

Mara Lúcia Radtke Kruschardt

Aplicações do teodolito caseiro e virtual para o cálculo de medidas inacessíveis

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Junho, 2023

Mara Lúcia Radtke Kruschardt

Aplicações do teodolito caseiro e virtual para o cálculo de medidas inacessíveis

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Mara Lúcia Radtke Kruschardt junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Coorientadora: Dra. Daiane Silva de Freitas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Junho, 2023

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



IMEF INSTITUTO DE
MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E FÍSICA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



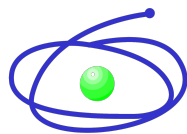
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmatsbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

Ficha Catalográfica

K94a Kruschardt, Mara Lúcia Radtke.
Aplicações do teodolito caseiro e virtual para o cálculo de
medidas inacessíveis / Mara Lúcia Radtke Kruschardt. – 2023.
112 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande –
FURG, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, Rio Grande/RS, 2023.

Orientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

Coorientadora: Dra. Daiane Silva de Freitas.

1. Razões trigonométricas 2. Teodolito caseiro 3. Teodolito virtual
4. Ensino de Matemática 5. Aprendizagem significativa
6. Investigação matemática I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral
II. Freitas, Daiane Silva de III. Título.

CDU 511.31

Catologação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

Aplicações do teodolito caseiro e virtual para o cálculo de medidas inacessíveis

Mara Lúcia Kruschardt

Orientadora:


Prof^a. Dr^a. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Co-orientadora:


Prof^a. Dr^a. Daiane Silva de Freitas

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.


Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
 BARBARA DENICOL DO AMARAL RODRIGUI
Data: 14/06/2023 12:28:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof^a. Dr^a. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Documento assinado digitalmente
 DAIANE SILVA DE FREITAS
Data: 15/06/2023 11:04:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a Daiane Silva de Freitas

Documento assinado digitalmente
 CINTHYA MARIA SCHNEIDER MENEGHETTI
Data: 16/06/2023 08:03:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Documento assinado digitalmente
 GRASIELA MARTINI
Data: 15/06/2023 16:57:28-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a Dr^a. Grasiela Martini

Rio Grande
Junho de 2023

Dedico este trabalho aos estudantes e professores da escola pública brasileira.

“Se és capaz de aceitar teus alunos como são, com suas diferentes realidades humanas, sociais e culturais; se os levas a superar as dificuldades, limitações ou fracassos, sem humilhações, sem inúteis frustrações; se os levas a refletir mais do que decorar; se te emocionas com a visão de tantas criaturas que de ti dependem para desabrochar em consciência, criatividade, liberdade e responsabilidade, então podes dizer: sou mestre”.

(Rui Barbosa)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que me deu a vida e a conduz em todos os momentos.

À minha família amada, meu esposo Ernesto, amor e companheiro nesta vida, e minhas filhas Mariana e Júlia, pelo apoio e incentivo e por terem feito de tudo para que eu pudesse me dedicar aos estudos. Isso é por vocês.

Às minhas orientadoras Prof^a. Dr^a. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez e Prof^a. Dr^a. Daiane Silva Freitas pelo empenho e paciência e por todas as orientações que foram fundamentais para que o trabalho pudesse se concretizar.

Às professoras Dr^a. Cinthya Maria Schneider Meneguetti e Dr^a. Grasiela Martini por aceitarem o convite para compor a banca. Agradeço por todas as contribuições.

A todos os professores do Profmat/Furg, sempre muito dedicados e atenciosos, não mediram esforços para ensinar da melhor maneira. Vocês são um exemplo e inspiração.

À minha colega e amiga Carla Gava, a qual foi uma parceira durante todo curso, com quem pude dividir minhas angústias e alegrias, você foi fundamental para que eu conseguisse concluir, eu não conseguiria sem você.

Aos meus alunos queridos, que são minha motivação diária de trabalho, que me inspiram a buscar aperfeiçoamento a cada dia.

À professora Aline Konradt por ter aceitado e disponibilizado a aplicação da oficina aos seus alunos e a estes, por terem aceitado participar da proposta e contribuído para o enriquecimento do trabalho.

Aos amigos e colegas de trabalho, que me incentivaram e acompanharam essa jornada.

Enfim, a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho, o meu muito obrigada!

Resumo

Este trabalho tem por objetivo contribuir para a qualificação do ensino e aprendizagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo, através de atividades práticas e contextualizadas de medição de alturas e distâncias inacessíveis, com a participação ativa dos alunos. Foram utilizados um teodolito caseiro, construído com materiais recicláveis, e outro, chamado de teodolito virtual, um aplicativo de celular denominado “*angle meter*”, que funciona como um medidor de ângulos. Tais ferramentas auxiliaram na coleta da medida do ângulo de visão em relação aos objetos e situações nas quais deveriam ser medidos. O trabalho apresenta o relato da prática e a análise dos resultados obtidos a partir da aplicação da atividade, tendo como público-alvo estudantes de segundo ano do ensino médio de duas escolas estaduais da cidade de Pelotas. Tal atividade está aliada às teorias acerca da aprendizagem significativa e da investigação matemática, que coloca o aluno como sujeito ativo no processo de aprender e apresentou resultado satisfatório, atingindo os objetivos propostos.

Palavras-chaves: Razões trigonométricas; Teodolito caseiro; Teodolito virtual; Ensino de Matemática; Aprendizagem significativa; Investigação matemática.

Abstract

This work aims to contribute to the qualification of teaching and learning of trigonometric ratios in the right triangle, through practical and contextualized activities of measuring heights and inaccessible distances, with the active participation of students. They use a homemade theodolite, built with recyclable materials, and another called a virtual theodolite, which uses a cell phone application called “angle meter”, which works as an angle meter. These tools help collect the measurement of the angle of view about the objects and situations to be measured. The work presents the report of the practice and the analysis of the results obtained from the application of the activity, having second-year high school students from two state schools in the city of Pelotas as its target audience. This activity is allied to theories about meaningful learning and mathematical investigation, which place the student as an active subject in the learning process and presented satisfactory result, achieving the proposed objectives.

Keywords: Trigonometric ratios; Homemade theodolite; Virtual theodolite, Mathematics Teaching, Meaningful learning; Mathematical investigation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Padrão de desempenho do SAERS ao final de 2016 e 2018	17
Figura 2 – Regiões convexa (esq.) e não convexa (dir.)	33
Figura 3 – Semiplanos determinados por uma reta	34
Figura 4 – Regiões angulares no plano	35
Figura 5 – Grau como unidade de medida de ângulos	35
Figura 6 – Medindo o ângulo $\angle AOB$	36
Figura 7 – Ângulo de 180°	36
Figura 8 – Ângulo agudo (esq.), reto (centro) e obtuso (dir.)	37
Figura 9 – Ângulos opostos pelo vértice	38
Figura 10 – Feixe de retas paralelas e suas transversais	39
Figura 11 – Segmentos proporcionais	40
Figura 12 – Duas retas transversais e um feixe de paralelas	41
Figura 13 – Dois triângulos semelhantes	42
Figura 14 – O caso de semelhança LLL	43
Figura 15 – Prova do caso de semelhança LLL	44
Figura 16 – O caso de semelhança LAL	45
Figura 17 – O caso de semelhança AA	45
Figura 18 – Triângulo com uma reta paralela a um lado	46
Figura 19 – Triângulo retângulo ABC	47
Figura 20 – Ângulo de medida α_1 e vértice V	48
Figura 21 – Triângulos retângulos semelhantes	48
Figura 22 – Triângulo retângulo com um ângulo agudo α	49
Figura 23 – Triângulo ABC qualquer	50
Figura 24 – Triângulo ABC qualquer com um ângulo agudo α	51
Figura 25 – Triângulo ABC qualquer com um ângulo obtuso α	52
Figura 26 – Triângulo ABC com um ângulo reto α	53
Figura 27 – Triângulo ABC inscrito numa circunferência	54
Figura 28 – Materiais para a construção do teodolito caseiro	58
Figura 29 – Teodolito caseiro pronto	59
Figura 30 – Trenas usadas para medir alturas e distâncias	60
Figura 31 – Ícone do aplicativo <i>angle meter</i>	60
Figura 32 – Teodolito virtual sobre o suporte de madeira	61
Figura 33 – Detalhe do medidor de ângulo do aplicativo	62
Figura 34 – Situação para uso dos teodolitos para medir a altura do prédio da escola	63
Figura 35 – Situação para uso dos teodolitos para medir a torre da Igreja sem acesso à base	64

Figura 36 – Situação para uso dos teodolitos para medir a altura da árvore sem acesso à base	65
Figura 37 – Medindo a altura do colega com a trena	67
Figura 38 – Alunos mediando o ângulo com o teodolito caseiro	67
Figura 39 – Alunos medindo o ângulo em diferentes distâncias	68
Figura 40 – Cálculo dos alunos da turma A1 replicados pela professora	69
Figura 41 – Cálculo dos alunos da turma A2 replicados pela professora	70
Figura 42 – Alunos manipulando o teodolito caseiro	71
Figura 43 – Medindo a altura do colega com a trena na escola B	72
Figura 44 – Alunos medindo o ângulo com o teodolito caseiro escola B	72
Figura 45 – Alunos medindo o ângulo em diferentes distâncias na escola B	73
Figura 46 – Cálculo dos alunos da turma B1 replicados pela professora	74
Figura 47 – Cálculo dos alunos da turma B2 replicados pela professora	75
Figura 48 – Alunos medindo o ângulo através do teodolito virtual	78
Figura 49 – Aluna usando o teodolito virtual	79
Figura 50 – Resultados obtidos através do teodolito virtual	80
Figura 51 – Alunos usando teodolito virtual	81
Figura 52 – Alunos usando o teodolito virtual	81
Figura 53 – Cálculo dos alunos da turma B2 replicados pela professora	82
Figura 54 – Cálculo dos alunos da turma B2 replicados pela professora	83
Figura 55 – Usando o teodolito caseiro na medição da torre da igreja	85
Figura 56 – Usando o teodolito virtual na medição da torre	86
Figura 57 – Usando o teodolito virtual na medição da torre	86
Figura 58 – Cálculo das turmas A1 e A2 pelo teodolito caseiro replicadas pela professora	87
Figura 59 – Cálculo das turmas A1 e A2 pelo teodolito virtual replicadas pela professora	88
Figura 60 – Respostas da professora da escola B às perguntas 1 e 2 do questionário	90
Figura 61 – Respostas da professora da escola B às perguntas 3 e 4 do questionário	91

Lista de tabelas

Tabela 1 – Matriz contendo os seis diferentes ambientes de aprendizagem, segundo Skovsmose	30
--	----

Sumário

	Introdução	16
1	OBJETIVOS	21
1.1	Objetivo Geral	21
1.2	Objetivos Específicos	21
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	22
2.1	O que é o Novo Ensino Médio?	22
2.1.1	Mundo do Trabalho	23
2.1.2	Tecnologias Digitais	25
2.2	Aprendizagem significativa	27
2.3	Investigação Matemática	29
3	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	32
3.1	A origem da trigonometria	32
3.2	Ângulos	33
3.2.1	Região convexa	33
3.2.2	Semiplanos	34
3.2.3	Ângulo	34
3.3	Proporcionalidade e semelhança	38
3.3.1	Segmentos de reta proporcionais	38
3.3.2	Teorema de Tales	39
3.3.3	Semelhança de triângulos	41
3.3.3.1	Casos de semelhança	43
3.4	Trigonometria no triângulo retângulo	46
3.4.1	Teorema de Pitágoras	47
3.4.2	Razões trigonométricas no triângulo retângulo	47
3.5	Lei dos cossenos	50
3.6	Lei dos senos	53
4	ATIVIDADES PROPOSTAS	55
4.1	Metodologia	55
4.1.1	Unidade temática	55
4.1.2	Público alvo	55
4.1.3	Pré-requisitos	55
4.1.4	Duração	55

4.1.5	Competência geral da BNCC	56
4.1.6	Competência e habilidade específica da BNCC	56
4.1.7	Objetivos	56
4.1.7.1	Geral	56
4.1.7.2	Específicos	56
4.2	Roteiro Geral de sugestões de atividades	57
4.2.1	Descrição da construção do teodolito caseiro/rudimentar	57
4.2.2	Descrição da montagem do teodolito virtual	60
4.2.3	Atividade 1 - Cálculo da altura do prédio da escola	62
4.2.4	Atividade 2 - Cálculo da altura da torre de uma igreja	63
4.2.5	Atividade 3 - Cálculo da altura de uma árvore	64
5	RELATO DA PRÁTICA DA ATIVIDADE 1 COM O TEODOLITO CASEIRO	66
5.1	Relato da atividade nas turmas A1 e A2	66
5.2	Relato da atividade nas turmas B1 e B2	71
6	RELATO DA PRÁTICA DA ATIVIDADE 1 COM O TEODOLITO VIRTUAL	77
6.1	Relato da atividade nas turmas A1 e A2	77
6.2	Relato da atividade nas turmas B1 e B2	80
7	RELATO DA PRÁTICA DA ATIVIDADE 2 USANDO O TEODOLITO CASEIRO E VIRTUAL NAS TURMAS A1 E A2	85
8	RELATO DA PESQUISA COM A PROFESSORA DA ESCOLA B E OS ALUNOS DA ESCOLA A	90
8.1	Pesquisa sobre a percepção da professora da escola B	90
8.2	Pesquisa sobre a percepção dos alunos da escola A	91
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	95
	REFERÊNCIAS	96
	ANEXOS	98
	ANEXO A – TABELA TRIGONOMÉTRICA	99
	ANEXO B – FIGURAS DE TEODOLITOS E DEFINIÇÃO APRESENTADA AOS ALUNOS	100
	ANEXO C – IMAGEM DE UM TEODOLITO ELETRÔNICO	101

ANEXO D – IMAGEM DE UM ENGENHEIRO USANDO UM TE- ODOLITO SOBRE UM TRIPÉ	102
ANEXO E – SIMULAÇÃO DA SITUAÇÃO PARA O CÁLCULO DA ALTURA DO PRÉDIO	103
APÊNDICES	104
APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DO TEODOLITO	105
APÊNDICE B – TRANSFERIDOR	106
APÊNDICE C – PESQUISA COM A PROFESSORA DA ESCOLA B	107
APÊNDICE D – PESQUISA COM OS ALUNOS DA ESCOLA A .	109
APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO ESCOLA A . .	111
APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO ESCOLA B . .	112

Introdução

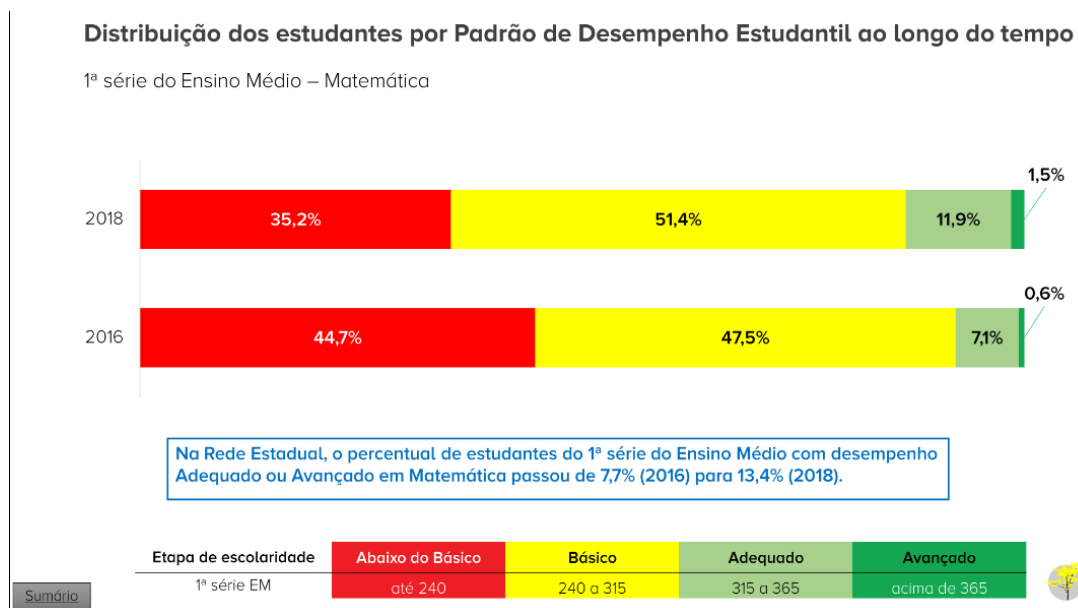
Como forma de acompanhar a qualidade da educação, avaliações externas são aplicadas aos alunos da rede pública e privada com o objetivo de avaliar o desempenho dos estudantes em relação a determinados conhecimentos e habilidades: avaliações em rede nacional, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e, em rede estadual, como o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul (SAERS). Há muitos anos observam-se índices abaixo dos esperados nos resultados de tais avaliações, principalmente na rede pública de ensino e, particularmente, na área da Matemática.

De acordo com o site da Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Sul (SAERS, 2019), os resultados oficiais do SAERS, aplicado em 2018, mostram o desempenho de 244.314 estudantes das escolas urbanas e rurais gaúchas, do 3º e 6º anos do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. A prova foi aplicada pelo Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação (CAED) da Universidade Federal de Juiz de Fora, entre 19 e 23 de novembro de 2018, e traz dados sobre aprendizagem nas áreas de Português e Matemática, com avaliação, inclusive, da leitura e da escrita.

Os resultados são classificados em quatro níveis por padrão de desempenho: abaixo do básico, básico, adequado e avançado. Em Matemática, foram avaliados 39.573 estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental. Desses, 41,9% apresentam níveis básicos de desempenho, 30,3% adequados, enquanto 22,4% se encontram abaixo do básico exigido. No 6º ano do Ensino Fundamental, 52.345 jovens participaram. Desses, 41,5% apresentam níveis básicos de desempenho, 26,3% adequados, e 24,9% abaixo do básico - embora agregados sete pontos de proficiência entre 2016 e 2018, a Rede permaneceu com o mesmo padrão de conhecimento e desempenho do que em 2016 (SAERS, 2019).

Mais de 80 mil estudantes do 1º ano do Ensino Médio foram avaliados em Matemática, e 51,4% alcançaram um conhecimento básico, enquanto que 35,2% estão abaixo do exigido. O percentual de adequado ou avançado em Matemática passou de 7,7% (2016) para 13,4% (2018), conforme se pode observar na Figura 1.

Figura 1 – Padrão de desempenho do SAERS ao final de 2016 e 2018



Fonte: <https://educacao.rs.gov.br/upload/arquivos/201903/06143804-saers.pdf>

Percebe-se o baixo índice de estudantes que possuem desempenho adequado ou avançado na primeira série do Ensino Médio. O maior percentual dos alunos encontra-se no nível básico ou abaixo do básico, um dado bastante preocupante.

Com a pandemia da Covid-19 e a suspensão das aulas presenciais por, praticamente, dois anos consecutivos, 2020 e 2021, essa situação se agravou, deixando uma enorme defasagem nas aprendizagens, uma vez que as escolas tiveram que suspender as aulas presenciais durante esse período. De forma a avaliar os impactos da pandemia na aprendizagem dos estudantes, a rede de ensino estadual propôs uma avaliação diagnóstica chamada Avaliar é Tri RS¹. Conforme informações do site da Secretaria de Educação do RS, a avaliação foi realizada entre os dias 11 e 15 de março de 2022, a prova contou com a participação de 624 mil estudantes de 2.147 escolas estaduais. Foram aplicados questionários dos componentes curriculares de Língua Portuguesa e Matemática para os alunos do 2º ao 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ao 3º do Ensino Médio. Os testes foram realizados somente de forma impressa e no modo presencial nas instituições de ensino da Rede. Do 2º ao 4º do Ensino Fundamental foram aplicadas 40 questões. Do 5º ao 6º ano do Ensino Fundamental, 44 questões. Já o 7º, o 8º e o 9º do Ensino Fundamental, juntamente com o Ensino Médio, receberam 52 questões (AVALIARTRI, 2022).

Com relação ao desempenho dos estudantes no Avaliar é Tri, a porcentagem de alunos no padrão adequado ou avançado, caiu consideravelmente, comparado ao resultado

¹ visa aferir o aprendizado dos estudantes, bem como avaliar as principais competências pedagógicas que precisam ser reforçadas. <https://educacao.rs.gov.br/seduc-divulga-os-resultados-da-1-edicao-de-2022-da-avaliacao-diagnostica-avaliar-e-tri-rs>. Acesso em 22/02/2023.

de 2018. Destacam-se a seguir, algumas das habilidades avaliadas na segunda e terceira séries do Ensino Médio, conectadas a essa avaliação diagnóstica, as quais relacionam-se com a proposta desta dissertação e as porcentagens de acerto dos alunos das escolas estaduais em cada uma delas.

