UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAFAEL FERREIRA MENDONÇA

OS NÚMEROS METÁLICOS: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA

FORTALEZA – CEARÁ

2023

RAFAEL FERREIRA MENDONÇA

OS NÚMEROS METÁLICOS: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Área de concentração: ensino matemática.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Brandão de Menezes

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Mendonca, Rafael Ferreira.
Os números metálicos: uma revisão sistemática da literatura [recurso eletrônico] / Rafael Ferreira Mendonca. - 2023.
86 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Daniel Brandão de Menezes.
1. números metálicos. 2. revisão sistemática. 3. número de ouro.. I. Título.

RAFAEL FERREIRA MENDONÇA

OS NÚMEROS METÁLICOS: UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Área de concentração: ensino matemática.

Aprovado em: 5 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Daniel Brandão de Menezes

Prof. Dr. Daniel Brandão de Menezes (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

maria josé costa santos

Profª. Dra. Maria José Costa Santos
Universidade Federal do Ceará – UFC

Profª. Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Tiago Caúla Ribeiro

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Ao meu pai, José Arimatéia Mendonça, minha esposa, Cecilia Duarte Paiva e minha filha, Isabela Duarte Mendonça.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por toda sua bondade e pela paciência que tem me dado para suportar momentos que testam nossa sanidade.

À toda minha família. Em especial, meu pai, José Arimatéia Mendonça que, com toda sua simplicidade e sem ter noção da importância, se orgulhar por ter um filho mestre.

À minha esposa, Cecília Duarte Paiva, por existir em minha vida!

À minha amada filha, Isabela Duarte Mendonça, por compreender os meus momentos de isolamento que foram necessários.

Ao meu amigo e professor Daniel Brandão, por aceitar o convite para me orientar neste trabalho, por todas as dicas e principalmente, pela paciência.

Aos meus colegas de turma Rafael Abreu, Artur Teixeira, Danilo Magalhães, Felipe Guimarães, Mardney Castro, Sergio Augusto, Tiago Nobre e Wellington Sampaio, por todos os momentos e risadas. São todos guerreiros!

À minha cunhada, Luana Duarte Paiva, que me lembrou da inscrição desse mestrado dias antes de findá-la e por todo seu carinho.

Um agradecimento especial vai para minha mãe, Maria Ferreira Mendonça, que segue viva em cada sonho que realizo!

“As raízes do estudo são amargas, mas seus frutos são doces”

(Aristóteles)

RESUMO

A família dos números metálicos surgiu na literatura em 1997 e até o presente momento, da matemática básica ao nível superior, pouco se fala sobre a temática. Embora sua definição seja acessível, essa família de números possui relações com diversos ramos da Matemática, desde simples sequências até à complexa função Zeta de Riemann e tem como principal membro o número de ouro, um conceito presente na matemática há séculos. Nesse contexto, o objetivo geral desta pesquisa é investigar o desenvolvimento do estudo dos números metálicos no meio acadêmico. Para alcançar esse objetivo, realizou-se uma Revisão Sistemática da Literatura, metodologia que visa organizar o conhecimento de determinado assunto com rigor e de maneira categórica. Após uma extensa pesquisa em bancos de dados de pesquisa acadêmica, em universidades e em revistas ligadas à Matemática, abrangendo o período de 1997 ao ano de apresentação desse trabalho, foram analisadas as obras encontradas sobre a temática em questão, onde obteve-se como resultados propriedades dos números metálicos, tanto de natureza aritmética quanto geométrica. Além disso, foi possível identificar a relação dessa família de números com ramos da matemática ligados à Matemática Discreta, Teoria dos Números e Geometria, quando se apresentam em conteúdos como sequências, relações de recorrência, frações contínuas e construções geométricas. Vale ressaltar o significativo potencial dos números metálicos quando associados ao ensino de diversos conteúdos na educação básica, como os números irracionais, função quadrática e geometria elementar. Dessa forma, a organização desses dados através desta revisão facilitará futuras pesquisas relativa à temática e se molda como uma ferramenta facilitadora para o avanço do conhecimento do estudo sobre os números metálicos.

Palavras-chave: números metálicos; revisão sistemática; número de ouro.

ABSTRACT

The family of metallic means appeared in the literature in 1997 and until the present moment, from basic mathematics to higher education, little is said about the subject. Although its definition is accessible, this family of numbers has relationships with several branches of Mathematics, from simple sequences to the complex Riemann Zeta function and has as its main member the golden number, a concept present in mathematics for centuries. In this context, the general objective of this research is to investigate the development of the study of metallic numbers in academia. To achieve this objective, a Systematic Literature Review was carried out, a methodology that aims to organize the knowledge of a given subject rigorously and categorically. After an extensive research in academic research databases, in universities and in magazines related to Mathematics, covering the period from 1997 to the year of presentation of this work, the works found on the theme in question were analyzed, where it was obtained as results properties of metallic means, both arithmetic and geometric in nature. In addition, it was possible to identify the relationship of this family of numbers with branches of mathematics linked to Discrete Mathematics, Number Theory and Geometry, when they are presented in contents such as sequences, recurrence relations, continued fractions and geometric constructions. It is worth mentioning the significant potential of metallic numbers when associated with the teaching of different contents in basic education, such as irrational numbers, quadratic function and elementary geometry. In this way, the organization of these data through this review will facilitate future research on the subject and is shaped as a facilitating tool for the advancement of knowledge in the study of metallic means.

Keywords: metallic means; systematic review; golden mean.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na Matemática, quando se estuda alguns números, encontram-se relações importantes e bem curiosas. Alguns já amplamente conhecidos e estudados, como os pares, os ímpares, os primos ou mesmo os números complexos, outros nem tão conhecidos, em particular, na teoria dos números, nos deparamos com algumas categorias de números com características peculiares que os diferenciam da maioria. Nas palavras de Bentley (2010, p. 38), "esses números são especiais porque têm propriedades raras. Como apenas alguns números possuem essas propriedades, novos e estranhos padrões de números emergem". Podem-se citar como exemplos os *números amigos* [1], os *perfeitos*[2], os números de Fibonacci [3], os *primos gêmeos* [4] e o objeto deste trabalho, os números metálicos.

Um número especialmente estudado na matemática é o número de ouro, que advém de um problema que chamava a atenção dos matemáticos gregos desde os pitagóricos, a secção áurea. Em Eves (2004, p. 125), "diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão ou secção áurea, se o mais longo dos segmentos é a média geométrica entre o menor e o segmento todo". Em Livio (2011, p. 14), sobre a secção áurea, encontra-se a definição, "diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor", problema atribuído a Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C. Essa proporção é conhecida como Razão Áurea ou Razão de Ouro, que está intrinsecamente relacionada aos números de Fibonacci e ao número de ouro, representado pela letra grega Φ(Fi), um número irracional cujo valor aproximado é 1,6180339887498... e que desde sua descoberta intriga matemáticos e adeptos, conforme Bentley (2010, p. 72) "este número está na base de tudo que é belo e agradável aos olhos". Sobre a secção áurea, Oliveira (2022b, p.164), cita ainda que "Essa razão proporciona harmonia e beleza e aparece na natureza e em diversas áreas do conhecimento humano, como Engenharia,

---

[1] Dois números são ditos amigos quando a soma dos divisores positivos de um é igual ao outro e vice-versa.

[2] Números perfeitos são aqueles que são iguais a soma de seus divisores positivos, com exceção do próprio número.

[3] Um número de Fibonacci é um elemento da recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ com $F_0 = F_1 = 1$.

[4] Dois números são chamados de primos gêmeos, quando são ímpares, consecutivos e ambos são primos.

Arquitetura, Design, Música, Arte Renascentista e Cinema". Além de ser o mais conhecido dentre os números metálicos.

No artigo intitulado "*La familia de numeros metalicos*" a professora e matemática argentina Vera Winitzky de Spinadel (1929 – 2017) apresentou uma série de propriedades sobre um grupo de números e os batizou de números metálicos, em sua obra ela ressalta: "Neste trabalho vamos introduzir uma nova família de números irracionais quadráticos positivos. Se chama de família dos números metálicos e seu membro mais importante é o número áureo Φ [5]" (SPINADEL, 2003, p. 189, tradução nossa).

Spinadel foi a primeira mulher a conquistar o título de doutora em Matemática pela Faculdade de Ciências Exatas e Naturais de Buenos Aires, em sua obra, colocou o número de ouro em uma categoria de números que gozam de propriedades aritméticas e geométricas que serão mostradas ao longo deste trabalho, em relação ao número de ouro, Spinadel ainda comenta (2003, p. 189, tradução nossa):

> Entre seus parentes, podemos citar o número de prata, número de bronze, número de cobre, número de níquel etc. Os membros dessa família desfrutam de propriedades matemáticas comuns que são fundamentais na pesquisa atual sobre a estabilidade de macro e microssistemas físicos, desde a estrutura interna do DNA até as galáxias astronômicas.[6]

Será mostrado também que os números metálicos se relacionam com diversos ramos da Matemática, em particular, é sabido que a razão entre dois elementos consecutivos da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) não é constante, mas o limite desse quociente converge para o número de ouro, conforme Bentley (2010, p.76) "A sequência de Fibonacci age como uma luz que ilumina constantemente uma parte cada vez maior de fi". Mais um motivo pelo qual o número de ouro é tão intrigante.

