UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT
MESTRADO EM MATEMÁTICA

KAIO LAMAISON ARAÚJO CAMPÊLO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA DAS HABILIDADES DA COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 DA BNCC

MOSSORÓ
2023

KAIO LAMAISON ARAÚJO CAMPELO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA DAS HABILIDADES DA COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 DA BNCC

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues.

Coorientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves.

MOSSORÓ

2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

LK13L amaison AraÃº jo CampÃ ª lor

Lamaison Araújo Campêlo, Kaio .
Resolução de problemas no Ensino Médio: Sequência didática das habilidades da competência específica 3 da BNCC / Kaio Lamaison Araújo Campêlo. - 2023.
120 f. : il.

Orientador: Walter Martins Rodrigues.
Coorientador: Odacir Almeida Neves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2023.

1. Resolução de problemas. 2. Ensino Médio. 3. BNCC. I. Martins Rodrigues, Walter , orient. II. Almeida Neves, Odacir , co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automáto em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

KAIO LAMAISON ARAÚJO CAMPÊLO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA DAS HABILIDADES DA COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 DA BNCC

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Defendida em: 24 / 05/ 2023.

BANCA EXAMINADORA

Walter Martins Rodrigues

Assinado de forma digital por WALTER MARTINS RODRIGUES:10304206881
Dados: 2023.07.20 16:28:49 -03'00'

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues. (Orientador) UFERSA

Documento assinado digitalmente
gov.br
ODACIR ALMEIDA NEVES
Data: 20/07/2023 16:00:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Odacir Almeida Neves. (Coorientador) UFERSA

Documento assinado digitalmente
gov.br
FABRICIO DE FIGUEREDO OLIVEIRA
Data: 20/07/2023 09:40:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira. (UFERSA)

Documento assinado digitalmente
gov.br
ODIRLEI SILVA JESUS
Data: 20/07/2023 20:46:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Odirlei Silva Jesus. (UFRN)

AGRADECIMENTOS

“Primeiramente dou graças ao meu Deus por Jesus Cristo, acerca de vós todos, porque em todo mundo é anunciada a vossa fé”. (ROMANOS, 1, 8).

Agradeço aos meus pais Maria Araújo e José Campêlo pelo apoio incondicional.

Agradeço à minha filha Ana Thaíssa, que me inspira a perseverar na caminhada da vida.

Agradeço aos meus irmãos, cunhado (a), sobrinhos (as) pela força e energia positiva.

Agradeço à minha querida e companheira Cleide Alves, pelo amor, incentivo, me apoiando desde o início da jornada do curso, principalmente nos momentos difíceis, além da paciência na minuciosa revisão do texto.

Agradeço ao estimado amigo e primo professor Dr. Gleydson Albano, por me motivar nessa árdua tarefa da minha vida.

Agradeço ao professor Dr. Walter Martins Rodrigues, meu orientador, sempre solícito na orientação e sugestões de melhoria na construção deste trabalho. Muito obrigado! E, de igual forma agradeço ao meu coorientador Prof. Dr. Odacir Almeida Neves.

Agradeço aos colegas de curso, com os quais tive a oportunidade de aprender e compartilhar experiências, em especial a amizade dos colegas Francisco José (Franzé) e Djalma.

Agradeço ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido da UFERSA, na pessoa dos seus professores pelo compartilhamento de saberes, pela coordenação e funcionários no cuidado de nossa vida acadêmica.

E por último e não menos importante, agradeço aos Governos do Estado da Paraíba e do Rio Grande do Norte por me conceder a licença para a realização desse curso.

“A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar. ”.

George Polya

RESUMO

Esta dissertação trata sobre o ensino realizado a partir da estratégia de resolução de problemas por suas características metodológicas, e por ser uma das abordagens mais usuais nas escolas brasileiras. Tem por objetivo propor situações problemas para o Ensino Médio na perspectiva do adensamento da prática pedagógica do professor de matemática com um olhar na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), buscando discutir a resolução de problemas como estratégia metodológica; bem como apresentar aos professores do Ensino Médio uma sequência didática de resolução de problemas matemáticos, que contemplem alguns dos objetos de conhecimentos de matemática no Ensino Médio, relacionados diretamente com as Habilidades da Competência "Específica 3 da BNCC". Esperamos que a temática possa contribuir na reflexão da docência da matemática em consonância com os documentos normativos vigente (BNCC) no Ensino básico, de modo a estimular os professores tanto em sua prática docente ao escolher a resolução de problemas como uma das possíveis estratégias, quanto na produção de materiais pedagógicos que possam potencializar no estudante novas formas de organizar suas ideias, construindo assim argumentos e estratégias consistentes com ou sem o uso das tecnologias digitais para revolver problemas matemáticos.

Palavras-Chave: Resolução de problemas. Ensino Médio. BNCC.

ABSTRACT

This dissertation deals with the teaching carried out from the problem solving strategy due to its methodological characteristics, and because it is one of the most common approaches in Brazilian schools. Its objective is to propose problem situations for High School from the perspective of deepening the pedagogical practice of mathematics teachers with a look at the National Common Curricular Base (BNCC), seeking to discuss problem solving as a methodological strategy; as well as presenting high school teachers with a didactic sequence for solving mathematical problems, which include some of the objects of knowledge of mathematics in high school, directly related to the Skills of Competence "Specific 3 of the BNCC". We hope that the theme can contribute to the reflection of mathematics teaching in line with the current normative documents (BNCC) in Basic Education, in order to encourage teachers both in their teaching practice by choosing problem solving as one of the possible strategies, as well as in the production of pedagogical materials that can empower students with new ways of organizing their ideas, thus building consistent arguments and strategies with or without the use of digital technologies to solve mathematical problems.

Keywords: Problem solving. High school. BNCC.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Um dos desafios da Educação Matemática na sociedade contemporânea, principalmente após o período da pandemia da COVID-19 e, nas condições atuais das políticas educacionais do país, é melhorar a qualidade e equidade do ensino aprendizagem da própria matemática afim de preparar os estudantes do Ensino Médio para a vida adulta e com aspirações ao mercado de trabalho. Nessa perspectiva, a abordagem da Matemática em sala de aula pautada apenas na premissa conteúdo-exemplos-exercícios com ênfase no ato de decorar fórmulas prontas torna-se insuficiente para atender aos objetivos na área de Matemática e suas Tecnologias defendidos pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC, no Ensino Médio, que define como objetivo:

> [...] consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando **o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração**. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. Grifo nosso. (BRASIL, 2018, p. 471).

Desse modo, pesquisadores em Educação Matemática, como por exemplo, Onuchic (2021) indicam metodologias que abordam a Resolução de Problemas como uma estratégia adequada para aprendizagem matemática no cenário complexo que se encontram atualmente as escolas, afirmando "... a necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimentos e transferir para o aluno grande parte da responsabilidade por sua própria aprendizagem, colocando-o como protagonista de seu processo de construção de conhecimento." (ONUCHIC, 2021, p. 42, 43). Essas mudanças passam pela conscientização e formação pedagógica do professor de matemática em transmitir aos estudantes os conteúdos com linguagem precisa e o emprego de modelos abstratos que podem ser usados em situações problemas concretos.

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é propor situações problemas para o Ensino Médio na perspectiva do adensamento da prática pedagógica do professor de matemática com um olhar na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), buscando discutir a resolução de problemas como estratégica metodológica; bem como apresentar aos professores do Ensino Médio uma sequência didática de resolução de problemas matemáticos, que contemplem alguns dos objetos de conhecimentos de matemática no Ensino Médio, relacionados diretamente com as Habilidades da **Competência Específica 3** da BNCC.

A competência específica 3 está relacionada ao fazer matemático, ou seja, está diretamente ligada à essência da Matemática – que é a ação de resolver situações problemas. Por esse motivo, explicita que os conceitos e procedimentos matemáticos somente terão significado caso os estudantes possam utilizá-los para solucionar os desafios com que se deparam. É importante destacar que a referida competência não se restringe apenas à resolução de problemas, mas também trata de sua elaboração. Isso revela uma concepção da resolução de problemas para além da mera aplicação de um conjunto de regras. Outro destaque refere-se à modelagem matemática como a construção de modelos matemáticos que sirvam para generalizar ideias ou para descrever situações semelhantes.

1.1 Relato de experiência

A atividade docente, para muitos, passa a impressão de que a única exigência para ministrar aulas está na sua formação técnica. Na verdade, no ingresso da graduação, em 2002, eu acreditava que "saber matemática" era a única competência necessária e suficiente para lecionar. Após ter concluído a Licenciatura em Matemática passei a compreender que o papel do professor não era somente ensinar, envolvia também a partilha de experiências vividas ao longo do processo de formação pessoal e técnico, bem como a disposição em observar as experiências de outros profissionais, e adotar para si métodos que possam influenciar o desempenho do trabalho docente no processo de ensino aprendizagem dos jovens no cotidiano da sala de aula.

Enquanto professor de Matemática da Rede Pública Estadual de Ensino da Paraíba e também do Estado do Rio Grande do Norte, tenho buscado nos últimos dezesseis anos aprimorar minha prática docente, esta em maior período no Ensino Médio, a partir da vivência em sala de aula e das transformações sociais e tecnológicas que a escola vem passando. O professor como sujeito ativo, se modifica pessoal e profissionalmente, devendo, portanto, sempre estar tentando aperfeiçoar seus conceitos e metodologias de ensino, como afirma Lúcio e Barroso (2013) "Pensar em chegar à completude limita as potencialidades do docente e o engessa, bem como engessa também a sua prática docente. " (LÚCIO; BARROSO, 2013, p. 4).

Hoje ser professor na escola pública tornou-se um desafio ainda maior pelas demandas trazidas dos estudantes com anseios a obter respostas que a sociedade moderna produz. Apesar da facilidade de acesso às informações com o advento da internet e a popularização dos equipamentos tecnológicos, a maioria das nossas escolas, em particular no interior dos Estados, não possuem infraestrutura física necessária, como também não há internet de qualidade, faltam laboratórios de informática (quando existem estão obsoletos), e formação pedagógica para o professor, e, o livro didático é, em muitos casos, o único recurso que o professor dispõe. Sem adentrar em aspectos da progressão da carreira docente, vale ressaltar a carga horária excessiva de trabalho, em que ministro 40 horas aula semanais (quando iniciei na docência eram 50 h).

Diante disso, como professor de matemática e, ao longo da carreira profissional, tenho vivenciado esses problemas na Educação Básica. Dramatizá-los não contribui para trazer ao debate público a verdadeira necessidade de construção, a longo prazo, de reforma estruturante à Educação Pública brasileira. Apesar dessas dificuldades arraigadas na história desse país, tento seguir na labuta de melhorar a forma de abordagem dos objetos de conhecimentos de matemática em sala de aula. A princípio as aulas expositivas dialogadas no tripé conteúdo-exemplos-exercícios sempre foi e continua sendo a base do ensino da matemática, e, só se aprende matemática praticando. Porém, com o tempo percebi que a exclusividade nessa prática pedagógica não trazia efeitos concretos de aprendizagem da matemática nos estudantes – não que essa forma seja ineficaz, porquê fui aluno formado nesses moldes.

Assim, na tentativa de obter melhores resultados na aprendizagem de matemática passei a utilizar a resolução de problemas, primeiro como objeto desafiador aos estudantes e, em seguida como estratégia complementar de ensino cujo objetivo é mostrar ao jovem a aplicabilidade da matemática no seu dia a dia, como também desenvolver no estudante o raciocínio lógico, disciplina para o estudo, planejamento estratégico para resolver diversos problemas, e resiliência.

No decorrer da minha trajetória docente ficou perceptível, até os dias atuais, a resistência de muitos alunos em estudar a matemática para resolver problemas, tendo em vista o avanço das tecnologias que proporcionam aos jovens "respostas imediatas" – tais fatos, ainda me motivam a continuar com essa opção metodológica em sala de aula, como também proporcionar reflexões aos professores nesse trabalho dissertativo, na possibilidade de "correção de rotas" das estratégias do ensino da matemática, com reflexão e a possibilidade de diálogo com outras áreas do conhecimento alinhados aos documentos normativos vigentes.

1.2 A estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em três capítulos. O primeiro consiste desta introdução, onde está apresentado o tema, os objetivos, e um relato de experiência que discorre brevemente acerca da minha prática docente e a delimitação do objeto deste trabalho.

O segundo capítulo tem a intenção de apresentar um resgate histórico, em um pequeno recorte, sobre a visibilidade da resolução de problemas em alguns momentos da história. Nesse sentido, este capítulo está dividido em seis tópicos, partindo da apresentação do Papiro de Ahmes (Rhind) como um dos primeiros registros da resolução de problemas da matemática nas civilizações antigas. O segundo tópico aborda a resolução de problemas no início do século XX nos Estados Unidos, em que os processos de ensinar e aprender matemática eram baseados na memorização, com problemas e cálculos longos sem aplicabilidade na vida do estudante. Na sequência, é apresentada a resolução de problemas na visão do matemático húngaro George Polya, dando destaque ao seu livro *A Arte de Resolver Problemas*, uma obra que apresenta uma sequência de quatro passos para um "resolvedor de problemas". O quarto tópico descreve um movimento paralelo à resolução de problemas denominado Movimento da Matemática Moderna (MMM), que pautava o ensino da matemática na Teoria dos Conjuntos. Em seguida, o próximo tópico trata do ensino da matemática no início da década 80 nos Estados Unidos, que passa a focar como estratégia principal nos currículos das escolas a resolução de problemas, e, no final desta mesma década, apresenta-se três abordagens – ensinar **sobre** a resolução de problemas, ensinar **para** resolver problemas e ensinar **por meio** de resolução de problemas. E no sexto e último tópico apresenta-se breves comentários acerca da matemática na BNCC do Ensino Médio, conforme o objetivo deste trabalho.

O terceiro capítulo apresenta uma sequência didática de problemas matemáticos em consonância com as Habilidades da Competência Especifica 3 da BNCC do Ensino Médio, que têm como um dos objetivos, a luz dos professores de matemática, trabalhar com os estudantes nas salas de aula a matemática *para* a Resolução de Problemas. Cada problema apresentado comunica-se com situações relevantes do cotidiano do estudante e busca contemplar pelo menos uma das dezesseis habilidades da competência específica 3. Além disso, fazemos comentários intrínsecos ao enunciado e a solução de parte desses problemas, com sugestões e diálogo para o professor.

E, a última parte do trabalho são apresentadas as considerações finais, seguidas das Referências.

2. UM BREVE HISTÓRICO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A temática da resolução de problemas há alguns anos passou a ter maior relevância na minha carreira docente como foi relatado no capítulo anterior. Para além desse relato pessoal, ao cursar o mestrado profissional, foi-nos apresentado considerações sobre a prática da estratégia de resolução de problemas como ferramenta de ensino para os professores de Matemática, dentro da disciplina de História da Matemática, no âmbito do PROFMAT da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA.

No decorrer do curso, a ideia do trabalho dissertativo com a temática proposta foi se fortalecendo, até a hora da escolha – percebendo a importância que potencialmente poderia ter ao compartilhar este trabalho com outros professores de matemática, buscando reflexões sobre um “ repensar da prática pedagógica. ”

Desse modo, este capítulo tem a intenção de apresentar um resgate histórico, em um pequeno recorte, sobre a visibilidade da resolução de problemas em alguns momentos da história.

2.1 O Papiro de Ahmes (Rhind)

Iniciamos trazendo os registros históricos que apontam como o aprender com exemplos é forte na cultura humana, e consequentemente um elemento de resolução de problemas. Sabemos a partir de fontes da história da matemática (EVES, 2004; GARBI, 2010; e CARVALHO; ROQUE, 2012), que os problemas matemáticos têm registros desde os antigos egípcios, babilônios, chineses e gregos. Por volta de aproximadamente 1550 a.C registra-se um importante manuscrito, senão o mais antigo e famoso da história matemática egípcia, o Papiro[1] de Ahmes ou (Rhind), contém 84 problemas[2] com suas soluções copiadas, em escrita hierática[3], pelo escriba Ahmes. Esse papiro surgiu no Egito, e é um documento semelhante a

[1] Planta tipo, **junco** (plantas floríferas), chega a 4,5 m de altura e era abundante no Delta do rio Nilo. O miolo da planta é dividido em tiras, pressionadas para formar folhas e depois de secas são lixadas com uma pedra. O papiro foi usado no Mediterrâneo aproximadamente mil anos atrás e deu origem à palavra papel na maioria das línguas europeias.

[2] O site do Museu Britânico afirma que o Papiro contém 84 problemas. Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057>. Acesso em: 30 nov. 2022. E, outros historiadores afirmam que são 85 ou 87 problemas.

[3] Historiadores relatam que a escrita não era Hieróglifos, mas sim uma taquigrafia administrativa com rabiscos, rápida e simples de escrever.

um livro autoexplicativo, em outras palavras, “Tudo que você precisa saber sobre matemática” no mundo antigo e, descreve como os egípcios lidavam com os números.

O papiro que foi adquirido pelo egiptólogo Escocês A. Henry Rhind em Tebas (próximo de Luxor) na década de 1850, também conhecido como o papiro de Rhind, descreve métodos de multiplicação e divisão com o qual os egípcios calculavam os números e teria sido usado para resolver problemas práticos administrativos da época, por exemplo, calcular a quantidade de pães a partir de uma determinada quantidade de grãos, bem como o emprego da regra da falsa posição – método que ficou conhecido na Europa que consistia da resolução de uma equação linear simples, a solução do problema de calcular a área de um círculo, problemas de aritmética, repartições proporcionais, trigonometria simples, progressões e volumes. Segundo o professor Clive Rix, da Universidade de Leicester o Papiro de Rhind tem o seguinte significado:

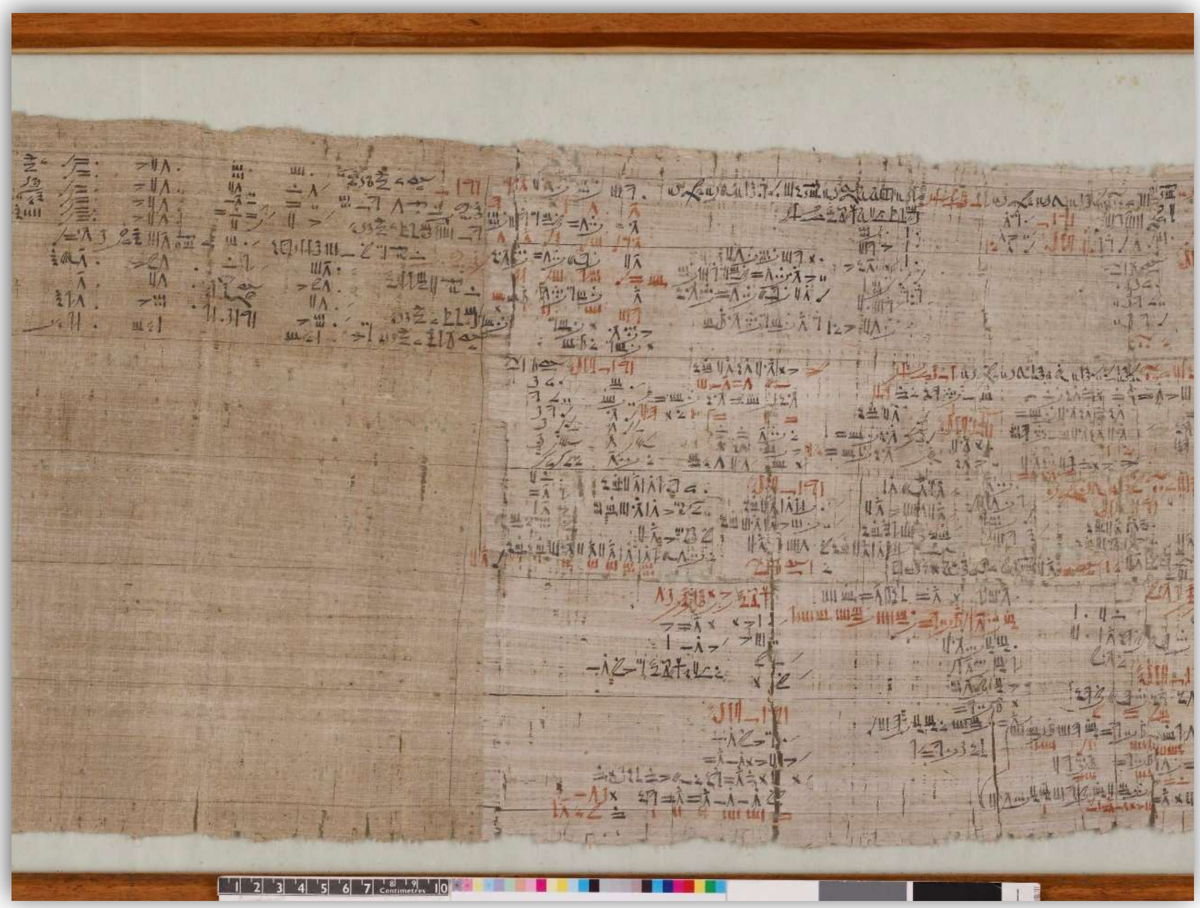
> A opinião tradicional tem sido sempre a de que os gregos aprenderam sua geometria com os egípcios. Escritores gregos, como Heródoto, Platão e Aristóteles, se referem à extraordinária habilidade dos egípcios em geometria. Se não tivéssemos o papiro matemático de Rhind, saberíamos de fato muito pouco sobre como os egípcios lidavam com a matemática. A álgebra nele é aquela que chamamos de álgebra linear, equações de linha reta. Há algumas progressões aritméticas, um pouco mais sofisticadas. A geometria é de um tipo bem básico também. Ahmose [o copista original do papiro] nos diz como calcular a área de um círculo e como calcular a área de um triângulo. Não existe nada neste papiro que crie dificuldades para um aluno do ensino médio, e a maioria das informações é bem menos avançada do que isso. (MACGREGOR, 2013, p. 118).

O papiro de Ahmes tem origem em Ramesseum, templo funerário em ruínas dedicado ao faraó Ramsés II, composto por três partes, com aproximadamente dezoito pés[4] (5,5 m) de comprimento por treze polegadas (33 cm) de altura. Comprado pelo Museu Britânico em 1864, continha duas partes, e publicado no ano de 1927. Em 1932 um egiptólogo americano chamado Edwin Smith comprou no Egito um papiro médico que foi doado à Sociedade Histórica de Nova York onde descobriu-se, por especialistas, que se tratava da parte que faltava do papiro de Ahmes. Então, a sociedade doou o pergaminho ao Museu Britânico, completando assim o Papiro de Rhind. Atualmente as duas partes maiores do Papiro estão no The *British Museum* (Museu Britânico) e, pela extrema sensibilidade a luz e a umidade é protegido por uma moldura

[4] Segundo o Wikipédia: **Pé (ou pés no plural; símbolo: ft ou ′)** é uma unidade de medida de comprimento. Um pé corresponde a 12 polegadas, e três pés são uma jarda. Esse sistema de medida é utilizado atualmente no Reino Unido. 1 ft = 30,48 cm

de vidro, localizado em uma sala bastante seca, com pouca ventilação e escura, o que seria semelhante as condições de uma tumba do Egito antigo.

Figura 1: O papiro apresenta 84 problemas matemáticos; a tinta vermelha indica o título ou a solução de um problema.

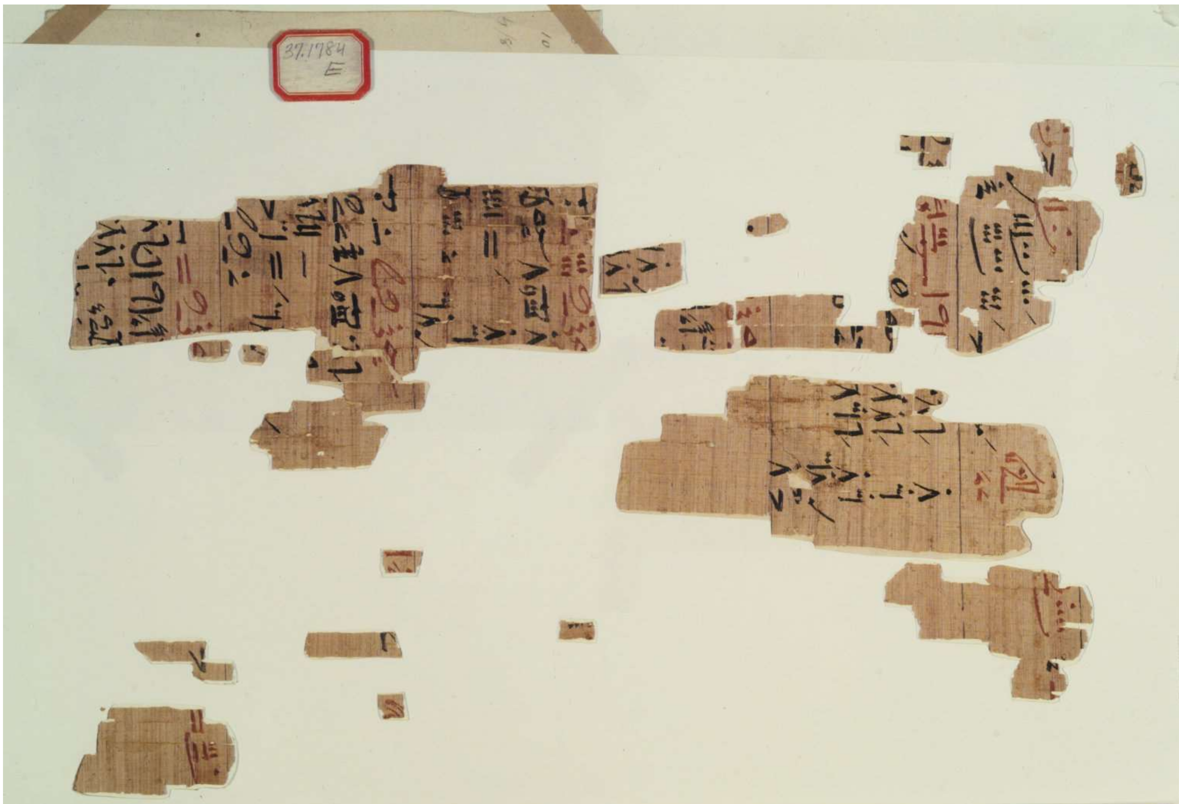


Fonte: https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057

A outra parte do papiro está no Museu do Brooklin, em Nova York, conforme registro do site oficial[5]:

[5] Site oficial do Brooklyn Museum. Disponível em <https://www.brooklynmuseum.org/opencollection/objects/118304>. Acesso em: 25 Out. 2022.

Figura 2. Fragmentos do Papiro Matemático de Rhind.



Fonte: https://www.brooklynmuseum.org/opencollection/objects/118304

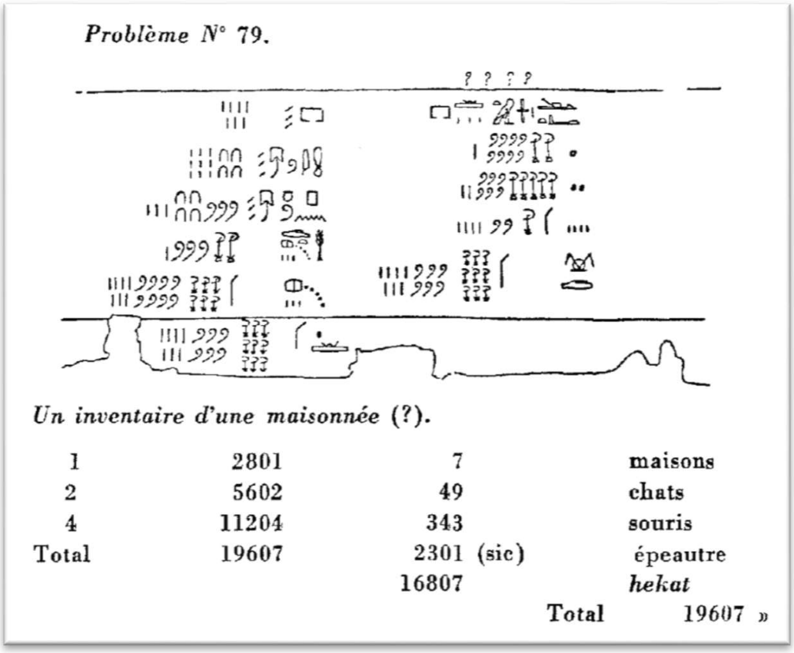
Segundo Bertato (2020), o primeiro tradutor desse Papiro foi o egiptólogo alemão August Adolf Eisenlohr (1832 - 1902) que fez uma tradução comentada com a inclusão de fotocópias. O inglês Thomas Eric Peet (1882 – 1934) efetuou uma tradução que se tornou preferencial de seus colegas egiptólogos, e as traduções dos problemas são acompanhadas por comentários. O historiador Marshall Clagett (1916 - 2005), traduziu para o inglês a mais recente tradução do Papiro de Rhind.

Dentre os 84 problemas distintos no papiro de Ahmes, o problema 79 (o inventário de uma casa), supõe a soma de uma sequência numérica de termos em progressão geométrica, ou seja, o número 7 é a razão e cada termo é obtido multiplicando por 7 o termo imediatamente anterior. De acordo com o historiador Moritz Cantor, em 1907, uma possível interpretação do problema 79 do papiro de Ahmes é:

> [...] Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecares de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecares de grãos, quanto havia disso tudo? (EVES, 2004, p. 76).

