{10! 5!}$   
 (C)  $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$   
 (D)  $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$   
 (E)  $\frac{21!}{7! 14!}$

**FATORAÇÃO, MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM, MÁXIMO DIVISOR COMUM,  
DIVISIBILIDADE**

**Exercício 26****(ENEM 2014.1 – Questão 146 da Prova Azul)**

Durante a Segunda Guerra Mundial, para deciframos as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número  $N$  é dado pela expressão  $2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ , na qual  $x$ ,  $y$  e  $z$  são números inteiros não negativos. Sabe-se que  $N$  é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de  $N$ , diferentes de  $N$ , é

- (A)  $x \cdot y \cdot z$ .
- (B)  $(x + 1) \cdot (y + 1)$ .
- (C)  $x \cdot y \cdot z - 1$ .
- (D)  $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot z$ .
- (E)  $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1) - 1$ .

**Exercício 27****(ENEM 2015.1 – Questão 145 da Prova Azul)**

O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano, serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

- 1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
- 2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
- 3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

- (A) 2.
- (B) 4.
- (C) 9.
- (D) 40.
- (E) 80.

## RAZÃO

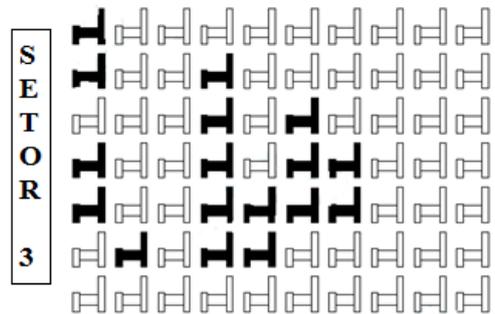
### Exercício 28

(ENEM 2013.1 – Questão 145 da Prova Azul)

Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.

A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

- (A)  $\frac{17}{70}$ .                      (D)  $\frac{53}{17}$ .  
 (B)  $\frac{17}{53}$ .                      (E)  $\frac{70}{17}$ .  
 (C)  $\frac{53}{70}$ .



### Exercício 29

(ENEM 2016.1 – Questão 179 da Prova Azul)

Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 ( $F_1$ ): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 ( $F_2$ ): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 ( $F_3$ ): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 ( $F_4$ ): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 ( $F_5$ ): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

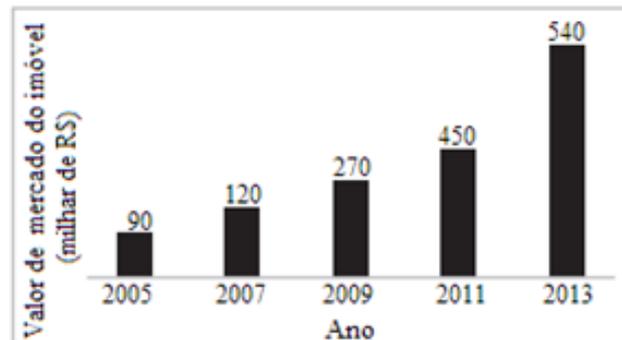
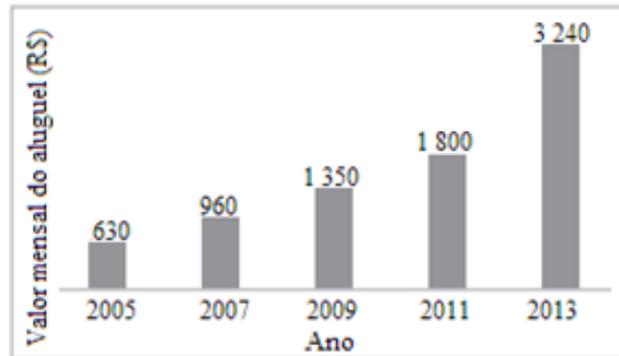
O filtro descartado é o

- (A)  $F_1$ .  
 (B)  $F_2$ .  
 (C)  $F_3$ .  
 (D)  $F_4$ .  
 (E)  $F_5$ .

## Exercício 30

## (ENEM 2022.1 – Questão 170 da Prova Azul)

No período de 2005 a 2013, o valor de venda dos imóveis em uma cidade apresentou alta, o que resultou no aumento dos aluguéis. Os gráficos apresentam a evolução desses valores, para um mesmo imóvel, no mercado imobiliário dessa cidade.



A rentabilidade do aluguel de um imóvel é calculada pela razão entre o valor mensal de aluguel e o valor de mercado desse imóvel.

Com base nos dados fornecidos, em que ano a rentabilidade do aluguel foi maior?

- (A) 2005
- (B) 2007
- (C) 2009
- (D) 2011
- (E) 2013

**PROPORCIONALIDADE, GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS, PROPORÇÃO, REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA**

**Exercício 31**

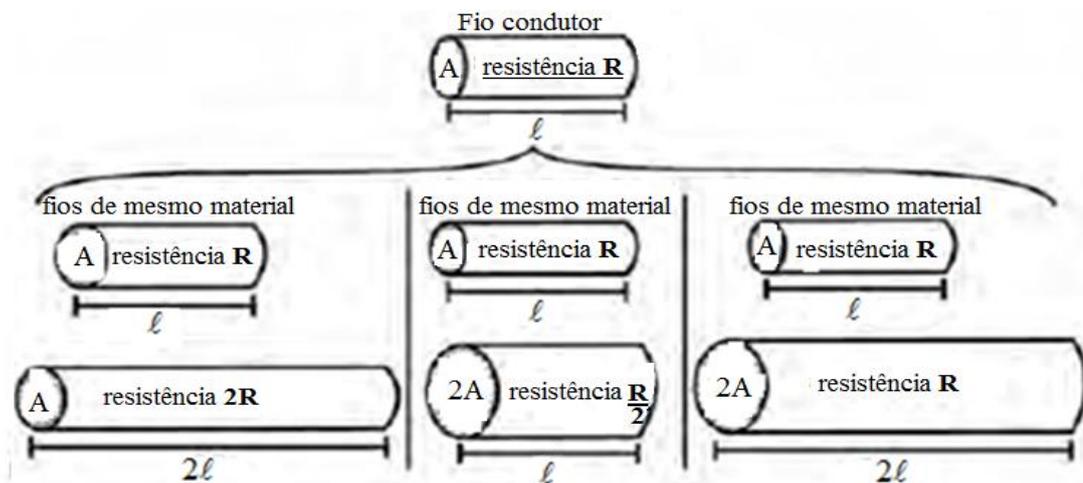
(ENEM 2010.1 – Questão 144 da Prova Azul)

**A resistência elétrica e as dimensões do condutor**

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre

- resistência ( $R$ ) e comprimento ( $\ell$ ), dada a mesma área da secção transversal ( $A$ );
- resistência ( $R$ ) e área de secção transversal ( $A$ ), dado o mesmo comprimento ( $\ell$ ) e
- comprimento ( $\ell$ ) e área da secção transversal, dada a mesma resistência ( $R$ ).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.

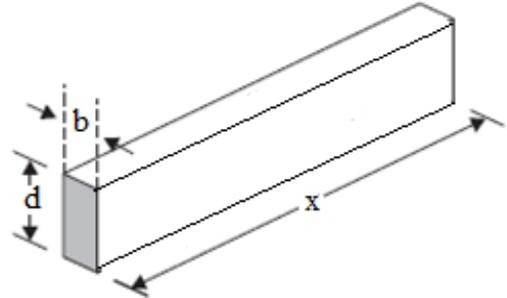


As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência ( $R$ ) e comprimento ( $\ell$ ), resistência ( $R$ ) e área da secção transversal ( $A$ ) e entre comprimento ( $\ell$ ) e área da secção transversal ( $A$ ) são respectivamente

- (A) direta, direta e direta  
 (B) direta, direta e inversa.  
 (C) direta, inversa e direta  
 (D) inversa, direta e direta.  
 (E) inversa, direta e inversa.

**Exercício 32****(ENEM 2012.1 – Questão 143 da Prova Azul)**

A resistência mecânica  $S$  de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à largura ( $b$ ) e ao quadrado de sua altura ( $d$ ) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento ( $x$ ), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade  $k$  é chamada de resistência da viga.



A expressão que traduz a resistência  $S$  dessa viga de madeira é

- (A)  $S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x^2}$
- (B)  $S = \frac{k \cdot b \cdot d}{x^2}$
- (C)  $S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x}$
- (D)  $S = \frac{k \cdot b^2 \cdot d}{x}$
- (E)  $S = \frac{k \cdot b \cdot 2d}{2x}$

**Exercício 33****(ENEM 2013.1 – Questão 159 da Prova Azul)**

Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com  $14 \text{ m}^3$  de concreto.

Qual é o volume de cimento, em  $\text{m}^3$ , na carga de concreto trazido pela betoneira?

- (A) 1,75.
- (B) 2,00.
- (C) 2,33.
- (D) 4,00.
- (E) 8,00.

**Exercício 34****(ENEM 2013.1 – Questão 153 da Prova Azul)**

Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que o “cubo da área  $S$  da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa  $M$ ”.

HUGHES-HALLETT, et al. **Cálculo e aplicações**. São Paulo: Edgard Bücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante  $k > 0$ , a área  $S$  pode ser escrita em função de  $M$  por meio da expressão:

- (A)  $k \cdot M$
- (B)  $k \cdot M^{\frac{1}{3}}$
- (C)  $k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$
- (D)  $k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$
- (E)  $k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$

**Exercício 35****(ENEM 2009.1 – Questão 163 da Prova Azul)**

Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é *Spa-Francorchamps*, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km.

Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de *Spa-Francorchamps*, parado no *Box* para reabastecimento.

Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo,

- (A) 617 kg.
- (B) 668 kg.
- (C) 680 kg.
- (D) 689 kg.
- (E) 717 kg.

**Exercício 36****(ENEM 2012.1 – Questão 164 da Prova Azul)**

Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

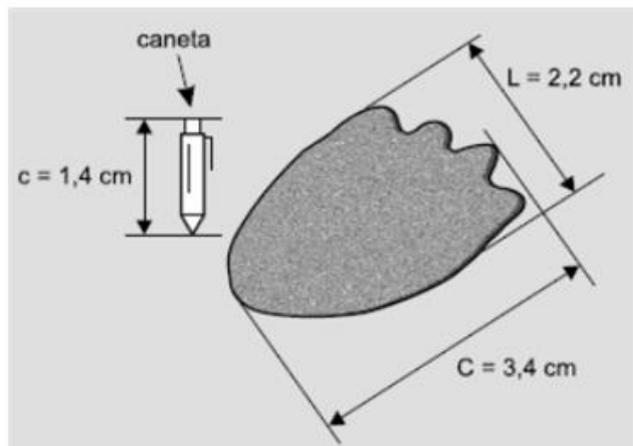
Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

- (A) 12 kg.
- (B) 16 kg.
- (C) 24 kg.
- (D) 36 kg.
- (E) 75 kg.

**Exercício 37****(ENEM 2015.1 – Questão 160 da Prova Azul)**

Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta ( $c$ ), a largura ( $L$ ) e o comprimento ( $C$ ) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema. A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

- (A) 4,9 e 7,6.
- (B) 8,6 e 9,8.
- (C) 14,2 e 15,4.
- (D) 26,4 e 40,8.
- (E) 27,5 e 42,5.



**Exercício 38****(ENEM 2016.3 – Questão 138 da Prova Azul)**

A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreso com o resultado obtido em metros.



Disponível em: [www.magadelondres.org](http://www.magadelondres.org). Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

- (A) 53.
- (B) 94.
- (C) 113.
- (D) 135.
- (E) 145.

**Exercício 39****(ENEM 2015.2 – Questão 162 da Prova Azul)**

Uma confecção possuía 36 funcionários, alcançando uma produtividade de 5 400 camisetas por dia, com uma jornada de trabalho diária dos funcionários de 6 horas. Entretanto, com o lançamento da nova coleção e de uma nova campanha de marketing, o número de encomendas cresceu de forma acentuada, aumentando a demanda diária para 21 600 camisetas. Buscando atender essa nova demanda, a empresa aumentou o quadro de funcionários para 96. Ainda assim, a carga horária de trabalho necessita ser ajustada.

Qual deve ser a nova jornada de trabalho diária dos funcionários para que a empresa consiga atender a demanda?

- (A) 1 hora e 30 minutos.
- (B) 2 horas e 15 minutos.
- (C) 9 horas.
- (D) 16 horas.
- (E) 24 horas.

**Exercício 40****(ENEM 2019.1 – Questão 180 da Prova Azul)**

Um casal planejou uma viagem e definiu como teto para o gasto diário um valor de até R\$ 1 000,00. Antes de decidir o destino da viagem, fizeram uma pesquisa sobre a taxa de câmbio vigente para as moedas de cinco países que desejavam visitar e também sobre as estimativas de gasto diário em cada um, com o objetivo de escolher o destino que apresentasse o menor custo diário em real.

O quadro mostra os resultados obtidos com a pesquisa realizada.

País de destino	Moeda local	Taxa de câmbio	Gasto diário
França	Euro (€)	R\$ 3,14	315,00 €
EUA	Dólar(US\$)	R\$ 2,78	US\$ 390,00
Austrália	Dólar australiano (A\$)	R\$ 2,14	A\$ 400,00
Canadá	Dólar canadense (C\$)	R\$ 2,10	C\$ 410,00
Reino Unido	Libra esterlina (£)	R\$ 4,24	£ 290,00

Nessas condições, qual será o destino escolhido para a viagem?

- (A) Austrália.
- (B) Canadá.
- (C) EUA.
- (D) França.
- (E) Reino Unido.

**Exercício 41****(ENEM 2009.1 – Questão 162 da Prova Azul)**

Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

- (A) 920 kg.
- (B) 800 kg.
- (C) 720 kg.
- (D) 600 kg.
- (E) 570 kg.