Assim como o número de ouro apresenta relações com a geometria e com as sequências, podem-se ser estabelecidas também relações entre os números metálicos e demais ramos da matemática, o que justifica e motiva esta pesquisa.

---

[5] En este trabajo vamos a introducir una nueva familia de numeros irracionales cuadráticos positivos. Se llama familia de numeros metálicos y su miembro más importante es el número de oro φ.

[6] Entre sus parientes, podemos mencionar el número de plata, el número de bronce, el número de cobre, el número de nÌquel, etc. Los miembros de dicha familia gozan de propiedades matemáticas comunes que son fundamentales en la investigación actual sobre la estabilidad de macro y microsistemas fisicos, desde la estructura interna del ADN hasta las galaxias astronômicas.

Este trabalho se propõe em apresentar como metodologia uma Revisão Sistemática da Literatura (RSL) sobre a família dos números metálicos e para atender ao objetivo geral, estabelecemos a seguinte pergunta diretriz: como se encontra o desenvolvimento do estudo dos números metálicos no meio acadêmico?

Como forma de conduzir essa pesquisa mais detalhadamente, pretende-se chegar aos seguintes objetivos específicos:

a) Analisar algumas propriedades dos números metálicos;
b) Examinar relações apresentadas entre números metálicos e outros objetos do conhecimento da matemática;
c) Compreender as características dos números metálicos enquanto números irracionais.

A revisão sistemática é um método que busca analisar de maneira categórica um grupo de documentos, baseando-se em uma questão clara e visando atender aos objetivos da pesquisa. Como benefícios em relação à escolha pela revisão sistemática, Mendes e Pereira (2010, p. 199) citam: “a apresentação de forma clara e sintetizada dos procedimentos metodológicos seguidos na pesquisa, a sistematização das etapas e a utilização de critérios bem definidos no seu desenvolvimento”. Assim, busca-se com esta pesquisa evidenciar o tema dos números metálicos, efetuando a análise de trabalhos encontrados em plataformas de pesquisa acadêmica, bases de dados de Universidades e periódicos relacionados à Matemática, considerando categorias predeterminadas.

Apresentado os objetivos desta pesquisa e o método a ser utilizado, prossegue-se com este trabalho em cinco seções. Na seção dois são mostrados conteúdos essenciais para a compreensão da relação dos números metálicos com os demais ramos da Matemática e na seguinte, definimos os números metálicos e mostramos algumas de suas propriedades e proposições. Na seção quatro, detalhamos uma aula direcionada para o ensino dos números irracionais, voltada para a educação básica, utilizando os números metálicos. O percurso metodológico utilizado nesta pesquisa, abordando os passos definidos para essa revisão sistemática, visando atender aos objetivos específicos, desde o processo de escolha dos materiais às análises de cada obra estão destacados na seção cinco. Na sexta, tecemos nossas considerações finais.

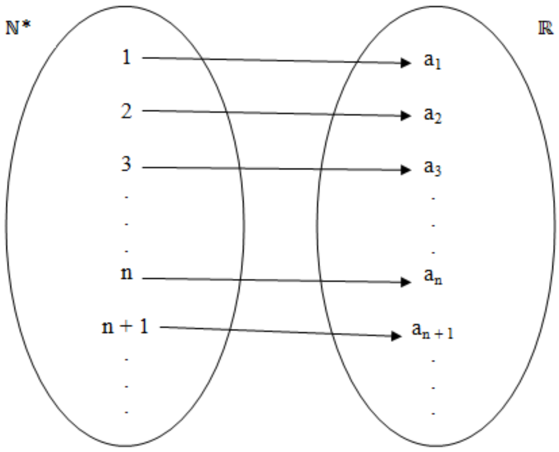
2 RECORRÊNCIAS E FRAÇÕES CONTÍNUAS

Atendendo ao objetivo específico de examinar as relações apresentadas entre números metálicos e outros objetos do conhecimento da matemática, verificou-se que os números metálicos se relacionam com a matemática em diversos contextos. Para verificar isso, apresenta-se nesta seção alguns conteúdos que, de acordo com os trabalhos analisados, estão associados aos números metálicos, iniciando com sequências, seguindo com as recorrências, em particular as recorrências recursivas lineares de segunda ordem, frações contínuas simples e finalizamos a seção falando um pouco mais sobre o número de ouro.

2.1 Sequências e relação de recorrência

Uma sequência numérica ou sucessão de números reais é uma função de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$ onde cada número natural n é associado a um número real a_n (Leia: *a* índice *n*), definido como *enésimo* termo da sequência (IEZZI & HAZZAN, 1993). Se limitarmos o domínio $\mathbb{N}^*$ a certo n, dizemos que a sequência é finita, do contrário, teremos uma sequência infinita, conforme verifica-se na figura 1.

Figura 1 - Sequências



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma sequência é representada por $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ se ela for finita e $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$ se ela for infinita, onde cada a_n é o valor do termo e n representa a posição do termo na sequência.

Muitas sequências são utilizadas cotidianamente no ensino da Matemática desde a educação básica ao ensino superior, como a dos números pares, dos ímpares ou a dos primos, outras aparecem mais especificamente em certos contextos, como a sequência de Lucas[7], a de Catalan[8] ou a famosa sequência de Fibonacci. Algumas podem ser obtidas recursivamente, ou seja, os seus termos podem ser calculados por meio de uma recorrência, como verifica-se no seguinte exemplo.

A sequência x_n dos números ímpares é obtida através da recorrência

$$x_{n+1} = x_n + 2.$$

Considerando o termo inicial $x_0 = 1$.

Já a sequência de Fibonacci (F_n) de elementos 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... Pode ser definida, estabelecendo $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, pela recorrência

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Pois cada termo é a soma de seus dois antecessores imediatos. Ressalta-se ainda que, segundo Lima *et al*. (2006, p. 65), “para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento dos primeiros termos”. Por isso definiu-se os termos $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ para se determinar os demais termos na sequência de Fibonacci.

No estudo das recorrências, faz-se necessário encontrar uma expressão que determine qualquer elemento em função de sua posição na sequência, a essa expressão dá-se o nome de termo geral. No primeiro exemplo, podemos representar o termo geral da sequência dos ímpares por $a_n = 2n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$. Na seção 2.4 será determinado o termo geral da recorrência que gera a sequência de Fibonacci.

[7] François Édouard Anatole Lucas, matemático francês do século XIX, entusiasta e estudioso das sequências generalizadas de Fibonacci. A sequência de Lucas é 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

[8] Eugene Charles Catalan, matemático belga do século XIX, o estudo de sua sequência (1, 2, 5, 14, 42, ...) surge em áreas como Geometria, Análise e Combinatória.

Para continuar o estudo das recorrências que interessam para este trabalho e para compreender a relação destas com os números metálicos precisamos das seguintes definições, retiradas de Morgado *et. al*. (2006).

a) Uma recorrência é dita homogênea quando cada termo depende somente dos termos anteriores, ou seja, não possui termos independentes de x_n.

b) Uma recorrência é dita de primeira ordem se cada termo é obtido através de seu antecessor imediato. Se na recorrência cada termo for obtido através de seus dois antecessores imediatos, a sequência é dita de segunda ordem.

c) Uma recorrência que expressa x_{n+1} em função de x_n é dita linear se e somente se, está função for do primeiro grau.

Considerando as definições acima, será tratado na próxima subseção sobre as recorrências lineares homogêneas de segunda ordem.

2.2 Recorrências lineares de segunda ordem

Para encontrar o termo geral de recorrências lineares homogêneas de segunda ordem do tipo

$$x_{n+2} + \ px_{n+1} + \ qx_n = 0$$

com $q \neq 0$, associaremos a equação de recorrência à equação $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica e recorreremos à dois teoremas, que nos ajudarão a compreender a relação dos números metálicos com as relações de recorrência. O primeiro, retirado de Morgado e Carvalho (2013, p. 83), fala sobre a solução geral de recorrências de segunda ordem.

Teorema: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + \ px_{n+1} + \ qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração: Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ em $x_{n+2} + \ px_{n+1} + \ qx_n = 0$, obtemos,

$$C_1r_1^{n+2} + C_2r_2^{n+2} + p(C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}) + q(C_1r_1^n + C_2r_2^n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1r_1^n(0) + C_2r_2^n(0) = 0.$$

Logo, $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ é solução da recorrênia $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

■

O segundo, Morgado e Carvalho (2013, p. 84), fala sobre as recorrências lineares de segunda ordem cuja equação característica possui raízes distintas.

Teorema: Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.

Demonstração: Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinando as constantes C_1 e C_2 de forma que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1r_1 + C_2r_2 = y_1 \\ C_1r_1^2 + C_2r_2^2 = y_2 \end{cases}.$$

Encontramos

$$C_1 = \frac{r_2^2y_1 - r_2y_2}{r_1r_2(r_2 - r_1)} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{r_1y_2 - r_1^2y_1}{r_1r_2(r_2 - r_1)}.$$

Portanto as constantes C_1 e C_2 ficam determinadas, pois é dado que $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.
Afirmamos agora que $y_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, o que provará o teorema.
Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1r_1^n + C_2r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Substituindo z_n na recorrência temos,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} - C_1r_1^{n+2} + C_2r_2^{n+2}) + p(y_{n+1} - C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1}) + q(y_n - C_1r_1^n + C_2r_2^n) =$$
$$= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + C_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q).$$

Como y_n é solução da recorrência e r_1 e r_2 são ráizes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, concluí-se então que $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.
Além disso, como $C_1r_1 + C_2r_2 = y_1$ e $C_1r_1^2 + C_2r_2^2 = y_2$, segue que $z_1 = z_2 = 0$ e ainda, como $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$, então $z_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Um conteúdo que também apresenta forte relação com os números metálicos é o das frações contínuas. Na próxima subseção abordaremos esse conteúdo, com foco nas frações contínuas simples.

