



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL**

SÉRGIO AUGUSTO COELHO MONTEIRO JUNIOR

COORDENADAS BARICÊNTRICAS: PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

**FORTALEZA – CEARÁ
2023**

SÉRGIO AUGUSTO COELHO MONTEIRO JUNIOR

COORDENADAS BARICÊNTRICAS: PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Monteiro Junior, Sergio Augusto Coelho.

Coordenadas baricêntricas: pontos notáveis do triângulo
[recurso eletrônico] / Sergio Augusto Coelho Monteiro Junior. -
2023.

68 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado
Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional,
Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Tiago Caula Ribeiro.

1. coordenadas baricêntricas. 2. pontos notáveis do
triângulo. 3. teorema de routh.. I. Título.

SÉRGIO AUGUSTO COELHO MONTEIRO JUNIOR

COORDENADAS BARICÊNTRICAS: PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em 03 de julho de 2023.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza (Membro interno ao programa)
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Nicolas Alcântara Andrade (Membro externo ao programa)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Dedico esse trabalho a minha esposa, Josinalda Feitosa Fernandes Monteiro e aos meus filhos, Rayanna Mayra Feitosa Monteiro e Paulo Richardson Feitosa Monteiro, por todo amor, carinho e compreensão passados em todos os momentos ao longo dessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me conceder a dádiva da vida e força necessárias para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Sérgio Augusto Coelho Monteiro e Maria de Fátima da Costa Monteiro, por todo amor, carinho e dedicação, por seus ensinamentos, compreensão e valores passados ao longo da minha vida.

A minha esposa, Josinalda Feitosa Fernandes Monteiro, que sempre me apoiou e me incentivou nos momentos mais difíceis, acreditando e me encorajando a crescer através da dedicação aos estudos.

Aos meus filhos, Rayanna Mayra Feitosa Monteiro e Paulo Richardson Feitosa Monteiro, fonte de inspiração para prosseguir nessa jornada árdua e tão importante para o meu desenvolvimento profissional.

Ao meu diretor, Patrese Alexandre Sousa, e a minha colega coordenadora, Josenira Unias Ribeiro pela confiança depositada na minha pessoa, me ajudando de forma incomparável, ajuda essa que me possibilitou momentos de estudos complementares, de maneira que, sem tal ajuda, jamais conseguiria alcançar tal objetivo.

A todos os professores da UECE, em especial ao professor Tiago Caúla Ribeiro que, com muita tranquilidade, paciência e sabedoria, aceitou o convite para me orientar, me conduzindo de forma categórica a concluir este trabalho.

Aos meus colegas: Tiago Nobre, Rafael Mendonça, Rafael Abreu, Felipe Guimarães, Mardney de Castro, Artur Teixeira, Sampaio Junior e Danilo Teixeira, mestrandos da UECE, pelo sentimento de companheirismo que sempre existiu durante todo o curso.

Ao amigo Albimar Silva Neri, que sempre acreditou que eu iria conseguir, dedicando parte do seu precioso tempo para me ajudar diante das dificuldades que surgiram.

“A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes”.

(Malba Tahan)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar as coordenadas baricêntricas e algumas das suas propriedades, enfatizando alguns dos principais pontos notáveis do triângulo como: baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro. As coordenadas baricêntricas, consideradas como um tipo especial de geometria analítica, constituem mais uma técnica que facilita e agiliza as resoluções de problemas de geometria, pois em algumas circunstâncias em semelhanças de triângulos não ficam evidentes quais triângulos considerar em questão, exigindo-se construções não intuitivas de retas auxiliares e nos casos do uso de coordenadas cartesianas somos, muitas vezes, direcionados às expressões que não são invariantes por transformações afins. Na primeira parte deste trabalho, são apresentados alguns pré-requisitos para o acompanhamento do assunto, logo após a segunda parte é exposta à definição de coordenadas baricêntricas, bem como algumas das suas propriedades e alguns teoremas, por exemplo, o teorema de Van Aubel e os teoremas de Routh. Finalizando o trabalho, incluímos as coordenadas baricêntricas dos pontos notáveis do triângulo citados acima, o nosso principal objetivo, juntamente aos problemas dos três vasos e uma aplicação do teorema de Routh.

Palavras-chave: coordenadas baricêntricas; pontos notáveis do triângulo; teorema de routh.

ABSTRACT

This paper aims to present the barycentric coordinates and some of its properties, emphasizing some of the main notable points of the triangle as: barycenter, incenter, orthocenter and circumcenter. Barycentric coordinates, considered as a special kind of analytic geometry, is another technique that facilitates and speeds up the resolution of geometry problems, because in some circumstances in similarities of triangles it is not evident which triangles to consider in question, requiring non-intuitive constructions of auxiliary lines and in cases of the use of Cartesian coordinates we are often directed to expressions that are not invariants by affine transformations. In the first part of this work are presented some prerequisites for following the subject, soon after in the second part is exposed to the definition of barycentric coordinates as well as some of its properties and some theorems, for example, Aubel's theorem and Routh's theorems. Finalizing the paper, we include the barycentric coordinates of the notable points of the triangle mentioned above, our main goal, along with the three-pot problems and an application of Routh's theorem.

Keywords: barycentric coordinates; notable points of the triangle; routh's theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Gráfico da função $t(K)$	18
Figura 2 –	Triângulo de vértices A, B, C e altura \overline{AH}.....	20
Figura 3 –	Área com sinal em sentido horário e anti-horário	22
Figura 4 –	$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ e $\Delta ABC = \Delta PBC + \Delta PCA + \Delta PAB$.....	23
Figura 5 –	$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$.....	23
Figura 6 –	Localização de um ponto em relação a um triângulo.....	26
Figura 7 –	Proporção entre áreas com sinal e bases de triângulos de mesma altura	27
Figura 8 –	Teorema do Co-lado	28
Figura 9 –	Proporção entre coordenadas baricêntricas.....	29
Figura 10 –	Outras proporções entre coordenadas baricêntricas.....	30
Figura 11 –	Teorema de Ceva	31
Figura 12 –	Aplicação do Teorema de Ceva.....	32
Figura 13 –	Baricentro do triângulo ΔABC	33
Figura 14 –	Bissetrizes do triângulo ΔABC.....	34
Figura 15 –	Ortocentro do triângulo ΔABC.....	35
Figura 16 –	Ortocentro de um triângulo acutângulo e de um triângulo obtusângulo.....	35
Figura 17 –	Pontos sobre os lados de um triângulo em Coordenadas Baricêntricas	42
Figura 18 –	Teorema de Menelaus	43
Figura 19 –	Aplicação do Teorema de Menelaus.....	43
Figura 20 –	Teorema de Van Aubel.....	44
Figura 21 –	Aplicação do teorema de Menelaus nos triângulos ΔAXC e ΔABX.....	44
Figura 22 –	Primeiro Teorema de Routh.....	45
Figura 23 –	Possibilidades com base no Primeiro Teorema de Routh.....	46
Figura 24 –	Coordenadas Baricêntricas dos pontos de intersecção das Cevianas.....	47
Figura 25 –	Segundo Teorema de Routh	49
Figura 26 –	Coordenadas Baricêntricas do Baricentro do triângulo ΔABC	52

Figura 27 – Coordenadas Baricêntricas do Incentro do triângulo ΔABC ...	53
Figura 28 – Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro do triângulo ΔABC	55
Figura 29 – Coordenadas Baricêntricas do Circuncentro do triângulo ΔABC.....	57
Figura 30 – Coordenadas Baricêntricas do Ex-Incentro do triângulo ΔABC.....	59
Figura 31 – Triângulo Órtico	60
Figura 32 – Relação entre Ortocentro e Circuncentro de um triângulo.....	61
Figura 33 – Aplicação do segundo Teorema de Routh.....	63
Figura 34 – Malha Triangular.....	64
Figura 35 – Solução do problema dos três vasos na malha triangular.....	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ΔABC Triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C.

$S_{\Delta ABC}$ Área com sinal do triângulo ΔABC .

\hat{A} Ângulo relativo ao vértice A.

$|AB|$ Medida de um segmento não orientado AB.

\overline{AB} a medida de um segmento orientado AB.

Sendo $\overline{AB} = +|AB|$ se AB tem a mesma orientação da reta e $\overline{AB} = -|AB|$ se tem orientação contrária à reta r.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	SEGMENTO ORIENTADO E ÁREA COM SINAL DE UM TRIÂNGULO.....	16
2.1	Segmento Orientado.....	16
2.2	Divisão de um Segmento Orientado em uma dada razão.....	17
2.3	Área com sinal de triângulo.....	20
2.4	Coordenadas Baricêntricas e a localização de um ponto P em relação a um triângulo.....	24
2.5	Teorema do Co-lado	27
2.6	Teorema de Ceva.....	31
2.7	Aplicação do Teorema de Ceva.....	32
3	COORDENADAS BARICÊNTRICAS	37
3.1	Coordenadas Baricêntricas Homogêneas e Exatas.....	37
3.2	Coordenadas Baricêntricas e Áreas com sinal	39
3.3	Condição de alinhamento de três pontos em Coordenadas baricêntricas.....	40
3.4	Coordenadas Baricêntricas de um Ponto Divisor	40
3.5	Coordenadas baricêntricas dos vértices e de pontos sobre os lados de um triângulo de referência	41
3.6	O Teorema de Menelaus	42
3.7	Teorema de Van Aubel	44
3.8	Primeiro Teorema de Routh	45
3.9	Segundo Teorema de Routh	48
4	APLICAÇÕES DAS COORDENADAS BARICÊNTRICAS	
4.1	A área de um triângulo em Coordenadas Baricêntricas.....	51
4.2	Coordenadas Baricêntricas do Baricentro.....	51
4.3	Coordenadas Baricêntricas do Incentro.....	52
4.4	Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro.....	54
4.5	Coordenadas Baricêntricas do Circuncentro.....	56
4.6	Coordenadas Baricêntricas do Ex- Incentro.....	58
4.7	Uma Propriedade do Triângulo Órtico.....	59

4.8	Uma aplicação do Segundo Teorema de Routh.....	62
4.9	O Problema dos Três Vasos (RPM).....	63
5	CONCLUSÃO.....	66
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

A geometria é uma das áreas mais antigas de conhecimento da Matemática e de imensa importância para a sociedade, visto que nos ensina como perceber a realidade através das suas formas geométricas. Além disso, o estudo das áreas e dos triângulos são assuntos primordiais para a geometria e foi nesse sentido, juntamente com minha afinidade pela matéria, que o presente trabalho foi elaborado na expectativa de contribuir num aprendizado mais aprofundado de geometria, solucionando situações mais complexas que possam surgir.

As coordenadas baricêntricas, como veremos no teorema 2.1, são interpretadas como razão entre áreas de triângulos, assunto muito marcante na geometria. No Oriente é muito mais comum que no Ocidente o uso de áreas para resolver problemas e este trabalho nos chama a atenção exatamente para isto, pois as coordenadas baricêntricas estão amplamente relacionadas ao conceito de áreas.

O intuito principal deste trabalho é apresentar as coordenadas baricêntricas com ênfase nos pontos notáveis de um triângulo de uma forma simples, porém com o rigor matemático. Lembrando que o referido assunto é mais uma ferramenta para resoluções de problemas de geometria e envolve o conhecimento de vetores e geometria analítica como pré-requisitos. A aplicação deste conteúdo muitas vezes é mais eficaz que as semelhanças de triângulo e o emprego das coordenadas cartesianas, pois no primeiro em algumas circunstâncias não ficam evidentes quais triângulos considerar exigindo construções não intuitivas de retas auxiliares. E o segundo geralmente nos leva a expressões, que não são invariantes por transformações afins, dificultando a análise de propriedades intrínsecas.

Este trabalho está estruturado em três seções.

Na primeira parte falamos de conceitos e conhecimentos prévios que são necessários e importantes para se ter um bom acompanhamento e entendimento dos assuntos que seguem. Nesta seção, apresentamos as noções de segmento orientado, área com sinal de triângulo e coordenadas baricêntricas de um ponto em relação a um triângulo (coordenadas dos pontos no plano, baseadas em três pontos fixados que serão os vértices do triângulo não degenerado).

Na segunda seção aprofundamos o estudo de coordenadas baricêntricas e suas classificações, expondo a relação entre as coordenadas baricêntricas e a

área com sinal, operações em coordenadas baricêntricas e terminamos com a apresentação dos teoremas de Van Aubel e Routh.

Na última seção chegamos nas aplicações das coordenadas baricêntricas, finalizando com o nosso objetivo de apresentar alguns pontos notáveis do triângulo como: o Baricentro, o Incentro, o Ortocentro, o Circuncentro e Ex-Incentro. Além disso, temos uma propriedade do triângulo órtico e o problema clássico dos três vasos.

Espero que o presente trabalho possa servir de incentivo, aprendizado e aprofundamento para os amantes da Matemática e em particular da Geometria, transmitindo assim, o conhecimento do assunto, coordenadas baricêntricas, também considerada como um tipo especial de geometria analítica.

2 SEGMENTO ORIENTADO E ÁREA COM SINAL DE UM TRIÂNGULO

Nesta seção será apresentado o conceito de segmento orientado, área com sinal de um triângulo e relações entre elas, por exemplo, o conhecido teorema do co-lado. Tais conceitos são necessários visto que, o presente trabalho utiliza-se de medidas com sinal, medidas que nos fornecem vantagens em relação às habituais medidas euclidianas.

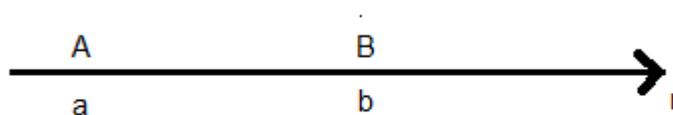
2.1 Segmento Orientado

Definição 2.1: Um Segmento Orientado é um segmento munido de um sentido, ou seja, dentre suas extremidades uma é a inicial e a outra é a final.

A notação utilizada para designar um segmento cuja origem é dada pelo ponto A e sua extremidade pelo ponto B é \overrightarrow{AB} . Além disso, os segmentos orientados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} são diferentes bem como suas medidas devido às orientações.

Definição 2.2: (Medida de segmento orientado) A medida de um segmento orientado \overrightarrow{AB} , por abuso de linguagem, também será denotada por \overline{AB} e definimos como:

$$\overline{AB} = \begin{cases} +|AB| & \text{se tem a mesma orientação da reta } r \\ -|AB| & \text{se tem orientação contrária à reta } r \end{cases}$$



Sendo A e B pontos distintos de um eixo orientado com coordenadas cartesianas a e b , $|AB| = |b - a|$ é a medida euclidiana do segmento de reta de extremidades A e B .