Na segunda série do Ensino Médio:

- (H22) Utilizar as relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos (22%).

Na terceira série do Ensino Médio:

- (H16) Reconhecer o seno, cosseno e tangente como razões entre os lados de um triângulo retângulo (15%).
- (H17) Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (20%).

Constata-se que os alunos obtiveram baixos índices de acertos nas questões referentes às habilidades que envolvem as razões trigonométricas no triângulo retângulo, o que reforça a importância de trabalhar tais habilidades, indo ao encontro da recomendação das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008):

Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola (BRASIL, 2008, p. 73).

Diversos pesquisadores investigam formas de promover a aprendizagem dos alunos, estudando alternativas ao ensino tradicional ou aliadas a ele, propondo situações que permitam a participação mais ativa do estudante no próprio aprendizado, a fim de melhorar o seu desempenho nas aulas, nas avaliações escolares, bem como avaliações externas, quanto (res)significar a aprendizagem.

De acordo com Gadotti (2003b),

Muitas crianças e jovens chegam hoje à escola, muitas vezes sem saber porque estão aí. Não veem sentido no que estão aprendendo. Querem saber, mas não querem aprender o que lhes é ensinado. E aí entra o papel do professor: construir sentido, transformar o obrigatório em prazeroso, selecionar criticamente o que se deve aprender, numa era de impregnação de informações (GADOTTI, 2003b, p. 21).

Após vinte anos, essa citação continua atual, numa era em que a tecnologia móvel faz parte da vida do estudante e a informação está ao alcance a qualquer momento, porém,

a pandemia mostrou que apenas isso não basta, o papel do professor é fundamental no processo de ensino e aprendizagem, agindo de forma a orientar, motivar e dar significado àquilo que se aprende.

A autora desta dissertação, avaliando sua prática em sala de aula, após várias leituras voltadas ao ensino e aprendizagem, bem como, a partir de cursos de aperfeiçoamento para professores, de especialização e mestrado, passou a demonstrar maior interesse em estratégias de ensino voltadas à Investigação Matemática, que promovam uma aprendizagem significativa. Isso deve-se à observação, a partir de algumas experiências já realizadas, de uma melhor aprendizagem dos alunos, e conseqüentemente, um desempenho mais satisfatório.

Buscando maior atuação dos alunos no processo de aprendizagem, não como meros ouvintes e apenas captando discursos e explicações do professor, mas, manipulando objetos, trabalhando com eles, tentando resolver problemas do seu jeito, seguindo seu raciocínio, discutindo, questionando, pensando e avaliando a plausibilidade dos resultados, no presente trabalho propõe-se o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, tendo como auxílio um teodolito caseiro, construído pelos alunos com material reciclável e outro, usando um medidor de ângulos na forma de um aplicativo de *smartfone*, ferramenta muito presente no cotidiano dos estudantes.

Procurando uma proposta de aula diferente do modelo tradicional, de aulas meramente expositivas, observando que muitas aprendizagens não ocorrem de forma plena, pelos índices de reprovação na disciplina e pela falta de motivação dos alunos por aprendê-la, justifica-se a proposta apresentada neste trabalho. Sabe-se que nem todo conteúdo possibilita aplicações práticas ou contextualizadas, porém, sempre que possível a autora tem buscado usar em suas aulas, atividades que envolvam o aluno em todo o processo, concordando com Andrade (2013) quando diz que:

É importante ressaltar que nem todas as aplicações da Matemática são fáceis de serem percebidas e tão pouco aplicadas. Muitas são as reclamações acerca do modelo atual do ensino da Matemática e frisa-se bastante a questão de que a Matemática da escola é descontextualizada da utilizada na vida prática do aluno e assim, essa realidade do ensino da Matemática, torna as aulas pouco atrativas e o aluno não sente necessidade de aprender tal matéria, que para ele é desvinculada da sua vida cotidiana, justificando assim uma pesquisa sobre tal situação à busca de encontrar sugestões para a melhoria dessa situação (ANDRADE, 2013, p. 11).

A pesquisa pode ser caracterizada como um estudo de caso, na medida em que as atividades são aplicadas a duas turmas com as quais a autora trabalha diretamente e outras duas turmas de uma escola estadual da cidade, bem como possui cunho qualitativo, na medida em que são utilizados os registros e as observações durante a ação da prática pedagógica.

Vale ressaltar que as atividades desenvolvidas nesta pesquisa não passaram pelo comitê de ética da FURG (Universidade Federal do Rio Grande). Isso ocorreu, pois essa exigência foi aprovada somente após a prática das oficinas nas escolas já terem ocorrido. Entretanto, pode-se afirmar que todas as atividades foram desempenhadas de acordo com o código de ética e as demais exigências sendo rigorosamente cumpridas, bem como termos de consentimento foram assinados por todos os envolvidos na pesquisa.

Nos capítulos seguintes, o leitor encontrará os objetivos gerais e específicos do trabalho, a fundamentação teórica, a fundamentação matemática, seguido da proposta de atividade e o relato da sua aplicação às turmas de segundo ano de duas escolas estaduais. Além disso, a apresentação dos resultados da pesquisa realizada com os envolvidos na atividade, encerrando com as considerações finais.

1 Objetivos

De modo a contribuir para uma aprendizagem significativa dos estudantes, apresentam-se os objetivos deste trabalho.

1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho é:

Contribuir para a qualificação do ensino das razões trigonométricas no triângulo retângulo, através de atividades práticas de medição de ângulos utilizando um teodolito caseiro e um virtual para o cálculo de medidas inacessíveis em situações reais.

1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Construir um teodolito caseiro com materiais recicláveis para ser utilizado na medição de ângulos para o cálculo de alturas inacessíveis;
- Fazer uso de um aplicativo de celular (*angle meter*) para a montagem de um teodolito virtual a ser utilizado na medição de ângulos para o cálculo de alturas inacessíveis;
- Propor atividades práticas para calcular alturas e distâncias inacessíveis;
- Utilizar os teodolitos caseiro e virtual em atividades práticas de cálculos de alturas e distâncias através da medição do ângulo de visão;
- Calcular as alturas e medidas desconhecidas através dos conhecimentos relacionados às razões trigonométricas;
- Analisar com os estudantes os resultados finais encontrados;
- Analisar os resultados da atividade aplicada aos estudantes.

2 Fundamentos Teóricos

A autora desta dissertação, como professora da educação básica da rede pública estadual, busca orientar seu trabalho em grande parte pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio, bem como pelo Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino do Rio Grande do Sul. Além disso, a pesquisa é amparada pela teoria da investigação Matemática aliada à teoria da aprendizagem significativa.

2.1 O que é o Novo Ensino Médio?

Para responder esta pergunta recorre-se ao Ministério da Educação ¹: A Lei nº 13.415/2017 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1.000 horas anuais (até 2022). Também foi definido uma nova organização curricular, mais flexível, que contempla uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a oferta de diferentes possibilidades de escolhas aos estudantes, os itinerários formativos, com foco nas áreas de conhecimento e na formação técnica e profissional. A mudança tem como objetivos garantir a oferta de educação de qualidade a todos os jovens brasileiros e de aproximar as escolas à realidade dos estudantes de hoje, considerando as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade.

O Novo Ensino Médio Gaúcho traz na proposta de currículo, conforme previsto pelo Referencial Curricular Gaúcho do Ensino Médio (SUL, 2009), disciplinas como Projeto de Vida, Mundo do Trabalho e Culturas e Tecnologias Digitais, indo ao encontro daquilo que Moran (2000) já nos escrevia anos atrás:

Educar é colaborar para que professores e alunos nas escolas e organizações transformem suas vidas em processo permanentes de aprendizagem. É ajudar os alunos na construção de sua identidade, do seu caminho pessoal e profissional - do seu projeto de vida, no desenvolvimento das habilidades de compreensão, emoção e comunicação que lhes permitam encontrar seus espaços pessoais, sociais e de trabalho e tornar-se cidadãos realizados e produzidos (MORAN, 2000, p. 03).

São diversas as aspirações dos jovens que buscam o Ensino Médio, alguns pretendem aprofundar conhecimentos objetivando a alcançar uma vaga na universidade, outros, buscam formação técnica nos diversos institutos de educação tecnológica e em escolas que oferecem cursos técnicos e há ainda, os que necessitam concluir visando uma vaga no mer-

¹ <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=40361>

cado de trabalho. Para que esse estudante possa prosseguir, conforme suas necessidades, a BNCC (BRASIL, 2018) nos diz que:

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL, 2018, p. 471).

A BNCC (BRASIL, 2018), na competência geral 2 da educação básica, reforça essa necessidade quando sugere que diferentes áreas se apropriem desses conhecimentos e estabelece a importância de:

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 09).

Buscando contribuir para a formação desse aluno do novo Ensino Médio, a proposta do uso do teodolito vai ao encontro das possibilidades de formação futura, pois permite ao aluno vislumbrar as áreas associadas às medições, como Agrimensura, Arquitetura, Engenharia, Topografia, Geologia, entre outras.

2.1.1 Mundo do Trabalho

De acordo com Boyer (2010),

A Trigonometria é um dos ramos antigos e mais versáteis da Matemática, surgiu essencialmente para resolver problemas envolvendo a Astronomia, estudada por egípcios e gregos. A Astronomia foi grande impulsora do desenvolvimento da Trigonometria. Hoje, a Trigonometria tem aplicações importantes em muitos setores da nossa vida (BOYER, 2010, p. 108).

Considera-se que a Matemática desempenha um papel fundamental na formação de várias áreas do conhecimento e, a trigonometria, em especial, através das relações entre os lados e ângulos do triângulo tem uma ampla gama de aplicações práticas, destacando-se aqui a Engenharia, Arquitetura e as profissões que acompanham essas áreas, mostrando como ela pode atuar em cada uma delas.

De acordo com Cristina (2014) em seu blog “Abordando a Matemática” com relação à Engenharia Civil, a autora define a área como:

A Engenharia Civil é o ramo da engenharia que engloba a concepção, o projeto, a construção e manutenção de todos os tipos de infraestrutura necessários ao bem estar e ao desenvolvimento da sociedade, além da preservação do ambiente natural. Desta forma, esta área dedica-se à criação de edifícios, pontes, túneis, usinas geradoras de energia, indústrias e inúmeros outros tipos de estrutura. Além disso, tem como ferramenta fundamental a aplicação do cálculo matemático para elaborar projetos de edificações e construções. A trigonometria é usada em todo e qualquer cálculo de projeto estrutural da construção civil. Na verdade, a Matemática é um artifício de cálculo usado para resolver questões físicas da Engenharia Civil. E é dentro destes recursos matemáticos que podemos citar a trigonometria. Em diversos cálculos que envolvem força e pressão são utilizados vetores. Para realizarem cálculos com esses vetores os engenheiros utilizam muito esta área da Matemática. Na Engenharia Civil, a maioria dos desenhos são transformados em triângulo(s) retângulo(s) para facilitar muitos cálculos (CRISTINA, 2014).

Com relação à Arquitetura, levando em consideração aspectos históricos e culturais a autora define que:

A Arquitetura existe desde que o homem sentiu a necessidade de ter um teto para se abrigar e se proteger. O curso de Arquitetura une a formação artística e humana com disciplinas exatas, como Engenharia, Matemática e Cálculo. O principal objetivo do arquiteto é planejar, projetar e desenhar os espaços urbanos visando melhorar a qualidade de vida das pessoas que neles vivem. Para isso, leva em conta os aspectos técnicos, históricos, culturais e estéticos do meio ambiente (CRISTINA, 2014).

Nesse sentido, Crooks (2021) corrobora ao mostrar a importância da trigonometria na Arquitetura.

A Matemática torna o *design* das construções mais seguro e preciso. A trigonometria é muito importante para a arquitetura, já que permite ao arquiteto calcular as distâncias e as forças relacionadas aos elementos diagonais. Das seis funções da trigonometria básica, o seno, o cosseno e a tangente são as mais importantes para a arquitetura, pois permite ao arquiteto achar facilmente os valores opostos e adjacentes relacionados a um ângulo ou uma hipotenusa e a converter um vetor diagonal em um vetor horizontal e vertical (CROOKS, 2021).

Além do mais, na área da construção civil, destacam-se profissões, que não são de nível superior, como mestre de obras, pedreiro e servente de pedreiro, os quais trabalham diretamente na construção e, embora não possuam curso superior, também aplicam os conhecimentos matemáticos relacionados ao triângulo retângulo. Ao colocar paredes e linhas no que chamam de “esquadro”, usam as medidas pitagóricas (60, 80 e 100) para concluir que o ângulo formado entre as paredes seja 90 graus. Também no cálculo da altura da parede que dá o caimento/inclinação do telhado, para que a porcentagem fique adequada (altura dividida pela distância), usam o cálculo da tangente, ainda que, em grande parte esses conhecimentos sejam transmitidos de modo empírico e não pelo ensino formal.

2.1.2 Tecnologias Digitais

De acordo com Moura (2009),

A tecnologia móvel está tornando-se parte integrante da vida moderna em todo o mundo. Cada vez mais poderosa, com mais funcionalidades e serviços, proporciona acionar conteúdos em qualquer lugar e a qualquer hora. Há anos que o número de telemóveis superou o número de computadores pessoais, convertendo-se no sistema de comunicação pessoal por excelência. Estas potencialidades fazem dele uma ferramenta adequada para ser explorada em contextos educativos (MOURA, 2009, p. 50).

Essa reflexão segue pertinente, pois segundo uma pesquisa de levantamento anual divulgada pela FGV² (Fundação Getúlio Vargas) no início de 2022, o Brasil tinha mais de um *smartphone* por habitante. Eram 242 milhões de celulares inteligentes em uso no país, que tem pouco mais de 214 milhões de habitantes, de acordo com o IBGE (Instituto Brasileiro de Estatísticas). A pesquisa mostra ainda que, ao adicionar *notebooks* e *tablets*, eram ao todo 352 milhões de dispositivos portáteis no Brasil, o equivalente a 1,6 por pessoa. Contando com computadores, chegavam a 447 milhões de dispositivos digitais em uso no Brasil (corporativo e doméstico), ou seja, mais de dois dispositivos digitais por habitante em junho de 2022. O *smartphone* domina a maioria dos usos, como nos bancos, compras e mídias sociais, segundo o levantamento.

Houve ainda, uma aceleração da inclusão digital no período da pandemia, pois as atividades escolares precisavam “chegar” até os estudantes. Algumas escolas ofereceram ensino remoto com aulas online. Para isso, foi necessário um grande investimento e maior conectividade nas escolas e residências. Tal fato precisou entrar para a agenda política, de modo que os alunos da rede pública também pudessem ter a possibilidade de acesso a esse formato de ensino, no entanto, em grande parte, os estudantes da rede pública foram bastante prejudicados, pois o acesso não foi para todos.

Percebe-se que as tecnologias digitais estão ao alcance da maioria da população, especialmente dos alunos do Ensino Médio, que são “nativos digitais” e lidam com muita facilidade com as diversas ferramentas tecnológicas, como jogos e aplicativos. O celular faz parte do seu dia a dia e o uso da tecnologia através de *smartphones* pode ser uma ferramenta auxiliar ao ensino, por ser um instrumento de fácil acesso e ampla utilização.

A BNCC (BRASIL, 2018) propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Ela considera que tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo àqueles que podem ser representados por fluxogramas.

² <https://www.cnnbrasil.com.br/business/brasil-tem-mais-smartphones-que-habitantes-aponta-fgv/>

Por isso a importância do acesso às tecnologias digitais, visando a garantir uma educação de qualidade e que busque o aperfeiçoamento profissional, assim, destaca-se outro enfoque da BNCC (BRASIL, 2018):

Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior (BRASIL, 2018, p. 518).

Quando se fala em tecnologia, pode-se pensar em qualquer ferramenta que possa ser útil para que a aprendizagem se desenvolva. No campo da geometria, instrumentos de medição como trenas e fitas métricas revelam na prática conhecimentos matemáticos neles contidos. Nesse sentido, o Referencial Curricular Gaúcho (SUL, 2009) esclarece que:

O uso de materiais e tecnologias criados pelo homem, como instrumentos de desenho ou de medição, os instrumentos de orientação, ampliação, redução ou de cálculo, bem como computadores e a Internet devem revelar a Matemática neles presente, os conhecimentos matemáticos necessários para utilizá-los e a Matemática utilizada nas diferentes profissões. A História da Matemática e dos matemáticos, relacionada à História do homem, das Ciências e das Artes é um veículo de aprendizagem Matemática (SUL, 2009, p. 44).

A utilização de instrumentos de medição de ângulos, tanto manuais quanto tecnológicos corrobora com o que diz a BNCC (BRASIL, 2018) ao sugerir que no Ensino Médio o foco esteja no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. Com isso, uma das competências e habilidades definidas nas diferentes áreas envolvendo a tecnologia é: “usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática”.

A internet é um campo bastante vasto no que tange à comunicação e disseminação da informação, porém, nem toda informação produz conhecimento e Moran (2000) esclarece essa relação:

Há uma certa confusão entre informação e conhecimento. Temos muitos dados, muitas informações disponíveis. Na informação, os dados estão organizados dentro de uma lógica, de um código, de uma estrutura determinada. Conhecer é integrar a informação no nosso referencial, no nosso paradigma, apropriando-a, tornando-a significativa para nós. O conhecimento não se passa, o conhecimento se cria, se constrói (MORAN, 2000, p. 10).

Mostrando que apenas a informação não é suficiente para produzir conhecimento, essa informação precisa conectar-se a algum conhecimento prévio que possa fazer sentido ao sujeito.

2.2 Aprendizagem significativa

Durante muitos anos o papel do professor foi de detentor e transmissor do conhecimento, porém, nos dias atuais, esse papel ganha novo significado. De acordo com Dolan e Collins (2015) apud Bacich e Moran (2018),

O professor como orientador ou mentor ganha relevância. O seu papel é ajudar os alunos a irem além de onde conseguiriam ir sozinhos, motivando, questionando, orientando. Até alguns anos atrás, ainda fazia sentido que o professor explicasse tudo e o aluno anotasse, pesquisasse e mostrasse o quanto aprendeu. Estudos revelam que quando o professor fala menos, orienta mais e o aluno participa de forma ativa, a aprendizagem é mais significativa (DOLAN; COLLINS, 2015), apud (BACICH; MORAN, 2018, p. 04).

Moreira (1999) descreve em seu livro a “Aprendizagem Significativa”, de acordo com a Teoria de Ausubel:

Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva (não-litera) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo. Isto é, nesse processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, à qual Ausubel chama de “conceito subsunçor” ou, simplesmente, “subsunçor”, existente na estrutura cognitiva de quem aprende. O “subsunçor” é, portanto, um conceito, uma ideia, uma proposição, já existente na estrutura cognitiva, capaz de servir de “ancoradouro” a uma nova informação de modo que esta adquira, assim, significado para o sujeito (i.e., que ele tenha condições de atribuir significados a essa informação) (MOREIRA, 1999, p. 11).

De acordo com Bacich e Moran (2018) aprendemos ativamente desde que nascemos, a partir de situações concretas que aos poucos conseguimos ampliar e generalizar. A aprendizagem é ativa e significativa quando há avanço em espiral, de níveis mais simples para mais complexos de conhecimento.

A Matemática tem essa característica, de avançar os conteúdos de forma gradativa, utilizando conhecimentos adquiridos anteriormente e pode-se associar a isso, o contexto cultural e social do aluno, pois esse fator também contribui para a aprendizagem, como nos diz D’Ambrósio (2012),

Contextualizar é situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada, e que o cotidiano está impregnado de saberes e fazeres próprios da cultura (D’AMBRÓSIO, 2012, p. 84).

A vivência do aluno, sua cultura e contexto também influenciam na aprendizagem, como sugere Gadotti (2003b):

Todo ser vivo aprende na interação com o seu contexto: aprendizagem é relação com o contexto. Quem dá significado ao que aprendemos é o contexto. Por isso, para o educador ensinar com qualidade, ele precisa dominar, além do texto, o com-texto, além de um conteúdo, o significado do conteúdo que é dado pelo contexto social, político, econômico... enfim, histórico do que ensina (GADOTTI, 2003b, p. 48).

O Referencial Curricular do Rio Grande do Sul afirma que a aprendizagem em contexto é a abordagem por excelência para estabelecer a relação da teoria com a prática. Destaca ainda que,

Organizar situações de aprendizagem nas quais os conteúdos sejam tratados em contexto requer relacionar o conhecimento científico, por exemplo a questões reais da vida do aluno, ou a fatos que o cercam e lhe fazem sentido (SUL, 2009, p. 23).