Uma tradução do problema 79 do papiro de Rhind é apresentado da seguinte forma:

Figura 3. Problema 79 do Papiro de Rhind.


Problème N° 79.

Un inventaire d'une maisonnée (?).

1	2801	7	maisons
2	5602	49	chats
4	11204	343	souris
Total	19607	2301 (sic)	épeautre
		16807	*hekat*
		Total	19607 »

Fonte: https://www.matematicaparafilosofos.pt/numero-10

Nota-se que a solução para esse problema é a soma das cinco primeiras potências de 7 ($7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 19.607$), nas duas colunas a esquerda da figura acima é feita a multiplicação egípcia, ou seja, duplicações sucessivas. Percebe-se ainda um erro na tradução do escriba, em vez de escrever 2401 ele escreve 2301, entretanto o resultado final não se altera. O problema 79, egípcio, obteve várias versões, incluindo uma parlenda inglesa do século XVIII, " O caminho do St. Ives" que diz:

> As I was going to St Ives,
> Upon the road I met seven wives;
> Every wife had seven sacks,
> Every sack had seven cats,
> Every cat had seven kits:
> Kits, cats, sacks, and wives,
> How many were going to St Ives? (EVES, 2004, p. 76).

Tradução: "(Quando me dirigia a San Ives / encontrei-me com 7 mulheres / cada mulher levava 7 sacos, / e cada saco tinha 7 gatos / e cada gato tinha sete gatinhos: / gatinhos, gatos, sacos e mulheres, quantos é que iam para San Ives?)". Esse problema, como está descrito, há uma ou mais interpretações que fazem com que a poesia tenha distintas soluções possíveis. Assim, uma solução bastante comum é a soma : $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2.800$. Então, a depender da interpretação que se faça a pergunta "***Quantos é que iam para San Ives? "***, a resposta é **um** (o narrador da história, pois os que ele encontra na estrada estão vindo de San Ives) ou **zero** (considerando que o narrador não pertence ao grupo.).

O Papiro de Ahmes, em uma primeira observação, parece dar conta do trabalho administrativo dos egípcios na época, pois se registram o uso de quantidade de grãos, bebidas, áreas de porção de terras, entre outras situações do dia a dia desta civilização, conforme relata Macgregor (2013):

> O papiro de Rhind não nos dá uma noção da matemática como disciplina abstrata com a qual se pode conceber e contemplar o mundo de uma nova maneira. Porém nos deixa vislumbrar — e partilhar — as dores de cabeça diárias de um administrador egípcio. Como todos os servidores públicos, ele parece estar preocupado com o Tribunal de Contas, querendo se certificar de que está empregando bem o dinheiro. Por isso há cálculos sobre quantos galões de cerveja ou quantos pães podem ser obtidos a partir de uma determinada quantidade de grãos, assim como para identificar se a cerveja ou o pão que estão sendo comprados foram adulterados. (MACGREGOR, 2013, p. 116).

Por outro lado, em uma segunda visão, os problemas matemáticos contidos neste papiro podem nos fornecer informações de cunho pedagógico para o ensino, pois a visão de resolução de problemas dos egípcios pode inspirar os professores a conectarem a visão da matemática antiga com a educação matemática atual, como relatam as professoras Silva e Pereira (2016):

> [...] Como esta é uma composição que contém problemas e suas soluções, o aluno poderá ver como os egípcios resolveriam as questões relacionadas aos conteúdos que eles estudam nos dias atuais na sala de aula, obtendo uma forma diferenciada para o estudo daquele tópico. [...] pode-se mostrar para os alunos como os egípcios multiplicavam e dividiam, como eles transformavam frações em frações unitárias, como eles faziam os cálculos para construir as famosas pirâmides do Egito e encontrar cada medida necessária, mostrar como eles tratavam as unidades de medidas, etc. (SILVA; PEREIRA, 2016, p. 7).

Com isso, o papiro de Ahmes além de ser um documento que registra o trabalho administrativo dos egípcios na época, possui potencialidades didáticas de modo a ensinar, com os olhos de hoje, uma maneira diferente de abordar e resolver problemas matemáticos.

2.2 A resolução de problemas no início do século XX

Com o passar do tempo, entre o papiro de Ahmes e o início do Século XX, o desafio de resolver problemas envolveu diferentes formas e entendimentos. Um destaque é indispensável nessa trajetória - Os matemáticos **Leonhard Euler**[6]**(1707-1783)** e **Édouard Lucas**[7]**(1842 – 1891)** viam já a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino de Matemática muito eficaz por ser uma técnica que promove inquietações na busca de saberes no sentido de buscar a solução.

Nas primeiras décadas do século XX iniciou-se debates nos Estados Unidos sobre a metodologia do ensino de Matemática sobre movimento chamado de teoria da Resolução de Problemas, que visava a promoção de uma aprendizagem matemática mais significativa, aplicada em problemas da vida cotidiana e fornecia ao cidadão conhecimentos mínimos e necessário a atender as demandas das mudanças sociais e econômicas provocadas pela industrialização do pais há época.

De acordo com Onuchic (2021), o currículo escolar nos Estados Unidos era baseado na teoria da Disciplina Mental[8]. Essa teoria de aprendizagem via a mente humana como uma coleção hierárquica das capacidades: memorização, intuição ou razão, imaginação e compreensão, ou seja, treinando uma competência acreditava-se na transferência da mente para as outras competências. Segundo Onuchic (2013):

> Ao passar de uma sociedade rural, agrária e pecuária, onde poucos precisavam saber Matemática, para uma sociedade industrial, onde mais gente precisava saber Matemática, o ensino da Matemática, no início do século XX, foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, onde o recurso a memorização de fatos básicos era considerado importante. (ONUCHIC, 2013, p. 2).

O ensino se detinha apenas a treinar e desenvolver essas faculdades. Assim, o ensino de Aritmética, bem como o de outras disciplinas, era baseado na teoria da Disciplina Mental. Segundo Santos (2016), a Aritmética nesse período possuía duas características:

> [...] a) era um ensino difícil; e, b) tinha pouca relação com aspectos práticos da vida – nas séries mais avançadas, os cálculos e problemas eram longos e complicados, com pouco ou nenhuma utilidade para as atividades diárias, até mesmo dos adultos. (SANTOS, 2016, p. 148).

Em consequência das mudanças sociais do início do século XX e com o desenvolvimento da psicologia, a teoria da Disciplina Mental sofreu enfraquecimento cujo reflexo afetou mudanças na organização escolar e consequentemente no ensino da matemática.

---

[6] Ver Referências: O génio de Euler na matemática e na física.
[7] Ver Referências: Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (2018).
[8] Teoria psicológica desenvolvida pelo psicólogo alemão Christian Wollf no ano de 1740.

Então, o ensino de aritmética bem como o de geometria e outros conteúdos de matemática, que eram baseados na teoria da mente, passaram a ser investigados por psicólogos e estudiosos da educação, afim de comprovar por meios de experimentos se deveriam continuar no currículo.

Pesquisas em psicologia realizadas por Edward Lee Thorndike a partir de 1917 direcionadas para o ensino da Matemática, produziu manuais intitulados de *The Thorndike Arithmetics* formados em três volumes, *(Book One, Two e Three*) voltados para alunos das escolas americanas. Nesses manuais, Thorndike organiza os conteúdos de forma diferente dos velhos métodos[9] destinados aos alunos, onde as relações desses conteúdos contemplam operações fundamentais como, por exemplo, compras e vendas, negócios privados, negócios públicos, aritmética na loja e na fábrica, aritmética especial para trabalho de escrituração, aritmética para o comércio, omitindo assim problemas de enunciados "fantasiosos" que não possuem nenhum sentido para o aluno.

Segundo Santos (2016) Thorndike também publicou *The Thorndike Algebra,* que tratava dos tópicos:

> [...] fórmulas e equações; números algébricos, expressões algébricas e fórmulas: adição e subtração; expressões algébricas e fórmulas: multiplicação e divisão, produtos e fatores; frações: equações fracionárias e fórmulas; potências e raízes: revisão; expressando relações por tabelas, gráficos e fórmulas; equações expressando importantes relações matemáticas; variação direta; variação inversa; equações lineares, conjunto de equações; resolução de equações quadráticas; razão e proporção, tangente, seno e co-seno; princípio geral da álgebra, revisão; logaritmos e outros esquemas de economizar trabalho. (SANTOS, 2016 p. 160).

Em 1921 Edward Lee Thorndike escreveu o livro *The New Methods in Arithmetic* (Os Novos Métodos na Aritmética) que foi publicado no Brasil, em português, em 1936. Para Thorndike o livro possui como aspecto aplicar "ao ensino da aritmética os princípios descobertos pela psicologia do aprendizado, pela pedagogia experimental e pela observação da prática escolar bem-sucedida" (THORNDIKE, 1936, p. 7). No capítulo VII: Requisitos Necessários à Organização dos Problemas de Aritmética, o autor destaca três elementos principais que devem ser considerados na solução de um problema: "[...] (1) a compreensão exata da questão, (2) o conhecimento dos fatos que se devem utilizar para solucioná-la, (3) o uso desses fatos em corretas relações aritméticas. " (THORNDIKE, 1936, p. 154).

---

[9] Dar-se a teoria geral, regra ou explicação de processos como soma, subtração de frações ordinárias ou da divisão de decimais, e depois se exigia que o aluno copiasse os exercícios até torná-lo capaz de usar tais processos correto e rapidamente.

Já o autor Thorndike também enfatiza que as dificuldades de os alunos aprenderem assim como a difícil tarefa dos professores ensinar a resolver problemas, estavam vinculadas em "palavras divorciadas" de situações da vida real. "Os novos métodos" de Thorndike traz significados aos problemas impostos pela vida e estimula o senso de participação dos estudantes a encontrar respostas aos questionamentos que se relacionam com a Aritmética prática, de modo que esses problemas seriam de nível médio de dificuldade para o entendimento do que o seriam se a própria realidade as apresentassem. Destaca-se ainda que o autor defendia a importância dos enunciados dos problemas trabalhados no ambiente escolar para que tivessem elementos semelhantes a fatos vivenciados fora da sala de aula, ou seja, a visão conexionista[10] de Thorndike garantia que a aprendizagem ocorresse, contradizendo a teoria da Disciplina Mental.

No início da década de 1940 o processo de ensino de Resolução de Problemas ganhou destaque com a metodologia descrita pelo matemático George Polya em seu livro *A Arte de* R*esolver Problemas* (1994), onde o autor elenca aspectos de fundamental importância para que os estudantes desenvolvam habilidades para obter êxito em resolver problemas. Segundo Polya o professor deve ser um grande resolvedor de problemas de modo a contribuir na melhor formação do conhecimento dos estudantes. O livro *A Arte de Resolver Problemas* é uma referência para os professores e pesquisadores em educação matemática.

2.3 A teoria da Resolução de Problemas de George Polya

George Polya nasceu em 13 de dezembro de 1887 em Budapeste, Hungria. Considerado um dos matemáticos mais influentes do século XX pelas pesquisas em análise complexa, teoria das probabilidades, combinatória e geometria. Seus trabalhos sobre a teoria de Resolução de Problemas ganharam notoriedade pelos artigos publicados e por suas palestras proferidas sobre o tema, atuando como professor titular na Universidade de Stanford nos Estados Unidos.

Em 1945 Polya publicou o livro *A Arte de Resolver Problemas*, uma obra que apresenta uma sequência de quatro passos para que um "revolvedor de problemas" execute a resolução de qualquer problema matemático:

1) **Compreensão do problema -** elencar os dados do problema e compreender a relação com a condicionante para que seja possível resolvê-lo;

[10] Segundo Onuchic (2021), pág. 21, Conexionismo era a teoria compreendida nos seguintes passos: 1 - Lei do efeito; 2- lei da prontidão ou da maturidade específica; 3- lei do exercício ou repetição.

2) **Estabelecimento de um plano -** encontrar uma conexão entre os dados do problema com possíveis situações correlatas de conhecimento prévio e/ou tentar estabelecer uma relação de semelhança de um problema conhecido que tenha a mesma incógnita;
3) **Execução do plano**, isto é, executar cada passo das estratégias pensadas na etapa anterior detalhando todas as operações (aritméticas, algébricas ou geométricas);
4) **Retrospecto -** fazer uma análise e discussão do resultado do problema; é possível chegar ao resultado por um caminho diferente? Em caso de erro, pode-se tentar resolver o problema com base no próprio erro? Para Polya, ao adquirir o hábito de resolver e examinar a solução de qualquer problema, o estudante obterá conhecimentos ordenados para serem utilizados no desenvolvimento da capacidade de solução de problemas. No seu livro, Polya propôs um conjunto de problemas, discutindo-os com cada passo das quatro fases. Estudos posteriores completam estas fazes em 5 ou 6 dependendo da natureza do problema.

Polya explica ainda em A *Arte de Resolver Problemas* que, resolver problemas requer o uso da heurística[11], que tem como objetivo o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Polya (1994) diz:

> [...] A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir a base em que se assenta a Heurística. Nesse estudo, não devemos descurar nenhum tipo de problema, e sim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independentemente do assunto específico do problema. O estudo da Heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da matemática. (POLYA, 1994, p. 87).

A pesquisa sobre a Resolução de Problemas, segundo Polya, está direcionada para a melhoria das habilidades da resolução de problemas pelos estudantes e, para que isso ocorra, o autor sugere que os professores se tornem bons revolvedores de problemas. Além disso, atividades em sala de aula na perspectiva da resolução de problemas como metodologia de ensino, deve propiciar aos estudantes o desenvolvimento do raciocínio, trabalhando situações problema que sejam compatíveis com seus conhecimentos e que satisfaça a curiosidade deles. Polya (1994) diz:

> Os professores e os autores de livros didáticos não devem esquecer que estudante inteligente e o LEITOR INTELIGENTE não se satisfazem em

[11] Palavra de origem grega "que serve para descobrir, encontrar ou inventar" – ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à lógica, à filosofia ou à psicologia.

> verificar que os passos do raciocínio estão corretos, mas desejam também conhecer a motivação e a finalidade dos vários passos. [...] A matemática é interessante na medida em que ocupa as nossas faculdades de raciocínio e de invenção. Mas nada se aprenderá sobre o raciocínio ou invenção se a motivação e a finalidade do passo mais notável permanecer incompreensível [...]. (POLYA, 1994, p. 72).

Segundo Onuchic (2021), a partir de Polya, as pesquisas em Resolução de Problemas no currículo de matemática se aprofundaram e, ganharam repercussão em outros países no final da década de 1960. No ano de 1972 foi realizado em Exeter, na Inglaterra, o II-ICME - *International Congress on Mathematical Education* ("Segundo Congresso Internacional de Educação Matemática") no qual Polya foi homenageado, e na ocasião, proferiu a palestra *As I read them* (como eu os leio).

Em 1975, na Universidade da Geórgia, aconteceu o primeiro Seminário de Pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática. Este evento reuniu vários pesquisadores engajados com o estudo da resolução de problemas, o que colaborou para que o tema na matemática produzisse 22 artigos publicados no livro *Problem Solving in Schools Mathematics (*A Resolução de Problemas na Matemática Escolar), em 1980, nos Estados Unidos. Dentre esses artigos, destaca-se o de George Polya "Sobre a resolução de problemas de matemática na *high school*[12]", onde o autor apresenta os resultados de pesquisas do trabalho do professor de matemática em sala de aula em abordar o ensino da Resolução de Problemas.

2.4 A matemática moderna

Na década de 1950 a então União Soviética avançou suas pesquisas espaciais em relação aos Estados Unidos, quando em outubro de 1957 lançou no espaço o primeiro satélite, Sputnik I. Nesse contexto de guerra fria e, com o crescimento tecnológico decorrente da segunda guerra mundial pesquisadores norte-americanos perceberam no ensino de ciências a necessidade por mudanças na preparação dos estudantes para os futuros desafios científicos. Era também consenso de professores de matemática e educadores, em outros países, que o ensino de matemática não estava bem e deveria modernizar o currículo, com o intuito de atender aos desafios do desenvolvimento tecnológico.

Na matemática a ideia era que, para se ter sucesso, os estudantes precisariam de um tratamento adequado pois estes pesquisadores estavam insatisfeitos com a relação entre os

[12] *High school* nos Estados Unidos, segundo Onuchic (2021), tem duração de quatro anos e corresponde ao Ensino Médio no Brasil.

conteúdos propostos e a forma como eles eram trabalhados nas escolas secundárias americanas. Para Oliveira Filho (2009):

> [...] havia ênfase inadequada nas habilidades, preocupação desnecessária com a utilidade imediata do que era ensinado e uma distorção inadequada dos estudantes quanto à natureza da matemática, o que, segundo eles, arriscava o futuro bem-estar do país [...] (OLIVEIRA FILHO, 2009, p. 68).

Em virtude das mudanças sociais do pós-guerra e com a finalidade de equiparação tecnológica com a Rússia, bem como a preocupação em reduzir as deficiências no ensino de matemática nas escolas secundaristas, professores de matemática, psicólogos e educadores discutiram e criaram em 1958, nos EUA, o *School Mathematics Study Group* - SMSG 'Grupo de Estudos de Matemática Escolar'. O SMSG tinha o propósito de reformular o currículo de matemática. Para isso, publicaram vários livros didáticos que continham "novos tópicos". Esse movimento paralelo a teoria da Resolução de Problemas, ficou conhecido posteriormente como o Movimento da Matemática Moderna – MMM, e vigorou no currículo norte-americano até o início da década de 1970.

O MMM pautava o currículo do ensino da matemática no estudo da Teoria dos Conjuntos, ou seja, com ênfase na matemática dedutiva e simbólica e com métodos abstratos, voltada para o estudante do ensino básico. Para aqueles que se colocavam contrário ao MMM, era desprezar a matemática desenvolvida até então, por outro lado, os defensores da reforma defendiam a renovação dos currículos aplicando novos métodos de ensino sem desconsiderar a matemática "velha". No Brasil segundo Oliveira Filho (2009), a Matemática Moderna começou a ser discutida em 1961, com a criação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM, em que, por orientação do Governo Militar, firmou-se uma parceria entre o Ministério da Educação do Brasil com a Agencia Norte Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID). Essa parceria tinha o intuito de "modernizar" o ensino do Brasil.

Para Lima (2007), o período da matemática Moderna no Brasil (décadas de 60 e 70) tinha como características o "excesso de conceituação" em detrimento as aplicações do conhecimento matemático que incluem a resolução de problemas. Somado a isso, o MMM impactou no processo de formação dos professores de matemática e sua importância na vida moderna. Lima (2007) diz:

> As consequências desse movimento em nosso país foram desastrosas, em que pese o fato de que algumas das práticas propostas eram realmente aconselháveis. Acontece que, tradicionalmente, desde nossos dias de colônia,

> estamos acostumados a seguir a moda que nos ditam os países mais desenvolvidos. E, em geral, imitamos o que é fácil, superficial e frívolo. Nossa imitação da Matemática Moderna resultou em abandono da Geometria e dos cálculos numéricos, substituídos por exageros conjuntivistas e um pseudo-formalismo vazio e desligado da realidade. (LIMA, 2007, p. 164).

O Movimento da Matemática Moderna no Brasil tinha como objetivo superar as dificuldades existentes do Ensino tradicional, buscando “democratizar” o conhecimento matemático que até então era privilégio da minoria, ou seja, o Ensino da Matemática contribuía para a elitização econômica cujo objetivo era adestrar os estudantes em fórmulas e regras sem aplicações. Além do estudo da Teoria dos Conjuntos, os modernistas defendiam abordar a Geometria Euclidiana explorando os conceitos de espaços vetoriais e álgebra linear. Porém no Brasil segundo Soares (2001), os professores de matemática não estavam preparados para implementar essas “novas ideias”, o que acarretou no abando do Ensino de Geometria e ênfase a Álgebra.

> [...]O ensino por meio do estudo das transformações lineares e espaços vetoriais não teve muito lugar na prática. A falta de preparo dos professores e a liberdade que a Lei de Diretrizes de Base da Educação de 1971 dava às escolas quanto a decisão sobre os programas das diferentes disciplinas fez com que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la na sua programação. Os que continuaram a ensiná-la o fazia de modo precário. Os próprios livros didáticos passaram a parte de Geometria para o final do livro, o que fez com que durante o Movimento da Matemática Moderna a Álgebra tivesse lugar de destaque. (SOARES, 2001, p. 11).

O MMM foi alvo de muitas críticas desde o seu início, nos Estados Unidos o matemático Morris Kline publicou o livro *O Fracasso da Matemática Moderna* (1976), o autor manifesta-se contra as mudanças no Ensino da matemática, em particular, aquelas ditas Matemática Moderna. Dentre as críticas argumentadas por Kline destacam-se: ênfase na abordagem dedutiva, grande quantidade de terminologia e símbolos, o novo conteúdo inapropriado para os estudantes, ênfase na Teoria dos Conjuntos e isolamento da realidade. No Brasil segundo Soares (2001),o professor Osvaldo Sangiorgi até então o maior defensor das ideais do MMM, reconheceu erros. Em 1975, em um artigo publicado pelo jornal “ O Estado de São Paulo”, Sangiorgi diz: “ começaram a surgir também no Brasil, sinais vermelhos contra a aceleração exagerada que se fazia em nome da Matemática Moderna”. O MMM não se mostrou eficaz em superar as dificuldades apresentadas pelo Ensino tradicional pois sua implantação no Brasil foi feita sem planejamento e também sem o devido cuidado na formação pedagógica dos professores, pois o excesso na Teoria dos Conjuntos contribuiu para que os objetivos originais do Movimento não se realizassem.

2.5 Abordagens do Ensino de resolução de problemas

Na década de 1980, nos Estados Unidos, organizações educativas contrárias ao ensino com ênfase excessiva em cálculos proposto pelo Movimento da Matemática Moderna publicaram, em abril de 1980, um documento chamado de *An agenda for action: Recommendations for school Mathematics of the 1980s, do National Council of Teachers of* Mathematics – NCTM (1980). Esse documento continha um conjunto com oito recomendações para o Ensino de Matemática. Dentre elas, a primeira recomendação da NCTM (1980) dizia: “A resolução de problemas seja o foco da matemática escolar na década de 1980*”,* tradução nossa. (NCTM, 1980, p. 1).

Para o NCTM (1980) os educadores de matemática devem concentrar esforços para organizar o currículo no desenvolvimento da capacidade dos indivíduos em resolver problemas, de modo que o aluno se sinta preparado a lidar com as exigências profissionais e cotidianas da vida.

> [...] Esta recomendação aponta para a necessidade de resolver problemas em um futuro incerto, bem como aqui e agora. Como tal, a matemática precisa ser ensinada como matemática, não como um complemento de seus campos de aplicação. Isso exige uma atenção contínua à sua coesão interna a os princípios de organização, bem como aos seus usos. Tradução nossa (NCTM, 1980, p. 02).

A partir de 1989, o NCTM comprometido com a excelência no ensino e aprendizagem da matemática divulgou novos Padrões para o currículo, ensino e avaliação de matemática, chamado de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics(1989)*[13]. Segundo Schroeder e Lester (1989), nesse período, a resolução de problemas era o que mais se comentava no currículo de matemática e, ao mesmo tempo pouco compreendida.

Apesar dos esforços na produção de vários recursos e estratégias de resolução de problemas para uso dos professores em sala de aula, houve incoerência de alguns grupos na compreensão do real significado que a Resolução de Problemas tinha como “foco” da matemática Escolar desse período. Schroeder e Lester (1989) apontam uma das maneiras de

---

[13] Padrões de Currículo e Avaliação para Matemática Escolar. Para consulta ver NCTM (1989).

contornar essas diferenças, pois era preciso distinguir as três abordagens para o ensino de solução de problemas:

> [...] (1) ensinar **sobre** a resolução de problemas, (2) ensinar **para** resolver problemas e (3) ensinar **por meio** de resolução de problemas. Uma declaração explícita dessa distinção apareceu em um artigo escrito há mais de uma década por Hatfield (1978), mas suspeitamos que outros também possam ter defendido um ponto de vista semelhante [...] Tradução nossa. Grifo nosso. (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32).

O e*nsino **sobre** a resolução de problemas,* de acordo com Schroeder e Lester (1989), é uma forma semelhante ao modelo aplicado por Polya (1994), onde se descreve uma sequência de quatro passos (Compreensão do problema; Estabelecimento de um plano; Execução do plano e Retrospecto**)** registradas em *A Arte de Resolver Problemas*. Algumas das estratégias ou "heurísticas" para orientar os estudantes está em resolver problemas mais simples e trabalhar de trás para a frente, que incluem buscar padrões e experiências na solução real de problemas. Para Onuchic (2021) pode ser considerado "como um novo conteúdo".

A concepção do *ensino **por meio** ("*através"*) de resolução de problemas*, Schroeder e Lester (1989) afirmam que os problemas são valorizados não apenas como um propósito para aprender matemática, mas também como um meio primário de fazê-lo. Onuchic (2021) considera que a expressão "através" tem significado "ao longo", "no decorrer", ou seja, Matemática e Resolução de problemas são consideradas e construídas mútua e continuamente, entretanto, nessa abordagem o Problema é o ponto de partida para aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos de matemática. Ainda de acordo com Schroeder e Lester (1989):

> [...]. A aprendizagem da matemática dessa maneira pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como uma instância do conceito ou técnica matemática) para o abstrato. [...] Tradução nossa. (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 33).

Para Onuchic (2021), o ensino ***por meio*** é visto como a Metodologia: *Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*[14], defendida e estudada por vários pesquisadores cujos trabalhos foram desenvolvidos pelos membros do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP, e recentemente pelo Grupo de Pesquisa e Estudos Avançados em Educação Matemática – GPEAEM.

[14] Por que "ATRAVÉS" da Resolução de Problemas? O problema gerador é defendido por Onuchic (2021) que visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento.

Nesta metodologia os problemas são trabalhados antes que os conteúdos matemáticos sejam apresentados aos alunos, desta forma, o objetivo é estimular os estudantes a desenvolver técnicas matemáticas para encontrar respostas razoáveis aos problemas dados.

Já a abordagem o e*nsino* ***para*** *a resolução de problemas,* apontada por Schroeder e Lester (1989), é aquele no qual o professor trabalha os conceitos e definições dos objetos de conhecimento matemático para depois aplicá-los a quaisquer situações. Além disso, o professor que ensina para a resolução de problemas está preocupado com a capacidade dos estudantes de transferir o que aprenderam de um contexto de problemas para outro, logo o argumento que pode sustentar essa concepção é que, a única maneira de aprender matemática é levar o aluno a ser capaz de usar o conhecimento adquirido para resolver problemas.

Entendo que dentre as três, o *ensino* ***para*** a resolução de problemas é, a abordagem mais usual na maioria das escolas brasileiras e, pelas suas características metodológicas pode-se trabalhar associada às Habilidades da Competência Específica 3 da BNCC para o Ensino Médio.

A NCTM publicou em seguida, *Professional Teaching Standards for School Mathematics (1991)*[15], *Assessment Standards for School Mathematics(1995)*[16] e *Principles and Standards for School Mathematics (2000*[17]*).* Este último documento, apelidado de *Standards 2000* (Padrões 2000), é a atualização dos três documentos originais.

Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (NCTM, 2000) busca garantir que todos os alunos recebam uma educação matemática de alta qualidade. Para alcançá-lo, requer currículos matemáticos sólidos e professores competentes. Assim exige uma base comum de matemática a ser aprendida por todos os alunos, entretanto, não implica que todos os alunos são iguais, mas que tenham acesso à matemática de qualidade nos programas de ensino. Um dos propósitos deste documento é focar nos currículos e a importância na relação entre os objetos de conhecimento e a resolução de problemas, NCTM (2000) diz:

> [...] Os primeiros cinco Padrões descrevem objetivos de conteúdo matemático nas áreas de números e operações, álgebra, geometria, medição e análise de dados de probabilidade. Os próximos cinco Padrões abordam os processos de resolução de problemas, raciocínio e prova, conexões, comunicação e representação. [...] O conteúdo matemático e os padrões de processo discutidos nos capítulos 3-7 estão inextricavelmente ligados. Não se pode resolver problemas sem entender e usar o conteúdo matemático. [...] Tradução nossa (NCTM, 2000, p. 07).

[15] Padrões de Ensino Profissional para Matemática Escolar.
[16] Padrões de Avaliação para Matemática Escolar.
[17] Princípios e padrões para a Matemática Escolar. Para consulta, ver NCTM (2000).

No Brasil, esses movimentos de reformulação nos currículos também acompanharam os trabalhos que vinham sendo desenvolvidos pela NCTM (2000). Na década de 1990, na busca de atender as demandas educacionais da sociedade brasileira e dos desafios globais, foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1ª à 4ª série no ano de 1997, os PCN de 5ª à 8ª série foram publicados no ano de 1998 e o PCN do Ensino Médio em 1999.

Segundo os PCN's de Matemática (BRASIL, 1998), a estratégia de ensino baseada em resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar seus conhecimentos e desenvolver suas capacidades para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Desta forma, os estudantes podem ter uma oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver maior autoconfiança.

No ano de 2002 foi lançado o PCN+ como Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Nesse documento destaca-se no Ensino da Matemática a Resolução de Problemas como componente fundamental para mobilizar e desenvolver no indivíduo o "pensamento matemático".