Da definição acima, percebemos que a medida de um segmento orientado pode ser representada em função das coordenadas cartesianas de seus pontos da seguinte maneira:

$$\overline{AB} = \begin{cases} +|AB| = b - a, & \text{pois } b - a > 0; \text{ mesma orientação da reta } r \\ -|AB| = -(a - b) = b - a; & \text{pois } b - a < 0; \text{ orientação contrária à reta } r \end{cases}$$

É fácil de perceber as seguintes propriedades:

Sejam a, b, c as coordenadas cartesianas dos pontos colineares A, B e C . Então:

- i) $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow A = B$
- ii) $\overline{AB} = -\overline{BA}$; pois $\overline{AB} = b - a = -(a - b) = -\overline{BA}$
- iii) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$; pois $\overline{AC} + \overline{CB} = c - a + b - c = b - a = \overline{AB}$

Proposição 2.1: Condição de alinhamento de pontos

Dados os pontos A, B, C e D estes estarão alinhados somente se

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$$

Demonstração: Se os pontos são colineares, então utilizando a propriedade (iii).

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{DB} + (\overline{AB} + \overline{BD}) \cdot \overline{BC} = \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AB} \cdot \overline{DB} + \overline{BC} \cdot \overline{DB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{BC} = \\ &= \overline{AB} \cdot (\overline{CD} + \overline{DB} + \overline{BC}) + \overline{BC} \cdot (\overline{DB} + \overline{BD}) = \\ &= \overline{AB} \cdot (\overline{CB} + \overline{BC}) + \overline{BC} \cdot (\overline{DD}) = \\ &= \overline{AB} \cdot (\overline{CC}) + \overline{BC} \cdot (\overline{DD}) = \overline{AB} \cdot 0 + \overline{BC} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

■

2.2 Divisão de um segmento orientado em uma dada razão

Definição 2.3: Sejam A, B ($A \neq B$) e P pontos de uma reta orientada r e seja $K \neq -1$, um número real. Dizemos que P divide \overline{AB} na razão k se $k = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

Primeiramente, porque $K \neq -1$? Observe que para $K = -1$, teremos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -1 \Rightarrow \overline{AP} = -\overline{PB} \Rightarrow \overline{AP} + \overline{PB} = 0 = \overline{AB} \Leftrightarrow A = B \text{ (contradição)}$$

Já para $K = 1$, obtemos $\overline{AP} = \overline{PB} \Leftrightarrow P$ é o ponto médio de \overline{AB} . Por último $K = 0$ nos fornece o caso em que $P = A$

Vimos os casos em que $K = -1, 0, 1$, faltando analisar:

$$K < 0 \text{ (} K \neq -1 \text{)} \text{ e } K > 0 \text{ (} K \neq 1 \text{)},$$

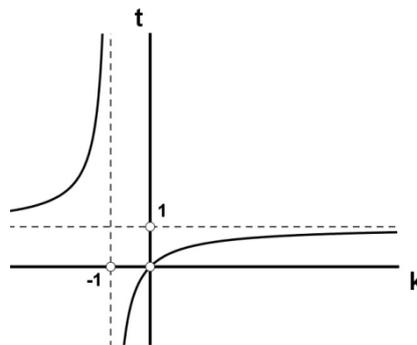
Sendo P um ponto da reta orientada r , que passa por A e B , e escolhendo um sistema de coordenadas onde A tem coordenada 0, B coordenada 1 e P tem coordenada t , temos: $P = A + t\overrightarrow{AB}$, sendo $\overline{AP} = t\overline{AB}$ e $\overline{PB} = (1-t)\overline{AB}$, o que nos mostra que para P pertencer ao segmento orientado basta que $0 < t < 1$

Perceba que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{t}{1-t} = K \quad (\text{O ponto } P \text{ divide } \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \text{ na razão } K) \Rightarrow t = t(K) = \frac{K}{1+K},$$

Olhando o gráfico dessa função obtemos as seguintes conclusões

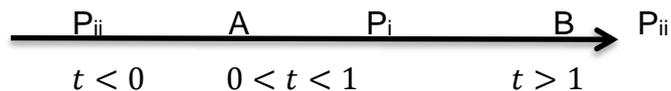
Figura 1 - Gráfico da função $t(K)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo gráfico notamos que:

- i) $k > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1$ e portanto P está entre A e B .
- ii) $k < 0 \Leftrightarrow t < 0$ ou $t > 1$ e portanto P não estará entre A e B



■

Proposição 2.2: Dado um segmento \overline{AB} e uma razão $K, K \neq -1$, existe um único ponto P que divide este segmento nesta razão.

Demonstração: (Existência) Anteriormente, quando tomamos os pontos A e B de coordenadas 0 e 1, respectivamente, estabelecemos um segmento orientado e vimos que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{t}{1-t} = k$$

Assim,

$$\frac{t-0}{1-t} = k \Rightarrow t = k - kt \Rightarrow t(1+k) = k \Rightarrow t = \frac{k}{1+k}$$

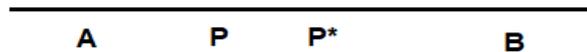
Ou seja, existe um ponto P que divide o segmento \overline{AB} em uma razão

k ($k \neq -1$), cuja coordenada é dada por $\frac{k}{1+k}$.

De forma geral, se as coordenadas dos pontos A e B são $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, as coordenadas do ponto $P = (1-t)A + tB$ são

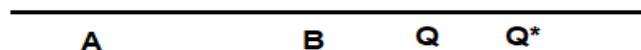
$$P = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$$

(Unicidade) Primeiro caso: Considere um ponto P^* que divide interiormente o segmento \overline{AB} na mesma razão K de P . Então



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP^*}}{\overline{P^*B}} \Rightarrow \frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP^*} + \overline{P^*B}}{\overline{P^*B}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{P^*B}} \Rightarrow \overline{PB} = \overline{P^*B} \Rightarrow P = P^*$$

Segundo caso: Considere um ponto Q^* que divide exteriormente o segmento \overline{AB} na mesma razão K de Q . Então



$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{AQ^*}}{\overline{Q^*B}} \Rightarrow \frac{\overline{AQ} - \overline{QB}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{AQ^*} - \overline{Q^*B}}{\overline{Q^*B}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{Q^*B}} \Rightarrow \overline{QB} = \overline{Q^*B} \Rightarrow Q = Q^*$$

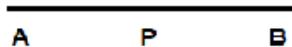
■

Sabendo disso, a pergunta agora é: será que existem pontos (interior e exterior) que dividem o segmento \overline{AB} na mesma razão K (em termos de valores positivos de K)?

Definição 2.4: (Divisão Harmônica) Dizemos que os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento \overline{AB} , se P divide \overline{AB} na razão K e Q divide \overline{AB} na razão $-K$ com ($K \neq \pm 1$), ou seja, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}$. Os pontos P e Q são denominados divisores harmônicos ou conjugados harmônicos (sendo um interiormente e o outro exteriormente).

Observações:

- i) Sabemos que $K \neq -1$. Além disso, para $K = 1$ teremos $Q \rightarrow \infty$.

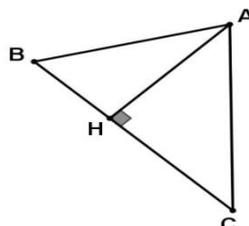


- ii) Se P e Q são os conjugados harmônicos do segmento \overline{AB} , reciprocamente A e B são os conjugados harmônicos do segmento \overline{PQ} .

2.3 Área com sinal de triângulo

Inicialmente, vamos lembrar como se calcula a área S de um triângulo dadas as coordenadas de seus vértices. Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ os vértices de um triângulo.

Figura 2 - Triângulo de vértices A, B, C e altura \overline{AH} .



Fonte: elaborada pelo autor.

- Área do triângulo: $S = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH}$

- $\overline{BC} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$

- Equação geral da reta \overleftrightarrow{BC} .

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

- Distância do ponto A até a reta \overleftrightarrow{BC}

$$\overline{AH} = \left| \frac{(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \right|$$

Portanto a área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \cdot \frac{\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Podemos escrever a expressão $E = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ da seguinte maneira;

$E = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$, onde somamos os produtos dos números de cada uma das diagonais inclinadas para a direita e subtraímos a soma dos produtos de cada uma das diagonais inclinadas para a esquerda.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$-x_2y_1$ x_3y_1

O sinal da expressão E depende da ordem na qual os pontos foram escolhidos. Se os pontos forem escolhidos no sentido anti-horário então E será positivo, caso apresentado acima; porém se fizermos a escolha no sentido horário teremos E negativo.

Ex:

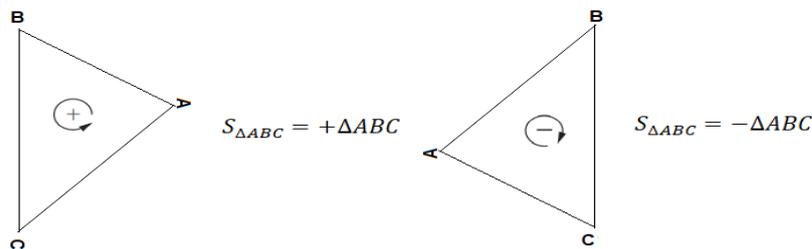
$$E^* = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_2 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_2 & y_1 \end{vmatrix} = -E$$

Portanto, a área com sinal de um triângulo será positivo, desde que escolhido o sentido anti-horário dos seus vértices, ou será negativo se escolhido o sentido horário destes.

Definição 2.5: (Área com sinal de um triângulo). Sejam A, B e C pontos de um plano. Definimos a área com sinal do triângulo ΔABC como sendo $S_{\Delta ABC}$:

$$S_{\Delta ABC} = \begin{cases} 0 & ; \text{triângulo degenerado (A, B e C pontos colineares)} \\ +\Delta ABC & , \text{ se A, B e C estão dispostos no sentido anti-horário} \\ -\Delta ABC & , \text{ se A, B e C são pontos dispostos no sentido horário.} \end{cases}$$

Figura 3 - Área com sinal em sentido horário e anti-horário



Fonte: elaborada pelo autor

Destacamos a seguir, duas propriedades importantes da área com sinal de um triângulo.

1. Propriedade da permutação

Sentido anti-horário: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCA} = S_{\Delta CAB}$

Sentido horário: $S_{\Delta ACB} = S_{\Delta CBA} = S_{\Delta BAC}$

Sentido anti-horário = - (Sentido horário)

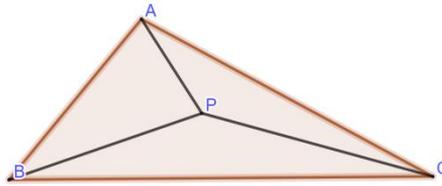
2. Propriedade da decomposição

Se P é um ponto qualquer do plano e ΔABC um triângulo, então P determina outros três triângulos em relação aos pontos A, B e C , e podemos relacionar as áreas de tais triângulos com a área do ΔABC , da seguinte forma.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta PAB} + S_{\Delta PBC} + S_{\Delta PCA}$$

Observe que essa propriedade é válida para áreas convencionais, onde P está no interior do ΔABC , conforme figura abaixo:

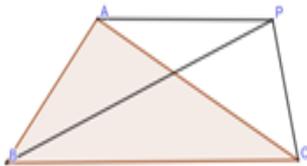
Figura 4 - $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$ e $\Delta ABC = \Delta PBC + \Delta PCA + \Delta PAB$



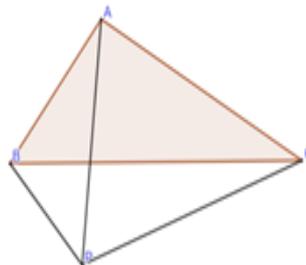
Fonte: elaborada pelo autor.

Considerando a noção de área com sinal de triângulos, a propriedade também é válida conforme figura abaixo.

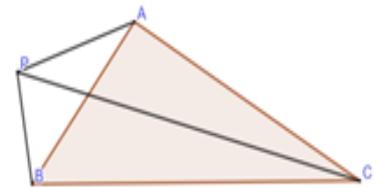
Figura 5 - $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$



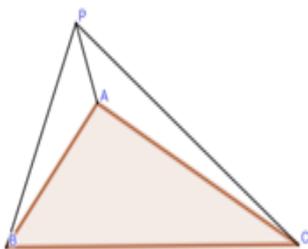
$$\Delta ABC = +\Delta PAB + \Delta PBC - \Delta PCA$$



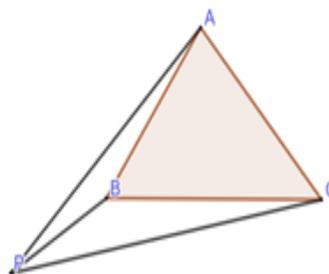
$$\Delta ABC = +\Delta PAB - \Delta PBC + \Delta PCA$$



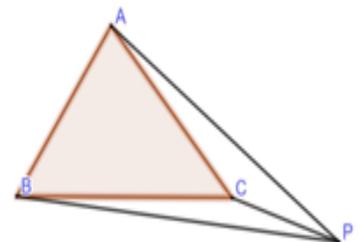
$$\Delta ABC = -\Delta PAB + \Delta PBC + \Delta PCA$$



$$\Delta ABC = -\Delta PAB + \Delta PBC - \Delta PCA$$



$$\Delta ABC = -\Delta PAB - \Delta PBC + \Delta PCA$$



$$\Delta ABC = +\Delta PAB - \Delta PBC - \Delta PCA$$

Fonte: elaborada pelo autor.

2.4 Coordenadas Baricêntricas e a localização de um ponto P em relação a um Triângulo

Veremos agora como determinar se um dado ponto P pertence ao interior de um triângulo ou não. Além disso, analisar em qual região do plano ele se encontra.

