

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



**PROFMAT**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PRÉ-CÁLCULO E MATERIAL DIGITAL APLICADO NO  
CONTEÚDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS.

MAURO JÚNIO PRADO

Uberaba - Minas Gerais

JUNHO DE 2023

# PRÉ-CÁLCULO E MATERIAL DIGITAL APLICADO NO CONTEÚDO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS.

MAURO JÚNIO PRADO

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni.

**Coorientador:** Prof. Dr. Airton Monte Serrat Borin Júnior.

Uberaba - Minas Gerais

Junho de 2023

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do  
Triângulo Mineiro**

P918p Prado, Mauro Júnio  
Pré-cálculo e material digital aplicado no conteúdo de funções  
exponenciais / Mauro Júnio Prado. -- 2023.  
69 f. : graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba,  
MG, 2023

Orientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni

Coorientador: Prof. Dr. Airton Monte Serrat Borin Júnio

1. Pré-cálculo. 2. Ementas. 3. Material didático. 4. Livros didá-  
ticos digitais. I. Ottoboni, Rafael Rodrigo. II. Universidade Federal  
do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 517.2/.3(07):004.915

**MAURO JÚNIO PRADO**

**PRÉ-CÁLCULO E MATERIAL DIGITAL APLICADO NO CONTEÚDO DE FUNÇÕES  
EXPONENCIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 14 de junho de 2023

**Banca Examinadora:**

Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni – Orientador  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Osmar Aléssio  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Me. José Henrique Bizinoto  
Instituto Federal do Triângulo Mineiro





**Magistério Superior**, em 19/06/2023, às 11:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 165, de 16 de junho de 2023](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **JOSÉ HENRIQUE BIZINOTO, Usuário Externo**, em 19/06/2023, às 12:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 165, de 16 de junho de 2023](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **OSMAR ALESSIO, Professor do Magistério Superior**, em 19/06/2023, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 165, de 16 de junho de 2023](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1022347** e o código CRC **1390386B**.

---

*Dedico este trabalho a minha mãe, Neide Freitas Meireles, por ser um exemplo de vida que me norteia, por sempre me incentivar a estudar e a correr atrás dos meus sonhos.*

# Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram e torceram para dar tudo certo durante minha jornada no mestrado.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni, por sempre estar disponível para me ajudar, pela paciência que teve comigo, pela educação, pelos direcionamentos precisos que me foram passados e por ter me deixado a seguinte mensagem através do seu modo de ser: não importa onde você esta, seja sempre humilde e educado.

Agradeço ao meu coorientador, Dr. Airton Monte Serrat Borin Júnior, pela disposição, boa vontade, pelas ótimas ideias e direcionamentos que me deu.

Agradeço a minha companheira, Lorena Felix, por sempre me apoiar, por me incentivar, por ter paciência e estar ao meu lado de forma incondicional durante minha caminhada no mestrado.

Agradeço a minha amiga, Daniela de Faria Prado, por sempre me incentivar, por torcer por mim e por ter me hospedado em sua casa no dia do exame nacional de acesso.

Agradeço as minhas irmãs, Ana Gabriela Meireles Leão, Maira Meireles Prado e Nayara Luiza Prado por me incentivarem, por torcerem por mim e me apoiarem sempre que precisei.

Fica aqui meu muito obrigado a todos que me ajudaram neste árduo caminho que passei durante o mestrado.

# Resumo

Os objetivos deste trabalho são verificar os fatores que levaram ao surgimento da disciplina de pré-cálculo, definir uma ementa para a mesma, verificar os tipos de materiais didáticos que estão disponíveis e suas características e produzir um capítulo de um livro digital considerando a ementa definida para pré-cálculo. Este trabalho inicia pela história do pré-cálculo até chegar a uma ementa ideal para ele, levanta a questão de vivermos em um mundo tecnológico propondo assim um capítulo de um livro digital dinâmico, que seja mais condizente com o universo dos estudantes e versando sobre um dos tópicos definido na ementa desta disciplina.

**Palavras-chaves:** pré-cálculo; ementa; materiais didáticos; livro digital.



# Abstract

The aim of this work is to examine the factors that led to the emergence of the precalculus discipline, define a syllabus for it, identify the types of available teaching materials and their characteristics, and produce a chapter of a digital book based on the defined precalculus syllabus. This work explores the history of precalculus to arrive at an ideal syllabus, and raises the question of living in a technological world by proposing a dynamic digital book chapter that is more relevant to students and covers one of the topics defined in the syllabus of this discipline.

**Keywords:** precalculus; syllabus; teaching materials; digital book.

# Lista de Figuras

4.1	Gráfico $f(x) = 3^x$ . . . . .	36
4.2	Gráfico $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ . . . . .	37
4.3	Gráfico $f(x) = (\frac{1}{8})^x$ . . . . .	39
4.4	Gráfico do exercício 6.1 . . . . .	42
4.5	Função crescente . . . . .	45
4.6	Função decrescente . . . . .	45
4.7	Gráfico do exercício 4 letra <b>a.</b> . . . . .	50
4.8	Gráfico do exercício 4 letra <b>b.</b> . . . . .	50
4.9	Gráfico do exercício 4.1 . . . . .	51

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 Pré-cálculo</b>	<b>3</b>
<b>2 A ementa</b>	<b>7</b>
<b>3 Materias Didáticos</b>	<b>20</b>
3.1 Materias didáticos e sua importância . . . . .	20
3.2 Materias digitais . . . . .	23
<b>4 O material digital</b>	<b>27</b>
4.1 Justificativa . . . . .	27
4.2 Material digital . . . . .	28
4.3 Considerações do Capítulo . . . . .	53
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>60</b>

# INTRODUÇÃO

Este trabalho em um primeiro momento irá abordar alguns fatores históricos que motivaram o surgimento da disciplina de pré-cálculo, bem como fazer um levantamento dos itens que motivaram isso, faremos um levantamento dos itens que compõem a ementa desta disciplina e posteriormente uma conclusão sobre isso.

Em um segundo momento serão abordados os temas materiais didáticos e materiais digitais, com objetivo de termos as definições dos temas tratados, aprofundar o conhecimento nos diversos tipos de materiais didáticos existentes para posteriormente propormos um capítulo de um livro digital que tenha como tema um dos conteúdos da ementa de pré-cálculo.

Esta dissertação se justifica devido à grande relevância de pré-cálculo no âmbito acadêmico nacional, então entendermos os motivos que fizeram esta disciplina surgir, chegarmos a uma ementa ideal para ela e propormos um capítulo de um livro digital que se comunique melhor com os estudantes será de grande importância para todos os docentes e estudantes que trabalham com esta unidade curricular.

No primeiro capítulo será feito um breve levantamento do surgimento da disciplina de pré-cálculo assim como motivações/necessidades que levaram a isso, objetivos que eram esperados com a implementação desta unidade curricular, as formas de oferecimento desta matéria nas universidades e tivemos como base as referências bibliográficas [1, 18, 29, 5].

No segundo capítulo será pesquisado a ementa de pré-cálculo no site de algumas universidades federais de acordo com os critérios que serão estabelecidos, sendo a referência bibliográfica desta parte [23, 26, 24, 15, 17, 22, 6, 39, 38, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37], posteriormente serão analisados alguns livros de pré-cálculo sendo a referência bibliográfica desta parte [16, 27, 19, 11, 14], com o objetivo de cruzar as informações entre o que as universidades consideram como pré-cálculo e o que os livros trazem para assim podermos definir uma ementa ideal para esta disciplina.

Já no terceiro capítulo inicialmente será definido o que é material didático, os tipos de materiais didáticos existentes, suas funções no processo de ensino-aprendizagem sendo a referência bibliográfica desta parte [12, 7, 13, 9], por fim, definiremos o que é material digital, como surgiram, suas características, seus benefícios, o que deve ser levado em conta na criação deles, sendo a referência bibliográfica desta parte [2, 20, 10, 21, 3, 4, 28], para assim podermos propor um capítulo de um livro digital que conste na ementa de pré-cálculo definida no capítulo dois.

O quarto capítulo que é a parte principal deste trabalho será dedicado a criar um capítulo de um livro digital tendo como base um dos itens da emenda de pré-cálculo definido no capítulo dois, considerando os conceitos e diretrizes do capítulo três, um material que seja de fácil manuseio, linguagem acessível aos seus usuários, moderno e dinâmico, sendo a referência bibliográfica desta parte [8, 25].

Assim esperamos conseguir um bom entendimento dos motivos que fizeram o pré-cálculo surgir, chegarmos a uma ementa ideal para este conteúdo e propor um capítulo de um livro didático digital um pouco mais moderno comparando com os que estão disponíveis.

# 1 Pré-cálculo

Este capítulo teve como base os trabalhos dos autores Silva, Costa e Rocha referência [1]; Andrade, Esquincalha e Oliveira referência [18]; Michelon referência [29].

Considerando Nasser e Nascimento (1997), referência [5], os índices de reprovação registrados em cálculo I em geral são elevados. Foram criadas turmas de pré-cálculo em diversas modalidades para amenizar este fato, o que pode ser percebido é que faltava um elo entre o ensino médio e o ensino superior, talvez pela linguagem mais formal no ensino superior atrelado a uma defasagem em conteúdos de matemática básica.

Com intuito de diminuir o índice de reprovação em cálculo observamos nos sites das universidades abaixo que foram criadas atividades extras, a Universidade Federal do Rio Grande do Sul fez um curso de extensão de pré-cálculo para seus alunos ingressantes que tem cálculo no primeiro semestre, o Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da UFMG oferta aos seus alunos o pré-cálculo semi-presencial através de um programa de educação tutorial (PET) o qual fez após observar que estava tendo um aumento nas reprovações de seus estudantes nas disciplinas de matemática, Universidade Federal de Sergipe (UFS) ofertou um curso de pré-cálculo que foi lecionado em outubro de 2018 destinado a seus calouros, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) oferta a disciplina de pré-cálculo criada no intuito de sanar deficiências de matemática básica e nela é possível fazer um exame de proficiência para ser dispensado desta matéria.

De acordo com o que observamos em matérias nos sites das universidades citadas no parágrafo anterior à disciplina de pré-cálculo surgiu para diminuir as defasagens que os estudantes ingressantes em cursos superiores possuem com relação à matemática básica e também reduzir as reprovações nas disciplinas de matemática o que leva a uma tentativa de se ter uma transição mais suave entre o ensino médio e o superior.

Como observaremos no segundo capítulo, algumas universidades ofertam pré-cálculo em suas grades curriculares normais, outras como projetos de extensão, outras como algo

facultativo ou não dependendo de um exame de proficiência, algumas não ofertam nada com relação a isso, essas provavelmente devem ter alunos ingressantes com um nível em matemática um pouco mais desenvolvido que as demais.

Como será mostrado no segundo capítulo as ementas das disciplinas de pré-cálculo e introdução ao cálculo fazem na maioria das vezes um apanhado geral da matemática básica, não se restringem apenas a tópicos que são realmente pré-requisitos ao cálculo, assim nos passa uma mensagem subliminar que a matemática da educação básica no geral não esta sendo trabalhada de forma que consiga atingir um resultado satisfatório.

Deixamos claro que o objetivo aqui nesta dissertação é verificar quais conteúdos são trabalhados nas disciplinas de pré-cálculo, o que os livros didáticos trazem como matérias abordadas, propor uma ementa “ideal” e apresentar uma amostra de um modelo de material digital que poderá ser utilizado para escrever um livro de pré-cálculo ou qualquer livro matemático em um formato um pouco mais condizente com o nosso desenvolvimento tecnológico.

A matemática é uma ciência exata que apresenta rigor/rigidez em seus processos, também é uma forma de comunicação universal que por sua vez é muito diferente da linguagem que usamos diariamente, daí vem uma parte das dificuldades das pessoas lidarem com a matemática que é entenderem que se trata de uma forma de comunicação própria com seus padrões e rigidez que por sua vez diverge bastante da forma com que as pessoas se comunicam, então tornar ela acessível aos estudantes no ensino superior se passa por uma boa aproximação deles a linguagem matemática na educação básica dando continuidade na graduação.

Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) após constatarmos que os alunos não dominavam alguns conteúdos da educação básica foi implantada a primeira turma de pré-cálculo no primeiro semestre de 2002, esta disciplina ocorreu juntamente com as demais daquele semestre o que levou a uma evasão grande e posteriormente ofereceram o pré-cálculo em período de férias para alunos que iriam ter cálculo no primeiro período.

Sobre os conteúdos lecionados em pré-cálculo nas diversas universidades e livros que pesquisamos e colocamos no capítulo dois deste trabalho em todos tem em comum funções e também parece ser lógico que se tenha um pouco de álgebra/conjuntos numéricos, dada a dificuldade que os alunos tem com operações básicas e não se pode esquecer de ter uma linguagem acessível aos participantes desta disciplina que vá elevando o grau aos poucos.

O que tentaremos fazer no capítulo seguinte é definir uma ementa de pré-cálculo propriamente dita e não uma ementa de matemática básica para cursos superiores que revê praticamente tudo da educação básica ou seja abordaremos tópicos que realmente são essenciais para cálculo e alguns temas básicos que podem fazer falta no desenvolvimento da disciplina, mas sem exageros e sem querer englobar tudo.

Todo o processo descrito até aqui neste capítulo mostra que as universidades buscaram entender o processo de transição do ensino médio para o superior tentando conciliar as demandas dos alunos com a dos professores com o objetivo de melhorar o desempenho dos estudantes com relação à matemática/cálculo do ensino superior, ou seja, às instituições de ensino superior perceberam que houve um aumento nas reprovações das disciplinas de matemática e buscaram saídas como projetos de extensão, matemática básica, cálculo zero e pré-cálculo para amenizar este fato.

A maioria das pesquisas sobre transição do ensino médio para o superior na educação matemática abordam os temas dificuldades em cálculo diferencial e integral e no seu ensino, aspectos contextuais e psicológicos na chegada à universidade, metodologias de ensino em cursos de pré-cálculo.