## PORCENTAGEM

### Exercício 42

(ENEM 2009.1 – Questão 178 da Prova Azul)

João deve 12 parcelas de R\$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R\$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R\$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria

- (A) renegociar suas dívidas com o banco.
- (B) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
- (C) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
- (D) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
- (E) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

### Exercício 43

(ENEM 2009.1 – Questão 141 da Prova Azul)

Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodiesel ao óleo diesel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1.º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de diesel de petróleo.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao diesel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009.

Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final diesel/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%?

- (A) 27,75 milhões de litros.
- (B) 37,00 milhões de litros.
- (C) 231,25 milhões de litros.
- (D) 693,75 milhões de litros.
- (E) 888,00 milhões de litros.

**Exercício 44****(ENEM 2010.1 – Questão 136 da Prova Azul)**

Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

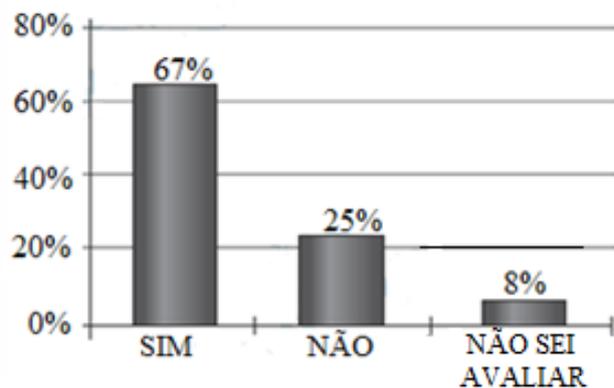


Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é

**Exercício 45****(ENEM 2011.1 – Questão 175 da Prova Azul)**

Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam “NÃO” à enquete?

- (A) Menos de 23.  
 (B) Mais de 23 e menos de 25.  
 (C) Mais de 50 e menos de 75.  
 (D) Mais de 100 e menos de 190.  
 (E) Mais de 200.

**Exercício 46****(ENEM 2012.1 – Questão 175 da Prova Azul)**

Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

<b>Hipoglicemia</b>	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
<b>Normal</b>	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
<b>Pré-diabetes</b>	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
<b>Diabetes Melito</b>	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
<b>Hiperglicemia</b>	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estavam com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

- (A) hipoglicemia.
- (B) normal.
- (C) pré-diabetes.
- (D) diabetes melito.
- (E) hiperglicemia.

**Exercício 47****(ENEM 2022.1 – Questão 167 da Prova Azul)**

Em uma loja, o preço promocional de uma geladeira é de R\$ 1 000,00 para pagamento somente em dinheiro. Seu preço normal, fora da promoção, é 10% maior. Para pagamento feito com o cartão de crédito da loja, é dado um desconto de 2% sobre o preço normal. Uma cliente decidiu comprar essa geladeira, optando pelo pagamento com o cartão de crédito da loja. Ela calculou que o valor a ser pago seria o preço promocional acrescido de 8%. Ao ser informada pela loja do valor a pagar, segundo sua opção, percebeu uma diferença entre seu cálculo e o valor que lhe foi apresentado.

O valor apresentado pela loja, comparado ao valor calculado pela cliente, foi

- (A) R\$ 2,00 menor.
- (B) R\$ 100,00 menor.
- (C) R\$ 200,00 menor.
- (D) R\$ 42,00 maior.
- (E) R\$ 80,00 maior

## CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS

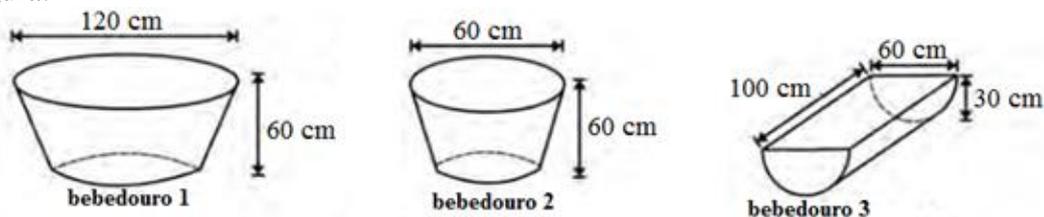
Características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

### FIGURAS PLANAS E ESPACIAIS

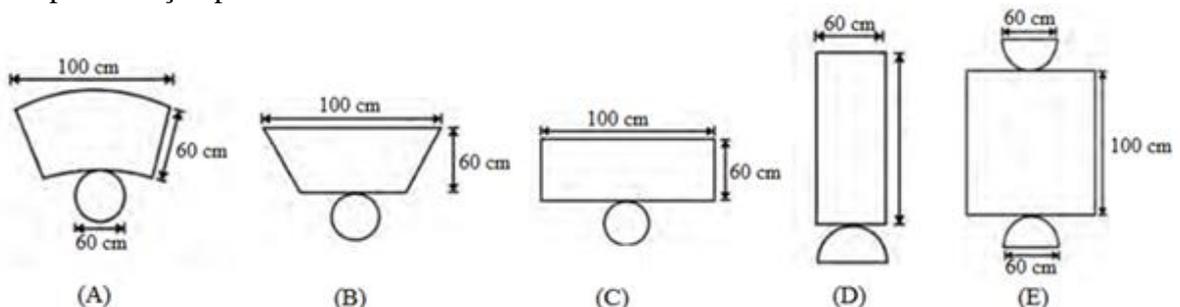
#### Exercício 48

(ENEM 2010.1 – Questão 138 da Prova Azul)

Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



#### Exercício 49

(ENEM 2011.1 – Questão 147 da Prova Azul)

A figura ao lado mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

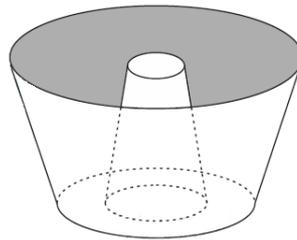
Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

- (A) pirâmide
- (B) semiesfera.
- (C) cilindro.
- (D) tronco de cone.
- (E) cone.



**Exercício 50****(ENEM 2013.1 – Questão 176 da Prova Azul)**

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



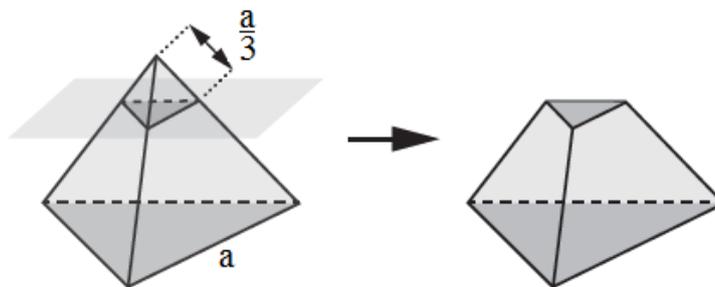
Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.

Essas figuras são

- (A) um tronco de cone e um cilindro.
- (B) um cone e um cilindro.
- (C) um tronco de pirâmide e um cilindro.
- (D) dois troncos de cone.
- (E) dois cilindros.

**Exercício 51****(ENEM 2019.1 – Questão 157 da Prova Azul)**

As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de seções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as seções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas seções está indicada na figura.

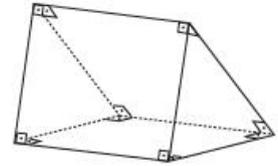


Essa luminária terá por faces

- (A) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- (B) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.
- (C) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- (D) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.
- (E) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

**Exercício 52****(ENEM 2017.1– Questão 148 da Prova Azul)**

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

**Figura 1****Figura 2**ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

- (A) tetraedro.
- (B) pirâmide retangular.
- (C) tronco de pirâmide retangular.
- (D) prisma quadrangular reto.
- (E) prisma triangular reto.

**Exercício 53****(ENEM 2020.1 – Questão 151 da Prova Azul)**

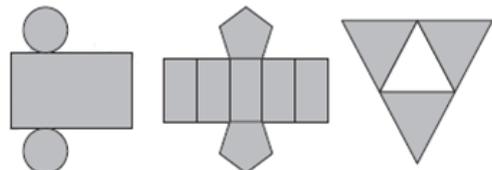
Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulkán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, esse templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada.

As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são

- (A) 2 quadrados e 4 retângulos.
- (B) 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.
- (C) 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.
- (D) 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.
- (E) 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

**Exercício 54****(ENEM 2012.1 – Questão 149 da Prova Azul)**

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

- (A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- (B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- (C) Cone, tronco de pirâmide e prisma.
- (D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
- (E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

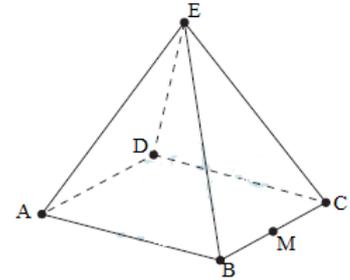
## LOCALIZAÇÃO E MOVIMENTAÇÃO NO ESPAÇO

### Exercício 55

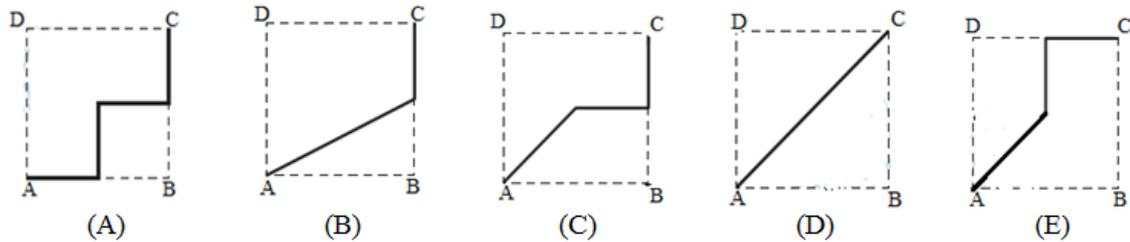
(ENEM 2012.1 – Questão 165 da Prova Azul)

João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.



O desenho que Bruno deve fazer é

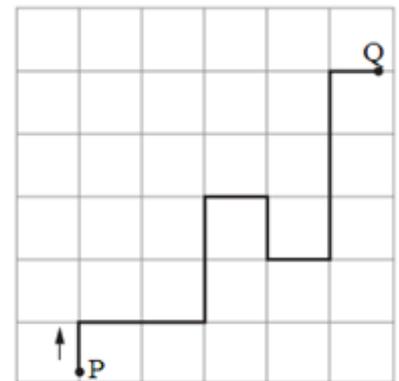


### Exercício 56

(ENEM 2022.1 – Questão 168 da Prova Azul)

Uma pessoa precisa se deslocar de automóvel do ponto P para o ponto Q, indicados na figura, na qual as linhas verticais e horizontais simbolizam ruas.

Por causa do sentido de tráfego nessas ruas, o caminho poligonal destacado é a possibilidade mais curta de efetuar esse deslocamento. Para descrevê-lo, deve-se especificar qual o sentido a ser tomado em cada cruzamento de ruas, em relação à direção de deslocamento do automóvel, que se movimentará continuamente. Para isso, empregam-se as letras E, F e D para indicar “vire à esquerda”, “siga em frente” e “vire à direita”, respectivamente.



A sequência de letras que descreve o caminho poligonal destacado é

- (A) DDEFDDEEFFD.
- (B) DFDEFDDDEFFD.
- (C) DFDEFDDEEFFD.
- (D) EFDFEEDDFFE.
- (E) EFDFEEDDFFE.

**GRANDEZAS, UNIDADES DE MEDIDA, CONVERSÃO DE UNIDADES, ESCALAS**

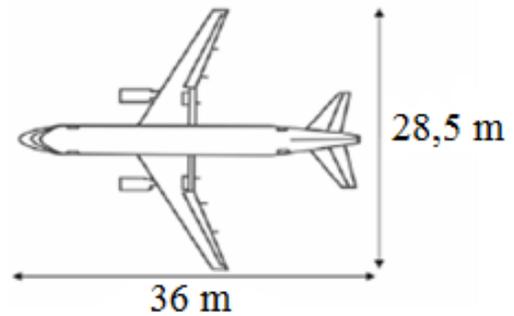
**COMPRIMENTO**

**Exercício 57**

(ENEM 2009.1 – Questão 158 da Prova Azul)

A figura ao lado mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de **1 : 150**.

Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?



(A) 2,9 cm × 3,4 cm.

(B) 3,9 cm × 4,4 cm.

(C) 20 cm × 25 cm.

(D) 21 cm × 26 cm.

(E) 192 cm × 242 cm.

**Exercício 58**

(ENEM 2011.1 – Questão 143 da Prova Azul)

Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

(A) 4,8 e 11,2

(B) 7,0 e 3,0

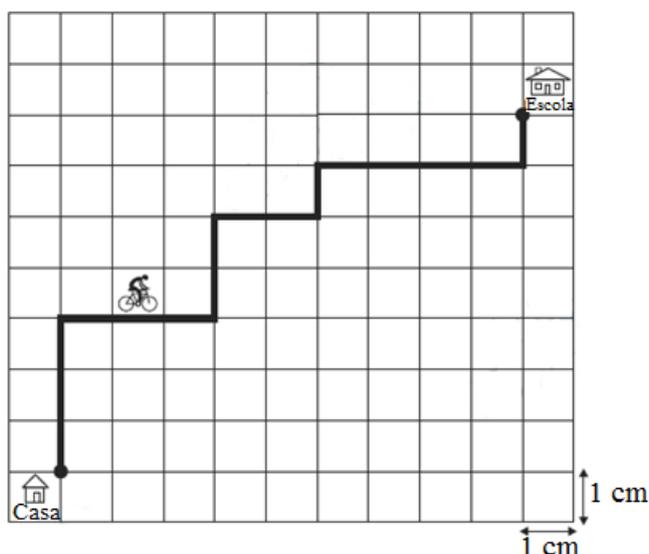
(C) 11,2 e 4,8

(D) 28,0 e 12,0

(E) 30,0 e 70,0

**Exercício 59****(ENEM 2013.1 – Questão 143 da Prova Azul)**

A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala **1 : 25 000**, por um período de cinco dias.



Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

- (A) 4.
- (B) 8.
- (C) 16.
- (D) 20.
- (E) 40.