De acordo com (LIMA, 2002, p.103 -105), a subtração de pontos resulta, por definição, em um vetor, como em $\overrightarrow{AB} = B - A$, primeiro observe a igualdade vetorial:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow \\ P - A &= \beta \cdot (B - A) + \gamma \cdot (C - A) \Rightarrow \\ \Rightarrow P &= A - \beta A - \gamma A + \beta B + \gamma C \\ \Rightarrow P &= (1 - \beta - \gamma)A + \beta B + \gamma C\end{aligned}$$

De forma que, pondo $\alpha = 1 - \beta - \gamma$, chegamos na expressão

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

Com $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Note que essa última igualdade envolvendo o ponto P é apenas uma forma conveniente de escrever a igualdade vetorial inicial

$$\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}$$

Teorema 2.1: Sejam A , B e C pontos distintos e não colineares do plano. Então cada ponto P do plano pode ser escrito de modo único da seguinte maneira:

$$P = \alpha_p A + \beta_p B + \gamma_p C$$

Onde α_p, β_p e γ_p são números reais e $\alpha_p + \beta_p + \gamma_p = 1$.

Demonstração: Considere os pontos $P(x, y)$; $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ e os coeficientes α_p, β_p e γ_p satisfazendo as condições dadas; temos:

$$\begin{cases} x_1 \alpha_p + x_2 \beta_p + x_3 \gamma_p = x \\ y_1 \alpha_p + y_2 \beta_p + y_3 \gamma_p = y \\ \alpha_p + \beta_p + \gamma_p = 1 \end{cases}$$

Onde o determinante do sistema é

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 2S \text{ (Área do triângulo)}$$

Portanto, o sistema é não nulo e tem solução única para cada coeficiente α_p, β_p e γ_p .

Assim, podemos encontrar os valores destes, facilmente pela regra de Cramer.

$$\alpha_p = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 & x \\ y & y_2 & y_3 & y \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$$

$$\beta_p = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 & x_1 \\ y_1 & y & y_3 & y_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{S_{APC}}{S_{ABC}}$$

$$\gamma_p = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x & x_1 \\ y_1 & y_2 & y & y_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}$$

Onde S_{PBC} , S_{APC} e S_{ABP} são as áreas orientadas dos triângulos PBC , APC e ABP , respectivamente.

Assim, os coeficientes α, β, γ são denominados as coordenadas baricêntricas do ponto P e representamos $P = (\alpha : \beta : \gamma)$.

■

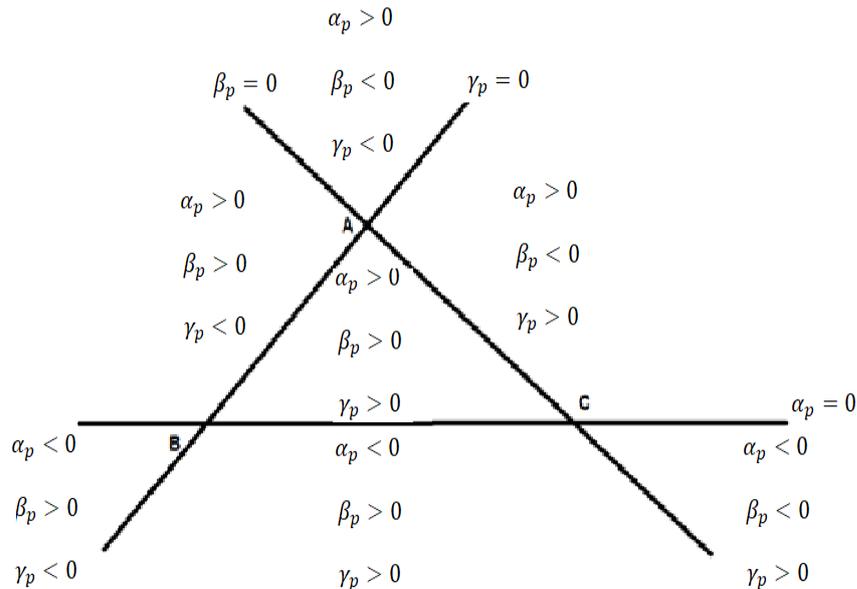
As expressões encontradas acima permitem associar o sinal das coordenadas baricêntricas exatamente com as regiões do plano determinadas pelas retas que contêm os lados do triângulo ABC . A análise é feita da seguinte maneira;

(i) $\alpha_p > 0$ e se somente se o triângulo PBC tem a mesma orientação do triângulo ABC , porém isso só ocorre quando P está no mesmo semiplano de A em relação à reta que contém BC

(ii) $\alpha_p < 0$ e se somente se o triângulo PBC tem a orientação inversa do triângulo ABC , porém isso só ocorre quando P está no semiplano oposto de A em relação à reta que contém BC .

A localização de um ponto em relação ao triângulo se torna imediata com suas coordenadas baricêntricas, veja a figura seguinte:

Figura 6 - Localização de um ponto em relação a um triângulo:



Fonte: elaborada pelo autor.

Podemos interpretar as coordenadas baricêntricas de um ponto em termos da transformação afim $T: R^2 \rightarrow R^3$ tal que:

$$T(A) = (1,0,0), T(B) = (0,1,0) \quad e \quad T(C) = (0,0,1).$$

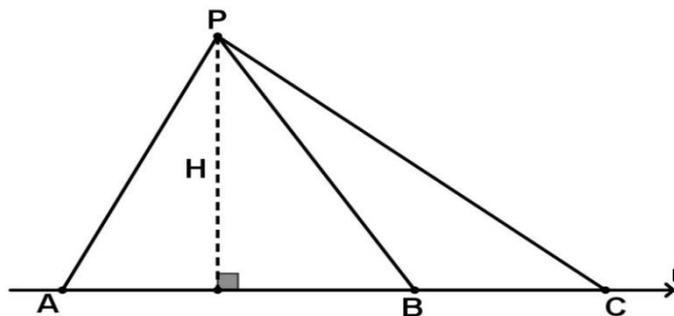
Essa transformação é injetiva e leva R^2 no plano de equação $x + y + z = 1$, de forma que as coordenadas baricêntricas de P, relativas ao triângulo ABC, são as coordenadas cartesianas do ponto $T(P)$.

Dando continuidade ao trabalho, veremos a seguir um teorema importante para o nosso estudo denominado teorema do co-lado. Antes disso, é necessário um estudo de como se relaciona as razões de segmentos orientados e áreas com sinal de um triângulo em uma determinada situação.

2.5 Teorema do Co-lado

Proposição 2.3: Triângulos com alturas congruentes possuem áreas com sinal proporcional às medidas com sinal de suas bases.

Figura 7 - Proporção entre áreas com sinal e bases de triângulos de mesma altura



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Demonstração: Considere os triângulos ΔPAB e ΔPBC orientados no sentido anti-horário com B entre A e C , sem perda de generalidade. Sendo $|AB|$, $|BC|$ as respectivas bases de cada triângulo; temos:

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\frac{1}{2} |AB| H}{\frac{1}{2} |BC| H} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Então

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Os demais casos em que A está entre B e C , ou C está entre A e B , são tratados de maneira análoga e o mais importante é que o resultado independe de P aparecer no início da expressão, dependendo apenas do sentido para o sinal.

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{S_{ABP}}{S_{BCP}} = \frac{S_{BPA}}{S_{CPB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

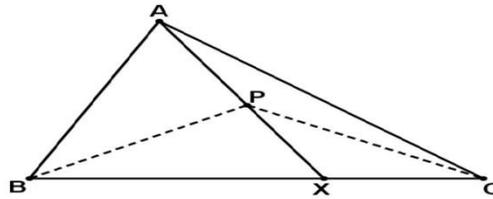
Outra interpretação da proposição acima pode ser a seguinte:

Considere três pontos distintos colineares A, B e C pertencentes à reta r e P um ponto não pertencente à reta r . Então, teremos uma proporção entre as áreas com sinal que envolvem P e as medidas de segmentos orientados que não envolvem o ponto P .

As coordenadas baricêntricas, principal assunto deste trabalho, podem ser fornecidas em função das áreas orientadas. Daí a necessidade de conhecermos o teorema do co-lado que graças à proposição anterior, agora temos condições de demonstrá-lo.

Teorema 2.2: (Teorema do co-lado) Seja X o ponto de interseção das retas AP e BC , então:

Figura 8 - Teorema do Co-lado



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\alpha_p = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{AX}}$$

Demonstração: Pela proposição anterior temos as seguintes situações:

1. Observando os triângulos ΔABC e ΔABX , tem-se que estes possuem alturas de mesma medida em relação às bases BC e BX , desse modo:

$$\frac{S_{ABX}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}$$

2. Observando os triângulos ΔBAX e ΔBPX , tem-se que estes possuem alturas de mesma medida em relação às bases AX e PX , portanto:

$$\frac{S_{BPX}}{S_{BAX}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{AX}}$$

3. Observando os triângulos ΔPBX e ΔPBC , tem-se que estes possuem alturas de mesma medida em relação às bases BX e BC , assim sendo:

$$\frac{S_{PBC}}{S_{PBX}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}}$$

Das observações feitas em 1,2 e 3. Vem

$$\alpha_p = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABX}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{BPX}}{S_{BAX}} \cdot \frac{S_{PBC}}{S_{PBX}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{PX}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{AX}}$$

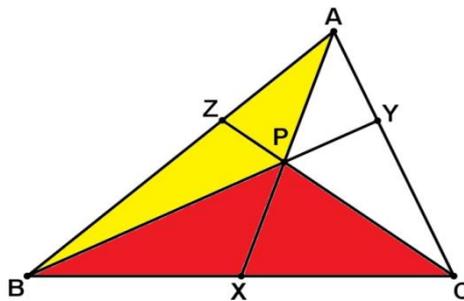
$$\alpha_p = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{AX}}$$

■

Concluimos que a razão entre medidas de segmentos orientados contendo o ponto X podem ser substituídas por razões entre áreas com sinal que não contenha X , ou seja, eliminando o ponto X da expressão o que nos fornece a coordenada baricêntrica do ponto P em relação ao vértice em questão.

Corolário 2.1: Sejam P um ponto não pertencente a nenhum dos lados de um triângulo ΔABC e Y o ponto de interseção das retas BP e AC , então:

Figura 9 - Proporção entre coordenadas baricêntricas.



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{\gamma_p}{\alpha_p} = \frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}$$

Demonstração: Seja o ponto Y a interseção da reta BP com a reta AC , sendo $P \notin \overline{AC}$ e $P \neq Y$. Pela **proposição 2.3** e pela definição de área com sinal, obtemos: (Lembre-se que $S_{PAB} = S_{BPA}$; $S_{PBC} = S_{BCP}$)

$$\frac{S_{BYA}}{S_{BCY}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{CY}} \Rightarrow S_{BYA} = \left(\frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}\right) \cdot S_{BCY} \quad e \quad \frac{S_{PYA}}{S_{PCY}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{CY}} \Rightarrow S_{PYA} = \left(\frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}\right) \cdot S_{PCY}$$

Perceba que

$$S_{BPA} = S_{BYA} - S_{PYA} \Rightarrow S_{BPA} = \left(\frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}\right) \cdot S_{BCY} - \left(\frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}\right) \cdot S_{PCY}$$

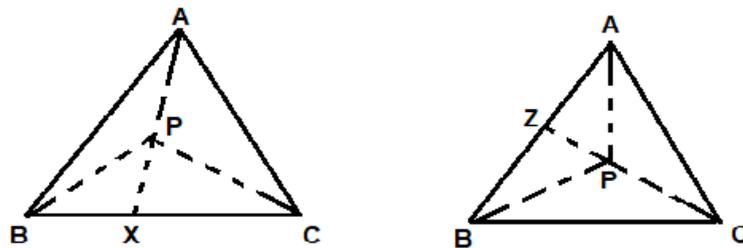
$$\Rightarrow S_{BPA} = \left(\frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}\right) \cdot (S_{BCY} - S_{PCY}) \Rightarrow S_{BPA} = \left(\frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}\right) \cdot (S_{BCP})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BPA}}{S_{BCP}} = \frac{\overline{YA}}{\overline{CY}} \Rightarrow \frac{\gamma_p}{\alpha_p} = \frac{\overline{YA}}{\overline{CY}}$$

■

Os casos abaixo se demonstram de maneira análoga.

Figura 10 - Outras proporções entre coordenadas baricêntricas



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{\gamma_p}{\beta_p} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}$$

$$\frac{\beta_p}{\alpha_p} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$$

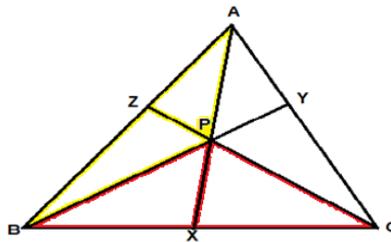
Esse resultado obtido do corolário relaciona as áreas dos subtriângulos originados pelo ponto P com as medidas do lado oposto originadas pelas cevianas que passam por P .

2.6 Teorema de Ceva

Definição 2.6: Cevianas são segmentos que ligam um vértice de um triângulo a um ponto no lado oposto a esse vértice.

Teorema de Ceva 2.3: Sejam ABC um triângulo qualquer e Z, X e Y , respectivamente, pontos sobre os lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{AC} . Então $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} são concorrentes se e somente se $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$.

Figura 11 - Teorema de Ceva



Fonte: elaborada pelo autor.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha por hipótese que $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} sejam concorrentes em P . Do **corolário 2.1**, tem-se:

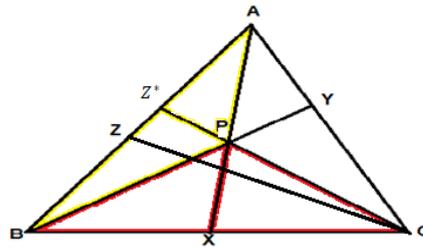
$$\frac{\alpha_p}{\gamma_p} = \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}, \quad \frac{\gamma_p}{\beta_p} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \quad e \quad \frac{\beta_p}{\alpha_p} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$$

Logo;

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\alpha_p}{\gamma_p} \cdot \frac{\gamma_p}{\beta_p} \cdot \frac{\beta_p}{\alpha_p} = 1$$

(\Leftarrow) Agora admita por hipótese que $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$ e suponha, por absurdo, que $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} não sejam concorrentes. Assim, existirá um ponto ($Z^* \neq Z$), $Z^* \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AX}, \overline{BY}$ e $\overline{CZ^*}$ são concorrentes em P .

Figura 12 - Aplicação do Teorema de Ceva



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando o resultado demonstrado na primeira parte do teorema, obtemos:

$$\frac{\overline{AZ^*}}{\overline{Z^*B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

Mas por hipótese $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$ o que implica:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1 = \frac{\overline{AZ^*}}{\overline{Z^*B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \Rightarrow \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AZ^*}}{\overline{Z^*B}}$$

Da igualdade obtida acima, podemos afirmar que Z e Z^* dividem \overline{AB} na mesma razão e finalmente pela unicidade do ponto divisor que $Z = Z^*$, o que caracteriza contradição, já que são pontos distintos. Portanto, \overline{CZ} passa pelo ponto P , mostrando que os segmentos \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} são concorrentes. ■

Dando continuidade ao nosso trabalho, no próximo tópico apresentamos algumas aplicações do teorema de Ceva relacionado às principais cevianas de um triângulo: Medianas, Bissetrizes e Alturas.