O grande índice de reprovações em cálculo, altas taxas de evasão significam desperdício de recursos financeiros para as instituições de ensino superior e por isso foram feitas diversas pesquisas sobre o tema tendo como principais eixos os citados no parágrafo anterior e como objetivo minimizar estes problemas, além disso, também podemos observar que os problemas relacionados à aprendizagem matemática estão presentes em todos os níveis de educação.

Para superar os obstáculos que a disciplina de cálculo impõe aos alunos, uma saída foi introduzir o pré-cálculo, mas deve se observar que o docente deve adotar uma metodologia de ensino que seja acessível aos estudantes e estes por sua vez devem compreender a importância desta disciplina, se comprometerem com os estudos. Ferramentas digitais como o GeoGebra podem ajudar muito no processo de ensino-aprendizagem, pois trabalham funções de uma forma dinâmica e ajudam os estudantes a observarem o comportamento das mesmas quando são feitas variações nos coeficientes.

A utilização de ferramentas tecnológicas/digitais auxiliam o aluno no processo de aprendizagem, torna os estudos mais condizentes com mundo dos docentes e está presente na competência cinco da Base Nacional Comum Curricular – BNCC que diz que: o estu-



dante deve compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Ressaltamos que para o processo de ensino-aprendizagem no Brasil ser efetivo, não depende apenas dos professores, das suas metodologias, de infraestruturas, depende também de políticas públicas que tornem isso viável.

No segundo capítulo iremos ver como se dispõe as disciplinas as disciplinas de pré-cálculo, observar o que os livros didáticos oferecem e através destas informações fazer uma ementa para esta disciplina, sem deixar de observar que os objetivos dela são reduzir as defasagens do ensino básico, amenizar a transição para o ensino superior, além disso, temos que ficar atentos ao fato que geralmente este conteúdo varia de uma carga horária de 60 a 90 horas, ou seja, a extensão da ementa e o quanto será aprofundado em cada conteúdo tem que ser condizente a essa carga horária.

## 2 A ementa

Com intuito de criar uma ementa de pré-cálculo assertiva e que atenda o máximo de instituições de ensino possível e o maior número de cursos de graduação vamos primeiramente escolher algumas universidades federais renomadas, depois extrair a ementa de pré-cálculo de alguns dos seus cursos, posteriormente vamos ver os conteúdos abordados em alguns dos principais livros deste tema vendidos no Brasil.

Após a coleta de dados explicada acima será feita uma análise entre o que é pedido nas ementas e o que é ofertado pelos livros e assim vamos gerar uma ementa mais direcionada para as necessidades das universidades federais, esta análise será feita por quatro docentes da rede federal de ensino os quais serão apresentados no decorrer deste texto, esta equipe técnica pretende escrever um livro de pré-cálculo com base nas informações e resultados desta dissertação.

Sabendo que cursos de graduação como os de: Engenharias, Química, Física, Matemática, Biologia, Computação, Geologia, Zootecnia, Agronomia, Administração, Ciências Contábeis, Ciências Econômicas dentre inúmeros outros, geralmente possuem uma disciplina preparatória para cálculo para não ampliar demais nossas pesquisas vamos focar nas análises das ementas de alguns cursos de engenharia, pois assim conseguimos atender uma demanda maior que são dos cursos de engenharias e ao mesmo tempo uma ementa voltada para estes cursos também servirá bem para os demais.

A escolha das universidades federais as quais farão parte da pesquisa sobre as ementas teve como base sua importância no cenário nacional e pesquisas feitas na internet.

Segundo matéria publicada pela Forbes às cinco melhores universidades brasileiras em 2022 são: Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e Universidade Federal de Sergipe (UFS).

As universidades mencionadas no parágrafo anterior são as instituições brasileiras

mais bem colocadas no ranking anual de melhores universidades do mundo da revista britânica especializada em educação, Times Higher Education, o qual foi utilizado pela matéria da Forbes, sendo que nessa pesquisa da revista britânica constam 70 instituições brasileiras sendo a melhor colocada a USP na posição 201- 250 dentre o total 1662 distribuídas em 99 países, sua base foram as áreas de pesquisa, ensino, transferência de conhecimento e reconhecimento internacional, ressaltamos ainda que a líder deste ranking é a Universidade de Oxford da Inglaterra.

O RUF 2019 que se trata do ranking universitário da Folha de São Paulo, possuem 197 instituições de ensino brasileiras dentre elas públicas e particulares, tem como base os temas pesquisa, ensino, mercado, internacionalização e inovação, dentre as diversas fontes de dados utilizadas no RUF estão presentes o Inep – MEC (Enade e censo da educação superior), pesquisas nacionais de opinião pública feitas pelo Datafolha, Inpi (Instituto Nacional da Propriedade Industrial), SciELO (biblioteca digital). As cinco melhores instituições de ensino segundo RUF realizado em 2019 são Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

O IGC é o índice geral de cursos, divulgado anualmente pelo Inep/MEC – Ministério da Educação – geralmente publicado após o Enade é em síntese uma média ponderada das notas dos cursos de graduação e pós-graduação das instituições de ensino levando em conta o conceito preliminar do curso, distribuição dos alunos entre cursos de graduação ou pós-graduação, nota no ENADE e conceitos de avaliação dos programas de pós-graduação stricto sensu apresentou em 2021 a Universidade Federal do Sul da Bahia (UFSB), Universidade Federal de Viçosa (UFV), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal de Lavras (UFLA) e Universidade Federal do Paraná (UFPR) como as melhores Universidades do Brasil.

Nas pesquisas feitas observamos que dentre as cinco universidades consideradas como as melhores do Brasil elas sempre são instituições públicas de ensino, também foram encontradas várias matérias de fontes diversas tendo como base o ranking da revista britânica Times Higher Education e assim escolhemos às instituições Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e Univer-

sidade Federal de Sergipe (UFS) para fazerem parte da nossa pesquisa sobre as ementas de pré-cálculo das engenharias, serão escolhidas algumas ementas de cada universidade e após análise delas feita juntamente com uma comparação do que é ofertado nos livros definiremos uma ementa geral segundo as necessidades das instituições envolvidas.

Em pesquisa no site da USP, a melhor colocada do ranking, foram encontrados 21 cursos de engenharias em nível de graduação e vários outros cursos que também possuem a disciplina de cálculo, mas o que chamou atenção foi que em nenhum curso temos a disciplina de pré-cálculo que é o objeto dessa pesquisa o que nos leva a conclusão que esta disciplina deve ser ofertada de acordo com as necessidades dos alunos de cada instituição, como a USP é uma universidade de alto padrão e com muita concorrência para ingressar nela então provavelmente os seus alunos já possuem um desenvolvimento em matemática que dispensa a disciplina de pré-cálculo.

Tendo em vista os resultados da pesquisa feito no site da USP decidimos não mais focar só nos cursos de engenharia, iremos continuar seguindo ranking da revista britânica Times Higher Education em ordem decrescente até termos cinco instituições de ensino que possuem pré-cálculo, contudo pensamos que pode acontecer de termos mais instituições que não ofertam a disciplina que desejamos principalmente naquelas que se tem maior concorrência para ingresso, como aconteceu com a USP.

Na Unicamp e na UFMG não encontramos pré-cálculo como disciplina obrigatória nas grades curriculares dos cursos que elas oferecem, mas o Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da UFMG viu a necessidade de ofertar aos seus alunos um programa de educação tutorial (PET), onde após observar que estava tendo um aumento nas reprovações de seus alunos nas disciplinas de matemática ofertou o pré-cálculo semi-presencial e tendo o seguinte conteúdo programático:

Álgebra : conjuntos numéricos, relações de ordem, valor absoluto, potenciação e logarítmico.

Equações: equações de primeiro grau, equações de segundo grau, equações modulares, equações exponenciais e equações logarítmicas.

Inequações: inequações, inequações modulares, inequações exponenciais, inequações logarítmicas.

Geometria: trigonometria do triângulo retângulo, equações da reta e da circunferência.

Funções: operações com funções, introdução a funções, função composta e inversa, função exponencial, função logarítmica, função trigonométrica.

Este curso foi ofertado pelo departamento de Matemática Icx da UFMG aos calouros dos curso de Matemática, Química e Física.

Em pesquisa no site da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), nossa quarta colocada, vimos que o departamento de Matemática pura e Aplicada do Instituto de Matemática deles oferece um curso de pré-cálculo destinado a calouros de todos os cursos que possuem alguma disciplina de cálculo no primeiro semestre letivo, este curso já foi ofertado por trinta vezes e tem como objetivo proporcionar uma transição mais suave da matemática ensino médio para a matemática do ensino superior, tendo o seguinte conteúdo programático:

Funções reais: números reais, desigualdades, valor absoluto.

Geometria Analítica: distância no plano, retas e círculos no plano.

Polinômios: a família  $x^n$ , translações, reflexões, alongamentos.

Equações polinomiais: algoritmo da divisão, raízes racionais, frações parciais.

Trigonometria: funções trigonométricas, lei dos senos e cossenos.

Trigonometria: radianos, gráficos da função seno e relacionadas.

Ainda em pesquisa no site da UFRGS encontramos um livro digital colaborativo de Pré-Cálculo que pode ser acessado [clikando aqui](#), os organizadores são da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), este material ainda esta em construção, possui alguns hiperlinks que te redirecionam dentro do próprio pdf, apresenta uma linguagem muito formal, também falta interatividade com os estudantes, animação, áudios e vídeos, penso que os livros digitais tem que atender os novos conceitos de tecnologia e acompanhar o desenvolvimento da sociedade o qual ele esta inserido.

Em pesquisa no site da Universidade Federal de Sergipe (UFS), nossa quinta colocada, encontramos registro de um curso de pré-cálculo que foi lecionado em outubro de 2018 destinado a seus calouros, porem não conseguimos encontrar a ementa deste curso, ainda em pesquisa no site da UFS encontramos um curso de introdução ao cálculo ofertado no curso de licenciatura em física e no curso de licenciatura em matemática com a seguinte ementa:

Números reais e a reta numérica, equações e inequações polinomiais de 1º e 2º

grau. O conceito de função, funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas, funções monótonas, composição de funções, inversibilidade de uma função real de uma variável real, restrição de funções. Funções polinomiais, funções exponenciais e logarítmicas, funções trigonométricas. Gráficos.

A sexta colocada do ranking da revista britânica Times Higher Education é a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), encontramos em pesquisas no seu site a disciplina de pré-cálculo (MTM3100), criada no intuito de sanar deficiências de matemática básica, esta disciplina faz parte dos seguintes cursos: Física - Bacharelado, Química - Bacharelado, Ciências Biológicas, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Química - Licenciatura, Ciências da Computação, Engenharia Sanitária e Ambiental, Engenharia de Produção Civil, Engenharia de Produção Elétrica, Engenharia de Produção Mecânica, Engenharia de Alimentos, Engenharia Química, Engenharia de Controle e Automação, Física - Licenciatura (noturno), Meteorologia, Engenharia de Materiais, Engenharia de Aquicultura, Engenharia Eletrônica, Oceanografia, Geologia, Agronomia, Zootecnia, Ciência e Tecnologia de Alimentos, Administração, Ciências Contábeis, Ciências Econômicas, Administração (noturno), Ciências Contábeis (noturno) e Ciências Econômicas (noturno).

A MTM3100 possui a seguinte ementa:

Conjuntos e Aritmética Básica. Idéia intuitiva de conjunto como uma coleção de elementos. Descrição de um conjunto através da enumeração de seus elementos, ou pela especificação de uma propriedade, ou por diagramas de Venn. Subconjuntos; igualdade de conjuntos. Operações entre conjuntos: união, intersecção, complementar de um conjunto, produto cartesiano de conjuntos. Conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros, Racionais, Reais (introduzido pela sua representação decimal como dízima periódica ou não-periódica). Interpretação geométrica dos números reais como pontos de uma reta. Noção de módulo de um número real. Exposição dos axiomas de corpo ordenado dos números reais. Intervalo aberto, intervalo fechado e suas representações geométricas na reta real. Potenciação, radiciação e suas propriedades.

Cálculo com Expressões Algébricas. Produtos notáveis; binômio de Newton. Adição, subtração, multiplicação e divisão de expressões algébricas. Fatoração e simplificação de expressões algébricas; expressões algébricas envolvendo raízes. Polinômio do primeiro grau e análise do sinal do polinômio. Polinômio do segundo grau e análise do sinal do

polinômio. Algoritmo da divisão de dois polinômios.

Equações e Inequações. Resolução de equações envolvendo expressões algébricas. Resolução de equações envolvendo expressões algébricas com raízes. Resolução de equações envolvendo módulo de expressões algébricas. Inequações envolvendo expressões algébricas. Inequações envolvendo expressões algébricas com raízes. Inequações envolvendo módulo de expressões algébricas.

Funções. Definição de função, domínio, contradomínio, imagem, gráfico. Funções reais de valores reais. Exemplos: função afim, função quadrática, função definida por várias sentenças. Operações entre funções: adição, subtração, multiplicação, divisão, multiplicação por escalar e composição. Função par, função ímpar, função periódica, função crescente e função decrescente. Função injetora, sobrejetora e bijetora. Função inversa. Construção de gráficos a partir de operações realizadas sobre o gráfico de uma função. Função modular. Funções exponencial e logarítmica; propriedades, gráfico. Resolver equações envolvendo funções exponencial e logaritmo. Resolver inequações envolvendo funções exponencial e logaritmo. Demonstrar identidades envolvendo funções exponencial e logarítmica. Funções hiperbólicas; propriedades, gráfico. Funções trigonométricas e trigonométricas inversas; propriedades, gráfico. Resolver equações envolvendo funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Resolver inequações envolvendo funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Demonstrar identidades envolvendo funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas. Modelagem de situações usando funções.