2.3 Frações contínuas

Os trabalhos analisados também abordaram o tema das frações contínuas em relação aos números metálicos. Neste contexto, será fornecida a definição desse conceito e apresentados exemplos para uma melhor compreensão de suas relações com os números metálicos.

Definição: Uma fração contínua simples é uma expressão da forma

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_{3+} \ddots}}}$$

Também representada por $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, com $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $(a_1, a_2, a_3,...) \in \mathbb{N}^*$, chamados de quocientes parciais. Em Araújo (2015, p. 3) é dito que "Se a fração contínua possui uma quantidade finita de quocientes parciais, ela é chamada de fração contínua finita. Se a quantidade de quocientes parciais é infinita, ela é chamada de fração contínua infinita". Como verifica-se no exemplo a seguir.

Para escrever o número $\frac{65}{22}$ na forma de fração contínua, efetua-se a divisão euclidiana. Como 65 dividido para 22 resulta num quociente igual a 2 e resto 21, tem-se

$$\frac{65}{22} = 2 + \frac{21}{22}.$$

Reescrevendo a fração $\frac{21}{22}$ obtemos

$$\frac{65}{22} = 2 + \frac{1}{\frac{22}{21}}.$$

E repetindo o processo, obtemos

$$\frac{65}{22} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{21}}.$$

Ou ainda, $\frac{65}{22} = [2; 1, 21]$, representa uma fração contínua finita.

O processo da divisão euclidiana garante que todo número racional pode ser escrito na forma de fração contínua simples. Por outro lado, conforme Castelblanco (2015, p. 6) “uma fração contínua simples infinita representa sempre um número irracional”. Por exemplo, o número irracional π, cujo valor aproximado é 3, 141592..., pode ser escrito através de uma fração contínua da seguinte maneira.

Fazendo

$$\pi = 3 + (\pi - 3) = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\pi - 3}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}141592\ldots}} =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0{,}141592\ldots}} = 3 + \frac{1}{7{,}0625133\ldots}.$$

Repetindo o processo indefinidas vezes obtemos

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Ou ainda, $\pi = [3;\ 7, 15, 1, \ldots]$, que representa uma fração contínua simples infinita.

2.4 O número de ouro (Φ)

O número de ouro é a solução positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ e desde que foi premeditado nos trabalhos de Euclides, sua aparição atrai a atenção de muitos estudiosos e matemáticos, conforme cita Livio (2011, p. 18) “a atratividade do número áureo origina-se, antes de mais nada, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera”. Apresentamos aqui alguns exemplos.

Para encontrar o termo geral da sequência de Fibonacci, definida pela recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, sendo n a posição do elemento da sequência, com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$, recorremos aos teoremas demonstrados na seção 2.2. Na equação de recorrência fazemos $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ e, faz-se a associação da equação de recorrência à equação característica $r^2 - r - 1 = 0$, daí teremos como raízes os valores $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, como se trata de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem suas soluções são da forma

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

E para $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ temos o sistema,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Cujas soluções são $C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$, portanto, nas condições do exemplo dado, o termo geral da recorrência é

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

E, simplificando, obtém-se

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

De forma que $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a raiz positiva da equação característica da recorrência definida pela sequência de Fibonacci, é o número de ouro Φ(Fi), e seu valor é o número irracional 1, 61803339887...

Conforme comentado na introdução desse trabalho, será utilizado agora como exemplo o problema da secção áurea. Na figura 2 tem-se indicado os seguimentos $\overline{AC} = 1$ e $\overline{CB} = x$ e aplicaremos a proporção da média e extrema razão.

Figura 2 – Proporção áurea

Fonte: Elaborada pelo autor

Como $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$, temos que

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

A constatação é de que a secção áurea está relacionada à mesma equação quadrática presente na sequência de Fibonacci. Isso evidencia que o número de ouro, considerado o mais relevante dos números metálicos, já era conhecido desde o livro "Elementos" de Euclides, por volta de 300 a.C.

2.5 A solução da equação $x^2 - x - 1 = 0$

Já vimos que a solução positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ resulta no número de ouro. Porém, existem outras situações em que a mesma equação aparece. Vejamos.

Considerando, com $x \neq 0$, a equação na forma

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{x},$$

e substituindo o valor de x na própria equação teremos

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Repetindo o processo indefinidas vezes obtemos a fração contínua simples

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Que se aproxima mais do número de ouro, como ilustrado no quadro 1, a cada iteração.

Quadro 1 - Frações contínuas

Iterações	**Valores**
$\boldsymbol{x_1}$	$\mathbf{1 + \frac{1}{1} = 2}$
$\boldsymbol{x_2}$	$\mathbf{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = 1{,}5}$
$\boldsymbol{x_3}$	$\mathbf{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = 1{,}666}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como outro exemplo, considere a expressão de radicais infinitos

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}}$$

Uma maneira de encontrar um valor aproximado para tal expressão é trabalhando como uma equação irracional, fazendo

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\ldots}}}}}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\ldots}}}}}$$

Mas, com exceção do número 1 isolado, o segundo membro da equação é exatamente o que chamamos de x inicialmente, o que nos dá

$$x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Portanto, o valor que representa a expressão inicial é precisamente o número de ouro, já que é representada pela mesma equação quadrática que o origina.

Na próxima seção, será apresentada a definição dos números metálicos e mostrado de que maneiras esses números se relacionam com os conteúdos vistos até aqui.

3 OS NÚMEROS METÁLICOS

Os números metálicos tiveram seu estudo introduzido no trabalho da autora Vera Martha Winitzky de Spinadel em 1997, quando já relacionava os números metálicos às sequências numéricas, recorrências e às frações contínuas. Desde então, não só Spinadel como também autores de diversos países se debruçaram no estudo desses números. Será apresentada agora a definição e destacadas algumas propriedades acerca dos números metálicos.

Definição: Os números metálicos são as raízes positivas das equações quadráticas $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, com p e $q \in \mathbb{N}$, e denotamos tal raiz por $\varphi_{p,q}$ (Lê-se "fi de p, q").

Na seção anterior falou-se sobre o número de ouro, o mais conhecido da família dos números metálicos, equivalente a calcularmos a solução dessa equação para $p = q = 1$, ou ainda, $\varphi_{1,1}$. Para ser dada a continuidade e apresentado os outros números metálicos, primeiramente, será apresentada a proposição que garante que a equação geradora dos números metálicos possui apenas uma raiz positiva, demonstrada no artigo de Vinagre (2014) de maneira analítica. Para nossa demonstração utilizamos processos algébricos.

Proposição 1: A equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$ possui precisamente apenas uma raiz positiva.

Demonstração: Considerando a equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, completa-se os quadrados.

$$\varphi^2 - \frac{2\varphi p}{2} - q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\varphi - \frac{p}{2}\right)^2 - q - \frac{p^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(\varphi - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{4q + p^2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi - \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2 + 4q}{4}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2 + 4q}{4}\right)} \Rightarrow \varphi = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Como p e $q \in \mathbb{N}$, segue que o termo $\sqrt{p^2+4q} > 0$, e que $p^2 + 4q > p^2$, daí, temos

$$p^2 + 4q > p^2 \Rightarrow \sqrt{p^2+4q} > \sqrt{p^2} = p.$$

Portanto, $\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2} < 0$, $\forall \ p \ e \ q \in \mathbb{N}$.

E $\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ é a única raíz positiva de $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$.

■

Para os entusiastas do Cálculo Diferencial e Integral, podemos provar essa proposição também da seguinte maneira.

2ª Demonstração: Considerando a função $f(\varphi) = \varphi^2 - p\varphi - q$. Faremos o teste da primeira e segunda derivadas para estudar o gráfico de f. Conforme cita Muniz Neto (2015, p.192) “o estudo da primeira variação de f garante que os intervalos em que f é crescente (resp. decrescente) são os intervalos-solução da inequação $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$)”.

Calculando a primeira derivada teremos (Estudo do sinal da primeira derivada)

$$f'(\varphi) = 2\varphi - p.$$

Igualando a derivada a zero encontra-se o ponto crítico

$$f'(\varphi) = 2\varphi - p = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{p}{2}.$$

Portanto os valores de $f'(\varphi)$ têm sinal negativo para $\varphi < \frac{p}{2}$ e sinal positivo para $\varphi > \frac{p}{2}$. Ou seja, o estudo do sinal da primeira derivada garante que $\varphi = \frac{p}{2}$ é ponto mínimo absoluto de f, ou seja, a função f é decrescente em $\left]-\infty, \frac{p}{2}\right[$ e crescente no intervalo $\left]\frac{p}{2}, +\infty\right[$.