2.7 Aplicações do Teorema de Ceva

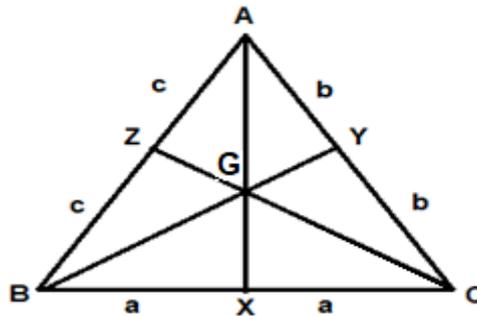
As medianas de qualquer triângulo são concorrentes

Definição 2.7: As cevianas que unem um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto são denominadas Medianas.

Teorema 2.4: As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto (G), denominado de Baricentro.

Demonstração: Sejam X, Y e Z os pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ e \overline{AB} do triângulo ΔABC , ou seja, $\overline{BX} = \overline{XC} = a$; $\overline{CY} = \overline{YA} = b$ e $\overline{AZ} = \overline{ZB} = c$. Tracemos as medianas $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ}

Figura 13 - Baricentro do triângulo ΔABC



Fonte: elaborada pelo autor.

Acontece que:

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 1; \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1 \text{ e } \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1, \text{ ou seja, } \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$

Pelo teorema de Ceva as medianas do triângulo ΔABC são concorrentes em um ponto (G), denominado Baricentro. Além disso:

$$\begin{cases} \frac{S_{GAB}}{S_{GCA}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 1 \\ \frac{S_{GBC}}{S_{GAB}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} S_{GAB} = S_{GCA} \\ S_{GAB} = S_{GBC} \end{matrix} \Rightarrow S_{GAB} = S_{GCA} = S_{GBC}$$

Assim, pelo teorema do co-lado, o baricentro G divide cada mediana na razão 2:1, a partir de cada vértice e, conseqüentemente, o ponto (G) divide o triângulo em seis partes de áreas iguais.

■

As Bissetrizes internas de qualquer triângulo são concorrentes.

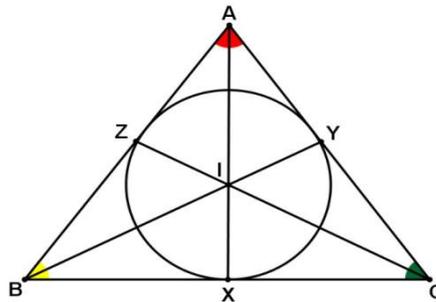
Definição 2.8: As cevianas que partem dos vértices de um triângulo e que dividem ao meio o ângulo referente a esse vértice são denominadas Bissetrizes.

Teorema 2.5: As bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto (I) denominado de Incentro.

Demonstração: Sejam X, Y e Z os pés das bissetrizes internas $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} do triângulo ΔABC , respectivamente, nos lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} .

Do Teorema das Bissetrizes internas temos:

Figura 14 - Bissetrizes do triângulo ΔABC



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} ; \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \text{ e } \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} , \text{ ou seja, } \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$$

Pelo Teorema de Ceva concluímos que as bissetrizes $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} são concorrentes em um ponto (I), denominado de Incentro. ■

Não nos preocupamos aqui com o sinal, pois independente do sentido de orientação escolhido as razões dos segmentos acima serão sempre positivas.

As alturas de qualquer triângulo são concorrentes.

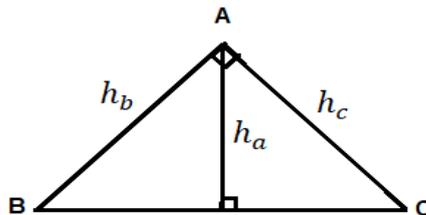
Definição 2.9: A ceviana que parte de um vértice e intercepta o lado oposto, perpendicularmente é denominada altura.

Teorema 2.6: As alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto (H) denominado de Ortocentro.

Demonstração: Sejam $\overline{AX} = h_a$; $\overline{BY} = h_b$ e $\overline{CZ} = h_c$ as alturas de um triângulo ΔABC e X, Y e Z os respectivos pés destas alturas.

Caso o triângulo ΔABC seja retângulo, digamos em A , temos que as alturas relativas aos vértices B e C coincidem com os catetos AB e AC , fazendo do vértice A o próprio Ortocentro, veja figura:

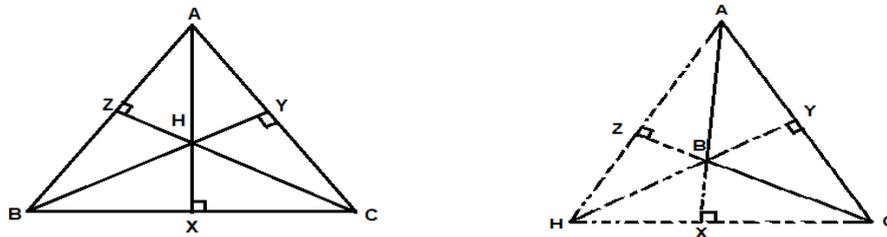
Figura 15 - Ortocentro do triângulo ΔABC



Fonte: elaborada pelo autor.

No caso do triângulo ser acutângulo ou obtusângulo, obtemos:

Figura 16 - Ortocentro de um triângulo acutângulo e de um triângulo obtusângulo



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que no triângulo ΔBAX , do triângulo acutângulo, temos:

$$\overline{BX} = \overline{BA} \cos \hat{B}, \text{ de forma análoga:}$$

$$\Delta XAC \Rightarrow \overline{XC} = \overline{CA} \cos \hat{C}$$

$$\Delta CBY \Rightarrow \overline{CY} = \overline{BC} \cos \hat{C}$$

$$\Delta YBA \Rightarrow \overline{YA} = \overline{BA} \cos \hat{A}$$

$$\Delta ZCA \Rightarrow \overline{AZ} = \overline{CA} \cos \hat{A}$$

$$\Delta ZCB \Rightarrow \overline{ZB} = \overline{BC} \cos \hat{B}$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{BA} \cos \hat{B}}{\overline{CA} \cos \hat{C}} \cdot \frac{\overline{BC} \cos \hat{C}}{\overline{BA} \cos \hat{A}} \cdot \frac{\overline{CA} \cos \hat{A}}{\overline{BC} \cos \hat{B}} = 1$$

Assim pelo teorema de Ceva concluímos que as alturas \overline{AX} ; \overline{BY} ; \overline{CZ} são concorrentes em um ponto denominado Ortocentro.

É importante salientar que em um triângulo acutângulo as razões entre os segmentos são sempre positivas independentes do sentido adotado, já no caso do triângulo ser Obtusângulo, uma razão é positiva e as demais são negativas, permanecendo assim válido o teorema de Ceva.

■

3 COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Nesta seção apresentaremos o assunto mais importante deste trabalho, Coordenadas Baricêntricas e retornaremos ainda em alguns tópicos anteriores, utilizando-se agora das coordenadas baricêntricas para uma nova explanação de tais assuntos.

3.1 Coordenadas Baricêntricas Homogêneas e Exatas

Definição 3.1: Sejam A, B e C vértices de um triângulo ΔABC e P um ponto qualquer do plano. Dizemos que α_p, β_p e γ_p são coordenadas baricêntricas de P em relação ao triângulo ΔABC se:

$$P = \frac{\alpha_p A + \beta_p B + \gamma_p C}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} \quad (i)$$

onde $\alpha_p + \beta_p + \gamma_p \neq 0$. Indicaremos essa relação como

$$P = (\alpha_p : \beta_p : \gamma_p)$$

As coordenadas acima serão denominadas

- **Homogêneas ou absolutas:** sempre que $\alpha_p + \beta_p + \gamma_p = 1$.
- **Exatas ou areais:** sempre que $\alpha_p = S_{PBC}$; $\beta_p = S_{PCA}$; $\gamma_p = S_{PAB}$. Nesta situação, pela propriedade da decomposição da área com sinal, temos que $\alpha_p + \beta_p + \gamma_p = S_{ABC}$.

Perceba que sendo $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$ e $P = (x_p, y_p)$ as coordenadas cartesianas dos pontos A, B, C e P citados na definição, temos:

$$P = (x_p, y_p) = \frac{\alpha_p(x_a, y_a) + \beta_p(x_b, y_b) + \gamma_p(x_c, y_c)}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} \Rightarrow$$

$$P = (x_p, y_p) = \left(\frac{\alpha_p x_a + \beta_p x_b + \gamma_p x_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p}, \frac{\alpha_p y_a + \beta_p y_b + \gamma_p y_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} \right)$$

Além disso, todo ponto do plano admite uma única representação em termos de coordenadas baricêntricas absolutas, de acordo com o teorema 2.1. As coordenadas baricêntricas de um ponto P não são únicas, veja a proposição a seguir:

Proposição 3.1: Sejam $P = (\alpha_p : \beta_p : \gamma_p)$ e $Q = (\alpha_q : \beta_q : \gamma_q)$ as coordenadas baricêntricas dos pontos P e Q em relação a um triângulo ΔABC . Assim; $P = Q$ se, e somente se, existe um número real k não nulo tal que:

$$\alpha_q = k\alpha_p; \beta_q = k\beta_p; \gamma_q = k\gamma_p$$

Demonstração: Sejam $P = (\alpha_p : \beta_p : \gamma_p)$, $Q = (\alpha_q : \beta_q : \gamma_q)$ e $R = (\alpha_r : \beta_r : \gamma_r)$

as coordenadas baricêntricas dos pontos P , Q e R em relação a um triângulo ΔABC .

(\Rightarrow) Suponhamos $P = Q$ e as seguintes coordenadas cartesianas $A = (x_a, y_a)$,

$B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$, $P = (x_p, y_p)$, $Q = (x_q, y_q)$ e $R = (x_r, y_r)$ para os pontos em questão. Sendo por hipótese $P = Q$ e de (i) temos que $S_{\Delta RPQ} = 0$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x_r & y_r & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_r x_a + \beta_r x_b + \gamma_r x_c}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} & \frac{\alpha_r y_a + \beta_r y_b + \gamma_r y_c}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} & 1 \\ \frac{\alpha_p x_a + \beta_p x_b + \gamma_p x_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} & \frac{\alpha_p y_a + \beta_p y_b + \gamma_p y_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} & 1 \\ \frac{\alpha_q x_a + \beta_q x_b + \gamma_q x_c}{\alpha_q + \beta_q + \gamma_q} & \frac{\alpha_q y_a + \beta_q y_b + \gamma_q y_c}{\alpha_q + \beta_q + \gamma_q} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (ii)$$

\Rightarrow Multiplicando por $\alpha_r + \beta_r + \gamma_r$; $\alpha_p + \beta_p + \gamma_p$; $\alpha_q + \beta_q + \gamma_q$, respectivamente, a 1ª, 2ª e 3ª linha obtemos:

$$\begin{vmatrix} \alpha_r x_a + \beta_r x_b + \gamma_r x_c & \alpha_r y_a + \beta_r y_b + \gamma_r y_c & \alpha_r + \beta_r + \gamma_r \\ \alpha_p x_a + \beta_p x_b + \gamma_p x_c & \alpha_p y_a + \beta_p y_b + \gamma_p y_c & \alpha_p + \beta_p + \gamma_p \\ \alpha_q x_a + \beta_q x_b + \gamma_q x_c & \alpha_q y_a + \beta_q y_b + \gamma_q y_c & \alpha_q + \beta_q + \gamma_q \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \\ \alpha_q & \beta_q & \gamma_q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \\ \alpha_q & \beta_q & \gamma_q \end{vmatrix} \cdot S_{\Delta ABC} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \\ \alpha_q & \beta_q & \gamma_q \end{vmatrix} = 0$$

Como o determinante é nulo para qualquer ponto R , a única possibilidade é que a 2ª e 3ª linhas sejam proporcionais:

$$\alpha_q = k\alpha_p; \beta_q = k\beta_p; \gamma_q = k\gamma_p$$

(\Leftarrow) Suponha que existe um número real k não nulo tal que $\alpha_q = k\alpha_p$; $\beta_q = k\beta_p$ e $\gamma_q = k\gamma_p$. Da hipótese e da definição de coordenadas baricêntricas vem:

$$Q = \frac{\alpha_q A + \beta_q B + \gamma_q C}{\alpha_q + \beta_q + \gamma_q} = \frac{k\alpha_p A + k\beta_p B + k\gamma_p C}{k\alpha_p + k\beta_p + k\gamma_p} = \frac{\alpha_p A + \beta_p B + \gamma_p C}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} = P$$

Logo $Q = P$.

■

Corolário 3.1: As coordenadas baricêntricas de um ponto qualquer de coordenadas $P = (\alpha_p : \beta_p : \gamma_p)$, com $\alpha_p + \beta_p + \gamma_p \neq 0$, na forma homogênea ou absolutas são dadas por:

$$P = \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p}, \frac{\beta_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p}, \frac{\gamma_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} \right)$$

Demonstração: Basta tomarmos $k = \frac{1}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p}$ na proposição anterior, logo:

$$P = (\alpha_p : \beta_p : \gamma_p) = \left(\frac{\alpha_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} : \frac{\beta_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} : \frac{\gamma_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} \right)$$

Onde:

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} + \frac{\beta_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} + \frac{\gamma_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} = \frac{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} = 1$$

■

3.2 Coordenadas Baricêntricas e áreas com sinal

Proposição 3.2: (Coordenadas baricêntricas e área com sinal) Sejam A, B e C vértices de um triângulo de referência e seja P um ponto qualquer do plano, então:

$$P = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$$

Demonstração: A demonstração segue do **Teorema 2.1** da seção 2.4. Naquela ocasião encontramos para as coordenadas baricêntricas de P em relação ao triângulo ΔABC , as seguintes expressões:

$$\alpha_p = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} \quad \beta_p = \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} \quad \gamma_p = \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}$$

Logo, temos:

$$P = \left(\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} : \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} \right) = S_{ABC} \left(\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} : \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} : \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} \right) = (S_{PBC} : S_{PCA} : S_{PAB})$$

■

Sabemos que independentemente do sistema de coordenadas adotado, a área de um triângulo é sempre a mesma. Assim, concluímos que as coordenadas

baricêntricas de um ponto P qualquer em relação à um triângulo são invariantes diante de qualquer transformação rígida como: rotações, translações e reflexões.