**Exercício 60****(ENEM 2018.1 – Questão 157 da Prova Azul)**

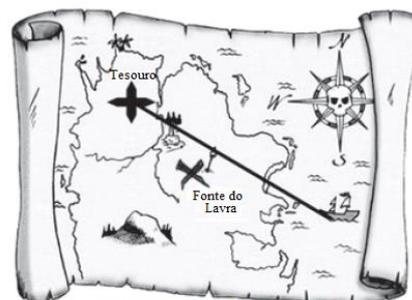
Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real.

Certo mapa tem escala **1 : 58 000 000**.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça **7,6 cm**.

A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é

- (A) 4 408.
- (B) 7 632.
- (C) 44 080.
- (D) 76 316.
- (E) 440 800.



Disponível em: <http://oblogdadaynabrigth.blogspot.com.br>. Acesso em: 9 ago. 2012.

**Exercício 61****(ENEM 2021.1 – Questão 153 da Prova Azul)**

Um parque temático brasileiro construiu uma réplica em miniatura do castelo de Liechtenstein. O castelo original, representado na imagem, está situado na Alemanha e foi reconstruído entre os anos de 1840 e 1842, após duas destruições causadas por guerras.



O castelo possui uma ponte de 38,4 m de comprimento e 1,68 m de largura. O artesão que trabalhou para o parque produziu a réplica do castelo, em escala. Nessa obra, as medidas do comprimento e da largura da ponte eram, respectivamente, 160 cm e 7cm.

A escala utilizada para fazer a réplica é

- (A) 1 : 576
- (B) 1 : 240
- (C) 1 : 24
- (D) 1 : 4,2
- (E) 1 : 2,4

**GRANDEZAS, UNIDADES DE MEDIDA, CONVERSÃO DE UNIDADES, ESCALAS****ÁREAS****Exercício 62****(ENEM 2014.1 – Questão 173 da Prova Azul)**

A maior piscina do mundo, registrada no livro *Guinness*, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área.

Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

- (A) 8.
- (B) 80.
- (C) 800.
- (D) 8 000.
- (E) 80 000.

**Exercício 63****(ENEM 2011.1 – Questão 140 da Prova Azul)**

Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno.

Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

**Terreno 1:** 55 m por 45 m

**Terreno 2:** 55 m por 55 m

**Terreno 3:** 60 m por 30 m

**Terreno 4:** 70 m por 20 m

**Terreno 5:** 95 m por 85 m

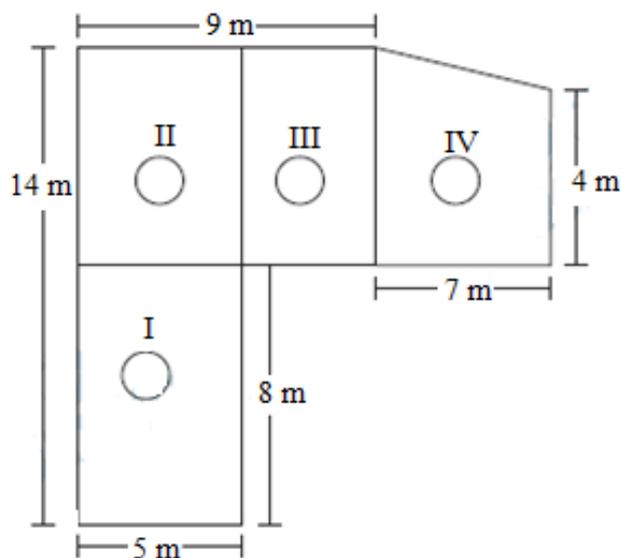
Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.
- (E) 5.

**Exercício 64****(ENEM 2012.1 – Questão 159 da Prova Azul)**

Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m<sup>2</sup> de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m<sup>2</sup> de área.

O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



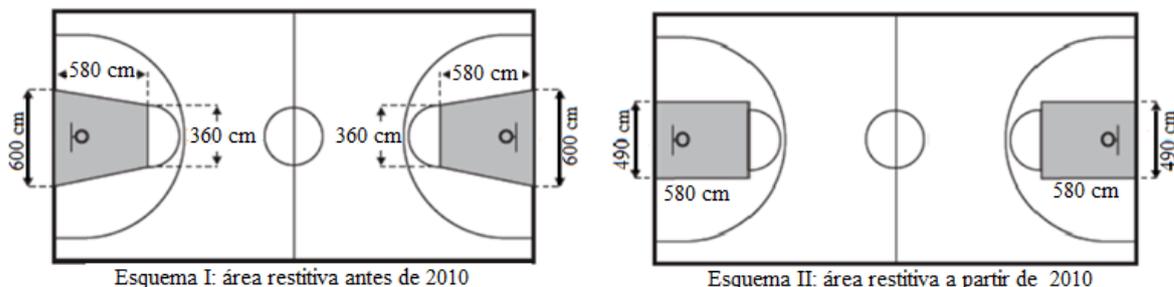
Avaliando-se todas as informações, serão necessárias

- (A) quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
- (B) três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
- (C) duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
- (D) uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
- (E) nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

**Exercício 65****(ENEM 2015.1 – Questão 144 da Prova Azul)**

O esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.

Visando a atender às orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Esquema II: área restritiva a partir de 2010

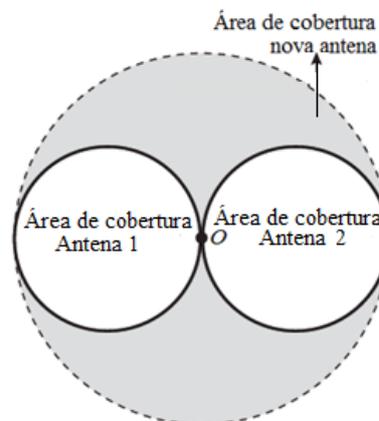
Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

- (A) aumento de  $5\,800\text{ cm}^2$ .
- (B) aumento de  $75\,400\text{ cm}^2$ .
- (C) aumento de  $214\,600\text{ cm}^2$ .
- (D) diminuição de  $63\,800\text{ cm}^2$ .
- (E) diminuição de  $272\,600\text{ cm}^2$ .

**Exercício 66****(ENEM 2015.1 – Questão 155 da Prova Azul)**

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio  $2\text{ km}$ , cujas circunferências se tangenciam no ponto  $O$ , como mostra a figura.

O ponto  $O$  indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente às circunferências das áreas de cobertura menores.

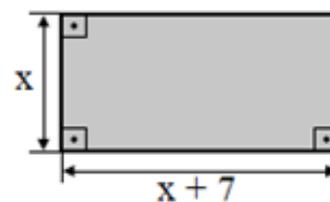


Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

- (A)  $8\pi$ .
- (B)  $12\pi$ .
- (C)  $16\pi$ .
- (D)  $32\pi$ .
- (E)  $64\pi$ .

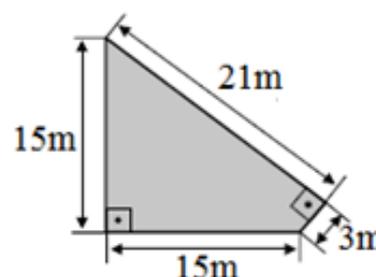
**Exercício 67****(ENEM 2016.1 – Questão 143 da Prova Azul)**

Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7m maior do que a largura.

**Figura A**

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

- (A) 7,5 e 14,5.
- (B) 9,0 e 16,0.
- (C) 9,3 e 16,3.
- (D) 10,0 e 17,0.
- (E) 13,5 e 20,5.

**Figura B****Exercício 68****(ENEM 2019.1 – Questão 147 da Prova Azul)**

Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro  $d = 40$  cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é  $h = 60$  cm, conforme lustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para  $\pi$ .

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

- (A) 16 628.
- (B) 22 280.
- (C) 28 560.
- (D) 41 120.
- (E) 66 240.



**Exercício 69****(ENEM 2021.1 – Questão 171 da Prova Azul)**

O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R\$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

- um triângulo equilátero de lado 12 cm;
- um quadrado de lado 8 cm;
- um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;
- um hexágono regular de lado 6 cm;
- um círculo de diâmetro 10 cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R\$ 0,80 por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão.

Use 3 como aproximação para  $\pi$  e use 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ .

Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão um

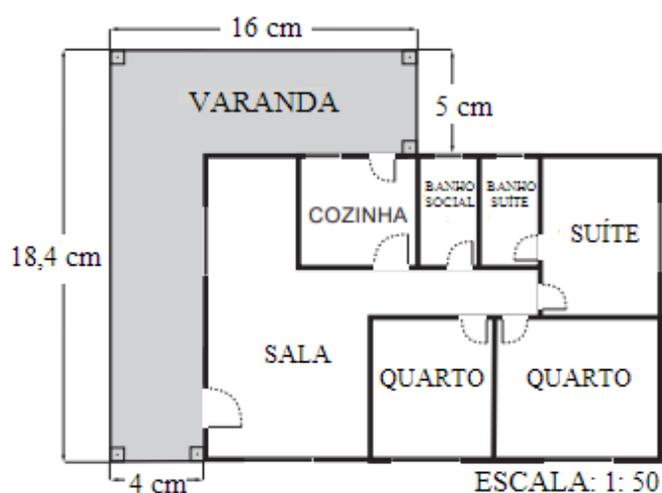
- (A) triângulo.
- (B) quadrado.
- (C) retângulo.
- (D) hexágono.
- (E) círculo.

**Exercício 70****(ENEM 2022.1 – Questão 161 da Prova Azul)**

Uma empresa de engenharia projetou uma casa com a forma de um retângulo para um de seus clientes. Esse cliente solicitou a inclusão de uma varanda em forma de L. A figura apresenta a planta baixa desenhada pela empresa, já com a varanda incluída, cujas medidas, indicadas em centímetro, representam os valores das dimensões da varanda na escala de 1 : 50.

A medida real da área da varanda, em metro quadrado, é

- (A) 33,40.
- (B) 66,80.
- (C) 89,24.
- (D) 133,60.
- (E) 534,40



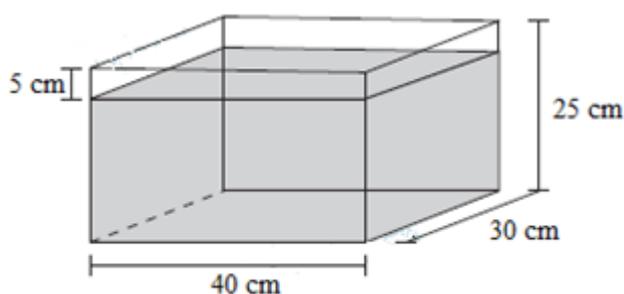
**GRANDEZAS, UNIDADES DE MEDIDA, CONVERSÃO DE UNIDADES, ESCALAS**

**VOLUMES**

**Exercício 71**

(ENEM 2012.1 – Questão 158 da Prova Azul)

Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de  $2\,400\text{ cm}^3$ ?

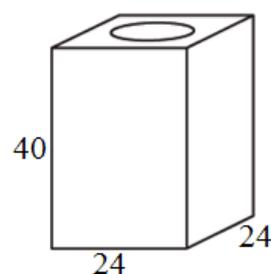
- (A) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
- (B) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
- (C) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
- (D) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
- (E) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

**Exercício 72**

(ENEM 2014.1 – Questão 151 da Prova Azul)

Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.

Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

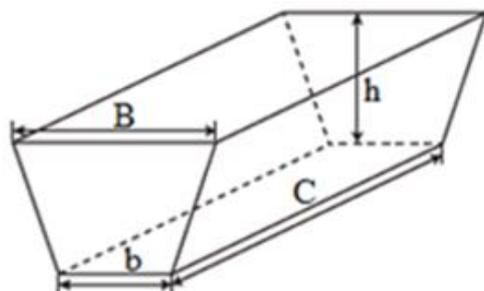


Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- (A) 14,4%.
- (B) 20,0%.
- (C) 32,0%.
- (D) 36,0%.
- (E) 64,0%.

**Exercício 73****(ENEM 2014.1 – Questão 142 da Prova Azul)**

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



**Legenda**  
 b - largura do fundo  
 B - largura do topo  
 C - comprimento do silo  
 h - altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa  $2 \text{ m}^3$  desse tipo de silo.

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

- (A) 110.
- (B) 125.
- (C) 130.
- (D) 220.
- (E) 260.

**Exercício 74****(ENEM 2009.1 – Questão 157 da Prova Azul)**

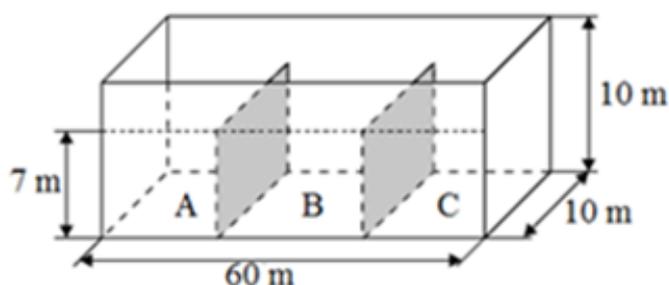
Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las.

Sabendo que a capacidade da caixa é de  $13.824 \text{ cm}^3$ , então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a

- (A) 4.
- (B) 8.
- (C) 16.
- (D) 24.
- (E) 32.

**Exercício 75****(ENEM 2016.1 – Questão 161 da Prova Azul)**

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura.



Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.

Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisorias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

- (A)  $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$ .
- (B)  $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$ .
- (C)  $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$ .
- (D)  $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$ .
- (E)  $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$ .

**Exercício 76****(ENEM 2020.1 – Questão 138 da Prova Azul)**

A caixa-d'água de um edifício terá a forma de um paralelepípedo retângulo reto com volume igual a 28 080 litros. Em uma maquete que representa o edifício, a caixa d'água tem dimensões 2 cm x 3,51 cm x 4 cm. Dado:  $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ .

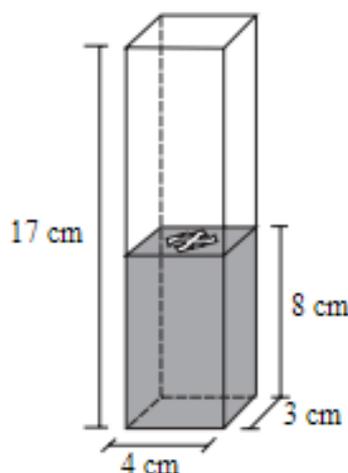
A escala usada pelo arquiteto foi

- (A) 1:10
- (B) 1:100
- (C) 1:1 000
- (D) 1:10 000
- (E) 1:100 000

**Exercício 77****(ENEM 2020.1 – Questão 168 da Prova Azul)**

Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água.

Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a  $6 \text{ cm}^3$  cada, que ficarão totalmente submersas.

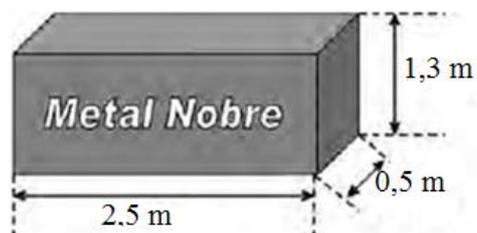


O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

- (A) 14.
- (B) 16.
- (C) 18.
- (D) 30.
- (E) 34.

**Exercício 78****(ENEM 2010.1 – Questão 146 da Prova Azul)**

A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.

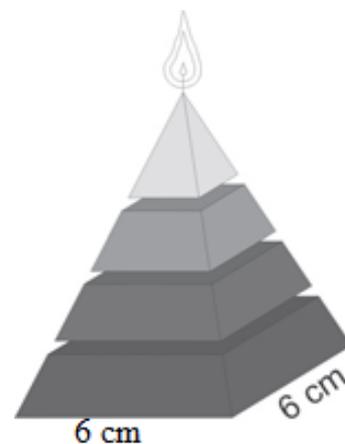


O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

- (A) massa.
- (B) volume.
- (C) superfície.
- (D) capacidade.
- (E) comprimento.

**Exercício 79****(ENEM 2009.1 – Questão 173 da Prova Azul)**

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.

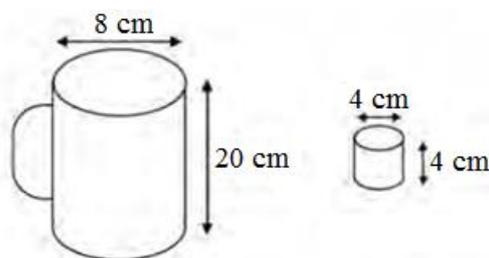


Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

- (A)  $156 \text{ cm}^3$ .  
 (B)  $189 \text{ cm}^3$ .  
 (C)  $192 \text{ cm}^3$ .  
 (D)  $216 \text{ cm}^3$ .  
 (E)  $540 \text{ cm}^3$ .

**Exercício 80****(ENEM 2010.1 – Questão 151 da Prova Azul)**

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade.

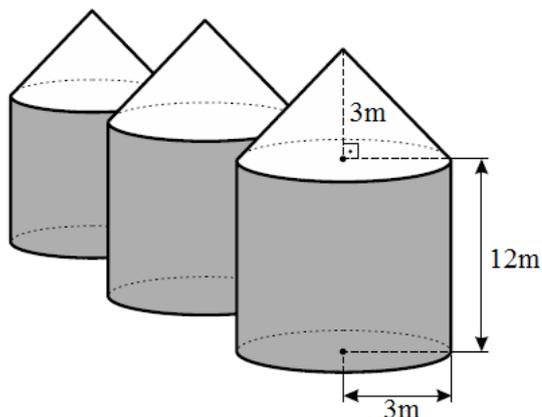
Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

- (A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.  
 (B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.  
 (C) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.  
 (D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.  
 (E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

**Exercício 81****(ENEM 2016.1 – Questão 136 da Prova Azul)**

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de  $20 \text{ m}^3$ . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Utilize 3 como aproximação para  $\pi$ .



O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- (A) 6.
- (B) 16.
- (C) 17.
- (D) 18.
- (E) 21.

**Exercício 82****(ENEM 2014.1 – Questão 167 da Prova Azul)**

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para  $\pi$ .

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

- (A) 168.
- (B) 304.
- (C) 306.
- (D) 378.
- (E) 514.

**Exercício 83****(ENEM 2022.1 – Questão 178 da Prova Azul)**

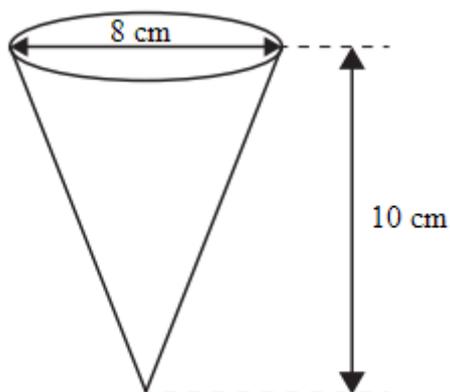
Uma cozinheira produz docinhos especiais por encomenda. Usando uma receita-base de massa, ela prepara uma porção, com a qual produz 50 docinhos maciços de formato esférico, com 2 cm de diâmetro. Um cliente encomenda 150 desses docinhos, mas pede que cada um tenha formato esférico com 4 cm de diâmetro. A cozinheira pretende preparar o número exato as porções de porções da receita-base de massa necessário para produzir os docinhos dessa encomenda.

Quantas porções da receita-base de massa ela deve preparar para atender esse cliente?

- (A) 2.
- (B) 3.
- (C) 6.
- (D) 12.
- (E) 24.

**Exercício 84****(ENEM 2022.1 – Questão 153 da Prova Azul)**

Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

- (A) 1,52.
- (B) 3,24.
- (C) 3,60.
- (D) 6,48.
- (E) 7,20.

**Exercício 85****(ENEM 2022.1 – Questão 174 da Prova Azul)**

Peças metálicas de aeronaves abandonadas em aeroportos serão recicladas. Uma dessas peças é maciça e tem o formato cilíndrico, com a medida do raio da base igual a 4 cm e a da altura igual a 50 cm. Ela será derretida, e o volume de metal resultante será utilizado para a fabricação de esferas maciças com diâmetro de 1 cm, a serem usadas para confeccionar rolamentos. Para estimar a quantidade de esferas que poderão ser produzidas a partir de cada uma das peças cilíndricas, admite-se que não ocorre perda de material durante o processo de derretimento.

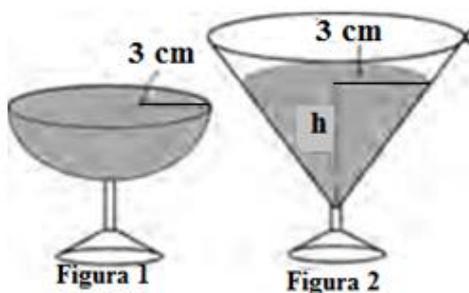
Quantas dessas esferas poderão ser obtidas a partir de cada peça cilíndrica?

- (A) 800.
- (B) 1 200.
- (C) 2 400.
- (D) 4 800.
- (E) 6 400.

**Exercício 86****(ENEM 2010.1 – Questão 168 da Prova Azul)**

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



$$\text{Considere: } V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

- (A) 1,33.
- (B) 6,00.
- (C) 12,00.
- (D) 56,52.
- (E) 113,04.

## ÂNGULOS

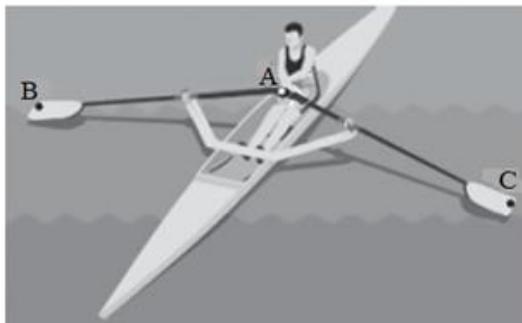
### Exercício 87

(ENEM 2018.1 – Questão 155 da Prova Azul)

O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto  $A$  e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos  $B$  e  $C$ . Esses três pontos formam um triângulo  $ABC$  cujo ângulo  $\hat{B}AC$  tem medida de  $170^\circ$ .



O tipo de triângulo com vértices nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , no momento em que o remador está nessa posição, é

- (A) retângulo escaleno.
- (B) acutângulo escaleno.
- (C) acutângulo isósceles.
- (D) obtusângulo escaleno.
- (E) obtusângulo isósceles.

### Exercício 88

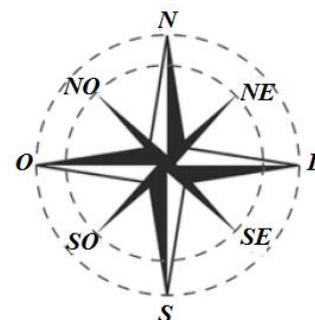
(ENEM 2018.1 – Questão 171 da Prova Azul)

A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.

Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança:  $135^\circ$  no sentido anti-horário;
- 2ª mudança:  $60^\circ$  no sentido horário;
- 3ª mudança:  $45^\circ$  no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.



Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

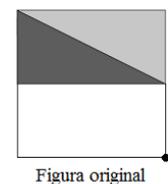
- (A)  $75^\circ$  no sentido horário.
- (B)  $105^\circ$  no sentido anti-horário.
- (C)  $120^\circ$  no sentido anti-horário.
- (D)  $135^\circ$  no sentido anti-horário.
- (E)  $165^\circ$  no sentido horário.

## SIMETRIAS DE FIGURAS PLANAS OU ESPACIAIS

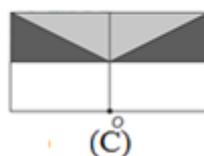
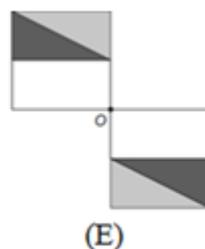
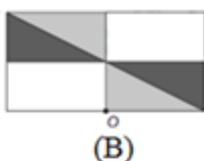
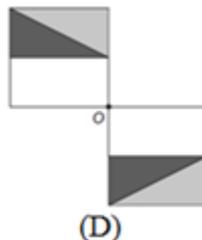
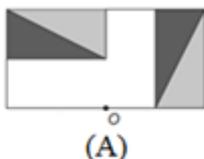
### Exercício 89

(ENEM 2013.1 – Questão 164 da Prova Azul)

Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.



A imagem que representa nova figura é:



## DESIGUALDADE TRIANGULAR

### Exercício 90

(ENEM 2014.1 – Questão 147 da Prova Azul)

Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

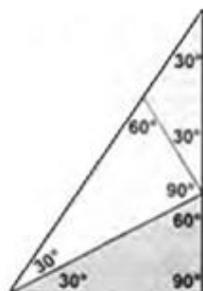
- (A) 3.
- (B) 5.
- (C) 6.
- (D) 8.
- (E) 10.

## CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

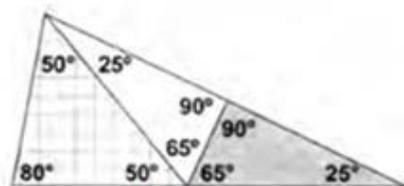
### Exercício 91

(ENEM 2016.2 – Questão 167 da Prova Azul)

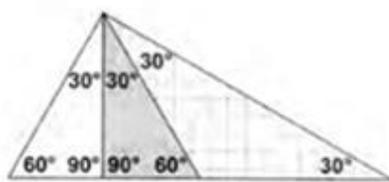
Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



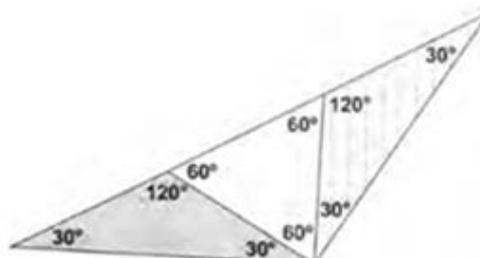
Mosaico 1



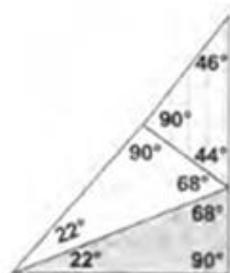
Mosaico 4



Mosaico 2



Mosaico 5



Mosaico 3

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.
- (E) 5.

## SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

**Exercício 92****(ENEM 2009.1 – Questão 154 da Prova Azul)**

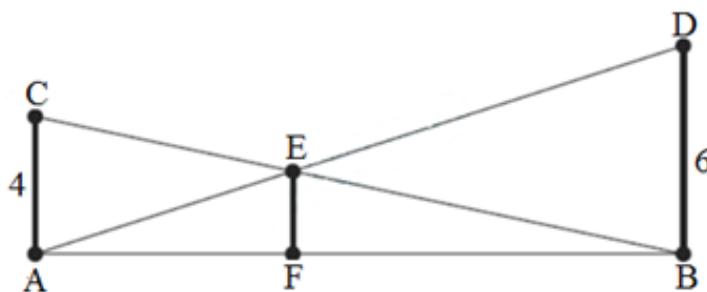
A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

- (A) 1,16 metros.
- (B) 3,0 metros.
- (C) 5,4 metros.
- (D) 5,6 metros.
- (E) 7,04 metros.

**Exercício 93****(ENEM 2013.1 – Questão 179 da Prova Azul)**

O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

- (A) 1 m.
- (B) 2 m.
- (C) 2,4 m.
- (D) 3 m.
- (E)  $2\sqrt{6}$  m.

## TEOREMA DE PITÁGORAS

### Exercício 94

(ENEM 2014.1 – Questão178 da Prova Azul)

Diariamente, uma residência consome 20160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

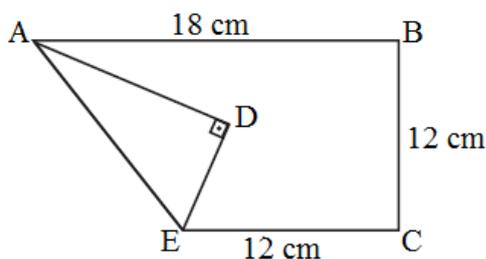
Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

- (A) Retirar 16 células.
- (B) Retirar 40 células.
- (C) Acrescentar 5 células.
- (D) Acrescentar 20 células.
- (E) Acrescentar 40 células.