Neste sentido, Gadotti (2003a) contribui com outra fala:

O que acontece conosco é que se o que aprendemos não tem sentido, não atender alguma necessidade, não “aprendemos”. O que aprendemos tem que “significar” para nós. Alguma coisa ou pessoa é significativa quando ela deixa de ser indiferente. Esquecemos o que aprendemos sem sentido, o que não pode ser usado. [...] É isso que dá sentido ao conhecimento (GADOTTI, 2003a, p. 47 – 48).

Para o estudo das razões trigonométricas, é necessário que os alunos tenham os conceitos de razão e proporção anteriormente trabalhados e já consolidados, para que esses novos conceitos sejam ancorados e a aprendizagem seja significativa, assim Kochhann e Moraes (2014) nos reforçam que:

Para que a aprendizagem ocorra de maneira significativa, é necessário que o professor elabore metodologia dinâmica, proporcionando assim, uma interação social entre todos os envolvidos no processo educacional daquele momento. Dessa forma haverá interligação entre a estrutura cognitiva do aluno para com o conteúdo a ser estudado, assim a aprendizagem terá sentido, visto que, o professor através de sua metodologia dinâmica de ensino, aguça a curiosidade epistemológica do aluno, permitindo-o a produzir conhecimento e aprender de maneira significativa. Esses são cuidados primordiais para o acontecimento da aprendizagem significativa (KOCHHANN; MORAES, 2014, p. 27).

Reforça-se assim, o papel do professor em promover uma metodologia que produza maior interação entre os estudantes, aguçando sua curiosidade e possibilitando formas de aprendizagem que se oponham ao modelo tradicional de ensino em que o professor fala e o aluno apenas escuta e anota.

2.3 Investigação Matemática

Segundo Skovsmose (2000), a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício, o qual se diferencia do que ele chama de cenário para investigação, no qual os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada. Diz ainda que, cenário para investigação “é um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação”. Segundo o autor, um cenário para investigação se constitui quando os alunos aceitam o convite feito pelo professor. Havendo a possibilidade de que este não seja aceito, cabe ao professor, contornar a situação provocando e fazendo um novo convite. Sendo assim, o que serve de cenário investigativo para um grupo de alunos, pode não servir para outro. O convite para participar de um cenário é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto...?” dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e buscando explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem, em que os alunos são responsáveis pelo processo.

Neste sentido Freire e Faundez (1985) dizem:

O que o professor deveria ensinar - porque ele próprio deveria sabê-lo seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntar é que se deve sair em busca de respostas e não o contrário: estabelecer as respostas, com o que todo o saber fica justamente nisso, já está dado, é um absoluto, não cede lugar à curiosidade nem a elementos pro descobrir. O saber já está feito, este é o ensino (FREIRE; FAUNDEZ, 1985, p. 46).

A indagação é parte do processo investigativo, uma vez que o diálogo, segundo (FREIRE, 1987), implica em um pensar crítico, sendo também capaz de gerá-la, possibilitando a comunicação, sem a qual não há verdadeira educação. De acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2003),

O conceito de investigação matemática em sala de aula, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma prazerosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização e provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Quando se propõe uma prática baseada em cenários para investigação, deseja-se que os alunos deem significado para o que estão aprendendo. Skovsmose (2000) considera três referências para que o aluno produza significado ao ensino: primeiro, questões e atividades matemáticas podem se referir à Matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semi-realidade; realidade construída, por exemplo, por um autor

de um livro didático e finalmente, alunos e professores podem trabalhar com referências a situações da vida real. Skovsmose (2000) combina a distinção entre os três tipos de referência e a distinção entre dois paradigmas de prática de sala de aula: exercícios e cenários para investigação, obtendo a matriz (representada na Tabela 1), com seis diferentes ambientes de aprendizagem.

Tabela 1 – Matriz contendo os seis diferentes ambientes de aprendizagem, segundo Skovsmose

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à Matemática Pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: (SKOVSMOSE, 2000)

Skovsmose (2000) explica que a Tabela 1 representa uma simplificação e que a educação matemática deve mover-se entre os diferentes ambientes apresentados na matriz.

“Mover-se da matemática pura a referência à vida real pode resultar em reflexões sobre a matemática e suas aplicações, e ainda, caminhar entre os diferentes ambientes de aprendizagem pode ser uma forma de engajar os alunos em ação e reflexão e, dessa forma, dar a educação matemática uma dimensão crítica” (SKOVSMOSE, 2000, p. 01).

Considera, ainda, a importância de alunos e professores, juntos, acharem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem. Nesse sentido, Bacich e Moran (2018) complementam essa ideia:

O que constatamos, cada vez mais, é que a aprendizagem por meio da transmissão é importante, mas a aprendizagem por questionamento e experimentação é mais relevante para uma compreensão mais ampla e profunda (BACICH; MORAN, 2018, p. 02).

Ponte, Brocado e Oliveira (2003) nos falam sobre o papel do professor nesse processo de investigação:

Existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 26).

A atividade do cálculo de alturas desconhecidas proposta na seção (4.2.3) incentiva o aluno a investigar e experimentar uma situação nova de aprendizagem, usando diferentes materiais, colocando-o como um sujeito ativo capaz de interagir com os colegas e

interpretar e analisar os dados e resultados e as diferentes possibilidades de soluções, bem como avaliar a plausibilidade desses resultados. A proposta apresentada neste trabalho é muito bem resumida nesta citação de Duck (2004):

A transformação da sala de aula em laboratório de ensino e aprendizagem irá gerar um novo ambiente escolar. A inserção do aluno como sujeito ativo no processo escolar possibilitará uma nova realidade na escola. Assim, é necessário desenvolver uma Metodologia para o Ensino de Matemática que agregue uma evolução tecnológica ao desenvolvimento motor, associando a investigação em sala de aula aos recursos eletrônicos e materiais didáticos artesanais construídos pelos alunos, no intuito de uma melhor compreensão dos conteúdos curriculares (DUCK, 2004, p. 37).

Destaca-se no capítulo seguinte a fundamentação matemática que servirá de suporte para a proposta apresentada.

3 Fundamentação Matemática

Este capítulo destaca a definição e importância da trigonometria ao longo da história, bem como define os conceitos matemáticos que servirão de embasamento para a proposta de atividade. Para as definições foram utilizados os seguintes autores: Neto (2013), Dante (2013), Paiva (2015), Bonjorno, Júnior e Souza (2020), Facchini (1997) e Smole e Diniz (2013).

3.1 A origem da trigonometria

De acordo com Facchini (1997), a trigonometria (palavra de origem grega formada por *tri* = três, *gonos* = ângulo e *metria* = medida) é uma das áreas mais importantes da Matemática. Ela é bastante antiga e, inicialmente, foi considerada uma extensão natural da Geometria, pois tinha como objetivo o cálculo dos elementos de um triângulo a partir de dados suficientes para tal. Como as outras partes da Matemática, ela não foi obra de uma só pessoa ou de uma só nação. Sabe-se que os antigos egípcios e babilônios tinham um conhecimento, ainda que rudimentar, sobre o assunto e o utilizavam para resolver problemas variados, relacionados com agrimensura, navegação e astronomia.

Muitos historiadores presumem que o astrônomo grego Hiparco (cerca de 190 a 125 a.C.) tenha sido o iniciador da trigonometria, pois foi ele quem empregou, pela primeira vez, relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo e construiu, presume-se, a primeira tabela trigonométrica. Por isso ele é considerado o “pai da trigonometria”.

Mais tarde os hindus e árabes trouxeram contribuições muito importantes para a área. No século XV, época do renascimento, o matemático alemão Johann Muller de Königsberg (1436-1476), também conhecido como Regiomontanus, fez a primeira sistematização da trigonometria, no chamado **Tratado dos Triângulos**, em que expõe métodos para resolver triângulos, que segundo Lima et al. (2006) consiste em determinar os seis elementos da figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado.

Entretanto, esse objetivo geral inicial foi bastante modificado com o passar do tempo. Atualmente, a trigonometria é utilizada de modo muito mais amplo e constitui importante ferramenta de cálculo na Matemática em geral e em áreas como Física, Engenharia, navegação marítima e aérea, Astronomia, Topografia, Cartografia, Agrimensura e outras.

Muitos problemas da antiguidade surgiram a partir de curiosidades, como por exemplo, calcular a circunferência da terra ou a distância da terra até a lua. Nesse

sentido, a autora, despertada pela curiosidade em saber a altura de um prédio ao qual avistava da janela da escola de onde trabalhava, precisava encontrar um instrumento que possibilitasse obter o ângulo sob o qual pudesse avistar o topo do prédio. Ao folhar um livro didático, encontrou uma sugestão de montagem de um teodolito caseiro e, assim, com essa ferramenta foi possível descobrir a altura do prédio em questão. Então, juntando a ideia do livro a sua curiosidade, este foi o estímulo necessário para colocar em prática com seus alunos a tarefa de medir alturas inacessíveis.

Seguem a seguir, as principais definições utilizadas para a aplicação da prática apresentada nesta dissertação.

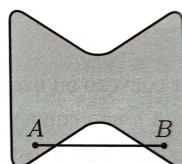
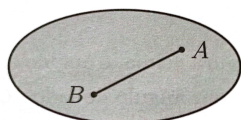
3.2 Ângulos

Uma das situações sugerida e descrita ao longo do trabalho é a de um observador posicionado a uma certa distância de um prédio, em que avista o topo deste, sob um ângulo de α graus em relação à horizontal. A seguir as definições de região convexa e de semiplanos necessárias para a definição de ângulo.

3.2.1 Região convexa

Definição 3.2.1 (Região convexa). Uma região R do plano é **convexa** quando, para todos os pontos $A, B \in R$, tivermos $AB \subset R$. caso contrário, diremos que R é uma região **não convexa**, conforme Figura 2.

Figura 2 – Regiões convexa (esq.) e não convexa (dir.)

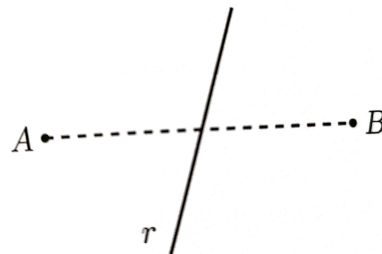


De acordo com a definição (3.2.1), para uma região R ser não convexa basta que existam pontos $A, B \in R$ tais que pelo menos um ponto do segmento AB não pertença a R .

3.2.2 Semiplanos

Uma reta de um plano o divide em duas regiões convexas, os **semiplanos** delimitados por r . Dados pontos A e B , em cada um dos semiplanos em que r divide o plano, tem-se sempre $AB \cap r \neq \emptyset$, conforme Figura 3.

Figura 3 – Semiplanos determinados por uma reta

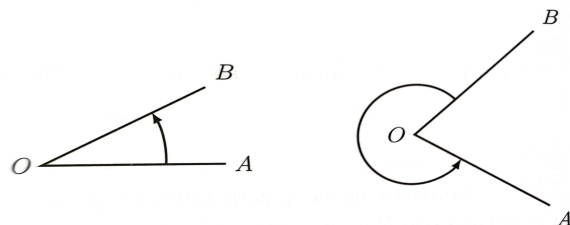


Fonte: (NETO, 2013, p. 09)

3.2.3 Ângulo

Definição 3.2.2 (Ângulo). Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um **ângulo** (ou **região angular**) de **vértice** O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} (NETO, 2013).

Figura 4 – Regiões angulares no plano



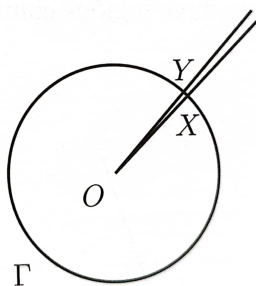
Fonte: (NETO, 2013, p. 10)

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo; na Figura 4, o ângulo da esquerda é convexo, ao passo que o da direita é não convexo. Denota-se um ângulo de lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} escrevendo-se $\angle AOB$; o contexto deixará claro se a referência é ao ângulo convexo ou ao não convexo.

A todo ângulo pode ser associada uma medida da região do plano que ele ocupa. Para tanto, divide-se um círculo Γ de centro O em 360 arcos iguais e tomam-se pontos X e Y , extremos de um desses 360 arcos iguais (Figura 5). A medida do ângulo $\angle XOY$ é de 1 **grau**, denotado 1° , e escreve-se

$$X\hat{O}Y = 1^\circ.$$

Figura 5 – Grau como unidade de medida de ângulos

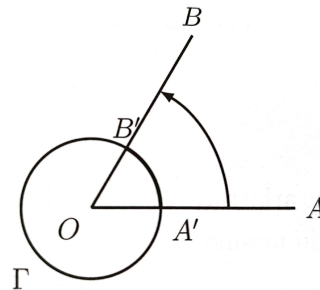


Fonte: (NETO, 2013, p. 10)

A partir da definição de grau, é imediato que um círculo completo corresponde a

360° . Por outro lado, dado um ângulo $\angle AOB$, a sua medida será uma fração de 360° (Figura 6).

Figura 6 – Medindo o ângulo $\angle AOB$



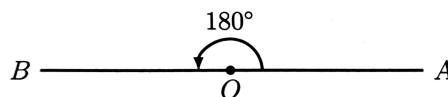
Fonte: (NETO, 2013, p. 11)

Por exemplo, se o comprimento do arco $A'B'$ for $\frac{1}{6}$ do comprimento total de Γ , então a medida de $\angle AOB$ será

$$A\hat{O}B = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ.$$

Todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais. Assim, dado um ângulo $\angle AOB$ tal que \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} sejam semirretas opostas (isto é, A , O e B estejam sobre uma mesma reta, com $O \in AB$), então $A\hat{O}B = 180^\circ$ (Figura 7).

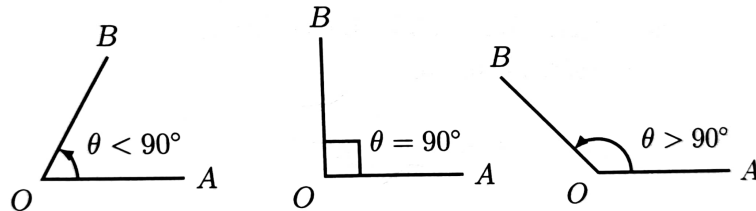
Figura 7 – Ângulo de 180°



Fonte: (NETO, 2013, p. 13)

Diz-se que um ângulo $\angle AOB$ é **agudo** quando $0 < A\hat{O}B < 90^\circ$, **reto** quando $A\hat{O}B = 90^\circ$ e **obtusos** quando $90^\circ < A\hat{O}B < 180^\circ$. Observa-se na Figura 8, a notação especial utilizada para ângulos retos.

Figura 8 – Ângulo agudo (esq.), reto (centro) e obtuso (dir.)



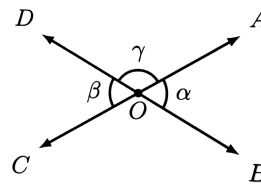
Fonte: (NETO, 2013, p. 13)

Por vezes, é útil ter um nome especial associado a dois ângulos cuja soma das medidas seja igual a 90° ; assim, dois ângulos com tal propriedade são chamados de **complementares**. Portanto, se α e β são as medidas de dois ângulos complementares, então $\alpha + \beta = 90^\circ$. Ainda nesse caso, α é o **complemento** de β e vice-versa. Por exemplo, dois ângulos medindo 25° e 65° são complementares, uma vez que $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$; da mesma forma, o complemento de um ângulo de 30° é um ângulo de medida igual a $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

A primeira proposição de Geometria Euclidiana plana que será provada fornece uma condição suficiente para a igualdade de dois ângulos. Contudo, antes de enunciá-la precisar-se-á da seguinte definição:

Definição 3.2.3 (Ângulos opostos pelo vértice). Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ (de mesmo vértice O) são **opostos pelo vértice** (abreviamos **OPV**) se seus lados forem semirretas opostas.

Figura 9 – Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: (NETO, 2013, p. 14)

Os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ da Figura 9 são OPV, uma vez que as semirretas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OD} , são respectivamente opostas. Analogamente, \overrightarrow{OA} é oposta a \overrightarrow{OC} .

Proposição 3.2.1. Dois ângulos OPV são iguais.

Demonstração. Pela Figura 9, como \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OD} são semirretas opostas, segue que $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Analogamente, $\beta + \gamma = 180^\circ$. Portanto,

$$\alpha = 180^\circ - \gamma = \beta.$$

□

3.3 Proporcionalidade e semelhança

As definições a seguir são baseadas em Bonjorno (2020).

3.3.1 Segmentos de reta proporcionais

Pode-se comparar as medidas de dois segmentos de reta por meio de uma razão.

Definição 3.3.1. A razão entre dois segmentos de reta é o quociente entre as respectivas medidas desses segmentos, tomadas na mesma unidade. Por exemplo, a razão entre as medidas de dois segmentos de reta, AB e CD , de medidas respectivamente iguais a 16 cm e 80 cm, é dada por:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} \text{ ou } 0,2.$$

Neste caso, diz-se que a razão entre AB e CD é $\frac{1}{5}$ ou 0,2. A ordem de leitura e escrita de uma razão é importante. Assim, a razão entre CD e AB é $\frac{80}{16} = 5$, ou seja, se

$$\overline{AB} \neq \overline{CD}, \text{ tem-se que } \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \neq \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

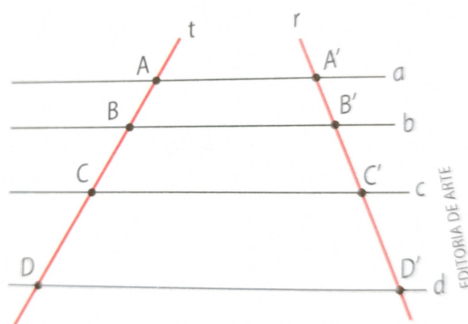
Agora, considerando os segmentos de reta AB , CD , EF e GH . Diz-se que, nesta ordem, AB , CD , EF e GH são **proporcionais** se, e somente se, a razão entre as medidas dos dois primeiros segmentos de reta for igual a razão entre as medidas dos dois últimos, ou seja: $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$.

Definição 3.3.2 (Feixe de retas paralelas). Duas ou mais retas paralelas entre si, pertencentes a um mesmo plano, formam um **feixe de retas paralelas**.

Definição 3.3.3 (Reta transversal). Uma reta que cruza esse feixe de paralelas é chamada de **reta transversal**.

Na Figura 10, as retas a , b , c e d formam um feixe de retas paralelas, e as retas r e t são transversais.

Figura 10 – Feixe de retas paralelas e suas transversais



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 13)

Além disso, definem-se:

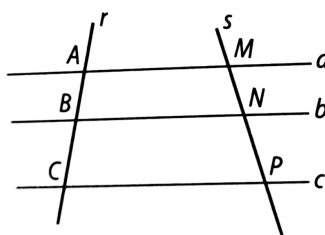
- A e A' são **pontos correspondentes**, assim como B e B' , C e C' , D e D' .
- AB e $A'B'$ são **segmentos correspondentes**, assim como BC e $B'C'$, AC e $A'C'$, BD e $B'D'$.

3.3.2 Teorema de Tales

A proporcionalidade pode ser utilizada em diversos casos do nosso cotidiano. O **Teorema de Tales**, trata da relação entre segmentos de reta determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais. É por meio dele que consegue-se realizar alguns cálculos, como aqueles para determinar distâncias inacessíveis. A seguir o enunciado do Teorema e sua demonstração.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Tales). Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então dois segmentos quaisquer de uma das retas transversais são proporcionais aos segmentos correspondentes da outra.

Figura 11 – Segmentos proporcionais



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 14)

Com base na Figura 11, temos $a \parallel b \parallel c \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}}$.

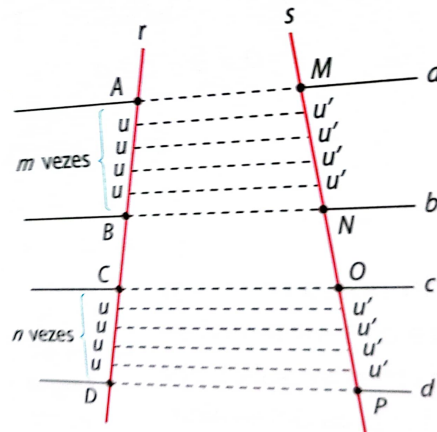
Pode-se considerar outras proposições, como: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MP}}$ ou $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$.

Demonstração. Usando a Figura 12, demonstrar-se-á esse teorema para o caso em que os segmentos AB e CD são comensuráveis, ou seja, existe um segmento u que é submúltiplo comum desses segmentos, e no caso em que os segmentos MN e OP também são comensuráveis, ou seja, existe um segmento u' que é submúltiplo comum desses segmentos. No entanto, o teorema de Tales também é válido no caso em que os pares de segmentos são incomensuráveis, isto é, para os segmentos que não têm esse submúltiplo comum.