3.3 Condição de alinhamento de três pontos em coordenadas baricêntricas

Proposição 3.3: (Condição de alinhamento de três pontos) sejam $(\alpha_p: \beta_p: \gamma_p)$, $(\alpha_q: \beta_q: \gamma_q)$, $(\alpha_r: \beta_r: \gamma_r)$ as coordenadas baricêntricas dos pontos P, Q, R , respectivamente. Tais pontos serão colineares se, e somente se, o determinante da matriz formada com suas coordenadas baricêntricas for nulo.

Demonstração: Segue de (ii) que

$$P, Q \text{ e } R \text{ são colineares} \Leftrightarrow S_{\Delta PQR} = 0$$

Levando em conta as propriedades dos determinantes e as igualdades

$\alpha_p + \beta_p + \gamma_p = 1$, $\alpha_q + \beta_q + \gamma_q = 1$, $\alpha_r + \beta_r + \gamma_r = 1$, podemos reescrever a condição de alinhamento como:

$$P, Q \text{ e } R \text{ são colineares} \Leftrightarrow S_{\Delta PQR} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_p & \beta_p & 1 \\ \alpha_q & \beta_q & 1 \\ \alpha_r & \beta_r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

■

3.4 Coordenadas baricêntricas de um ponto divisor.

Seja \overline{PQ} um segmento orientado e conhecido as coordenadas baricêntricas de P e Q , poderemos calcular as coordenadas baricêntricas do ponto X que divide este em segmento em uma dada razão k , de acordo com a proposição abaixo:

Proposição 3.4: Sejam P e Q pontos distintos e X um ponto que divide o segmento \overline{PQ} na razão k , ($k \neq -1$). Então X divide o segmento \overline{PQ} na razão k se, e só se,

$$X = \left(\frac{1}{1+k}\right)P + \left(\frac{k}{1+k}\right)Q$$

Demonstração: Segue da seguinte observação na prova da **proposição 2.2:**

Se $X = (1-t)P + tQ$, então X divide o segmento \overline{PQ} na razão k se, e só se, $t = \frac{k}{k+1}$.

Na seção 4, vamos iniciar os estudos das coordenadas baricêntricas nos pontos notáveis do triângulo, nosso principal objetivo, sendo assim, iremos

primeiramente estabelecer alguns pontos de um triângulo de referência que facilitará nossos estudos.

3.5 Coordenadas baricêntricas dos vértices e de pontos sobre os lados de um triângulo de referência

Vamos estabelecer as coordenadas baricêntricas dos vértices de um triângulo de referência. Observe:

$A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$ pois são válidas as igualdades:

$$A = \frac{1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C}{1 + 0 + 0}$$

$$B = \frac{0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C}{0 + 1 + 0}$$

$$C = \frac{0 \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C}{0 + 0 + 1}$$

Já para os pontos médios A' , B' e C' dos respectivos lados, \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo, temos:

$$A' = \frac{B + C}{2} = \frac{0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C}{0 + 1 + 1} \Rightarrow A' = (0:1:1)$$

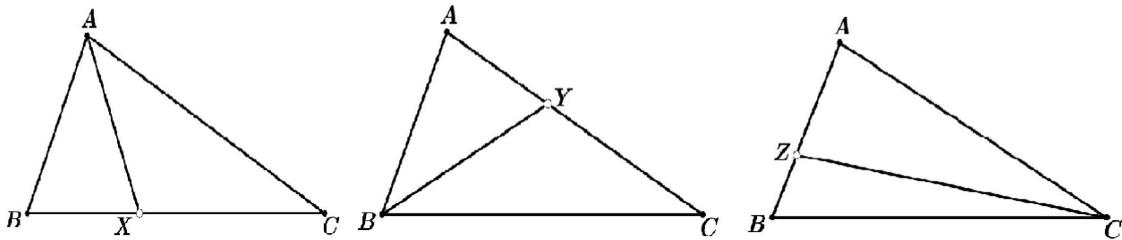
$$B' = \frac{A + C}{2} = \frac{1 \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C}{1 + 0 + 1} \Rightarrow B' = (1:0:1)$$

$$C' = \frac{A + B}{2} = \frac{1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C}{1 + 1 + 0} \Rightarrow C' = (1:1:0)$$

Observe que caso mudem as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo de referência nada será alterado nas coordenadas baricêntricas desses pontos, visto que não precisamos daquelas para a obtenção destas.

Corolário 3.2: Sejam X , Y e Z pontos sobre os lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo ΔABC tomado como referência e no sentido anti-horário.

Figura 17 - Pontos sobre os lados de um triângulo em Coordenadas Baricêntricas



Fonte: elaborada pelo autor.

- X divide \overline{BC} na razão x se , e somente se, $X = (0: 1: x)$
- Y divide \overline{AC} na razão y se , e somente se, $Y = (y: 0: 1)$
- Z divide \overline{AB} na razão z se , e somente se, $Z = (1: z: 0)$

Demonstração:

Seja X o ponto que divide \overline{BC} na razão x , ou seja, $\overline{BX}/\overline{XC} = x$. Então:

⇒ Como X é colinear com B e C , temos

$$X = (S_{XBC}:S_{XCA}:S_{BXA}) = (0:S_{XCA}:S_{BXA}) = (0:\overline{XC}:\overline{BX}) = \left(0:\frac{\overline{XC}}{\overline{XC}}:\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\right) = (0: 1: x)$$

⇐ Supondo $X = (0: 1: x)$, podemos escrever $X = (S_{XBC}:S_{XCA}:S_{BXA})$. Logo obtemos que $S_{XBC} = 0$, o que nos mostra que X, B e C são pontos colineares.

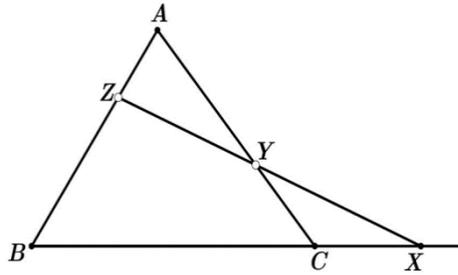
Os outros casos são demonstrados de maneira análogos. ■

3.6 O Teorema de Menelaus

O teorema de Menelaus nos fornece uma condição necessária e suficiente para que três pontos que estejam sobre os diferentes lados de um triângulo ou em seus prolongamentos sejam colineares. Seu enunciado está apresentado no teorema abaixo:

Teorema 3.1: (Teorema de Menelaus) Seja ΔABC um triângulo e X, Y e Z pontos sobre as retas suportes dos lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} , respectivamente, distintos dos vértices do triângulo e sendo $x = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}, y = \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}$ e $z = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$, então:

Figura 18 - Teorema de Menelaus



Fonte: elaborada pelo autor.

$$X, Y \text{ e } Z \text{ são colineares} \Leftrightarrow x \cdot y \cdot z = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$$

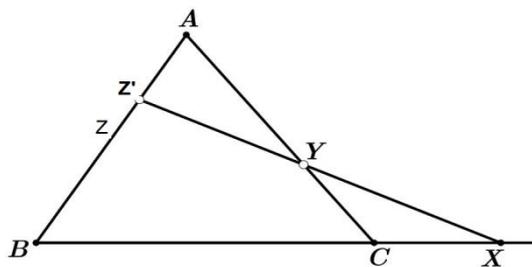
Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha que os pontos X, Y e Z são colineares. De acordo com a **proposição 3.3** e o **corolário 3.2**:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ y & 0 & 1 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot y \cdot z + 1 = 0 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1$$

(\Leftarrow) Agora suponha que $x \cdot y \cdot z = -1$ e, por contradição, os pontos X, Y e Z não são colineares. Tomemos então o ponto Z' sobre o lado \overline{AB} tal que X, Y e Z' sejam colineares e, além disso, seja $z' = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}}$. Da prova anterior, temos:

Figura 19 - Aplicação do Teorema de Menelaus



Fonte: elaborada pelo autor.

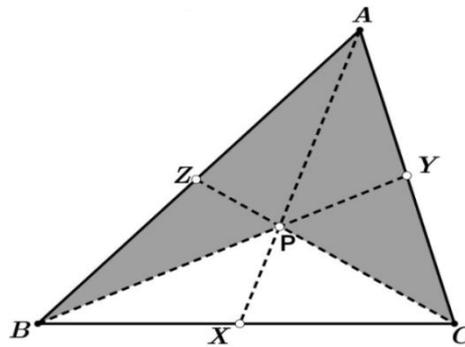
$$x \cdot y \cdot z' = -1$$

O que implica $x \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot z'$ e pela unicidade do ponto divisor concluímos que $Z' = Z$ e assim chegamos a uma contradição e portanto X, Y e Z são colineares. ■

3.7 Teorema de Van Aubel

Teorema 3.2: Sejam X, Y e Z os traços de um ponto P em relação a um triângulo ΔABC . Suponha que X, Y e Z dividem os lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} nas seguintes razões, respectivamente, $x = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}, y = \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}$ e $z = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$. Então P divide \overline{AX} na razão $y + z$, ou seja:

Figura 20 - Teorema de Van Aubel



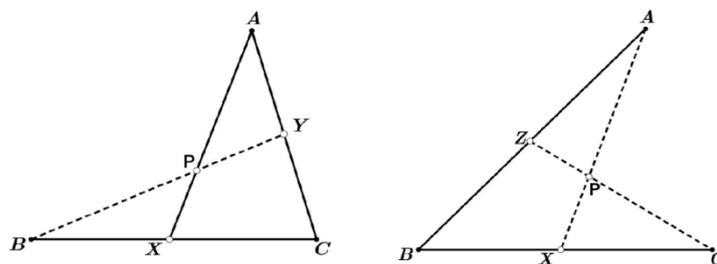
Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}} + \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$$

Demonstração:

Aplicando o teorema de Menelaus nos triângulos ΔAXC e ΔABX , interceptados por $\overline{BY}, \overline{CZ}$ respectivamente, temos:

Figura 21- Aplicação do teorema de Menelaus nos triângulos ΔAXC e ΔABX



Fonte: elaborada pelo autor.

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}} = -\frac{\overline{BX}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{XP}} \Rightarrow y = -\frac{\overline{BX}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{XP}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{XP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = -\frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{XP}} \Rightarrow z = -\frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{XP}}$$

Assim;

$$y + z = -\frac{\overline{BX}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{XP}} - \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{XP}} = \left(-\frac{\overline{BX}}{\overline{CB}} - \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}}\right) \frac{\overline{PA}}{\overline{XP}} = \left(\frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{XC}}{\overline{BC}}\right) \frac{\overline{AP}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PX}}$$

Portanto

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PX}} = y + z = \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}} + \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$$

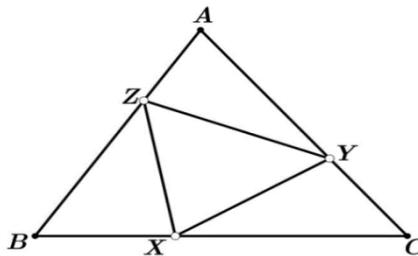
■

3.8 Primeiro teorema de Routh

Este teorema nos permite calcular a área com sinal de um triângulo que contém seus vértices sobre os lados do triângulo de referência. Além disso, o teorema de Menelaus pode ser deduzido como um corolário deste.

Teorema 3.3: (Primeiro teorema de Routh) Sejam X, Y e Z pontos, respectivamente, sobre os lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} do triângulo ΔABC e $x = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}, y = \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}$ e $z = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$ as razões que pontos X, Y e Z dividem os segmentos orientados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} . Então a área do triângulo ΔXYZ é dada por:

Figura 22 - Primeiro Teorema de Routh



Fonte: elaborada pelo autor.

$$S_{\Delta XYZ} = \left[\frac{1 + xyz}{(1 + x) \cdot (1 + y) \cdot (1 + z)} \right] \cdot S_{\Delta ABC}$$

Demonstração:

Sejam $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo de referência e pelo **corolário 3.2** $X = (0:1:x)$, $Y = (y:0:1)$ e $Z = (1:z:0)$, obtemos as seguintes conclusões:

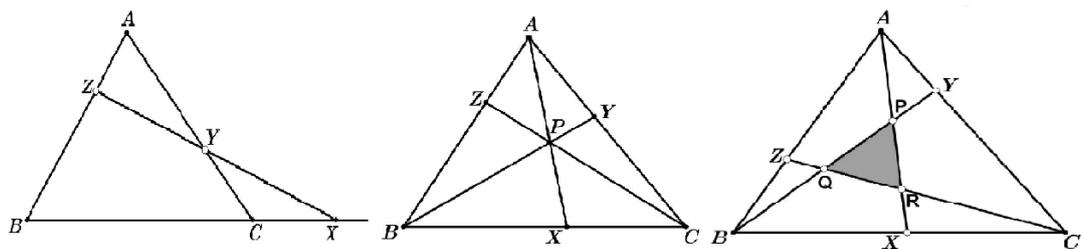
$$\begin{aligned}
S_{\Delta XYZ} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_X & y_X & 1 \\ x_Y & y_Y & 1 \\ x_Z & y_Z & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow S_{\Delta XYZ} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{0 \cdot x_a + 1 \cdot x_b + x \cdot x_c}{1+x} & \frac{0 \cdot y_a + 1 \cdot y_b + x \cdot y_c}{1+x} & 1 \\ \frac{y \cdot x_a + 0 \cdot x_b + 1 \cdot x_c}{1+y} & \frac{y \cdot y_a + 0 \cdot y_b + 1 \cdot y_c}{1+y} & 1 \\ \frac{1 \cdot x_a + z \cdot x_b + 0 \cdot x_c}{1+z} & \frac{1 \cdot y_a + z \cdot y_b + 0 \cdot y_c}{1+z} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow S_{\Delta XYZ} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_b + xx_c}{1+x} & \frac{y_b + xy_c}{1+x} & 1 \\ \frac{yx_a + x_c}{1+y} & \frac{yy_a + y_c}{1+y} & 1 \\ \frac{x_a + zx_b}{1+z} & \frac{y_a + zy_b}{1+z} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow S_{\Delta XYZ} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x) \cdot (1+y) \cdot (1+z)} \right] \begin{vmatrix} x_b + xx_c & y_b + xy_c & 1+x \\ yx_a + x_c & yy_a + y_c & 1+y \\ x_a + zx_b & y_a + zy_b & 1+z \end{vmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow S_{\Delta XYZ} &= \left[\frac{1}{(1+x) \cdot (1+y) \cdot (1+z)} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ y & 0 & 1 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \right) \\
\Rightarrow S_{\Delta XYZ} &= \left[\frac{1}{(1+x) \cdot (1+y) \cdot (1+z)} \right] \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ y & 0 & 1 \\ 1 & z & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \\
\Rightarrow S_{\Delta XYZ} &= \left[\frac{1 + xyz}{(1+x) \cdot (1+y) \cdot (1+z)} \right] \cdot S_{\Delta ABC}
\end{aligned}$$

■

Em particular admitimos aqui que $x \neq -1, y \neq -1$ e $z \neq -1$ já que os pontos X, Y e Z dividem respectivamente os segmentos orientados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} .