### Exercício 95

(ENEM 2019.1 – Questão166 da Prova Azul)

Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento  $AE$  é

- (A)  $2\sqrt{22}$  cm.
- (B)  $6\sqrt{3}$  cm.
- (C) 12 cm.
- (D)  $6\sqrt{5}$  cm.
- (E)  $12\sqrt{2}$  cm.

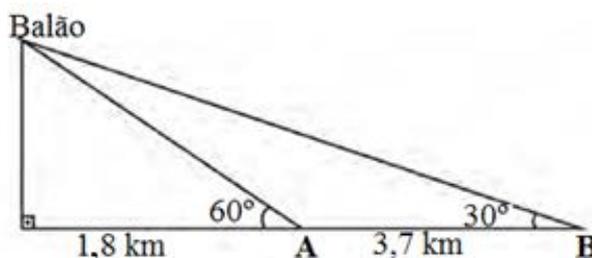
## TRIGONOMETRIA

### Exercício 96

(ENEM 2010.1 – Questão 160 da Prova Azul)

Um balão atmosférico lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de  $60^\circ$ ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de  $30^\circ$ .



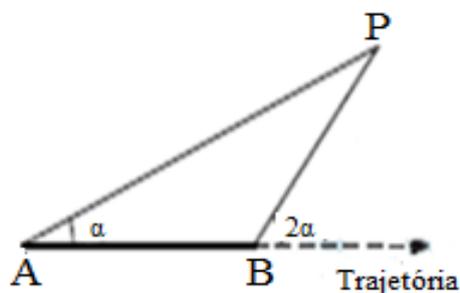
Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- (A) 1,8 km.
- (B) 1,9 km.
- (C) 3,1 km.
- (D) 3,7 km.
- (E) 5,5 km.

### Exercício 97

(ENEM 2011.1 – Questão 155 da Prova Azul)

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual  $\alpha$  fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual  $2\alpha$ . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo  $\alpha = 30^\circ$  e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância  $AB = 2000$  m.

Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- (A) 1 000 m.
- (B)  $1\,000\sqrt{3}$  m.
- (C)  $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$  m.
- (D) 2 000m.
- (E)  $2\,000\sqrt{3}$  m.

**CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS**

Gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

**EQUAÇÃO DO 1º GRAU****Exercício 98****(ENEM 2009.1 – Questão 151 da Prova Azul)**

Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R\$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R\$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

- (A) R\$ 14,00.
- (B) R\$ 17,00.
- (C) R\$ 22,00.
- (D) R\$ 32,00.
- (E) R\$ 57,00.

**Exercício 99****(ENEM 2010.1 – Questão 169 da Prova Azul)**

O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m.

Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

- (A) 4,0 m e 5,0 m.
- (B) 5,0 m e 6,0 m.
- (C) 6,0 m e 7,0 m.
- (D) 7,0 m e 8,0 m.
- (E) 8,0 m e 9,0 m.

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU****Exercício 100****(ENEM 2018.1 – Questão 175 da Prova Azul)**

Uma loja vende automóveis em  $N$  parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R\$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R\$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade  $N$  de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

- (A) 20.
- (B) 24.
- (C) 29.
- (D) 40.
- (E) 58.

**Exercício 101****(ENEM 2022.1 – Questão 146 da Prova Azul)**

Um parque tem dois circuitos de tamanhos diferentes para corridas. Um corredor treina nesse parque e, no primeiro dia, inicia seu treino percorrendo 3 voltas em torno do circuito maior e 2 voltas em torno do menor, perfazendo um total de 1 800 m. Em seguida, dando continuidade a seu treino, corre mais 2 voltas em torno do circuito maior e 1 volta em torno do menor, percorrendo mais 1 100 m.

No segundo dia, ele pretende percorrer 5 000 m nos circuitos do parque, fazendo um número inteiro de voltas em torno deles e de modo que o número de voltas seja o maior possível.

A soma do número de voltas em torno dos dois circuitos, no segundo dia, será

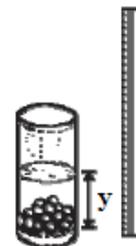
- (A) 10.
- (B) 13.
- (C) 14.
- (D) 15.
- (E) 16.

## FUNÇÃO DO 1º GRAU

### Exercício 102

(ENEM 2009.1 – Questão 159 da Prova Azul)

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura ao lado. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 m
10	6,70 m
15	7,05 m

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

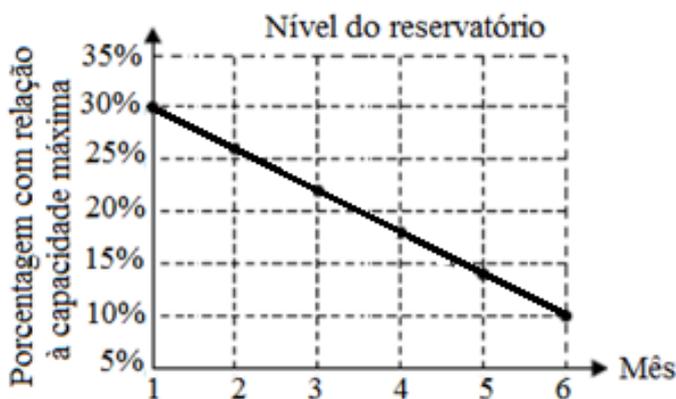
- (A)  $y = 30x$ .
- (B)  $y = 25x + 20,2$ .
- (C)  $y = 1,27x$ .
- (D)  $y = 0,7x$ .
- (E)  $y = 0,07x + 6$ .

### Exercício 103

(ENEM 2016.1 – Questão 158 da Prova Azul)

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico.

Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



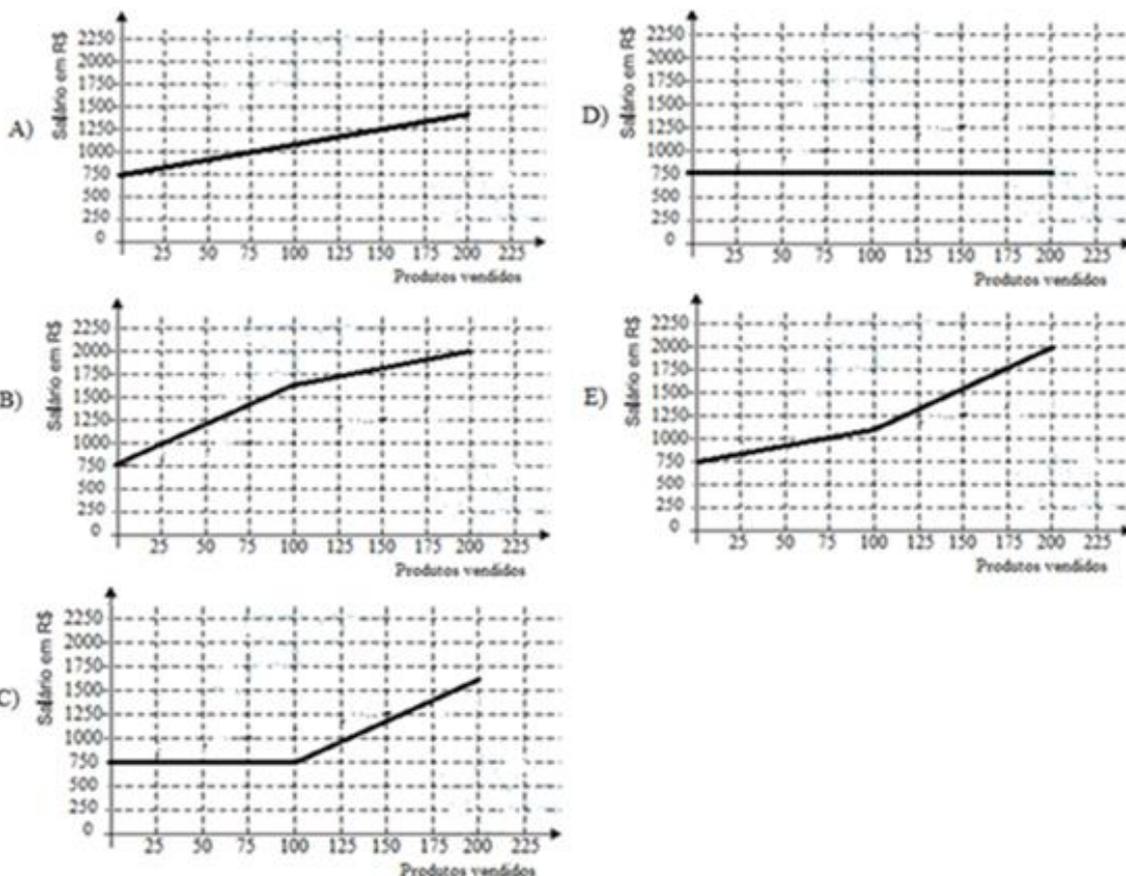
Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

- (A) 2 meses e meio.
- (B) 3 meses e meio.
- (C) 1 mês e meio.
- (D) 4 meses.
- (E) 1 mês.

**Exercício 104****(ENEM 2012.1 – Questão 156 da Prova Azul)**

Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R\$ 750,00, mais uma comissão de R\$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R\$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido.

Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é

**Exercício 105****(ENEM 2019.1 – Questão 168 da Prova Azul)**

Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

- (A)  $Y = 80X + 920$ .
- (B)  $Y = 80X + 1\ 000$ .
- (C)  $Y = 80X + 1\ 080$ .
- (D)  $Y = 160X + 840$ .
- (E)  $Y = 160X + 1\ 000$ .

## EQUAÇÃO DO 2º GRAU / FUNÇÃO DO 2º GRAU

### Exercício 106

(ENEM 2009.1 – Questão 155 da Prova Azul)

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R\$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia.

Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R\$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

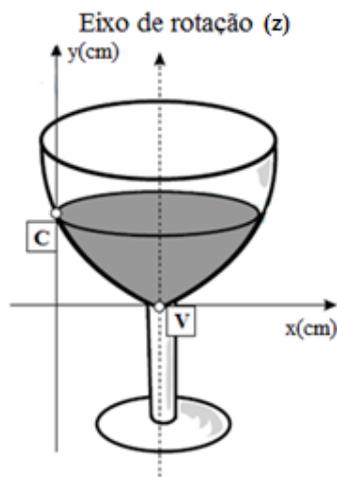
Considerando  $x$  o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e  $V$  o valor, em R\$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona  $V$  e  $x$  é

- (A)  $V = 10.000 + 50x - x^2$ .
- (B)  $V = 10.000 + 50x + x^2$ .
- (C)  $V = 15.000 - 50x - x^2$ .
- (D)  $V = 15.000 + 50x - x^2$ .
- (E)  $V = 15.000 - 50x + x^2$ .

### Exercício 107

(ENEM 2013.1 – Questão 152 da Prova Azul)

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo  $z$ , conforme mostra a figura.



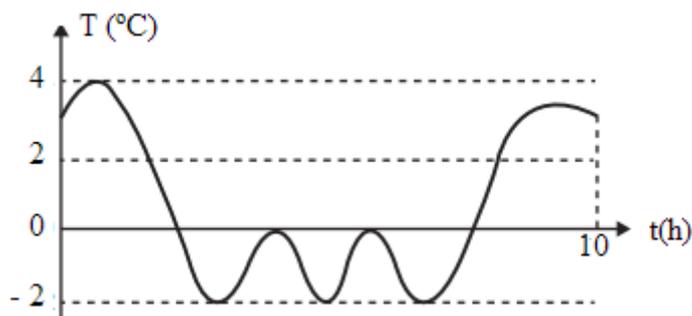
A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ , onde  $C$  é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto  $V$ , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo  $x$ .

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

- (A) 1
- (B) 2.
- (C) 4.
- (D) 5.
- (E) 6.

**Exercício 108****(ENEM 2022.1 – Questão 136 da Prova Azul)**

Uma máquina em operação tem sua temperatura  $T$  monitorada por meio de um registro gráfico, ao longo do tempo  $t$ . Essa máquina possui um pistão cuja velocidade  $V$  varia com a temperatura  $T$  da máquina, de acordo com a expressão  $V = T^2 - 4$ . Após a máquina funcionar durante o intervalo de tempo de 10 horas, o seu operador analisa o registro gráfico, apresentado na figura, para avaliar a necessidade de eventuais ajustes, sabendo que a máquina apresenta falhas de funcionamento quando a velocidade do pistão se anula.



Quantas vezes a velocidade do pistão se anulou durante as 10 horas de funcionamento? (A) 1  
(B) 2  
(C) 3  
(D) 4  
(E) 5.

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU / FUNÇÃO DO 2º GRAU****Exercício 109****(ENEM 2014.1 – Questão 145 da Prova Azul)**

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial  $f$ , de grau menor que 3, para alterar as notas  $x$  da prova para notas  $y = f(x)$ , da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função  $y = f(x)$  a ser utilizada pelo professor é

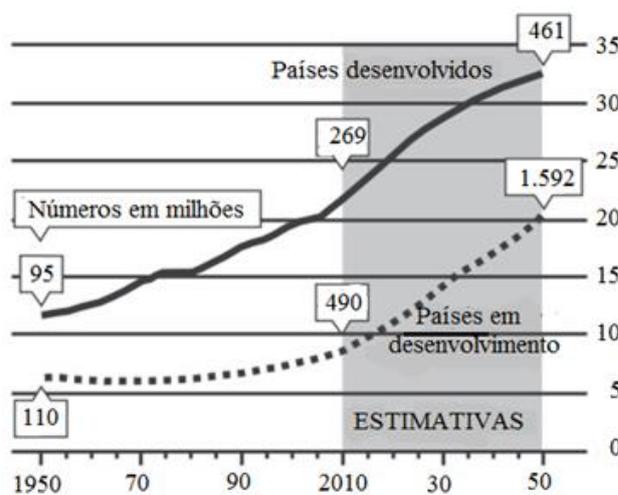
- (A)  $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$ .
- (B)  $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$ .
- (C)  $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$ .
- (D)  $y = \frac{4}{5}x^2 + 2$ .
- (E)  $y = x$ .