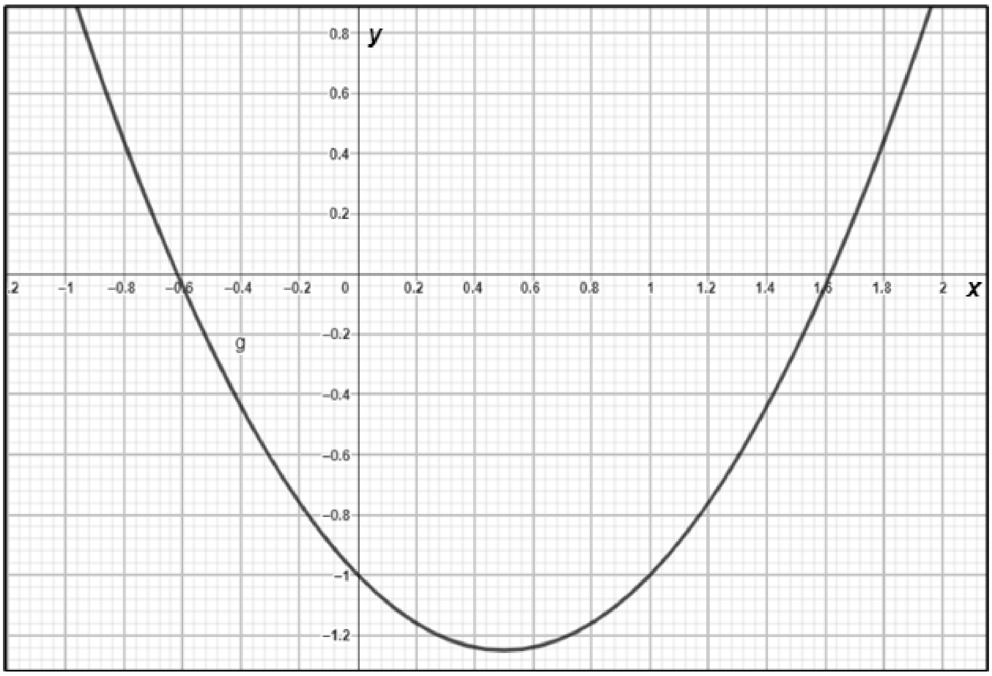
Muniz Neto (2015, p.192) cita ainda que: “o estudo da segunda variação de f garante que os intervalos em que f é estritamente convexa (resp. côncava) são os intervalos-solução da inequação $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$)”.

Calculando agora a segunda derivada de $f(\varphi) = \varphi^2 - p\varphi - q$, tem-se

$$f''(\varphi) = 2.$$

O que nos diz que f'' é positiva para todo φ, logo a função f é estritamente convexa. E ainda, o $\lim_{\varphi \to \pm\infty} f(\varphi) = \infty$, nos diz que a função cresce indefinidamente nos extremos e como $f(0) = -q$, tem-se que o gráfico de f cruza o eixo das abscissas duas vezes, uma vez no sentido negativo e a outra no sentido positivo, o que determina a raiz que queríamos encontrar. Podemos constatar como exemplo, na figura 3, no qual é considerado o gráfico de f para $p = q = 1$.

Figura 3 - Gráfico de função $f(\varphi) = \varphi^2 - p\varphi - q$, para $p = q = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se também pela figura 3 que o gráfico cruza o eixo das abscissas, no sentido positivo, nas imediações de 1, 618033..., o número de ouro.

3.1 Soluções da equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$

Viu-se que, variando os coeficientes p e q na equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$ e determinando sua raíz positiva, origina-se um único número metálico. Alguns deles recebem nomes de metais específicos, como o número de prata, quando $p = 2$ e $q = 1$ $(\varphi_{2,1})$, o número de bronze, quando $p = 3$ e $q = 1$ $(\varphi_{3,1})$, o de cobre, quando $p = 1$ e $q = 2$ $(\varphi_{1,2})$, dentre outros. Já definidos na atual literatura, conforme o quadro 2, temos os seguintes números metálicos.

Quadro 2 – Números metálicos

Nome	Equação	Valor	Valor aproximado
Número de ouro	$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1, 6180339887...
Número de prata	$\varphi^2 - 2\varphi - 1 = 0$	$1+\sqrt{2}$	2,4142135623...
Número de bronze	$\varphi^2 - 3\varphi - 1 = 0$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,3027756377...
Número de cobre	$\varphi^2 - \varphi - 2 = 0$	2	2
Número de níquel	$\varphi^2 - \varphi - 3 = 0$	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	2,3027756377...
Número de platina	$\varphi^2 - 2\varphi - 2 = 0$	$1+\sqrt{3}$	2,7320508075...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Verifica-se pelo quadro 2 que, dentre os números metálicos, aparecem aqueles que são naturais e outros que são conhecidos como irracionais quadráticos, por serem raiz de uma equação quadrática. A próxima proposição garante a inexistência de números metálicos racionais não naturais e sua demonstração pode ser encontrada nos trabalhos de Araújo (2015) e Huber (2019) no qual se estuda a paridade de p e da expressão $\sqrt{p^2 + 4p}$. Apresentaremos uma demonstração aplicando conceitos envolvendo polinômios.

Proposição 2: Todo número metálico é um irracional quadrático ou um natural superior a 1.

Demonstração: Vamos supor que $\beta = \frac{r}{s}$ seja raíz da equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, de forma que $\frac{r}{s}$ seja uma fração irredutível, racional não natural.

O teste das raízes racionais garante que o denominador s divide o coeficiente do termo de maior grau (HEFEZ & VILLELA, 2012), daí

$$s|1 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow \beta = r \in \mathbb{N}.$$

O que é um absurdo, pois supomos $\beta = \frac{r}{s}$ um racional não natural. Portanto, conclui-se que todo número metálico é um irracional quadrático. Concluímos a demonstração constatando pelo quadro 2 que o menor metálico natural é o número de cobre, $\varphi_{1,2} = 2$.

■

A proposição a seguir garante que os números metálicos naturais se apresentam conforme determinado padrão. Nos trabalhos de Vinagre (2014) e Araújo (2015) existe uma demonstração utilizando testagem, atribuindo valores para p e q. Aqui apresentamos uma demonstração utilizando indução matemática.

Proposição 3: Todo número metálico na forma $\varphi_{p,n(n+p)}$, sendo $q = n(n+p)$ com $p\ e\ n \in \mathbb{N}$, é um número natural.

Demonstração: Da equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, sabe-se que

$$\varphi_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

E para $q = n(n+p)$, tem-se

$$\varphi_{p,n(n+p)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4n(n+p)}}{2}.$$

Fixado o valor de p, aplicaremos indução sobre n.

Para $n = 1$, segue que

$$\varphi_{p,1+p} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4(1+p)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,1+p} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4 + 4p}}{2} = \frac{p + \sqrt{(p+2)^2}}{2} = \frac{p + p + 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,1+p} = 1 + p, \in \mathbb{N}.$$

A hipótese de indução é que

$$\varphi_{p,n(n+p)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4n(n+p)}}{2};\ n, p\ \in \mathbb{N}$$

é verdadeira, o que nos dá

$$\varphi_{p,n(n+p)} = n + p.$$

Considerando

$$\varphi_{p,n(n+p)} = p + n + 1 - 1$$

temos

$$\varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{2(p+n+1)}{2} = \frac{2p + 2n + 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + p + 2n + 2}{2} = \frac{p + p + 2n + 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{(p + 2 + 2n)^2}}{2} = \frac{p + \sqrt{[(p+2) + 2n]^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{[(p+2)^2 + 2(p+2)2n + (2n)^2]}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{[(p+2)^2 + 4pn + 8n + 4n^2]}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{[p^2 + 4p + 4 + 4pn + 8n + 4n^2]}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4n^2 + 4n + 4np + 4n + 4 + 4p}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4n(n + 1 + p) + 4(n + 1 + p)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + (4n + 4)(n + 1 + p)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{p,n(n+p)} + 1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4(n + 1)(n + 1 + p)}}{2} = \varphi_{p,(n+1)(n+1+p)}.$$

Como, por hipótese $\varphi_{p,n(n+p)} \in \mathbb{N}$, significa que para $n + 1$ a proposição se verifica, portanto pelo Teorema da indução matemática, a proposição é verdadeira para todo natural n.

■

Pode-se constatar o resultado da proposição 3 no exemplo a seguir.

Considerando $p = 1$ e $n = 5$, teremos $q = 5(5 + 1) = 30$, daí segue que a equação

$$\varphi^2 - \varphi - 30 = 0.$$

Tem como raiz positiva o número natural 6, logo, na condição dada, a equação gera o número metálico

$$\varphi_{1,5(5+1)} = \varphi_{1,30} = 6.$$

Outra maneira de apresentar a demonstração da proposição 3 é observando que, para a equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, com $q = n(n + p)$ e n e $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\varphi^2 - p\varphi - n(n + p) = 0$, que tem como raízes $n + p$ e $-n$, e como, por hipótese, n e $p \in \mathbb{N}$, então $n + p \in \mathbb{N}$.

Apresentada a definição dos números metálicos e algumas de suas principais propriedades, será mostrado agora como eles se relacionam com outros objetos do conhecimento da Matemática.

3.2 Relações de recorrência e os números metálicos

A relação dos números metálicos com as recorrências é obtida a partir da equação que os origina. Por se tratar de uma equação quadrática, podemos construir uma relação com as recorrências lineares de segunda ordem homogêneas. Na equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, para cada $p\ e\ q\ \in\ \mathbb{N}$, tem-se a equação característica de uma relação de recorrência, conforme citam Morgado e Carvalho (2013, p. 83), "a cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, [...], associaremos uma equação do segundo grau, chamada equação característica".