Dependendo das disposições dos pontos X, Y e Z sobre os lados do triângulo, encontramos três possibilidades:

Figura 23 - Possibilidades com base no Primeiro Teorema de Routh



Fonte: elaborada pelo autor.

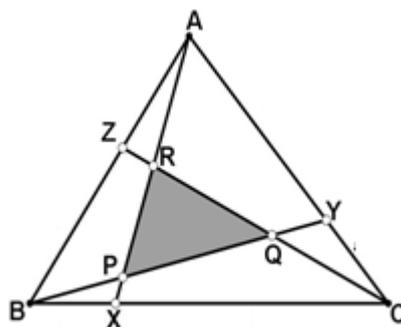
1. Os pontos X, Y e Z são colineares, neste caso recaímos no teorema de Menelaus e teremos:

$$S_{\Delta XYZ} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{1 + xyz}{(1+x) \cdot (1+y) \cdot (1+z)} \right] = 0 \Leftrightarrow xyz = -1$$

2. As cevianas $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} são concorrentes (Teorema de Ceva), onde se tem $xyz = 1$, ou;
3. As interseções das cevianas $\overline{AX}, \overline{BY}$ e \overline{CZ} , duas a duas, formam um triângulo não-degenerado e neste caso tem-se obrigatoriamente $xyz \neq \pm 1$.

Proposição 3.5: Sejam X, Y e Z pontos distintos dos vértices, respectivamente, sobre os lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} do triângulo de referência (ΔABC) e $x = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}$, $y = \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}$ e $z = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$ as razões que pontos X, Y e Z dividem os segmentos orientados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} . Considere $P = \overline{AX} \cap \overline{BY}$, $Q = \overline{BY} \cap \overline{CZ}$ e $R = \overline{CZ} \cap \overline{AX}$ as interseções das cevianas duas a duas. Então as coordenadas baricêntricas dos pontos P, Q e R são dadas por:

Figura 24 - Coordenadas Baricêntricas dos pontos de intersecção das Cevianas



Fonte: elaborada pelo autor.

$$P = (xy : 1 : x) \quad Q = (y : yz : 1) \quad R = (1 : z : zx)$$

Demonstração:

Sejam $(x_p: y_p: z_p)$ as coordenadas baricêntricas do ponto P . Então o determinante formado pelas coordenadas baricêntricas dos pontos A, P e X é nulo, pois são colineares.

$$* \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_p & y_p & z_p \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy_p - z_p = 0 \Rightarrow z_p = xy_p$$

Também temos que B, P e Y são colineares, logo:

$$** \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_p & y_p & z_p \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow yz_p - x_p = 0 \Rightarrow x_p = yz_p$$

$$\text{De (*) e (**)} \text{ vem } \begin{cases} z_p = xy_p \\ x_p = yz_p \end{cases} \Rightarrow x_p = xy_p y \Rightarrow P = (xyy_p: y_p: xy_p)$$

Sabemos que $y_p \neq 0$, pois caso contrário, $P \in \overline{AC}, X = C$, um absurdo já que X divide \overline{BC} na razão $r \neq -1$, assim:

$$P = (xyy_p: y_p: xy_p) = \left(\frac{xyy_p}{y_p}: \frac{y_p}{y_p}: \frac{xy_p}{y_p} \right) = (xy: 1: x)$$

De maneira análoga, encontramos $Q = (y: yz: 1)$; $R = (1: z: zx)$

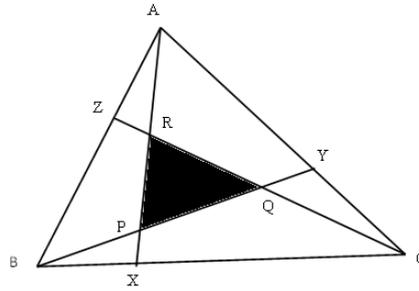
■

O teorema a seguir, conhecido como o segundo teorema de Routh, apresenta exatamente uma fórmula para o cálculo da área do triângulo ΔPQR acima obtido pela interseção das cevianas, duas a duas.

3.9 Segundo teorema de Routh

Teorema 3.4: (Segundo teorema de Routh) Sejam X, Y e Z pontos distintos dos vértices, respectivamente, sobre os lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} do triângulo de referência (ΔABC) e $x = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}$, $y = \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}$ e $z = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$ as razões em que X, Y e Z dividem os segmentos orientados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} . Considere $P = \overline{AX} \cap \overline{BY}$, $Q = \overline{BY} \cap \overline{CZ}$ e $R = \overline{CZ} \cap \overline{AX}$ as interseções das cevianas duas a duas, então a área com sinal do triângulo ΔPQR é dada por:

Figura 25 - Segundo Teorema de Routh.



Fonte: elaborada pelo autor.

$$S_{\Delta PQR} = \left[\frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1) \cdot (yz + y + 1) \cdot (zx + z + 1)} \right] \cdot S_{\Delta ABC}$$

Demonstração:

Sejam $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo de referência e pela **proposição 3.5** onde:

$P = (xy: 1: x)$, $Q = (y: yz: 1)$ e $R = (1: z: zx)$, obtemos as seguintes conclusões

$$\begin{aligned} S_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{xy \cdot x_a + 1 \cdot x_b + x \cdot x_c}{xy + x + 1} & \frac{xy \cdot y_a + 1 \cdot y_b + x \cdot y_c}{xy + x + 1} & 1 \\ \frac{y \cdot x_a + yz \cdot x_b + 1 \cdot x_c}{yz + y + 1} & \frac{y \cdot y_a + yz \cdot y_b + 1 \cdot y_c}{yz + y + 1} & 1 \\ \frac{1 \cdot x_a + z \cdot x_b + zx \cdot x_c}{zx + z + 1} & \frac{1 \cdot y_a + z \cdot y_b + zx \cdot y_c}{zx + z + 1} & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{xyx_a + x_b + xx_c}{xy + x + 1} & \frac{xyy_a + y_b + xy_c}{xy + x + 1} & 1 \\ \frac{yx_a + yzx_b + x_c}{yz + y + 1} & \frac{yy_a + yzy_b + y_c}{yz + y + 1} & 1 \\ \frac{x_a + zx_b + zxx_c}{zx + z + 1} & \frac{y_a + zy_b + zxy_c}{zx + z + 1} & 1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(xy + x + 1) \cdot (yz + y + 1) \cdot (zx + z + 1)} \right] & \begin{vmatrix} xyx_a + x_b + xx_c & xyy_a + y_b + xy_c & xy + x + 1 \\ yx_a + yzx_b + x_c & yy_a + yzy_b + y_c & yz + y + 1 \\ x_a + zx_b + zxx_c & y_a + zy_b + zxy_c & zx + z + 1 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow S_{\Delta PQR} &= \left[\frac{1}{(xy + x + 1) \cdot (yz + y + 1) \cdot (zx + z + 1)} \right] \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} xy & 1 & x \\ y & yz & 1 \\ 1 & z & zx \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \right) \\ \Rightarrow S_{\Delta PQR} &= \left[\frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1) \cdot (yz + y + 1) \cdot (zx + z + 1)} \right] \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta PQR} = \left[\frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1) \cdot (yz + y + 1) \cdot (zx + z + 1)} \right] \cdot S_{\Delta ABC}$$

■

4 APLICAÇÕES DAS COORDENADAS BARICÊNTRICAS

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações das coordenadas baricêntricas, dentre elas o estudo dos pontos notáveis de um triângulo em coordenadas baricêntricas e uma simples e curiosa aplicação conhecida como o problema dos três vasos.

4.1 A área de um triângulo em coordenadas baricêntricas

Teorema 4.1: Dados três pontos em coordenadas baricêntricas absolutas: $P(\alpha_p : \beta_p : \gamma_p)$, $Q(\alpha_q : \beta_q : \gamma_q)$ e $R(\alpha_r : \beta_r : \gamma_r)$, a área com sinal do triângulo ΔPQR será obtida mediante a seguinte fórmula:

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} = \begin{vmatrix} \alpha_p & \alpha_q & \alpha_r \\ \beta_p & \beta_q & \beta_r \\ \gamma_p & \gamma_q & \gamma_r \end{vmatrix},$$

onde $S_{\Delta ABC}$ é a área do triângulo de referência.

Demonstração: Sejam $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$, as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo ΔABC . Então as coordenadas cartesianas dos pontos P, Q e R , serão:

$$P = (x_p, y_p) = \left(\frac{\alpha_p x_a + \beta_p x_b + \gamma_p x_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p}, \frac{\alpha_p y_a + \beta_p y_b + \gamma_p y_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} \right)$$

$$Q = (x_q, y_q) = \left(\frac{\alpha_q x_a + \beta_q x_b + \gamma_q x_c}{\alpha_q + \beta_q + \gamma_q}, \frac{\alpha_q y_a + \beta_q y_b + \gamma_q y_c}{\alpha_q + \beta_q + \gamma_q} \right)$$

$$R = (x_r, y_r) = \left(\frac{\alpha_r x_a + \beta_r x_b + \gamma_r x_c}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r}, \frac{\alpha_r y_a + \beta_r y_b + \gamma_r y_c}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} \right)$$

Logo, aplicando a fórmula da área, teremos:

$$2S_{\Delta PQR} = \begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_p x_a + \beta_p x_b + \gamma_p x_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} & \frac{\alpha_p y_a + \beta_p y_b + \gamma_p y_c}{\alpha_p + \beta_p + \gamma_p} & 1 \\ \frac{\alpha_q x_a + \beta_q x_b + \gamma_q x_c}{\alpha_q + \beta_q + \gamma_q} & \frac{\alpha_q y_a + \beta_q y_b + \gamma_q y_c}{\alpha_q + \beta_q + \gamma_q} & 1 \\ \frac{\alpha_r x_a + \beta_r x_b + \gamma_r x_c}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} & \frac{\alpha_r y_a + \beta_r y_b + \gamma_r y_c}{\alpha_r + \beta_r + \gamma_r} & 1 \end{vmatrix}$$

Como $\alpha_p + \beta_p + \gamma_p = 1$; $\alpha_q + \beta_q + \gamma_q = 1$; $\alpha_r + \beta_r + \gamma_r = 1$, pois são coordenadas baricêntricas absolutas, obtemos:

$$2S_{\Delta PQR} = \begin{vmatrix} \alpha_p x_a + \beta_p x_b + \gamma_p x_c & \alpha_p y_a + \beta_p y_b + \gamma_p y_c & \alpha_p + \beta_p + \gamma_p \\ \alpha_q x_a + \beta_q x_b + \gamma_q x_c & \alpha_q y_a + \beta_q y_b + \gamma_q y_c & \alpha_q + \beta_q + \gamma_q \\ \alpha_r x_a + \beta_r x_b + \gamma_r x_c & \alpha_r y_a + \beta_r y_b + \gamma_r y_c & \alpha_r + \beta_r + \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$2S_{\Delta PQR} = \begin{vmatrix} \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \\ \alpha_q & \beta_q & \gamma_q \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

$$2S_{\Delta PQR} = \begin{vmatrix} \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \\ \alpha_q & \beta_q & \gamma_q \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix} \cdot 2S_{\Delta ABC}$$

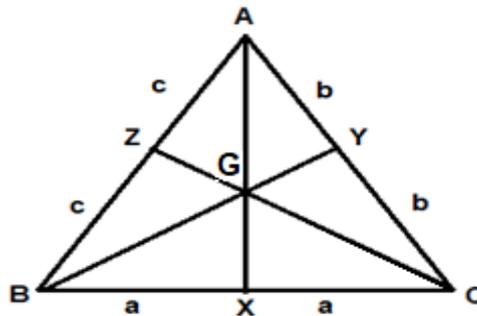
$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} = \begin{vmatrix} \alpha_p & \alpha_q & \alpha_r \\ \beta_p & \beta_q & \beta_r \\ \gamma_p & \gamma_q & \gamma_r \end{vmatrix}$$

■

4.2 Coordenadas Baricêntricas do Baricentro

Proposição 4.1: As coordenadas baricêntricas do baricentro G , também denominado por centro de massa ou centróide, são todas iguais.

Figura 26 - Coordenadas Baricêntricas do Baricentro do triângulo ΔABC



Fonte: elaborada pelo autor.

Demonstração: Seja G o baricentro do triângulo ΔABC cuja área é S . Pela **proposição 3.2** e **teorema 2.4**, temos que:

$$G = (S_{GBC} : S_{GCA} : S_{GAB}) = \left(\frac{S}{3} : \frac{S}{3} : \frac{S}{3} \right) = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \right) = (1 : 1 : 1)$$

■

Portanto, as coordenadas baricêntricas do baricentro são $G(1:1:1)$, sendo $G\left(\frac{S}{3} : \frac{S}{3} : \frac{S}{3}\right)$ e $G\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right)$ as coordenadas baricêntricas exata e homogênea, respectivamente, do ponto G .

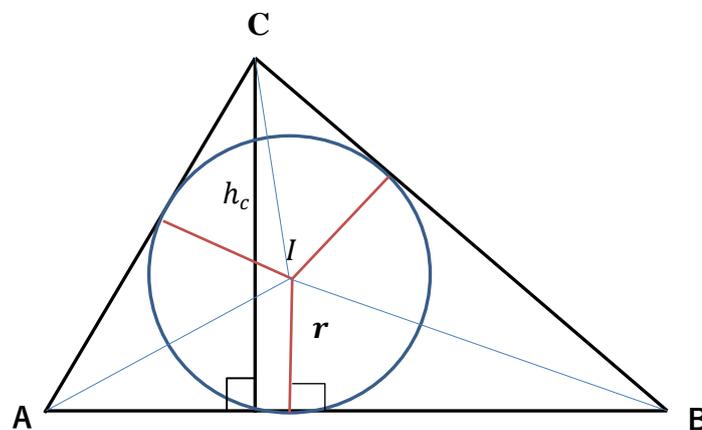
4.3 Coordenadas Baricêntricas do Incentro

Proposição 4.3: Sejam ΔABC um triângulo e a, b e c as medidas euclidianas, respectivamente, dos lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ e \overline{AB} . Então as coordenadas baricêntricas do Incentro desse triângulo são dadas por $I(a : b : c)$.