Em PCN+, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias diz:

> [...]. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. Isso não significa que os exercícios do tipo "calcule...", "resolva..." devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho. [...] (BRASIL, 2002, p. 110).

Nesse sentido, os currículos escolares nacionais no Brasil passaram por várias discussões e avanços e, para além dos PCN's temos em vigor a Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Veremos no tópico seguinte, um breve resumo desse documento, onde destacamos a abordagem para a Resolução de Problemas como metodologia para a aquisição progressiva das habilidades da competência específica 3, da BNCC, em alguns objetos de conhecimento de matemática propostos ao longo do Ensino Médio.

2.6 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no ensino médio

De acordo com a constituição de 1988, pela Lei de Diretrizes e Bases de 1996 e no Plano Nacional de Educação criado em 2014, estabeleceu-se a criação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental e Médio, sendo este um documento com normas essenciais para o desenvolvimento da aprendizagem do educando ao longo do ensino básico.

Em 2015, a primeira versão da BNCC começou a ser debatida, e recebeu mais de 12 milhões de sugestões em audiências públicas, onde metade deste veio da contribuição de 45 mil escolas. A segunda versão, em 2016, organizada pelo Conselho Nacional de Secretários de Educação (CONSED) e União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME), percorreu todos os estados, debatendo por meio de seminários com mais de 300 mil professores, educadores e alunos os detalhes do documento. Em abril de 2017, a versão final foi entregue ao Conselho Nacional de Educação (CNE) e aprovada no dia 17 de dezembro daquele ano, sendo homologada pelo Ministério da Educação em 20 de dezembro, passando a valer em todo o território nacional.

A BNCC expressa as aprendizagens essenciais desde a educação infantil até o Ensino médio, ou seja, ela define e visa garantir ao longo do processo de formação educacional do estudante a aquisição de **habilidades** e **competências**. Na prática, a BNCC determina as aprendizagens essenciais dos estudantes, independente da região que vivem no Brasil garantindo os pressupostos da igualdade e da equidade. Para as escolas, a mudança traz uma reformulação nos currículos de modo que os Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) sejam atualizados continuamente a atender as realidades de seus estudantes e propicie aos professores uma orientação organizada, pautada na inserção de tecnologias digitais com foco na aprendizagem e no futuro dos educandos.

Um dos princípios da BNCC é a conexão dos componentes curriculares com os problemas reais do cotidiano, ou seja, é preciso desenvolver nos estudantes o protagonismo e a capacidade em relacionar os objetos de conhecimento trabalhados na sala de aula com situações práticas da vida, ajudando assim na aquisição de habilidades e competências, como é possível observar na definição de competência a seguir:

> [...] é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 08)

No Ensino Médio, a matemática tem o papel fundamental de construção dos pilares da cidadania, através do pensamento matemático, com suas conjecturas e abstrações, possibilitar capacitar esses jovens a compreender os desafios do mundo contemporâneo. A matemática no Ensino médio deve consolidar e aprofundar os conceitos e procedimentos aritméticos, algébricos e geométricos vistos no Ensino Fundamental. Na BNCC diz:

> [...] a área de Matemática e suas Tecnologias tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos. Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**.** [...] (BRASIL, 2018, p. 528, 529).

Para cada área do conhecimento, são definidas competências específicas, articuladas às respectivas competências das áreas do Ensino Fundamental e Médio. De acordo com a BNCC, os discentes, no decorrer do Ensino Médio, precisam saber raciocinar, representar, comunicar-se e argumentar matematicamente. Para que os estudantes desenvolvam essas competências, é necessário a interação com seus colegas e professores em, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemático. Assim, a matemática no Ensino médio, com foco na Resolução de Problemas, é um método que irá auxiliar o professor a desenvolver a capacidade de raciocínio dos estudantes em articular os conhecimentos, por exemplo, da física, biologia e química com a matemática.

Na BNCC, a matemática no Ensino Médio deve garantir ao estudante o desenvolvimento de cinco competências específicas e, cada uma dessas estão relacionadas com habilidades que serão trabalhadas no decorrer desta etapa. Neste trabalho buscaremos apresentar aos professores do Ensino Médio uma sequência didática de **Resolução de Problemas matemáticos**, que contemplem alguns dos objetos de conhecimentos relacionados diretamente com as Habilidades da **Competência Específica 3** com foco no adensamento da capacidade de o educando identificar, interpretar e resolver matematicamente problemas contextualizados também com outras áreas do conhecimento.

Na BNCC, a Competência Específica 3 diz:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531).

As habilidades desta competência específica visam mobilizar os estudantes a formular e resolver problemas matemáticos que relacionem conceitos quantitativos, algébricos, geométricos e probabilísticos com o mundo do trabalho, ou seja, os estudantes precisam construir significados para os conteúdos trabalhados no ensino médio. Ademais, essa competência específica considera diversos tipos de problemas com o qual os educandos precisam fazer interpretações para identificar e formular modelos que possibilitem aplicar algoritmos e técnicas para obter a solução do problema:

> Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (BRASIL, 2018, p. 536).

No quadro abaixo, descrevemos as dezesseis habilidades que compõe a **competência específica 3**, correlacionadas com as respectivas unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

Quadro 1 - Habilidades da competência específica 3 de matemática para o Ensino Médio.

Habilidades da Competência Específica 3 por Unidade Temática
Números
(EM13MAT303). Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT310). Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT313). Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
Álgebra

(EM13MAT301). Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302). Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT304). Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(**EM13MAT305).** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306). Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(**EM13MAT315).** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
Geometria
(**EM13MAT308).** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(**EM13MAT309).** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Grandezas e Medidas
(**EM13MAT307).** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT314).** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

Probabilidade e Estatística
(EM13MAT311). Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312). Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT316). Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Fonte - Brasil, 2018, p. 536, 537.

3. SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA AQUISIÇÃO DAS HABILIDADES DA COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 DA BNCC SEQUÊNCIA DIDÁTICA

No capítulo anterior apresentamos uma síntese histórica das pesquisas internacionais e nacionais da evolução da Resolução de Problemas no Ensino de Matemática. Nesse capítulo apresentaremos uma sequência didática de problemas matemáticos em consonância com as Habilidades da Competência Especifica 3 da BNCC, que têm como um dos objetivos, à luz dos professores de matemática, trabalhar com os educandos nas salas de aula a matemática *para* a Resolução de Problemas. Além disso, os problemas a seguir visam adensar os conhecimentos matemáticos dos professores do Ensino Médio bem como estimulá-los a reflexão da sua prática pedagógica na abordagem desse tema no dia a dia da sala de aula.

3.1 Sequência Didática

Como última etapa da educação básica, o Ensino Médio deve propiciar ao estudante a aquisição de novos saberes para aperfeiçoar seus conhecimentos prévios. Assim, a matemática no Ensino Médio envolve informações técnicas específicas: compreensão e interpretação de códigos, notação, desenhos e gráficos e suas relações com a linguagem discursiva, além disso, desenvolve habilidades e competências com a Resolução de Problemas integrado às Ciências da Natureza. Em PCN+ Ensino Médio (2002), orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares Nacionais diz:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111).

As aulas de matemática precedem um planejamento do professor, explicitando um “encadeamento” de passos que são essenciais para a compreensão dos objetos de conhecimentos trabalhados com as atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes com auxílio do professor ao longo do Ensino Médio.

A sequência didática surge na França na década de 80 amparada na teoria de Lev Vygotsky (sócio-interacionismo). No Brasil o termo “sequência didática” surgiu nos documentos oficiais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) "projetos" e "atividades sequenciadas" (BRASIL, 1997, p. 41). Há várias definições de Sequência Didática e maneiras diferentes de elaborá-las.

Segundo Oliveira (2013) uma sequência didática “compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem” (OLIVEIRA, 2013, p. 13).

Para Zabala (2007) uma sequência didática é definida como: “Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 2007, p. 18). Ainda segundo o autor, a sequência didática foca em três fases: o planejamento, a aplicação e a avaliação.

A sequência didática é importante para consolidar a aprendizagem dos objetos de conhecimentos estudados que discorrem no Ensino Médio na construção de conhecimentos:

> Ao organizar a sequência didática, o professor poderá incluir atividades diversas como leitura, pesquisa individual ou coletiva, aula dialogada, produções textuais, aulas práticas, etc., pois a sequência de atividades visa trabalhar um conteúdo específico, um tema ou um gênero textual da exploração inicial até a formação de um conceito, uma ideia, uma elaboração prática, uma produção escrita (BRASIL, 2012, p. 21).

Os elementos básicos que compõe uma sequência didática na visão de Oliveira (2013) são os seguintes passos:

- Escolha do tema trabalhado;
- Questionamentos para problematização do assunto a ser trabalhado;
- Planejamentos dos conteúdos;
- Objetivos a serem atingidos no processor ensino-aprendizagem;
- Delimitação da sequência de atividades, levando-se em consideração a formação de grupos, material didático, cronograma, interação entre cada atividade e etapas, e avaliação dos resultados. (OLIVEIRA, 2013, p. 40).

Brousseau (2008) define a Didática como uma relação entre os objetos de Ensino e a maneira como os estudantes adquirem os conhecimentos e seus métodos. Na área da didática Matemática, Brousseau desenvolveu uma teoria conhecida como **Teoria das Situações Didáticas** - compreender a relação entre estudante e os métodos utilizados pelo professor em sala de aula.

Guy Brosseau, educador francês, é considerado o pai da Didática da Matemática por esclarecer as interações cognitivas e sociais na área da Educação matemática, permitindo a compreensão das relações sociais que ocorrem na sala de aula entre estudantes e professores e das condições com que o conhecimento matemático pode ser aprendido. Segundo a sua teoria " Uma situação é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado", reunindo as circunstâncias nas quais um indivíduo se encontra e as relações que a unem ao *milieu* (meio*)*. A Teoria das Situações Didáticas busca criar autonomia nos estudantes onde o professor "provoque" nos alunos reflexões por meio de uma coleção de problemas, além disso é fundamental não dar respostas prontas dos problemas sugeridos.

> [...] Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação em que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se *adidátic*a. (BROSSEAU, 2008, p. 35).

3.2 Sequência Didática para o professor

Os treze problemas que apresentamos comunicam-se com situações relevantes do cotidiano do estudante e busca contemplar pelo menos uma das dezesseis habilidades da competência específica 3, alguns deles, atendem a mais de uma habilidade pelas características do objeto de estudo e também podem estar relacionados com alguma habilidade das outras quatro competências que abrange a BNCC. Como a maioria das dezesseis habilidades possui vários assuntos diversos (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) da matemática para serem trabalhados no decorrer do Ensino Médio, então alguns dos problemas propostos possuem estratégias de resolução diferente. Além disso, fazemos comentários intrínsecos ao enunciado e a solução de parte desses problemas, com sugestões e diálogo para o professor. Na sala de aula, a metodologia a ser adotada de como abordar problemas no Ensino Médio é aberta a análise de cada professor, entretanto é fundamental que seja criado uma coleção de bons problemas, ou seja, os quais os alunos terão chance de sucesso, com temas apropriados e que seja possível trabalhar durante o ano letivo, pois nossa experiência nos diz que os estudantes, em sua maioria, não gostam de resolver problemas. Ao mesmo tempo, esses problemas devem oportunizar aos estudantes progressão de aprendizagem em ritmo próprio e podem ser apresentados no início, durante ou depois dos conceitos e manipulações dos objetos matemáticos estudado.

Segundo Dante (2000):

> Ensinar a resolver problema é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o auxílio e incentivo do professor. (DANTE, 2000, p. 30).

Desta forma, cabe ao professor instigar os alunos a construírem estratégias no intuito da leitura, reflexão e compreensão dos problemas, sendo encorajados a fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos. Por outro lado, o professor terá que enfrentar situações inesperadas em sala de aula e em algumas oportunidades, deverá alterar aquilo que tinha planejado. Diante do exposto, nota-se a importância de que o professor conheça essa metodologia, pois sua proposta é de um trabalho centrado no aluno, onde ele possa desenvolver sua aprendizagem, construir seu conhecimento, onde o professor mediará essa construção.

A seguir, apresentamos um quadro que resume os 13 problemas para que o professor/leitor possa visualizar rapidamente os elementos gerais acerca de cada problema.

Quadro 2: Resumo da sequência didática

<table>
<tr><th colspan="4">PROBLEMAS</th></tr>
<tr><th></th><th>1 - Jota Quest canta para 250 carros no Allianz Parque</th><th>2 - Cavando um buraco</th><th>3- (OBMEP-2012 - Adaptado)</th></tr>
<tr><th rowspan="6">Objetos de conhecimento</th><td colspan="3">Estudo da função Quadrática.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Inequação-produto.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Área de figuras planas.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Semelhança de triângulos.</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Habilidades da Competência Específica 3</th><td colspan="3">EM13MAT302</td></tr>
<tr><td></td><td>EM13MAT309</td><td>EM13MAT307
EM13MAT308</td></tr>
<tr><th rowspan="4">Ações propostas</th><td colspan="3">Usar o “Método de Completar Quadrados” para resolver equações do 2ª grau.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Apresentar e discutir diferentes métodos para solução de problemas de otimização.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Expressar a função quadrática na forma canônica.</td></tr>
<tr><td>Refletir sobre a notação matemática adotada para o estudo</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

	do Movimento retilíneo Uniforme e Uniformemente variado.		
Tempo estimado	120 min	120 min	150 min
PROBLEMAS			
	5 - Tanques de aço inox para produção de vinhos	**6 - Juros Contínuos**	**7 - Efeitos da radiação no meio ambiente**
Objetos de conhecimento	Progressão Geométrica		
	Estudo da Função Exponencial		
	Recursividade	Estudo da Função Logaritmo	
	Conceito de Limite		
		Matemática financeira- tipos de capitalização (simples, compostas e contínuas).	
Habilidades da Competência Específica 3		EM13MAT303	
	EM13MAT304		
	EM13MAT305		
Ações propostas	Caracterizar modelos exponenciais		
	Refletir sobre o conceito recursivo.	Discutir tipos de capitalização.	Discutir fórmulas usadas nas Ciências da Natureza.
	Utilizar softwares para plotar gráficos.	Apresentar o *número de Euler*	
Tempo estimado	150 min	150 min	120 min

PROBLEMAS		
	9 - Dia das crianças	**10 – Como é feito um notebook?**
Objetos de conhecimento	Diagrama de árvore	
	Agrupamentos ordenados e não ordenáveis (combinações)	
		Probabilidade Condicional
Habilidades da Competência Específica 3		EM13MAT312
	EM13MAT310 e EM13MAT311	
Ações propostas	Apresentar e discutir diferentes método de contagem.	
	Refletir sobre o uso de fórmulas para resolver um problema de contagem.	
		Discutir a probabilidade condicional e a probabilidade simultânea (teorema da multiplicação de probabilidades) de dois eventos equiprováveis.
Tempo estimado	120 min	120 min

PROBLEMAS					
	4 - Quanta Gente?	**8 - Como checar a pressão arterial?**	**11 – Etiqueta de eficiência energética (PBE)**	**12 – A primeira imagem de um buraco negro**	**13 – Cubos conectados**
Objetos de conhecimento	Média aritmética e Sistema de	Principais razões trigonométricas;	Grandezas determinadas pela razão ou produto	Algarismos significativos e	Noções básicas de Matemática Computacional.

	equações lineares.	Função periódica.	de outras; Proporcionalidade direta e inversa.	técnicas de arredondamento.	
Habilidades da Competência Específica 3	EM13MAT301 EM13MAT316	EM13MAT306	EM13MAT314	EM13MAT313	EM13MAT315
Ações propostas	Discutir a existência ou não de solução de um sistema linear e refletir em situações-problemas em outros contextos.	Refletir sobre as informações contidas no enunciado do problema de modo que, a partir da definição e propriedades da função cosseno lhe conduza a formular a resposta; usar o Geogebra para elaborar um quadro para analisar a variação dos parâmetros das funções $f(x) = a + b\cos(kx + c)$ e $g(x) = a + b\sin(kx + c)$; Refletir se deve ou não aprofundar nas questões de equações, inequações e identidades trigonométricas.	Discutir com outros componentes curriculares o contexto do problema; Formalizar diversas atividades para representar situações envolvendo grandezas compostas.	Reconhecer a notação científica como uma maneira eficiente para expressar números muito grandes ou muito pequenos em diversos contextos.	Inserir a linguagem de programação, tipo o Python, que somado a matemática possibilidade compreender o mundo digital;
Tempo estimado	50 min	150 min	120 min	50 min	120 min

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Problema 1 - Jota Quest canta para 250 carros no Allianz Parque[18]

No dia 27 de junho de 2020, em São Paulo, foi a vez de os motoristas trocarem o filme por um show da banda Jota Quest. A apresentação no Allianz Parque reuniu nada menos do que 250 veículos no projeto drive-in, da “Arena Sessions”.

O ingresso para ver a banda custava entre R$ 450 e R$ 550 por carro, que poderia acomodar até quatro pessoas. Segundo o site da revista "Veja", as palmas do público foram substituídas por buzinaço e pelo acende e apaga dos faróis. Sem trânsito, os carros precisaram de 15 minutos para entrar no estádio, segundo o site. Na parte interna, as vagas eram separadas por grades com caixas de som ao lado da janela de cada veículo. Para facilitar a vista, o palco não tinha teto. Tudo é feito dentro do carro, exceto o banheiro, cuja fila é controlada pela equipe de produção e – dependendo de cada drive-in – acionada via lanternas do carro ou aplicativos de celular.

Em tempos de distanciamento social, os eventos drive-in representam uma das únicas oportunidades para diversão fora de casa com segurança e responsabilidade. Para quem pode, foi a oportunidade de poder sair de casa e conferir shows, stand-ups ou mesmo eventos religiosos e corporativos sem ter que sair do carro.

Devido a pandemia da COVID-19, todos os tipos ou modalidades de shows foram cancelados. De acordo com o texto acima, suponha que o preço do ingresso por carro é R$ 550,00. Para cada redução de R$1,00 no preço do ingresso, o número de carros “espectadores” aumentará em 5. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita do show seja máxima? Qual o faturamento máximo do show?

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT302). Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetos de conhecimento abordados:

Estudo da Função quadrática; desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Possíveis estratégias para a resolução do problema

Uma proposta de solução

---

[18] Texto adaptado de duas reportagens. Ver Referências Problema 1.

Obviamente, a rentabilidade do show será o produto da quantidade de veículos presentes no "Allianz Parque" pelo valor pago por cada carro (ingresso). Ora, para cada redução de R$1,00 a menos no preço do ingresso implica um aumento de cinco veículos a mais no show. Para ilustrar essa situação faremos uma tabela:

Tabela 1. Rentabilidade do show.

Preço do ingresso (R$)	Quantidade de carros	Rentabilidade (R$)
550	250	137.500
549	250 + 5 = 255	139.995
548	250 + 5.2 = 260	142.480
547	250 + 5.3 = 265	144.955
546	250 + 5.4 = 270	147.420
545	250 + 5.5 = 275	149.875
....	....	....
2	250 + 5.548 = 2990	5980
1	250 + 5.549 = 2995	2995

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que existe algum valor específico no preço do ingresso para o qual a rentabilidade do show seja máxima. Daí, denotemos por x o valor em reais a ser descontado de R$ 550,00 e seja $\mathrm{R(x)}$ a rentabilidade. Assim temos,

$$\mathrm{R(x)} = \overbrace{(550 - \mathrm{x})}^{\text{valor do ingresso}} \quad . \quad \overbrace{(250 + 5.\mathrm{x})}^{\text{quantidade de veículos}}$$

Efetuando o produto obtemos : $\mathrm{R(x)} = -5\mathrm{x}^2 + 2500\mathrm{x} + 137.500$

Temos uma função quadrática $\mathrm{R(x)}$, com $\mathrm{x} \geq 0$. Logo existe um x inteiro tal que a rentabilidade é máxima. Para isso, reescrevemos $\mathrm{R(x)}$ na forma canônica:

$$\mathrm{R(x)} = -5\mathrm{x}^2 + 2500\mathrm{x} + 137.500 = -5.(\mathrm{x}^2 - 500\mathrm{x} - 27500) \Leftrightarrow$$

$$R(\mathrm{x}) = -5(\mathrm{x}^2 - 500\mathrm{x} + 250^2 - 250^2 - 27500) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{R(x)} = -5.[(\mathrm{x} - 250)^2 - 90.000] \Leftrightarrow$$

Logo, a forma canônica é:

$$R(x) = -5.(x - 250)^2 + 450.000$$

Repare que: $R(x)$ será máximo quando $x - 250 = 0 \Rightarrow x = 250$

Portanto, a receita máxima do show será R$ 450.000,00 quando o preço do ingresso for $550 - 250 = 300$ reais.

Segunda proposta de solução

Pode-se provar que, a média Aritmética (MA) de n números positivos é maior ou igual a sua média Geométrica (MG) e só é igual se os números forem iguais. Isto é, se $x_1, x_2 \ldots\ldots, x_n$ são números positivos, então

$$MA \geq MG$$

$$\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots \ldots x_n}$$

e

$$\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots \ldots x_n}$$

se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots\ldots, = x_n$

Logo, temos a função:

$R(x) = (550 - x).(250 + 5.x) = (550 - x).5.(50 + x)$, onde $x > 0$

Com isso, tome $x_1 = 550 - x$ e $x_2 = 50 + x$. Aplicando a desigualdade das médias obtemos:

$$MA \geq MG$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt[2]{x_1 . x_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(550 - x) + (50 + x)}{2} \geq \sqrt[2]{(550 - x).(50 + x)} \quad \Leftrightarrow$$

$$300 \geq \sqrt[2]{(550 - x).(50 + x)} \quad \Leftrightarrow$$

$$300^2 \geq (550 - x).(50 + x)$$

Multiplicando ambos os lados da última desigualdade por 5:

$$5.300^2 \geq \ 5.(550 - x).(50 + x) \Leftrightarrow$$

$$R(x) \leq 450.000$$

Daí $R(x) = 450.000$ se, e somente se, $50 + x = 550 - x \quad \Rightarrow \quad x = 250$

Assim como mostramos na primeira solução, a rentabilidade do show é máxima (450 mil reais), quando $x = 250$ reais, ou seja, o preço do ingresso será 300 reais.

3.4 Problema 2 - Cavando um buraco[19]

Figura 4. Escavação para tubulações.

Fonte: http://www.prfundacoes.com.br/escavacao-manual-de-bases-para-tubuloes

Uma empresa de construção civil adota a escavação manual de bases para tubulações a depender da natureza do solo (topografia) e as características do local e do volume a ser escavado. Supondo que essa empresa seja contratada para escavar um buraco retangular com um metro de largura de modo que o volume cavado tenha 500 m³. Sabendo que cada metro de profundidade custa 50 reais e cada metro quadrado de área cavada custa 10 reais, determine o comprimento e a profundidade do buraco a fim de que seu custo seja o menor possível?[20]

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT302). Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT309). Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetos de conhecimento abordados:

---

[19] Texto adaptado. Ver Referências Problema 2.

[20] Questão adaptada de Lima *et al.* 2010, p. 39, 40.

Cálculo da área da superfície e do volume de um prisma; máximo e mínimos de uma função; desigualdade das médias aritmética-geométrica; equação do 2ª grau; inequação-produto.

Possíveis estratégias para a resolução do problema

Uma proposta de solução

De acordo com o enunciado o buraco retangular é, matematicamente, um prisma reto cuja medida da largura é 1 m e denotemos por:

$x =$ Medida do comprimento do buraco;

$y =$ Medida da profundidade do buraco;

Com isso, o volume do prisma reto é dado por $V(x, y) = x.1.y \quad \Rightarrow$

$$x.y = 500 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{500}{x}$$

Sabemos que, cada m² de área cavada, custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 50 reais. Assim, escrevemos a função $C(x, y)$, que representa o custo total para cavar o buraco.

$$C(x, y) = \overbrace{10x}^{\text{custo total por m}^2} + \overbrace{50y}^{\text{custo total de profundidade}}$$

Reescrevendo a expressão acima em função de x, tem-se:

$$C(x) = 10x + 50.\frac{500}{x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{10x^2 + 25000}{x}, \quad x > 0$$

Note que, a função $C(x)$ é uma função racional e queremos determinar um valor positivo de x para que $C(x)$ seja mínimo. O conhecimento de derivadas de funções é um método muito útil para determinar os valores de máximo ou mínimo de funções racionais. Entretanto, no Ensino Médio o estudo das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral não estão inseridos na BNCC. Como resolver esse problema?

Repare que, devemos encontrar uma imagem para a função custo total, ou seja, um valor $a > 0$ tal que,

$$\frac{10x^2 + 25000}{x} = a \quad \Leftrightarrow \quad 10x^2 - ax + 25000 = 0 \quad (*)$$

A equação $(*)$, na variável x, possui solução real quando o discriminante ≥ 0, isto é,

$$a^2 - 10^6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 10^3).(a + 10^3) \geq 0$$

Analisando o produto das funções da última expressão acima, obtemos: $a \leq -1000$ e $a \geq 1000$. Daí, como a é positivo e queremos encontrar o menor valor de x, então $a = 1000$. Logo o menor custo para cavar o buraco é 1 mil reais.

Agora, determinemos as medidas do comprimento e a profundidade:

Temos, $10x^2 - ax + 25000 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 - 1000x + 25000 = 0$

Reescrevendo a equação na forma canônica, obtemos:

$$10x^2 - 1000x + 25000 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$10(x^2 - 100x + 2500 - 2500 + 2500) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$10[(x^2 - 100x + 2500)] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$10(x - 50)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 50$$

Portanto, o comprimento do buraco é 50 m. Como $y = \frac{500}{x} = \frac{500}{50} = 10$

Logo, a profundidade do buraco é 10 m.

Segunda proposta de solução

Tem-se a função,

$$C(x) = \frac{10x^2 + 25000}{x} = 10x + 50.\frac{500}{x} = 10\left(x + \frac{2500}{x}\right)$$

Com x positivo. Agora, aplicando a desigualdade das médias aritmética-geométrica obtemos:

$$MA \geq MG$$

$$\frac{x + \frac{2500}{x}}{2} \geq \sqrt[2]{x.\frac{2500}{x}} \quad \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{2500}{x} \geq 2.\sqrt[2]{2500} \quad \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{2500}{x} \geq 100$$

Multiplicando ambos os lados da última desigualdade por 10, obtemos:

$$10\left(x+\frac{2500}{x}\right) \geq 1000 \qquad \Leftrightarrow \qquad C(x) \geq 1000$$

Portanto, $C(x) = 1000$ se, e somente se, $x = \frac{2500}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2500$, logo $x > 0$ o que implica $x = 50$. Daí, como $y = \frac{500}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = 10$.

Então, para que a empresa tenha o menor custo operacional o comprimento do buraco será 50 m e sua profundidade é 10 m.

Comentários / sugestões dos problemas 1 e 2 para os professores

As habilidades EM13MAT302 e EM13MAT309 referentes aos problemas 1 e 2, em particular a habilidade comum aos dois problemas propostos – EM13MAT302, tem como um dos objetivos usar a função polinomial do 2ª grau para modelar aplicações de problemas de otimização, ou seja, onde se determine em que condições uma grandeza assume valores máximos e mínimos. Além disso, esses modelos se aplicam também a estudos físicos do movimento uniforme variado cuja aceleração é constante.

É importante destacar que, mesmo em meio a documentos norteadores vigentes, como a BNCC, as quais valorizam a aplicabilidade da matemática no dia a dia dos estudantes, é comum ainda encontrar na prática pedagógica de alguns professores questões que envolvem prioritariamente a memorização, estando longe e desvinculados das vivências desses estudantes. Por exemplo, o movimento uniforme é uma aplicação da função afim na modelagem de fenômenos físicos e, um fato curioso é que a maioria dos estudantes não conseguem compreender e associar que a função horária do movimento uniforme dado pela expressão $S = s_0 + v.t$ é equivalente a lei que define a função afim, $f\ (x) = ax + b$. Uma das razões para justificar essa incoerência na construção do processo de conhecimento, está na metodologia ainda arraigada por muitos professores, criando clichês do tipo: movimento uniforme? Só lembrar da “fórmula do sorvete $S = s_0 + v.t$”. Essa reflexão pode ser expandida para outros objetos de conhecimento abordado no dia a dia da sala de aula. Logo, para tentar corrigir essas distorções, o professor de matemática pode dialogar em parceria com os professores de Física objetivando planejar estratégias comuns, para levar ao estudante atividades que possibilitem melhor compreensão dos objetos abordados nas suas aulas.

Nas aplicações da função quadrática no Ensino Médio é necessário, como pré-requisito, que o estudante tenha assimilado o conceito de variável e tenha pleno domínio das propriedades e manipulação algébrica, pois, em tese nessa etapa o estudante tem conhecimento das equações do 1ª e 2ª grau que foram exploradas nos anos finais do Ensino Fundamental. Assim, cabe ao professor fazer uma avaliação diagnóstica dos conhecimentos prévios desses estudantes para identificar possíveis lacunas de aprendizagem na abordagem de problemas semelhantes aos que sugerimos.

Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental diz:

> Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações. (BRASIL, 2018, p. 527).
>
> (EF07MA18) **Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau**, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade. Grifo nosso. (BRASIL, 2018, p. 307).
>
> (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para **resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau**. Grifo nosso. (BRASIL, 2018, p. 317).