Na subseção 2.4 viu-se que a recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, onde $F_0 = F_1 = 1$, define a sequência de Fibonacci, tem $x^2 - x - 1 = 0$, como equação característica e que seu termo geral é dado por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Em sua equação, temos $p = q = 1$, no qual fica determinado $\varphi_{1,1}$, o número de ouro. Vejamos como se aplica isso para os demais números metálicos conforme verificado em Huber (2019).

3.2.1 Número de prata

O número de prata é a solução positiva da equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$ para $p = 2$ e $q = 1$. Considerando essa equação na forma

$$\varphi^2 - 2\varphi - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^2 = 2\varphi + 1$$

teremos a equação característica da recorrência

$$X_{n+2} = 2X_{n+1} + X_n.$$

Que, conforme visto na seção anterior, tem como termo geral

$$X_n = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

E nas condições iniciais de $X_o = X_1 = 1$, teremos a sequência

$$1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, \ldots$$

3.2.2 Número de bronze

O número de bronze é o $\varphi_{3,1} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, solução positiva da equação $\varphi^2 - 3\varphi - 1 = 0$, que é equação característica da recorrência $X_{n+2} = 3X_{n+1} + X_n$, no qual $p = 3$ e $q = 1$.

A recorrência tem como termo geral

$$X_n = \left(\frac{4\sqrt{13}-13}{13}\right)\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{4\sqrt{13}+13}{13}\right)\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

E para condições iniciais de $X_o = X_1 = 1$, tem-se a sequência

$$1, 1, 4, 13, 43, 142, 469, \ldots$$

3.2.3 Número de cobre

Para o número de cobre temos a equação $\varphi^2 - \varphi - 2 = 0$ sendo $p = 1$ e $q = 2$, que é o primeiro metálico natural, $\varphi_{1,2} = 2$.

A equação está relacionada à recorrência $X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n$ que tem como termo geral

$$X_n = \frac{3}{8}2^n - \frac{1}{8}2^n, n \in \mathbb{N}.$$

Essa recorrência, nas condições iniciais de $X_o = X_1 = 1$, gera a sequência de termos

$$1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \ldots$$

3.2.4 Número de níquel

O número de níquel é o irracional $\varphi_{1,3} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, solução positiva da equação $\varphi^2 - \varphi - 3 = 0$, para $p = 1$ e $q = 3$, que é equação característica da relação de recorrência $X_{n+2} = X_{n+1} + 3X_n$ que possui termo geral igual a

$$X_n = \left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Nas condições iniciais de $X_o = X_1 = 1$ a recorrência gera a sequência

$$1, 1, 4, 7, 19, 40, 97, \ldots$$

3.2.5 Número de platina

O número de platina é a solução positiva da equação $\varphi^2 - 2\varphi - 2 = 0$, para $p = 2$ e $q = 2$, o que nos dá o $\varphi_{2,2} = 1 + \sqrt{3}$.

A equação gera a recorrência $X_{n+2} = 2X_{n+1} + 2X_n$ que tem como termo geral a expressão

$$X_n = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

Daí, tem-se a sequência

$$1, 1, 4, 10, 28, 76, 208, \ldots$$

Percebe-se que as recorrências geradas pelos números metálicos são do tipo $G_{n+2} = pG_{n+1} + qG_n$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e que cada termo depende de dois dos termos anteriores, que segundo Huber (2019, p. 24), “chamamos de Sequência de Fibonacci Generalizada (SFG) as sequências em que cada elemento subsequente é uma combinação linear dos dois anteriores”, portanto as recorrências que geram os números metálicos geram sequências de Fibonacci generalizadas. Percebe-se também que, para cada uma dessas sequências, o limite do quociente entre dois termos consecutivos $\frac{G_{n+1}}{G_n}$ quando $n \to \infty$ é exatamente o número metálico que a originou. Como podemos verificar na proposição a seguir, encontrada em Spinadel (1997, 1999, 2003).

Proposição 4: Todos os números metálicos são obtidos como limites do quociente de termos consecutivos de uma sequência generalizada de Fibonacci

Demonstração: Seja

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_{n+1}}{X_n}\right).$$

Considerando a recorrência que define uma SFG e dividindo a equação de recorrência $X_{n+2} = pX_{n+1} + qX_n$ por $G_{n+1} \neq 0$, temos

$$\frac{X_{n+2}}{X_{n+1}} = p\,\frac{X_{n+1}}{X_{n+1}} + q\,\frac{X_n}{X_{n+1}}.$$

Aplicando o limite, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+2}}{X_{n+1}} = p\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_{n+1}}{X_{n+1}}\right) + q\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{X_{n+1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = p + \frac{q}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 - pL - q = 0.$$

Portanto, a mesma equação característica da recorrência que origina $\varphi_{p,q}$ é obitida. A demonstração da existência do limite L pode ser encontrada em Spinadel (2003).

Outra propriedade dos números metálicos que se relaciona com limites foi identificada e comprovada somente em Araújo (2015), conforme evidenciado na seguinte proposição.

Proposição 5: Seja o número metálico $\varphi_{p,1} = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$. Se p cresce indefinidamente, $\varphi_{p,1}$ tende a ser igual a p.

Mostraremos que $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} - p\right) = 0$.

Fazendo

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} - p\right) = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} - \frac{2p}{2}\right) =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\frac{\sqrt{p^2+4}-p}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\left(\sqrt{p^2+4}-p\right).$$

Multiplicando e dividindo-se pelo conjugado de $\sqrt{p^2+4}-p$, temos

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\sqrt{p^2+4}-p}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\left[\left(\sqrt{p^2+4}-p\right)\frac{\sqrt{p^2+4}+p}{\sqrt{p^2+4}+p}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{p^2+4}+p}\right) =$$

$$= 2\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+4}+p}\right) = 0.$$

■

Como exemplo, podemos mostrar que o número metálico $\varphi_{30,1}$ é originado pela equação

$$\varphi^2 - 30\varphi - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação dada, temos que

$$\varphi_{30,1} = \frac{30+\sqrt{986}}{2}.$$

Usando o valor aproximado para $\sqrt{986}$, com quatro casas decimais, encontra-se

$$\varphi_{30,1} = \frac{30+29{,}9332}{2} = \frac{59.9332}{2} = 29{,}9666 \cong 30.$$

Outra relação interessante dos números metálicos da forma $\varphi_{p,1}$ é encontrada em Mañibo *et al*. (2019) e está relacionada ao Teorema de Zeckendorf[9], um tópico da Teoria dos Números. Nele os autores fazem uma generalização desse teorema e apresentam o Teorema de Zeckendorf para os Números Metálicos. Conforme Mañibo et al. (2019, p. 2, tradução nossa):

> Podemos generalizar a sequência de Fibonacci de outra maneira, para a chamada sequência de números metálicos, [...]. Fixe m ∈ N. A sequência de números metálicos de grau m é dada pela recursão $z_n = mz_{n-1} + z_{n-2}$ para $n > 2$ e $z_0 = z_1 = 1$. Existem teoremas generalizados de Zeckendorf associados [...] a sequência dos números metálicos.[10]

O texto que descreve os teoremas foi traduzido e adaptado aos símbolos que estão sendo utilizados nesta pesquisa. Enunciaremos os teoremas, mas, não serão apresentadas as demonstrações, pois fogem ao escopo deste trabalho, ambas são encontradas em Mañibo et al. (2019).

Teorema (de Zeckendorf): Todo número inteiro positivo pode ser representado de maneira única através de uma soma de números de Fibonacci distintos não consecutivos.

Teorema (de Zeckendorf para números metálicos): Seja $p \geq 1$ um número natural e z_i o i-ésimo termo da sequência gerada pela recorrência $X_{n+2} = pX_{n+1} + X_n$. Todo inteiro positivo *n* tem uma única representação na forma $n = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i z_i$, com $\varepsilon_i \in \{0, \dots, p\}$ e se $\varepsilon_{i+1} = 0$ então $\varepsilon_i = 0$.

O teorema de Zeckendorf para números metálicos garante que qualquer número natural pode ser escrito de maneira única através de uma combinação linear dos termos das sequências relacionadas aos números metálicos da forma $\varphi_{p,1}$, o

---

[9] Matemático belga Edouard Zeckendorf (1901 – 1983)

[10] We could instead generalise the Fibonacci sequence in another way, to the so-called metallic mean sequences, sometimes called the noble mean sequences. Fix m ∈ N. The degree-m metallic meansequence is given by the recursion $z_n = mz_{n-1} + z_{n-2}$ for $n \geq 2$, with $z_0 = z_1 = 1$. There are generalised Zeckendorf theorems associated with both the tribonacci sequence and the metallic mean sequences.

que ocorre com as sequências que geram os números de ouro, prata e bronze, como verifica-se nos dois exemplos a seguir.

Atendendo ao Teorema de Zeckendorf, o número natural 100 pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), que dá origem a $\varphi_{1,1}$, o número de ouro.

$$100 = 0 \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot \mathbf{2} + 1 \cdot \mathbf{3} + 0 \cdot \mathbf{5} + 1 \cdot \mathbf{8} + 0 \cdot \mathbf{13} + 0 \cdot \mathbf{21} + 0 \cdot \mathbf{34} + 0 \cdot \mathbf{55} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{89}.$$

Como também pode ser escrito por meio dos elementos da sequência relativa ao número de bronze $\varphi_{3,1}$ (1, 1, 4, 13, 43, 142, ...).

$$100 = 2 \cdot \mathbf{1} + 0 \cdot \mathbf{1} + 3 \cdot \mathbf{4} + 0 \cdot \mathbf{13} + 2 \cdot \mathbf{43}.$$

Vale observar que, para representar o número 100 em termos de Fibonacci, só foram utilizados como fatores os números 0 e 1. Enquanto que para a sequência relativa ao número de bronze, utilizaram-se os fatores 0, 1, 2 e 3, conforme previa o teorema de Zeckendorf para números metálicos.