Notamos que a disciplina de pré-cálculo da UFSC possui conteúdos matemáticos pertencentes ao ensino básico ou seja ensino fundamental e médio, ainda em buscas no site da UFSC observamos que dependendo do curso é possível ser dispensado desta disciplina, porem depende também de um exame de proficiência em pré-cálculo ou também é possível pedir dispensa dessa disciplina dependendo da nota em matemática no Enem, caso ela seja superior a 750 ou se a nota no vestibular da UFSC em matemática for superior a 6.

Tendo em vista uma maior diversidade e que já fomos até a sexta colocada do ranking que estamos usando como base resolvemos que a Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM) será a quinta universidade de onde extrairemos ementas de pré-cálculo, optamos por essa instituição mesmo ela não estando entre as próximas da lista da Times Higher Education para assim inserimos um pouco da realidade a qual estamos inseridos, uma vez que esta dissertação esta sendo produzida dentro de um programa de

pós-graduação da própria UFTM.

Em buscas no site da UFTM encontramos o pré-cálculo nos cursos de licenciatura em Física, Matemática, Química e Engenharia Ambiental com as ementas a seguir.

Ementa nos cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química: Conjuntos numéricos. Teoria dos conjuntos. Cálculo com Expressões Algébricas. Equações e Inequações. Relações e funções. Funções elementares, funções de primeiro e segundo graus, função potência, funções trigonométricas, função modular, funções exponenciais e logarítmicas. Funções compostas e inversas.

No curso de Engenharia Ambiental o pré-cálculo aparece com nome de Introdução à Matemática para Biocientistas, ressaltamos que esta disciplina é pré-requisito para cursarem cálculo I e tem a seguinte ementa: Números reais; Conjunto e Lógica de Símbolos; Relações e Funções; Função Potência e Funções Correlatas; Funções Periódicas; Funções Exponencial e Logarítmica.

Nosso próximo passo é encontrar alguns livros de pré-cálculo e verificar o que tem neles de conteúdo, acessando a biblioteca virtual da UFTM encontramos os livros que serão apresentados a seguir.

Analisaremos cinco livros de pré-cálculo dos seguintes autores: Fred Safier referência [16]; Adriana Miorelli Adami, Adalberto Ayjara Dornelles Filho e Magda Mantovani Lorandi referência [27]; André Machado Caldeira, Luiza Maria Oliveira da Silva, Maria Augusta Soares Machado e Valéria Zuma Medeiros referência [19]; Sheldon Axler referência [11]; Francisco Magalhães Gomes referência [14].

O primeiro livro é pré-cálculo, segunda edição da editora bookman, publicado em 2011, autor Fred Safier com os seguintes temas abordados: preliminares, polinômios, expoentes, expressões racionais e radicais, equações lineares e não lineares, valor absoluto em equações e inequações, geometria analítica, funções, funções lineares, transformações e gráficos, funções quadráticas, álgebra de funções, funções inversas, funções polinomiais, funções racionais, funções racionais, funções algébricas e variação, funções exponenciais, funções logarítmicas, equações exponenciais e logarítmicas, funções trigonométricas, gráficos de funções trigonométricas, ângulos.

O livro mencionado acima é uma versão digital, aborda uma gama de conteúdo grande, ele é todo em preto e branco, não possui animações nem vídeos, utiliza uma linguagem muito formal e temos algumas opções de criar anotações.



O segundo livro digital que faremos a análise é o pré-cálculo da editora bookman, publicado em 2015, dos autores Adriana Miorelli Adami, Adalberto Ayjara Dornelles Filho e Magda Mantovani Lorandi que possui os seguintes conteúdos abordados:

Matemática Básica: Conjuntos, desigualdades e intervalos, intervalos limitados e ilimitados de números reais, operações com frações (adição e subtração, multiplicação, divisão), potenciação, radiciação (simplificação e operações), simplificação de expressões algébricas fracionárias.

Função: Noção de função, função (domínio e imagem), representação de uma função (forma verbal, tabela de valores, fórmula e gráfico), teste da reta vertical, zeros e interceptos, sinal, (de)crescimento e simetria.

Função Afim e Função Linear: definições e principais características, a inclinação da reta, função linear crescente, decrescente e constante, a equação da reta, funções definidas por mais de uma sentença.

Limites e Função Potência: limites noção intuitiva (limites laterais e limites bilaterais, limites infinitos, limites no infinito, limites infinitos no infinito), continuidade, função potência, transformações na função potência.

Função Polinomial: definição e principais características (domínio, imagem e zeros), fatoração de polinômios (produtos notáveis), estudo de limites de funções polinomiais, gráficos.

Função Racional: definição e principais características (assíntotas verticais), estudo de limites no infinito de uma função racional (assíntotas horizontais).

Função Exponencial e Função Logarítmica: função exponencial, função exponencial de base natural, logaritmos e as funções logarítmicas (sistemas de logaritmos, mudança de base, propriedades dos logaritmos e definição de função logarítmica), composição de funções, funções inversas (existência de inversa e gráficos de funções inversas).

Trigonometria e Funções Trigonométricas: trigonometria (ângulo e suas unidades de medida, o triângulo retângulo, razões trigonométricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , identidades trigonométricas, ciclo trigonométrico, redução ao primeiro quadrante, ângulos de medidas opostas), funções trigonométricas, funções trigonométricas inversas.

O livro mencionado acima é uma versão digital, aborda uma gama de conteúdos extensa, ele é todo em preto e branco, tem uma aparência visual boa e bem organizada,

não possui animações nem vídeos, utiliza uma linguagem acessível aos estudantes e temos algumas opções de criar anotações.

Nosso terceiro livro digital analisado foi pré-cálculo da editora Cengage Learning, publicado em 2013 e seus autores são André Machado Caldeira, Luiza Maria Oliveira da Silva, Maria Augusta Soares Machado, Valéria Zuma Medeiros, este livro trabalha os seguintes conteúdos:

Conjunto, conjuntos numéricos, potenciação, relações, funções do primeiro grau, relações quadráticas, inequações do segundo grau, outras funções, trigonometria, aplicações, álgebra matricial, sistemas lineares.

Este terceiro livro aprofunda muito em cada tópico e por isso decidimos não detalhar cada item, podemos ver que dada a dificuldade de se entender o que realmente é básico para se fazer um curso de cálculo conciliando com as defasagens que os alunos apresentam os livros de pré-cálculo optam por colocar conteúdos demais e nossa intenção aqui é definir o que é realmente necessário saber bem para fazer um curso de cálculo, mas sem faltar e sem exceder em nada.

A análise deste terceiro livro digital é parecida com os demais, mas ele utiliza uma linguagem muito simbólica, apresenta uma disposição não boa dos seus elementos nas páginas, não tem interação e nem vídeos.

O pré-cálculo é uma disciplina para alunos que possuem defasagens da matemática básica e de alguns conteúdos específicos ligados ao cálculo, então é primordial definir bem o que devemos trabalhar nesta disciplina porque estaremos fazendo um “resgate matemático” desses alunos, tentando aproximar eles da matemática e completar a base necessária, tendo em vista tudo isso não pode ser um curso onde se vê coisas demais e de forma muito rápida, pelo contrario é um curso para se trabalhar muito em sala de aula e fora dela, justamente por isso não devemos exagerar na quantidade de conteúdo e temos que ter cuidado para garantir o real aprendizado/reaprendizado dos temas abordados.

O quarto livro digital analisado é o pré-cálculo uma preparação para o cálculo, livro da gen/LTC do autor Sheldon Axler, segunda edição com manual de soluções para o estudante publicado em 2016 que aborda os seguintes conteúdos:

Os Números Reais: A Reta Real, Álgebra dos Números Reais, Desigualdades, Intervalos e Valor Absoluto.

Funções e Seus Gráficos: Funções, O Plano das Coordenadas e os Gráficos, Trans-

formações de Funções e Seus Gráficos, Composição de Funções, Funções Inversas, Uma Abordagem Gráfica de Funções Inversas.

Funções Lineares, Quadráticas, Polinomiais e Racionais: Retas e Funções Lineares, Funções Quadráticas e Cônicas, Potências, Polinômios, Funções Racionais.

Funções Exponenciais, Logaritmos e o Número de Euler: Logaritmos como Inversas de Funções Exponenciais, Aplicações da Regra da Potência para Logaritmos, Aplicações das Regras do Produto e do Quociente para Logaritmos, Crescimento Exponencial, O Número  $e$  e o Logaritmo Natural, Aproximações e Área com  $e$  e com  $\ln$ , Crescimento Exponencial Revisitado.

Funções Trigonômétricas: A Circunferência Unitária, Radianos, Cosseno e Seno, Mais Funções Trigonômétricas, Trigonometria em Triângulos Retângulos, Identidades Trigonômétricas.

Álgebra Trigonométrica e Geometria: Funções Trigonômétricas Inversas, Identidades Trigonômétricas Inversas, Usando Trigonometria para Calcular Área, A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, Fórmulas para o Dobro do Ângulo e a Metade do Ângulo, Fórmulas para Adição e Subtração.

Aplicações da Trigonometria: Transformações de Funções Trigonômétricas, Coordenadas Polares, Vetores, Números Complexos, O Plano Complexo.

Sequências, Séries e Limites: Sequências, Séries, Limites.

Sistemas de Equações Lineares: Resolvendo Sistemas de Equações Lineares, Matrizes.

Este quarto livro possui cores, uma aparência moderna e estilizada, tem muitas ilustrações, citações históricas, deixa claro ao leitor o que ele tem que dominar ao final dos estudos de cada tópico, além disso tem uma linguagem bem acessível ao leitor com muitos exemplos e utilizando cores para destacar partes importantes é realmente ótimo na parte visual e de linguagem adequada ao público.

O quarto livro analisado é muito bom, mas faltou ter um pouco de interatividade com leitor e acredito que alguns vídeos poderiam modernizá-lo.

Tendo em vista que analisamos a ementa de pré-cálculo em cinco universidades diferentes então resolvemos analisar cinco livros deste tema e nosso quinto livro acessado na biblioteca virtual da UFTM é o pré-cálculo operações, equações, funções e sequências do autor Francisco Magalhães Gomes, publicado em 2018 pela editora Cengage Learning

que aborda os seguintes conteúdos:

Números reais: conjuntos de números, soma, subtração e multiplicação de números reais, divisão e frações, simplificação de frações, a reta real, razões e taxas, porcentagem, potências, raízes.

Equações e inequações: equações, proporções e a regra de três, regra de três composta, equações lineares, sistemas de equações lineares, conjuntos, intervalos, inequações, polinômios e expressões algébricas, equações quadráticas, inequações quadráticas, equações racionais e irracionais, inequações racionais e irracionais, valor absoluto.

Funções: coordenadas no plano, solução gráfica de equações e inequações em uma variável, retas no plano, funções, obtenção de informações a partir do gráfico, funções usuais, transformação de funções, combinação e composição de funções. Funções polinomiais: funções quadráticas, divisão de polinômios, zeros reais de funções polinomiais, gráficos de funções polinomiais, números complexos, zeros complexos de funções polinomiais.

Funções exponenciais e logarítmicas: função inversa, função exponencial, função logarítmica, equações exponenciais e logarítmicas, inequações exponenciais e logarítmicas, problemas com funções exponenciais e logarítmicas.

Trigonometria: trigonometria do triângulo retângulo, medidas de ângulos e a circunferência unitária, funções trigonométricas de qualquer ângulo, gráficos do seno e do cosseno, gráficos das demais funções trigonométricas, funções trigonométricas inversas, identidades trigonométricas, a lei dos senos e a lei dos cossenos, equações trigonométricas, transformações trigonométricas.

Este quinto livro digital analisado possui cores, partes históricas que envolvem a matemática, tem a parte visual bem estruturada e agradável de se ver, tem um texto acessível ao leitor com pouca familiaridade com a matemática, possui algumas imagens, traz problemas significativos, gráficos bem feitos e detalhados com incrementos de comentários neles, não tem interatividades com leitor e nem vídeos.

O intuito desde trabalho é definir o que um livro de pré-cálculo deve ter e produzir um capítulo desde livro na forma digital, o que estamos tentando frisar ao logo desta dissertação é que um livro digital não pode ser igual a uma versão impressa, pois temos condições de na versão virtual termos mais recursos e assim produzir um material que melhor condiz com mundo que nossos estudantes vivem.

Dando continuidade a nossa pesquisa uma equipe técnica irá analisar o conteúdo

deste capítulo da dissertação escrito até aqui, logo após cada um deste grupo irá definir o que deve ter um livro de pré-cálculo e depois analisaremos as respostas de todos em conjunto para chegarmos em um definição em comum para todos da ementa ideal de pré-cálculo.

O professor Rafael Rodrigo Ottoboni pertencente ao quadro efetivo da Universidade Federal do Triângulo Mineiro campus Uberaba, doutor em matemática pensa que em um livro de pré-cálculo devem estar presentes os seguintes conteúdos:

Teoria dos Conjuntos, Equações e Inequações, Relações e Funções, Funções de 1º e 2º grau, Funções Modulares, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Funções Trigonométricas.

O professor Airton Monte Serrat Borin Júnior pertencente ao quadro efetivo do Instituto Federal do Triângulo Mineiro campus Uberaba, mestre em matemática e doutor em física pensa que em um livro de pré-cálculo devem estar presentes os seguintes conteúdos:

Equações e Inequações, Relações e Funções, Funções de 1º e 2º grau, Funções Modulares, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Funções Trigonométricas.

O professor José Henrique Bizinoto pertencente ao quadro efetivo do Instituto Federal do Triângulo Mineiro campus Uberaba, mestre em matemática e com 36 anos de docência pensa que em um livro de pré-cálculo devem estar presentes os seguintes conteúdos:

Geometria Plana, Teoria dos Conjuntos, Equações e Inequações, Relações e Funções, Funções de 1º e 2º grau, Funções Modulares, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Funções Trigonométricas.