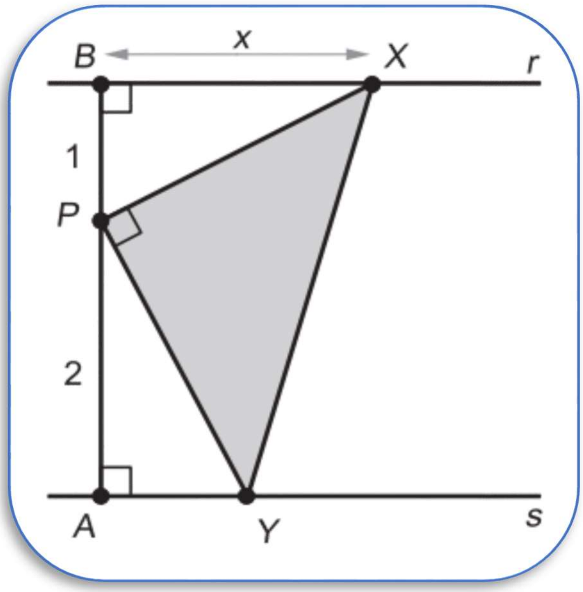
Nas estratégias usadas nas soluções dos problemas 1 - *Jota Quest canta para 250 carros no Allianz Parque* e, 2 - C*avando um buraco*, busca-se na primeira solução explorar as principais propriedades da função quadrática por meio da sua <u>forma canônica</u>, que não é citado na BNNC. Em geral, é comum alguns professores adotarem fórmulas prontas para resolverem esses problemas e outros similares. Entretanto, como sugestão, deve-se apresentar inicialmente aos estudantes o <u>Método de Completar Quadrados</u> para a resolução de equações do 2ª grau e, em seguida demonstrar a sua fórmula resolutiva, para com isso permitir a compressão e o significado do uso da forma canônica da função quadrática na resolução de problemas de otimização.

Na segunda estratégia adotada para solução desses problemas, sugerimos aos professores um método alternativo não apenas para tornar as aulas atraentes, mas para tentar quebrar paradigmas. Sabe-se que o uso das desigualdades das médias aritmética e geométrica na resolução de problemas não é abordado no currículo do Ensino Médio, nem citado na BNCC, porém o uso dessa técnica permite solucionar problemas que, a priori, só seria possível por meio de ferramentas avançadas como, o Cálculo Diferencial e Integral para a determinação de máximos e mínimos de funções racionais, assim o professor deve saber sempre um pouco mais do que se ensina.

Salientamos ainda que, nós professores conhecemos a realidade dos nossos estudantes e suas dificuldades de aprendizagem em matemática, em particular, na resolução de problemas. Posto isso, desenvolver as habilidades nos problemas aqui abordados bem como de outras situações semelhantes para ensino de funções quadráticas ou as funções polinomiais do 1ª grau, não é uma tarefa simples. Então, a critério e análise de cada professor, talvez seja melhor ir devagar, trabalhando inicialmente com as definições e propriedades das funções em consonância com a investigação de situações problemas mais simples para melhor adaptação dos estudantes e, com isso agregar conhecimentos para serem desafiados a problemas complexos. Em nossa reflexão sobre o ensino de funções quadráticas *para* resolução dos problemas 1 e 2 de otimização, consideremos de suma importância a contextualização e sua conexão com outros objetos de conhecimento matemático que retratem situações reais, de modo que o estudante se sinta estimulado a investigar os métodos de resolução desses problemas para compreender suas características de modelagem das funções polinomiais.

3.5 Problema 3 - OBMEP-2012 - Adaptado

Figura 5. Triângulo XPY retângulo em P.



Fonte:https://drive.google.com/file/d/16x07tVBD9Qt-dbkMjnF3Jn8pLL10SFJm/view

Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, nesse segmento, é tal que AP = 2 e BP = 1. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicado por x. O ponto Y pertence à reta s, AY = y e o triângulo XPY é retângulo em P.

a) Calcule a área do triângulo XPY em função de y.

b) Determine o valor de x e o valor de y para o qual a área do triângulo XPY é mínima e qual o valor dessa área.

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT302). Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT307). Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308). Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Objetos de conhecimento abordados:
Área de figuras planas; semelhança de triângulos e desigualdade das médias aritmética-geométrica; teorema de Pitágoras; equação do 2ª grau; inequação-produto.

Possíveis estratégias para a resolução do problema
Uma proposta de solução (a)

Na figura, note que o trapézio AYXB é composto pelos triângulos XBP, APY e XPY. Denotando por (AYXB) a área do trapézio temos,

$$(*)\ (\mathrm{XPY}) = (\mathrm{AYXB}) - [(\mathrm{APY}) + (\mathrm{BPX})]$$

i) $(\mathrm{AYXB}) = \frac{(\mathrm{x}+\mathrm{y}).3}{2}$

ii) $(\mathrm{APY}) = \frac{\mathrm{y}.2}{2}$

iii) $(\mathrm{BPX}) = \frac{x.1}{2}$

Substituindo i); ii) e iii) em (*) obtemos,

$$(\mathrm{XPY}) = \frac{(\mathrm{x}+\mathrm{y}).3}{2} - \left[\mathrm{y} + \frac{\mathrm{x}}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$(**) \qquad (\mathrm{XPY}) = \frac{2\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}$$

De acordo com as informações do enunciado e, na figura repare:

$\mathrm{P\widehat{B}X} \equiv \mathrm{P\widehat{A}Y} = 90°$ e $\mathrm{X\widehat{P}Y} = 90°$ com isso temos,

$\mathrm{B\widehat{P}X} + \mathrm{X\widehat{P}Y} + \mathrm{A\widehat{P}Y} = 180°$ seja $\mathrm{B\widehat{P}X} = \beta$ e $\mathrm{A\widehat{P}Y} = \gamma$

Assim, $\beta + 90° + \gamma = 180°$

Nos triângulos retângulos $P\widehat{A}Y$ e $P\widehat{B}X$ temos:

$$(***)\quad \begin{cases} B\widehat{P}X + B\widehat{X}P = 90° \\ A\widehat{P}Y + P\widehat{Y}A = 90° \end{cases} \Rightarrow B\widehat{P}X + B\widehat{X}P + A\widehat{P}Y + P\widehat{Y}A = 180°\text{. Daí obtemos:}$$

$$\beta + 90° + \gamma = B\widehat{P}X + B\widehat{X}P + A\widehat{P}Y + P\widehat{Y}A \quad \Rightarrow$$

$$90° + \gamma = B\widehat{X}P + \left(A\widehat{P}Y + P\widehat{Y}A \right) \Rightarrow B\widehat{X}P = \gamma$$

Logo, $B\widehat{X}P \equiv A\widehat{P}Y$. Com isso, de $(***)$ concluímos que $B\widehat{P}X \equiv A\widehat{P}Y$.

Então, como $B\widehat{X}P \equiv A\widehat{P}Y$; $B\widehat{P}X \equiv A\widehat{P}Y$ e $P\widehat{B}X \equiv P\widehat{A}Y$ seque que os triângulos $P\widehat{A}Y$ e $P\widehat{B}X$ são semelhantes, isto é,

$$\frac{2}{x} = \frac{y}{1} = \frac{PY}{PX} \quad \Rightarrow x = \frac{2}{y}$$

Substituindo esta última expressão em $(**)$ obtemos a área do triângulo XPY em função de y:

$$(XPY) = \frac{\frac{4}{y} + y}{2} \quad \Rightarrow \quad (XPY) = \frac{y^2 + 4}{2y}$$

Segunda proposta de solução (a)

Como os triângulos retângulos $P\widehat{A}Y$ e $P\widehat{B}X$ são semelhantes então,

$$\frac{2}{x} = \frac{y}{1} = \frac{PY}{PX} \quad \Rightarrow PX = \frac{x.PY}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $P\widehat{A}Y$, tem-se: $PY^2 = y^2 + 4$
A área do triângulo XPY é:

$$(XPY) = \frac{PX.PY}{2} \quad \Rightarrow$$

$$(XPY) = \frac{x.\frac{PY}{2}.PY}{2} = \frac{x.PY^2}{4} = \frac{x(y^2 + 4)}{4}$$

Como $x = \frac{2}{y}$

$$(XPY) = \frac{y^2 + 4}{2y}$$

Uma proposta de solução (b)

Temos,

$$(XPY) = \frac{y^2 + 4}{2y} = \frac{y + \frac{4}{y}}{2}$$

Agora, aplicando a desigualdade das médias aritmética-geométrica obtemos:

$$\frac{y + \frac{4}{y}}{2} \geq \sqrt[2]{y.\frac{4}{y}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y + \frac{4}{y}}{2} \geq \sqrt[2]{4} \qquad \Rightarrow (XPY) \geq 2$$

Logo $(XPY) = 2$ se, e somente se,

$$y = \frac{4}{y} \quad \Rightarrow y^2 = 4$$

y é positivo, então tem-se $y = 2$.

Daí substituindo $y = 2$ em $(**)$:

$$(XPY) = \frac{2x + y}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2x + 2}{2} = 2 \quad \therefore x = 1$$

Portanto para $x = 1$ e $y = 2$ o triângulo XPY tem área mínima e igual a 2,logo os triângulos APY e BPX são isósceles.

Segunda proposta de solução (b)

A área do triângulo XPY deve ser um número n positivo. Assim, tem-se:

$$(XPY) = \frac{y + \frac{4}{y}}{2} = n \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 + 4 = 2ny \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 - 2ny + 4 = 0$$

Resolvendo a equação do 2ª grau na variável y:

Note que, $\Delta = 4n^2 - 16$. Assim a equação possui solução real se $\Delta \geq 0$.Daí , temos:

$$4n^2 - 16 \geq 0 \iff (n + 2).(n - 2) \geq 0$$

Analisando o sinal do produto das duas funções , concluímos que $n \leq -2$ (não convém, pois n é positivo) e $n \geq 2$. Logo a área do triângulo XPY é mínima quando $n = 2$. Consequentemente tem-se:

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \iff (y - 2)^2 = 0 \quad \therefore y = 2$$

E ainda,

$$(XPY) = \frac{2x + y}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x + 2}{2} = 2 \quad \therefore \quad x = 1$$

3.6 Problema 4 - Quanta Gente[21]?

Figura 6. Grupo de amigos no bar.

Fonte: https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1510

No dia 18/12/2022 foi realizado o jogo da grande final da copa do mundo de futebol masculino no Catar, entre as seleções da Argentina e França. Um grupo de amigos argentinos, entre eles os irmãos gêmeos Laura e Lorenzo, se reuniram para acompanhar a partida em um bar na capital Buenos Aires. Quando Laura entrou no bar, onde já estavam algumas pessoas, a idade média subiu 4 anos. O Lorenzo entrou em seguida, tendo a média subido mais 3 anos.

a) Quantas pessoas estavam inicialmente no bar?

b) Qual a idade de Lorenzo?

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

[21] Problema adaptado. Ver Referências Problema 4.

(EM13MAT301). Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT316). Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Objetos de conhecimento abordados:

Média aritmética, sistema de equações Lineares; Matrizes;

Possível estratégia para a resolução do problema

A média de uma lista de números é um valor que pode ser substituído por todos os elementos dessa lista sem que altere a característica dessa lista (MORGADO; CARVALHO; 2015). A média das idades de uma lista com n pessoas inicialmente presentes no bar para assistir ao jogo da final da copa é um valor $\overline{x}$. As idades das n pessoas inicialmente presentes são denotadas pela lista $x_1, x_2 ....., x_n$ tal que $x_1 + x_2 .....,+ x_n = \sum_i^n x_i = \overline{x} + \overline{x} ,.....+ \overline{x} = n.\overline{x}$.

No enunciado do problema as idades de Laura e Lorenzo são iguais. Assim, denotemos por β a idade de cada um dos irmãos. Temos,

I. Quando Laura entra no bar, a idade média subiu 4 anos;

$$\frac{\beta + \sum_i^n x_i}{n+1} = \overline{x} + 4$$

II. Em seguida Lorenzo entra no bar e a idade média subiu mais 3 anos;

$$\frac{2.\beta + \sum_i^n x_i}{n+2} = \overline{x} + 7$$

De I e II obtemos,

$$\begin{cases} \dfrac{\beta + n.\overline{x}}{n+1} - \overline{x} = 4 \\ \dfrac{2.\beta + n.\overline{x}}{n+2} - \overline{x} = 7 \end{cases}$$

Ou ainda podemos escrever,

$$(*)\ \begin{cases} \beta - \overline{x} - 4n = 4\ (\mathrm{I}) \\ 2\beta - 2\overline{x} - 7n = 14\ (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações encontramos, $n = 6$.

Portanto, antes de os irmãos gêmeos entrarem no bar havia 6 pessoas presentes para assistir ao jogo da final da copa entre Argentina e França. Com isso, substituindo $n = 6$ em $(*)$ obtemos:

$$\beta - \overline{x} = 28 \quad \Rightarrow \quad \beta = 28 + \overline{x}$$

Então, concluímos que o sistema $(*)$ é possível e indeterminado e sua solução geral é $(28 + \overline{x}\,, \overline{x}\,, 6)$. Portanto não é possível determinar a idade de Lorenzo.

3.7 Problema 5 - Tanques de aço inox para produção de vinhos[22].

Figura 7. Tanques para produção de vinhos.

Fonte: www.tanquedeacoinox.com.br/tanques-aco-inox-fabricacao-vinho

Armazenar o vinho à medida que envelhece até atingir seu sabor ideal pode ser uma operação delicada, por isso é importante armazenar esse produto no recipiente certo. Os tanques de aço inox são atualmente a melhor opção para a indústria de vinhos, pois permite uma fermentação no mesmo recipiente e além disso são duráveis e de fácil manutenção. Já os barris de carvalho têm vida útil limitada, aproximadamente entre três a cinco anos e, com a frequência de uso perdem o aroma original do carvalho e a acidez do vinho os estraga. Portanto, os tanques de aço inox não alteram o sabor e as características originais das uvas para a fabricação do vinho. Supondo que um tanque de aço inox contém 100 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do tanque e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea; retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água e assim sucessivamente[23].

a) Qual a quantidade de vinho que estará no tanque após 100 operações sucessivas?

[22] Texto adaptado. Ver Referências Problema 5.
[23] Questão adaptada de MORGADO; WAGNER; ZANI, 2015, p. 37.

b) Suponha que o tanque de aço inox contenha p litros de vinhos. Qual a quantidade de vinho que estará no tanque após, n operações?

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT304). Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305). Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Objetos de conhecimento abordados.

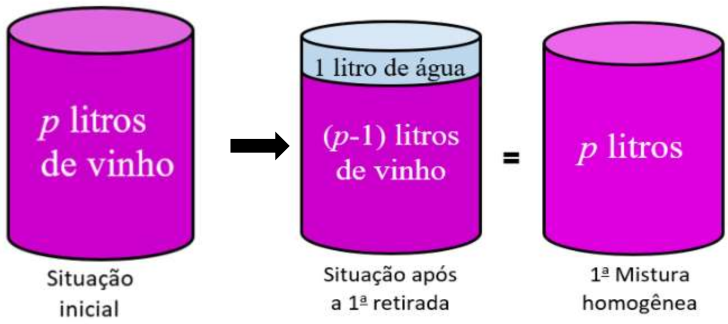
Estudo da Progressão geométrica; Recursividade; Função exponencial.

Possível estratégia para a resolução do problema

Inicialmente o tanque contém 100 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do tanque e acrescenta-se um litro de água, o volume de vinho no tanque cai para 99 litros. A princípio o leitor pode ser induzido a pensar na resposta da primeira pergunta (letra a), que após repetir sucessivamente as 100 operações, não haverá mais vinho no tanque. Entretanto, a solução está incorreta. Admitir que o volume de vinho nesse tanque cai a uma taxa constante, ou seja, considerar que o modelo matemático é expresso por uma função afim não é correto, pois a cada operação a mistura obtida é homogênea. Logo, devemos analisar, após cada operação, a concentração (proporcionalidade) de vinho contida na mistura obtida.

Note ainda que, as grandezas envolvidas no problema variam continuamente, entretanto, vamos considerar apenas os valores discretos para conjecturar nosso problema. Denotando o volume inicial do tanque de aço inox por $\mathrm{V}(0) = \mathrm{p}$. Retirando-se um litro de vinho do tanque e acrescentando um litro de água, a quantidade de vinho restante no tanque se reduz para $(\mathrm{p} - 1)$ litros, assim tem-se $\mathrm{V}(1) = \mathrm{p} - 1$. Logo, como a mistura entre vinho e água é homogênea, tem-se p litros de mistura após a primeira operação. Na figura abaixo ilustramos essa operação:

Figura 8. Ilustração/mistura na 1ª troca-vinho por água.



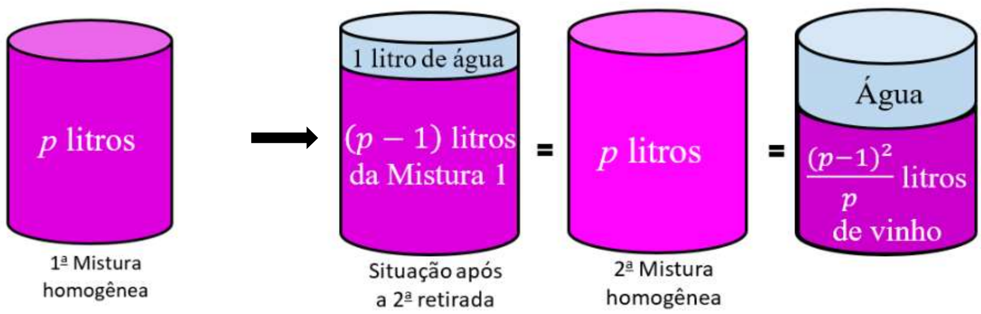
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-uma-mistura-de-vinho/

Na segunda operação, retira-se da mistura anterior um litro de vinho e, acrescenta-se um litro de água. Repare, na primeira operação para p litros de mistura homogênea temos $(p-1)$ litros de vinho; daí para $(p-1)$litros da 1ª mistura teremos $V(2)$ litros de vinho, ou seja: Analisemos a proporcionalidade entre água e vinho após a segunda retirada:

$$\frac{1^{\underline{a}}\ \text{mistura/homogênea}}{\text{vinho}} = \frac{p}{(p-1)} = \frac{(p-1)}{V(2)} \quad \therefore$$

$$V(2) = \frac{(p-1)^2}{p}$$

Figura 9. Ilustração/mistura na 2ª troca-vinho por água.



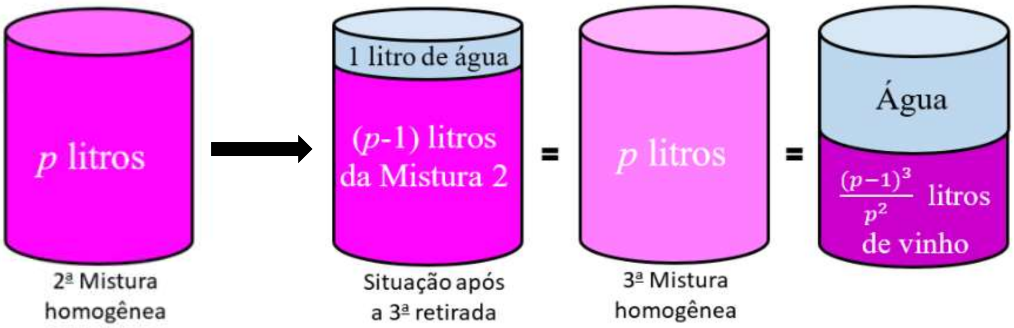
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-uma-mistura-de-vinho/

Na terceira operação, retira-se um litro de vinho da 2ª mistura homogênea e acrescenta-se um litro de água. Assim, tem-se $(p-1)$litros de vinho após a 3ª retirada com p litros de mistura homogênea. Daí, obtemos o volume de $V(3)$ litros de vinho presentes após a terceira retirada, isto é:

$$\frac{2^{\underline{a}}\ \text{mistura/homogênea}}{\text{vinho}} = \frac{\text{p}}{\frac{(\text{p}-1)^2}{\text{p}}} = \frac{(\text{p}-1)}{\text{V}(3)} \quad \therefore$$

$$\text{V}(3) = \frac{(\text{p}-1)^3}{\text{p}^2}$$

Figura 10. Ilustração/mistura na 3ª troca-vinho por água.



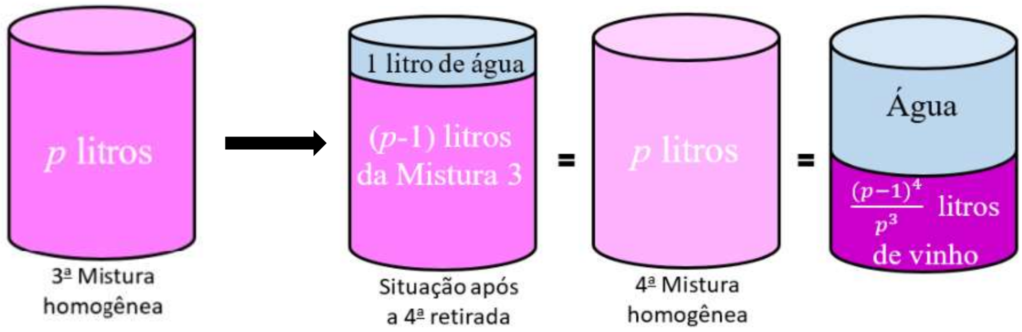
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-uma-mistura-de-vinho/

Na quarta operação, retirou-se da terceira mistura homogênea, um litro de vinho e acrescenta-se um litro de água. Repare, analogamente as operações anteriores, o volume $V(4)$ que sobrou dos $\frac{(\text{p}-1)^3}{\text{p}^2}$ litros de vinho contidos na terceira mistura homogênea é:

$$\frac{3^{\underline{a}}\ \text{mistura/homogênea}}{\text{vinho}} = \frac{\text{p}}{\frac{(\text{p}-1)^3}{\text{p}^2}} = \frac{(\text{p}-1)}{\text{V}(4)} \quad \therefore$$

$$\text{V}(4) = \frac{(\text{p}-1)^4}{\text{p}^3}$$

Figura 11. Ilustração/mistura na 4ª troca-vinho por água.



Fonte-http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-uma-mistura-de-vinho/

Com isso, tomando $p = 100$, como é possível determinar a quantidade de vinho no tanque após a 100ª operação?

Construindo o modelo:

É possível identificar algum padrão após retirar, sucessivamente por quatro vezes, um litro de vinho do tanque de aço e acrescentar um litro de água? Veja a tabela abaixo:

Tabela 2. Volume V (n) de vinho no tanque de aço.

Nª de operações (n)	Volume de vinho no tanque de aço (V(n))
0	p
1	$p - 1 = p.\left(\frac{p-1}{p}\right)$
2	$\frac{(p-1)^2}{p} = V(1).\left(\frac{p-1}{p}\right)$
3	$\frac{(p-1)^3}{p^2} = V(2).\left(\frac{p-1}{p}\right)$
4	$\frac{(p-1)^4}{p^3} = V(3).\left(\frac{p-1}{p}\right)$
....	....
n	$\frac{(p-1)^n}{p^{n-1}} = V(n-1).\left(\frac{p-1}{p}\right)$
n + 1	$\frac{(p-1)^{n+1}}{p^n} = V(n).\left(\frac{p-1}{p}\right)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note na tabela acima, a quantidade ou volume de vinho a ser calculado no tanque de mistura homogênea depende, imediatamente, do volume encontrado na mistura anterior, ou seja, em cada operação retira-se $\frac{1}{p}$ do conteúdo do tanque. Logo, a taxa de crescimento do volume de vinho contido nesse tanque é $\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

A expressão $V(n+1)=V(n).\left(\frac{p-1}{p}\right)$, com n inteiro e $n \geq 0$ é denominada **equação recursiva** - aquela que relaciona um termo de uma sequência em um determinado estágio com termos desta mesma sequência em estágios anteriores. Assim, o processo de calcular o volume de vinho no tanque após 100 operações sucessivas se torna muito trabalhoso e cansativo. Para isso, vamos determinar a fórmula fechada para o modelo recursivo que construímos, isto é, devemos explicitar a concentração de vinho $V(n)$ em função do número n de operações e não em função da concentração das etapas anteriores, como o que o ocorre com a equação recursiva. Partindo da equação recursirva $V(n+1)=V(n).\left(\frac{p-1}{p}\right)$, e considerando que o tanque contém 100 litros de vinho, temos a Tabela:

Tabela 3.Volume de vinho (em litros) no tanque de aço.

Nª de operações (n)	Volume ($V(n)$) (litros) de vinho no tanque de aço
1	$(100-1)=99$ litros
2	$\frac{(100-1)^2}{100}=\frac{(99)^2}{100}=100.\left(\frac{99}{100}\right)^2=98{,}01$ litros
3	$\frac{(100-1)^3}{100^2}=100.\left(\frac{99}{100}\right)^3=97{,}0299$ litros
4	$\frac{(100-1)^4}{100^3}=100.\left(\frac{99}{100}\right)^4=96{,}059601$ litros
....	....
10	$\frac{(100-1)^{10}}{100^9}=100.\left(\frac{99}{100}\right)^{10}\approx 90{,}43$ litros
....	....
100	$\frac{(100-1)^{100}}{100^{99}}=100.\left(\frac{99}{100}\right)^{100}\approx 36{,}6$ litros

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe nas expressões acima, a sequência $(V(n))$ é uma Progressão Geométrica (P.G) cuja razão é $\left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ e o termo inicial $V(1) = p - 1$. Portanto, sabendo que o tanque inicialmete contém cem litros de vinho, após 100 operações sucessivas o tanque de aço inox restará aproximadamente $36{,}6$ litros de vinho e, a fórmula fechada que determina a quantidade de vinho nesse tanque, após n operações sucessivas, é a expressão do termo geral da P.G:

$$V(n) = V(1).\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-1} = (p-1).\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1} \qquad \therefore$$

$V(n) = p.\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n}$, onde p e n são inteiros positivo e $n \geq 1$.

Comentários/sugestões para o professor

O trabalho do professor de matemática quando se ensina na escola progressão geométrica, funções exponenciais e logaritmos é, em muitos casos, apresentado aos estudantes como um conjunto de fórmulas. Essas "formuletas" são, de maneira geral, memorizadas e, sem nenhum significado e conexão com outros tópicos da matemática, como também em diversos outros problemas contextualizados com outras áreas do conhecimento.

O problema *Tanques de aço inox para produção de vinhos* é uma proposta interessante para introduzir o conceito de sequências numéricas, onde espera-se que o estudante compreenda o crescimento/decrescimento dos valores de modo a assimilar o conceito recursivo. Além disso, o problema traz ainda o aprofundamento da operação de potenciação iniciado nos anos finais do Ensino Fundamental, como sugere a BNCC.

Um aspecto relevante é a interpretação das grandezas envolvidas, em geral, os estudantes estão habituados a modelar problemas matemáticos de representação linear. Na construção da resposta nota-se que a taxa de variação relativa das grandezas envolvidas é constante, isto é, como a concentração entre vinho e água é uma solução homogênea, então em um dado instante a razão entre o volume de vinho no tanque e o volume de água é sempre a mesma, caracterizando modelo de crescimento exponencial. Com isso, o professor pode ainda explorar a linguagem gráfica, pois é imprescindível estabelecer a relação entre a forma do gráfico e o comportamento da variação da função. Para isso recomendamos o uso de softwares, por exemplo, o Geogebra.

Entretanto, vale ressaltar o cuidado em explorar o gráfico associado a fórmula recursiva com a fórmula fechada, pois as progressões geométricas são utilizadas nos casos de grandezas discretas cujo gráfico será a reunião de um conjunto de pontos alinhados, enquanto as funções exponenciais são utilizadas no caso de tratarem de grandezas contínuas, isto é, o gráfico representará um ramo de uma hipérbole. Com isso, é fundamental indagar os estudantes: o que ocorre quando efetuamos sucessivas trocas de um litro de vinho do tanque e acrescentamos um litro d'água? É fato, a conjectura do modelo induz o estudante a ser convencido que a concentração de vinho no tanque decai para zero. Logo, é oportuno se introduzir o conceito matemático de limite (pouco explorado no Ensino Médio), onde equivale a dizer que V(n) converge para zero quando n tende para o infinito.

Um problema análogo é a simulação de despoluição de um lago[24], onde supõe-se que um lago-modelo, por exemplo, possui uma quantidade de 200 ml de poluentes e a cada 24 horas, em um processo de purificação da água por ação natural de organismos vivos, a quantidade de poluentes seja reduzida em 20%. Depois de quantas horas esse lago-modelo estará despoluído? Matematicamente, como se explica esse processo de despoluição? Para esclarecimento dessas respostas, o professor pode realizar em sala de aula um experimento utilizando material concreto. Para isso, pegue três garrafas PET (Polietileno Tereftalato) de refrigerantes, enumeradas, de capacidade de 2,5 litros ou 3 litros; dois copos descartáveis com capacidade de 200 ml, e, um deles contenha água suja (pode utilizar o refrigerante de cola) e um balde para descartar a água usada. Procedimento do experimento:

1) Na garrafa PET 2 preencha com água límpida;
2) Na garrafa PET 3, misture um copo (200 ml) de água suja ou refrigerante de cola em um litro d'água;
3) Na garrafa PET 1 (representará o lago poluído), ponha 9 copos (200 ml cada) de água límpida da garrafa PET 2 e um copo (200 ml) de poluente da garrafa 3, misture bem.