Vejamos agora como os números metálicos se relacionam as frações contínuas.

3.3 Frações contínuas e os números metálicos

Na subseção 2.5 vimos a decomposição em fração contínua da equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, e que seu valor tende para o número de ouro. Verificaremos agora o caso mais geral.

Na equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, com $\varphi \neq 0$, tem-se

$$\varphi^2 = p\varphi + q \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = p + \frac{q}{\varphi}.$$

Substituindo sucessivas vezes o valor de φ na própria equação tem-se que

$$\varphi = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \ddots}}}},$$

é uma expressão que depende somente de p e q cujo limite converge para $\varphi_{p.q}$. Temos então, com as frações contínuas, uma interessante maneira de representar os números metálicos através dos coeficientes da equação $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$.

Quando $q = 1$, tem-se então uma fração contínua simples. Conforme mostrado anteriormente, o número de ouro é representado por uma fração contínua simples, com $p = 1$ e $q = 1$. O mesmo acontece com o número de prata e o número de bronze, como pode-se constatar através da propriedade que diz: “todo número metálico da forma $\varphi_{p,1}$ tem sua expansão em fração contínua simples sempre com quocientes parciais iguais a p, ou seja, $\varphi_{p,1} = [p;\ \bar{p}]$.” (ARAÚJO, 2015, p. 28), como verifica-se a seguir.

3.3.1 Número de prata em frações contínuas

Substituindo os valores de p e q temos que a representação em fração contínua simples do número de prata é

$$\varphi_{2,1} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Ou ainda, $\varphi_{2,1} = [2; \bar{2}]$.

E na fração contínua, verificamos pelo quadro 3 que, ao passo em que expandimos o denominador, seu valor tende para o número de prata.

Quadro 3 – Número de prata em frações contínuas

Iterações	Aproximações para o número de prata
x_1	$2+\frac{1}{2}=2{,}5$
x_2	$2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}=2{,}4$
x_3	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}=2{,}41666666\ldots$
x_4	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=2{,}41428571\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor

Verifica-se então que já na quarta iteração o valor já se aproxima bastante de $\varphi_{2,1}=2{,}4142135623\ldots$

3.3.2 Número de bronze em frações contínuas

Como o número de bronze é encontrado peal equação $\varphi^2-3\varphi-1=0$, a fração contínua simples que o representa é

$$\varphi_{3,1}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\ddots}}}}.$$

Que representamos também por $\varphi_{3,1}=[3;\bar{3}]$.

Da mesma maneira, verifica-se pelo quadro 4 que, a medida em que expandimos o denominador, seu valor se aproxima de $\varphi_{3,1}=3{,}3027756377\ldots$

Quadro 4 – Número de bronze

Iterações	Aproximações para o número de bronze
x_1	$3+\frac{1}{3}=3{,}33333333\ldots$
x_2	$3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3}}=3{,}30000003\ldots$
x_3	$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}=3{,}30303027\ldots$
x_4	$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}}=3{,}30275229\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor

Constatada a propriedade dos números metálicos do tipo $\varphi_{p,1}$, relacionadas às frações contínuas simples, temos ainda os metálicos naturais, que dispensam a representação por frações contínuas. Para os demais números metálicos, podemos utilizar o mesmo processo que foi usado para o irracional π no capítulo anterior, quando mostramos sua representação em fração contínua simples, resultados encontrados também em Araújo (2015) e Huber (2019).

3.3.3 Número de níquel

Para o número de níquel, cuja equação geradora é $\varphi^2-\varphi-3=0$, tem-se que sua representação em frações contínuas é

$$\varphi_{1,3}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\ddots}}}}.$$

Também representado por $[2;\overline{3}]$.

3.3.4 Número de platina

Se tratando do número de platina, como sua equação geradora é $\varphi^2 - 2\varphi - 2 = 0$, tem-se que sua representação em frações contínuas é

$$\varphi_{2,2} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

Que pode ser representado também por $[2; \overline{1,2}]$.

Um dos objetivos deste trabalho é verificar as relações apresentadas entre os números metálicos com outros conteúdos da matemática. Apresentamos até aqui relações envolvendo sequências numéricas, recorrências e frações contínuas. Veremos que alguns deles também estão diretamente ligados à geometria verificando algumas propriedades geométricas associada aos números metálicos como a relação do número de ouro com o pentágono regular e a relação entre o octógono regular com o número de prata.

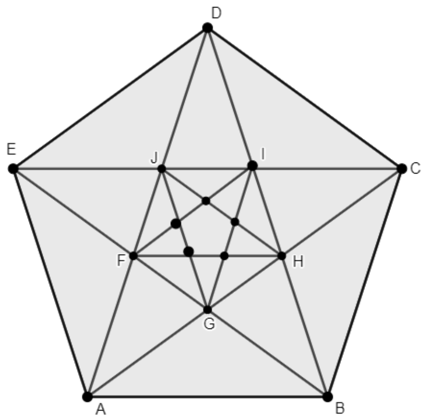
3.4 Polígonos metálicos

Conforme as obras de Oliveira (2022a) e (2022b), Schifler (2020), Huber (2019), e principalmente Buitrago (2007) verifica-se a existência de relações dos números metálicos com a Geometria que datam desde os pitagórigos (500 a.C.). Mostraremos a relação dos números metálicos com alguns polígonos, iniciando pelo pentágono, que é relacionado ao número de ouro, segundo LIVIO (2011, p. 48):

> Conectando-se todos os vértices do pentágono por diagonais, obtém-se um pentagrama. As diagonais também formam um pentágono menor no centro, e as diagonais desse pentágono formam um pentagrama e um pentágono ainda menor. Essa progressão pode prosseguir *ad infinitum*, criando pentágonos e pentagramas cada vez menores. Uma propriedade notável de todas as figuras é que, se olharmos os segmentos de linha em ordem decrescente de comprimento, poderemos facilmente, usando geometria elementar, que cada segmento é menor que seu antecessor por um fator exatamente igual à Razão Áurea, Φ.

Podemos verificar a citação de Livio (2011) por meio da figura 4.

Figura 4 – Pentágono e pentagrama

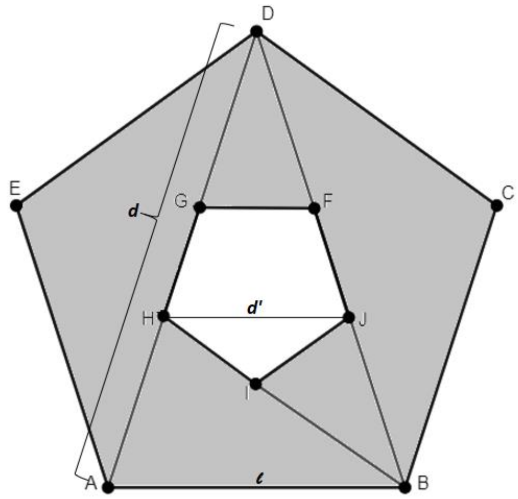


Fonte: Elaborado pelo autor

A razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular resulta exatamente no número de ouro. Esse fato é apresentado no artigo de autoria de Condesse e Minnard (2007) na forma de uma aplicação para alunos do ensino médio, utilizando-se de um tangram[11] diferente do tradicional. Na atividade elas sugerem aos alunos que, utilizando um tangram formado por 5 triângulos, construam um pentágono regular com um furo no centro, também no formato de um pentágono regular, dessa forma, utilizando-se de semelhança de triângulos e de manipulações algébricas percebam a relação entre diagonal e lado no pentágono, conforme apresentado na figura 5.

[11] Jogo chinês na forma de um quebra-cabeça formado por 7 peças em formatos geométricos, sendo 5 triângulos, um quadrado e um paralelogramo.

Figura 5 – Razão entre diagonal e lado do pentágono regular



Fonte: Elaborada pelo autor.

Através da manipulação das peças do tangram os alunos devem perceber que $d' = d - l$, sendo d' é a diagonal do pentágono menor e d e l são respectivamente a diagonal e o lado do pentágo maior e que $d' = \overline{HJ} = \overline{JB} = \overline{FB}$ e da semelhança dos triângulos HJD e ABD, controi-se a proporção

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d'}.$$

O que nos garante que

$$d^2 - ld - l^2 = 0.$$

E resolvendo a equação quadrática em termos de d, encontra-se que

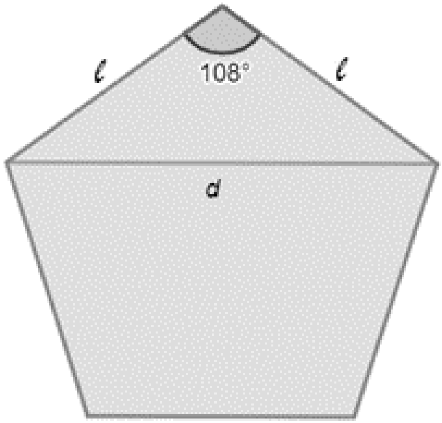
$$d = l\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{l} = \Phi.$$

Esse fato também é mostrado no trabalho de Buitrago (2007), porém não apresenta a demonstração. Apresentamos aqui uma demonstração utilizando a lei dos cossenos.