Para fazer essa demonstração será utilizado o resultado da seguinte propriedade, que também pode ser demonstrada: “Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas e um segmento de uma delas é dividido pelo feixe em p partes congruentes entre si, então o segmento correspondente da outra transversal também é dividido em p partes congruentes entre si”.

Considere as duas retas r e s , transversais a um feixe de retas paralelas, como mostra a Figura 12.

Figura 12 – Duas retas transversais e um feixe de paralelas



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 14)

Suponha-se que exista um segmento de medida u e dois números inteiros m e n tais que: $\overline{AB} = m \cdot u$ e $\overline{CD} = n \cdot u$.

Estabelecendo a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}. \quad (3.1)$$

Traçando retas paralelas ao feixe, pelos pontos que dividem AB e CD , pela propriedade enunciada anteriormente, MN e OP ficam divididos, respectivamente, em m e n partes iguais a u' .

Assim, tem-se:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{OP}} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} = \frac{m}{n}. \quad (3.2)$$

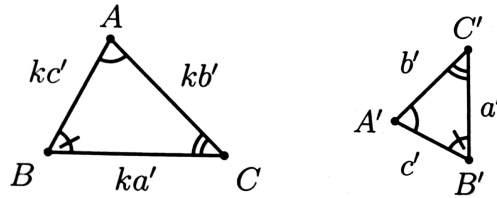
Comparando (3.1) e (3.2), obtém-se: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OP}}$.

□

3.3.3 Semelhança de triângulos

Definição 3.3.4. Dois triângulos são **semelhantes** quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértice correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma, conforme Figura 13 (NETO, 2013).

Figura 13 – Dois triângulos semelhantes



Fonte: (NETO, 2013, p. 129)

Fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pode-se dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações.

Na Figura 13, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Assim, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e existe $k > 0$, tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

Tal real positivo k é denominado **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nessa ordem (pode-se observar que a razão de semelhança entre os triângulos $A'B'C'$ e ABC , nessa ordem, é $\frac{1}{k}$).

Escreve-se $ABC \sim A'B'C'$ para denotar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Se $ABC \sim A'B'C'$ na razão (de semelhança) k , é possível provar que k é também a razão entre os comprimentos de dois segmentos correspondentes quaisquer dos triângulos, ABC e $A'B'C'$ (nessa ordem); por exemplo, nas notações da Figura 13, sendo M o ponto médio de BC e M' o ponto médio de $B'C'$, tem-se

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{M'A'}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a'}{2}} = \frac{a}{a'} = k.$$

As três proposições a seguir estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Por tal razão são conhecidos como os **casos de semelhança de triângulos**.

3.3.3.1 Casos de semelhança

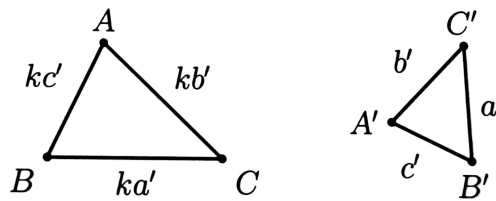
1. Caso LLL de semelhança

Proposição 3.3.1. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, conclui-se que, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, conforme Figura 14.

Figura 14 – O caso de semelhança LLL



Fonte: (NETO, 2013, p. 130)

Demonstração. Sendo k o valor comum das razões do enunciado, tem-se:

$$\overline{AB} = k \cdot \overline{A'B'},$$

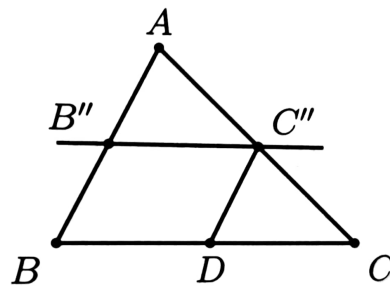
$$\overline{BC} = k \cdot \overline{B'C'}$$

e

$$\overline{AC} = k \cdot \overline{A'C'}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, $k > 1$ e marque o ponto $B'' \in AB$, tal que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, conforme Figura 15.

Figura 15 – Prova do caso de semelhança LLL



Fonte: (NETO, 2013, p. 130)

Sendo C'' a interseção com o lado AC , da reta que passa por B'' e é paralela ao lado BC , segue do Teorema de Tales que

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k},$$

de maneira que $\overline{AC''} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$.

Logo, tem-se que que

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'},$$

$$\overline{AC''} = \overline{A'C'}$$

e

$$\overline{B''C''} = \overline{B'C'},$$

isto é, os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, pelo caso LLL de congruência. Portanto, tem-se

$$\hat{B} = \hat{ABC} = \hat{AB''C''} = \hat{A'B'C'} = \hat{B'},$$

Analogamente, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. □

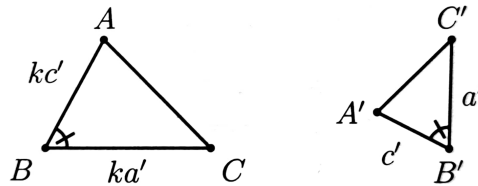
2. Caso LAL de semelhança

Proposição 3.3.2. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, conforme Figura 16, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \text{ e } \hat{B} = \hat{B'}.$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$. Logo, pode-se concluir que $\hat{A} = \hat{A}', \hat{C} = \hat{C}'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$.

Figura 16 – O caso de semelhança LAL



Fonte: (NETO, 2013, p. 132)

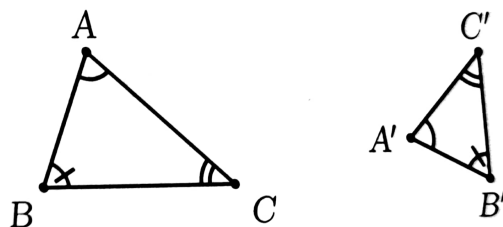
3. Caso AA de semelhança

Proposição 3.3.3. Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, conforme Figura 17, tais que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$.

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$. Tem-se,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Figura 17 – O caso de semelhança AA



Fonte: (NETO, 2013, p. 132)

Teorema 3.3.2 (Teorema fundamental da semelhança). Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos, determina outro triângulo semelhante ao primeiro (DANTE, 2013).

Demonstração. Considere a Figura 18. Note que,

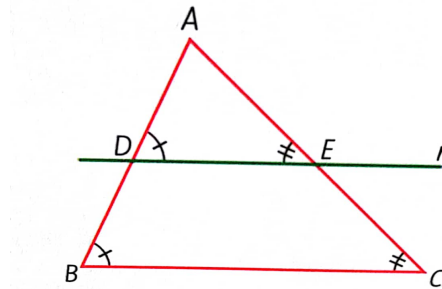
$$r \parallel BC,$$

$$r \cap AB = \{D\},$$

$$r \cap AC = \{E\}.$$

Assim, $\hat{B} \cong \hat{D}$ e $\hat{C} \cong \hat{E}$. Logo, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Figura 18 – Triângulo com uma reta paralela a um lado



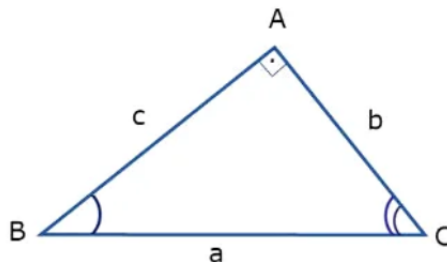
Fonte: (DANTE, 2013, p. 240)

□

3.4 Trigonometria no triângulo retângulo

Definição 3.4.1 (Triângulo retângulo). É todo triângulo que tem um ângulo reto.

Na Figura 19, \hat{BAC} é reto. Costuma-se dizer, neste caso, que o triângulo ABC é retângulo em A .

Figura 19 – Triângulo retângulo ABC 

Fonte: <https://www.todamateria.com.br/triangulo-retangulo/>

Em todo triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Além do ângulo reto, os outros dois ângulos de qualquer triângulo retângulo são **agudos** e **complementares**, porque, se a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é 180° , e há um ângulo reto, a soma das medidas dos outros dois ângulos do triângulo retângulo é 90° .

Na Figura 19, AB e AC são catetos, BC é a hipotenusa e

$$\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ,$$

3.4.1 Teorema de Pitágoras

Um dos teoremas mais conhecidos da Matemática foi demonstrado pela escola pitagórica, criada pelo matemático grego Pitágoras de Samos (século VI a.c.). Esse teorema estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Pitágoras). Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Esse resultado pode ser resumido, usando-se a seguinte equação:

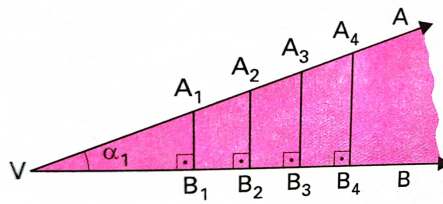
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

em que a representa a medida da hipotenusa, b e c representam as medidas dos catetos, conforme Figura 19.

3.4.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Considera-se, inicialmente, o ângulo de medida α_1 , conforme Figura 20, de vértice V e lados as semirretas \overrightarrow{VA} e \overrightarrow{VB} .

Figura 20 – Ângulo de medida α_1 e vértice V



Fonte: (FACCHINI, 1997, p. 283)

Na semirreta \overrightarrow{VB} considere pontos quaisquer $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ e os segmentos $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \dots$ perpendiculares a \overrightarrow{VB} .

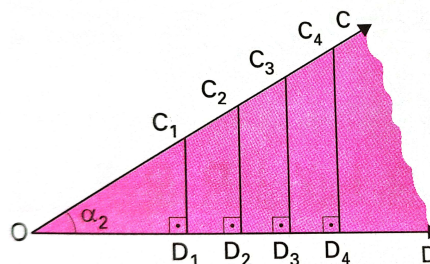
Os triângulos $VA_1B_1, VA_2B_2, VA_3B_3, VA_4B_4, \dots$ são todos semelhantes. Logo:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{VA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{VA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{VA_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{VA_4}} = \dots = k_1. \quad (3.3)$$

Das igualdades em (3.3) pode-se deduzir que o valor de k_1 não depende do triângulo retângulo escolhido. Ele é o mesmo para qualquer triângulo.

Considere, agora, o ângulo de medida α_2 ($\alpha_2 \neq \alpha_1$), conforme Figura 21, de vértice O e lados as semirretas \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} , e os triângulos $OC_1D_1, OC_2D_2, OC_3D_3, OC_4D_4, \dots$, retângulos em $D_1, D_2, D_3, D_4, \dots$, todos semelhantes.

Figura 21 – Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: (FACCHINI, 1997, p. 284)

Novamente, pode-se escrever:

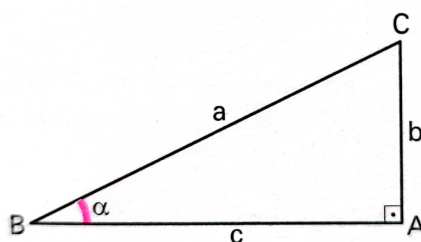
$$\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{OC_1}} = \frac{\overline{C_2D_2}}{\overline{OC_2}} = \frac{\overline{C_3D_3}}{\overline{OC_3}} = \frac{\overline{C_4D_4}}{\overline{OC_4}} = \dots = k_2. \quad (3.4)$$

Embora, tenha-se usado o mesmo processo para calcular os valores de k_1 e k_2 , encontra-se $k_1 \neq k_2$.

A diferença entre as Figuras 20 e 21 está em que $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Pode-se concluir que o valor da constante k - razão entre a medida do cateto oposto e a medida da hipotenusa de cada triângulo retângulo - depende somente da medida do ângulo considerado.

Assim, pode-se definir seno, cosseno e tangente do ângulo agudo α , a partir da Figura 22.

Figura 22 – Triângulo retângulo com um ângulo agudo α



Fonte: (FACCHINI, 1997, p. 283)

Definição 3.4.2. Seno do ângulo (α): é a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida da hipotenusa.

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a},$$

ou

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

Definição 3.4.3. Cosseno do ângulo (α): é a razão entre a medida do cateto adjacente a α e medida da hipotenusa.

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a},$$

ou

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

Definição 3.4.4. Tangente do ângulo (α): é a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida do cateto adjacente a α .

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c},$$

ou

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}.$$

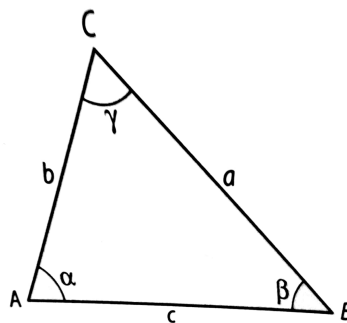
Observação: É muito comum usarmos o nome de um ângulo no lugar de sua medida. Quando estamos falando num ângulo α , estamos nos referindo ao próprio ângulo e, no entanto, usando sua medida em lugar de seu nome. É um “abuso” frequente e aceitável, que visa simplificar a linguagem.

3.5 Lei dos cossenos

Em algumas situações pode-se modelar um problema por meio de um triângulo qualquer em que é necessário calcular uma ou mais medidas dos lados ou dos ângulos. Para realizar esses cálculos, utiliza-se a **lei dos cossenos**, enunciada a seguir.

Definição 3.5.1 (Lei dos cossenos). Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Figura 23 – Triângulo ABC qualquer



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 73)

Assim, dado um triângulo ABC qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos, como indicado na Figura 23, pode-se escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

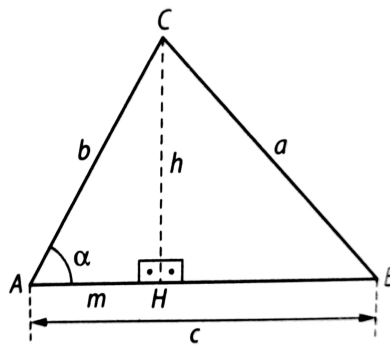
Demonstrar-se-á apenas a primeira sentença, para o ângulo α , as demais, são análogas.

Demonstração. Primeiro, verificar-se-á a validade da sentença para os casos em que α é um ângulo agudo ou obtuso e, em seguida, para o caso em que α é um ângulo reto, como consequência do Teorema de Pitágoras.

• **1º caso: α é um ângulo agudo**

Considere o triângulo acutângulo ABC , no qual $\overline{CH} = h$ é a medida da altura relativa ao lado AB , conforme Figura 24.

Figura 24 – Triângulo ABC qualquer com um ângulo agudo α



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 73)

No triângulo retângulo BHC , tem-se:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2. \quad (3.5)$$

Para o triângulo AHC , escreve-se a relação:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5), obtém-se:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m. \quad (3.7)$$

Ainda no triângulo retângulo AHC , tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \alpha. \quad (3.8)$$

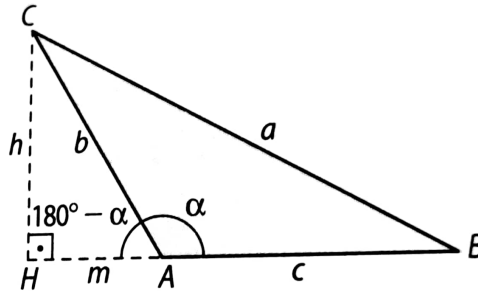
Substituindo (3.8) em (3.7) chega-se a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot (b \cdot \cos \alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha. \quad (3.9)$$

- **2º caso: α é um ângulo obtuso**

Considere o triângulo obtusângulo ABC , da Figura 25, no qual $\overline{CH} = h$ é a medida da altura relativa ao lado AB e $\angle CAB$ é o ângulo interno obtuso.

Figura 25 – Triângulo ABC qualquer com um ângulo obtuso α



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 73)

Para o triângulo retângulo BHC , escreve-se:

$$a^2 = h^2 + (c + m)^2. \quad (3.10)$$

No triângulo retângulo AHC , tem-se:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.10), obtém-se:

$$a^2 = b^2 - m^2 + (c + m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m. \quad (3.12)$$

Ainda no triângulo retângulo AHC , tem-se: $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{m}{b}$.

Como $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, ou seja, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, vem:

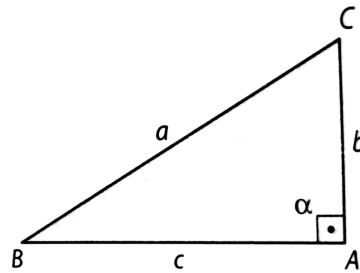
$$-\cos \alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos \alpha. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.12), chega-se a:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (-b \cdot \cos \alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha.$$

- **3º caso: α é um ângulo reto**

Considere um triângulo ABC retângulo em A , conforme a Figura 26.

Figura 26 – Triângulo ABC com um ângulo reto α 

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 74)

Como α é o ângulo reto e $\cos 90^\circ = 0$, tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Observa-se que, em relação ao ângulo reto, a lei dos cossenos fica reduzida ao Teorema de Pitágoras.

□

3.6 Lei dos senos

Outra maneira de calcular as medidas de lados e ângulos de um triângulo qualquer é por meio da **lei dos senos**, apresentada a seguir.

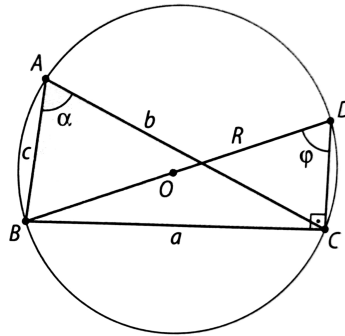
Definição 3.6.1 (Lei dos senos). Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é igual a medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Assim, dado um triângulo ABC qualquer com as medidas dos lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e dos ângulos α , β e γ , ângulos correspondentes aos vértices A , B e C , respectivamente, como indicado na Figura 23, valem as relações:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R,$$

em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Demonstrar-se-á para o ângulo agudo α .

Demonstração. O triângulo ABC , representado na Figura 27, está inscrito em uma circunferência de centro O e raio R . Traça-se o diâmetro BD .

Figura 27 – Triângulo ABC inscrito numa circunferência

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUZA, 2020, p. 76)

Como \hat{A} e \hat{D} são ângulos inscritos sob a corda BC , e \hat{BC} é o arco sobre a corda BC tem-se:

$$\alpha = \frac{\hat{BC}}{2},$$

e

$$\varphi = \frac{\hat{BC}}{2}.$$

De onde conclui-se que $\alpha = \varphi$.

Observe que o triângulo BCD é retângulo em C , pois está inscrito em uma semicircunferência. Assim, tem-se:

$$\text{sen}\varphi = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen}\alpha}.$$

Analogamente, prova-se que:

$$2R = \frac{b}{\text{sen}\beta} \text{ e } 2R = \frac{c}{\text{sen}\gamma}.$$

□

4 Atividades Propostas

Neste trabalho propõe-se uma atividade prática de construção e uso de dois teodolitos, um caseiro, construído a partir de materiais recicláveis e outro virtual, na forma de um aplicativo de celular, cujo objetivo é utilizá-los como ferramentas de medição de ângulos e aplicar os conceitos acerca das razões trigonométricas no triângulo retângulo, especialmente a tangente, para calcular a altura do prédio da escola (Atividade 1), a altura da torre de uma igreja (Atividade 2) e a altura de uma árvore (Atividade 3). Sugere-se a organização da turma, em que a tarefa será aplicada, em grupos de 4 a 5 integrantes para a realização do roteiro das atividades.

A atividade pode ser dividida em duas etapas: a primeira, a construção do teodolito caseiro, a partir de materiais recicláveis e a apresentação do aplicativo, sendo tarefa de cada grupo baixá-lo no celular e investigar sua funcionalidade. A segunda etapa, a aplicação em “campo”, para extração das medidas do ângulo, o cálculo da altura, a comparação dos resultados obtidos pelos grupos e a discussão dos dados. Para cada uma das etapas considera-se um período de aula de 50 minutos. A metodologia descrita na seção 4.1 será utilizada nas Atividades 1, 2 e 3.

4.1 Metodologia

4.1.1 Unidade temática

Geometria/Grandezas e medidas.

4.1.2 Público alvo

Alunos do segundo ano do ensino médio regular de duas escolas estaduais do RS.

4.1.3 Pré-requisitos

Razões trigonométricas.

4.1.4 Duração

Duas horas aula de 50 min para cada atividade.

4.1.5 Competência geral da BNCC

Competência geral 2: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Competência geral 5: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

4.1.6 Competência e habilidade específica da BNCC

Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

4.1.7 Objetivos

4.1.7.1 Geral

Aplicar as razões trigonométricas para o cálculo de alturas inacessíveis usando um teodolito caseiro confeccionado com materiais recicláveis e um teodolito virtual usando um aplicativo de celular.

4.1.7.2 Específicos

- Construir corretamente o teodolito caseiro;
- Acessar o aplicativo de celular para uso do teodolito virtual;
- Identificar as medidas dos ângulos através do teodolito caseiro e virtual;
- Montar o esquema da situação, anotando as medidas necessárias para o cálculo;
- Calcular a altura do prédio da escola, da torre da igreja e da árvore usando os valores da tangente.