Figura 12. Simulação de despoluição do lago-modelo/1ª etapa.

Fonte: Dias *et al*, (2013, p. 16)

[24] Ver Dias. *et al*. 2013, p. 11-36.

Agora, o nosso lago-modelo, contém 2000 ml de capacidade (1800 ml de água límpida e 200 ml de poluente). A simulação de despoluição parte do pressuposto que 20% da quantidade de poluente existente no lago se purifica após 24 horas. Simulação de despoluição:

1) Retire 2 copos de água poluída da garrafa 1 e descarte no balde;
2) Retire 2 copos de água límpida da garrafa 2 e ponha na garrafa 1 (lago-modelo), isso simula a despoluição após as 24 horas.

Figura 13. Simulação de despoluição do lago-modelo/2ª etapa.

Fonte: Dias.*et al*, (2013, p. 17)

Repare que após a primeira troca, dos 200 ml de poluentes inicialmente presentes no lago-modelo, restaram 160 ml. Dando sequência ao processo de troca de 2 copos de "água poluída" do lago-modelo (garrafa 1) por 2 copos de água límpida, questiona-se aos estudantes: em que instante (após quantas trocas) será visível perceber a água límpida? O lago-modelo estará despoluído? Com isso, a ideia é induzir os estudantes a fazer conjecturas a partir desses resultados empíricos.

O professor tem o papel fundamental de instruir os estudantes, sugerindo-os a construção de uma tabela com a quantidade de poluentes restante em cada período de 24 horas, ou seja, a cada troca de 2 copos de água suja por água límpida. Logo, esses registros dispostos em uma tabela possibilita fazer uma análise simplificada dos dados coletados do experimento de modo a estimular o desenvolvimento do pensamento matemático que implicará na interpretação da realidade (despoluição do lago-modelo). Então, para construirmos uma fórmula fechada que represente o processo de despoluição, por analogia a resolução do problema *tanques de vinho*, escrevemos a equação recursiva que relaciona a variável dependente (quantidade de poluente) denotado por a_n com a variável independente (o tempo, n), com $n \geq 1$. Assim, os estudantes devem perceber que a quantidade de poluente em cada período de tempo é obtida pela multiplicação da quantidade de poluente do período anterior por uma constante, ou seja,

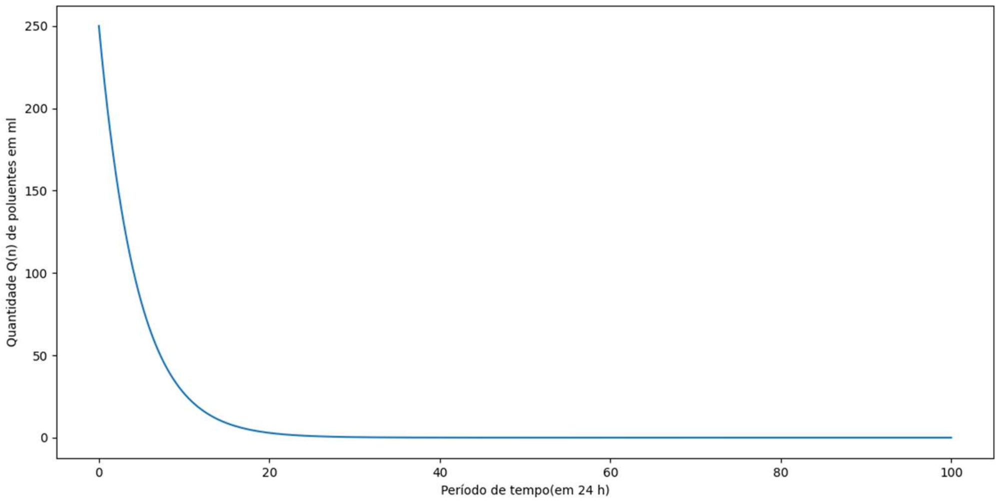
$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{5}a_n \qquad \Rightarrow$$

$$\text{Equação recursiva} \begin{cases} a_1 = 200 \text{ ml} \\ a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n \end{cases}$$

$$\text{Fórmula fechada} \begin{cases} a_1 = 200 \text{ ml} \\ a_n = a_1.\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \end{cases}$$

O gráfico da função exponencial dará informações sobre o comportamento de a_n com passar do tempo n, ou seja, a medida que o tempo passa, a quantidade de poluentes no lago-modelo vai diminuindo, isto é, $a_n < a_{n-1}$. Repare ainda, que o conjunto de pares ordenados (n, a_n) da fórmula fechada formam um subconjunto do gráfico da função $a_x = a_1.\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$ e, ao substituirmos a variável n da expressão algébrica na sua forma fechada pelo x, esta é uma variável contínua (x é um número real) enquanto que a variável n é discreta (números inteiros positivos). Logo, a função exponencial definida por $f(x) = 200.\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$ é decrescente, pois $\frac{4}{5}$ está entre 0 e 1.

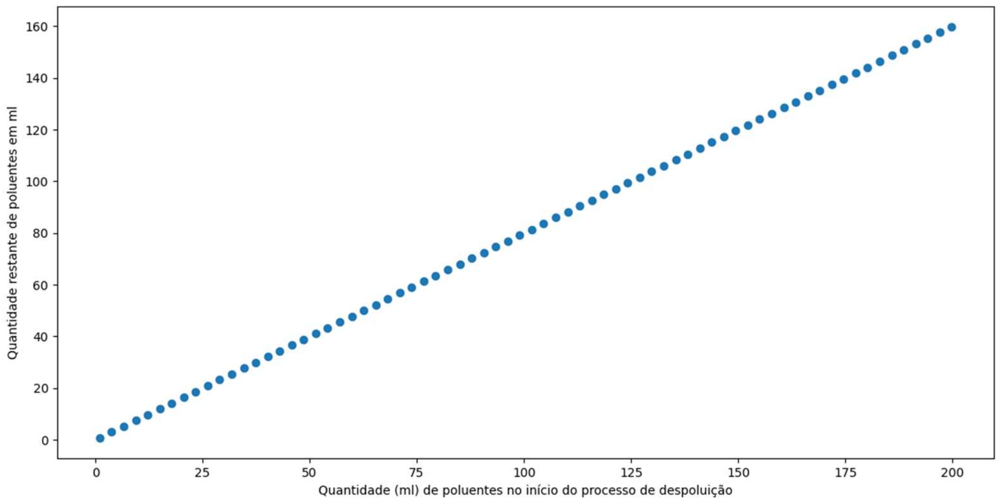
Gráfico 1. Função $f(x) = 200.\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$ no intervalo real de [1,100].



Fonte: Elaborado pelo autor.

Diferente da função exponencial, o gráfico da equação recursiva reúne os pontos (n, a_n) que estão alinhados a reta $y = \frac{4}{5}.x$.

Gráfico 2. Equação recursiva $a_1 = 200$, $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n$ do modelo de despoluição.



Fonte - Elaborado pelo autor.

Apesar das representações gráficas serem diferentes, ambas descrevem o mesmo processo de despoluição do lago-modelo, pois as variáveis independentes de cada uma delas não representam as mesmas grandezas. Entretanto, após efetuarmos os cálculos e observamos os gráficos, percebemos um ponto em comum, ambos convergem para zero. O nosso modelo nos diz que sob ações naturais de organismos vivos e, supondo que no lago não haverá incidência de novos poluentes, a despoluição ocorrerá naturalmente. Assim, explica-se o processo empírico: a garrafa 1 que representa nosso lago-modelo, ficará cada vez mais límpida a medida que aumentamos o número de trocas de copos de água suja por água límpida.

Note ainda no gráfico da equação recursiva $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n$, com $a_1 = 200$, um valor limite para a sequência (a_n) é um número no qual os termos dessa sequência ficam arbitrariamente próximos, isto é, se tomamos um valor δ positivo, a distância entre os termos a_n e o valor limite fica menor que δ para valores suficientemente grandes de n. Assim a sequência (a_n) tende para esse valor, no caso da simulação, esse valor é zero. No contexto de despoluição, o valor δ seria uma quantidade mínima de poluentes presentes a ser considerado o lago poluído. Com isso, é possível determinar o tempo necessário para que a quantidade de poluente fique menor δ, ou seja, a partir do n-ésimo dia, a quantidade de poluente $a_n < \delta$.

Segundo Dias. *et al*. (2013), de fato, com n inteiro positivo temos:

$$a_n = a_1.\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

Para que $a_n < \delta$, devemos ter

$$a_1.\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 200.\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \frac{\delta}{200}$$

Aplicando o logaritmo decimal em ambos os membros da desigualdade,

$$\log\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \log\left(\frac{\delta}{200}\right) \quad \Rightarrow \quad (n-1)\log\left(\frac{4}{5}\right) < \log\left(\frac{\delta}{200}\right) \quad \Rightarrow$$

Dividindo ambos os membros por $\log\left(\frac{4}{5}\right)$ e lembrando que $\log\left(\frac{4}{5}\right) < 0$.

$$n > 1 + \frac{\log\left(\frac{\delta}{200}\right)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)} \quad \Rightarrow \quad a_n < \delta$$

Mas queremos saber qual o valor de n, ou seja, depois de quantos dias a quantidade de poluente é menor que o valor δ. Como n é inteiro, então devemos encontrar o primeiro número n_0 tal que $n_0 > 1 + \frac{\log\left(\frac{\delta}{200}\right)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)}$. Portanto depois de n_0 períodos de tempo, a quantidade de poluentes será menor que δ.

Como a taxa de despoluição do lago-modelo é de 20%, ou seja $\frac{1}{5}$, de modo geral podemos trabalhar com representação de modelos diferentes, denotando a taxa de despoluição por t e, assim reescrevemos a fórmula fechada:

$$\begin{cases} a_1 = 200 \text{ ml} \\ a_n = a_1.(1-t)^{n-1} \end{cases}$$

3.8 Problema 6 – Juros Contínuos[25]

Figura 14. Tempo e dinheiro.

Fonte: https://media.seudinheiro.com/cdn-cgi/image/fit=contain,width=715&,format=auto/uploads/2023/01/0-tempo-e-dinheiro-628x353.jpg

Chamamos de sistema de juros contínuos ao tipo de aplicação na qual os juros são capitalizados a cada instante t. Nesse tipo de aplicação, um capital C, empregado a uma taxa de $i\%$ ao ano, depois de t anos, será transformado em $C.\mathrm{e}^{i.t}$, onde $\boldsymbol{e}$ é chamado de constante de Euler. Supondo que o "*Banco BandeRN* Digital" oferece um fundo de investimento com taxa de juros contínuos de 10% ao ano, quanto tempo será necessário para uma aplicação de R$ 10.000,00 seja triplicada?

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT303). Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304). Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305). Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Objetos de conhecimento abordados:

Estudo da Função exponencial; Função Logaritmo; conceitos de matemática financeira-tipos de capitalização (simples, Compostas e contínuas); Conceito de Limite;

Possível estratégia para a resolução do problema

Os juros contínuos são submetidos com base no número de Euler ($\boldsymbol{e}$), logo de acordo com as informações do problema, denotando $F(t)$ como sendo o valor futuro da aplicação C a uma taxa contínua de $i\%$ a.a (ao ano) por um período de t anos. Assim, tem-se:

$$\mathrm{F(t) = C.e^{i.t}}$$

[25] Questão adaptada de Iezzi; Hazzan; Degenszajn, 2004, p. 62.

Depois de t anos, $\mathrm{C} = 10000$ acumula $\mathrm{F(t)} = 30000$. Então,

$$\mathrm{F(t)} = \mathrm{C.e^{i.t}} \quad \Leftrightarrow$$

$$30000 = 10000.\mathrm{e}^{0,1.\mathrm{t}}$$

Aplicando o logaritmo neperiano em ambos os lados da igualdade anterior, obtemos:

$$\ln(\mathrm{e}^{0,1.\mathrm{t}}) = \ln 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$0{,}1.\mathrm{t}.\ln(\mathrm{e}) = \ln 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{t} = \frac{\ln 3}{0{,}1} \approx 10{,}98$$

Portanto, o tempo necessário para triplicar o valor investido será de 10,98 anos, ou seja, aproximadamente 11 anos.

Comentários/sugestões para o professor

O enunciado do problema *Juros contínuos* define a fórmula $\mathrm{C.e^{i.t}}$ para o cálculo de juros contínuos, ou seja, o valor principal ou capital é submetido a base ***(e)*** quando o número de capitalizações for muito grande. Com isso, para a solução da questão o estudante precisa além de manipulação algébrica, saber utilizar os conceitos e propriedades dos logaritmos. Contudo, o objetivo da BNCC no Ensino Médio para a matemática é consolidar, ampliar e aprofundar os conhecimentos dos estudantes visto no Ensino Fundamental bem como promover ações que possibilite a reflexão em resolver problemas de diversas áreas.

No problema sobre "Juros Contínuos", a associação com as habilidades EM13MAT303, EM13MAT304 e EM13MAT305, constroem-se conhecimentos que o estudante pode utilizar para interpretar ou resolver diversas situações relacionadas à Matemática Financeira. Entretanto, a habilidade EM13MAT303 foca na distinção do sistema discreto de capitalização simples do composto, ou seja, nos juros simples o crescimento do capital aplicado é linear (valores discretos crescem em progressão aritmética) enquanto a capitalização discreta composta o aumento é exponencial (valores discretos crescem em progressão geométrica). Contudo, na prática o juro simples quase não se aplica, exceto em juros de mora - o prazo é menor que a unidade de tempo, nesse caso, o juro simples daria um montante maior. Portanto, no mercado financeiro o que importa são os juros compostos. De modo geral, a *desigualdade de Bernoulli* mostra por que o regime de capitalização composta é maior que o de juros simples.

Sejam um número real $x \geq 0$ e n um número natural. Então$(1+x)^n \geq 1+nx$. Essa desigualdade é fácil de se provar usando o princípio de indução.

Demonstração:

Seja a proposição $p(n)$: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall$ n $\mathbb{N}$.

$p(1)$ é verdadeiro. De fato $(1+x)^1 = 1+1x$ .Suponha agora, por hipótese de indução, que a desigualdade $(1+x)^n \geq 1+nx$ é verdadeira para algum n, para todo real $x \geq 0$. Assim, queremos mostrar que ela continua verdadeira para $n+1$, ou seja, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, para todo real $x \geq 0$. Como

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$$

Note que $nx^2 \geq 0$, com isso temos que

$$(1+x)^{n+1} = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$$

Portanto, $p(n+1)$ é verdadeira, logo por indução, provamos a *desigualdade de Bernoulli*.

Em sala de aula o professor deve dar ênfase a capitalização composta, onde o valor de uma unidade monetária acompanha o tempo (presente, passado ou futuro): “No fundo, só há um único problema de Matemática financeira: deslocar quantias no tempo” (MORGADO; CARVALHO; 2015, p. 87). Por exemplo, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, a uma taxa i, depois de t períodos de tempo, a $F = A.(1+i)^t$. Essa expressão significa que, *para obter o valor futuro, basta multiplicar o valor atual por* $(1+i)^t$*; e para obter o valor atual, basta dividir o futuro por* $(1+i)^t$.

Além disso, o professor deve enfatizar situações cotidianas que envolvam empréstimos, comparação entre preço à vista e a prazo, com o uso de calculadoras científicas ou planilhas eletrônicas, ajudando os estudantes a compreender situações próprias da vida em sociedade e a tomar decisões futuras. No problema proposto tem-se também a oportunidade de o professor apresentar aos estudantes a importância do *número de Euler* para a matemática. Esse número irracional $e = 2{,}71828...$ aparece naturalmente na modelagem de diversos problemas reais. Porém, na BNCC não há nenhuma menção a esse número. Para Pommer, (2010):

> Nos manuais didáticos, o número de Euler é citado dentro do tópico logaritmos, como uma possível base, denominando-se tais logaritmos de naturais. Alguns livros citam este tópico ao final do capítulo, geralmente denominado Sistemas de Logaritmos, como se fosse um apêndice, um

> pequeno acréscimo de informação, apresentando o número de Euler como um número irracional aproximado por 2,718281, citando que este valor é obtido utilizando-se uma calculadora eletrônica. Mas o que teriam de naturais estes logaritmos com base dada pelo número de Euler? E por que apresenta o valor aproximado de 2,718281. Isto não é explicado nos textos usuais. (POMMER, 2010, p. 01).

Para melhor compreensão da utilização do *número de Euler* na matemática financeira, suponha que você possui um capital C e deseja aplicar esse valor em um fundo de investimento do *"Banco BandeRN Digital"* que paga, pela aplicação nesse fundo, uma taxa de rendimentos de 100% ao ano. Logo, o banco lhe paga o saldo integral de 100% existente, na capitalização anterior, isto é, após um ano seu saldo será o dobro da quantia inicial aplicada, tem-se:

$$\overbrace{\mathrm{C} + \mathrm{C} = (1+1).\mathrm{C} = 2\mathrm{C}}^{\text{Saldo após um ano de capitalização}}$$

Agora vamos supor que você escolha a capitalização semestral, quanto estará valendo seu dinheiro após um ano? Repare, o banco paga a você a taxa proporcional correspondente a 6 meses $\left(50\% = \frac{1}{2}\right)$, logo após esse período o saldo será de $C + \frac{1}{2}\mathrm{C} = \left(1+\frac{1}{2}\right)$ C. Daí, após um ano obtemos:

$$\overbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)\mathrm{C} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\mathrm{C} = \mathrm{C}.\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \mathrm{C}.2{,}25}^{\text{Saldo após um ano capitalizado 2 vezes}}$$

Note, ao fim do segundo semestre o valor aplicado é multiplicado por $2{,}25$. Então a taxa anual efetiva de rendimentos é de $1{,}125$, ou seja, $12{,}5\%$ a mais sobre os juros da capitalização anterior.

E se considerássemos que você optasse pela capitalização quadrimestral (a cada 4 meses)? Ora, nesse caso a taxa proporcional correspondente que o banco lhe paga será um terço do saldo da capitalização anterior, ou seja, $\mathrm{C} + \frac{1}{3}\mathrm{C} = \left(1+\frac{1}{3}\right)$ C. Então após 8 meses o saldo será $\left(1+\frac{1}{3}\right)\mathrm{C} + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\mathrm{C} = \mathrm{C}.\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$. Portanto, após um ano o valor do dinheiro aplicado inicialmente é:

$$\overbrace{\mathrm{C}.\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}.\mathrm{C}.\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \mathrm{C}.\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \mathrm{C}.(2{,}37037037\ldots)}^{\text{Saldo após um ano capitalizado 3 vezes}}$$

Repare ainda, quando aumentamos o número de capitalizações ao ano os rendimentos irão aumentando. Assim, veja na tabela abaixo o saldo do valor aplicado C, respectivamente após um ano, se você considerar, além dos casos anteriores, a taxa de juros capitalizado for trimestral (4 vezes ao ano), bimestral (6 vezes ao ano), mensal (12 meses ao ano), diária (365 vezes ao ano), horária (8760 vezes ao ano), minuto a minuto (525.600 vezes ao ano) ou por segundo a segundo (31.536.000 vezes ao ano).

Tabela 4. Saldo capitalizado após um ano.

Nª de capitalizações	Saldo capitalizado após um ano
1	$2C$
2	$C.\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} = 2{,}25.C$
3	$C.\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3} = C.(2{,}37037037\ldots)$
4	$C.\left(1+\frac{1}{4}\right)^{4} = C.(2{,}44140625\ldots)$
6	$C.\left(1+\frac{1}{6}\right)^{6} = C.(2{,}521626372\ldots)$
12	$C.\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = C.(2{,}61303529\ldots)$
365	$C.\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = C.(2{,}714567482\ldots)$
8760	$C.\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760} = C.(2{,}718126692\ldots)$
525600	$C.\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600} = C.(2{,}71827923\ldots)$
31536000	$C.\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000} = C.(2{,}718281615\ldots)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse tipo de aplicação de juros capitalizados continuamente, o banco paga em todos os instantes pelo rendimento da sua aplicação, por exemplo, se você aplica 1 real a juros contínuos de 100% ao ano, no final desse período o saldo obtido será $\boldsymbol{e}$ reais. De maneira geral, um capital C, aplicado a uma taxa $k\%$ ao ano, rende, ao final de um ano, juros de $\frac{k}{100}.C$.

Tomando $\mathrm{i} = \frac{\mathrm{k}}{100}$, após um ano o valor investido vale $(\mathrm{C} + \mathrm{i.C})$, isto é, $C.(1 + \mathrm{i})$. Analogamente, decorridos dois anos, o saldo passará a ser de $C.(1 + i)^2$. Então, após m anos, o valor do capital investido vale $\mathrm{C}.(1 + \mathrm{i})^{\mathrm{m}}$.

Entretanto, perceba na conjectura da tabela anterior que, se dividirmos o ano em n partes iguais e, depois de decorrido cada um desses períodos de $\frac{1}{\mathrm{n}}$ ano, capitalizados os juros rendidos e reinvestindo a mesma taxa, ao final do ano ao invés de $(\mathrm{C} + \mathrm{i.C})$, obteremos um saldo maior, ou seja, o valor do capital investido será de $\mathrm{C}.\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$. Assim, se os juros pagos pelo banco ao investidor forem capitalizados continuamente, isto é, a cada instante, o saldo do capital C, após um ano, é obtido multiplicando a quantia inicial pelo valor <u>limite[26] das exponenciais</u> quando n aumentar indefinidamente, ou seja,

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{C}.\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} = \mathrm{C}.\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$$

Portanto, se a taxa de juros é referida a anos ($k\%$, com $\mathrm{i} = \frac{\mathrm{k}}{100}$), então um capital C aplicado a essa mesma taxa passará a valer F(t), depois de t anos em,

$$\mathrm{F(t)} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{C}.\left(1 + \frac{\mathrm{i.t}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} = \mathrm{C}.\mathrm{e}^{\mathrm{i.t}}$$

Na resolução do problema, percebe-se ainda que o tempo não depende do valor inicial, pois como a taxa de juros é fixa, assim leva-se o mesmo tempo para triplicar o capital de 10 mil reais ou um capital de 1 real. Então, se a taxa de juros for contínua e de $k\%$, onde $\mathrm{i} = \frac{\mathrm{k}}{10}$, logo qualquer valor investido levará $\mathrm{t} = \frac{\ln \mathrm{p}}{\mathrm{i}}$ anos para se tornar p vezes o valor inicial.

[26] Para saber mais sobre limite de uma sequência e suas sobre propriedades aritméticas, consultar Lima (2009) página 119.

3.9 Problema 7 - Efeitos da radiação no meio ambiente[27]

Figura 15. Radioatividade.

Fonte:https://www.infoescola.com/quimica/radioatividade/

Acidentes nucleares têm consequências graves e de longa duração para o meio ambiente e as populações próximas. Passados 37 anos do pior desastre nuclear da história, Chernobyl é ainda hoje uma cidade-fantasma na Ucrânia. Não é permitido ficar mais de 15 minutos nas imediações da antiga usina soviética, cujo reator explodiu em 1986, matando 30 funcionários em apenas 30 dias e contaminando toda a vida ao seu redor. A exposição de material nuclear ao meio ambiente libera substâncias radioativas no ar e no solo. Essas substâncias contaminam plantas, rios, os animais e as pessoas em volta. Os dois elementos mais perigosos são o iodo radioativo e o césio, subprodutos da fissão nuclear do urânio. Em Chernobyl, o césio contaminou em cadeia: o solo, a vegetação que extraía nutrientes deste solo, o gado que se alimentava desta vegetação e, por fim, as pessoas que tomaram o leite de vacas contaminadas. O engenheiro agrônomo Virgílio Franco, do Centro de Energia Nuclear na Agricultura da USP, explica “A radiação não deixa o solo infértil, mas tudo que cresce ali acaba contaminado”.

Um dos grandes problemas da contaminação nuclear, segundo Franco, é que os níveis de radioatividade podem permanecer altos por décadas. Chama-se decaimento radioativo o processo pelo qual um isótopo radioativo, instável, perde energia espontaneamente e se transforma em átomo mais estável, não radioativo. Esse processo pode levar dias, como é o caso do iodo radioativo, ou décadas, no caso do césio radioativo. “Apesar de ser eliminado em até 30 dias pelo corpo humano, o césio pode durar 60 anos no ambiente, até desaparecer completamente”, diz Franco.

O estrôncio-90 (Sr-90) é uma substância radioativa que resulta de explosões nucleares na atmosfera. Sua meia-vida é de 29 anos. Suponha que uma área cultivada esteja contaminada por estrôncio-90 em nível quatro vezes maior do que aquele suportável pelo

[27] Texto adaptado. Ver Referência Problema 7.

corpo humano. Quanto tempo deve passar até que essa área possa ser utilizada para plantio de alimentos? [28]

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT304). Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305). Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

Objetos de conhecimento abordados:

Estudo da Função exponencial; Função Logaritmo; Conceito de Limite; Progressão geométrica

Possível estratégia para a resolução do problema

Uma proposta de solução

Segundo Feltre (2004), o tempo de meia-vida ($t_{1/2}$) ou período de semidesintegração é o tempo necessário para desintegrar a metade dos átomos radioativos existentes em uma dada amostra. Assim, podemos definir que a massa final (M_f) é igual a massa inicial M_o dividida por 2^n, em que n é o número de meias-vidas, isto é,

$$\mathrm{M_f} = \frac{\mathrm{M_o}}{2^{\mathrm{n}}}$$

No problema, a quantidade de estrôncio-90 é quatro vezes maior que a quantidade adequada x para o corpo humano. Então, tome $\mathrm{M_o} = 4\mathrm{x}$. Logo, devemos encontrar o inteiro n tal que $M_f = x$.

$$\mathrm{M_f} = \frac{\mathrm{M_o}}{2^{\mathrm{n}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{x} = \frac{4\mathrm{x}}{2^{\mathrm{n}}} \qquad \therefore \qquad \mathrm{n} = 2$$

Como a meia vida do estrôncio-90 é de 29 anos. Portanto, após 58 anos a área poderá ser utilizada para plantio de alimentos.

Segunda proposta de solução

[28] Questão retirada de Lima (2016), página 105.

A radioatividade é um fenômeno natural com origem no núcleo dos átomos e ocorre quando esses núcleos se modificam, emitindo espontaneamente partículas ou radiação por determinados elementos químicos, por exemplo, o estrôncio-90. Esses átomos se dividem em dois grupos: estáveis e instáveis. Os estáveis não possuem tendência de se modificarem, porém, os átomos instáveis tendem a se desintegrar (decaimento radioativo), ou seja, a massa atômica do seu núcleo diminui transformando-se em outra não radioativa, de modo que em um dado instante a massa que se desintegra de um átomo radioativo é proporcional a massa inicial.

Assim, seja M_0 a massa inicial do (Sr-90) cuja taxa[29] de desintegração radioativa é k . Como a desintegração ocorre instantaneamente, ao final do primeiro segundo teremos a perda de $k.M_0$ unidades de massa, então a massa restante será,

$$\mathrm{M_0} - \mathrm{k.M_0} = \mathrm{M_0}.(1 - \mathrm{k})$$

Analogamente, sem perda de generalidade, passados s segundos a massa restante do átomo é, $\mathrm{M_s} = (1 - \mathrm{k})^{\mathrm{s}}$. Entretanto, o processo de desintegração radioativa, na prática é contínuo, logo dado um inteiro positivo n e que a desintegração aconteça a cada fração $\frac{1}{n}$ de segundo, teremos após a primeira fração de segundo a massa restante será:

$$\mathrm{M_0} - \left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right).\mathrm{M_0} = \mathrm{M_0}.\left(1 - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)$$

Com isso, após um segundo e com as n desintegrações instantâneas, a quantidade de massa restante no átomo (Sr-90) decorridas as n reduções é $\mathrm{M_0}.\left(1 - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}$. Então, dado o intervalo $[0,1]$, se aumentarmos as subdivisões de partes iguais, após um segundo teremos a massa do (Sr-90) igual a:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{M_0}.\left(1 - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}} = \mathrm{M_0}.\mathrm{e}^{-\mathrm{k}}$$

No entanto, se considerarmos que a desintegração da massa inicial do elemento radioativo ocorresse ao final de t segundos, teríamos que dividir o intervalo $[0,\mathrm{t}]$ em n partes iguais. Logo, em cada subintervalo a perda será de $\mathrm{M_0}.\left(\frac{\mathrm{k.t}}{\mathrm{n}}\right)$. Portanto, se aumentarmos o número de divisões infinitamente teremos ao final de t segundos,

---

[29] Cada elemento radioativo possui uma constante de desintegração k.

$$M(t) = \lim_{n \to \infty} M_0 \,.\left(1 - \frac{k.t}{n}\right)^n = M_0 . e^{-k.t}$$

Sabemos que o estrôncio-90 possui meia-vida de 29 anos. Agora, determinemos a constante de proporcionalidade k. Tem-se,

$M(t) = M_0 . e^{-k.t}$, onde t é medido em anos. Daí obtemos:

$$\frac{M_0}{2} = M_0 . e^{-29k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-29k}$$

Aplicando o logaritmo neperiano em ambos os lados da igualdade anterior,

$$\ln\left(e^{-29k}\right) = \ln 2^{-1} \quad \therefore$$

$$k = \frac{\ln 2}{29}$$

Com isso, considere m a massa de estrôncio-90 suportável pelo corpo humano. De acordo com o enunciado, a área para plantio está contaminada a nível 4 vezes maior, logo $M_0 = 4m$. Então tem-se,

$$M(t) = M_0 . e^{-\left(\frac{\ln 2}{29}\right).t}$$

Depois de quantos anos a área estará própria para plantio de alimentos? Isto é, depois de t anos teremos $M(t) = m$,

$$4m . e^{-\left(\frac{\ln 2}{29}\right).t} = m \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\left(\frac{\ln 2}{29}\right).t} = \frac{1}{4}$$

Aplicando as propriedades de logaritmos naturais, teremos:

$$\ln\left(e^{-\left(\frac{\ln}{29}\right).t}\right) = \ln(4)^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\ln 2}{29}\right).t = \ln(2)^{-2} \quad \therefore$$

$$t = \frac{2.\ln 2}{\frac{\ln 2}{9}} = 58$$

Portanto, depois de 58 anos a área poderá ser utilizada para plantio de alimentos.