Considerando um pentágono regular de lado l e diagonal d, conforme a figura 6, tendo destaque para o ângulo interno de 108º.

Figura 6 – Diagonal e lado do pentágono regular



Fonte: Elaborada pelo autor

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo em destaque, temos

$$d^2 = 2l^2 - 2l\cos 108° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 2l^2(1 - \cos 108°).$$

E substituindo $\cos 108° = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, teremos

$$\frac{d^2}{l^2} = 2(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{4}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

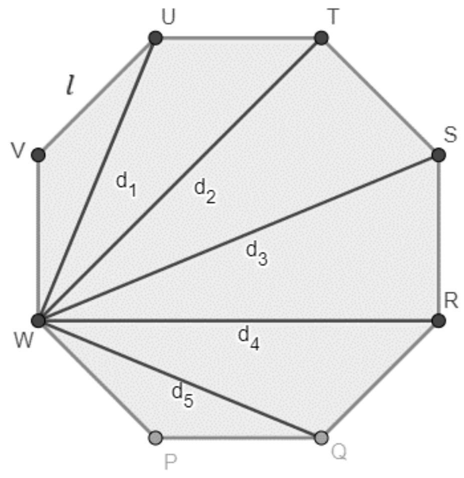
Portanto, para todo pentágono regular, vale a relação $\frac{Diagonal}{lado} = \varphi_{1,1}$.

■

Outro polígono que se relaciona diretamente com um número metálico é octógono regular. Também comentado em Builtrago (2007), que a razão entre a segunda diagonal e o lado do octógono regular é $\varphi_{1,2} = 1 + \sqrt{2}$, o número de prata. Apresentamos aqui a demonstração.

Consideremos na figura 7 o octógono $PQRSTUVW$ regular de lado l.

Figura 7 – Diagonal e lado octógono regular



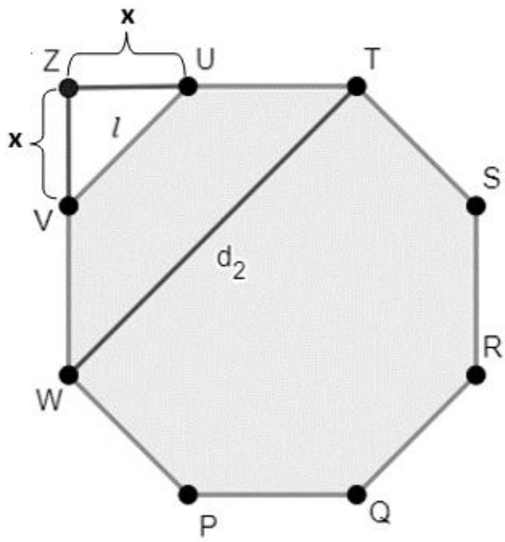
Fonte: Elaborada pelo autor

Queremos mostrar que a razão entre a segunda diagonal d_2 e o lado l , é igual ao número de prata, ou seja

$$\frac{d_2}{l} = 1 + \sqrt{2}.$$

Seja Z o ponto de encontro entre os prolongamentos dos segmentos WV e UT, fomando o triângulo ZVU, conforme a figura 8.

Figura 8 – Razão entre diagonal e lado do octógono regular



Fonte: Elaborada pelo autor

Como o ângulo interno do octógono é 135º, segue que o triângulo ZVU é retângulo e isósceles, portanto, $l = x\sqrt{2}$ e $d_2 = (x + l)\sqrt{2}$, daí, fazendo a substituição segue que

$$d_2 = \left(\frac{l}{\sqrt{2}} + l\right)\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 = l + l\sqrt{2} = l(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d_2}{l} = 1 + \sqrt{2} = \varphi_{2,1}.$$

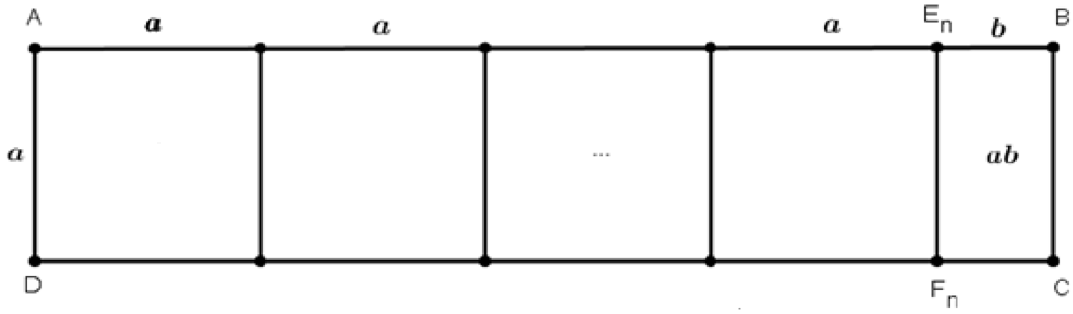
■

Buitrago (2007) apresenta ainda em seu artigo a demonstração que garante a inexistência de um polígono regular cuja razão entre diagonal e lado seja o número de bronze, fato também apresentado e traduzido em Schifler (2020).

Outro polígono que apresenta relação direta com os números metálicos é o retângulo. Para termos um retângulo metálico, segundo Oliveira (2022b), deve-se ter "$na + b$ e a, a>b, lados de um retângulo ABCD, e n um inteiro positivo, então

ABCD é um retângulo metálico, se e somente se, ABCD é semelhante ao retângulo E_nBCF_n, ou seja, $\frac{na+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{a}$", conforme se verifica na figura 9.

Figura 9 – Retângulo metálico



Fonte: Elaborada pelo autor

Oliveira (2022b) cita ainda que: "um retângulo metálico é um retângulo do qual foram retirados n quadrados de maior área possível, e que o retângulo restante é semelhante ao retângulo original". Já Huber (2019), define um retângulo metálico da seguinte maneira: "um retângulo é chamado de retângulo $\varphi_{p,q} - metálico$ se a razão entre dois de seus lados adjacentes for igual ao número metálico $\varphi_{p,q}$". Mostraremos a seguir a construção do retângulo ouro e o de prata.

3.4.1 Retângulo de ouro

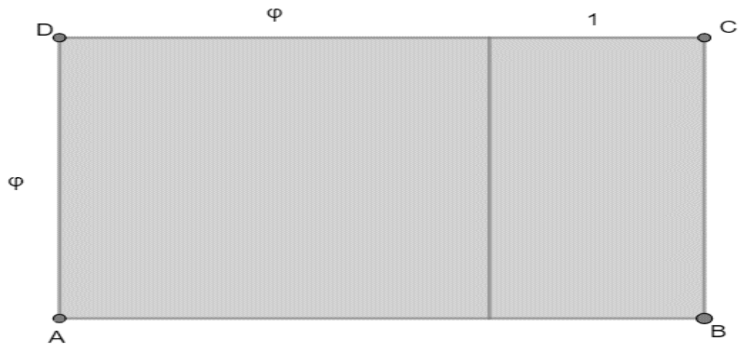
Partindo da equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, tem-se

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi \times \varphi = \varphi + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi + 1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1}.$$

Podemos representar essa proporção através da semelhança de dois retângulos, um de lados φ e $\varphi + 1$, outro de lados medindo 1 e φ, como verifica-se na figura 10.

Figura 10 – Retângulo de ouro



Fonte: Elaborada pelo autor

O retângulo *ABCD* é chamado de retângulo de ouro ou retângulo áureo, bastante utilizado no decorrer da história na cultura grega, na natureza e nas artes, como no quadro da Santa Ceia de Salvador Dali[12], que segundo Silva (2021, p. 13) “possui dimensões muito próximas das de um Retângulo de Ouro. As dimensões desta pintura são 267 x 166,7 cm. Ou seja, ela possui uma Proporção de Tela de 1,602:1, o que diverge em 1% da proporção dos Retângulos de Ouro.”, como podemos constatar pela figura 11.

Figura 11 – Santa ceia

Fonte: https://play.google.com/books/reader?id=zAsrEAAAQBAJ&pg=GBS.PA12&hl=pt-BR

Conforme Livio (2011, p. 103) o retângulo áureo “é o único retângulo com a propriedade de que, ao se cortar um quadrado, forma-se outro retângulo similar.

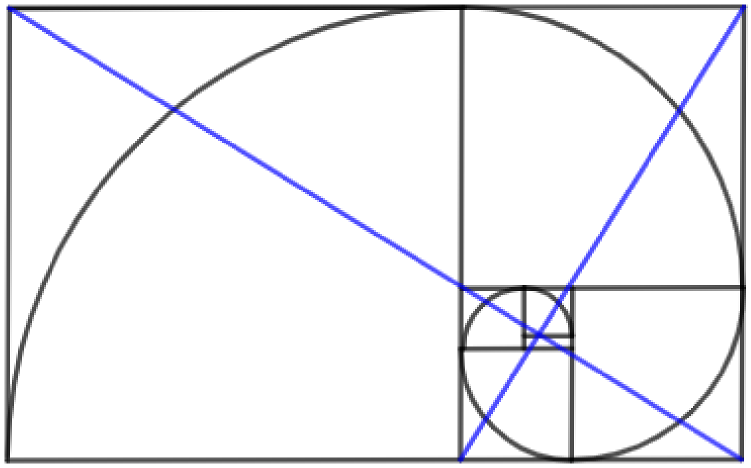
[12] Salvador Dalí (1904 – 1989), pintor espanhol surrealista e da arte moderna.