4.2 Roteiro Geral de sugestões de atividades

Inicialmente sugere-se trabalhar com os conteúdos de semelhança de triângulos e as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Em seguida, apresentar o teodolito, por meio de imagens (conforme Anexos B, C e D), explicar suas funcionalidades e aplicações, e uma situação, que simula o seu uso (Anexo E), semelhante à proposta da Atividade 1. Na sequência, faz-se a divisão da turma em grupos, sendo entregue a cada um uma ficha com as orientações (Apêndice A) e realiza-se a construção do teodolito caseiro. Uma vez construído, apresenta-se o aplicativo *angle meter*. Propõe-se fazer o *download* e verificar seu funcionamento, obtendo-se assim dois aparelhos de medição, um rudimentar e outro virtual (tecnológico). Prossegue-se com as aplicações dos instrumentos de medição nas atividades que abordam os conceitos relacionados a razões trigonométricas: cálculo das alturas do prédio da escola (Atividade 1), da torre de uma igreja (Atividade 2) e de uma árvore (Atividade 3).

Por demasiadas vezes, o professor não dispõe de aulas suficientes para atender a demanda do currículo, por isso, o uso do teodolito caseiro (ou rudimentar) justifica-se pela fácil aquisição dos materiais e sua simples e rápida montagem, bem como o virtual, pois se trata de um aplicativo acessível com funcionalidades bem intuitivas.

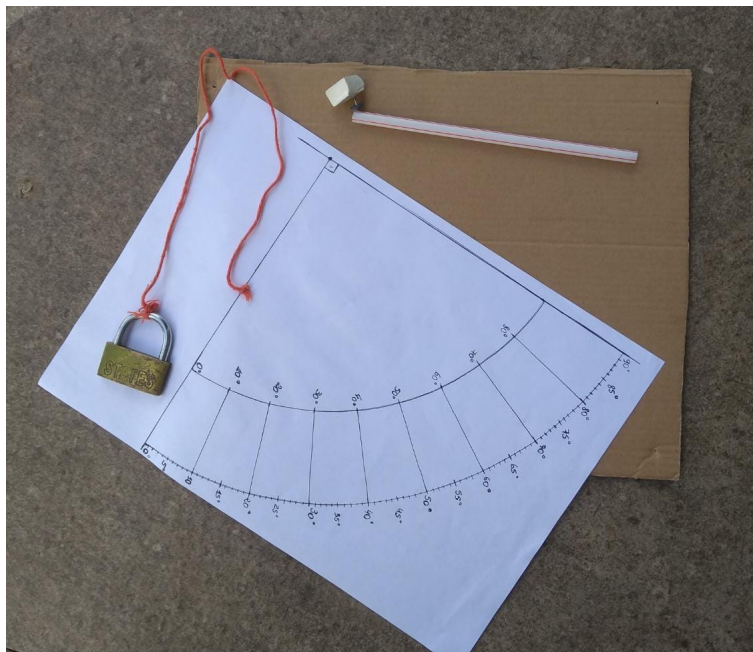
4.2.1 Descrição da construção do teodolito caseiro/rudimentar

Os materiais necessários (Figura 28) para confecção são:

- Xerox de $\frac{1}{4}$ de um transferidor* (Apêndice B);
- Um canudo ou caneta esferográfica sem a carga;
- Uma tachinha;
- Um pedaço de barbante*;
- Um peso (cadeado ou chumbada de pesca);
- Um pedaço de papelão (25 cm x 25 cm aproximadamente);
- Cola e fita adesiva.

*Materiais fornecidos pela professora.

Figura 28 – Materiais para a construção do teodolito caseiro

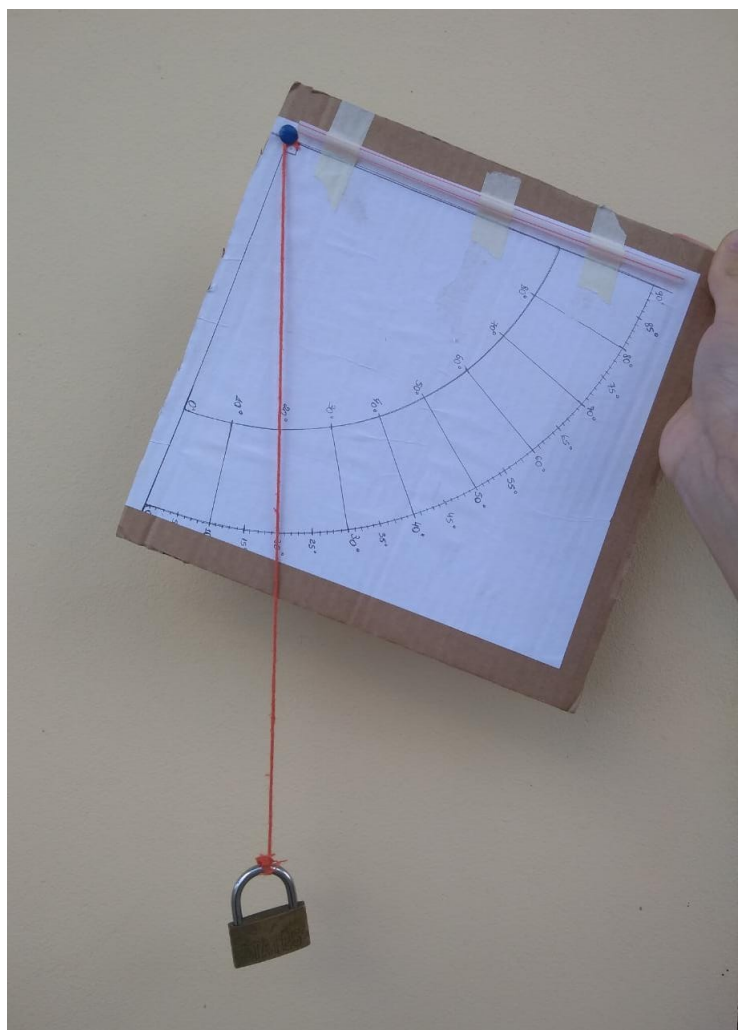


Fonte: Acervo da autora

Para a montagem do teodolito (Figura 29) deve-se:

- Recortar o xerox do transferidor (Apêndice B) e colar no papelão.
- Com a fita adesiva fixar o canudo em uma das extremidades do transferidor (sobre a linha do 90°).
- Com a tachinha, no vértice do ângulo reto, fixar o cordão com o peso amarrado em uma de suas pontas.

Figura 29 – Teodolito caseiro pronto



Fonte: Acervo da autora

Materiais de medição necessários para a prática:

- Trena* para ser usada na medição da altura dos alunos.
- Trena longa de 50 metros* para ser usada na medição de distâncias no chão.

*Materiais fornecidos pela professora, conforme Figura 30.

Os alunos recebem a folha com as instruções e o desenho (conforme Apêndice A). Após a montagem, devem medir, com a trena, a altura de um colega do grupo, que irá usar o teodolito para coletar a medida do ângulo.

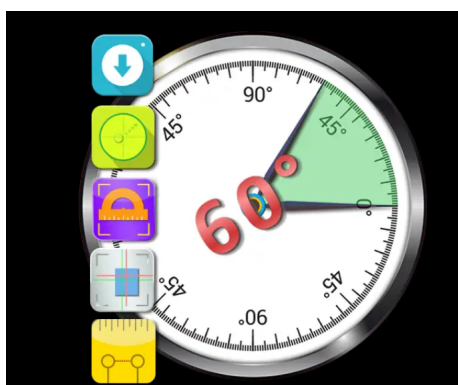
Figura 30 – Trensas usadas para medir alturas e distâncias



Fonte: Acervo da autora

4.2.2 Descrição da montagem do teodolito virtual

Nesta etapa, os alunos baixam o aplicativo *angle meter* em seus celulares (*smartphones*) com plataforma Android. O *angle meter* é um aplicativo gratuito, disponível na loja de aplicativos *Play Store* e funciona como um medidor de ângulos. A Figura 31 mostra o ícone relativo a este aplicativo.

Figura 31 – Ícone do aplicativo *angle meter*

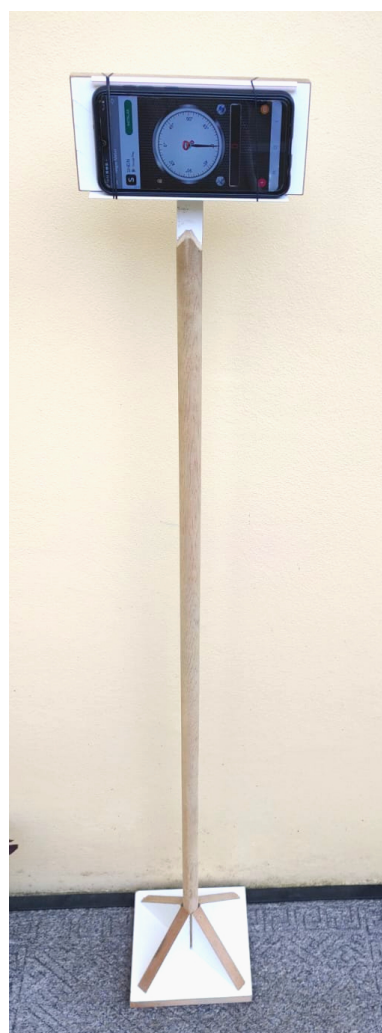
Fonte: <https://play.google.com/>

Dentro do aplicativo existem algumas funcionalidades, como régua, transferidor, nível de laser e bússola. Nas configurações, é possível selecionar a medida do ângulo com até duas casas decimais. Nesse trabalho optou-se por utilizar a medida do ângulo sem

casas decimais, inclusive por conta dos valores da tabela trigonométrica (Anexo A) que é utilizada.

Para facilitar a medição do ângulo, ao segurar o celular, optou-se por utilizar um suporte. Esse foi construído com o auxílio de um profissional, que usou um cabo de vassoura preso verticalmente a uma base de madeira e outro pedaço de madeira de 8 cm por 17 cm (aproximadamente) contendo uma base para apoiar o celular, sendo fixado na parte superior do cabo usando um parafuso para dar mobilidade ao movimento de inclinação. Fixando um canudo sobre o celular e posicionando-o na horizontal, sobre o suporte, com o auxílio de borrachas de dinheiro ou de cabelo, o equipamento estará pronto para o uso, conforme a Figura 32.

Figura 32 – Teodolito virtual sobre o suporte de madeira



Fonte: Acervo da autora

Com esse aparelho medem-se os ângulos para o cálculo das alturas do prédio, da torre e da árvore. Como o aparelho celular ficará sobre o suporte, deve ser medida a

altura entre o chão e o celular, posicionado sobre este, de onde o aluno avista o ângulo (conforme Figura 32).

Na Figura 33 pode-se observar com mais detalhes a medição do ângulo.

Figura 33 – Detalhe do medidor de ângulo do aplicativo



Fonte: Acervo da autora

Após a construção do teodolito caseiro e o *download* do aplicativo, para cada uma das atividades propostas é solicitado:

- Anotações das medidas de campo;
- Cálculo das medidas das alturas de cada atividade com o auxílio de uma tabela trigonométrica (Anexo A);
- Relatório com os resultados obtidos;
- Comparação das alturas determinadas pelos demais grupos e discussão dos resultados.

4.2.3 Atividade 1 - Cálculo da altura do prédio da escola

Para essa segunda etapa, é necessário um período de aula de 50 minutos. Munidos com uma trena de 50 metros (que será esticada a partir da base do prédio), seus teodolitos e caderno para as anotações, deslocam-se até o pátio da escola, e posicionam-se em uma certa distância para dali usarem os teodolitos e marcarem o ângulo com que avistam o topo do prédio, conforme Figura 34. Solicita-se que façam as anotações das medidas necessárias para efetuar os cálculos:

- Distância da base do prédio até o teodolito;
- Altura do chão até a linha dos olhos do aluno que está medindo o ângulo através do teodolito caseiro;
- Altura do chão até o suporte do celular no teodolito virtual;
- Ângulo com que avista o topo do prédio através dos teodolitos.

Cada grupo recebe uma tabela trigonométrica com os valores do seno, cosseno e tangente (conforme Anexo A).

Figura 34 – Situação para uso dos teodolitos para medir a altura do prédio da escola

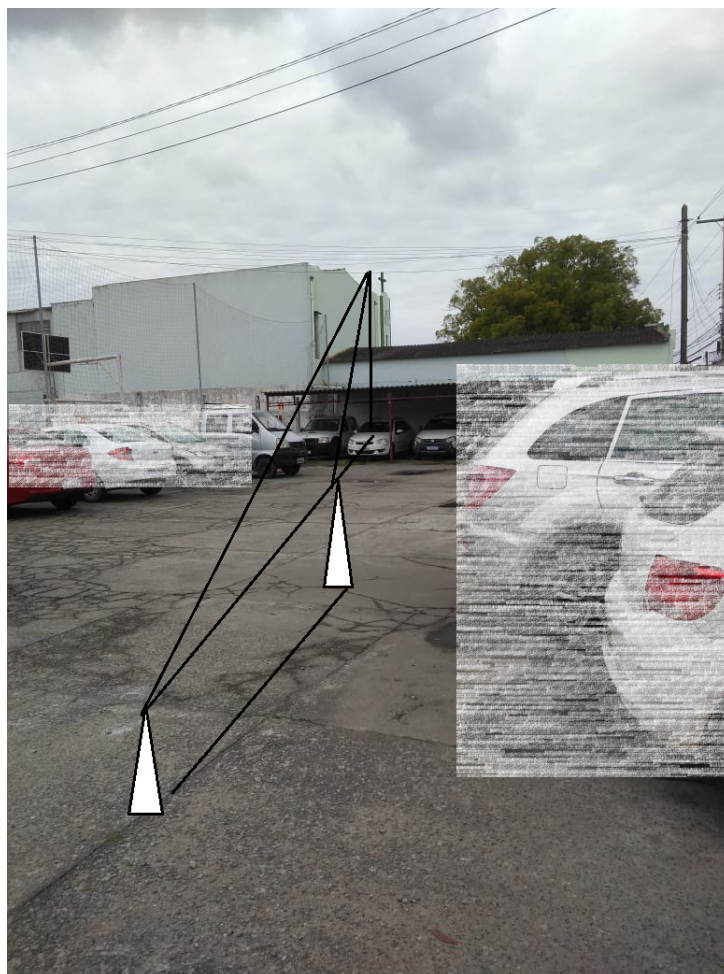


Fonte: Acervo da autora

4.2.4 Atividade 2 - Cálculo da altura da torre de uma igreja

Considerando os teodolitos prontos, é necessário um período de aula de 50 minutos. Para esta situação, os estudantes não têm acesso à base do objeto do qual precisam calcular a altura. Deverão fazer, então, a medição do ângulo com os teodolitos em um ponto de visão mais distante da torre, depois, medem com a trena a distância até outro ponto (mais próximo da torre) e realizam nova medição do ângulo usando os teodolitos, conforme Figura 36. Assim, usando os valores da tangente na tabela trigonométrica (Anexo A), calculam a altura da torre.

Figura 35 – Situação para uso dos teodolitos para medir a torre da Igreja sem acesso à base



Fonte: Acervo da autora

4.2.5 Atividade 3 - Cálculo da altura de uma árvore

Esta situação, conforme Figura 36, assemelha-se à da torre, seguindo os mesmos passos descritos na seção 4.2.4.

Figura 36 – Situação para uso dos teodolitos para medir a altura da árvore sem acesso à base



Fonte: Acervo da autora

5 Relato da prática da Atividade 1 com o teodolito caseiro

Neste capítulo é relatada a experiência da aplicação da atividade de calcular a altura do prédio da escola usando o teodolito caseiro em dois cenários: para duas turmas, nas quais a autora é professora, que serão chamadas de turmas A1 e A2 e para duas turmas de outra escola da rede estadual, na qual a atividade se desenvolveu em forma de oficina. Tais turmas serão nominadas de turmas B1 e B2.

A seguir, são descritas algumas características das turmas e escolas em que as práticas foram aplicadas, bem como os resultados observados durante a aplicação.

5.1 Relato da atividade nas turmas A1 e A2

A escola na qual a autora é professora, chamar-se-á escola A. É uma escola apenas de Ensino Médio, com 7 turmas, sendo duas de segundo ano, uma com 30 e outra com 32 alunos, nominadas turmas A1 e A2. Os alunos ingressam nessa escola através de processo seletivo, com vagas que priorizam o acesso a filhos de um determinado grupo profissional. As salas de aula possuem ar condicionado, além de recursos tecnológicos de mídia, como televisores e *notebooks*, propiciando a projeção de informações através desse recurso. As salas são arejadas e possuem quadro branco e canetas coloridas. Os alunos possuem aulas em turno integral, manhã e tarde, com exceção à sexta-feira, quando as aulas ocorrem apenas no turno da manhã. É obrigatório aos alunos o uso de uniforme.

Cada turma foi dividida em grupos de 5 a 6 alunos. Os conceitos de semelhança de triângulos e as razões trigonométricas já haviam sido definidos e trabalhados anteriormente.

Inicialmente, os alunos fizeram a montagem do teodolito, como descrito na seção 4.2.1. Após, mediram a altura do colega que iria usá-lo (Figura 37).

Figura 37 – Medindo a altura do colega com a trena



Fonte: Acervo da autora

Convém destacar que, nessa parte, os alunos ficaram entusiasmados e curiosos em saber quanto mediam, por isso, vários deles mediram suas alturas. Posteriormente, foram ao pátio munidos com seus teodolitos, caderno e caneta para as anotações (conforme Figura 38).

Figura 38 – Alunos mediando o ângulo com o teodolito caseiro



Fonte: Acervo da autora

A trena de 50 metros foi esticada a partir da base do prédio da escola e cada grupo

posicionou-se a uma determinada distância para dali medir o ângulo com que visualizavam o topo do prédio com o teodolito caseiro (conforme Figura 39).

Figura 39 – Alunos medindo o ângulo em diferentes distâncias



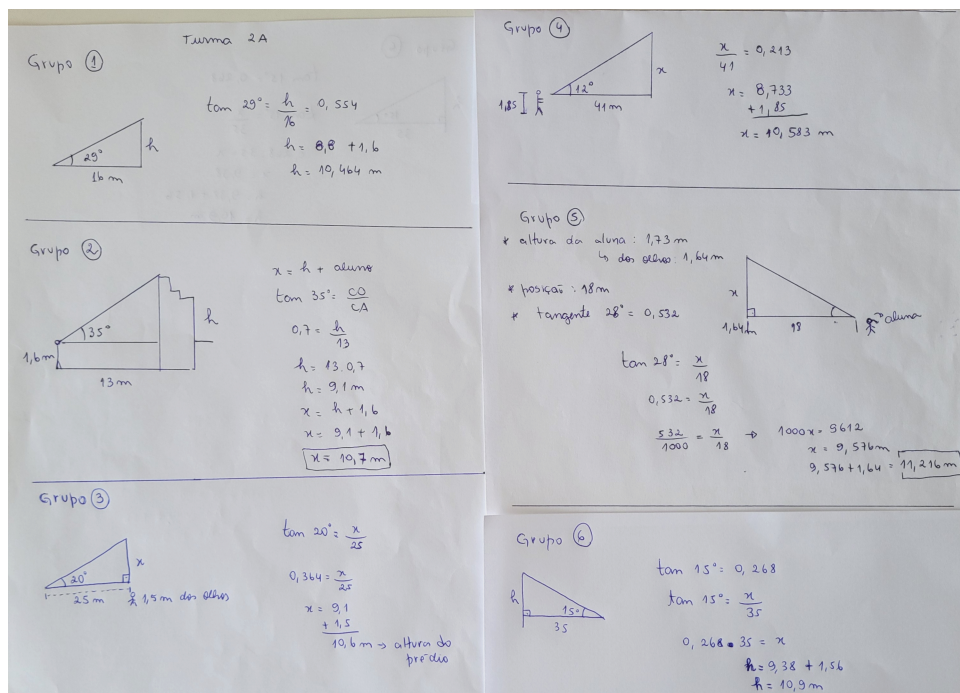
Fonte: Acervo da autora

Anotaram as medidas e, com o auxílio da tabela trigonométrica (extraída do livro de Dante (2013), conforme Anexo A), usando os valores da tangente, fizeram o cálculo da altura.

Voltaram para a sala de aula e, a partir dos resultados obtidos, compararam os valores encontrados, observando em cada desenho da situação, a medida da distância e do ângulo encontrado. Podendo-se concluir que: quanto mais distantes do prédio, menor é o ângulo de observação, quanto mais próximos, maior o ângulo.

Conforme os cálculos apresentados pelos grupos em cada turma, na A1 foram encontrados os valores: 10,464 m; 10,7 m; 10,6 m; 10,583 m; 11,216 m e 10,9 m (conforme Figura 19).