## FUNÇÃO EXPONENCIAL

### Exercício 110

(ENEM 2009.1 – Questão 138 da Prova Azul)

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico ao lado, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: Perspectivas da População Mundial, ONU, 2009

Disponível em: [www.economist.com](http://www.economist.com). Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que o modelo exponencial  $y = 363 \cdot e^{0,03x}$ , em que  $x = 0$  corresponde ao ano 2000,  $x = 1$  corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que  $y$  é a população em milhões de habitantes no ano  $x$ , seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando  $e^{0,3} = 1,35$ , estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

- (A) 490 e 510 milhões.
- (B) 550 e 620 milhões.
- (C) 780 e 800 milhões.
- (D) 810 e 860 milhões.
- (E) 870 e 910 milhões.

### Exercício 111

(ENEM 2015.1 – Questão 152 da Prova Azul)

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere  $P$  a quantidade anual de produtos fabricados no ano  $t$  de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas  $P$  em função de  $t$ , para  $t \geq 1$ ?

- (A)  $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8\,000$ .
- (B)  $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$ .
- (C)  $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$ .
- (D)  $P(t) = 8\,000 \cdot (0,5)^{t-1}$ .
- (E)  $P(t) = 8\,000 \cdot (1,5)^{t-1}$ .

## LOGARITMO / FUNÇÃO LOGARÍTMICA

### Exercício 112

(ENEM 2019.1 – Questão 137 da Prova Azul)

*Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com  $\text{pH} < 7$ ) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com  $\text{pH} > 7$ ) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que  $\text{pH} = -\log_{10} x$ , em que  $x$  é a concentração de íon hidrogênio ( $\text{H}^+$ ).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que  $x$  assuma

- (A) qualquer valor acima de  $10^{-8}$ .
- (B) qualquer valor positivo inferior a  $10^{-7}$ .
- (C) valores maiores que 7 e menores que 8.
- (D) valores maiores que 70 e menores que 80.
- (E) valores maiores que  $10^{-8}$  e menores que  $10^{-7}$ .

### Exercício 113

(ENEM 2019.1 – Questão 154 da Prova Azul)

Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local ( $M_s$ ) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local ( $M_s$ ) ( $\mu\text{m} \cdot \text{Hz}$ )
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula  $M_s = 3,30 + \log(A \cdot f)$ , em que  $A$  representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro ( $\mu\text{m}$ ) e  $f$  representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000  $\mu\text{m}$  e frequência de 0,2 Hz.

Utilize 0,3 como aproximação para  $\log 2$ .

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

- (A) Pequeno.
- (B) Ligeiro.
- (C) Moderado.
- (D) Grande.
- (E) Extremo.

## INEQUAÇÕES

### Exercício 114

(ENEM 2011.1 – Questão 180 da Prova Azul)

Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade  $q$  de produtos é dado por uma função, simbolizada por  $CT$ , enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade  $q$  também é uma função, simbolizada por  $FT$ . O lucro total ( $LT$ ) obtido pela venda da quantidade  $q$  de produtos é dado pela expressão  $LT(q) = FT(q) - CT(q)$ .

Considerando-se as funções  $FT(q) = 5q$  e  $CT(q) = 2q + 12$  como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

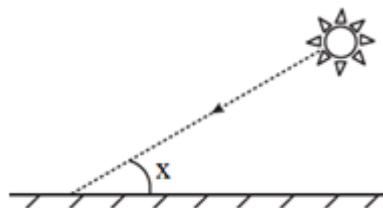
- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 3.
- (D) 4.
- (E) 5.

## RELAÇÕES NO CICLO TRIGONOMÉTRICO E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

### Exercício 115

(ENEM 2017.1 – Questão 138 da Prova Azul)

Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo  $x$  com a sua superfície, conforme indica a figura.



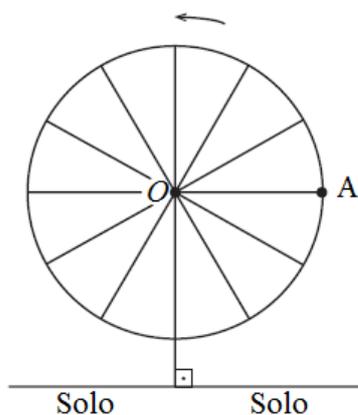
Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por  $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ , sendo  $k$  uma constante, e supondo-se que  $x$  está entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Quando  $x = 30^\circ$ , a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- (A) 33%.
- (B) 50%.
- (C) 57%.
- (D) 70%.
- (E) 86%.

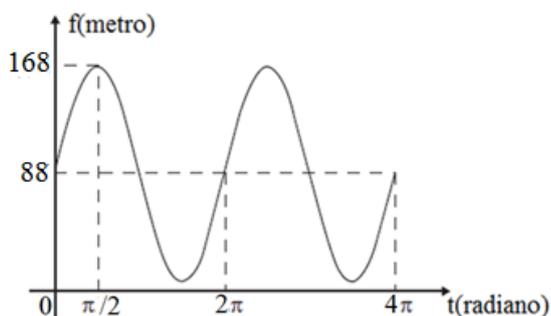
**Exercício 116****(ENEM 2018.1 – Questão 170 da Prova Azul)**

Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura ao lado representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento  $OA$  se encontra paralelo ao plano do solo, rotacional-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto  $O$ . Sejam  $t$  o ângulo determinado pelo segmento  $OA$  em relação à sua posição inicial, e  $f$  a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de  $t$ .

Apos duas voltas completas,  $f$  tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

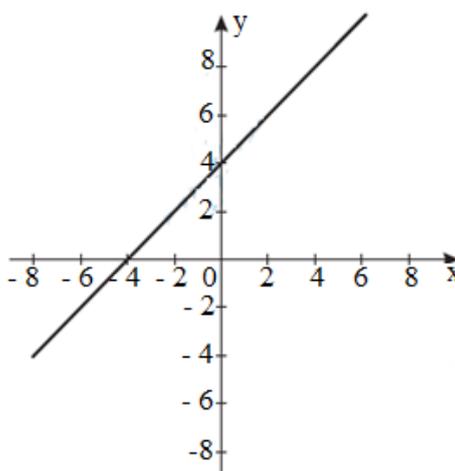
- (A)  $f(t) = 80\text{sen}(t) + 88$ .
- (B)  $f(t) = 80\text{cos}(t) + 88$ .
- (C)  $f(t) = 88\text{cos}(t) + 168$ .
- (D)  $f(t) = 168\text{sen}(t) + 88\text{cos}(t)$ .
- (E)  $f(t) = 88\text{sen}(t) + 168\text{cos}(t)$ .

**CONHECIMENTOS ALGÉBRICOS/GEOMÉTRICOS**

Plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

**Exercício 117****(ENEM 2011.1 – Questão 150 da Prova Azul)**

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



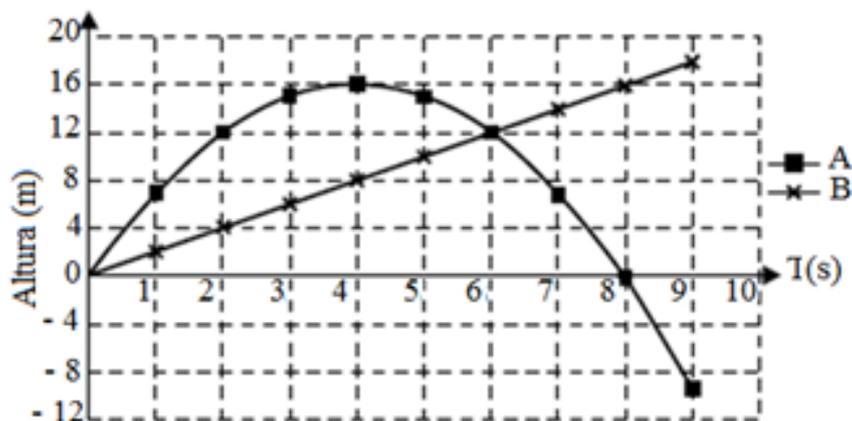
A reta de equação  $y = x + 4$  representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto  $P = (-5, 5)$ , localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto.

- (A)  $(-5, 0)$ .
- (B)  $(-3, 1)$ .
- (C)  $(-2, 1)$ .
- (D)  $(0, 4)$ .
- (E)  $(2, 6)$ .

**Exercício 118****(ENEM 2016.1 – Questão 149 da Prova Azul)**

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

- (A) diminuir em 2 unidades.
- (B) diminuir em 4 unidades.
- (C) aumentar em 2 unidades.
- (D) aumentar em 4 unidades.
- (E) aumentar em 8 unidades.

## GEOMETRIA ANALÍTICA – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

### Exercício 119

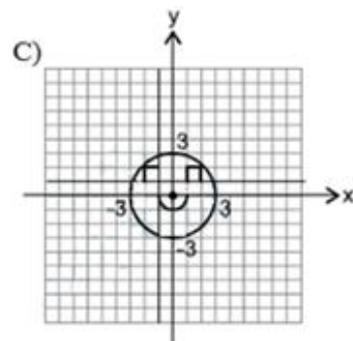
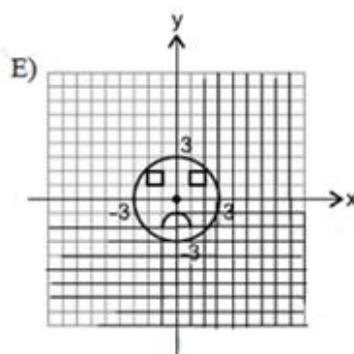
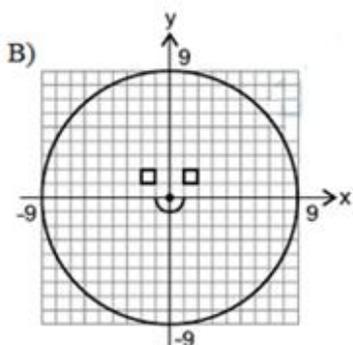
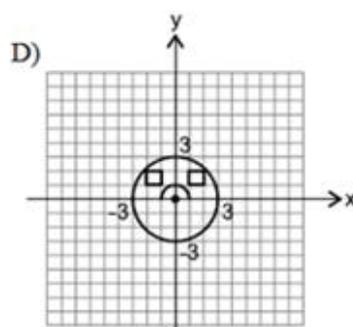
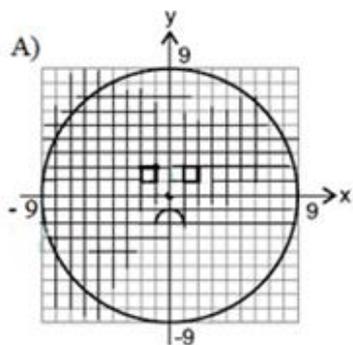
(ENEM 2013.1 – Questão 151 da Prova Azul)

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

- I. é a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 9$ ;
- II. é a parábola de equação  $y = -x^2 - 1$ , com  $x$  variando de  $-1$  a  $1$ ;
- III. é o quadrado formado pelos vértices  $(-2, 1), (-1, 1), (-1, 2)$  e  $(-2, 2)$ ;
- IV. é o quadrado formado pelos vértices  $(1, 1), (2, 1), (2, 2)$  e  $(1, 2)$ ;
- V. é o ponto  $(0, 0)$ .

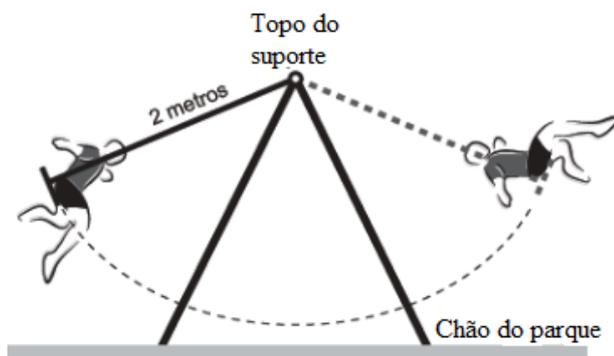
A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?



**Exercício 120****(ENEM 2014.1 – Questão 148 da Prova Azul)**

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo  $X$  é paralelo ao chão do parque, e o eixo  $Y$  tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

(A)  $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$ .

(B)  $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ .

(C)  $f(x) = x^2 - 2$ .

(D)  $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ .

(E)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ .

## CONHECIMENTOS DE ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

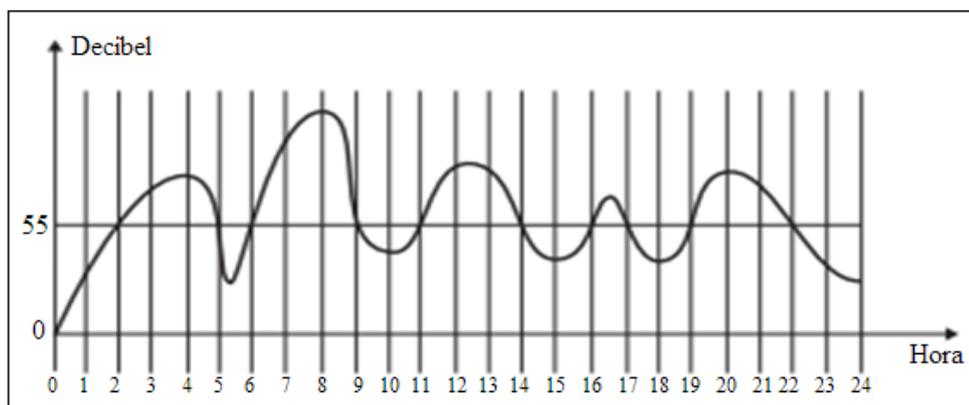
Representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

### GRÁFICOS E TABELAS (REPRESENTAÇÃO, LEITURA, INTERPETAÇÃO E INFERÊNCIAS)

#### Exercício 121

(ENEM 2020.1 – Questão 164 da Prova Azul)

A exposição a barulhos excessivos, como os que percebemos em geral em trânsitos intensos, casas noturnas e espetáculos musicais, podem provocar insônia, estresse, infarto, perda de audição, entre outras enfermidades. De acordo com a Organização Mundial da Saúde, todo e qualquer som que ultrapasse os 55 decibéis (unidade de intensidade do som) já pode ser considerado nocivo para a saúde. O gráfico foi elaborado a partir da medição do ruído produzido, durante um dia, em um canteiro de obras.