O professor Mauro Júnior Prado pertencente ao quadro efetivo do Instituto Federal do Triângulo Mineiro campus Uberaba, especialista em matemática e mestrando em matemática pensa que em um livro de pré-cálculo devem estar presentes os seguintes conteúdos:

Operações básicas com números racionais (frações), Potenciação e Radiciação, Noções de Geometria Plana (conceito de área e calculo de área em polígonos), Teoria dos Conjuntos, Equações e Inequações, Relações e Funções, Funções de 1º e 2º grau, Funções Modulares, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Funções Trigonométricas.

O professor Mauro Júnior Prado, que é autor desta dissertação ressalta que muitos de seus alunos nas disciplinas de cálculo possuem defasagem nos conteúdos de operações

básicas com números racionais (frações), potenciação e radiciação, noções de geometria plana e em conversa com os demais membros da equipe técnica eles também notam o mesmo em seus alunos.

A equipe técnica de docentes acima citados pretende escrever um livro digital de pré-cálculo seguindo os resultados obtidos nesta dissertação, fazendo incrementos tecnológicos e de interatividades, em consenso levando em conta tudo que foi exposto neste capítulo, a opinião de cada um que já foi mostrada nos parágrafos anteriores, a experiência de cada um dentro de sala de aula e as dificuldades dos nossos alunos que fazem cálculo pensa que em um livro de pré-cálculo devem estar presente os seguintes conteúdos:

Operações básicas com números racionais (frações), Potenciação e Radiciação, Geometria Plana, Teoria dos Conjuntos, Equações e Inequações, Relações e Funções, Funções de 1º e 2º grau, Funções Modulares, Funções Exponenciais e Logarítmicas, Funções Trigonométricas.

Como já definimos uma ementa para pré-cálculo o caminho agora é analisarmos os conceitos sobre materiais didáticos e materiais digitais para assim posteriormente propormos um capítulo de um livro digital.

# 3 Materias Didáticos

## 3.1 Materias didáticos e sua importância

Esta seção teve como base os trabalhos dos autores Bandeira referência [12]; Botas referência [7]; Coelho e Scheid referência [13]; Fiscarelli referência [9].

Nesta seção abordaremos o conceito de materiais didáticos, os tipos de materiais existentes, a importância deles no processo de ensino-aprendizagem e como podem contribuir para os estudantes serem mais ativos neste processo educacional.

Considerando Bandeira (2009), referência [12], materiais didáticos são produtos pedagógicos utilizados na educação com finalidade didática. Os materiais didáticos auxiliam os estudantes a entenderem/construírem os conceitos dos conteúdos que estão sendo abordados e também servem de guias para os professores, de maneira mais formal temos que material didático é um material instrucional elaborado com objetivos didáticos.

Os conteúdos matemáticos desde os mais simples como os princípios de contagem, necessitam de um meio para seu armazenamento, ou seja, algo que possibilite sua materialização para que não se perca no tempo e para que outras gerações não tenham que começar do zero novamente, historicamente temos as tábuas babilônicas, folhas de papiro dentre outras são exemplos de materiais didáticos que possibilitaram a materialização dos conteúdos.

A didática pode ser entendida como conjunto de técnicas, métodos, criados para transmitir e ensinar conteúdos aos alunos e sociedade no geral, é um ramo da pedagogia que tem por finalidade tornar as informações acessíveis ao entendimento das pessoas e contribuir no processo de aprendizagem.

Segundo Bandeira (2009), referência [12], material didático é um conjunto de textos, imagens, que variam da forma impressa até o áudio visual e possuem objetivos educacionais. Os materiais didáticos também tiveram objetivos de registros e com essa fina-

lidade eles variaram do papiro até recursos digitais.

É notório que boa parte dos estudantes têm dificuldade em compreender bem a matemática ensinada na escola, conseqüentemente os docentes não conseguem resultados satisfatórios e isso causa uma busca por materiais didáticos que possam minimizar este problema.

O uso de materiais didáticos contribui para que os estudantes sejam mais protagonistas na construção do conhecimento e menos expectadores conseqüentemente, tornando assim este processo mais concreto e menos verbal, estas são ferramentas importantes para a docência que possibilitam uma participação mais ativa dos alunos.

Segundo Fiscarelli (2007), referência [9], o uso de material didático contribui para uma participação mais ativa dos alunos nas aulas e isso ajuda eles a terem mais interesse pelas atividades. Com a utilização de materiais didáticos os estudantes saem de uma aula expositiva para uma aula onde eles são protagonistas e estas ferramentas ajudam eles a entenderem de forma mais concreta o conhecimento científico o qual normalmente vem em uma linguagem que não é muito acessível aos estudantes.

Existe uma gama muito grande de materiais didáticos, como brinquedos educativos, jogos educativos, material para ensino a distância e o livro didático, sendo este último muito importante e provavelmente o mais conhecido, o livro hoje além de armazenar o conteúdo é uma ferramenta pedagógica e tem todo um processo de produção envolvendo editores, autores, designer para atender a demanda do seu público alvo.

Considerando que material didático são ferramentas que auxiliam os estudantes a construir o conhecimento então temos também os produtos como jogos físicos ou virtuais, ábacos, torre de Hanói, Tangram, material dourado e inúmeros outros, sendo este último proposto pela médica e educadora Maria Montessori e mais aplicado em aritmética seguindo os princípios montessorianos que consistem em desenvolver uma criança independente, gerar experiência concreta, trabalhar com os sentidos.

Podemos ter um material impresso ou digital, tradicional ou inovador, mas tudo isso depende do público alvo e dos objetivos a serem alcançados com cada produto pedagógico, a utilização de tecnologias de comunicação e informação permite produzir materiais didáticos mais adequados a cada público e também auxilia na coleta de informações dos seus usuários.

Os materiais didáticos sejam eles impressos, concretos, áudio visuais ou de novas



tecnologias, todos eles tem um único objetivo que é contribuir para desenvolvimento educacional e no processo de aprendizagem.

Os produtos pedagógicos que utilizam imagem e som são chamados de materiais audiovisuais e temos como exemplos, vídeos, mídias computacionais, livros digitais, todos estes com imagem e som são materiais didáticos que trabalham com dois dos cinco sentidos humanos, a visão e a audição o que ajuda um pouco no processo de quem estiver utilizando o material ter uma maior predisposição com essa ferramenta.

O Ministério da Cultura e Educação (MEC) destacou em seus referencias em 2007 a importância do recurso audiovisual no processo de ensino-aprendizagem e suas contribuições como possibilitar os estudantes explorarem imagem e som, estimulando eles a vivenciarem relações, processos, conceitos e princípios.

Existem também os materiais didáticos manipuláveis, os quais são possíveis tocar e manipular, é uma ferramenta muito importante para a matemática que ajuda na dinâmica e compreensão da teoria, desde que utilizados com objetivos claros a serem atingidos e com roteiros para isso, como exemplos têm os sólidos geométricos, geoplanos, tangram que ajudam os estudantes a progredirem do concreto para o abstrato.

No ensino básico temos muitos materiais didáticos na área de matemática que podem ser usados sendo eles ábaco, blocos lógicos, geoplano, material cuisinare, material multibase, origami, pentaminós, polydron, que são alguns exemplos de ferramentas didáticas manipuláveis, mas toda elas devem ser utilizadas com objetivos específicos e não apenas para diversificar a aula, temos que saber quais resultados são desejados com qualquer seja o material didático utilizado.

Sobre os materiais didáticos do parágrafo anterior o ábaco é um objeto de cálculo na base decimal, blocos lógicos são conjuntos de pequenas peças geométricas, geoplano é utilizado nos estudos de polígonos na geometria plana, material cuisinare é uma série de barras de madeira com tamanhos variando de um até dez, material multibase ajuda no ensino da lógica do sistema numérico, origami é a arte de dobrar e ajuda em processos de contagem e de concentração, pentaminós composto de cinco quadrados congruentes e polydron é utilizados para a construção de sólidos.

Sobre tudo que foi visto até aqui os materiais didáticos podem ser convencionais (livros, jogos, materiais manipuláveis entre outros), audiovisuais (filmes, vídeos entre outros) e novas tecnologias (computadores, software/aplicativos, material digital, internet,

canais on-line, entre outros).

Considerando Botas (2008), referência [13], é importante que o professor determine quando se deve utilizar um material didático e o motivo/objetivo a ser alcançado. Um aspecto importante quando falamos sobre materiais didáticos são a escolha deles, devemos levar em consideração as características gerais dos estudantes, carga horária da disciplina e em qual contexto ela esta inserida, analisarmos quais ferramentas estão disponíveis e decidir quais serão utilizadas juntamente com um planejamento disto, ainda assim cada caso tem suas particularidades e conseqüentemente outros fatores deverão ser analisados dependendo de cada situação.

Os materiais didáticos possuem importante papel no processo de ensino-aprendizagem, pois ajudam a criar situações de interação envolvendo os estudantes de forma ativa, auxiliam na observação e análise de resultados, tornam os conceitos matemáticos mais acessíveis aos alunos, assim contribuindo para uma construção do conhecimento mais significativa e concreta.

## 3.2 Materias digitais

Esta seção teve como base os trabalhos dos autores Godoi e Padovani referência [2]; Silva referência [10]; Silveira, Candotti, Falkembach e Geller referência [20]; Gomes, Guedes, Maracaja, Albuquerque e Nicolau referência [21].

Considerando Silva (2013), referência [10], podemos perceber que aumentou a quantidade e a diversidade de materiais didáticos digitais e isso tendo como base a evolução das tecnologias digitais da informação e comunicação. Com a evolução das tecnologias digitais da informação e comunicação conseqüentemente ocasionaram uma maior gama de materiais educativos digitais, assim a informática evoluiu para o sentido educacional acompanhando o desenvolvimento social.

Os materiais educativos digitais podem ser simples copias de matérias convencionais ou podem ser combinações de textos com imagens, animações, sons e interatividade, observamos que esses materiais têm sido levados para web/internet.

Afinal qual o significado de digital? Em pesquisa no dicionário online que pode ser conferida clicando [aqui](#), digital é o mesmo que: produzido por meio de tecnologias digitais, eletrônicas.

Os materiais didáticos digitais são objetos pedagógicos que ajudam no processo ensino-aprendizagem com participação ativa dos estudantes, ou seja, eles se tornam mais protagonistas e isso tende a proporcionar uma maior concentração por parte deles.

Podemos observar ao longo de muitos anos o crescente uso de celulares, tablets, computadores pela sociedade e é neste contexto que foram surgindo os materiais didáticos digitais na tentativa de acompanhar o desenvolvimento social e econômico. Em um primeiro estágio alguns livros impressos foram apenas digitalizados, posteriormente foram inclusas algumas ferramentas nesses livros digitais como a capacidade de grifar e criar comentários, reprodução em áudio deles, inserção de imagens dinâmicas e vídeos, criação de software/aplicativos e plataformas educacionais, tudo isso buscando interação com os estudantes.

Os materiais didáticos digitais usam diferentes mídias para se tornarem acessíveis e atraentes para os estudantes, tendo considerações técnicas e pedagógicas em mente, utilizam imagens digitais, textos interativos, animações, vídeos e páginas da internet dentre outras ferramentas como base e com o propósito de objetivos educacionais a serem atingidos.

O material didático digital vem das tecnologias digitais da informação e comunicação que estabelece uma ligação entre a capacidade de processamento e às ferramentas educativas digitais, ou seja, é algo que não é físico, não é palpável, está presente no ambiente virtual, assim é possível colocar em um mesmo espaço produtos diferentes e em vários formatos.

A partir de tudo que foi exposto até aqui podemos entender material didático digital como ferramentas pedagógicas digitais que trabalham com a combinação de mídias, imagens, textos, sons, vídeos, páginas da internet, com a finalidade de contribuir no processo de ensino-aprendizagem, colocar o estudantes em posição de protagonista e utilizar canais de comunicação e linguagem mais próximas as utilizadas pelos alunos.

Hoje temos uma boa gama de materiais didáticos digitais, mas é de suma importância que os docentes estejam aptos trabalharem com eles, que saibam fazer as mediações necessárias e conduzir os estudantes em direção dos objetivos a serem atingidos, ressalto que essas ferramentas não devem ser usadas somente para diversificar o meio ou por serem mais atrativas, elas devem ser acionadas com objetivos claros a serem alcançados e com caminhos a serem percorridos para isso.

Considerando Silveira, Candotti, Falkembach e Geller (2012), referência [20], os materiais didáticos devem ser feitos de maneira que incentivem a interação com seus usuários. Os materiais didáticos devem ser desenvolvidos pensando nos alunos, elaborados em linguagem acessível a eles, devem ser atraentes, proporcionar interatividade, devem dialogar com os estudantes e conduzir a momentos de reflexão de forma que ele se sintam autônomos.

No processo de elaboração de um material didático digital temos que ficar bem atentos algumas questões como disponibilizar somente as informações necessárias, ou seja, não devemos em hipótese nenhuma colocar conteúdos em demasia ou desnecessários, pois isso pode prejudicar os usuários do material, também são importantes termos atividades que promovam raciocínio e a fixação em diferentes níveis de dificuldade e obviamente todo o material deve ser feito pensando somente em quem irá utilizá-lo e nas suas características.

Considerando Silveira, Candotti, Falkembach e Geller (2012), referência [20], para fazermos materiais didáticos digitais devemos observar aspectos técnicos, gráficos e pedagógicos. Ainda seguindo a idéia do parágrafo anterior o material didático deve ter uma comunicação acessível aos seus usuários, apresentar formas rápidas de localizar conteúdos e gabaritos, apresentar os conceitos de forma clara e direta, ter um layout agradável ao leitor com cores e disposições bem pensadas, também deve dar destaque as partes mais importantes dos conteúdos e as partes que os estudantes geralmente apresentam dificuldades.