Figura 40 – Cálculo dos alunos da turma A1 replicados pela professora

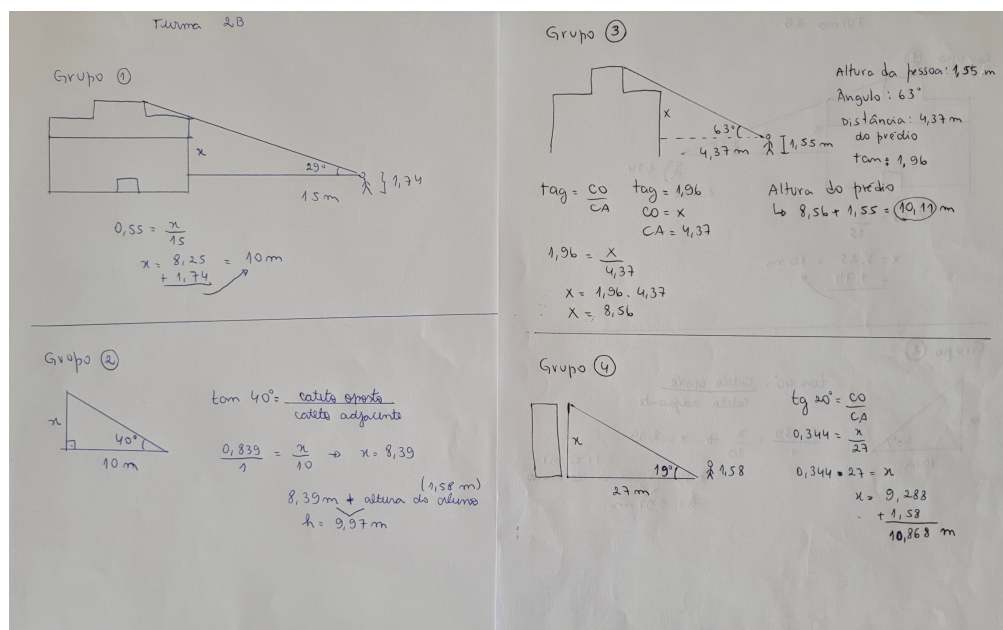


Fonte: Acervo da autora

Para comparação entre os resultados, adotou-se o arredondamento para uma casa decimal. Dessa forma, percebe-se que os valores foram bastante próximos, com uma diferença de 0,7 m entre o menor e maior valor.

Na turma A2 foram encontrados os valores: 10 m; 9,97 m; 10,11 m e 10,868 m (conforme Figura 41).

Figura 41 – Cálculo dos alunos da turma A2 replicados pela professora



Fonte: Acervo da autora

Considerando o arredondamento de uma casa decimal, percebe-se uma diferença de 0,9 m entre o menor e maior valor da turma. Comparando-se os valores das duas turmas, tem-se uma diferença de 1,2 m entre o menor e maior valor. Considerando um aparelho rudimentar, essa diferença pode ser considerada plausível.

A autora desconhece a medida real do prédio, porém, percebe-se, pelos valores bastante próximos uns dos outros, que podem indicar a medida real, ou próxima dela, pois trata-se de um prédio antigo de dois andares, com o pé direito alto, em torno de 3,5 m cada andar, com mais uma parede construída acima do segundo andar, ou seja, uma estimativa de 10,5 m e, comparando os valores encontrados com essa estimativa, todos estão bastante próximos. Caso algum dos valores fique muito fora da média geral dos grupos, sugere-se solicitar uma nova medição de valores para comparação.

Durante a atividade, os alunos costumam perguntar se está certa a sua resposta. Sabe-se que geralmente os problemas possuem uma resposta correta, mas nesse caso, trata-se de uma investigação e o instrumento utilizado (teodolito) não é preciso, por isso, os resultados podem variar, por pequenas diferenças, como se pode observar. A experiência realizada com os alunos mostrou-se muito positiva e estimulante, pois propiciou uma maior atuação do aluno, colocando-o numa posição de protagonista, em que o professor apenas orientou o trabalho.

5.2 Relato da atividade nas turmas B1 e B2

A segunda escola, chamar-se-á de escola B, também é uma escola de Ensino Médio, da rede estadual do RS, composta por seis turmas, em cada turno, manhã e tarde, sendo duas de segundo ano, no turno da tarde, uma com 25 e outra com 29 alunos, nominadas por turma B1 e B2 neste trabalho. As salas são regulares e bem arejadas, com quadro branco e canetas apropriadas. Algumas salas possuem ar condicionado, porém, a rede elétrica não permite que seja ligado, por risco de sobrecarga. As salas não possuem aparelhos de projeção, nem computadores. Para esse recurso, os alunos precisam se dirigir a uma sala específica, que precisa ser agendada com antecedência, para que o professor possa usá-la.

As atividades nas turmas B1 e B2 deram-se em formato de oficina. A professora titular cedeu dois períodos de aula de 50 minutos em cada turma para a realização da atividade. Como as turmas eram de outro professor, foi necessário, antes de aplicar a tarefa do teodolito, fazer uma retomada sobre o conteúdo das razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente), dando-se um enfoque maior para a tangente, falando-se também sobre a situação de quando o ângulo é 45 graus, em que o cateto oposto e o adjacente possuem mesma medida, além de exemplos de cálculos da situação que se desejava aplicar. Em seguida, foram mostradas imagens impressas de teodolitos profissionais (Anexos B, C e D) para que os alunos pudessem visualizar como é esse equipamento. Em função do tempo disponível para a aplicação da atividade, a etapa da construção não foi realizada, os teodolitos foram levados prontos para utilização. Na Figura 42 é possível observar alguns alunos testando e manipulando os teodolitos.

Figura 42 – Alunos manipulando o teodolito caseiro



Fonte: Acervo da autora

A partir daí, os alunos foram divididos em grupos e foi feita a mesma sequência das atividades: em sala, os alunos mediram a altura dos colegas que utilizariam o aparelho, conforme Figura 43.

Figura 43 – Medindo a altura do colega com a trena na escola B



Fonte: Acervo da autora

Em seguida, foram ao pátio, e a partir de diferentes distâncias, obtiveram através do teodolito o ângulo com que avistaram a parte mais alta do prédio e anotaram as informações, conforme Figuras 44 e 45.

Figura 44 – Alunos medindo o ângulo com o teodolito caseiro escola B



Fonte: Acervo da autora

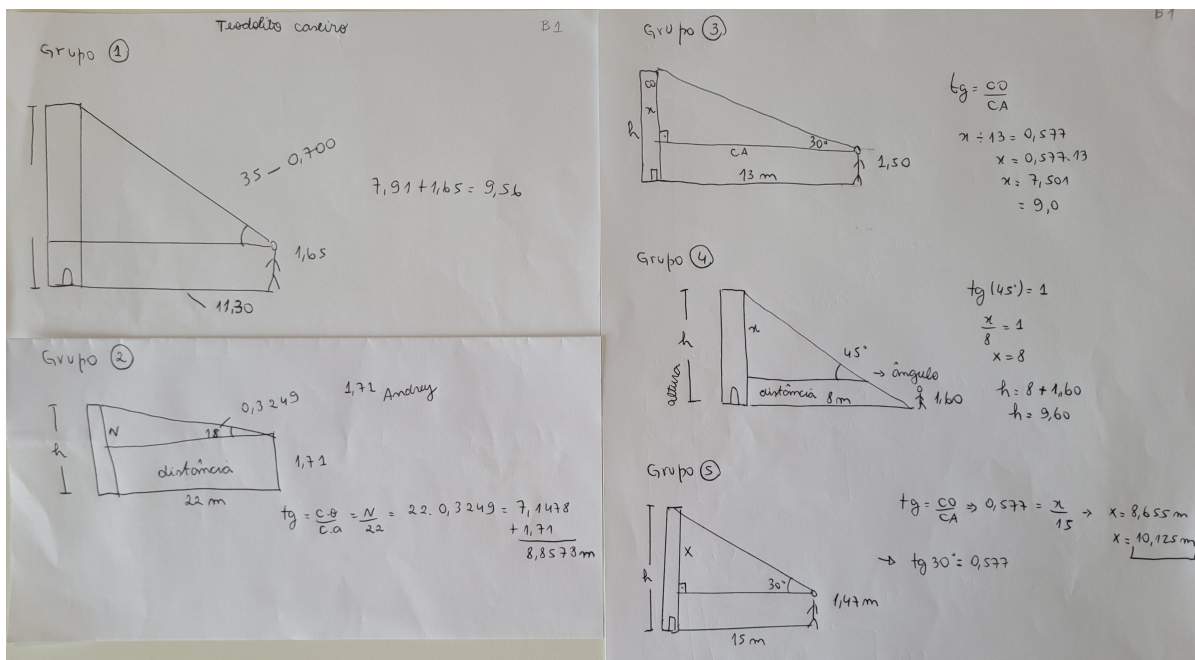
Figura 45 – Alunos medindo o ângulo em diferentes distâncias na escola B



Fonte: Acervo da autora

Usando a tabela trigonométrica (Anexo A), consultando os valores da tangente, obtiveram a altura do prédio. Os grupos da turma B1 encontraram os valores: 9,56 m; 8,8578 m; 9 m; 9,6 m e 10,125 m. Conforme Figura 46.

Figura 46 – Cálculo dos alunos da turma B1 replicados pela professora

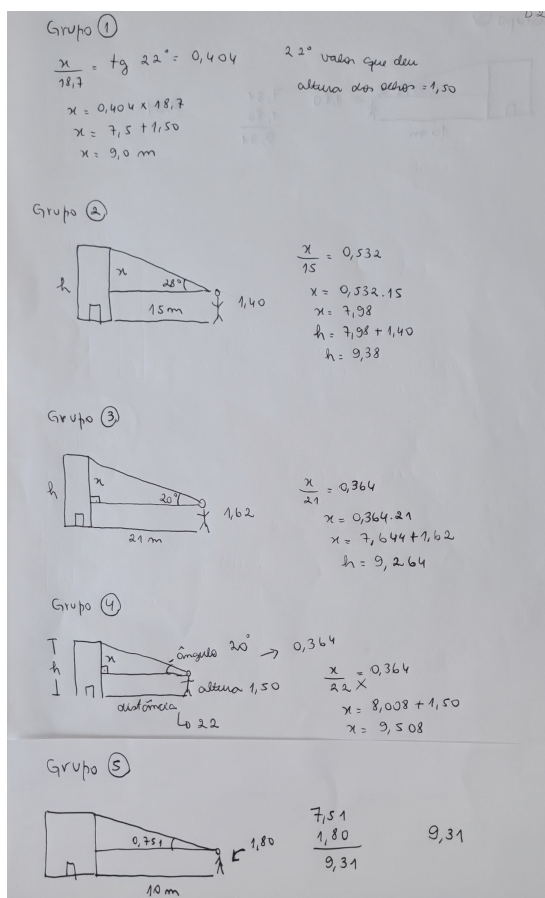


Fonte: Acervo da autora

Usando-se o arredondamento para uma casa decimal, percebe-se uma diferença de 1,2 m entre o menor e o maior valor.

Os grupos da turma B2 encontraram os seguintes valores: 9 m; 9,38 m; 9,264 m; 9,508 m e 9,31 m. Usando-se também o arredondamento de uma casa decimal e comparando, obteve-se uma diferença de apenas 0,5 m, conforme Figura 47.

Figura 47 – Cálculo dos alunos da turma B2 replicados pela professora



Fonte: Acervo da autora

Da mesma forma como na escola A, foram comparados os valores encontrados pelos grupos em cada turma.

Para essa escola, foi possível encontrar a altura real, utilizando uma trena laser, que foi posicionada no chão e o laser atingiu o beiral do telhado, marcando 9,1 m, com mais 20 cm aproximadamente até a borda do telhado, pode-se concluir que a altura é de 9,3 m. Assim pode-se perceber que as alturas encontradas foram também, próximas da altura real da escola, tendo no máximo, 0,7 m de diferença desta, isso por um dos grupos, os demais tiveram diferenças menores, ou seja, menos de 10 por cento de erro, o que é considerado muito satisfatório, pelo fato de ser um instrumento rudimentar. Comparando os resultados da turma B2 essa diferença fica de apenas 0,3 m.

Algumas observações acerca da atividade na escola B:

- A necessidade de alguns grupos em anotar um número expressivo de casas decimais após a vírgula no resultado da altura, quando para essa situação, os centésimos de metro já são um arredondamento bem satisfatório.

- Um aluno havia anotado uma distância de 70 metros como a distância de sua posição ao prédio, mas, percebeu que não fazia sentido, por ser um valor muito grande, então, conferindo, observou-se que havia anotado a medida do cm marcada na trena entre uma medida de metro e outro, a medida correta era 14 m e 70 cm. Percebe-se com a experiência que alguns alunos possuem dificuldades na leitura em aparelhos de medição.
- Um grupo precisou de ajuda para conseguir finalizar o cálculo da altura do prédio, após receber orientação da professora, conseguiu concluir.
- Outro grupo, após calcular, procurou a distância em que deveria marcar 45 graus no teodolito, pois sabia que assim, a altura, a partir do teodolito, era igual a distância que estavam do prédio, observando-se portanto, que estavam atentos às explicações feitas no início da atividade e conseguiram associar a prática com a teoria.
- Uma aluna, que cursa mecânica em um Instituto Federal de Educação Tecnológica, associou a atividade a um recurso utilizado no curso, chamado “mesa de senos”, em que também se utilizam as razões trigonométricas, observando-se assim, a relação da Matemática com o Mundo do Trabalho e as Tecnologias digitais associadas às diversas profissões.

Na sequência é feito o relato da aplicação do teodolito virtual nas turmas das escolas A e B, e os resultados observados.

6 Relato da prática da Atividade 1 com o teodolito virtual

Neste capítulo são relatadas a experiência da aplicação do teodolito virtual para o cálculo da altura da escola e os resultados observados a partir dessa prática.

6.1 Relato da atividade nas turmas A1 e A2

A ideia do teodolito virtual surgiu depois que já havia sido feita a aplicação do teodolito caseiro nas turmas da autora. Surgiu como uma alternativa envolvendo o uso da tecnologia através de um instrumento utilizado amplamente pelos alunos e de fácil manipulação, o *smartphone*. Existem diversos aplicativos de celular utilizados hoje em dia, na área da Matemática que auxiliam o trabalho do professor, como o *GeoGebra*, um software que proporciona a visualização de gráficos de funções, de equações e também de figuras e formas geométricas e o *MalMath*, que resolve equações e relaciona a álgebra com a visualização gráfica, indo ao encontro de uma abordagem tecnológica, objetivando complementar o trabalho.

Para não interromper o curso das aulas, a tarefa com o teodolito virtual foi feita ao final do ano letivo, depois das avaliações finais dos alunos. Por esse motivo não foi aplicada às duas turmas da escola A, mas apenas a um grupo de 14 alunos, de ambas as turmas, que se dispuseram a vir em um turno alternativo para a realização da proposta. Desta forma, foram formados 4 grupos para realizar as medições.

Para essa atividade foi usado um período de aula de 50 minutos. Inicialmente, os alunos fizeram o *download* do aplicativo como descrito na seção 4.2.2, que levou em torno de 15 minutos. Posteriormente, mediram a distância entre a escola e o suporte com o celular do qual se fez a medição do ângulo. Foi medido também a altura do chão ao suporte em que o *smartphone* estava preso, que é de 1,3 metros. A Figura 48 mostra essa situação.

Figura 48 – Alunos medindo o ângulo através do teodolito virtual



Fonte: Acervo da autora

Cada grupo se posicionou a uma determinada distância da escola e assim, obtiveram as medidas dos ângulos pelo aplicativo *angle meter*, conforme Figura 49, e fizeram os cálculos da altura, usando a tabela trigonométrica (Anexo A) com os valores da tangente, os quais também poderiam ser obtidos através de pesquisa pela internet ou na própria calculadora do celular.

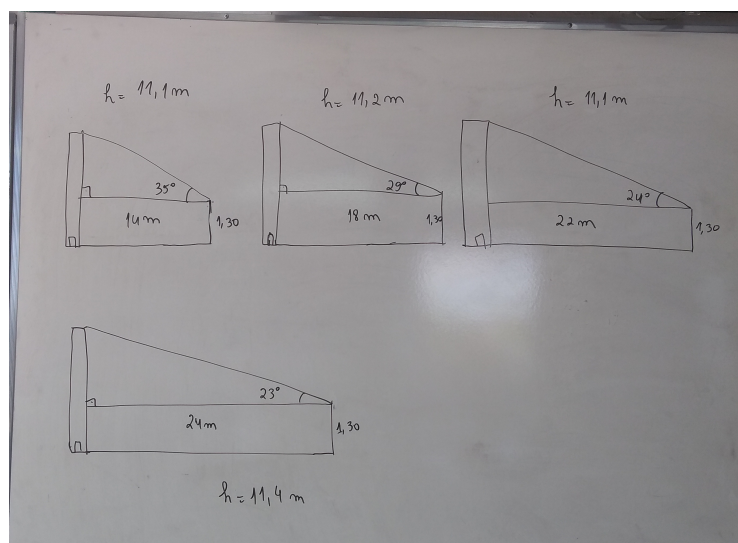
Figura 49 – Aluna usando o teodolito virtual



Fonte: Acervo da autora

A Figura 50 mostra os valores anotados por cada grupo e reproduzidos no quadro pela professora, em que se tem os valores do ângulo e da distância, bem como, o resultado do cálculo da altura determinada por cada grupo. A partir dos desenhos, pode-se verificar a relação da distância entre a escola e o aparelho com o ângulo medido, podendo-se perceber que quanto mais distante do prédio, menor o ângulo e quanto mais próximo do prédio, maior o ângulo de visão.

Figura 50 – Resultados obtidos através do teodolito virtual



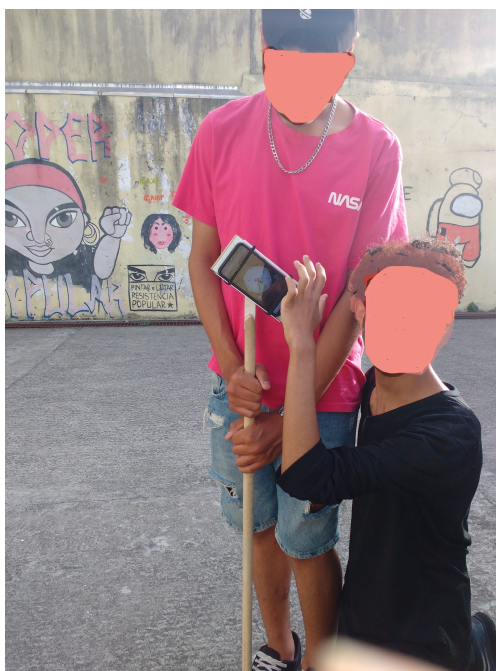
Fonte: Acervo da autora

Pode-se também observar que os resultados obtidos (11,1 m; 11,2 m; 11,1 m e 11,4 m) por cada grupo foram bastante próximos, com uma diferença de 0,3 m entre o menor e maior valor, com média de 11,2 m. Enquanto que a média de valores com o teodolito caseiro foi de 10,5 m.

6.2 Relato da atividade nas turmas B1 e B2

Esta atividade, na escola B, foi realizada no mesmo dia da aplicação com o teodolito caseiro. Os alunos das turmas B1 e B2, em grupos de 5 a 6 integrantes, após o *download* do aplicativo, dirigiram-se ao pátio da escola e coletaram as medidas do ângulo com o teodolito virtual, usando a altura do suporte (1,3 m) como a altura a partir do ângulo de visão. Posicionaram-se em diferentes distâncias, em que cada grupo, a partir dessas medidas, usando os valores da tangente da tabela dos valores no Anexo A para os cálculos, obtiveram a altura da escola. As Figuras 51 e 52 mostram um pouco da prática realizada pelos alunos.