Comentários/sugestões para o professor

Na primeira solução do problema -*"Efeitos da radiação no meio ambiente",* é definida uma fórmula matemática que relaciona a quantidade de unidades de massa de uma dada substância radioativa e o número de meias-vidas dessa substância, esta fórmula é utilizada pelos professores de Química na resolução de problemas abordados nas aulas de Cinética Radioativa. Assim, nota-se no processo de decaimento radioativo que, a sequência de unidades de massa de um átomo radioativo é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

No caso da segunda estratégia resolutiva, busca-se interpretar e compreender a variação das grandezas envolvidas, onde cada substância radioativa tem sua constante de desintegração (constante de proporcionalidade) e, por analogia ao problema anterior, se constrói um modelo matemático que represente, de forma geral, a desintegração radioativa de uma substância dada. Além disso, o problema proposto traz ainda a possibilidade do professor de matemática, no Ensino Médio, interagir com as áreas das ciências da natureza, por exemplo, Química e a Física. Logo, o planejamento interdisciplinar para a resolução de situações-problema que envolva decaimento radioativo, mostra ao estudante o significado e um melhor embasamento do uso matemático de fórmulas prontas, adotadas muitas vezes na Química e Física.

Para trabalhar a habilidade EM13MAT305, com foco na resolução de problemas, é essencial que o estudante se aproprie inicialmente do conceito de logaritmo, ou seja, compreenda que a função logarítmica é uma relação entre o expoente e a potência de uma determinada base da potenciação. Desenvolvendo essa habilidade, é possível aumentar significativamente os contextos a serem explorados em outras situações problema, por exemplo, cálculo do ph de uma substância, energia liberada em abalos sísmicos, método de Carbono-14, entre outros, de modo que o estudante se sinta desafiado a determinar o expoente de uma potenciação.

Outra alternativa para aprofundar os conhecimentos do problema sugerido, envolve uma exploração na área de linguagens (mais propriamente no campo das Artes) onde é possível desenvolver um estudo de logaritmos para justificar os intervalos apresentados entre duas notas na escala musical temperada. Na descrição dessa habilidade, de acordo com a BNCC, observa-se a redução significativa do estudo das propriedades do logaritmo e dos procedimentos meramente matemáticos, de modo que seja possível ao estudante dedicar-se à leitura e interpretação de situações aplicadas e que solicitam algum tipo de cálculo e análise da resposta obtida. Logo, no contexto de outras áreas, o estudo dos logaritmos é um conhecimento importante da matemática para também desenvolver outras competências da BNCC com o intuito de despertar a curiosidade científica para resolução e formulação de problemas. Todavia, para aquisição dessas habilidades no problema sugerido e, em outros semelhantes, é oportuno o professor inserir nas suas aulas informações para além da matemática.

Por fim, vimos que, nos últimos três problemas apresentados, busco sugerir nas suas soluções métodos que faça o professor refletir no planejamento das aulas de matemática ao longo do Ensino Médio. Sabemos que a contextualização e interdisciplinaridade no trabalho em sala de aula é enriquecedor, pois melhora, nesse caso, o ensino-aprendizado para assimilar as habilidades das funções exponenciais e funções logarítmicas. Porém, após o professor expor as definições e técnicas de manipulação desses objetos de conhecimento, é necessário ainda questionar-se: Em que tipos de problemas de aplicação matemática deve-se apresentar aos estudantes, para caracterizar a distinção entre modelos lineares e exponenciais? Além disso, o trabalho do professor para a resolução de problemas que contemplem o uso das propriedades exponenciais e logarítmicas, com o objetivo de conjecturar fórmulas e ainda explorar matematicamente as suas demonstrações, estimula o docente a estudar e compreender mais, e com maior profundidade conceitos e habilidades matemáticas.

3.10 Problema 8 - Como checar a pressão arterial?[30]

Figura 16. Pressão arterial fatores de risco.

Fonte: https://br.depositphotos.com/78992460/stock-illustration-risk-factors-and-causes-of.html

A pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias, dependendo da força da contração do coração, da quantidade de sangue e da resistência das paredes dos vasos é chamada de <u>Pressão Arterial</u>. Ela está diretamente relacionada com os hábitos de vida como: excesso de peso; consumo exagerado de sal, açúcar e gorduras; consumo de álcool e sedentarismo. A pressão arterial aumentada tende a causar alterações funcionais e/ou estruturais no coração, cérebro, rins e vasos sanguíneos, além de alterações metabólicas que aumentam o risco de problemas cardiovasculares. O ponto mais alto da pressão nas artérias é chamado de <u>pressão sistólica</u>. O ponto mais baixo, ou a pressão que está sempre presente sobre as paredes arteriais, é chamada de <u>pressão diastólica</u>. O instrumento utilizado para medi-la é o esfigmomanômetro, e os tipos mais usados são os de coluna de mercúrio e o ponteiro (aneroide),

[30] Texto adaptado. Ver Referência Problema 8 a).

possuindo ambos um manguito inflável que é colocada em torno do braço do paciente. O estetoscópio é o instrumento que amplifica os sons e transmite até os ouvidos do operador. A pressão arterial de um indivíduo varia de acordo com diversos fatores como a idade, o estado emocional, a temperatura ambiente, a posição postural (em pé, deitado, sentado), estado de vigília, ou sono e com uso de drogas (fumo, álcool, etc.).

Segundo estudos científicos[31], para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza-se uma função do tipo $f(x) = A + B\cos(kx)$, em que A, B e k são constantes reais positivas e x representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que o batimento cardíaco representa o intervalo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, um cientista obteve os dados: pressão mínima 78 mm Hg; pressão máxima 120 mm Hg; 90 bpm (batimentos por minuto). Determine a função $f(x)$.

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT306). Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Objetos de conhecimento abordados:

Trigonometria no triângulo retângulo (principais razões trigonométricas). Trigonometria no ciclo trigonométrico. Unidades de medidas de ângulos (radianos). Funções trigonométricas (função seno e função cosseno); função periódica.

Possível estratégia para a resolução do problema

Temos a função $f(x) = A + B\cos(kx)$ que determina a pressão arterial de uma pessoa em função do tempo, em x segundos, onde A, B e k são constantes reais positivas. As pressões máximas e mínimas são, respectivamente, 120 mm Hg e 78 mm Hg.

Assim, uma característica da função cosseno é a imagem definida no intervalo $[-1,1]$, ou melhor, $-1 \leq \cos(kx) \leq 1$. Com isso tem-se $f(x) = 120$ quando $\cos(kx) = 1$ e, $f(x) = 78$ quando $\cos(kx) = -1$. Então,

$$\begin{cases} A + B = 120 \\ A - B = 78 \end{cases}$$

[31] Questão adaptada - ENEM-2017. Ver Referência Problema 8 b).

Resolvendo o sistema de equações, obtemos $A = 99$ e $B = 198$. Daí, como são 90 batimentos por minutos, ou seja, a cada 60 segundos tem-se 90 batimentos, isto é, um período de $\frac{2}{3}$ segundos. Por definição, uma função real é chamada de periódica quando existe um p real não- nulo, tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo x real. Se isso ocorre dizemos que o menor valor positivo de p é o período de f. Então, a função $f(x) = A + B\cos(kx)$ é periódica.

De fato,

$$f(x + p) = f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$A + B\cos[k.(x + p)] = A + B\cos(kx) \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos(kx + kp) = \cos(kx)$$

Como a função cosseno é periódica cujo período é 2π, tem-se

$$kp = 2\pi \quad \therefore \quad p = \frac{2\pi}{k}$$

De forma geral, toda função real definida na forma $f(x) = A + B\cos(kx)$, onde A, B e k são constantes reais terá como período,

$$p = \frac{2\pi}{|k|}$$

Agora, sabemos que $p = \frac{2}{3}$, assim obtemos:

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad k = 3\pi$$

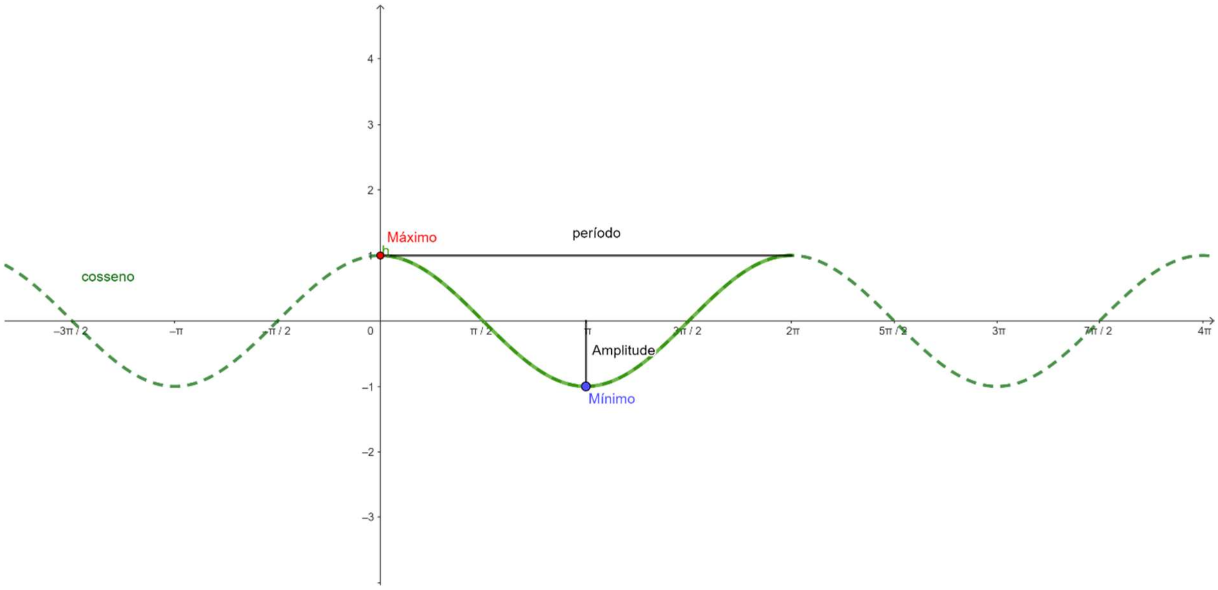
Portanto, tem-se a função $f(x) = 99 + 21\cos(3\pi x)$.

Comentários/sugestões para o professor

O problema *"Como checar a pressão arterial?* É uma aplicação do estudo das principais funções trigonométricas para interpretação e modelagem de situações relacionadas a fenômenos periódicos. Nesse contexto é relevante também debater com os educandos os hábitos de vida que a sociedade deve seguir para mitigar as enfermidades de doenças cardiovasculares.

Na construção do entendimento do problema proposto, o professor pode a priori explicitar, geometricamente, com o apoio de aplicativo de geometria e álgebra, por exemplo, o Geogebra, os conceitos de função periódica e amplitude, este último, como sendo o valor positivo que representa a metade da diferença entre o valor máximo e mínimo de uma função periódica. Com isso, o estudante é instigado a refletir sobre as informações contidas no enunciado do problema de modo que, a partir do conhecimento da definição e propriedades da função cosseno lhe conduza a formular a resposta.

Gráfico 3. Função cosseno.



Fonte – Elaborado pelo autor.

Repare ainda no gráfico 3 da função $\cos x$, para todo x real cujo período é 2π, geometricamente, o período é o comprimento horizontal no intervalo $[0,2\pi]$ sobre o domínio, então para plotar o gráfico inteiro da função basta "replicar" esse trecho ao longo do domínio da função. Com isso e, em consulta a alguns livros didáticos de matemática sobre como é calculado o período (p) de uma função periódica do tipo $\mathrm{f(x) = a + b\cos(kx + c)}$ ou $\mathrm{g(x) = a + b\sin(kx + c)}$, com $\mathrm{b} \neq 0$ e $\mathrm{k} \neq 0$, verifica-se o uso direto da fórmula $\mathrm{p} = \frac{2\pi}{|\mathrm{k}|}$. Entretanto, os autores não deixam claro como chega-se a esse resultado e isso induz, erroneamente, o estudante a ver a matemática apenas como um conjunto de fórmulas e tenham entendimento conceitual das funções trigonométricas inadequado. Logo, sugere-se que o professor demostre, a partir da definição formal de função periódica, a fórmula descrita acima.

Para melhor assimilação dos conceitos de periodicidade e amplitude no contexto estudado, é aconselhável a visualização na forma de gráfico para auxiliar o reconhecimento dos parâmetros a, b, c e k. Logo, com o auxílio do Geogebra o professor pode elaborar um quadro com uma síntese das transformações gráficas geradas pela variação desses parâmetros das funções $f(x) = a + b\cos(kx + c)$ e $g(x) = a + b\sin(kx + c)$, onde a, b, c e k são números reais. A construção desses gráficos está disponível em https://www.geogebra.org/m/uk7tqady.

No quadro abaixo tem-se, respectivamente, as análise das senóides[32] $f(x)$ e $g(x)$.

Quadro 3. Análise dos parâmetros a, b, c e k das funções f(x) e g(x).

Função	Parâmetro (a)	Parâmetro (b)	Parâmetro (c)	Parâmetro (k)
$\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$	Desloca o gráfico verticalmente em **a** unidades	Altera a amplitude da função para $\lvert b \rvert$.	(com k fixo) $c > 0$, desloca o gráfico (c) unidades para a esquerda. Se $c < 0$, desloca o gráfico $(-c)$ unidades para a direita.	O período da função muda para $p = \frac{2\pi}{\lvert k \rvert}$
$\mathbf{g(x)}$	Desloca o gráfico verticalmente em **a** unidades	Altera a amplitude da função para $\lvert b \rvert$.	(com k fixo) $c > 0$, desloca o gráfico (c) unidades para a esquerda. Se $c < 0$, desloca o gráfico $(-c)$ unidades para a direita.	Se $k > 0$, o período da função muda para $p = \frac{2\pi}{\lvert k \rvert}$ Se $k < 0$, o gráfico tem uma reflexão em relação ao eixo oy e o período muda para $p = \frac{2\pi}{\lvert k \rvert}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

[32] Curva dada pelo gráfico da função seno e também da função cosseno.

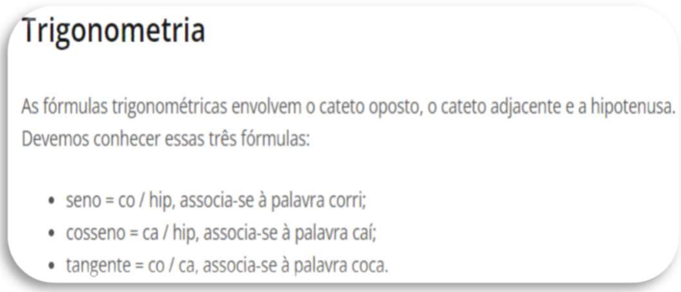
As funções trigonométricas são importantes para a matemática no Ensino Médio pelas suas aplicações e interações com outras áreas, em particular com o componente curricular de Física, que envolvem:

1- **A ondulatória** - acústica, deformação de molas, decomposição do espectro luminoso, movimento circulares, corrente elétrica alternada etc.
2- **A astronomia** - fases da lua, nível das marés etc.

Ademais, na resolução de problemas que envolve periodicidade, a História da Matemática auxilia como elemento motivador no qual o professor pode trabalhar para levar ao estudante a investigar os processos de evolução da humanidade, por exemplo, o uso dos conceitos de trigonometria para determinar distâncias desconhecidas que auxiliaram no traçado de rotas durante o período das grandes navegações e a utilização das tecnologias atuais na geolocalização.

A princípio, no Ensino Fundamental, a trigonometria é explorada apenas aos conceitos restritos a razões entre catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo. Essas relações trigonométricas, infelizmente, ainda são muitas vezes apresentadas aos estudantes como “macetes” do tipo da frase: “ corri e caí na coca”.

Figura 17. Visão errônea da trigonometria



Trigonometria

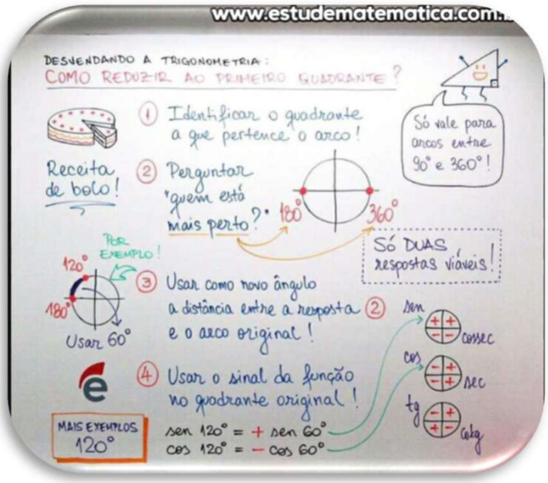
As fórmulas trigonométricas envolvem o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa. Devemos conhecer essas três fórmulas:

- seno = co / hip, associa-se à palavra corri;
- cosseno = ca / hip, associa-se à palavra caí;
- tangente = co / ca, associa-se à palavra coca.

Fonte-https://blog.unifacig.edu.br/veja-essas-5-dicas-de-como-memorizar-formulas-de-matematica/

Já as funções trigonométricas no ciclo trigonométrico, observa-se na figura abaixo também regras do tipo “redução ao primeiro quadrante”. Essas “receitas” potencializa nos estudantes a cometerem erros em trigonometria, pois não se assimila de forma clara os conceitos da <u>Função de Euler</u> e a medida de ângulos, por exemplo, *“*um aluno pode ser capaz de calcular o cosseno de um arco do 2ª quadrante, tendo o valor do seno desse arco. Porém ele não é capaz de explicar qual o significado da expressão sen (x) para um arco “x” do 2ª quadrante. *”*.

Figura 18. “Redução ao primeiro quadrante”.



Fonte: https://br.pinterest.com/pin/522628731753723128/

O Ensino da Matemática, em particular, da trigonometria, pautado na memorização de absurdos infundados, como sugere na figura 17, é um desserviço à educação matemática, mesmo que essas “receitas de bolo” tenham alguma eficácia na resolução de alguns exercícios. A abordagem para resolução de problemas defendida pela BNCC na habilidade EM13MAT306, com ajuda de recursos tecnológicos, permite ao professor mostrar aos estudantes uma matemática mais interessante. Com isso, o professor ao tratar da trigonometria ao longo do Ensino Médio deve refletir se deve ou não aprofundar nas questões de equações, inequações e identidades trigonométricas, pois, nos Parâmetros Curriculares Nacionais menciona que:

> [...] a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências e a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às implicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado **são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas** que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e **na construção de modelos que correspondam a fenômenos periódicos**. Grifo nosso. (BRASIL, 2002, p. 44).

3.11 Problema 9 - Dia das crianças[33]

Figura 19. Parque Guanabara-MG.

Fonte: https://pelasestradasdeminas.com.br/wp-content/uploads/2022/12/Parque-Guanabara-Belo-Horizonte-MG.jpg

O dia da padroeira do Brasil é o único feriado nacional no dia 12 de outubro, e, nesse mesmo dia comemora-se o dia das crianças. Segundo a reportagem, no dia 12 de outubro de 1923, o Rio de Janeiro, então capital federal, sediou um evento que reuniu estudiosos de infância e políticos de vários países no Congresso Sul-Americano da Criança, cujas pautas eram educação e desenvolvimento. Na época o deputado federal Galdino do Vale Filho, preocupado com a situação das crianças brasileiras propôs uma lei instituindo, 12 de outubro, o Dia das Crianças no Brasil, aprovado e, publicado em 5 de novembro de 1924. Apesar da criação da lei, essa data só "pegou" no comércio a partir de 1950. Suponha que para comemorar o dia das crianças, Paulo e Fernanda vão ao parque de diversão com seu filho Lucas. O casal compra dois bilhetes para seu filho brincar em pelo menos um dos brinquedos: roda gigante, montanha russa, torres, carrinho bate-bate e chapéu mexicano, podendo utilizar os dois bilhetes em um mesmo brinquedo. Assim,

a) Qual o número de possibilidades que Lucas tem de escolha dos brinquedos para se divertir nesse dia no parque?

b) Na saída do parque, Lucas foi presenteado com um brinquedo infantil[34], um caminhão-cegonha, formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados. No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores *amarelo, branco, laranja e verde*, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Com base nessas informações, qual a probabilidade de Lucas receber o presente, caminhão-cegonha, com três carrinhos pintados com a cor amarela?

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

[33] Texto adaptado. Ver Referências Problema 9 a).

[34] Questão adaptada - ENEM-2017. Ver Referência Problema 9 b).

(EM13MAT310). Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311). Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Objetos de conhecimento abordados:

Noções de combinatória: agrupamentos ordenados e não ordenáveis (combinações); combinações completas; permutação; diagrama de árvore; princípio multiplicativo; noções de probabilidade básica.

Possíveis estratégias para a resolução do problema

Uma proposta de solução (a)

Para responder a primeira pergunta desse problema podemos usar como estratégia a enumeração, por meio de um diagrama, de todos os casos possíveis. Considere o conjunto dado por $A = \{R, M, T, B, C\}$ dos 5 tipos de brinquedos do parque, onde $R =$ roda gigante; $M =$ montanha russa; $T =$ torres; $B =$ carrinho bate-bate e $C =$ chapéu mexicano. Assim tem-se:

Tabela 5. Contagem dos casos possíveis para uso dos bilhetes.

	R	M	T	B	C
R	RR	**RM**	RT	RB	RC
M	**MR**	MM	MT	MB	MC
T	TR	TM	TT	TB	TC
B	BR	BM	BT	BB	BC
C	CR	CM	CT	CB	CC

Fonte: Elaborado pelo autor.

Repare, RM e MR representam o mesmo caso, pois não importa a ordem da compra do primeiro e do segundo bilhete, no entanto pode-se incluir repetições, ou seja, o garoto pode repetir o mesmo brinquedo com os dois bilhetes. Note ainda, se não houvesse repetições na primeira escolha do brinquedo tinha-se 5 possibilidades e, para a segunda opção 4 possibilidades, logo pelo Princípio Multiplicativo seriam 20 possibilidades, mas como a ordem não importa na escolha dos brinquedos, o resultado será $\frac{20}{2} = 10$. De modo geral, se o garoto precisa escolher k bilhetes e o parque consiste de n brinquedos, então o número de maneiras que isso pode ser feito é chamado *o número de combinações de k elementos escolhidos entre n elementos e é denotado* por $\binom{n}{k}$ (lê-se: "n escolhe k"). Entretanto, no último cálculo não está incluindo a hipótese de o garoto comprar dois bilhetes e utilizá-los para um mesmo brinquedo, como listados na tabela acima. Portanto pelo Princípio Aditivo obtemos, $15 = 10 + 5$ possibilidades.

Segunda proposta de solução (a)

Sejam x_1 = quantidade de bilhetes de $\mathbf{R}$ − roda gigante;

x_2 = quantidade de bilhetes de $\mathbf{M}$ − montanha russa;

x_3 = quantidade de bilhetes de $\mathbf{T}$ − torre;

x_4 = quantidade de bilhetes de $\mathbf{B}$ − carrinho bate − bate;

x_5 = quantidade de bilhetes de $\mathbf{C}$ − chapéu amexicano

Como o total de bilhetes que serão comprados são 2, temos a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

Note que, é possível escolher o mesmo brinquedo duas vezes, então algumas das variáveis da equação anterior podem serem nulos. Portanto, a resposta do nosso problema equivale a determinar o número de soluções inteiras não-negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

Por exemplo, duas soluções possíveis são: $(0,0,1,0,1)$ e $(1,0,1,0,0)$.

Sabemos, pela 1ª solução, que o total de possibilidades é 15, logo escrever cada uma das soluções inteiras não - negativas da equação anterior não é uma estratégia razoável. Então, suponha que os cinco brinquedos estejam em fila, assim temos que distribuir dois bilhetes em cinco blocos usando quatro divisórias, onde cada bloco representa um brinquedo:

Quadro 4. Representa os cinco brinquedos em fila - exemplo: bilhetes distribuídos em brinquedos diferentes

Roda gigante	**Montanha Russa**	**Torre**	**Carrinho Bate-bate**	**Chapéu Mexicano**
F	F			

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 5. Representa os cinco brinquedos em fila - exemplo: bilhetes distribuídos em um mesmo brinquedo.

Roda gigante	**Montanha Russa**	**Torre**	**Carrinho Bate-bate**	**Chapéu Mexicano**
	FF			

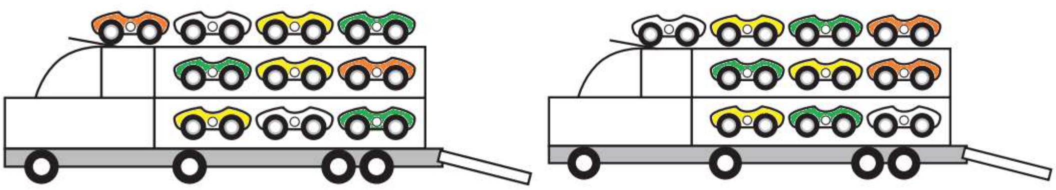
Fonte: Elaborado pelo autor.

Repare, determinar o número de maneiras de distribuir 2 bilhetes em cinco blocos é equivalente determinar o número de maneiras de organizar uma sequência com dois bilhetes e 4 divisórias, ou seja, determinar o número de sequências FDDFDD, onde F representa o bilhete e D a divisória. Portanto, tem-se 6 letras (2 F e 3 D), assim qualquer sequência de seis letras fica determinada de maneira única pela lista das duas posições ocupadas pela letra F ou, analogamente, pelas quatro posições ocupadas pela letra D. Logo, duas posições entre 6 podem ser escolhidas de $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$.

Uma proposta de solução (b)

Inicialmente determinemos quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha, sabendo que cada carrinho deve ser pintado com uma única cor e em todo caminhão deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das cores amarelo, laranja, branco e verde. Com isso, repare, na figura abaixo, que a mudança de posição dos carrinhos não gera uma composição diferente do brinquedo, então deve-se observar quantos carrinhos são pintados de cada cor.

Figura 20. Distribuição dos carinhos no caminhão-cegonha.



Fonte- https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf

Note ainda, como cada carinho deverá ser pintado com pelo menos uma cor, então fixado a cor de 4 dos 10 carrinhos o problema equivale a determinar o número de maneiras distintas de pintar os outros 6 carrinhos usando pelo menos uma das 4 cores. Seja:

$$x_1 = \text{número de carrinhos pintados na cor amarela;}$$

$$x_2 = \text{número de carrinhos pintados na cor laranja;}$$

$$x_3 = \text{número de carrinhos pintados na cor branca;}$$

$$x_4 = \text{número de carrinhos pintados na cor verde;}$$

Assim, determinemos o número de soluções inteiras e positivas da equação:

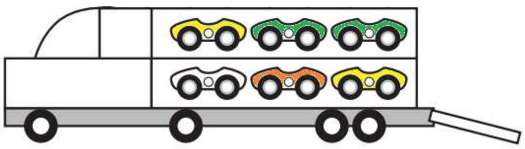
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

Uma solução possível da equação é $(2,1,1,2)$. Porém, 3 carinhos pintados de amarelo; 2 pintados de laranja; 2 pintados de branco e 3 pintados de verde, pois quatro carrinhos já estavam pré-fixados com uma cor. Veja nas figuras:

Figura 21. Carrinhos com pintura fixa.

Fonte: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf

Figura 22. Possível solução para pintura dos carros restantes.



Fonte: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf

Agora, suponha que cada cor é representada por uma caixa e, as quatro caixas estejam enfileiradas. Logo, devemos distribuir 6 carinhos nessas caixas com 3 divisórias de modo que nenhuma caixa fique vazia. Portanto, determinemos o número de sequências CDDCCCDCC onde C representa o carrinho e D a divisória entre as caixas. Com isso, qualquer sequência de 9 letras (3D e 6 C) fica determinada de maneira única pela lista das posições ocupadas pela letra D. Logo, três posições entre nove podem ser escolhidas de $\binom{9}{3} = 504$. Então, existem 504 maneiras diferentes de produzir um brinquedo caminhão-cegonha com 10 carrinhos pintados com pelo menos uma das quatro cores.

Determinemos agora o número de casos favoráveis, ou seja, quantos brinquedos, caminhão-cegonha, serão produzidos com exatamente 3 carrinhos pintados na cor amarela. Ora, o problema equivale a resolver a equação anterior para $x_1 = 2$, ou seja,

$$x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

Daí, analogamente, tem-se a sequência CDDCCC. Assim, duas posições entre seis letras podem ser escolhidas de $\binom{6}{2} = 15$ maneiras distintas. Com isso, obtemos a probabilidade P:

$$P = \frac{\text{nª de casos favoráveis}}{\text{nª de casos possíveis}} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{15}{504} = \frac{5}{168}$$

Portanto, a probabilidade de Lucas receber de presente o brinquedo, caminhão-cegonha, com 3 carrinhos pintados na cor amarela é de aproximadamente 3%.