Demonstração:

Sabemos que o Incentro (I) é o centro da circunferência inscrita. Tracemos assim a altura h_c relativa ao lado de medida c e o raio da circunferência inscrita.

Figura 27 - Coordenadas Baricêntricas do Incentro do triângulo ΔABC .



Fonte: elaborada pelo autor.

Pelo **teorema 2.1**, as coordenadas baricêntricas do ponto (I) são:

$$\alpha_I = \frac{S_{\Delta IBC}}{S_{\Delta ABC}}, \quad \beta_I = \frac{S_{\Delta AIC}}{S_{\Delta ABC}}, \quad \gamma_I = \frac{S_{\Delta ABI}}{S_{\Delta ABC}}$$

Assim:

$$\gamma_I = \frac{S_{\Delta ABI}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} r \cdot c}{\frac{1}{2} h_c \cdot c} = \frac{r}{h_c}$$

De modo análogo, obtemos:

$$\alpha_I = \frac{r}{h_a}, \quad \beta_I = \frac{r}{h_b}$$

Logo, se tem:

$$I\left(\frac{r}{h_a} : \frac{r}{h_b} : \frac{r}{h_c}\right) = \left(\frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}\right)$$

Porém, $\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S_{\Delta ABC}}$, $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S_{\Delta ABC}}$, $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S_{\Delta ABC}}$. Considere $S_{\Delta ABC} = S$. Logo:

$$I\left(\frac{r}{h_a} : \frac{r}{h_b} : \frac{r}{h_c}\right) = \left(\frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}\right) = \left(\frac{a}{2S} : \frac{b}{2S} : \frac{c}{2S}\right) = (a : b : c).$$

■

Suas coordenadas baricêntricas exatas são $I(S_{\Delta IBC} : S_{\Delta AIC} : S_{\Delta ABI}) = \left(\frac{ar}{2} : \frac{br}{2} : \frac{cr}{2}\right)$.

Para as coordenadas baricêntricas homogênes do Incentro, basta observar que

$$S_{\Delta IBC} + S_{\Delta AIC} + S_{\Delta ABI} = S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{1}{2} h_a \cdot a \Rightarrow p \cdot r = \frac{1}{2} h_a \cdot a \Rightarrow \frac{r}{h_a} = \frac{a}{2p}$$

Ou seja,

$$I\left(\frac{r}{h_a} : \frac{r}{h_b} : \frac{r}{h_c}\right) = \left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right)$$

Portanto as coordenadas baricêntricas do Incentro são $I(a : b : c)$. Sendo $I\left(\frac{ar}{2} : \frac{br}{2} : \frac{cr}{2}\right)$

e $I\left(\frac{a}{2p}, \frac{b}{2p}, \frac{c}{2p}\right)$ as coordenadas baricêntricas exata e homogênea, respectivamente, do ponto I .

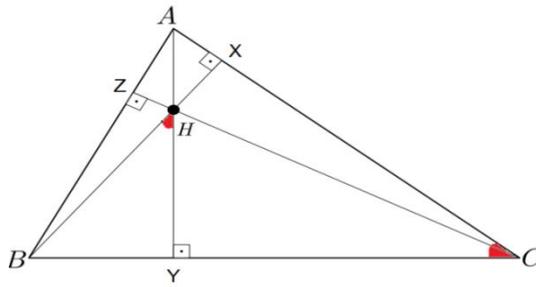
4.4 Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro

Proposição 4.4: Sejam ΔABC um triângulo e a, b e c as medidas euclidianas, respectivamente, dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} . Então as coordenadas baricêntricas do Ortocentro deste triângulo são dadas por:

1. $H(a \cos B \cos C : b \cos A \cos C : c \cos A \cos B)$
2. $H(\operatorname{tg}A : \operatorname{tg}B : \operatorname{tg}C)$
3. $H\left(\frac{1}{-a^2+b^2+c^2} : \frac{1}{a^2-b^2+c^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)$

Demonstração:

Figura 28 - Coordenadas Baricêntricas do Ortocentro do triângulo ΔABC .



Fonte: elaborada pelo autor.

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = 2R \Rightarrow \begin{cases} a = 2R\operatorname{sen}A \\ b = 2R\operatorname{sen}B \\ c = 2R\operatorname{sen}C \end{cases}$$

Onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC . Seja H o ortocentro do triângulo, Y e X os pés, respectivamente, das alturas h_a e h_b .

Além disso, percebemos que os ângulos $B\hat{H}Y \equiv B\hat{C}X$, pois os triângulos $\Delta BH Y$ e o $\Delta BC X$ são triângulos retângulos e compartilham de um mesmo ângulo, logo;

$$\cos B = \frac{\overline{B\bar{Y}}}{c} \Rightarrow \overline{B\bar{Y}} = c \cdot \cos B = 2R \operatorname{sen}C \cos B$$

Sabendo que $B\hat{H}Y \equiv B\hat{C}X$, vem:

$$\frac{\overline{B\bar{Y}}}{2R \cos B} = \operatorname{sen}C = \frac{\overline{B\bar{Y}}}{\overline{B\bar{H}}} \Rightarrow \overline{B\bar{H}} = 2R \cos B$$

$$\cos C = \frac{\overline{H\bar{Y}}}{\overline{B\bar{H}}} \Rightarrow \overline{H\bar{Y}} = 2R \cos B \cos C$$

Assim a área do triângulo $S_{\Delta BCH}$ é:

$$S_{\Delta BCH} = \frac{1}{2} \overline{H\bar{Y}} \cdot a = \frac{1}{2} 2R a \cos B \cos C = Ra \cos B \cos C = 2R^2 \operatorname{sen}A \cos B \cos C$$

De modo análogo, obtemos:

$$S_{\Delta ABH} = 2R^2 \operatorname{sen}C \cos A \cos B \quad ; \quad S_{\Delta CAH} = 2R^2 \operatorname{sen}B \cos C \cos A$$

Portanto as coordenadas baricêntricas do Ortocentro são:

$$H(S_{\Delta BCH} : S_{\Delta CAH} : S_{\Delta ABH})$$

$$(*) \quad H(2R^2 \operatorname{sen}A \cos B \cos C : 2R^2 \operatorname{sen}B \cos C \cos A : 2R^2 \operatorname{sen}C \cos A \cos B)$$

Dividindo a expressão (*) por R

$$H(2R \operatorname{sen}A \cos B \cos C : 2R \operatorname{sen}B \cos C \cos A : 2R \operatorname{sen}C \cos A \cos B) =$$

$$H(a \cos B \cos C : b \cos A \cos C : c \cos A \cos B) \quad (1)$$

Dividindo a expressão (*) por $(2R^2 \cos A \cos B \cos C)$

$$H(\operatorname{tg}A : \operatorname{tg}B : \operatorname{tg}C) \quad (2)$$

Para demonstrar o item 3, lembre-se que:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} & ; & \quad \operatorname{sen}A = \left(\frac{2}{bc}\right) S_{\Delta ABC} \\ \cos B &= \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} & ; & \quad \operatorname{sen}B = \left(\frac{2}{ac}\right) S_{\Delta ABC} \\ \cos C &= \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} & ; & \quad \operatorname{sen}C = \left(\frac{2}{ab}\right) S_{\Delta ABC} \end{aligned}$$

O que implica:

$$\operatorname{tg}A = \frac{4S_{\Delta ABC}}{-a^2 + b^2 + c^2} \quad ; \quad \operatorname{tg}B = \frac{4S_{\Delta ABC}}{a^2 - b^2 + c^2} \quad ; \quad \operatorname{tg}C = \frac{4S_{\Delta ABC}}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Assim, dividindo $H(\operatorname{tg}A : \operatorname{tg}B : \operatorname{tg}C)$ por $4S_{\Delta ABC}$; concluímos

$$H\left(\frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2} : \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}\right) \quad (3)$$

■

4.5 Coordenadas Baricêntricas do Circuncentro

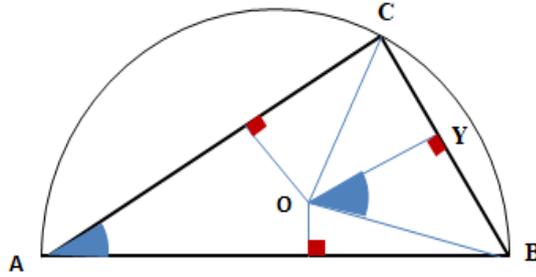
Proposição 4.5: Sejam ΔABC um triângulo e a, b e c as medidas euclidianas, respectivamente, dos lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ e \overline{AB} . Então as coordenadas baricêntricas do Circuncentro deste triângulo são dadas por:

1. $O(a \cos A : b \cos B : c \cos C)$
2. $O(a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(a^2 + c^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$
3. $O(\operatorname{sen}(2A) : \operatorname{sen}(2B) : \operatorname{sen}(2C))$
4. $O(\operatorname{sen}A \cos A : \operatorname{sen}B \cos B : \operatorname{sen}C \cos C)$

Demonstração:

Sabemos que o Circuncentro O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC . Seja R o raio da circunferência. Assim, $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

Figura 29 - Coordenadas Baricêntricas do Circuncentro do triângulo ΔABC



Fonte: elaborada pelo autor.

Traçamos a perpendicular por O interceptando \overline{BC} em Y , pelo teorema do ângulo central e inscrito temos que $B\hat{O}Y = \frac{1}{2} B\hat{O}C = \hat{A}$, assim temos:

$$\cos A = \frac{\overline{OY}}{R} \Rightarrow \overline{OY} = R \cos A$$

Conseqüentemente:

$$\alpha_O = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} a \overline{OY}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} a R \cos A}{S_{ABC}}$$

De modo análogo:

$$\beta_O = \frac{\frac{1}{2} b R \cos B}{S_{ABC}} \quad , \quad \gamma_O = \frac{\frac{1}{2} c R \cos C}{S_{ABC}}$$

Portanto:

$$O \left(\frac{\frac{1}{2} a R \cos A}{S_{ABC}} : \frac{\frac{1}{2} b R \cos B}{S_{ABC}} : \frac{\frac{1}{2} c R \cos C}{S_{ABC}} \right) =$$

$$O(a \cos A : b \cos B : c \cos C) \quad (1)$$

Aplicando a lei dos Cossenos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad , \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad , \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Temos:

$$\begin{aligned} & O(a \cos A : b \cos B : c \cos C) = \\ & = \left(a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} : c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \end{aligned}$$

Multiplicando por $2abc$, concluímos:

$$O(a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2) : b^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2) : c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)) \quad (2)$$

Para a alternativa 3; basta lembrar.

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \overline{BO} \cdot \overline{OC} \operatorname{sen}(B\hat{O}C) = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen}(2A)$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \overline{AO} \cdot \overline{OC} \operatorname{sen}(A\hat{O}C) = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen}(2B)$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \overline{AO} \cdot \overline{OB} \operatorname{sen}(A\hat{O}B) = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen}(2C)$$

De onde se tem:

$$O \left(\frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen}(2A) : \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen}(2B) : \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen}(2C) \right) =$$

$$(\operatorname{sen}(2A) : \operatorname{sen}(2B) : \operatorname{sen}(2C)) \quad (3)$$

$$(2\operatorname{sen}A \cos A : 2\operatorname{sen}B \cos B : 2\operatorname{sen}C \cos C) =$$

$$(\operatorname{sen}A \cos A : \operatorname{sen}B \cos B : \operatorname{sen}C \cos C) \quad (4)$$

■

Proposição 4.6: A soma das coordenadas baricêntricas do circuncentro $O(a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2) : b^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2) : c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2))$ é $16S_{\Delta ABC}^2$, onde ΔABC é o triângulo de referência.

Demonstração:

$$\begin{aligned} & a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + b^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2) + c^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2) = \\ & = a^2 b^2 + a^2 c^2 - a^4 + b^2 a^2 + b^2 c^2 - b^4 + a^2 c^2 + b^2 c^2 - c^4 = \\ & = 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = \\ & = (a + b + c) \cdot (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) = \\ & = (a + b + c) \cdot (a + b + c - 2a)(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2c) = \\ & = 2p \cdot (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) = \\ & = 16p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \\ & = 16S_{\Delta ABC}^2 \end{aligned}$$

■

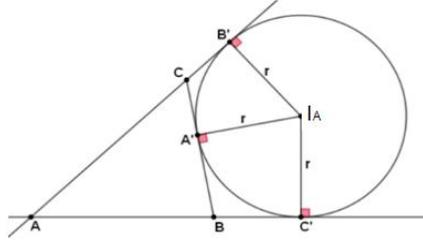
4.6 Coordenadas Baricêntricas do Ex-Incentros

Proposição 4.7: Sejam ΔABC um triângulo e a, b e c as medidas euclidianas, respectivamente, dos lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ e \overline{AB} . Então, as coordenadas baricêntricas do centro I_A da circunferência ex-inscrita ao triângulo ΔABC , em relação ao lado \overline{BC} , são dadas por:

$$I_A(-a : b : c)$$

Demonstração:

Figura 30 - Coordenadas Baricêntricas do Ex-Incentro do triângulo ΔABC .



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que $\alpha_{I_A} = S_{\Delta I_A BC} = -\frac{\overline{BC} \cdot r_a}{2} = -\frac{a \cdot r_a}{2}$ é negativo, pois I_A e A estão em lados opostos de \overline{BC} . Já para β_{I_A} e γ_{I_A} vem:

$$\beta_{I_A} = S_{\Delta I_A CA} = \frac{\overline{AC} \cdot r_a}{2} = \frac{b \cdot r_a}{2} \quad \text{e} \quad \gamma_{I_A} = S_{\Delta I_A AB} = \frac{\overline{AB} \cdot r_a}{2} = \frac{c \cdot r_a}{2}.$$

Portanto as coordenadas baricêntricas de I_A são:

$$I_A \left(-\frac{a \cdot r_a}{2} : \frac{b \cdot r_a}{2} : \frac{c \cdot r_a}{2} \right) = (-a : b : c).$$

Analogamente, $I_B = (a : -b : c)$ e $I_C = (a : b : -c)$.