Disponível em: [www.revistaencontro.com.br](http://www.revistaencontro.com.br). Acesso em: 12 ago. 2020 (adaptado).

Nesse dia, durante quantas horas o ruído esteve acima de 55 decibéis?

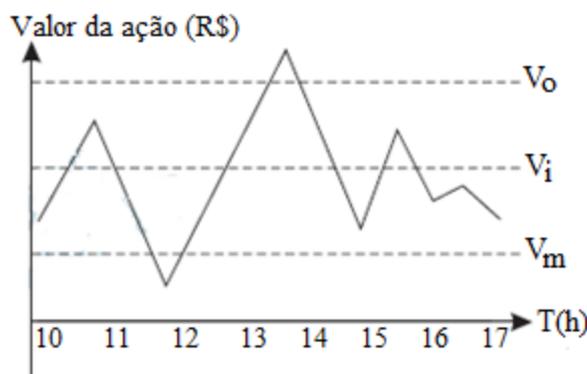
- (A) 5
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 11
- (E) 13

**Exercício 122****(ENEM 2015.1 – Questão 136 da Prova Azul)**

Um investidor inicia um dia com  $x$  ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

- I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal ( $V_i$ );
- II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo ( $V_m$ );
- III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo ( $V_o$ ).

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



Quantas operações o investidor fez naquele dia?

- (A) 3.
- (B) 4.
- (C) 5.
- (D) 6.
- (E) 7.

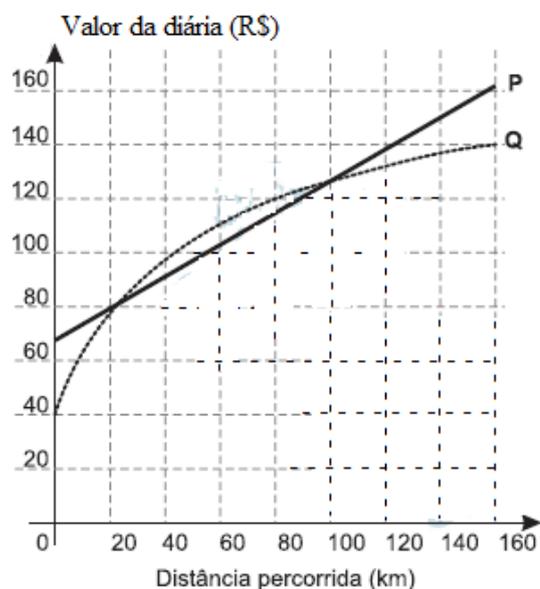
**Exercício 123****(ENEM 2015.1 – Questão 138 da Prova Azul)**

Atualmente existem diversas locadoras de veículos permitindo uma concorrência saudável para o mercado fazendo com que os preços se tornem acessíveis.

Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.

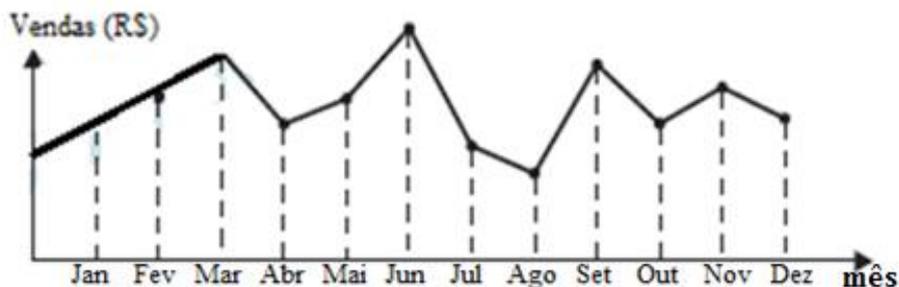
O valor pago na locadora Q é menor ou igual aquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

- (A) De 20 a 100.
- (B) De 80 a 130.
- (C) De 100 a 160.
- (D) De 0 a 20 e de 100 a 160.
- (E) De 40 a 80 e de 130 a 160.



**Exercício 124****(ENEM 2012.1 – Questão 148 da Prova Azul)**

O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado ao lado, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.

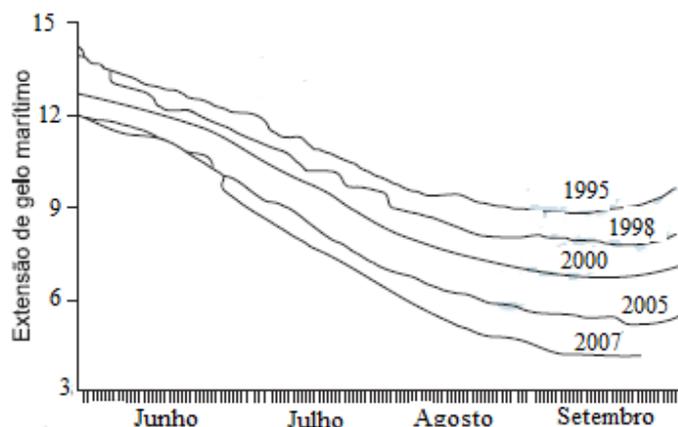


De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas, em 2011, foram

- (A) março e abril.
- (B) março e agosto.
- (C) agosto e setembro.
- (D) junho e setembro.
- (E) junho e agosto.

**Exercício 125****(ENEM 2012.1 – Questão 151 da Prova Azul)**

O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.



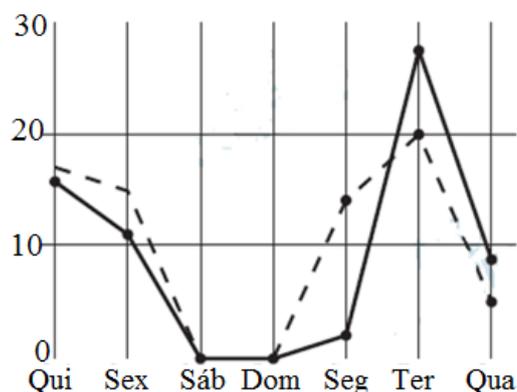
Disponível em: <http://sustentabilidade.allianz.com.br>. Acesso em fev. 2012 (adaptado)

Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em

- (A) 1995.
- (B) 1998.
- (C) 2000.
- (D) 2005.
- (E) 2007.

**Exercício 126****(ENEM 2012.1 – Questão 163 da Prova Azul)**

A figura ao lado apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



Disponível em: <http://bibliotecas.unix.org>. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

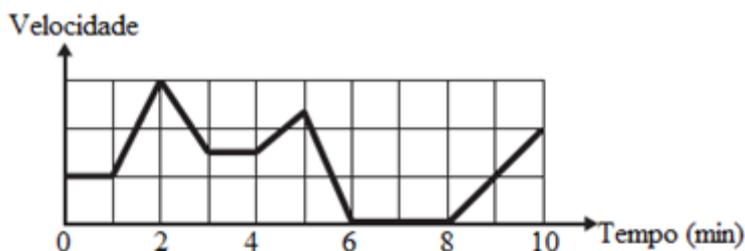
O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na

- (A) segunda e na terça-feira.
- (B) terça e na quarta-feira.
- (C) terça e na quinta-feira,
- (D) quinta-feira, no sábado e no domingo.
- (E) segunda, na quinta e na sexta-feira.

**Exercício 127****(ENEM 2017.1 – Questão 139 da Prova Azul)**

Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

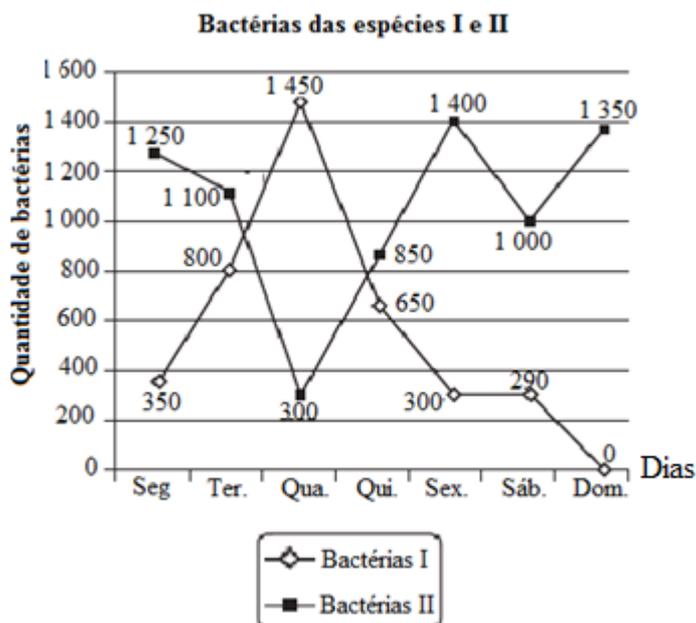
- (A) 4.
- (B) 3.
- (C) 2.
- (D) 1.
- (E) 0.

**Exercício 128****(ENEM 2014.1 – Questão 176 da Prova Azul)**

Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1.250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.

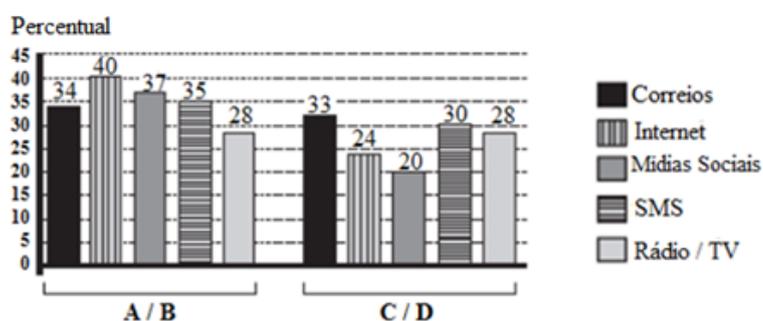
Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

- (A) Terça-feira.  
 (B) Quarta-feira.  
 (C) Quinta-feira.  
 (D) Sexta-feira.  
 (E) Domingo.

**Exercício 129****(ENEM 2015.1 – Questão 140 da Prova Azul)**

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.

**Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região**



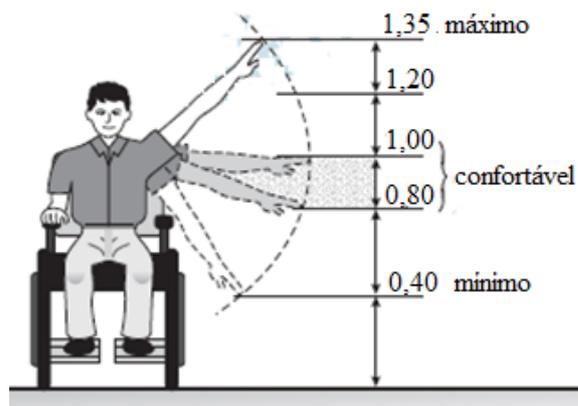
Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

- (A) Correios e SMS.  
 (B) internet e Correios.  
 (C) internet e internet.  
 (D) internet e mídias sociais.  
 (E) rádio/TV e rádio/TV.

**Exercício 130****(ENEM 2012.1 – Questão 140 da Prova Azul)**

Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é

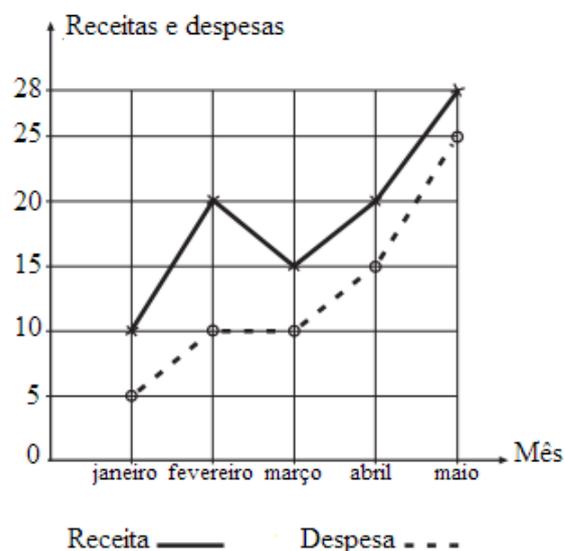
- (A) 0,20 m e 1,45 m.
- (B) 0,20 m e 1,40 m.
- (C) 0,25 m e 1,35 m.
- (D) 0,25 m e 1,30 m.
- (E) 0,45 m e 1,20 m.

**Exercício 131****(ENEM 2021.1 – Questão 149 da Prova Azul)**

A receita  $R$  de uma empresa ao final de um mês é o dinheiro captado com a venda de mercadorias ou com a prestação de serviços nesse mês, e a despesa  $D$  é todo o dinheiro utilizado para pagamento de salários, contas de água e luz, impostos, entre outros. O lucro mensal obtido ao final do mês é a diferença entre a receita e a despesa registradas no mês. O gráfico apresenta as receitas e despesas, em milhão de real, de uma empresa ao final dos cinco primeiros meses de um dado ano.

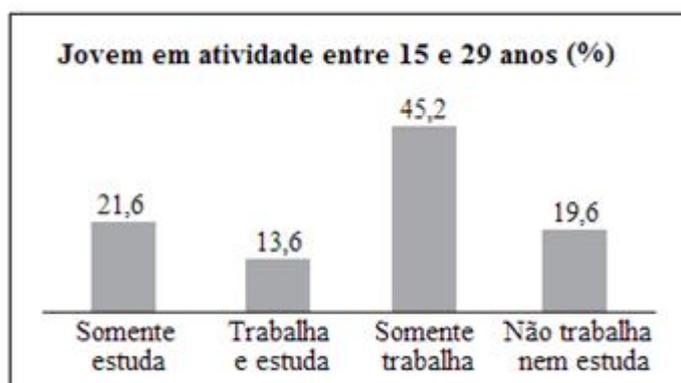
A previsão para os próximos meses é que o lucro mensal não seja inferior ao maior lucro obtido até o mês de maio. Nessas condições, o lucro mensal para os próximos meses deve ser maior ou igual ao do mês de

- (A) janeiro.
- (B) fevereiro.
- (C) março.
- (D) abril.
- (E) maio.