Figura 51 – Alunos usando teodolito virtual



Fonte: Acervo da autora

Figura 52 – Alunos usando o teodolito virtual

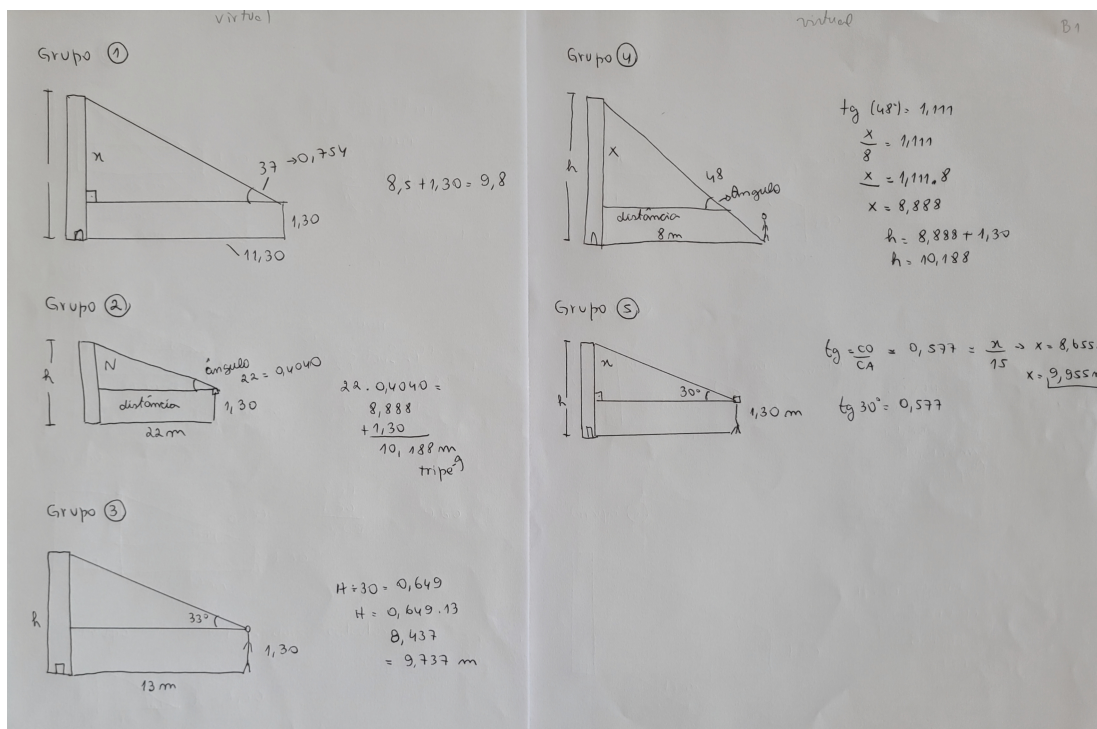


Fonte: Acervo da autora

A turma B1 encontrou as alturas: 9,8 m; 10,188 m; 9,737 m; 9,955 m; 10,188 m e 9,955 m. Por coincidência, dois valores exatamente iguais, porém com distâncias e

ângulos diferentes, como se pode observar através das resoluções na Figura 53. Com um arredondamento para uma casa decimal, percebe-se uma diferença de 0,5 m entre o menor e maior valor.

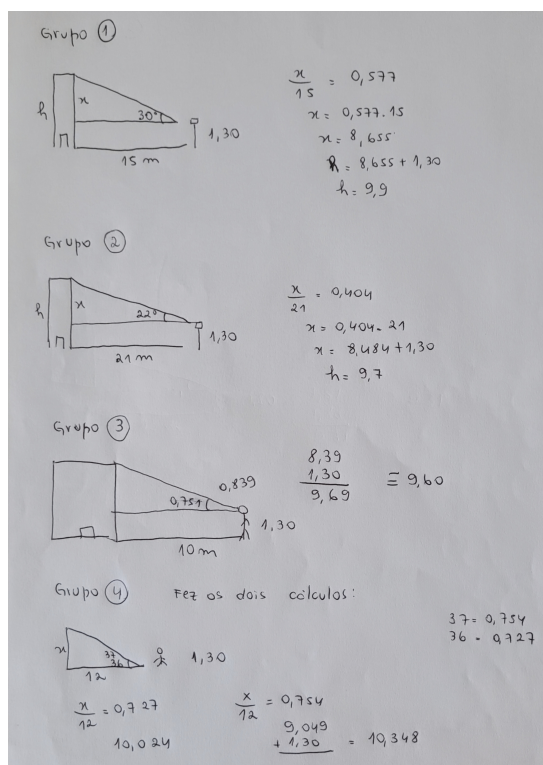
Figura 53 – Cálculo dos alunos da turma B2 replicados pela professora



Fonte: Acervo da autora

A turma B2 encontrou as seguintes alturas: 9,9 m; 9,7 m ; 9,6 m e 10,348 m, conforme Figura 54.

Figura 54 – Cálculo dos alunos da turma B2 replicados pela professora



Fonte: Acervo da autora

Considerando o arredondamento de uma casa decimal tem-se uma diferença de 0,7 m entre o menor e maior valor.

Comparando com as medidas encontradas com o teodolito caseiro percebe-se que são alguns centímetros maiores e quando comparadas à real altura do prédio, apresentam no máximo 10% de diferença, o que se considera bastante plausível.

Algumas observações a serem destacadas dessa prática na escola B:

- Para que a medição tenha melhor precisão é importante, manter o suporte firme, pois, caso contrário, ele pode balançar e com isso, a medição do ângulo ficar incorreta, acarretando diferença no resultado final.
- Um dos grupos, ao anotar o ângulo pelo aplicativo, observou que este oscilava entre 36 e 37 graus (mesmo com o suporte estando imóvel), assim, resolveram calcular a altura para cada um desses ângulos, obtendo assim os valores 10,024 m e 10,348 m respectivamente. Levando-se em conta que possivelmente o ângulo fosse entre esses dois valores, o valor da altura encontrada estaria em torno de 10,2 m .
- Sugere-se aqui utilizar o aplicativo medidor de ângulo com uma casa decimal para medições mais precisas. É possível selecionar essa opção, e para esse caso, os valores

da tangente podem ser consultados direto na internet ou utilizando calculadora do próprio celular.

A Atividade 2, a seguir descrita, de medir a altura da torre da igreja foi feita apenas com os alunos da escola A, pois a igreja é próxima dela. Os alunos utilizaram as duas versões dos teodolitos e sugeriu-se cada grupo fazer a medição do ângulo em cada um dos aparelhos. Na escola B essa atividade não foi feita, pois precisaria de mais um período de aula e não havia disponibilidade para tal.

7 Relato da prática da Atividade 2 usando o teodolito caseiro e virtual nas turmas A1 e A2

Essa tarefa também foi realizada com os mesmos catorze alunos da escola A, de ambas as turmas, que vieram voluntariamente em um turno alternativo para a sua realização. Utilizou-se um período de aula para a parte prática, pois os teodolitos já estavam montados conforme os passos das seções 4.2.1 e 4.2.2.

Cada um dos quatro grupos utilizou o teodolito caseiro e o virtual para extrair as medidas dos ângulos. Primeiramente, com os teodolitos em uma posição de maior distância em relação à torre e, posteriormente, alguns metros mais próximos da torre, como descrito na proposta de Atividade 2 na seção 4.2.4. As Figuras 55, 56 e 57 mostram os alunos utilizando os teodolitos.

Figura 55 – Usando o teodolito caseiro na medição da torre da igreja



Fonte: Acervo da autora

Figura 56 – Usando o teodolito virtual na medição da torre



Fonte: Acervo da autora

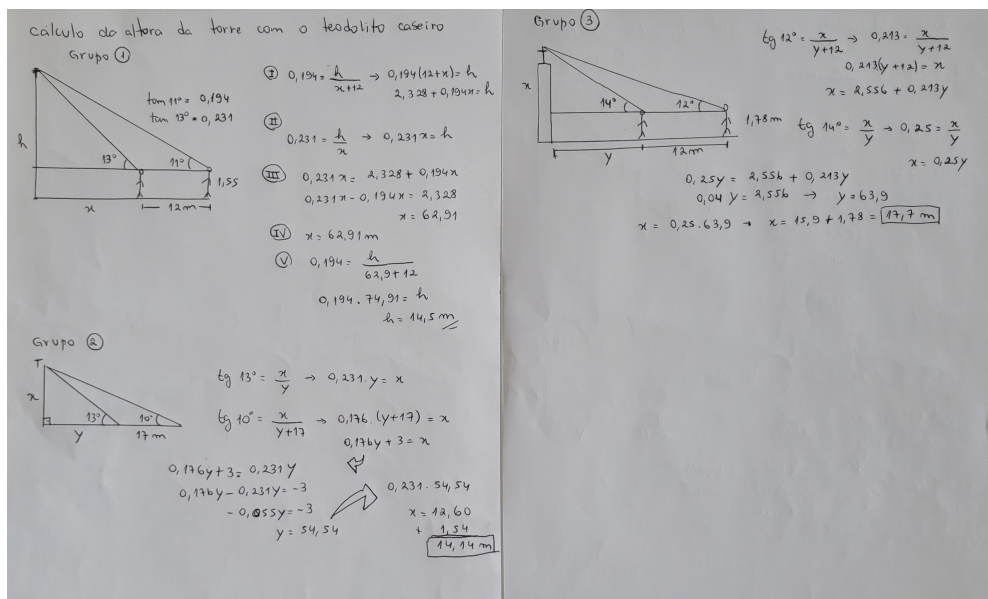
Figura 57 – Usando o teodolito virtual na medição da torre



Fonte: Acervo da autora

Como o cálculo para essa situação foi mais demorado, apenas dois grupos conseguiram concluir dentro do período previsto usando as medidas dos dois teodolitos, os outros dois fizeram o cálculo com o valor de apenas um dos aparelhos. Seguem os resultados calculados pelos grupos com o teodolito caseiro, replicados pela professora (Figura 58 e 59).

Figura 58 – Cálculo das turmas A1 e A2 pelo teodolito caseiro replicadas pela professora

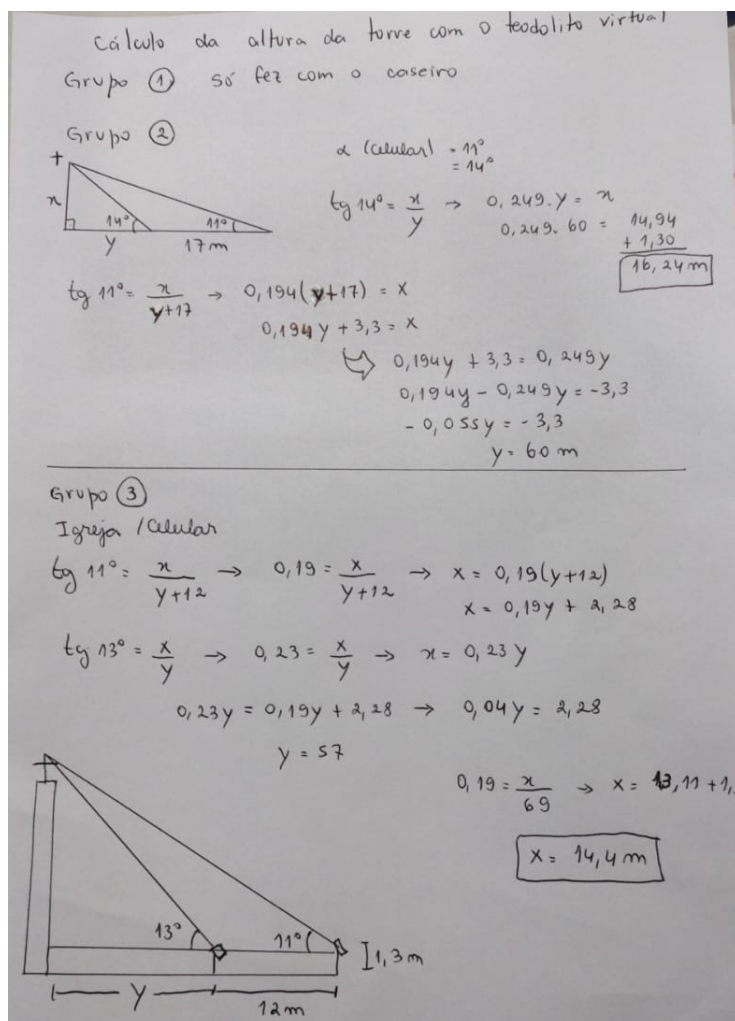


Fonte: Acervo da autora

Pelos valores encontrados: 14,5 m; 14,14 m e 17,7 m, pode-se observar que dois resultados foram bem próximos e outro apresentou uma diferença maior.

Os resultados obtidos com o teodolito virtual foram: 16,24 m e 14,4 m, conforme Figura 58, também bastante próximos.

Figura 59 – Cálculo das turmas A1 e A2 pelo teodolito virtual replicadas pela professora



Fonte: Acervo da autora

Como o pátio da escola não é muito grande, a distância entre dois pontos de observação fica relativamente menor, o que ocasiona uma diferença pequena entre os ângulos de observação e, conseqüentemente, diferenças mais consideráveis nos resultados finais. Sugere-se fazer essa atividade para situações em que se possa alcançar distâncias maiores entre um ponto de observação e outro.

Visivelmente, a torre é bem mais alta que o prédio da escola e considerando-se a média aritmética dos resultados, esse valor fica em 15,5 m, o que parece bem plausível. Um grupo havia feito o cálculo e chegado a 74 m, porém, perceberam que esse valor estava muito fora da realidade. Verificaram os dados anotados e ao conferir os cálculos observaram que haviam calculado a medida da distância horizontal do ponto de observação até a torre. Finalizaram a tarefa, calculando a medida referente a altura da torre no esboço da situação que haviam desenhado na folha.

A Atividade 3 é análoga a atividade da torre e não foi possível ser realizada no

mesmo dia devido ao tempo disponível e também pelo período de final de ano letivo, mas fica como uma sugestão de aplicação.

8 Relato da pesquisa com a professora da escola B e os alunos da escola A

A pesquisa foi realizada somente com a professora da escola B, porque a atividade foi realizada ao final do ano letivo e não houve oportunidade de aplicá-la aos discentes. Foi aplicada uma pesquisa aos alunos da escola A, pois estes se encontram na série seguinte na escola em que a atividade foi realizada e são alunos da autora. Essa pesquisa foi feita através de formulários *online*, que foram enviados aos seus *e-mails*.

8.1 Pesquisa sobre a percepção da professora da escola B

Foi realizada uma pesquisa com quatro perguntas no formato de formulário (*Google forms*), para a professora da escola B, sobre sua percepção da aplicação da atividade aos alunos. As perguntas um e dois e as respostas da professora estão na Figura 60.

Figura 60 – Respostas da professora da escola B às perguntas 1 e 2 do questionário

Como você avalia a participação dos seus alunos na atividade dos teodolitos para o cálculo da altura da escola?

1 resposta

Os alunos se envolveram bastante na atividade, até mesmo aqueles que costumavam ser mais dispersos tiveram o interesse despertado. Tiveram curiosidade de participar de cada momento.

Você considera que essa atividade possa contribuir para o aprendizado das razões trigonométricas pelos seus alunos?

1 resposta

Sim, muitos conseguiram entender o conteúdo depois da atividade. Os que já haviam entendido a teoria, ficaram empolgados de ver funcionar na prática.

Fonte: Acervo da autora

Pela fala da professora, percebe-se que os alunos ficaram motivados com a atividade e participaram com interesse, envolvimento e puderam perceber a aplicação prática do conteúdo. Na Figura 61 as respostas às outras duas perguntas da pesquisa.

Figura 61 – Respostas da professora da escola B às perguntas 3 e 4 do questionário

Você considera importante esse tipo de atividade?

1 resposta

Sim, sem dúvida estimula os estudantes, cria um ambiente muito agradável e dá sentido ao conteúdo estudado.

Você tem alguma sugestão de melhoria para essa atividade aplicada às turmas?

1 resposta

Como o tempo foi curto, considero que foi tudo bem. Se houvesse mais tempo disponível, seria importante investir mais na explicação de como utilizar o teodolito.

Muito obrigada pela disponibilidade e colaboração em responder este questionário, será muito importante para o enriquecimento do trabalho. [Copiar](#)

Fonte: Acervo da autora

Através da fala da professora, reforça-se a aprendizagem significativa, quando ela diz que a atividade ajuda a dar sentido ao conteúdo estudado, bem como, a importância da etapa de construção do aparelho, o que não ocorreu com essas turmas, devido ao curto tempo e a necessidade de retomar os conteúdos necessários, mas fica como sugestão pela importância do envolvimento dos alunos.

8.2 Pesquisa sobre a percepção dos alunos da escola A

A pesquisa foi coletada por meio de questionário através de formulário *online* (*Google forms*). Foram feitas cinco perguntas relacionadas à atividade. Doze alunos responderam às perguntas 1 a 3 e onze alunos responderam as perguntas 4 e 5, respectivamente, pois alguns deles não haviam participado da atividade de medição da torre que havia sido realizada em turno alternativo às aulas.

Os alunos foram nomeados por A1, A2,... A12 para identificação das respostas.

Fez-se as seguintes perguntas:

1) O que você achou da atividade do teodolito realizada durante as aulas de Matemática?

Achei interessante, pois a prática faz com que a teoria fique mais nítida para os alunos (A1).

Mostrou-nos as relações trigonométricas de uma forma descontraída. Achei eficaz pra compreensão do conteúdo, deixando mais fácil o entendimento das relações trigonométricas (A2).

Essa atividade foi muito interessante, visto que eu não sabia da possibilidade de medir alturas com ângulos através de um material reciclável e simples (A3).

Muito interessante para observar a trigonometria na prática (A4).

Achei muito importante a fim de conhecimentos escolares e comuns (A5).

Achei muito interessante (A6).

Achei interessante, e bem produtivo (A7).

Achei interessante e dinâmica (A8).

Achei atividade muito interessante (A9).

Foi bom sair um pouco do conhecimento teórico e "ver" a prática (A10).

Acredito que a aula prática me ajudou a compreender melhor a matéria, e também aprendi coisas novas (A11).

Achei interessante (A12).

De modo geral, a maioria dos alunos reconheceram a importância da aplicação prática do conteúdo estudado, bem como, acharam interessante, curioso e inovador.

2) Você considera importante esse tipo de atividade nas aulas?

Sim, acho que elas fixam melhor na mente dos estudantes (A1).

Sim, acredito que as aulas práticas levam ao aperfeiçoamento da teoria, fazendo com que os exercícios em sala de aula fiquem mais fáceis de fazer (A2).

Sim, pois nos possibilita ampliar nosso conhecimento de forma prática e didática (A3).

Sim (A4).

Sim, faz com que os alunos compreendam solidamente as matérias trabalhadas em aula (A5).

Sim, pois esse tipo de atividade nos ajuda a visualizar a matemática, tornando a compreensão do conteúdo muito mais simples (A6).

Sim, considero (A7).

Sim, a metodologia variada auxilia no processo de aprendizagem (A8).

Sim, acredito que esse tipo de atividade faz com que os alunos participem mais e sejam mais dinâmicos (A9).

Sim. É fundamental sabermos na prática em que podemos aplicar os conhecimentos trazidos a nós pelas aulas (A10).

Penso que aulas práticas colaboram para um bom entendimento dos alunos da matéria apresentada. Além de proporcionar experiências e conhecimentos novos (A11).

Sim, pois além de ensinar a matéria de forma prática e interessante, foge do padrão e torna a aula mais divertida (A12).

Reforça-se a importância da contextualização, em que o aluno percebe, segundo Skovsmose (2000) que a aula saiu do paradigma do exercício e entrou num ambiente de

investigação, que o auxilia a colocar em prática os conhecimentos teóricos, facilitando a aprendizagem.

3) Você teve dificuldade para realizar o cálculo da altura da escola?

Não, pois tive auxílio da Prof. Mara, o que deixou mais fácil e prático (A1).

Não, pois qualquer dúvida foi sanada pela professora (A2).

Não, achei simples e divertido (A3).

Não (A4).

Não (A5).

Não (A6).

Não, pois foi em grupo, assim cada um se ajudou (A7).

Não (A8).

Não, as explicações da professora foram sempre muito claras e sempre exercitamos a matéria antes de realizar a atividade (A9).

Não (A10).

Não (A11).

Não tive (A12).

Destaca-se a importância do papel do professor como orientador no processo, bem como o trabalho em grupo, que ocorre de forma colaborativa e a importância de conhecimentos prévios da teoria que auxiliam no desenvolvimento dos cálculos, tornando a aprendizagem significativa.

4) Qual dos dois teodolitos você gostou mais? O caseiro (feito com papelão) ou o virtual (usando o aplicativo medidor de ângulo)? Justifique.

Achei o virtual mais prático, pois mostra exatamente o ângulo em que estamos enxergando a escola e a torre (A1).

O caseiro, pois tive o sentimento de ter mais precisão na medida dos ângulos (A2).

O caseiro é interessante pelo trabalho manual que deve ser desenvolvido, não dependendo assim da tecnologia. Porém, eu utilizaria, para um trabalho por exemplo, o digital, por ser mais preciso (A3).

O caseiro (A4).

Achei o caseiro mais legal de usar pois foi feito por mim e pelos meus colegas, mas creio que o virtual tenha mais precisão (A5).

Gostei mais do caseiro, porque não teve erro, assim achei mais simples, e também tem a função de fazer ele em casa (A6).

O virtual, pois proporcionou um resultado mais específico (A7).