Os docentes devem avaliar os materiais didáticos digitais com base no que foi exposto nos parágrafos anteriores e ainda analisando a interatividade dos mesmos antes de usarem eles em aula ou recomendarem para o uso em casa, testando previamente e preparando as atividades alinhadas com os objetivos, vale ressaltar que também é importante observar essas ferramentas digitais durante o uso pelos estudantes em sala de aula e após a utilização em casa se for o caso, para assim conseguir ter uma visão ampla de como funcionam esses meios didáticos e de suas potencialidades.

Afinal qual o significado de avaliar? Em pesquisa no dicionário online que pode ser conferida clicando [aqui](#), avaliar é o mesmo que: determinar o valor, a importância, fazer consideração sobre algo, julgar.

No caso das avaliações dos materiais didáticos digitais existem dois tipos a forma-

tiva que é feita durante todo o processo de criação do material e a somativa que é feita por quem utiliza o material.

Antes de tomarmos a decisão de usar ou não um material didático é bom ter conhecimento do conceito de usabilidade, que de acordo com a ISO 9241-11 que pode ser conferida clicando [aqui](#), usabilidade é a medida com que um produto, sistema ou serviço atingem objetivos específicos com eficácia, eficiência e satisfação em um contexto específico de uso.

Segundo Silveira, Candotti, Falkembach e Geller (2012), referência [20], ao planejarmos um material digital isso deve ser feito de forma conjunta com os processos de ensino-aprendizagem e deve ser projetado visando um objetivo de aprendizagem e que irá depender do conteúdo abordado. Com base em tudo que foi exposto nestas últimas duas seções iremos produzir um material didático digital, para ser mais específico um capítulo de um livro digital que atenda o máximo de itens que abordamos como interatividade, dinâmica, cores e layout, além de ofertar uma linguagem acessível ao estudante, ser de fácil manuseio e acesso, ou seja, algo possível executar facilmente em um celular, tablet ou computador e este será o desafio para o nosso próximo capítulo.

# 4 O material digital

## 4.1 Justificativa

Neste capítulo apresentamos uma proposta de um material digital conforme tudo que já foi explicado até aqui, com interatividade, moderno, com links que levam a vídeos, ou seja, um material de acordo com o mundo tecnológico e dinâmico o qual estamos inseridos.

Considerando às dificuldades que encontraremos e o desafio de fazer esse material funcionar iremos escolher um pequeno conteúdo da ementa definida para pré-cálculo, ressaltamos que o objetivo não é o material ter sequência ou ele ser completo, o real objetivo aqui é dar uma pequena amostra de como ficará e funcionará esse livro digital interativo e por isso não teremos muitos exemplos ou exercícios nele, a proposta será mesmo uma visão de como podem ser feitos materias mais atualizados.

O conteúdo escolhido para fazermos essa pequena amostra será função exponencial, usaremos o editor on-line Overleaf para escrevermos na linguagem latex, o desafio será inserir gráficos dinâmicos no transcorrer do texto, links que levam ao gabarito ou a resolução escrita e depois levam o leitor de volta ao ponto que estavam e por fim tentaremos fazer com que o material execute pequenos vídeos, mas caso não consigamos este último item colocaremos links no material que levam a vídeos dentro de um canal do You Tube, desta forma o estudante terá o material escrito, exercícios com gabaritos e resoluções escritas e alguns vídeos explicando partes do conteúdo e das resoluções dos exercícios.

O material que iniciaremos a seguir trará uma forma variada para o leitor estudar o conteúdo, tendo partes escritas, exercícios para o estudante tentar resolver e conferir suas respostas e vídeos para quando a parte escrita não for suficiente para um bom entendimento das atividades/conteúdo, tudo isso dependendo de apenas um clique nas palavras indicadas que estaram no material de acordo com a necessidade de cada leitor e

além disso todo documento será escrito em uma linguagem mais acessível possível ao seu usuário.

A seção 4.2 se trata de um material didático digital, portanto nela não seguimos nenhuma regra de formatação, numeração ou afins, a única regra que é seguida é se ter o melhor material de estudos possível, ressaltando que todo o material da seção abaixo é autoral, incluindo gráficos, tabelas e ainda para este material ser utilizado com 100% dos seus recursos ele deve ser reproduzido em um computador conectado a internet utilizando os leitores de pdf Foxit ou Adobe Acrobat, sem internet os vídeos não funcionam e se for executado em celulares os gráficos que são dinâmicos ficaram estáticos.

## 4.2 Material digital

### Função exponencial

Iniciaremos nosso estudo sobre funções exponenciais com um exemplo a seguir, mas ressaltamos que assim como todos os tipos de funções já estudadas se trata de uma expressão matemática onde formamos pares ordenados atribuindo um valor para variável  $x$  e encontrando seu valor associado em  $y$ .

#### Exemplo 1

José irá trocar a piscina de sua casa, para isso fez um empréstimo bancário de 100.000 reais com a taxa de juros compostos de 1% a.m. (1 por cento ao mês). Sabendo que ele irá quitar sua dívida de uma só vez ao término do quarto mês temos a seguinte situação:

$$\text{Primeiro mês: } 100.000 + 100.000 \times \frac{1}{100} = 100.000 \times 1,01 = 101.000$$

$$\text{Segundo mês: } 101.000 + 101.000 \times \frac{1}{100} = 100.000 \times (1,01)^2 = 102.010$$

$$\text{Terceiro mês: } 102.010 + 102.010 \times \frac{1}{100} = 100.000 \times (1,01)^3 = 103.030,1$$

$$\text{Quarto mês: } 103.030,1 + 103.030,1 \times \frac{1}{100} = 100.000 \times (1,01)^4 = 104.060,4$$

Observe que o total da dívida no final de cada mês depende da taxa de juros e do saldo da dívida no mês anterior e assim a função  $f(x) = 100000 \cdot (1,01)^x$  nos dá o valor

total da dívida, sendo  $x$  o número de meses que se passaram e  $f(x) = y$  o valor da dívida naquele momento. Tendo assim os pares ordenados  $(x ; f(x))$ , observe:

**Primeiro mês:**  $f(x) = 100000 \cdot (1,01)^x$ , logo  $f(1) = 100000 \cdot (1,01)^1 = 101.000$

**Segundo mês:**  $f(x) = 100000 \cdot (1,01)^x$ , logo  $f(2) = 100000 \cdot (1,01)^2 = 102.010$

**Terceiro mês:**  $f(x) = 100000 \cdot (1,01)^x$ , logo  $f(3) = 100000 \cdot (1,01)^3 = 103.030,1$

**Quarto mês:**  $f(x) = 100000 \cdot (1,01)^x$ , logo  $f(4) = 100000 \cdot (1,01)^4 = 104.060,4$

A função exponencial  $f(x) = 100000 \cdot (1,01)^x$  resolve o exemplo acima, onde dependendo do número de meses passados (representados na variável  $x$ ) temos o valor da dívida (representado na variável  $f(x) = y$ ), mais adiante definiremos formalmente o que é função exponencial.

Para ver a explicação em vídeo do exemplo anterior clique na palavra a seguir:

### Exemplo 1.

Antes de começarmos o estudo sobre função exponencial iremos fazer revisão de alguns tópicos de potenciação e de equações exponenciais.

#### Revisão sobre potenciação:

- Seja  $a$  um número real diferente de zero ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) e  $n$  um número natural ( $n \in \mathbb{N}$ ), temos:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a \text{ (n fatores)}$$

$$a^0 = 1 \text{ e } a^1 = a$$

- Seja  $a$  um número real diferente de zero ( $a \in \mathbb{R}^*$ ) e  $n$  um número natural ( $n \in \mathbb{N}$ ), temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- Sejam  $a$  e  $b$  números reais de forma que não sejam zero quando representarem um divisor,  $m$  e  $n$  números naturais temos às propriedades:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$



**Observação:** Devemos estar atentos que considerando o conjunto dos números reais não temos divisão por zero e nem raiz de índice par de número negativo.

Vejam alguns exemplos das propriedades acima:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$$

$$17^0 = 1$$

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$3^5 \cdot 3^7 = 3^{5+7} = 3^{12}$$

$$3^7 : 3^5 = 3^{7-5} = 3^2$$

$$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^4 = \frac{3^4}{7^4}$$

$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$$

$$3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{3^4}$$

Para ver a explicação em vídeo da revisão sobre potenciação basta clicar na palavra a seguir: [Revisão potenciação](#).

## Equações exponenciais

Observe às equações abaixo e identifique o que elas tem em comum:

$$3^x = 27$$

$$7^{(x-5)} = 1$$

$$2^{x \cdot (x+3)} = 16$$

$$3^x + 9^x = 12$$

Podemos ver facilmente que todas equações possuem a variável no exponte e por isso são as equações exponenciais.

**Vale a pena recordar:** uma equação consiste em uma igualdade com uma ou mais variáveis e resolver ela é encontrar o valor da variável ou das variáveis que fazem a equação ser verdadeira, conforme exemplo abaixo:

$$3^x = 27 \text{ logo se } x = 3 \text{ temos: } 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \text{ e assim a solução é } x = 3.$$

Utilizando às propriedades de potência vamos ver como resolvemos equações exponenciais, para facilitar o processo vamos dividir em três casos as resoluções dessas equações:

**1º Caso:** quando podemos reduzir às equações em uma igualdade de dois termos com a mesma base, assim temos um termo antes da igualdade e outro depois, sendo a mesma base então basta compararmos os expoentes.

**Exemplos de resolução de equações exponenciais do primeiro caso:**

a)  $3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4$  logo como as bases estão iguais e temos somente dois termos só nos resta igualar os expoentes e assim  $x = 4$ . Nestes casos é sempre possível conferir a resposta substituindo o valor encontrado no lugar de x e temos:  $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

b)  $5^x = \frac{1}{125} \rightarrow 5^x = \frac{1}{5^3} \rightarrow \frac{5^{-3}}{1} \rightarrow 5^x = 5^{-3} \rightarrow x = -3$

c)  $4^{(x-1)} = 16 \rightarrow 2^{2 \cdot (x-1)} = 2^4 \rightarrow 2 \cdot (x-1) = 4 \rightarrow 2x - 2 = 4 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

Para ver a explicação em vídeo sobre equações exponenciais e primeiro caso basta clicar na palavra a seguir: [Eq. exponencial + 1º Caso](#).

**Exercício 1** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Resolva às equações abaixo:

a)  $3^x = 81$

b)  $4^x = 32$

c)  $7^x = \frac{1}{343}$

d)  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{32}{243}$

e)  $7^{2 \cdot x} = \sqrt{343}$

f)  $3^{x^2-4} = 1$

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 1: [Exercício 1](#).

**2º Caso:** quando a equação possui mais de um termo com variável no expoente ou seja ela terá mais de dois termos, então temos que fazer uma mudança de base e usar algumas das propriedades de potência que já vimos.

### Exemplos de resolução de equações exponenciais do segundo caso:

a)  $2^{x+2} + 2^{x+3} = 24$

Usando a propriedade de potência  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  temos:

$$2^{x+2} + 2^{x+3} = 24 \rightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = 24$$

Considere agora  $2^x = m$  e substituindo  $2^x$  por  $m$  na equação da linha anterior, então temos:

$$m \cdot 2^2 + m \cdot 2^3 = 24, \text{ resolvendo esta equação temos:}$$

$$4m + 8m = 24 \rightarrow 12m = 24 \rightarrow m = 2, \text{ logo como } 2^x = m \text{ temos:}$$

$$2^x = 2 \rightarrow x = 1 \text{ e assim a equação } 2^{x+2} + 2^{x+3} = 24 \text{ é satisfeita quando } x = 1.$$

b)  $3^{x-2} + 3^{x+3} = 244$

Usando a propriedade do item anterior e a propriedade  $a^m : a^n = a^{m-n}$  temos:

$$3^{x-2} + 3^{x+3} = 244 \rightarrow \frac{3^x}{3^2} + 3^x \cdot 3^3 = 244$$

Considere agora  $3^x = m$  e substituindo  $3^x$  por  $m$  na equação da linha anterior, então temos:

$$\frac{m}{3^2} + m \cdot 3^3 = 244, \text{ resolvendo esta equação temos:}$$

$$\frac{m}{3^2} + m \cdot 3^3 = 244 \text{ (multiplique a equação por 9)} \rightarrow m + 243m = 2196 \rightarrow 244m = 2196 \rightarrow m = 9$$

Como temos  $3^x = m$ , então  $3^x = 9 \rightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$  e assim a equação é satisfeita quando  $x = 2$ .

Para ver a explicação em vídeo sobre o segundo caso basta clicar na palavra a seguir: **2º Caso**.

**Exercício 2** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Resolva às equações exponenciais abaixo:

a)  $2^{x+2} + 2^{x+3} = 96$

b)  $5^{x-1} + 5^{x+2} = 630$

c)  $3^{x-2} = 2 \cdot 3^x - 51$

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 2: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 2: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 2: [Exercício 2](#).

**Exercício 2.1** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Sendo  $x$  raiz da equação  $2^x + 2^{x+2} + 2^{x-1} = 44$ , então  $x^{-2}$  vale?

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 2.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 2.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 2.1: [Exercício 2.1](#).

**3º Caso:** neste caso faremos substituição de variável igual no segundo caso, utilizaremos propriedades de potência e no final sairemos em uma equação do segundo grau para resolvermos.