**Exercício 132****(ENEM 2020.1 – Questão 148 da Prova Azul)**

A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad) é uma pesquisa feita anualmente pelo IBGE, exceto nos anos em que há Censo. Em um ano, foram entrevistados 363 mil jovens para fazer um levantamento sobre suas atividades profissionais e/ou acadêmicas. Os resultados da pesquisa estão indicados no gráfico.



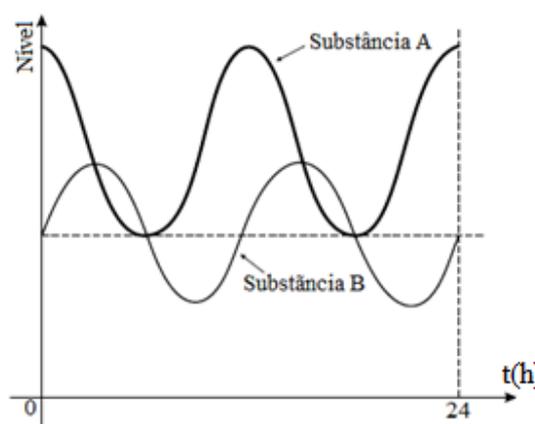
Disponível em: <http://noticias.uol.com.br>. Acesso em: 20 ago. 2014.

De acordo com as informações dadas, o número de jovens entrevistados que trabalha é

- (A) 114 708.
- (B) 164 076.
- (C) 213 444.
- (D) 284 592.
- (E) 291 582.

**Exercício 133****(ENEM 2016.1 – Questão 173 da Prova Azul)**

Em um exame, foi feito o monitoramento dos níveis de duas substâncias presentes (A e B) na corrente sanguínea de uma pessoa, durante um período de 24 h, conforme o resultado apresentado na figura. Um nutricionista, no intuito de prescrever uma dieta para essa pessoa, analisou os níveis dessas substâncias, determinando que, para uma dieta semanal eficaz, deverá ser estabelecido um parâmetro cujo valor será dado pelo número de vezes em que os níveis de A e de B forem iguais, porém, maiores que o nível mínimo da substância A durante o período de duração da dieta.



Considere que o padrão apresentado no resultado do exame, no período analisado, se repita para os dias subsequentes.

O valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista, para uma dieta semanal, será igual a

- (A) 28.
- (B) 21.
- (C) 2.
- (D) 7.
- (E) 14.

## MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL (MÉDIAS, MODA E MEDIANA)

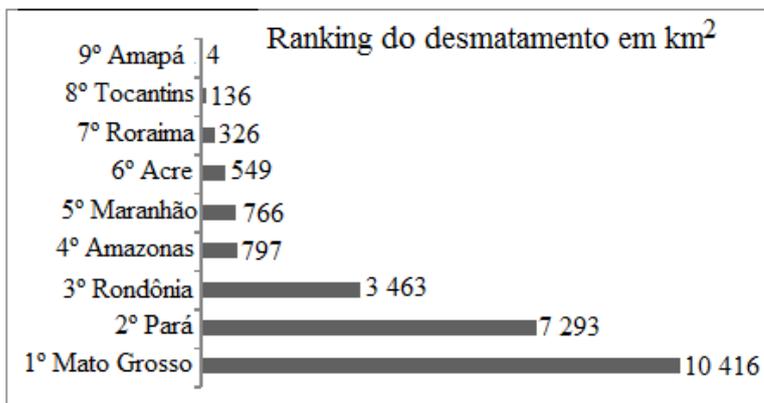
### Exercício 134

(ENEM 2010.1 – Questão 143 da Prova Azul)

Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o *ranking* de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados.

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre

- (A) 100 km<sup>2</sup> e 900 km<sup>2</sup>  
 (B) 1 000 km<sup>2</sup> e 2 700 km<sup>2</sup>.  
 (C) 2 800 km<sup>2</sup> e 3 200 km<sup>2</sup>.  
 (D) 3 300 km<sup>2</sup> e 4 000 km<sup>2</sup>.  
 (E) 4 100 km<sup>2</sup> e 5 800 km<sup>2</sup>.



Disponível em: [www.folhaonline.com.br](http://www.folhaonline.com.br). Acesso em: 30 abr. 2010 (adaptado).

### Exercício 135

(ENEM 2012.1 – Questão 174 da Prova Azul)

A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são

- (A) Balas W e Pizzaria Y.  
 (B) Chocolates X e Tecelagem Z.  
 (C) Pizzaria Y e Alfinetes V.  
 (D) Pizzaria Y e Chocolates X.  
 (E) Tecelagem Z e Alfinetes V.

**Exercício 136****(ENEM 2014.1 – Questão 161 da Prova Azul)**

Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
<b>Experimento 1</b>	1	0	2	2	1
<b>Experimento 2</b>	6	6	3	4	2
<b>Experimento 3</b>	6	7	8	7	9
<b>Experimento 4</b>	6	6	10	8	10
<b>Experimento 5</b>	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

- (A) 1.  
 (B) 2.  
 (C) 3.  
 (D) 4.  
 (E) 5.

**Exercício 137****(ENEM 2016.1 – Questão 153 da Prova Azul)**

Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

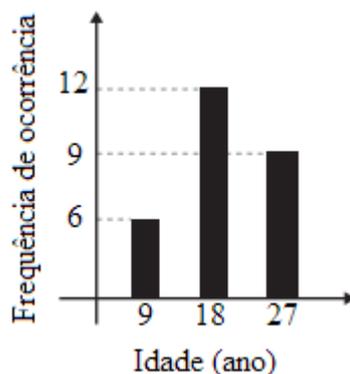
- I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.  
 II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

- (A) 59.  
 (B) 65.  
 (C) 68.  
 (D) 71.  
 (E) 80.

**Exercício 138****(ENEM 2021.1 – Questão 144 da Prova Azul)**

Uma pessoa realizou uma pesquisa com alguns alunos de uma escola, coletando suas idades, e organizou esses dados no gráfico.



Qual é a média das idades, em ano, desses alunos?

- (A) 9.
- (B) 12.
- (C) 18.
- (D) 19.
- (E) 27.

**Exercício 139****(ENEM 2016.1 – Questão 170 da Prova Azul)**

Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício

Número de pessoas	Térreo	1° andar	2° andar	3° andar	4° andar	5° andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

- (A) 2.
- (B) 3.
- (C) 4.
- (D) 5.
- (E) 6.

**Exercício 140****(ENEM 2015.1 – Questão 143 da Prova Azul)**

Em uma seletiva para a final para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

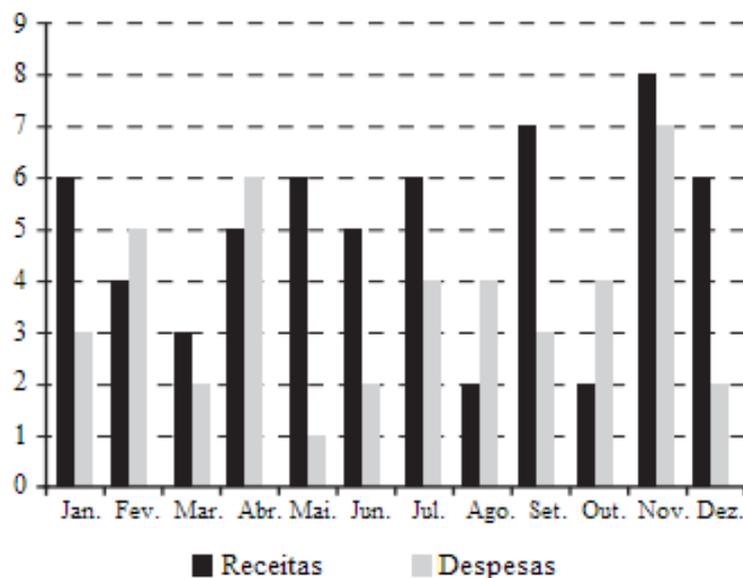
Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (s)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

- (A) 20,70.
- (B) 20,77.
- (C) 20,80.
- (D) 20,85.
- (E) 20,90.

**Exercício 141****(ENEM 2022.1 – Questão 138 da Prova Azul)**

O gráfico apresenta os totais de receitas e despesas de uma empresa, expressos em milhão de reais, no decorrer dos meses de um determinado ano. A empresa obtém lucro quando a diferença entre receita e despesa é positiva e tem prejuízo quando essa diferença é negativa.



Qual é a mediana, em milhão de reais, dos valores dos lucros apurados pela empresa nesse ano?

- (A) 1,5.
- (B) 2,0.
- (C) 2,9.
- (D) 3,0.
- (E) 5,5.

**Exercício 142****(ENEM 2011.1 – Questão 142 da Prova Azul)**

Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro ao lado.

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

- (A) 17°C, 17°C e 13,5°C.  
 (B) 17°C, 18°C e 13,5°C.  
 (C) 17°C, 13,5°C e 18°C.  
 (D) 17°C, 18°C e 21,5°C.  
 (E) 17°C, 13,5°C e 21,5°C.

<b>Dia do mês</b>	<b>Temperatura (em °C)</b>
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

**Exercício 143****(ENEM 2019.1 – Questão 167 da Prova Azul)**

Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Moda</b>
<b>1,65</b>	<b>1,67</b>	<b>1,70</b>

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala.

Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

- (A) basquete, basquete, basquete, basquete.  
 (B) futebol, basquete, basquete, basquete.  
 (C) futebol, futebol, basquete, basquete.  
 (D) futebol, futebol, futebol, basquete.  
 (E) futebol, futebol, futebol, futebol.

## DESVIO E VARIÂNCIA

### Exercício 144

(ENEM 2010.1 – Questão 170 da Prova Azul)

Marco e Paulo foram classificados num concurso. Para a classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

#### Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- (A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
- (B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
- (C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
- (D) Paulo, pois obteve maior mediana.
- (E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

### Exercício 145

(ENEM 2016.1 – Questão 140 da Prova Azul)

O procedimento de perda rápida de “peso” é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três “pesagens” antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos “pesos”. As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
<b>I</b>	78	72	66	72	72	4,90
<b>II</b>	83	65	65	71	65	8,49
<b>III</b>	75	70	65	70	70	4,08
<b>IV</b>	80	77	62	73	77	7,87

Após as três “pesagens”, os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

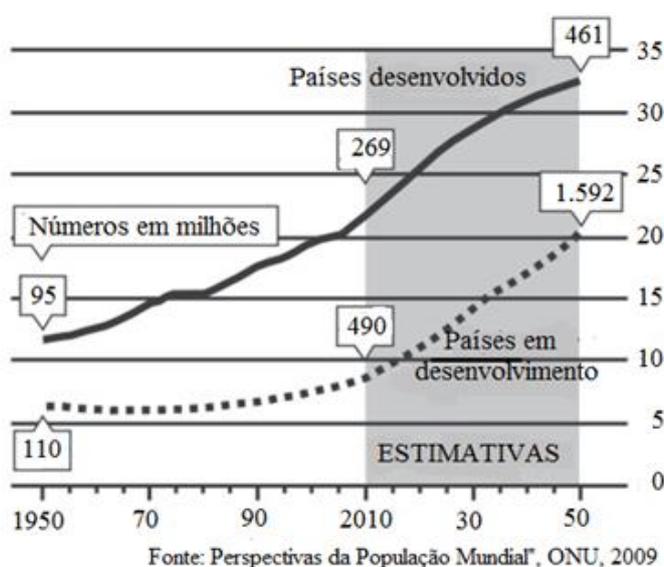
- (A) I e III.
- (B) I e IV.
- (C) II e III.
- (D) II e IV.
- (E) III e IV.

## NOÇÕES DE PROBABILIDADE.

### Exercício 146

(ENEM 2009.1 – Questão 139 da Prova Azul)

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico ao lado, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de

- (A)  $\frac{1}{2}$ .
- (B)  $\frac{7}{20}$ .
- (C)  $\frac{8}{25}$ .
- (D)  $\frac{1}{5}$ .
- (E)  $\frac{3}{25}$ .

### Exercício 147

(ENEM 2017.1 – Questão 179 da Prova Azul)

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- (A) 0,075.
- (B) 0,150.
- (C) 0,325.
- (D) 0,600.
- (E) 0,800.

**Exercício 148****(ENEM 2013.1 – Questão 150 da Prova Azul)**

Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- (A)  $\frac{1}{2}$ .
- (B)  $\frac{5}{8}$ .
- (C)  $\frac{1}{4}$ .
- (D)  $\frac{5}{6}$ .
- (E)  $\frac{5}{14}$ .

**Exercício 149****(ENEM 2015.1 – Questão 142 da Prova Azul)**

Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

- A)  $\frac{1}{100}$ .
- B)  $\frac{19}{100}$ .
- C)  $\frac{20}{100}$ .
- D)  $\frac{21}{100}$ .
- E)  $\frac{8}{100}$ .

## MATRIZES

### Exercício 150

(ENEM 2018.1 – Questão 136 da Prova Azul)

Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz  $A: [a_{ij}]$ , em que  $1 \leq i \leq 5$  e  $1 \leq j \leq 5$ , e o elemento  $a_{ij}$  corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco  $i$  para o banco  $j$  durante o mês. Observe que os elementos  $a_{ii} = 0$ , uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.
- (E) 5.

### Exercício 151

(ENEM 2019.1 – Questão 144 da Prova Azul)

Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

- (A) segunda-feira.
- (B) terça-feira.
- (C) quarta-feira.
- (D) quinta-feira.
- (E) sexta-feira.