O caseiro, pois pudemos perceber o quão fácil é um montar um instrumento que aparenta ser complexo (A8).

Utilizando o aplicativo, torna-se mais prático e preciso em relação ao caseiro, em que pese possa haver alguma angulação não tão exata (A9).

Gostei mais do teodolito caseiro. Apesar do teodolito virtual ser bem prático, não é igual ao caseiro que a turma em conjunto constrói. O teodolito caseiro também fornece uma visão de como o ângulo entre o chão e o topo da escola são encontrados, que é através do caimento do fio com o peso, na marcação dos ângulos no papelão (A10).

O caseiro, pois fazê-lo foi algo bem curioso para mim que não sabia o que era um. E ainda, sem tecnologias conseguimos realizar a atividade tranquilamente (A11).

As opiniões foram bem divididas, quanto a preferência por cada um dos equipamentos. De modo geral, o teodolito virtual parece ser mais preciso na opinião dos alunos, dando mais confiança no resultado, podendo também usar a opção de uma casa decimal para uma medida de ângulo mais precisa, porém, o caseiro, por ter sido confeccionado por eles, parece ter um valor sentimental envolvido, e também proporciona visualizar a forma como o aparelho funciona, além da facilidade e praticidade de sua montagem.

Você teve dificuldade para realizar o cálculo da altura da torre?

Não, pois compreendi a teoria antes de realizá-la de forma prática (A1).

Não, pois como o trabalho era em grupo, todos integrantes reafirmaram as medidas (A2).

Não (A4).

Não (A5).

Não, aconteceram algumas confusões com o teodolito, mas a professora nos ajudou e deu tudo certo (A6).

Não achei dificultoso, foi fácil até (A7).

Não (A8).

Não, as explicações da professora foram sempre muito claras e sempre exercitamos a matéria antes de realizar a atividade (A9).

Não (A10).

Não (A11).

Novamente reforça-se a importância dos conhecimentos prévios, bem como o trabalho em grupo e a orientação do professor para o ensino e aprendizagem.

9 Considerações finais e trabalhos futuros

A atividade aplicada às turmas mostrou-se bastante eficaz e enriquecedora, reforçando que a teoria sobre a participação efetiva do aluno no processo de ensino e aprendizagem e a aplicação da Matemática de forma contextualizada promovem uma aprendizagem significativa e motivadora.

É importante ressaltar o envolvimento dos alunos nas atividades, nas contribuições individuais para as tarefas em grupo, no manuseio dos instrumentos, tanto manuais quanto tecnológicos e na comparação dos seus resultados. Todas as etapas colaboram para formas diferentes de ensinar e aprender, sendo uma alternativa à forma tradicional de ensino. Possibilitam a construção de um espaço diferenciado, permitindo maior atuação do aluno no processo, mostrando que ele é capaz de “mover-se” em diferentes ambientes de aprendizagem a partir da investigação matemática.

A utilização dos teodolitos, tanto o caseiro, confeccionado pelos alunos, quanto o virtual, utilizando a tecnologia, serviram como recursos que contribuíram para o ensino e, conseqüentemente, para a aprendizagem de conceitos relacionados às razões trigonométricas no triângulo retângulo, alcançando assim, os objetivos propostos. Seu manuseio permitiu melhor compreensão e entendimento do assunto e possibilitou aos estudantes vivenciarem uma nova forma de estudar Matemática, mais criativa e dinâmica. Permitiu relacionar o conteúdo a uma situação real, convidou e envolveu os alunos em um cenário de investigação, proporcionou compartilhamento de ideias e interação. A professora atuou como mediadora da aprendizagem nesse processo, esclarecendo as dúvidas, à medida que surgiam. O papel de mediadora, apesar de ter trazido uma certa insegurança e incertezas quanto ao tipo de dúvidas ou dificuldades que poderiam surgir, incentivou a pesquisa e o aprimoramento da prática.

Acredita-se que o trabalho produziu bons resultados e visa a contribuir com professores do ensino básico, mas especialmente com os alunos, objetivando a aprendizagem de conceitos importantes e práticos que possibilitam aos estudantes visualizarem aplicações da Matemática e possibilidades de formação e profissionalização.

Como proposta para atividades futuras sugere-se usar o aplicativo *angle meter* (usando a função transferidor) de maneira a medir ângulos no sentido horizontal, construir um teodolito com um transferidor e canudo, que faça a medição de ângulos horizontais visando aplicar a lei dos senos ou dos cossenos para o cálculo da largura entre dois pontos distantes horizontalmente, como por exemplo, a largura de um rio.

Referências

- ANDRADE, C. C. de. *O ensino da Matemática para o cotidiano*. Monografia (TCC) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2013. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20861/2/MD_EDUMTE_2014_2_17.pdf>. Acesso em: 10.04.2023. Citado na página 19.
- AVALIARTRI. *Resultados da primeira edição de 2022 da avaliação diagnóstica Avaliar é Tri RS*. 2022. Disponível em: <<https://educacao.rs.gov.br/seduc-divulga-os-resultados-da-1-edicao-de-2022-da-avaliacao-diagnostica-avaliar-e-tri-rs>>. Citado na página 17.
- BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. Porto Alegre: Penso, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 30.
- BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUZA, P. R. C. de. *Prisma matemática: geometria e trigonometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias - primeira edição*. [S.l.]: Editora FTD, 2020. Citado 10 vezes nas páginas 32, 38, 39, 40, 41, 50, 51, 52, 53 e 54.
- BOYER, C. B. *História da Matemática, 2 ed., tradução Helza Gomide*. São Paulo: Edgar Blucher, 2010. Citado na página 23.
- BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2008. 135 p. Citado na página 18.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. 600 p. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 25 e 26.
- CRISTINA, M. *Abordando a Matemática*. 2014. Disponível em: <<https://abordandoamatematica.wordpress.com/2015/09/17/a-matematica-na-engenharia/>>. Acesso em: 17.02.2023. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- CROOKS, R. *Como usar a trigonometria na arquitetura*. eHow Brasil, 2021. Disponível em: <https://www.ehow.com.br/utilizar-trigonometria-arquitetura-como_23943/>. Acesso em: 20.03.2023. Citado na página 24.
- D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática. 23 ed.* Campinas, SP: Papirus, 2012. Citado na página 27.
- DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicações - segunda edição - volume 1 - Obra em 3 volumes*. São Paulo: Ática, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 32, 46 e 68.
- DOLAN, E. L.; COLLINS, J. P. We must teach more effectively: here are four ways to get started. *Molecular Biology of the Cell*, n. v.26, 2015. Citado na página 27.
- DUCK, S. A crise no ensino de Matemática no Brasil. *Revista do Professor de Matemática*, II, n. 4, 2004. Citado na página 31.

- FACCHINI, W. *Matemática volume único*. São Paulo: Editora Saraiva, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 32, 48 e 49.
- FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987. Citado na página 29.
- FREIRE, P.; FAUNDEZ, A. *Por uma pedagogia da pergunta*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985. Citado na página 29.
- GADOTTI, M. *Boniteza de um sonho: ensinar-e-aprender com sentido*. Novo Hamburgo: Feevale, 2003. Citado na página 28.
- GADOTTI, M. Educar é impregnar de sentido a vida. *Revista do Professor*, n. 2, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 28.
- KOCHHANN, A.; MORAES, Â. C. de. *Aprendizagem significativa na perspectiva de David Ausubel*. Anápolis: UEG, 2014. Citado na página 28.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado na página 32.
- MORAN, J. M. Mudar a forma de ensinar e aprender com tecnologias. *Interações*, São Paulo, Brasil, 2000. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35450905>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- MOREIRA, M. A. *Aprendizagem significativa*. Brasília: UNB, 1999. Citado na página 27.
- MOURA, A. Geração móvel: um ambiente de aprendizagem suportado por tecnologias móveis para a “geração polegar”. *Universidade do Minho*, Portugal, p. 49 – 77, 2009. Citado na página 25.
- NETO, A. C. M. *Geometria - Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 12 vezes nas páginas 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44 e 45.
- PAIVA, M. *Matemática Paiva - terceira edição*. São Paulo: Editora Moderna, 2015. Citado na página 32.
- PONTE, J. P. da; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- SAERS. *Avaliação sobre rendimento escolar dos estudantes gaúchos*. 2019. Disponível em: <<https://educacao.rs.gov.br/divulgada-avaliacao-sobre-rendimento-escolar-dos-estudantes-gauchos>>. Citado na página 16.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, n. 14, p. 66–91, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 92.
- SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática Ensino Médio 8ª edição*. São Paulo: Editora Saraiva, 2013. Citado na página 32.
- SUL, R. G. do. *Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias*. Porto Alegre, 2009. 314 p. Citado 4 vezes nas páginas 22, 26, 28 e 105.

Anexos

ANEXO A – Tabela Trigonométrica

Tabela de razões trigonométricas							
Ângulo	sen	cos	tan	Ângulo	sen	cos	tan
1°	0,017	1,000	0,017	46°	0,719	0,695	1,036
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,999	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,998	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,332
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,998	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,999	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	1,000	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000				

ANEXO B – Figuras de teodolitos e definição apresentada aos alunos

TEODOLITO

É um instrumento óptico muito utilizado por engenheiros e topógrafos e utilizado para medir ângulos, tanto horizontais como verticais, em medidas diretas e indiretas de distâncias. O corpo do teodolito gira em torno de dois eixos independentes, sendo um fixo e outro móvel (eixo duplo).



À esquerda, um modelo de teodolito do século XIX (Acervo MAST) e à direita, um teodolito eletrônico (da marca ZEISS)

MAST: Museu de astronomia e ciências afins

ANEXO C – Imagem de um teodolito eletrônico



Fonte: <https://loja.cpetopografia.com.br/teodolitos/novos/>

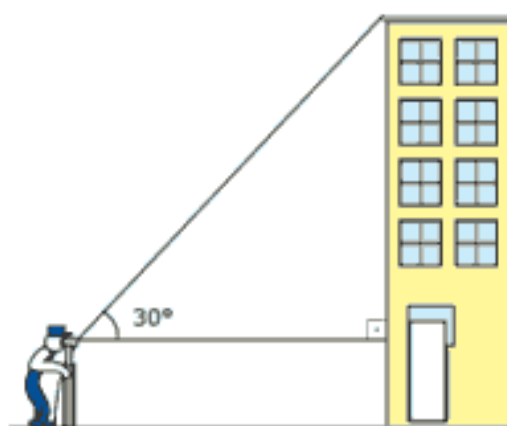
ANEXO D – Imagem de um engenheiro usando um teodolito sobre um tripé



Fonte: <https://www.gettyimages.pt/fotos/agrimensor>

ANEXO E – Simulação da situação para o cálculo da altura do prédio

Simulação da situação para o cálculo da medida da altura do prédio.



Fonte: <https://www.brainly.com.br>

Apêndices

APÊNDICE A – Construção do teodolito

CONSTRUÇÃO DE UM TEODOLITO (aparelho usado para medir ângulos)

Material

- Xerox de $\frac{1}{4}$ de um transferidor
- Um canudo ou caneta esferográfica sem a carga
- Uma tachinha
- Um pedaço de barbante
- Um peso (cadeado, chumbada de pesca)
- Um pedaço de papelão (25cmx25cm aproximadamente)
- Cola e fita adesiva

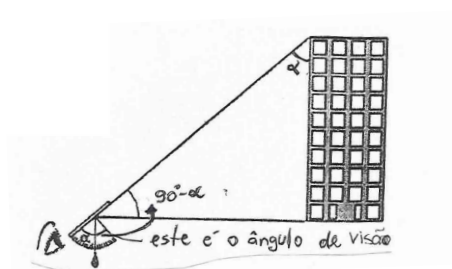
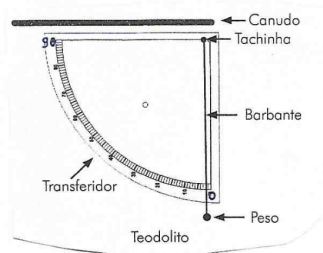
Como montar: Recortar o xerox do transferidor e colar no papelão. Com a fita adesiva fixar o canudo em uma das extremidades do transferidor (sobre a linha do 90°) e, com a tachinha, no vértice do ângulo reto, fixar o cordão com o peso amarrado em uma de suas pontas. (Conforme esquema abaixo)

TAREFA: Fazer a medição da altura do prédio da escola usando o teodolito.

Para isso, seguir os passos abaixo:

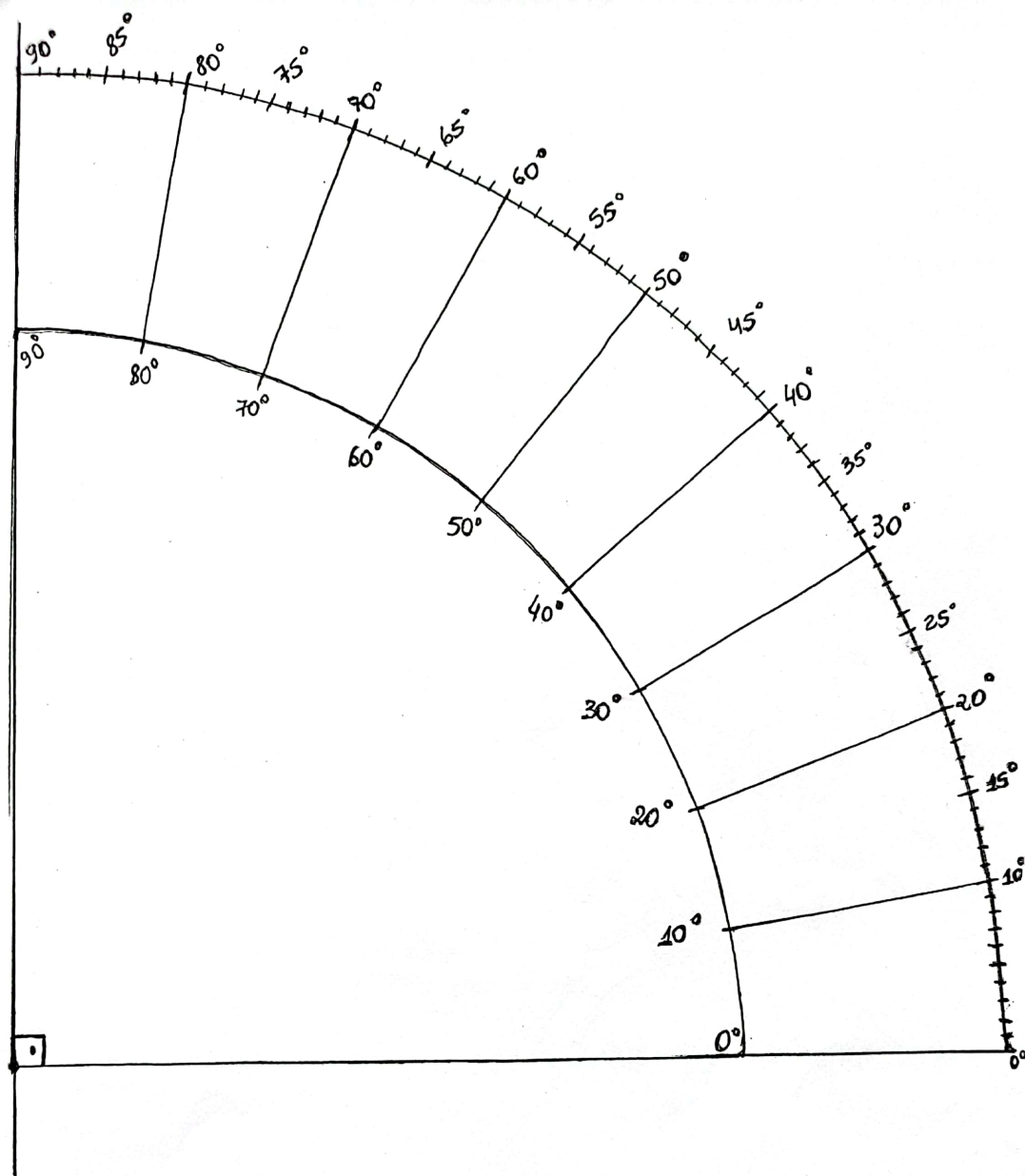
- Fazer a medição até a altura dos olhos da pessoa que fará a visualização do ângulo.
- Usando o aparelho construído, medir o ângulo que a pessoa visualiza a parte mais alta do prédio.
- Medir a distância da pessoa ao prédio.
- Fazer o cálculo da altura do prédio com o auxílio da tabela trigonométrica com os valores da tangente dos ângulos.
- Fazer um relatório no qual deve constar um desenho esquemático da situação, os dados obtidos, os cálculos e o resultado

Montagem conforme o esquema:



Extraído e adaptado de *Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias/ Secretaria de Estado da Educação. Porto Alegre: SE/DP, 2009. (pág. 234)*

APÊNDICE B – Transferidor



Fonte: Própria autora

APÊNDICE C – Pesquisa com a professora da escola B

Questionário de participação de pesquisa sobre a oficina com o teodolito caseiro

Conto com sua colaboração para responder algumas perguntas sobre a oficina com o teodolito realizada nas suas turmas.

Desde já agradeço a colaboração.

Obrigada.

Prof.: Mara Lúcia Radtke Kruschardt

1. Como você avalia a participação dos seus alunos na atividade dos teodolitos para o cálculo da altura da escola?

2. Você considera que essa atividade possa contribuir para o aprendizado das razões trigonométricas pelos seus alunos?

3. Você considera importante esse tipo de atividade?

4. Você tem alguma sugestão de melhoria para essa atividade aplicada às turmas?

5. Muito obrigada pela disponibilidade e colaboração em responder este questionário, será muito importante para o enriquecimento do trabalho.

APÊNDICE D – Pesquisa com os alunos da escola A

Questionário sobre a atividade do teodolito

Solicito sua colaboração, respondendo a este questionário sobre a atividade do teodolito realizada nas aulas de Matemática.

Desde já, agradeço a colaboração.

Prof.: Mara Lúcia Radtke Kruschardt

1) O que você achou da atividade do teodolito realizada durante as aulas de Matemática?

2) Você considera importante esse tipo de atividade nas aulas?

3) Você teve dificuldade para realizar o cálculo da altura da escola?

4) Qual dos dois teodolitos você gostou mais? O caseiro (feito com papelão) ou o virtual (usando o aplicativo medidor de ângulo)? Justifique.

5) Você teve dificuldade para realizar o cálculo da altura da torre?

Muito obrigada pela sua participação, tanto nas atividades, quanto na resposta a esse formulário., vai colaborar fortemente para o enriquecimento do meu trabalho S2

APÊNDICE E – Termo de consentimento escola A



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA - IMEF
Av. Itália, km 8, Bairro Carreiros, Rio Grande - RS, CEP: 96.203-900 - Fone (53)3293.5411/ (53)3293.5109
Homepage: <http://www.imef.furg.br>



AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E OBRAS ESCOLARES

Eu, _____, portador do
CPF número _____, responsável pelo aluno(a)
_____, da turma _____,
matriculado(a) do segundo ano do ____ (Nome da escola)____, autorizo a professora de
Matemática Mara Lúcia Radtke Kruschardt, CPF número xxx.xxx.xxx-xx, professora efetiva
nesta escola (matrícula estadual - xxxxxxx) e também aluna do curso de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat - FURG), a utilizar, publicar e
reproduzir as imagens, obras e produções escolares aplicadas a estes alunos relacionadas
ao contexto de atividades didáticas de experimentação realizadas durante as aulas, sob
autorização da direção da escola, exclusivamente, para divulgar os resultados em sua
pesquisa para o referido curso.

Pelotas, ____ de novembro de 2022.

Assinatura do responsável

APÊNDICE F – Termo de consentimento escola B



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA - IMEF
Av. Itália, km 8, Bairro Carreiros, Rio Grande - RS, CEP: 96.203-900 - Fone (53)3293.5411/ (53)3293.5109
Homepage: <http://www.imef.furg.br>



AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E OBRAS ESCOLARES

Eu, _____, portador do
CPF número _____, responsável pelo aluno(a)
_____, da turma _____,
matriculado(a) na _____ (nome da escola) _____, autorizo a
professora de Matemática Mara Lúcia Radtke Kruschardt, CPF número xxx xxx xxx-xx,
professora da rede estadual (matrícula - xxxxxxx) também aluna do curso de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat - FURG), a utilizar, publicar e
reproduzir as imagens, obras e produções escolares aplicadas a estes alunos através de
uma oficina, por dois períodos de aula do mês de dezembro de 2022, relacionadas às
atividades didáticas de conteúdos Matemáticos, acompanhados da professora titular das
turmas, (Nome da professora), sob autorização da direção da escola, exclusivamente, para
divulgar os resultados em sua pesquisa para o referido curso.

Pelotas, ____ de novembro de 2022.

Assinatura do responsável