Comentários/sugestões para o professor

Contar é um processo primitivo, porém ao longo da história novas técnicas surgiram. A Análise Combinatória na escola trata de situações problemas de contagem e, na maioria das vezes no Ensino Médio é explanado ao estudante fórmulas como ferramentas chaves para resolver exercícios e problemas padronizados que se caracterizam no estudo dos agrupamentos: Arranjos, Permutação e Combinação. Para alguns professores é o assunto mais difícil de ensinar, pois, boa parte dos estudantes tem dificuldade em interpretar os problemas e relacioná-los supostamente a uma fórmula, talvez pela metodologia adotada por alguns livros didáticos de não tratar o assunto com o devido cuidado e profundidade. Além disso, o tempo na escola para discussão dos problemas de Métodos de Contagem é reduzido e, por essa limitação, os professores, em geral, tendem a selecionar problemas que melhor se encaixam nas fórmulas.

No problema *Dia das Crianças*, item "a", refere-se à habilidade EM13MAT310 onde a resolução de problemas de contagem seja compreendida de modo que o estudante adquira a capacidade de avaliar e decidir quais estratégias são razoavelmente úteis na contagem dos elementos de um determinado conjunto sem que faça uso, necessariamente, de fórmulas. Logo, na construção da resposta busca-se na primeira solução do item "a", construir um modelo simplificado, porém explicativo e pautado no conceito do Princípio Multiplicativo, ou seja, na quantidade de decisões que devemos tomar para descrever um evento – se para cada uma das decisões, podemos ter por sua vez um número finito de possibilidades, então o número de maneiras de tomarmos um número finito de decisões será o produto destas possibilidades. Além disso, é fundamental que o estudante consiga distinguir situações onde a ordem dos elementos influencia a contagem dos elementos dos agrupamentos daqueles onde isso não ocorre. Consequentemente, em geral, esse conceito implica e justifica o uso da fórmula, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, para o cálculo do número de combinações simples, porém, na maioria das situações de contagem uma única fórmula não é suficiente para resolver um problema dado.

Todavia, analisar diferentes estratégias para a contagem também é uma boa sugestão para o desenvolvimento dessas habilidades, comparando representações na forma de listas, tabelas, esquemas e diagramas, mostrando as possíveis relações para depois quantificá-las. Além disso, o estudante começa a se apropriar do Princípio Multiplicativo e em sua utilização na resolução de outros problemas. Separar as etapas dos problemas em situações de acordo com os condicionantes apresentados (e, ou, se … então) também auxilia o estudante na utilização do princípio aditivo e, assim, na resolução da situação envolvida.

Na 2ª solução do item “a”, pretende-se mostrar ao professor que é possível discutir, em um mesmo problema, os conceitos de combinação completa e permutação de elementos repetidos. Repare ainda, nessa segunda estratégia resolutiva a base principal é o conceito do Princípio Multiplicativo. Logo, a resolução de problemas com as características sugerida, ajudará o estudante a desenvolver o significado de fatorial e de permutação, além disso o professor tem argumentos consistentes para definir as fórmulas matemáticas associadas aos diferentes tipos de agrupamentos (arranjo, combinação simples ou completa e permutação com repetição). Com isso, o professor deve estar atento na aplicação de diversos problemas que possibilite o estudante a compreender o uso do Princípio Multiplicativo, sendo a notação matemática no estudo da análise combinatória e o uso de suas fórmulas pré-estabelecidas, uma consequência para simplificar as contas e de como podem serem aproveitadas para apresentar uma solução com mais agilidade.

No item “b”, as habilidades EM13MAT310 e EM13MAT311 estão simultaneamente conectadas, pois o conceito de probabilidade estudado no Ensino Médio vai além de compreender o que é espaço amostral equiprovável e o cálculo de probabilidades simples. Para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT311, é preciso que o estudante reconheça o caráter aleatório de fenômenos e compreenda a probabilidade como meio para prever resultados em situações de incerteza (aleatórias) e, utilizando da contagem para determinar a quantidade dos elementos de um espaço amostral (casos possíveis) e de um evento nesse espaço (casos favoráveis), para resolver problemas em que sejam necessários aplicar os conceitos e cálculos da probabilidade. Nota-se ainda na construção da solução desse item e, comparado com a primeira pergunta, um exemplo prático de distinguir o cálculo do número de soluções inteiras não-negativas do número de soluções inteiras positivas de uma equação do tipo $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Portanto, esperamos que a resolução de problemas para aquisição das habilidades trabalhadas no problema proposto, possa ajudar o professor a refletir no planejamento das aulas no ensino da análise combinatória e probabilidade ao longo do Ensino Médio.

3.12 Problema 10 – Como é feito um notebook?[35]

Figura 23. Notebook.

Fonte-https://www.dell.com

Em uma fábrica de informática são produzidos notebooks. A placa mãe é o cérebro do computador, pois é responsável por conectar todos os componentes e comunicar um com o outro. Basicamente, a placa com as furações necessárias, passa por uma linha de montagem automatizada, que deposita pontos de solda sobre ela e depois coloca resistores e capacitores sobre cada um desses pontos. Nenhum produto pode entrar em linha de produção antes de ser exaustivamente testado, por exemplo, imagine o prejuízo de se produzir um lote de 1000 notebooks e descobrir só no momento dos testes finais que o conector USB não permite encaixe correto do cabo. Para evitar problemas desse tipo e garantir que o produto seja completamente funcional ao consumidor, suponha que nessa fábrica foram analisadas uma amostra de 800 placas mãe por duas máquinas diferentes para testagem de controle de qualidade. No quadro abaixo tem-se os resultados obtidos.

Quadro 6. Máquinas com placas defeituosas/perfeitas.

Tipos de Máquina	Nº / Placas defeituosas	Nº/Placas perfeitas
I	5	195
II	15	585

Fonte: elaborado pelo autor.

a) Pelas informações obtidas, há entendimento para se acreditar que na testagem das placas, as que apresentaram defeito independe do tipo de máquina utilizada na verificação?

b) Suponha que dois *notebooks*, com as mesmas configurações, serão sorteados entre dez professores, sendo sete mulheres e três homens. Considerando que um professor (a) não possa ganhar os dois *notebooks*, de quantas maneiras diferentes os dois notebooks podem ser distribuídos entre os dez professores?[36]

c) Qual a probabilidade de ao menos uma mulher receba um notebook?[37]

---

[35] Texto adaptado. Ver Referência Problema 10 a).

[36] Questão adaptada - UNICAMP 2007. Ver Referência Problema 10 b). página 4.

[37] Questão adaptada - UNICAMP 2007. Ver Referência Problema 10 b). página 4.

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT310). Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311). Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312). Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Objetos de conhecimento abordados:

Noções de combinatória: agrupamentos ordenados e não ordenáveis (combinações); diagrama de árvore; princípio multiplicativo; noções de probabilidade básica; Eventos dependentes e independentes; cálculo de probabilidade de eventos relativos a experimentos aleatórios sucessivos (probabilidade condicional).

Possíveis estratégias para a resolução do problema

Uma proposta de solução (a)

Por definição, seja B um evento arbitrário em um espaço amostral S finito equiprovável, com $\mathrm{P(B)} > 0$. A probabilidade de um evento A ocorrer, uma vez que B tenha ocorrido, ou seja, *a probabilidade condicional de A dado B*, denotado por $P(A|B)$, é definida por:

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$$

Na ocorrência do evento B faz com que todos os possíveis resultados sejam elementos de B, ou seja, nesse caso a probabilidade condicional considera como espaço amostral o evento B. Dessa forma, todos os elementos de A que podem ocorrer devem estar contido em B, o que implica nos elementos do evento $(\mathrm{A \cap B})$. Além disso, os eventos A e B são ditos independentes se a ocorrência de um deles não muda a incerteza sobre a ocorrência do outro. Logo, simbolicamente, A e B são eventos independentes se $\mathrm{P(A|B) = P(A)}$ ou $\mathrm{P(B|A) = P(B)}$. Assim, pelas informações contidas no enunciado do problema, denotemos os eventos,

$$\text{A: "Placas testadas pela máquina I";}$$

$$\text{B: "Placa mãe defeituosa";}$$

E os, respectivos, eventos complementares.

$$\overline{\mathrm{A}}: \text{"Placas testadas pela máquina II";}$$

$$\overline{\mathrm{B}}: \text{"Placa mãe perfeita";}$$

Tem-se,

$$\mathrm{P(B|A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

Mas, $\mathrm{P(B)} = \frac{20}{800} = 0{,}025$. Portanto, as placas mãe que registraram defeito é independente do tipo de máquina usada, pois $\mathrm{P(B|A)} = \mathrm{P(B)}$. Analogamente, pode-se verificar a mesma conclusão se considerarmos os eventos complementares.

Uma proposta de solução (b)

Como cada professor só pode ganhar um único notebook, então para o primeiro sorteio existe 10 maneiras diferentes; o segundo há 9 possibilidades e, pelo Princípio Multiplicativo tem-se 90. No entanto, suponha que Paulo e Fernanda estão entre os professores e tenham sido premiados. Logo, a ordem de distribuição dos dois aparelhos não altera o agrupamento, assim temos um conjunto com 10 elementos no qual 2 serão premiados. Daí obtemos, $\binom{10}{2} = \frac{90}{2} = 45$. Portanto, existem 45 maneiras diferentes de distribuir os dois notebooks.

Uma proposta de solução (c)

Para que pelo menos uma mulher seja premiada, temos os seguintes casos possíveis: o primeiro notebook foi para uma mulher e o segundo para um homem ou o primeiro foi sorteado para um homem e o segundo notebook foi sorteado para uma mulher e, os dois notebooks foram sorteados para duas mulheres. Definindo $\mathrm{M_1}$ o evento *"o primeiro sorteio foi para uma mulher"* e, $\mathrm{H_1}$ corresponde ao evento *"o primeiro sorteado vai para um homem"*. Analogamente, vamos chamar $\mathrm{M_2}$ o evento *"o segundo sorteado foi para uma mulher"* e, $\mathrm{H_2}$ o evento *"o segundo sorteio para um homem"*.

Com isso, a probabilidade que queremos encontrar é do evento S, "pelo menos uma mulher ganhe um notebook". Logo, simbolicamente temos $\mathrm{S} = (\mathrm{M_1} \cap \mathrm{H_2}) \cup (\mathrm{H_1} \cap \mathrm{M_2}) \cup (\mathrm{M_1} \cap \mathrm{M_2})$. Como os eventos são dois a dois disjuntos a probabilidade $\mathrm{P(E)}$ é dada pela soma:

$$\mathrm{P(S)} = \mathrm{P(M_1 \cap H_2)} + \mathrm{P(H_1 \cap M_2)} + \mathrm{(M_1 \cap M_2)}$$

Daí como cada um desses eventos aleatórios ocorre sucessivamente, têm-se:

$$P(M_1 \cap H_2) = P(M_1) \times \underbrace{P(H_2|H_1)}_{\substack{\text{Prob.do 2ª sorteado ser homem na certeza} \\ \text{que o primeiro é mulher.}}} = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

$$P(H_1 \cap M_2) = P(H_1) \times \underbrace{P(M_2|H_1)}_{\substack{\text{Prob.do 2ª sorteado ser mulher na certeza} \\ \text{que o primeiro é homem.}}} = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

$$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \times \underbrace{P(M_2|M_1)}_{\substack{\text{Prob.do 2ª sorteado ser mulher na certeza} \\ \text{que o primeiro é mulher.}}} = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{14}{30}$$

Logo, a $P(S) = \frac{7}{30} + \frac{7}{30} + \frac{14}{30} = \frac{28}{30} \quad \therefore \quad P(S) = \frac{14}{15} \approx 0{,}9333$

Portanto, a probabilidade de pelo menos uma mulher ser premiada com um notebook é de aproximadamente 93,33%.

Segunda proposta de solução (c)

Note que, o único caso em que a mulher não é sorteada é o evento complementar $\overline{S}$ "os dois homens serem sorteados". Assim, a probabilidade é:

$$P(\overline{S}) = P(H_1 \cap H_2) = P(H_1) \times \underbrace{P(H_2|H_1)}_{\substack{\text{Prob.do 2ª sorteado ser homem na} \\ \text{certeza} \\ \text{que o primeiro também é homem.}}} = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

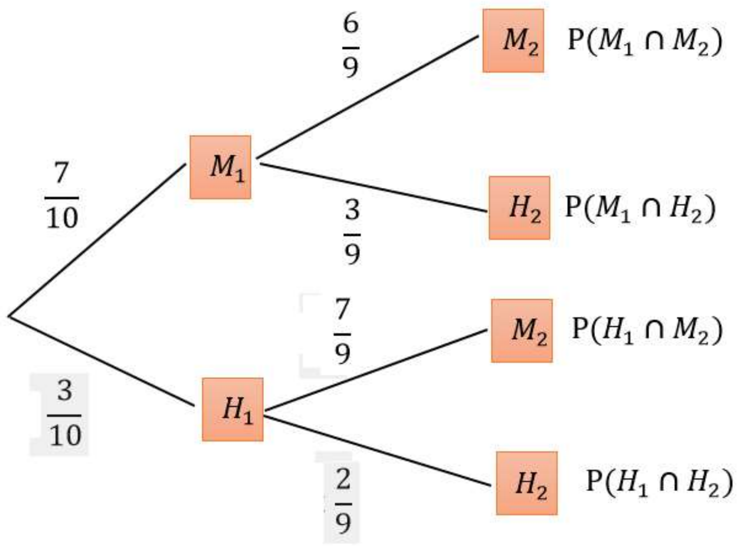
$$P(S) = 1 - P(\overline{S}) = \frac{14}{15}$$

Repare ainda, poderíamos determinar a intersecção de forma direta, ou seja, temos um conjunto com três elementos dos quais dois serão escolhidos, assim temos $\binom{3}{2} = 3$ maneiras diferentes de dois homens serem premiados. Como existem 45 possibilidades diferentes de distribuir os dois notebooks, então $P(H_1 \cap H_2) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$. Logo, $P(\overline{S}) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

Terceira proposta de solução (c) via árvore de possibilidades

Um diagrama de árvore representa uma forma de representar sequencialmente cada evento. Em cada ramificação está associada a respectiva probabilidade, onde cada "nó" da árvore corresponde à ocorrência de um evento condicionado à ocorrência de todos os eventos representados pelos caminhos anteriores. Assim o cálculo das probabilidades, em geral, é determinado como:

Figura 24. Solução via árvore de possibilidades.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Repare as probabilidades correspondentes aos caminhos deverão ser multiplicadas. Logo, obtemos:

$$P(S) = P(M_1 \cap H_2) + P(H_1 \cap M_2) + (M_1 \cap M_2)$$

$$P(S) = \frac{7}{30} + \frac{7}{30} + \frac{14}{30} = \frac{28}{30} \approx 0{,}9333$$

Então, a probabilidade de ao menos uma mulher ser premiada com um notebook é de aproximadamente 93,33%.

Comentários/sugestões para o professor

Nesse problema o foco principal da habilidade EM13MAT312, é trabalhar particularmente com situações do cálculo de probabilidade de um espaço amostral equiprovável de eventos aleatórios sequenciais. Para se ter êxito nessa habilidade, é fundamental o professor deixar claro para o estudante a compreensão do conceito de independência entre eventos, pois em probabilidade, dizer que dois eventos são independentes implica em afirmar que a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro, como exemplificado na primeira pergunta onde aplica-se o conceito de probabilidade condicional, afim de concluir que as placas mãe defeituosas independe do tipo de máquina utilizada na testagem. Além disso, as situações problemas que se encaixam nessa habilidade estão diretamente correlacionados às habilidades EM13MAT310 e EM13MAT311, por permitir ao estudante aplicar os diferentes métodos ou técnicas de contagem.

Em geral, para resolver alguns problemas que envolve probabilidade de eventos aleatórios e equiprováveis consecutivos, usa-se como estratégia a construção da árvore de possibilidades, de modo a agilizar na construção da resposta. Porém, esse método pode acarretar distorções de compreensão entre a probabilidade condicional e a probabilidade simultânea (teorema da multiplicação de probabilidades) de dois eventos. A probabilidade condicional é a razão entre duas probabilidades incondicionais, ou seja, $\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$, com $\mathrm{P(B)} > 0$, e em algumas situações não se faz uso dessa fórmula, pois nem sempre o espaço amostral é finito e equiprovável. Ademais, é comum encontrar erros em aplicações do cálculo de probabilidade simultânea de dois eventos sem que faça antes uma verificação se esses eventos são ou não independentes, isto é, calcular a probabilidade sequencial como sendo o produto dessas probabilidades incondicionais em qualquer situação. Logo, devemos ter a atenção ao escrever a expressão $\mathrm{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$, que só é válida para o caso dos eventos A e B serem independentes.

Por exemplo, retornemos ao "diagrama de árvore". Os eventos $\mathrm{H_1}$ e $\mathrm{H_2}$ são equiprováveis, então tem-se $\mathrm{P(H_1) = P(H_2)} = \frac{3}{10}$. De fato,

$$\mathrm{P(H_2)} = \frac{7}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9} = \frac{7.3+3.2}{9.10} = \frac{3.(7+2)}{9.10} = \frac{3}{10}$$

No diagrama vimos que para encontrar a probabilidade basta multiplicar as probabilidades dos "caminhos". Contudo, os eventos $\mathrm{H_1}$:*"o primeiro sorteio vai para um homem"* e H_2: *"o segundo sorteio também sai para um homem"* não são independente.

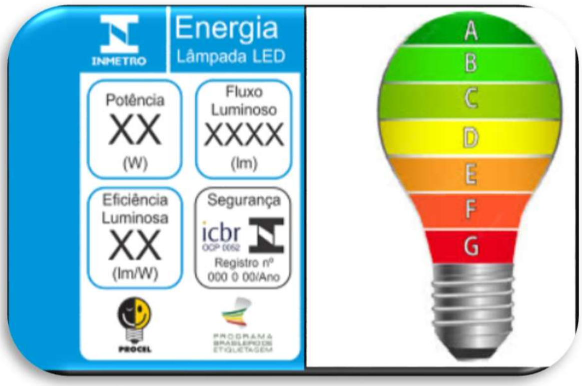
De fato,

$$\mathrm{P(H_1 \cap H_2) = P(H_1).P(H_2|H_1)} = \frac{3}{10}\times\frac{2}{9} = \frac{1}{15} \neq \frac{3}{10}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

Portanto, calcular a probabilidade do evento $(\mathrm{H_1 \cap H_2})$ pela árvore de possibilidades pode induzir ao erro de interpretação dos eventos H_1 e H_2, quando se escreve diretamente, nesse caso, a relação $\mathrm{P(H_1 \cap H_2)} = \frac{3}{10}\times\frac{2}{9} = \frac{1}{15}$.

3.13 Problema 11 – Etiqueta de eficiência energética (PBE)[38]

Figura 25. Eficiência Energética.



Fonte:https://codlux.blogspot.com/2018/01/lampada-led-com-inmetro-vale-partir-de.html

O programa Brasileiro de Etiquetagem (PBE), coordenado pelo Inmetro, fornece informações sobre o desempenho dos produtos, considerando atributos como a eficiência energética, o ruído e outros critérios que podem influenciar a escolha dos consumidores no momento da compra. Esses produtos são testados em laboratório e recebem etiquetas com faixas coloridas que os diferencia. No caso de eficiência energética a classificação vai da mais eficiente (A) à menos eficiente (de C até G), onde se entende os mais eficientes por ter o menor custo para funcionar e consequentemente reduz os impactos ambientais. Até pouco tempo, a maioria das lâmpadas destinadas à iluminação residencial era do tipo incandescente, que consumia muita energia e durava um curto período de tempo. Gradativamente, esses produtos foram substituídos pelas fluorescentes compactas, quatro vezes mais eficientes e seis vezes mais duráveis que as incandescentes, porém com maior impacto ambiental. Com a popularização das lâmpadas LED - *Light Emitting Diodes*, percebeu-se que a sua eficiência luminosa é maior do que as das outras lâmpadas, ou seja, gasta menos energia para gerar a mesma iluminação. Na hora de comprar uma lâmpada é importante o consumidor saber diferenciar as informações contidas na etiqueta. Por exemplo, o Watt (W) indica a quantidade de energia elétrica consumida pela lâmpada. Já o fluxo luminoso, em lúmens (lm), é quantidade de luz emitida para todas as direções pela fonte luminosa e, a eficiência luminosa (lm/w) é a relação do fluxo luminoso com a potência. As lâmpadas LED[39] iluminam muito mais do que as lâmpadas incandescentes de mesma potência. Por exemplo, a eficiência luminosa, medida em lúmens por watt (lm/W), é de 70 lm/W, enquanto nas lâmpadas incandescentes, é da ordem de 13,5 lm/W. Em uma residência, 10 lâmpadas incandescentes de 70 W serão substituídas por lâmpadas LED que fornecem iluminação equivalente (mesma quantidade de lúmens).

[38] Texto adaptado. Ver Referência Problema 11 a).
[39] Questão adaptada – ENEM 2012. Ver Referência Problema 11 b).

a) Admitindo que as lâmpadas ficam acesas, em média 8 horas por dia e que o preço da energia elétrica é de R$ 0,90 por kWh, qual a economia mensal na conta de energia elétrica dessa residência?
b) Considere duas lâmpadas[40], A e B, de modo que uma delas possui 4 vezes mais lúmens que a outra e, distam 15 metros entre si. Sabendo que a luminosidade num ponto é diretamente proporcional a intensidade da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância desse ponto a mesma fonte, determine um ponto na reta AB que seja iluminado igualmente por ambas.
Habilidades a serem desenvolvidas:
Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:
(EM13MAT314). Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
Objetos de conhecimento abordados:
Grandezas determinadas pela razão ou produto de outras (potência elétrica, energia elétrica, fluxo luminoso) proporcionalidade direta e inversa.

Possíveis estratégias para a resolução do problema
Uma proposta de solução (a)

Por definição, a potência elétrica é o gasto instantâneo de um equipamento por um intervalo de tempo. Assim, intuitivamente a energia elétrica é "uma energia meio", pois, ao ligar um chuveiro elétrico, por exemplo, a energia é transformada em energia térmica cujo objetivo é utilizar a energia elétrica para aquecer a água do banho. Matematicamente, a potência elétrica (P) é dado por,

$$\mathrm{P} = \frac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Sendo ΔE a energia dada em joule (J) e o tempo Δt dado em segundos (s), onde $\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Watt(W)}$. Já o consumo de energia elétrica (kWh) é diretamente proporcional ao tempo que um equipamento elétrico de potência P fica funcionando, ou seja,

$$\mathrm{E_{elétrica}} = \mathrm{P.t}$$

onde $\mathrm{E_{elétrica}} = \text{energia consumida (kwh)}; \mathrm{P} = \text{Potência (W) e } \mathrm{t} = \text{tempo (horas)}$

Com isso, do enunciado do problema, temos 10 lâmpadas encandecestes de 70 W cada, ligadas 8 horas por dia durante um mês, consome:

[40] Questão adaptada de Lima. *et al.* (2016), p. 55.

$$\mathrm{E}_{\text{elétrica/encandescente}} = \mathrm{P.t} = 10.(70).240 = 168000\ \mathrm{Wh} = 168\ \mathrm{kWh}$$

Como cada kWh custa R$0,90, então no final do mês a conta de energia elétrica é de R$151,20.

Sabemos que a eficiência luminosa da lâmpada incandescente é 13,5 lm/W, então denotemos a eficiência luminosa por φ onde F é o fluxo luminoso (lm) e P a potência (W):

$$\varphi = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}}$$

Assim, cada lâmpada encandeceste de 70 W tem 945 lúmens. Logo, as 10 lâmpadas possuem o fluxo luminoso de 9450 lm. Agora, como a eficiência luminosa de cada lâmpada LED é $\varphi = 70\ \mathrm{lm/W}$. Então, para substituirmos as 10 lâmpadas incandescentes por LEDs, devemos calcular a potência com $\mathrm{F} = 15.000\ \mathrm{lm}$, isto é

$$\varphi = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{F}}{\varphi} = \frac{9450}{70} = 135\ \mathrm{W}$$

Daí obtemos a energia consumida,

$$\mathrm{E}_{\text{elétrica/LEDs.}} = \mathrm{P.t} = 135.240 = 32400\ \mathrm{Wh} = 32{,}4\ \mathrm{kWh}$$

Assim, no final do mês a conta de energia elétrica será de R$ 29,16. Portanto a substituição das lâmpadas incandescentes por LEDs terá uma economia de R$ 122,04.

Uma proposta de solução (b)

Seja C o ponto iluminado igualmente pelas lâmpadas A e B, logo tem-se as seguintes variáveis:

$$\mathrm{L_c} = \text{Luminosidade no ponto C}$$
$$\mathrm{i_A} = \text{Intencidade da lâmpada A.}$$
$$\mathrm{i_B} = \text{Intencidade da lâmpada B}$$

No enunciado diz: A luminosidade num ponto é diretamente proporcional a intensidade da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto a mesma fonte.

Daí, temos:

$$\begin{cases} \mathrm{L_c} = \dfrac{\mathrm{i_A}}{(\mathrm{d_{AC}})^2} & \text{(I)} \\ \mathrm{L_c} = \dfrac{\mathrm{i_B}}{(\mathrm{d_{BC}})^2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Como a distância entre as duas lâmpadas A e B é de 15 m. Então, fazendo $d_{BC} = d$ e $d_{AC} = 15 - d$ obtemos:

$$L_c = \frac{i_A}{(15-d)^2} \quad \text{(I)}$$

$$L_c = \frac{i_B}{d^2} \quad \text{(II)}$$

Sabe-se que a lâmpada A possui 4 vezes mais lúmens que a lâmpada B. Então, de I e II tem-se:

$$\frac{i_A}{(15-d)^2} = \frac{i_B}{d^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{4.\,i_B}{(15-d)^2} = \frac{i_B}{d^2} \quad \Leftrightarrow \quad (15-d)^2 = 4.\,d^2 \Leftrightarrow$$

$$d^2 + 10d - 75 = 0$$

Reescrevendo a equação acima na forma canônica, obtemos:

$$(d+5)^2 - 100 = 0 \quad \Rightarrow d = 5 \text{ m, pois d é positivo.}$$

Portanto o ponto C está a 5 m da lâmpada B e a 10 m da lâmpada A.

Comentários/sugestões para o professor

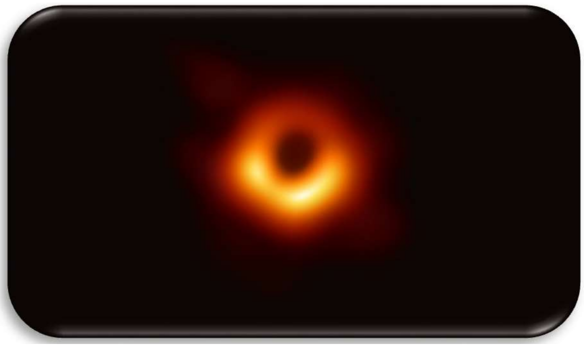
A situação problema *"Etiqueta de eficiência energética"* tem como foco na habilidade descrita, trabalhar a relação entre grandezas compostas (potência, fluxo luminoso, eficiência luminosa, consumo de energia elétrica) utilizadas muitas vezes em outras áreas do conhecimento como as Ciências da Natureza. Logo, é importante o professor trabalhar em parceria com outros componentes curriculares com o objetivo de levar ao estudante o significado dessas unidades de medida as quais essas grandezas compostas estão contextualizadas nos problemas, pela proximidade com fenômenos naturais e sociais, de modo que os conhecimentos matemáticos tipo, proporcionalidade, complementem o entendimento das fórmulas que envolvam as grandezas relacionadas pela razão ou pelo produto de outras. Além do tema sugerido, o professor pode ainda formalizar diversas atividades para representar situações envolvendo grandezas compostas, muitas dessas ideias podem serem trabalhadas por iniciativa própria dos estudantes, em pesquisar temas de interesse relevante da vida cotidiana.

Por exemplo, ao trabalharmos com o IMC (índice de massa corporal usado pela medicina para aferir o quadro de baixo peso e sobrepeso de uma pessoa), além da compreensão de proporcionalidade existente entre as grandezas massa (kg) e altura de um indivíduo, o assunto está relacionado ao contexto da saúde dos estudantes e das relações de comportamento entre eles quanto ao surgimento do bullying sofrido por alunos considerados acima do peso. Com isso, as aulas de matemática devem se inserir nos diversos contextos sociais da vida do estudante com o propósito de orientar os educandos a ter uma convivência respeitosa.

Dentre as inúmeras opções possíveis de se trabalhar com a relação de grandezas compostas descritas pela habilidade EM13MAT314, segundo a BNCC podemos destacar: a densidade de uma substância a partir da razão entre sua massa e seu volume, a densidade demográfica de determinada região, o PIB per capita (Produto Interno Bruto per capita) que indica em um certo sentido a "riqueza total" anual produzida num país, ou até mesmo a determinação de unidades de medida da própria Matemática, como a definição de metro quadrado e de metro cúbico. Por exemplo, ao compreender que a unidade de medida da aceleração (metro por segundo ao quadrado) é obtida pelo produto entre a unidade de medida da velocidade (metro por segundo) e a de tempo (segundo), o estudante compreende melhor que a definição de aceleração é a variação da velocidade de um corpo por unidade de tempo, uma vez que na resolução de situações problema é preciso comparar ou operar com essas unidades, assim como realizar conversões entre elas.