■

4.7 Uma Propriedade do Triângulo Órtico

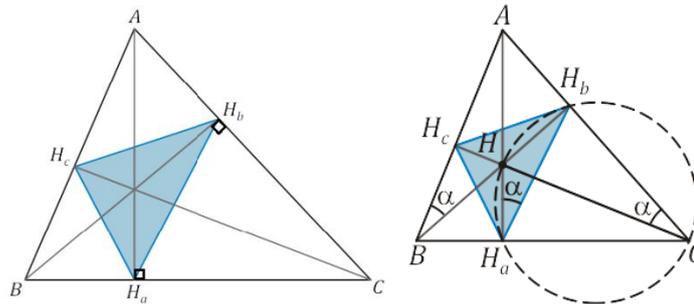
Dado um triângulo ΔABC não retângulo, defini-se como triângulo órtico o triângulo formado pelos pés das alturas do triângulo ΔABC .

Proposição 4.8: Em todo triângulo acutângulo, o seu ortocentro coincide com o incentro do triângulo órtico.

Demonstração:

Seja $\Delta H_a H_b H_c$ o triângulo órtico do triângulo ΔABC , conforme figura abaixo:

Figura 31 - Triângulo Órtico



Fonte: <https://www.obaricentrodamente.com/2015/06/triangulos-orticos.html>

O quadrilátero HH_aCH_b é inscritível, pois $H\widehat{H}_aC + H\widehat{H}_bC = 180^\circ$. Assim temos:

$$H\widehat{H}_aH_b = H\widehat{C}H_b = H_c\widehat{C}A = \alpha = 90^\circ - \hat{A}$$

De modo análogo, encontramos $H\widehat{H}_aB + H\widehat{H}_cB = 180^\circ$, sendo HH_aBH_c também inscritível, portanto:

$$H\widehat{H}_aH_c = H\widehat{B}H_c = H_b\widehat{B}A = \alpha = 90^\circ - \hat{A}$$

Provamos que $H\widehat{H}_aH_b = H\widehat{H}_aH_c$, ou seja, o segmento $\overline{HH_a}$ é bissetriz interna do ângulo $H_c\widehat{H}_aH_b$ do triângulo órtico. Da mesma forma obtemos $\overline{HH_b}$ e $\overline{HH_c}$ sendo as bissetrizes dos outros ângulos do triângulo órtico. Isso prova que o ortocentro do triângulo ΔABC é também o incentro do triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$.

■

Teorema 4.2: A área de um triângulo acutângulo ABC é dada por $p \cdot R$, em que p é o semiperímetro do triângulo órtico e R é o raio da circunferência circunscrita a ABC .

Antes precisamos provar o seguinte Lema

Lema: Se ΔABC é um triângulo acutângulo e ρ é o raio do círculo inscrito no triângulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$, então $\rho = 2R \cos A \cos B \cos C$.

Demonstração do Lema:

$$H_b(S_{H_bCB} : S_{H_bCA} : S_{BH_bA}) = (S_{H_bCB} : 0 : S_{BH_bA}) = (\overline{H_bC} : 0 : \overline{H_bA}) = \left(0 : \frac{\overline{H_bC}}{AC} : \frac{\overline{H_bA}}{AC}\right)$$

$$H_b\left(\frac{a \cos C}{b} : 0 : \frac{c \cos A}{b}\right) .$$

$$H_c(S_{H_cBC} : S_{H_cAC} : S_{AH_cB}) = (S_{H_cBC} : S_{H_cAC} : 0) = (\overline{H_cB} : \overline{H_cA} : 0) = \left(\frac{\overline{H_cB}}{AB} : \frac{\overline{H_cA}}{AB} : 0\right)$$

$$H_c\left(\frac{a \cos B}{c} : \frac{b \cos A}{c} : 0\right) .$$

Logo,

$$\frac{S_{\Delta H_a H_b H_c}}{S_{\Delta ABC}} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{a \cos C}{b} & \frac{a \cos B}{c} \\ \frac{b \cos C}{a} & 0 & \frac{b \cos A}{c} \\ \frac{c \cos B}{a} & \frac{c \cos A}{b} & 0 \end{vmatrix} = 2 \cos A \cos B \cos C$$

Pelo lema visto acima, encontramos:

$$\frac{S_{\Delta H_a H_b H_c}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r}{R}$$

Ou seja, $S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta H_a H_b H_c}}{r} \cdot R$. Sendo $S_{\Delta H_a H_b H_c} = p \cdot r$, concluímos portanto que

$$S_{\Delta ABC} = p \cdot R .$$

■

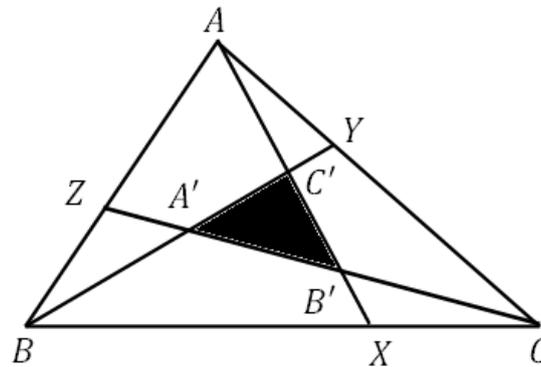
4.8 Uma aplicação do segundo teorema de Routh

Dado um triângulo ΔABC , suas cevianas \overline{AX} , \overline{BY} e \overline{CZ} determinam um triângulo interno $\Delta A'B'C'$ e dividem os lados opostos na razão de 2:1, prove que:

$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{7}$$

Prova:

Figura 33 - Aplicação do segundo Teorema de Routh



Fonte: elaborada pelo autor.

$$x = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 2 ; \quad y = \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 2 ; \quad z = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 2$$

Logo:

$$A'(1:z:xz) = (1:2:4) ; \quad B'(xy:1:x) = (4:1:2) ; \quad C'(y:yz:1) = (2:4:1)$$

Assim:

$$S_{\Delta A'B'C'} = \left[\frac{(xyz - 1)^2}{(xy + x + 1) \cdot (yz + y + 1) \cdot (zx + z + 1)} \right] \cdot S_{\Delta ABC}$$

$$S_{\Delta A'B'C'} = \left[\frac{(2 \cdot 2 \cdot 2 - 1)^2}{(2 \cdot 2 + 2 + 1) \cdot (2 \cdot 2 + 2 + 1) \cdot (2 \cdot 2 + 2 + 1)} \right] \cdot S_{\Delta ABC}$$

Portanto:

$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{7}$$

■

4.9 O problema dos três vasos. (RPM – 13)

Uma aplicação das coordenadas baricêntricas bem simples e bastante curiosa é o problema dos três vasos, cujo enunciado é o seguinte:

Dois beduínos encontram no deserto um vaso de 10 litros, cheio de água, e mais dois vasos de 3 e 7 litros, respectivamente, vazios. Como dividir igualmente a água entre os dois, usando somente os vasos como medidas?

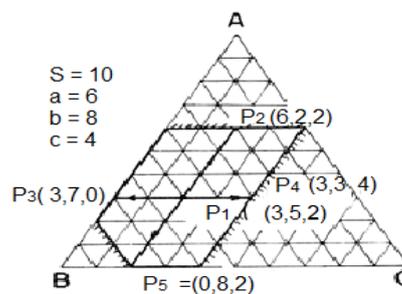
Solução:

Considere três vasos $V_1; V_2$ e V_3 de capacidades, respectivamente, a, b e c litros, contendo, respectivamente, x, y e z litros de água, com a, b, c, x, y, z números inteiros positivos.

Seja $(x:y:z)$ uma terna de coordenadas baricêntricas relativamente a um triângulo equilátero de altura $S = x + y + z$. Se $x \leq a, y \leq b$ e $z \leq c$, ao darmos as capacidades dos três vasos, estamos delimitando uma região bem definida de uma malha triangular. Veja o caso abaixo, onde:

$$S = 10; a = 6; b = 8; c = 4$$

Figura 34 - Malha Triangular



Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/13/8.htm>

A figura acima ilustra um caso típico. O ponto P_1 corresponde ao caso em que o vaso, V_1 , contém 3 litros de água, o segundo, V_2 , 5 litros e o terceiro, V_3 , 2 litros.

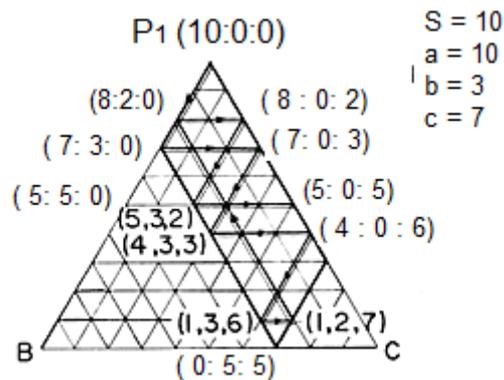
A operação de despejar a água de um vaso para outro, até encher o segundo ou esvaziar o primeiro, corresponde a deslocar-se sobre a malha até atingir um dos lados da região. Por exemplo, o percurso $P_1(3:5:2) \rightarrow P_2(6:2:2)$ corresponde a verter líquido do segundo vaso no primeiro, até encher este. O percurso $P_1 \rightarrow P_3$ corresponde a verter líquido do terceiro vaso no segundo, até esvaziar aquele. O percurso $P_1 \rightarrow P_5$ corresponde a transferir líquido do primeiro vaso para o segundo até esvaziar o primeiro (e encher o segundo) analogamente $P_1 \rightarrow P_4$ corresponde a transferir o líquido do segundo para o terceiro, até encher este último.

Já a próxima figura mostra uma possível solução para o problema dos beduínos que pretendiam dividir 10 litros de água em duas partes iguais, dispondo de vasos de 10, 3 e 7 litros. No nosso modelo, eles estavam no ponto $P_1(10:0:0)$ e pretendiam atingir um ponto com duas coordenadas iguais a 5. Na região $y \leq 3, z \leq$

7, eles podem chegar ao ponto (5:0:5) pelo percurso indicado pelas setas e linhas duplas que se encontram na figura abaixo, o que corresponde às seguintes operações com o líquido:

- Encher o vaso V_2 com líquido do vaso V_1
- Passar o líquido do vaso V_2 para o vaso V_3 ;
- encher o vaso V_2 com o líquido do vaso V_1 ;
- passar o líquido do vaso V_2 para o vaso V_3 ;
- encher o vaso V_2 com o líquido do vaso V_1 ;
- encher o vaso V_3 com o líquido do vaso V_2 ;
- passar o líquido do vaso V_3 para o vaso V_1 ;
- passar o líquido do vaso V_2 para o vaso V_3 ;
- encher o vaso V_2 com o líquido do vaso V_1 ;
- passar o líquido do vaso V_2 para o vaso V_3 ;

Figura 35 - Solução do problema dos três vasos na malha triangular.



Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/13/8.htm>

5 CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi expor o conceito de coordenadas baricêntricas e algumas das suas propriedades, além da aplicação desta em alguns problemas de geometria. Além disso, apresentamos as coordenadas baricêntricas de alguns pontos notáveis do triângulo como: baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro.

Apesar do conteúdo que foi motivo de estudo deste trabalho já ser ministrado em Olimpíadas de Matemática no nível 2, o assunto coordenadas baricêntricas não está inserido nos parâmetros curriculares nacionais de Matemática — PCN's nem nas diretrizes curriculares nacionais — DCN's. Porém, os pré-requisitos que são oriundos da geometria euclidiana e geometria analítica, muitas vezes já são vistas no ensino médio, por isso é compreensível que poderia ser ministrado a partir da segunda série do ensino básico.

Presumimos que este trabalho sirva de contribuição para discentes, docentes e amantes da geometria que procuram aprofundar os seus conhecimentos, visto que as coordenadas baricêntricas constituem mais uma técnica que permite solucionar problemas de geometria de forma simples e elegante. Para os mais curiosos, observamos que as coordenadas baricêntricas tem uma grande importância para a computação gráfica (TAVARES, 2022), onde são utilizadas, por exemplo, para dar movimento a desenhos animados através de uma malha semelhante aquela apresentada no problema dos três vasos.

REFERÊNCIAS

AUTODESK MESHMIXER. **Prosthetics and Orthotics**. 2020. Disponível em: <https://www.meshmixer.com/health.html>. Acesso em: 21 fev. 2022.

BORTOLOSSI, H. J.; FIGUEIREDO, J. H. O. **Coordenadas Baricêntricas: Uma Introdução com Ênfase na Geometria Moderna do Triângulo**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, 2017. Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2017/cms/cms-coordenadas-baricentricas.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 1985.

FIGUEIREDO, J. H. O. **Usando Coordenadas Baricêntricas para Estudar a Geometria do Triângulo**. 2008. 56F. Dissertação (Especialização em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.

FIGUEIREDO, Luiz Henrique de; CARVALHO, Paulo C.P. de. **Introdução à Geometria Computacional**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura, 1991. 1 v. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/18_CBM_91_06.pdf. Acesso em: 05 maio 2023.

GIRÃO, F. V.; CARNEIRO, E. A. S. Centro de Massa e Aplicações à Geometria. **Revista Eureka**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 21, p. 29–37, 2005.

KILHIAN, K. **Fórmulas para a área de um triângulo**. O Baricentro da Mente, 2015. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2015/09/formulas-para-area-deum-triangulo.html>. Acessado em: 21 fev. 2022.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Espaço**. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel. **Geometria I**. 5. ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 2018. 1 v.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel. **Geometria II**. 4. ed. Fortaleza: Vestseller, 2008. 2 v.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática)

PITOMBEIRA, João Bosco (ed.). O problema dos três vasos. **Rpm**, Rio de Janeiro, v. 13, Semestral. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/13/8.htm>. Acesso em: 05 maio 2023.

RIBEIRO, Tiago Caúla. **Determinantes como áreas: transformações e determinantes**. 2022. 1 v. - Curso de Matemática, Obmep, Portal da Matemática, Fortaleza, 2022. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br>. Acesso em: 09 abr. 2023.

ROCHA, J. C. **Coordenadas baricêntricas**. 2018. 89f. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

TAVARES, Daniel Carvalho. **O uso de coordenadas baricêntricas com algumas aplicações reais**. 2022. 84f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2022.