**Exemplo de resolução de equação exponencial do terceiro caso:**

$2^{2x} - 3 \cdot 2^x = -2$ , utilizaremos a seguinte propriedade:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Então temos:  $2^{2x} - 3 \cdot 2^x = -2 \rightarrow 2^{x \cdot 2} - 3 \cdot 2^x = -2 \rightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x = -2$

Considere agora  $2^x = m$  e substituindo  $2^x$  por  $m$  na equação da linha anterior, então temos:

$$m^2 - 3m = -2 \rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima onde nela  $a = 1$ ,  $b = -3$  e  $c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) \rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1$$

Para encontrarmos as raízes da nossa equação do segundo grau devemos utilizar às formulas:  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$m_1 = \frac{+3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \rightarrow m_1 = 2 \text{ e } m_2 = \frac{+3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \rightarrow m_2 = 1$$

Como temos que  $2^x = m$  então teremos os dois casos:

$$m_1 = 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$m_2 = 1 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x = 0$$

Assim a equação  $2^{2x} - 3 \cdot 2^x = -2$  é satisfeita quando  $x = 1$  ou  $x = 0$

Para ver a explicação em vídeo sobre o terceiro caso basta clicar na palavra a seguir:

**3º Caso.**

**Exercício 3** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Resolva às equações exponenciais abaixo:

a)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

b)  $2 \cdot 4^x - 20 \cdot 2^x + 32 = 0$

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 3: **Clique aqui**

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 3: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 3: [Exercício 3](#).

**Exercício 3.1** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Seja a equação  $2^{2 \cdot x} = 10 \cdot 2^x - 16$ , então qual o valor da soma de suas raízes?

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 3.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 3.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 3.1: [Exercício 3.1](#).

## Função exponencial

De maneira informal temos que a função exponencial assim como todo tipo de função é uma regra que associa dois conjuntos numéricos, vejamos alguns exemplos:

a)  $f(x) = 3^x$

b)  $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

Podemos observar que na função exponencial a variável  $x$  está no expoente e a medida que atribuímos um valor a  $x$  encontramos um valor para  $y = f(x)$ , vejamos no item **a** o que acontece quando  $x = 1$ :  $\rightarrow f(1) = 3^1 = 3$  e assim formamos o par ordenado  $(1,3)$ .

**Definição:** Função exponencial são todas funções do tipo  $f(x) = a^x$ , com  $x$  sendo um número real,  $a$  maior que zero e diferente de 1 ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ ).

Sendo as funções exponenciais todas da forma  $f(x) = a^x$ , vamos considerar  $a$  como

sendo a base e **x** o expoente.

Vamos lembra que zero elevado a qualquer número real diferente de zero tem como resultado 0 ( $x \neq 0$  e  $x \in \mathbb{R} \rightarrow 0^x = 0$ ) e 1 elevado a qualquer número real da sempre 1 ( $1^x = 1, x \in \mathbb{R}$ ) e com essas observações vemos que faz sentido na definição de função exponencial termos ( $a > 0$  e  $a \neq 1$ ), pois nestes dois casos teríamos duas funções constantes.

## Gráfico da função exponencial

O gráfico das funções da forma  $f(x) = a^x$  são os conjuntos de todos os pares ordenados que pertencem a ela, ou seja, devemos marcar todos os pontos da forma  $(x, y)$  que pertencem a função no plano cartesiano.

Sendo  $f(x) = a^x$  com  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , então temos duas hipóteses para analisar,  $a > 1$  e  $0 < a < 1$ .

**1º Hipótese:** a base é um número real maior que 1 ou seja  $a > 1$ .

Vamos construir e analisar o gráfico da função  $f(x) = 3^x$  que é o mesmo que dizermos  $y = 3^x$ , onde a base  $a = 3 > 1$ .

Figura 4.1: Gráfico  $f(x) = 3^x$

Fonte: próprio autor

Observe na tabela da figura 4.1 que a medida que definimos um valor para **x** basta substituir ele na função e obtemos o valor de **y**, por exemplo: se  $x = 2$  temos

$y = 3^x \rightarrow y = 3^2 \rightarrow y = 9$  e assim obtivemos todos os pontos da forma  $(x, y)$  da nossa tabela e com os pontos conseguimos fazer o gráfico da nossa função que está a direita da tabela acima.

Veja ainda na tabela da figura 4.1, na terceira coluna e de cima para baixo, que toda vez que aumentamos o valor de  $x$  o valor de  $y$  que forma o ponto com ele também aumenta e quando isso acontece dizemos que a função é **crecente**.

**Definição:** Em uma função exponencial toda vez que sua base for maior que um ( $a > 1$ ) ela será **crecente**.

Clique na palavra seguinte para ver a explicação em vídeo sobre função exponencial e a primeira hipótese : [Função exponencial + 1º Hipótese](#).

**2º Hipótese:** a base é um número real maior que 0 e menor que 1 ou seja  $0 < a < 1$ .

Vamos construir e analisar o gráfico da função  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  que é o mesmo que dizemos  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , onde a base  $a = \frac{1}{2}$  e  $0 < \frac{1}{2} < 1$ .

Figura 4.2: Gráfico  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Fonte: próprio autor

Observe na tabela da figura 4.2 que a medida que definimos um valor para  $x$  basta substituir ele na função e obtemos o valor de  $y$ , por exemplo: se  $x = 2$  temos



$y = (\frac{1}{2})^x \rightarrow y = (\frac{1}{2})^2 \rightarrow y = \frac{1}{4}$  e assim obtivemos todos os pontos da forma  $(x, y)$  da nossa tabela e com os pontos conseguimos fazer o gráfico da nossa função que esta a diretita da tabela acima.

Veja ainda na tabela da figura 4.2, na terceira coluna e de cima para baixo, que toda vez que aumentamos o valor de **x** o valor de **y** que forma o ponto com ele diminui e quando isso acontece dizemos que a função é **decrecente**.

**Definição:** Em uma função exponencial toda vez que sua base for maior que zero e menor que um ( $0 < a < 1$ ) ela será **decrecente**.

Clique na palavra seguinte para ver a explicação em vídeo sobre a segunda hipótese : [2º Hipótese](#).

**Observação:** Toda função exponencial ou seja que é da forma  $y = a^x$  tem o ponto  $(0, 1)$  pertencente a ela, pois a base **a** é diferente de zero e assim temos:  $y = a^0 \rightarrow y = 1$ .

## Análise da função exponencial

Sendo ela da forma  $f(x) = y = a^x$  temos:

**Domínio:** é o conjunto dos números reais ou  $D = \mathbb{R}$  (valores que **x** pode assumir).

**Imagem:** é o conjunto dos números reais positivos ou  $Im = \mathbb{R}_+^*$  (valores que **y** pode assumir).

**Função crescente:** se  $a > 1$

**Função decrescente:** se  $0 < a < 1$

**Exemplo 2:** Faça o esboço do gráfico  $f(x) = 2^{-3x}$ .

Temos que:  $f(x) = 2^{-3x} \rightarrow f(x) = (\frac{1}{2})^{3x} \rightarrow f(x) = (\frac{1}{8})^x$ , podemos fazer nossa tabela de pontos para construimos o gráfico e já sabemos que se trata de uma função decrescente, pois  $a = \frac{1}{8}$  e  $0 < \frac{1}{8} < 1$ .

Figura 4.3: Gráfico  $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

Fonte: próprio autor

Clique na palavra seguinte para ver a explicação em vídeo sobre a análise da função exponencial e exemplo 2: **Análise da função exponencial + exemplo 2**.

**Exercício 4** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Classifique às funções abaixo como crescente ou decrescente e esboce o gráfico delas.

a)  $f(x) = 2^{2x}$

b)  $f(x) = 3^{-x}$

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 4: **Clique aqui**

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 4: **Clique aqui**

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 4: **Exercício 4**.

**Exercício 4.1** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Classifique às funções  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = 2^{-2x}$  como crescente ou decrescente, verifique quantos pontos elas tem em comum e esboce o gráfico delas em um mesmo plano cartesiano.

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 4.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 4.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 4.1: [Exercício 4.1](#).

**Exercício 4.2** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Dadas às funções exponenciais  $f(x) = a^x$  e  $g(x) = b^x$  sendo  $a \neq b$  classifique às afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas:

- a) As funções  $f$  e  $g$  tem dois pontos em comum. ( )
- b) As funções  $f$  e  $g$  tem vários pontos em comum. ( )
- c) A função  $f$  é crescente se  $x > 1$ . ( )
- d) A função  $g$  é crescente se  $b > 1$ . ( )
- e) A função  $g$  é decrescente se  $b < 0$ . ( )
- f) A função  $g$  é decrescente se  $0 < b < 1$ . ( )

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 4.2: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 4.2: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 4.2: [Exercício 4.2](#).

**Exercício 5** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

A população de bactérias de um experimento é dada pela fórmula  $f(t) = 5^t$ , onde  $t$  é o tempo que passou em horas desde que o experimento se iniciou às 10 horas da manhã:

- a) Qual será a população de bactérias às 15h?

b) Que horas será quando a população for de 78125?

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 5: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 5: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 5: [Exercício 5.](#)

**Exercício 5.1** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Sérgio aplicou R\$ 50.000,00 durante dez anos em um investimento que rende 1% a.m. (1 por cento ao mês) para assim conseguir ter um montante que pague a faculdade de seu filho. Considere que a fórmula que dá o total do dinheiro que ele juntou é  $f(x) = 50000 \cdot 1,01^x$ , onde  $x$  representa o tempo em meses, qual o montante que juntou ao final do período da aplicação?

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 5.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 5.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 5.1: [Exercício 5.1.](#)

**Exercício 6** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Seja uma função exponencial definida por  $f(x) = 2^{b \cdot x}$  e sendo  $b$  uma constante real. Se  $f(2) = \frac{1}{16}$ , então qual o valor de  $f(-2)$ ?

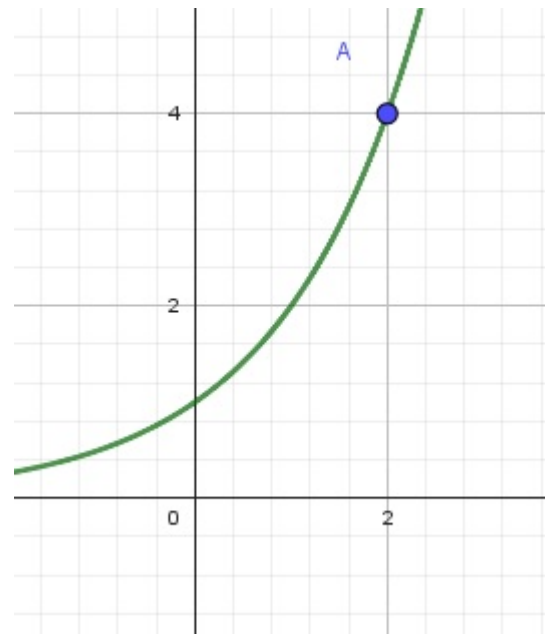
Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 6: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 6: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 6: [Exercício 6.](#)

**Exercício 6.1** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Figura 4.4: Gráfico do exercício 6.1



O gráfico ao lado é da função exponencial  $f(x) = a^x$ , determine o valor de **a**.

⇒

Fonte: próprio autor

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 6.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 6.1: [Clique aqui](#)

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 6.1: [Exercício 6.1](#).

## Inequação exponencial

São desigualdades exponenciais, onde o objetivo é determinar qual intervalo numérico de valores que **x** pode assumir para que a desigualdade seja satisfeita.

- $2^x \leq 64$

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^8$

Assim como na função exponencial teremos dois casos para inequação exponencial sendo eles quando  $a > 1$  ou  $0 < a < 1$  ou seja dependerá do valor da base.

**Quando  $a > 1$ :** se a base é maior que 1, então devemos verificar se os dois termos da inequação tem a mesma base e depois usar o sinal da expressão para compararmos seus expoentes.

**Exemplo 3:** Resolva a inequação  $2^x \leq 64$  :

Primeiro devemos igualar as bases:  $2^x \leq 64 \rightarrow 2^x \leq 2^6$

Como a base  $a = 2 > 1$ , podemos usar o mesmo sinal da desigualdade para compararmos os expoentes e assim:  $x \leq 6$

Observe que para todo valor que  $x$  assumir que for menor ou igual a 6 nossa inequação será satisfeita, por outro lado se  $x$  for maior que 6 ela não será satisfeita, vamos testar nossa resposta:

Suponha  $x = 5 \rightarrow 2^x \leq 64 \rightarrow 2^5 \leq 64 \rightarrow 32 \leq 64$ , verdadeiro.

Suponha  $x = 7 \rightarrow 2^x \leq 64 \rightarrow 2^7 \leq 64 \rightarrow 128 \leq 64$ , falso.

Assim testamos nossa solução para inequação e verificamos que ela está certa ou seja nossa solução é:  $(x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 6)$ .

**Quando  $0 < a < 1$ :** se a base é maior que 0 e menor que 1, então devemos verificar se os dois termos da inequação tem a mesma base e depois usar o sinal da desigualdade da inequação invertido para compararmos seus expoentes.

**Exemplo 4:** Resolva a inequação  $(\frac{1}{2})^{4x} > (\frac{1}{2})^8$ :

Como a base dos dois termos já são iguais e  $0 < a = \frac{1}{2} < 1$ , devemos usar o sinal da desigualdade da inequação invertido para compararmos os expoentes e assim temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x} > \left(\frac{1}{2}\right)^8 \rightarrow 4x < 8 \rightarrow x < 2$$

Observe que para todo valor que  $x$  assumir que for menor que 2 nossa inequação será satisfeita, por outro lado se  $x$  for maior ou igual a 2 ela não será satisfeita, vamos testar nossa resposta:

$$\text{Suponha } x = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot x} > \left(\frac{1}{2}\right)^8 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot 1} > \left(\frac{1}{2}\right)^8 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 > \left(\frac{1}{2}\right)^8, \text{ verdadeiro.}$$

$$\text{Suponha } x = 3 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot x} > \left(\frac{1}{2}\right)^8 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot 3} > \left(\frac{1}{2}\right)^8 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{12} > \left(\frac{1}{2}\right)^8, \text{ falso.}$$

Assim testamos nossa solução para inequação e verificamos que ela está certa ou seja nossa solução é:  $(x \in \mathbb{R} \text{ e } x < 2)$ .