3.14 Problema 12 – A primeira imagem de um buraco negro[41]

Figura 26. Buraco Negro.



Fonte:https:solarsystem.nasa.gov/resources/2319/first-image-of-a-black-hole/

Em 2017, os cientistas descobriram o buraco negro supermassivo mais distante conhecido. Esta "besta" comedora de matéria tem 800 milhões de vezes a massa do nosso Sol, levou mais de 13 bilhões de anos para sua luz chegar até a Terra. Como mais de dois terços das galáxias conhecidas, a Via Láctea tem uma forma espiral cujo centro possui muita energia e, ocasionalmente, explosões vívidas estão

[41] Texto adaptado de duas reportagens. Ver Referência Problema 12 a) e b).

sendo geradas. Com base na imensa gravidade que seria necessária para explicar o movimento das estrelas e a energia expelida, os astrônomos concluem que o centro da Via Láctea é um buraco negro supermassivo. Esse buraco negro e sua sombra foram capturados em uma imagem pela primeira vez em 10 de abril de 2019 por uma rede internacional de radiotelescópios chamada *Event Horizon* Telescope (EHT). A imagem mostra a sombra do buraco negro supermassivo no centro de *Messier 87 (M87*), uma galáxia elíptica a cerca de 55 milhões de anos-luz da Terra. Este buraco negro tem 6,5 bilhões de vezes a massa do Sol. Capturar sua sombra envolveu oito radiotelescópios terrestres ao redor do globo, operando juntos como se fossem um telescópio do tamanho de todo o nosso planeta. O cientista, *Katie Bouman*, responsável pela imagem do buraco negro, explica que fotografar um buraco negro se compara a "fotografar uma laranja na lua, mas com um radiotelescópio. Imaginar algo tão pequeno significa que precisaríamos de um telescópio com 10 mil quilômetros de diâmetro, o que não é prático, porque o diâmetro da Terra não chega a 13 mil quilômetros". Para a conclusão da foto, 8 observatórios ao redor do mundo foram interligados para formar um grande telescópio virtual. Foram cinco dias de registros de imagens, produzindo um total de 5 Petabytes (PB) de informações que, processadas, gerou a primeira foto de um buraco negro da história. De acordo com essas informações, responda:

a) Quantos pen-drives, com capacidade de 125 GB seriam necessários para armazenar as informações processadas que geraram a primeira foto de um buraco negro?
b) Supondo que a velocidade de transmissão para a internet banda larga é de 78,62 Mbps, quanto tempo levará para transmitir os 5PB de informações?

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT313). Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

Objetos de conhecimento abordados:

Notação científica. Algarismos significativos e técnicas de arredondamento. Estimativa e Comparação de valores em notação científica e em arredondamentos.

Possíveis estratégias para a resolução do problema

Uma proposta de solução (a)

Apesar da quantidade de bits nos bytes ser calculado como potência de 2 (sistema binário), os múltiplos do byte seguem orientações do Sistema Internacional de Unidades, ou seja, base por potência de 10.

Tabela 6. Múltiplos de bytes no SI.

Descrição	Representação no SI	Quantidade de bytes
1 kilobyte	1kB	$1000 = 10^3$
1 megabyte	1MB	$1.000.000 = 10^6$
1 gigabyte	1GB	$1.000.000.000 = 10^9$
1 terabyte	1TB	$1.000.000.000.000 = 10^{12}$
1 petabyte	1PB	$1.000.000.000.000.000 = 10^{15}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, tem-se 1 PB = 10^6 GB. Logo, 5 PB = 5.000.000 GB. Como cada pen-drive tem capacidade de 125 GB, então $\frac{5.000.000}{125} = 40.000$ unidades para armazenar os dados obtidos na foto do buraco negro.

Uma proposta de solução (b)

Temos 5 PB = 5. 10^9 MB e 1 b = 8 Mb,

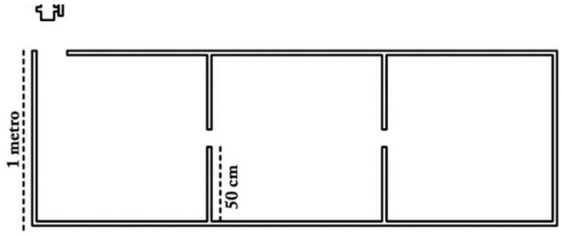
Então 5 PB = 40. 10^9 Mb.

Como a velocidade de transmissão foi de 78,62 Mbps, assim $\frac{40.000.000.000}{78,62} \approx 508.776.392,77$ segundos para transmitir os dados coletados pelos observatórios.

Para melhor entendimento, 1 ano corresponde 31.536.000 segundos. Então temos $508.776.392,77$ segundos é aproximadamente 16,13 anos. Entretanto, na prática esses dados foram transportados por HDs externos e levaram apenas 2 anos.

3.15 Problema 13 – Cubos conectados[42]

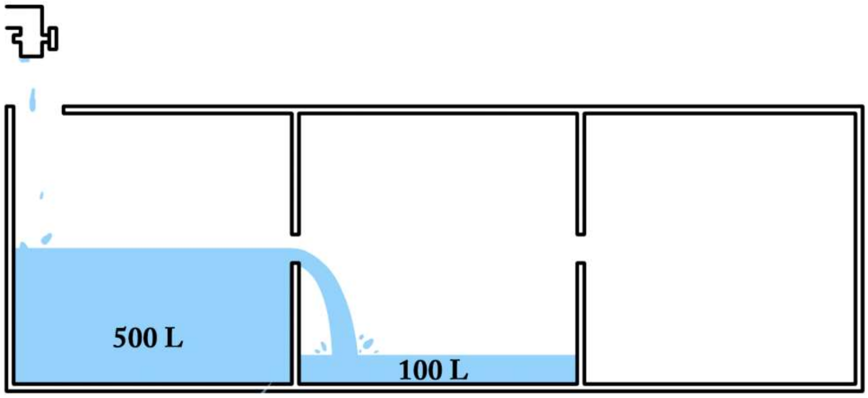
Figura 27. Cubos conectados.



Fonte:https://www.mais.mat.br/pensamentocomputacional/arquivos/pensacomp_professor.pdf

Uma empresa que produz detergente transporta o produto bruto em cubos metálicos com lados iguais a 1 metro. Para facilitar o enchimento destes cubos, eles possuem uma abertura pequena, como mostrado na figura ao lado, que permite conectar dois cubos durante o enchimento. Assim, à medida que o líquido é despejado, ao atingir a altura da abertura, o líquido começa a escoar para o segundo cubo. Se houver líquido suficiente, o terceiro cubo também poderá receber uma parte. Por questões de logística, a empresa atualmente enche sempre 3 cubos conectados por essas aberturas, e isso é feito despejando-se o líquido sempre a partir da tampa do cubo mais à esquerda, como mostrado na figura. Por exemplo, se forem injetados 600 litros de detergente, os cubos ficarão como mostrado a seguir, com 500 litros no primeiro, 100 litros no segundo e 0 no terceiro.

Figura 28. Cubos conectados/600 litros de detergente.



Fonte: https://www.mais.mat.br/pensamentocomputacional/arquivos/pensacomp_professor.pdf

a) Quantos litros haverá em cada cubo se forem injetados 875 litros de detergente?
b) Quantos litros haverá em cada cubo se forem injetados 1328 litros de detergente?
c) Quantos litros haverá em cada cubo se forem injetados 1905 litros de detergente?
d) A empresa quer que você crie um algoritmo que permita saber qual o volume de detergentes em cada um dos três cubos quando uma quantidade *N* (em litros) é despejada no conjunto. Apresente a sua solução de maneira esquemática.

42 Texto e questões adaptados. Ver Referência Problema 13.

Habilidades a serem desenvolvidas:

Neste problema se trabalham as habilidades designadas em:

(EM13MAT315). Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Objetos de conhecimento abordados:

Noções básicas de Matemática Computacional. Algoritmos e sua representação por fluxogramas.

Possíveis estratégias para a resolução do problema

Uma proposta de solução (a, b, c)

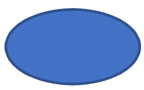
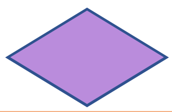
De acordo com o enunciado do problema as respostas para as três primeiras perguntas são, respectivamente:

a) Cubo I: 500 litros; cubo II: 375 litros e cubo III: 0
b) Cubo I: 500 litros; cubo II: 500 litros e cubo III: 328 litros
c) Cubo I: 635 litros; cubo II: 635 litros e cubo III: 635 litros

Uma proposta de solução (d) Fluxograma

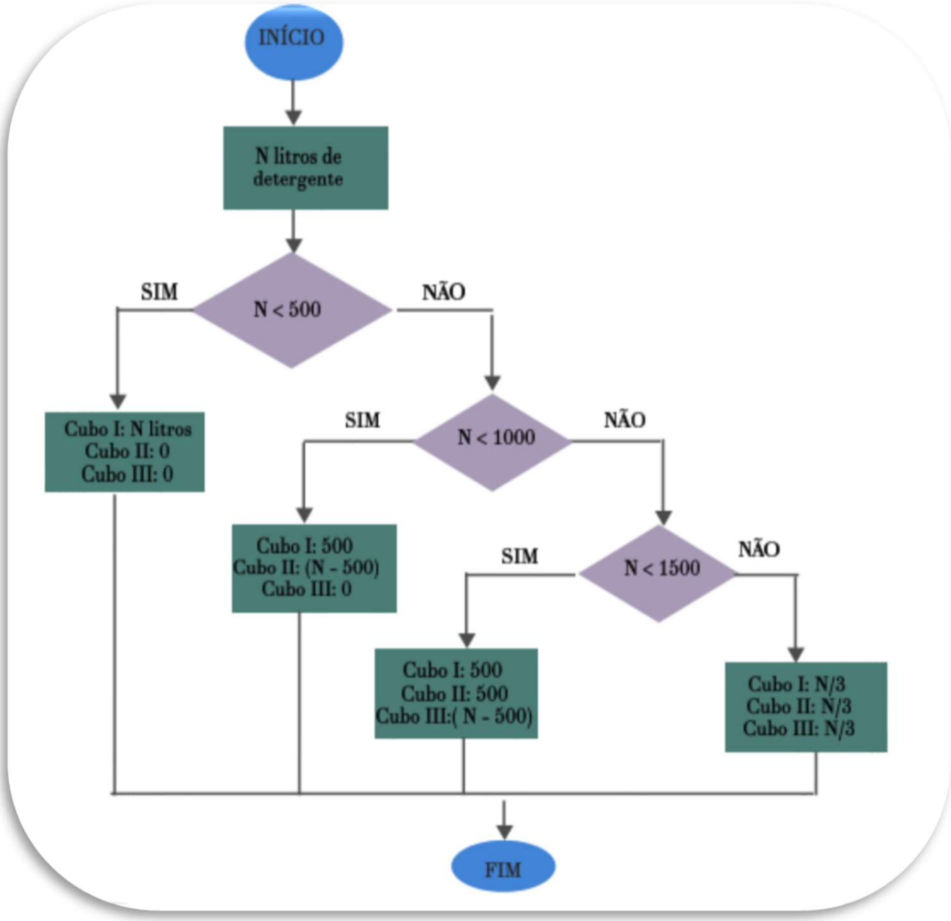
Fluxogramas são representações gráficas formadas por formas geométricas, conectadas por setas (fluxos) para visualizar e realizar os passos de um algoritmo. Os fluxogramas são utilizados principalmente na computação, por exemplo, para organização das etapas de elaboração de softwares. O uso de símbolos possui significados no fluxograma como ilustra o quadro a seguir:

Quadro 7. Elementos do fluxograma.

Símbolo				
Significado	Início ou fim do algoritmo	Procedimento	Tomada de decisão	Sentido de leitura

Fonte – Elaborado pelo autor.

Figura 29. Solução esquemática - Fluxograma.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Segunda proposta de solução (d) Método computacional: usando Python

Através da disciplina Modelagem Matemática, ofertada pelo Profmat da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA tive a oportunidade de conhecer uma ferramenta computacional que pode auxiliar o professor de matemática na resolução de problemas que contemple a habilidade do problema proposto, chamada Python. O Python é uma linguagem de programação criada pelo matemático e programador Guido Van Rossum em 1991. As linguagens de programação buscam atender a necessidade de traduzir ações em instruções lógicas, de modo que sejam compreensíveis para serem executadas pelos computadores. Python é uma das linguagens de programação mais usadas e populares do mundo, por ser versátil, fácil de aprender e amplamente utilizado em várias aplicações, por exemplo, ciência e análise de dados; aprendizado de máquina e inteligência artificial. O leitor pode obter mais informações consultando o link https://www.python.org/. Segue abaixo o código que resolve o problema:

Figura 30. Código – Python para solução do problema - *"cubos conectados"*.

```
import numpy as np

N =float(input("Digite a quantidade (em litros) de detergente: "))
if N<500:
    print('volume do Cubo 1')
    print(N)
    print('volume do Cubo 2')
    print(0)
    print("volume do Cubo3")
    print(0)

elif 500<=N<1000:
    print('volume do Cubo 1')
    print(500)
    print('volume do Cubo 2')
    print(N-500)
    print("volume do Cubo 3")
    print(0)

elif 1000<=N<1500:
    print('volume do Cubo 1')
    print(500)
    print('volume do Cubo 2')
    print(500)
    print("volume do Cubo 3")
    print(N-1000)

else:
    N>=1500
    print('volume do Cubo 1')
    print(N/3)
    print('volume do Cubo2')
    print(N/3)
    print("volume do Cubo 3")
    print(N/3)
```

Fonte. Elaborado pelo autor

Comentários/sugestões para o professor

O problema *"cubos conectados"* o qual contempla a habilidade EM13MAT315, refere-se a um grupo de problemas que está relacionado a soluções com ênfase em algoritmos, representados por fluxogramas e, linguagem de programação. Assim a estrutura a ser montada para resolver um dado problema é fundamentada em tomada de decisões por etapas que são executadas em uma sequência. Para a BNCC, essa habilidade deve ser trabalhada ao longo de todo o Ensino Médio com o objetivo de desenvolver no estudante o pensamento computacional, isso não implica necessariamente que o professor seja um programador profissional.

Desenvolver o pensamento computacional, segundo a BNCC, parece ser um objetivo secundário e, talvez passe a impressão para nós professores, em particular os de matemática, que se esteja inserindo um novo componente curricular. É fato que ao discutir pensamento computacional na escola o professor de matemática tem um papel principal, pois ele lida com a elaboração de problemas e os representa por meio de modelos abstratos, sendo esses conceitos conectados a visão do pensamento computacional. O foco é fomentar no estudante o encadeamento da lógica, da concatenação de ideias na elaboração de estratégias para resolver um problema, escrito textualmente ou por meio de linguagem de programação. Segundo Azevedo e Maltempi (2020), as características do pensamento computacional associadas ao desenvolvimento matemático do indivíduo valorizam:

> [...] (i) o desenvolvimento de ideias; (ii) **a resolução de problemas**; (iii) a reflexão, análise e descrição de hipótese; (iv) **a formulação criativa de soluções para um dado problema**; (v) a construção e aprimoramento de estratégias, indo além da computabilidade; (vi) a compreensão dos fenômenos locais e globais com o uso da programação e robótica; e (vii) o incentivo à tomada de decisões individual/coletiva, etc. Grifo nosso. (AZEVEDO; MALTEMPI, 2020, p. 3).

Portanto, percebe-se que o pensamento computacional está vinculado ao processo de resolução de diversos problemas, sejam eles matemáticos ou aqueles relacionados a vida cotidiana, representado pelos processos de utilização da programação na informática. Ainda segundo a BNCC, isso envolve a capacidade de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e soluções de forma metódica e sistemática. Além disso, a utilização de software, tipo o Python, possibilita tanto ao professor quanto o estudante, a inserção de uma nova linguagem que somada ao conhecimento matemático amplifica a capacidade do estudante em compreender o mundo digital.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho discorreu sobre o ensino da matemática para resolução de problemas ao longo do Ensino Médio, com um olhar na elaboração e resolução de problemas matemáticos correlacionados às habilidades da competência específica 3 da Base Nacional Comum Curricular BNCC. Fizemos um pequeno recorte histórico sobre a visão da Resolução de Problemas, apresentando o Papiro de Ahmes (Rhind) como um dos primeiros registros de problemas matemáticos na antiguidade. Em seguida, apresentamos os processos de evolução do ensino de matemática, sendo a década de 1980 o marco inicial da reformulação nos currículos escolares com foco na resolução de problemas, onde destacou-se as três abordagens – ensinar **sobre** a resolução de problemas, ensinar **para** resolver problemas e ensinar **por meio** de resolução de problemas. O recorte histórico também abordou os PCN's, finalizando com a BNCC.

O professor de matemática no dia a dia da sala de aula, em particular no Ensino Médio, deve priorizar na sua prática pedagógica a aprendizagem por compreensão. É comum na nossa atividade distinguirmos os problemas dos exercícios. Para Onuchic e Allevato (2011) um problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81). Enquanto professor, percebo que os estudantes, em sua maioria, entendem a palavra Problema como algo difícil, complexo, que exige uma investigação e pode ser indecifrável; do contrário o Exercício vem a ser entendido, por esses estudantes, como um algoritmo de fácil ou difícil execução, porém no geral, o processo de solução tem sentido claro, pois o professor aplica-o para ser "exercitado" após ter apresentado os conceitos e manipulações do objeto matemático estudado por meio de exemplos. Assim, a depender do grau de conhecimento matemático do estudante um Exercício pode ser considerado um problema e, um Problema pode significar um exercício.

Segundo Zeitz (2007), para melhorar a resolução de problemas em matemática é necessário que o estudante saiba diferenciar problemas de exercícios:

> [...] um **exercício** é uma questão que você sabe resolver imediatamente. Quer você consiga certo ou não depende de quão habilmente você aplica técnicas específicas, mas você não precisa descobrir quais técnicas usar. Em contraste, **um problema** exige muito pensamento e desenvoltura antes que a abordagem correta seja encontrada [...].Tradução nossa, grifo nosso. (ZEITZ, 2007, p. 1).

Por conseguinte, este trabalho foi pensado para os professores de matemática do Ensino Médio cujo o objetivo específico foi apresentar uma sequência didática de problemas matemáticos conectados às habilidades da Competência Específica 3 da BNCC e, em seguida discutir e propor reflexões intrínsecas em parte desses problemas, como estratégia de ensino da matemática necessária para o Ensino Médio, de modo que o estudante possa comunicar suas ideias de forma organizada, permitindo a ele construir entendimento de seus argumentos para resolver e elaborar problemas dos objetos matemáticos estudados. Além disso, os problemas que foram propostos tiveram o intuito de fomentar um debate para os professores de matemática na correção de metodologias adotadas em sala de aula na aquisição das habilidades matemáticas para resolução de problemas correlacionados a outros componentes curriculares do Ensino Médio.

Esperamos que a temática possa contribuir na reflexão da docência da matemática em consonância com os documentos normativos vigente (BNCC) no Ensino básico, de modo a estimular os professores tanto em sua prática docente ao escolher a resolução de problemas como uma das possíveis estratégias, quanto na produção de materiais pedagógicos que possam potencializar no estudante novas formas de organizar suas ideias, construindo assim argumentos e estratégias consistentes com ou sem o uso das tecnologias digitais para revolver problemas matemáticos.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, G. T. de; MALTEMPI, M. V. Processo de Aprendizagem de Matemática à luz das Metodologias Ativas e do Pensamento Computacional. **Ciência & Educação**. Bauru- SP, v. 26, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/dRXC3YvVLztYHK6bZZm6d6m/?lang=pt>. Acesso em: 14. jan2023

BERTATO, F. M. A Falsa (Su-) Posição? Tradução dos Problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind. **Revista Brasileira de História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 18, n. 36, p. 11-29, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2018v18n3611-29. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/18>. Acesso em: 19 abr. 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: língua portuguesa /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf >. Acesso em: 15 dez. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: alfabetização em foco: projetos didáticos e sequências didáticas em diálogo com os diferentes componentes curriculares: ano 03, unidade 06 / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. - Brasília: MEC, SEB, 2012. 47 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BROOKLYN MUSEUM. **Fragments of Rhind Mathematical Papyrus**. Disponível em: < https://www.brooklynmuseum.org/opencollection/objects/118304>. Acesso em: 20 mar. 2023.

BROUSSEAU, GUY. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

DANTE, L.R. **Didática da resolução de problemas de matemática**: 1ª a 5ª séries. 12ª ed. São Paulo: Ática, 2000.

DE PONTES, F. L. G.; GOBBI, C. R.; SOUSA, E. K. V. de. As contribuições de Édouard Lucas para a teoria dos números. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 5, n. 14, p. 243–252, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v5i14.231. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/231. Acesso em: 30 jun. 2023.

DIAS, C. C. *et al*. **Matem@tica na Pr@tica**. Cuiabá – MT: Central de Textos, 2013.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas – SP: Editora Unicamp, 2004. 844 p.

FELTRE, R. **Química V.2.** 6. Ed. São Paulo: Moderna, 2004.

FERNÁNDEZ, J. C. O problema 79 do papiro de Rhind. **Revista Matemática para filósofos**: Uma revista da nova acrópole. Portugal, Número 10, p. 14-15. Out. 2021. Disponível em: <https://www.matematicaparafilosofos.pt/numero-10/>Acesso em: 10 nov. 2022.

FIOLHAIS, C. **O génio de Euler na matemática e na física**. Disponível em: <http://www.estudogeral.sib.uc.pt>. Acesso em 20 jul. 2023.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010. 346 p.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos de Matemática Elementar**. V 11. 1ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

LA TIERRA DE LOS FARAONES. **Las Matemáticas en el Antiguo Egipto**. A-1. El papiro Rhind. Disponível em: < http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm>. Acesso em: 30 out. 2014.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM. 2007. 250 p.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, V.1. 12. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides. 2009. 431 p.

LIMA, E. L. *et al*. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM. 2010. 225 p.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2016. 134 p.

LIMA, E. L. *et al*. **Temas e Problemas Elementares**. 4. Ed. Rio de Janeiro: SBM. 2016. 295 p.

LUCIO, G. F.; BARROSO, L. S. Narrativas de experiências na iniciação à docência: sentidos do processo formativo. In: XXVII SIMPOSIO NACIONAL DE HISTÓRIA, 2013, Natal. **Anais Eletrônicos**... Natal: ANPUH, 2013. Disponível em: <https://anpuh.org.br/uploads/anais-simposios/pdf/2019-01/1548875806_7f3b00e108a382aa668f3b856b094dd4.pdf>. Acesso em 30 out. 2022

MACGREGOR, N. **A história do Mundo em 100 Objetos**, Rio de Janeiro: Editora Intrínseca Ltda, 2013.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2015. 294 p.

MORGADO, A. C; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2015. 161 p.

NCTM. Agenda for action. **Recomendations for School Mathematics of the 1980s**. Reston, VA, 1980. Disponível em:

<https://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/html5/index.html>. Acesso em: 15 nov. 2022.

NCTM. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.** Reston, VA, 1989. Disponível em: < https://docplayer.net/12442494-Curriculum-and-evaluation-standards-for-school-mathematics.html>. Acesso em: 15 nov. 2022.

NCTM, **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: Nacional Council of Teachers of Mathematics, 2000.

OLIVEIRA FILHO, Francisco. **O School Mathematics Study Group e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, São Paulo, 2009. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/bitstream/123456789/3559/1/FRANCISCO%20DE%20OLIVEIRA%20FILHO.pdf >. Acesso em: 15 nov. 2022.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores**. Cidade: Vozes, 2013.

ONUCHIC, L. de L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011

ONUCHIC, L. L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTILIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de problemas**: Teoria e prática. Jundiaí- SP: Paco Editorial, 2021. 216 p.

ONUCHIC, L. L. R.; **Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo**. 2013. Disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/read/14304241/iserp-palestra-de-encerramento-uma-historia-da-resolucao-de-> Acesso em: 19 abr. 2023.

POLYA. G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciencia. 1994. 196 p.

POMMER, Wagner M. **O número de Euler**: Possíveis abordagens no ensino básico. 2010. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf> Acesso em: 7 jan. 2023.

PROBLEMA 1. **Jota Quest canta para 250 carros no Allianz Parque.**
a) Disponível em: <https://entretenimento.uol.com.br/noticias/redacao/2020/06/28/jota-quest-canta-para-250-carros-no-alianz-parque.htm>. Acesso em: 20 set. 2022.
b) Disponível em: < https://blog.sympla.com.br/blog-do-produtor/o-que-sao-os-eventos-drive-in/>. Acesso em: 20 set. 2022.

PROBLEMA 2. **Cavando um buraco**. Disponível em: <http://www.prfundacoes.com.br/escavacao-manual-de-bases-para-tubuloes >. Acesso em: 25 set. 2022.

PROBLEMA 3. **OBMEP-2012 - Adaptado**. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/16x07tVBD9Qt-dbkMjnF3Jn8pLL10SFJm/view >. Acesso em: 28 set. 2022.

PROBLEMA 4. **Quanta Gente?**. Disponível em: <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1510>. Acesso em: 10 out. 2022.

PROBLEMA 5. **Tanques de aço inox para produção de vinhos**. Disponível em: <https://www.tanquedeacoinox.com.br/tanques-aco-inox-fabricacao-vinho/>. Acesso em: 16 out. 2022.

PROBLEMA 7. **Efeitos da radiação no meio ambiente**. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/ciencia/contaminacao-a-marca-da-radiacao-no-ambiente >. Acesso em: 3 nov. 2022.

PROBLEMA 8. **Como checar a pressão arterial**.
a) Disponível em: <https://eurofarma.com.br/artigos/como-checar-a-pressao-arterial; https://telessaude.hc.ufmg.br/pressao_arterial/PDF/Pressao_Arterial.pdf>. Acesso em: 30 nov. 2022.
b) Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2022

PROBLEMA 9. **Dia das crianças**.
a) Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2022/10/entenda-origem-do-dia-de-nossa-senhora-de-aparecida-unico-feriado-de-outubro.shtml#:~:text=No%20dia%2012%20de%20outubro,Congresso%20Sul%2DAmericano%20da%20Crian%C3%A7a.>. Acesso em: 16 out. 2022.
b) Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2022

PROBLEMA 10. **Como é feito um notebook?**.
a) Disponível em: <https://quenotebookcomprar.com.br/como-e-feito-um-notebook-fabrica/>. Acesso em: 16 out. 2022.
b) Disponível em: https://www.comvest.unicamp.br/vest2007/F2/provas/mating.pdf.> Acesso em: 2 dez. 2022.

PROBLEMA 11. **Etiqueta de eficiência energética**.
a) Disponível em: <https://www.gov.br/inmetro/pt-br/assuntos/avaliacao-da-conformidade/programa-brasileiro-de-etiquetagem/conheca-o-programa>. Acesso em: 16 dez. 2022.
b) Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/dia1_caderno1_azul.pdf>. Acesso em: 16 dez. 2022.

PROBLEMA 12. **A primeira imagem de um buraco negro**.
a) Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2019/04/conheca-katie-bouman-a-cientista-responsavel-pela-imagem-do-buraco-negro.shtml>. Acesso em: 16 jan. 2023.
b) Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2019/04/revelacao-de-imagem-ilumina-a-subcultura-dos-buracos-negros.shtml>. Acesso em: 16 jan. 2023.

PROBLEMA 13. **Cubos conectados**. Disponível em: <https://www.mais.mat.br/pensamentocomputacional/arquivos/pensacomp_professor.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2023.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 467 p.

SOARES, FLAVIA. Movimento da matemática moderna no Brasil: avanço ou retrocesso? 2001. 192 f. Dissertação (Mestrado em matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SANTOS, I. B. dos. O ensino de Matemática nos Estados Unidos das primeiras décadas do Século XX: investigação sobre uma alteração de padrão disciplinar. **Cadernos de História da Educação**, v.15, n.1, p. 141-165, jan.-abr. 2016. ISSN: 1982-7806. Disponível em: < http://dx.doi.org/10.14393/che-v15n1-2016-5>. Acesso em: 15 set. 2022.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SILVA, I. C. da.; PEREIRA, A. C. C. O estudo de fontes históricas: O caso do problema 56 do papiro de Rhind para o estudo de pirâmides. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo – SP. **Anais Eletrônicos...** São Paulo – SP: SBEM, 2016. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7046_3948_ID.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2022.

STEFFENON, R.; GUARNIERI, F. Belos problemas de matemática: indução e contagem. In: IV Colóquio de Matemática da Região Sul, 2016. **Anais Eletrônicos...**SBM, 2016. Disponível em: <https://docplayer.com.br/48215682-Belos-problemas-de-matematica.html>. Acesso em: 7 jan. 2023.

THE BRITISH MUSEUM. **Papyrus.** Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057>. Acesso em: 30 dez. 2022.

THORNDIKE, E. L. **A nova metodologia da aritmética**. Porto Alegre: Edição da Livraria do Globo. 1936.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

ZEITZ, P. **The art and craft of problem solving**. Danvers, MA: John Wiley & Sons, 2007.