Clique na palavra seguinte para ver em vídeo a explicação de inequação exponencial: **Inequação exponencial**.

**Exercício 7** (Tente resolver ele antes de conferir sua resolução)

Resolva às inequações abaixo:

a)  $3^x > 81$

b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

c)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} < \frac{1}{125}$

d)  $(\sqrt{2})^{x+1} < 1$

Clique na palavra seguinte para ver o gabarito do exercício 7: **Clique aqui**

Clique na palavra seguinte para ver a resolução escrita do exercício 7: **Clique aqui**

Clique na palavra seguinte para ver a resolução em vídeo do exercício 7: **Exercício 7**.

## Resumo

### Equações exponenciais:

É uma igualdade com a variável no expoente, se conseguirmos deixar as bases iguais, podemos comparar seus expoentes quando temos apenas dois termos.

$$a^x = a^k \rightarrow x = k \quad (a > 0, a \neq 1, x \text{ e } k \text{ sendo números reais})$$

### Função exponencial:

São todas funções do tipo  $f(x) = a^x$ , com  $x$  sendo um número real,  $a$  maior que zero e diferente de 1 ( $x \in \mathbb{R}, a > 0$  e  $a \neq 1$ ).

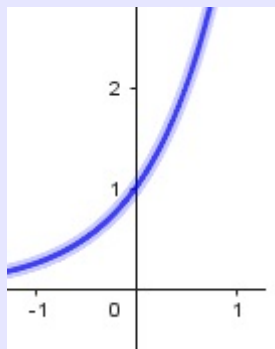
**Domínio:**  $D = \mathbb{R}$

**Imagem:** ou  $\text{Im} = \mathbb{R}_+^*$

**Função crescente:** se  $a > 1$

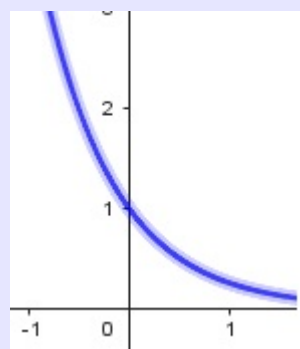
**Função decrescente:** se  $0 < a < 1$

Figura 4.5: Função crescente



Fonte: próprio autor

Figura 4.6: Função decrescente



Fonte: próprio autor

### Inequação exponencial:

$a > 1$  então  $a^x > a^k \rightarrow x > k$  ou  $a^x < a^k \rightarrow x < k$

$0 < a < 1$  então  $a^x > a^k \rightarrow x < k$  ou  $a^x < a^k \rightarrow x > k$



## Gabarito

### Exercício 1:

a)  $x = 4$  b)  $x = \frac{5}{2}$  c)  $x = -3$  d)  $x = \frac{5}{2}$  e)  $x = \frac{3}{4}$  f)  $x = 2$  ou  $x = -2$  **Voltar**

### Exercício 2:

a)  $x = 3$  b)  $x = 2$  c)  $x = 3$  **Voltar**

### Exercício 2.1:

$x^{-2} = \frac{1}{9}$  **Voltar**

### Exercício 3:

a)  $x = 1$  ou  $x = 0$  b)  $x = 3$  ou  $x = 1$  **Voltar**

### Exercício 3.1:

O valor da soma das raízes é 4. **Voltar**

### Exercício 4:

a) crescente, b) decrescente, os gráficos estão na resolução escrita deste exercício.

**Voltar**

**Exercício 4.1:**

$f(x)$  crescente,  $g(x)$  decrescente, elas tem um ponto em comum que é o  $(0, 1)$  e o gráfico está na resolução escrita deste exercício. **Voltar**

**Exercício 4.2:**

a) f   b) f   c) f   d) v   e) f   f) v **Voltar**

**Exercício 5:**

a) 3125   b) 17 horas **Voltar**

**Exercício 5.1:**

Sérgio juntou R\$ 165019,34. **Voltar**

**Exercício 6:**

$f(-2) = 16$  **Voltar**

**Exercício 6.1:**

$a = 2$  **Voltar**

**Exercício 7:**

a)  $(x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 4)$

b)  $(x \in \mathbb{R} \text{ e } x < 4)$

c)  $(x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 2)$

d)  $(x \in \mathbb{R} \text{ e } x < -1)$  **Voltar**

## Resolução escrita

### Exercício 1:

a)  $3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 4$

b)  $4^x = 32 \rightarrow 2^{2 \cdot x} = 2^5 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

c)  $7^x = \frac{1}{343} \rightarrow 7^x = 343^{-1} \rightarrow 7^x = 7^{-3} \rightarrow x = -3$

d)  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{32}{243} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \cdot x} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

e)  $7^{2 \cdot x} = \sqrt{343} \rightarrow 7^{2 \cdot x} = \sqrt{7^3} \rightarrow 7^{2 \cdot x} = 7^{\frac{3}{2}} \rightarrow 2x = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{4}$

f)  $3^{x^2-4} = 1 \rightarrow 3^{x^2-4} = 3^0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2$  ou  $x = -2$  **Voltar**

### Exercício 2:

a)  $2^{x+2} + 2^{x+3} = 96 \rightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = 96$ , substituindo  $2^x$  por  $m \rightarrow m \cdot 2^2 + m \cdot 2^3 = 96 \rightarrow 4m + 8m = 96 \rightarrow 12m = 96 \rightarrow m = 8$  e como  $2^x = m \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$

b)  $5^{x-1} + 5^{x+2} = 630 \rightarrow \frac{5^x}{5} + 5^x \cdot 5^2 = 630$ , substituindo  $5^x$  por  $m \rightarrow \frac{m}{5} + m \cdot 5^2 = 630$   
(multiplique todos os termos por 5)  $\rightarrow m + 125m = 3150 \rightarrow 126m = 3150 \rightarrow m = 25$  e  
como  $5^x = m \rightarrow 5^x = 25 \rightarrow 5^x = 5^2 \rightarrow x = 2$

c)  $3^{x-2} = 2 \cdot 3^x - 51 \rightarrow \frac{3^x}{3^2} - 2 \cdot 3^x = -51$ , substituindo  $3^x$  por  $m \rightarrow \frac{m}{3^2} - 2m = -51$   
(multiplique todos os termos por 9)  $\rightarrow m - 18m = -459 \rightarrow -17m = -459 \rightarrow m = 27$   
como  $3^x = m \rightarrow 3^x = 27 \rightarrow 3^x = 3^3 \rightarrow x = 3$  **Voltar**

**Exercício 2.1:**

$2^x + 2^{x+2} + 2^{x-1} = 44 \rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 44$ , substituindo  $2^x$  por  $m$   
 $\rightarrow m + m \cdot 2^2 + m \cdot 2^{-1} = 44 \rightarrow m + 4m + \frac{m}{2} = 44$  (multiplique todos os termos por 2)  
 $\rightarrow 2m + 8m + m = 88 \rightarrow 11m = 88 \rightarrow m = 8$  e como  $2^x = m \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$   
 e assim  $x^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$  **Voltar**

**Exercício 3:**

a)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \rightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ , substituindo  $5^x$  por  $m \rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau temos que a solução dela é  $m = 5$  ou  $m = 1$  e como  $5^x = m$  temos  $5^x = 5 \rightarrow x = 1$  ou  $5^x = 1 \rightarrow 5^x = 5^0 \rightarrow x = 0$ . Assim a solução desta equação é  $x = 1$  ou  $x = 0$ .

b)  $2 \cdot 4^x - 20 \cdot 2^x + 32 = 0 \rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 32 = 0$ , substituindo  $2^x$  por  $m$   
 $\rightarrow 2m^2 - 20m + 32 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau temos a solução dela é  $m = 8$  ou  $m = 2$  e como  $2^x = m$  temos  $2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$  ou  $2^x = 2 \rightarrow x = 1$ . Assim a solução desta equação é  $x = 3$  ou  $x = 1$ . **Voltar**

**Exercício 3.1:**

$2^{2x} = 10 \cdot 2^x - 16 \rightarrow (2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ , substituindo  $2^x$  por  $m \rightarrow m^2 - 10m + 16 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau temos a solução dela é  $m = 8$  ou  $m = 2$  e como  $2^x = m$  temos  $2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$  ou  $2^x = 2 \rightarrow x = 1$ . Assim as raízes da equação são  $x = 3$  ou  $x = 1$  e logo a soma delas é 4. **Voltar**

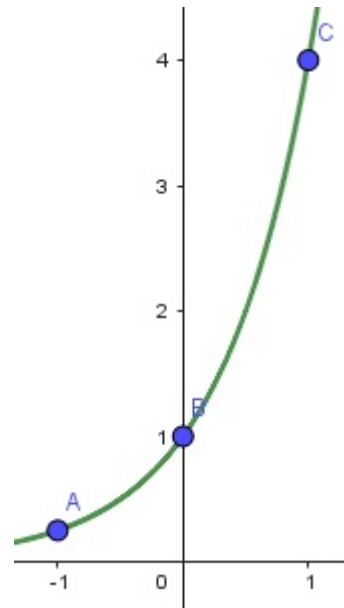
**Exercício 4:**

a)  $f(x) = 2^{2x} \rightarrow f(x) = 4^x \rightarrow a = 4 > 1$ , logo a função é crescente.

Figura 4.7: Gráfico do exercício 4 letra a.

x	$y = 4^x$	$(x, y)$
-1	$\frac{1}{4}$	$A = (-1, \frac{1}{4})$
0	1	$B = (0, 1)$
1	4	$C = (1, 4)$

⇒



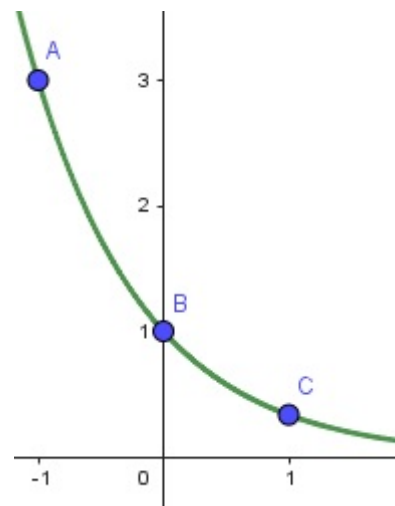
Fonte: próprio autor

b)  $f(x) = 3^{-x} \rightarrow f(x) = (\frac{1}{3})^x \rightarrow 0 < a = \frac{1}{3} < 1$ , logo a função é decrescente.

Figura 4.8: Gráfico do exercício 4 letra b.

x	$y = (\frac{1}{3})^x$	$(x, y)$
-1	3	$A = (-1, 3)$
0	1	$B = (0, 1)$
1	$\frac{1}{3}$	$C = (1, \frac{1}{3})$

⇒



Fonte: próprio autor

[Voltar](#)

**Exercício 4.1:**

$f(x) = 2^x \rightarrow a = 2 > 1$ , logo a função é crescente e  $g(x) = 2^{-2x} \rightarrow g(x) = (\frac{1}{4})^x \rightarrow 0 < a = \frac{1}{4} < 1$ , logo a função é decrescente.

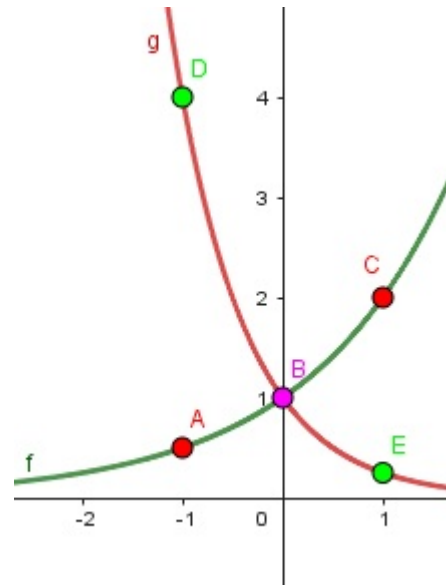
Como as bases são diferentes elas possuem apenas um ponto em comum que é o ponto  $(0, 1)$ .

Figura 4.9: Gráfico do exercício 4.1

x	$f(x) = 2^x$	$(x, y)$
-1	$\frac{1}{2}$	$A = (-1, \frac{1}{2})$
0	1	$B = (0, 1)$
1	2	$C = (1, 2)$

x	$g(x) = (\frac{1}{4})^x$	$(x, y)$
-1	4	$D = 4$
0	1	$B = (0, 1)$
1	$\frac{1}{4}$	$E = (1, \frac{1}{4})$

$\Rightarrow$



Fonte: próprio autor

**Voltar**

**Exercício 4.2:**

a) Como  $a \neq b$  então  $a^x = b^x \rightarrow x = 0$ , então temos apenas um ponto em comum, que é o ponto  $(0, 1)$ , logo a afirmativa é falsa.

b) Como  $a \neq b$  então  $a^x = b^x \rightarrow x = 0$ , então temos apenas um ponto em comum, que é o ponto  $(0, 1)$ , logo a afirmativa é falsa.

c) Ela é crescente se  $a > 1$ , logo a afirmativa é falsa.

d) Verdadeira.

e) Ela é decrescente se  $0 < b < 1$ , logo a afirmativa é falsa.

f) Verdadeira. **Voltar**

**Exercício 5:**

a) Como o experimento iniciou às 10h então  $15 - 10 = 5$ , indicando que se passaram 5h desde que se iniciou a experiência e assim temos:

$$f(t) = 5^t \rightarrow f(5) = 5^5 = 3125, \text{ logo a população às 15h é de } 3125 \text{ bactérias.}$$

b) Se a população é de 78125 bactérias vamos descobrir primeiro quantas horas se passaram desde que o experimento iniciou:

$f(t) = 5^t \rightarrow 78125 = 5^t \rightarrow 5^7 = 5^t \rightarrow 7 = t$ , logo se passaram 7 horas desde o início do experimento.

Como o experimento iniciou às 10h então  $10 + 7 = 17$  e assim a população de bactérias será de 78125 às 17 horas. **Voltar**

**Exercício 5.1:**

Sendo a fórmula que dá o montante  $f(x) = 50000 \cdot 1,01^x$  e sabendo que em 10 anos temos 120 meses, então temos  $f(120) = 50000 \cdot 1,01^{120} \rightarrow f(120) = 165019,34$  e assim Sérgio juntou R\$ 165019,34. **Voltar**

**Exercício 6:**

Sendo  $f(x) = 2^{b \cdot x}$  e sabendo que  $f(2) = \frac{1}{16}$  então temos:  $\frac{1}{16} = 2^{b \cdot 2} \rightarrow 2^{-4} = 2^{2 \cdot b} \rightarrow -4 = 2b \rightarrow b = -2$

Então como  $b = -2$  e  $f(x) = 2^{b \cdot x}$  temos:  $f(x) = 2^{-2 \cdot x} \rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  e assim  $f(-2) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$ . **Voltar**

**Exercício 6.1:**

Observe que no gráfico deste exercício temos o ponto  $(2, 4)$ , logo quando  $x = 2$  temos

$y = 4$  e assim:  $f(x) = a^x \rightarrow 4 = a^2 \rightarrow 2^2 = a^2 \rightarrow a = 2$ . **Voltar**

### Exercício 7:

a)  $3^x > 81 \rightarrow 3^x > 3^4$ , como  $a = 3 > 1$  conservamos o sinal da desigualdade e temos:  $x > 4$ .

b)  $(\frac{1}{3})^x > \frac{1}{81} \rightarrow (\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^4$ , como  $0 < a = \frac{1}{3} < 1$  invertemos o sinal da desigualdade e temos:  $x < 4$ .

c)  $(\frac{1}{5})^{x+1} < \frac{1}{125} \rightarrow (\frac{1}{5})^{x+1} < (\frac{1}{5})^3$ , como  $0 < a = \frac{1}{5} < 1$  invertemos o sinal da desigualdade e temos:  $x + 1 > 3 \rightarrow x > 2$ .

d)  $(\sqrt{2})^{x+1} < 1 \rightarrow (\sqrt{2})^{x+1} < (\sqrt{2})^0$ , como  $a = \sqrt{2} > 1$  conservamos o sinal da desigualdade e temos:  $x + 1 < 0 \rightarrow x < -1$ . **Voltar**

## 4.3 Considerações do Capítulo

Levando em conta o material que conseguimos produzir usando apenas ferramentas gratuitas ele atendeu todas expectativas, usa uma linguagem mais acessível ao estudante que não possui facilidade com matemática, tenta dialogar com ele, conseguimos colocar o gabarito e resoluções escritas de forma dinâmica e de fácil manuseio ao leitor, também conseguimos inserir palavras em destaque que quando clicadas levam a vídeos que explicam o conteúdo ou exercícios, ressaltamos que os vídeos não foram incorporados ao arquivo de pdf para ele não ficar muito “pesado” o que dificultaria para os usuários terem esse material em seus celulares ou tablets e por isso os links foram uma melhor escolha, pois o leitor necessitará apenas de internet.

Os vídeos citados no parágrafo anterior são todos autorais, estão disponíveis em um canal que foi criado no youtube para este fim, basta clicar [aqui](#) para ter acesso ao canal, então utilizando todas as ferramentas descritas conseguimos produzir um material didático digital que esta mais condizente com o universo dos estudantes e é interativo.



# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando Nasser e Nascimento (1997), referência [5], os índices de reprovação registrados em cálculo I em geral são elevados. Estes elevados índices de reprovação em cálculo I foram o principal fator do surgimento da disciplina de pré-cálculo.

Quanto à ementa ideal de pré-cálculo depois de várias pesquisas concluímos que é a seguinte: operações básicas com números racionais (frações), potenciação e radiciação, geometria plana, teoria dos conjuntos, equações e inequações, relações e funções, funções de 1º e 2º grau, funções Modulares, funções exponenciais e logarítmicas, funções trigonométricas.

Destaca-se ainda que cada instituição deve levar em consideração sua realidade local, as defasagens dos seus alunos ingressantes antes de definirem uma ementa para pré-cálculo, mas também ressalto que as disciplinas matemática básica para cursos superiores e pré-cálculo são distintas e que devemos levar em consideração a carga horária de cada disciplina para assim não colocarmos uma ementa grande demais para ser cumprida.

Quanto aos materiais didáticos podemos ver claramente que eles são ferramentas pedagógicas que auxiliam no processo de ensino-aprendizagem, existe uma variedade enorme delas conforme apresentamos algumas no decorrer deste trabalho e demos ênfase nos materiais digitais por estarem bem presente nos meios de comunicação usados pelos estudantes.

Produzimos um capítulo de um livro digital sobre o conteúdo de função exponencial utilizando apenas recursos e ferramentas digitais gratuitas, considero que o resultado obtido foi excelente, pois é um material “leve” que funciona em celulares, tablets, computadores, ele estabelece dialogo com seu usuário, deixa livre o caminho a seguir onde os estudantes decidem quando é preciso ver uma resolução escrita ou um vídeo explicativo com apenas um clique de acordo com sua necessidade, o material também é critico com as respostas obtidas nas resoluções dos exercícios e muitas vezes testa elas para ver se

esta certo, quanto ao layout do material também ficou muito bom apesar de eu não ser nenhum designer gráfico e nem ter experiência nesta área.

Percebemos que é possível ter muitas possibilidades de melhorarmos os livros digitais, suas interações e recursos, tendo meu trabalho como base já obtivemos um resultado satisfatório e penso que uma equipe profissional com membros da área de informática associados a educadores podem produzir um material ainda melhor.

# Referências Bibliográficas

- [1] SILVA, Aldeir José da; COSTA, Sandro dos Santos; ROCHA, João Silva e SILVA, José Eduardo. **Pré-cálculo na licenciatura em matemática: Revisão sistemática das contribuições pedagógicas ao desempenho do estudante.** *Research, Society and Development*, 10(6):e6810615496–e6810615496, 2021.
- [2] GODOI, Katia Alexandra de e PADOVANI, Stephania. **Avaliação de material didático digital centrada no usuário: uma investigação de instrumentos passíveis de utilização por professores.** *Production*, 19:445–457, 2009.
- [3] DICIO. **Digital.** Matéria de 2023. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/digital/>, acesso em 12 de abril de 2023.
- [4] DICIO. **Avaliar.** Matéria de 2023. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/avaliar/>, acesso em 13 de abril de 2023.
- [5] NASCIMENTO, Jorge Luiz do e NASSER, Lilian. **A reprovação em Cálculo I: Investigação de Causas.** *Rio de Janeiro, Monografia de Licenciatura–UFRJ*, 1997.
- [6] TRICHES, Francieli e LIMA, Helder Geovane Gomes de. **Pré-Cálculo.** Matéria de 2022. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/PreCalculo/livro/livro.pdf>, acesso em 29 de dezembro de 2022.
- [7] COELHO, Fredy e SCHEID, Eliane. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão.** *REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática*, 7(2):187–196, 2012.
- [8] BARRETO FILHO, Benigno e SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática aula por aula: volume único: ensino médio.** FTD, 2000.

- [9] FISCARELLI, Rosilene Batista de Oliveira. **Material didático e prática docente.** *Revista Ibero-Americana de estudos em educação*, 2(1):31–39, 2007.
- [10] SILVA, Katia Alexandra de Godoi e. **Avaliação de material didático digital na formação continuada de professores do ensino fundamental: uma pesquisa baseada em design.** 2013.
- [11] AXLER, Sheldon. **Pré-Cálculo - Uma Preparação para o Cálculo, 2ª edição.** E-book. ISBN 9788521632153. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521632153/>. Acesso em: 20 dezembro de 2022. Grupo GEN, 2016.
- [12] BANDEIRA, Denise. **Materiais Didáticos.** IESDE, 2009.
- [13] BOTAS, Dilaila. **A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática: Um estudo no 1º Ciclo.** *Revista Portuguesa de Educação*, pages 253–286, 2013.
- [14] GOMES, Francisco Magalhães. **Pré-cálculo: Operações, equações, funções e trigonometria.** E-book. ISBN 9788522127900. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522127900/>. Acesso em: 21 dezembro de 2022. Cengage Learning Brasil, 2018.
- [15] MEC. **Definidos os procedimentos para divulgação dos indicadores.** Matéria de 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/igc>, acesso em 13 de dezembro de 2022.
- [16] SAFIER, Fred. **Pré-Cálculo.** E-book. ISBN 9788577809271. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577809271/>. Acesso em: 18 dezembro de 2022. Grupo A, 2011.
- [17] UFTM. **Projeto Pedagógico e Matriz Curricular.** Matéria de 2022. Disponível em: <https://uftm.edu.br/engenharia-ambiental>, acesso em 29 de dezembro de 2022.
- [18] ANDRADE, Fabiana; ESQUINCALHA, Agnaldo e OLIVEIRA, Ana Teresa de. **O Pré-Cálculo nas licenciaturas em matemática das instituições públicas do Rio de Janeiro: o prescrito.** *VIDYA*, 39(1):131–151, 2019.

- [19] MEDEIROS, Valéria Zuma; CALDEIRA, André Machado; SILVA, Luiza Maria Oliveira da e MACHADO, Maria Augusta Soares. ***Pré-Cálculo***. E-book. ISBN 9788522116515. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522116515/>. Acesso em: 19 dezembro de 2022. Cengage Learning Brasil, 2013.
- [20] SILVEIRA, Sidnei Renato; CANDOTTI, Clarissa Tarragô; FALKEMBACH, Gilse Morgental e GELLER, Marlise. **Aplicação de Aspectos de Design Instrucional na Elaboração de Materiais Didáticos Digitais para Educação a Distância - Instructional Design Features Application in the Development of Digital Teaching Materials for Distance Education**. *Revista D.: Design, Educação, Sociedade e Sustentabilidade.*, 3(1):71–90, 2012.
- [21] GOMES, Bruno; GUEDES, Fabrícia; MARACAJÁ, Mariana; ALBUQUERQUE, Marriett e NICOLAU, Marcos. **Educação e novas tecnologias da informação e da comunicação: o livro didático digital no Brasil**. *Revista Temática*, 7:132–145, 2014.
- [22] UFTM. ***Minha Biblioteca***. Matéria de 2022. Disponível em: <https://siscad.uftm.edu.br/titan.php>, acesso em 29 de dezembro de 2022.
- [23] ALMEIDA, Fernanda. ***As 10 melhores universidades do Brasil em 2022***. Matéria de 2022. Disponível em: <https://forbes.com.br/carreira/2022/08/as-10-melhores-universidades-do-brasil-em-2022/>, acesso em 13 de dezembro de 2022.
- [24] Folha de São Paulo. ***Ranking de universidades***. Matéria de 2019. Disponível em: <https://ruf.folha.uol.com.br/2019/ranking-de-universidades/principal/>, acesso em 13 de dezembro de 2022.
- [25] PRADO, Mauro Júnio. ***Pré-Cálculo - Profmat - Mauro Prado***. Matéria de 2023. Disponível em: [https://www.youtube.com/channel/UC\\_Vf0z5RFLKVjwvUDXjFZpA](https://www.youtube.com/channel/UC_Vf0z5RFLKVjwvUDXjFZpA), acesso/criação em 19 de janeiro de 2023.
- [26] Times Higher Education. ***World University Rankings 2023***. Matéria de 2022. Disponível em: <https://www.timeshighereducation.com/>

- world-university-rankings/2023/world-ranking#!/page/0/length/-1/  
sort\_by/rank/sort\_order/asc/cols/scores, acesso em 13 de dezembro de 2022.
- [27] ADAMI, Adriana Miorelli; FILHO, Adalberto Ayjara Dornelles e LORANDI, Magda Mantovani. *Pré-Cálculo*. E-book. ISBN 9788582603215. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582603215/>. Acesso em: 18 dezembro de 2022. Grupo A, 2015.
- [28] ISO. *Usabilidade: definições e conceitos*. Matéria de 2018. Disponível em: <https://www.iso.org/standard/63500.html>, acesso em 13 de abril de 2023.
- [29] MICHELON, Ramiro. **Reflexões sobre o ensino do curso de Pré-Cálculo da UFRGS**. 2022.
- [30] UFMG. *Curso de Pré-cálculo Verão 2017 – PET*. Matéria de 2017. Disponível em: <https://www.mat.ufmg.br/curso-de-pre-calculo-verao-2016-pet/>, acesso em 15 de dezembro de 2022.
- [31] UFMG. *Ensino - Pré Cálculo*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://www.mat.ufmg.br/pet/>, acesso em 15 de dezembro de 2022.
- [32] UFRGS. *Curso de Pré-Cálculo*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/precalculo/precalculo/precalculo.html>, acesso em 15 de dezembro de 2022.
- [33] UFS. *Ensino - Graduação*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://www.ufs.br/>, acesso em 17 de dezembro de 2022.
- [34] UFSC. *Disciplina Pré-cálculo (MTM3100)*. Matéria de 2022. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/Graduandos/Pre-Calculo/Pre-calculo.html>, acesso em 17 de dezembro de 2022.
- [35] UFTM. *Projeto Pedagógico e Matriz Curricular*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://uftm.edu.br/fisica>, acesso em 17 de dezembro de 2022.
- [36] UFTM. *Projeto Pedagógico e Matriz Curricular*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://uftm.edu.br/matematica>, acesso em 17 de dezembro de 2022.

- [37] UFTM. *Projeto Pedagógico e Matriz Curricular*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://uftm.edu.br/quimica>, acesso em 17 de dezembro de 2022.
- [38] UNICAMP. *Ensino - Graduação*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://www.unicamp.br/unicamp/>, acesso em 15 de dezembro de 2022.
- [39] USP. *Ensino - Graduação*. Matéria de 2022. Disponível em: <https://www5.usp.br/>, acesso em 14 de dezembro de 2022.