Desenhe duas diagonais em qualquer par de retângulos e todas irão se cruzar no mesmo ponto”. Como podemos verificar na figura 12, imagem que dá origem a uma espiral logarítmica, que conforme Schifler (2020, p. 19):

> Está presente em uma grande quantidade de elementos da natureza, como a razão entre a distância de uma asa traseira da borboleta até o seu abdômen e a distância do abdômen até a outra asa traseira, em algumas plantas, podendo ser na formação dos galhos, em outras na formação das pétalas, das flores ou na formação das folhas como na folha de bromélia. Um molusco que vive no Oceano Pacífico, o náutilo, bombeia gás para dentro de sua concha repleta de câmaras, para controlar a profundidade de sua flutuação, proporcionando um crescimento associado ao número de ouro.

A espiral logarítmica recebe esse nome devido a maneira que ela cresce enquanto seu raio aumenta. O fato de o raio da espiral formar o mesmo ângulo com a reta tangente à espiral em qualquer de seus pontos permite chamá-la também de espiral equiangular. SPIRA (2021). Além de sua associação com o número de ouro ela é inspiradora por também aparecer “de girassóis, conchas do mar e redemoinhos a furacões e galáxias espirais gigantes.” Livio (2011, p. 138).

Figura 12 – Espiral logarítmica



Fonte: Elaborada pelo autor.

Será mostrado agora a construção e algumas curiosidades acerca do retângulo de prata.

3.4.2 Retângulo de prata

Considerando a equação que dá origem ao número de prata, temos que

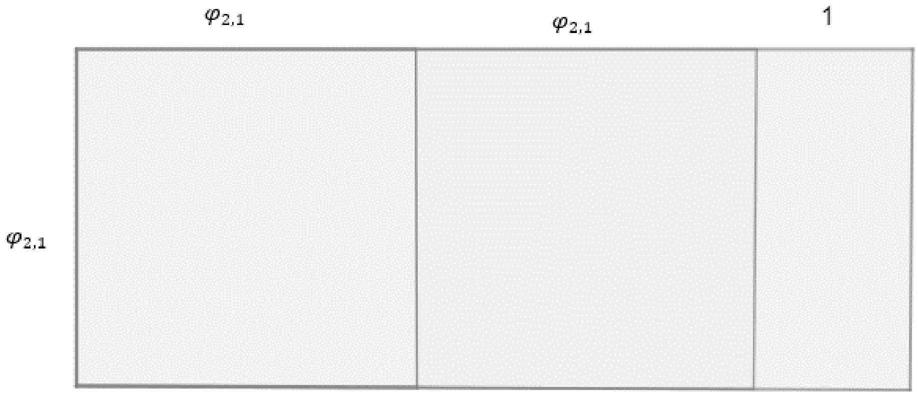
$$(\varphi_{2,1})^2 - 2\varphi_{2,1} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varphi_{2,1})^2 = 2\varphi_{2,1} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\varphi_{2,1} + 1}{\varphi_{2,1}} = \frac{\varphi_{2,1}}{1}.$$

Considerando agora essa proporção, construímos o retângulo de prata, como pode se ver na figura 13.

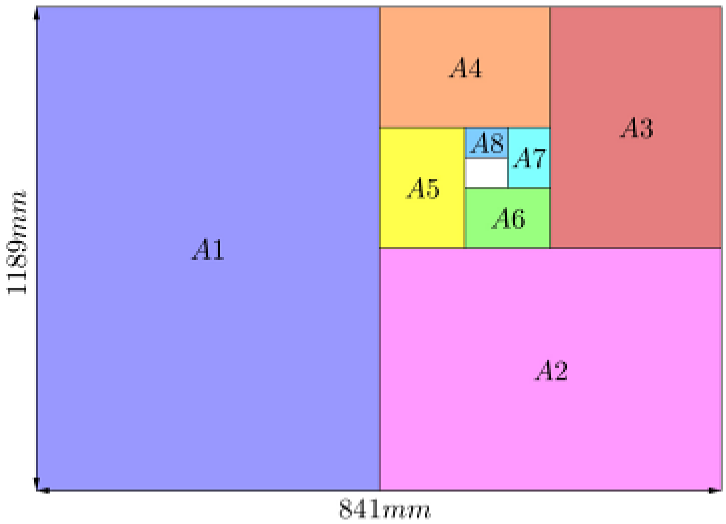
Figura 13 – Retângulo de prata



Fonte: Elaborada pelo autor

A razão entre os lados desse retângulo é chamada razão de prata, e possui aplicações na cultura oriental, segundo Oliveira (2022b, p. 175): "O uso da razão de prata na Arquitetura Oriental, em especial, na Arquitetura Japonesa, é evidenciado no templo Horyu-ji em Ikagura, Prefeitura de Nara, Japão". E também "está presente no nosso dia a dia, com aplicações na indústria gráfica e na arquitetura" Oliveira (2022b, p. 180), como na proporção entre os lados do retângulo que dão formato ao papel A4. Comenta também Schifler (2020): "a razão de prata é obtida ao dividirmos o comprimento pela largura de uma folha retangular. É a proporção utilizada para os tamanhos de papel atuais, normalizada pelo acordo internacional ISO 216 (ISO, 2007)", como podemos verificar na figura 14.

Figura 14 – Proporção de prata no papel A4



Fonte: https://play.google.com/books/reader?id=zAsrEAAAQBAJ&pg=GBS.PA22&hl=pt

Verificadas as relações dos números metálicos com alguns objetos do conhecimento da matemática, a próxima seção se dedicará a apresentar um incentivo para o ensino dos números irracionais utilizando os números metálicos

4 ENSINO DOS IRRACIONAIS E OS NÚMEROS METÁLICOS

Desde a descoberta da existência dos números irracionais pelos pitagóricos, em 550 a.C. aproximadamente, esse conjunto de números demorou a ser totalmente aceito, para eles, essa descoberta foi “surpreendente e perturbadora”, (EVES, 2004, p. 106). Somado a esse fato, o ensino-aprendizagem dos números irracionais não ocorre a contento devido a três fatores: conhecimento de professores e alunos sobre o tema, tratamento dado ao tema nos livros didáticos e formação de professores de Matemática. (BROETTO e WAGNER, 2019).

A família dos números metálicos se distribui entre o conjunto dos números naturais e dos irracionais, e por possuir uma definição simples, sendo as raízes positivas de equações do tipo $\varphi^2 - p\varphi - q = 0$, com p e $q \in \mathbb{N}$, se mostram como ferramenta importante a ser utilizada por professores quando associados a alguns objetos do conhecimento da matemática. Segundo Huber (2019, p. 64):

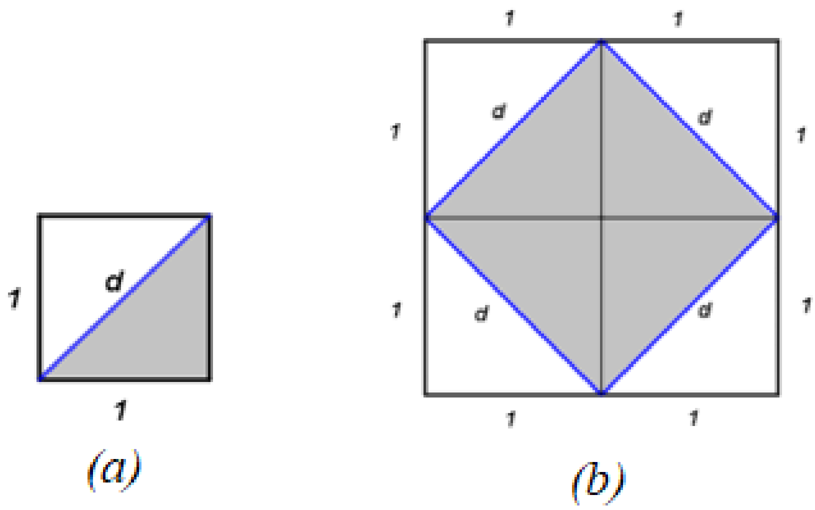
> Há uma vasta dimensão de conhecimentos matemáticos que podem ser abordadas com o referencial teórico dos números metálicos, tais como: números inteiros, números racionais e irracionais; razões e proporções; equações quadráticas; sequências e fórmulas de recorrência, frações contínuas simples; sequências de radicais contínuos e construções geométricas.

Diante do exposto, colocamos como proposta para a educação básica o uso dos números metálicos como um incentivo ao ensino do conjunto dos números irracionais, conforme proposto no plano de aula no apêndice A, que será detalhado nesta seção.

4.1 Detalhamento do plano de aula

Para essa aula deverão ser dedicados duas horas/aula. Inicia-se com um problema tradicional na descoberta dos irracionais. O cálculo da diagonal de um quadrado de lado 1 (aqui, por se tratar de medidas gerais, pode-se omitir a unidade de medida). Introduzindo também o contexto histórico e das dificuldades da época. Para ilustrar, pode ser utilizada a figura 15, que poderá ser construída com cartolina e levada para sala de aula.

Figura 15 – Diagonal do quadrado

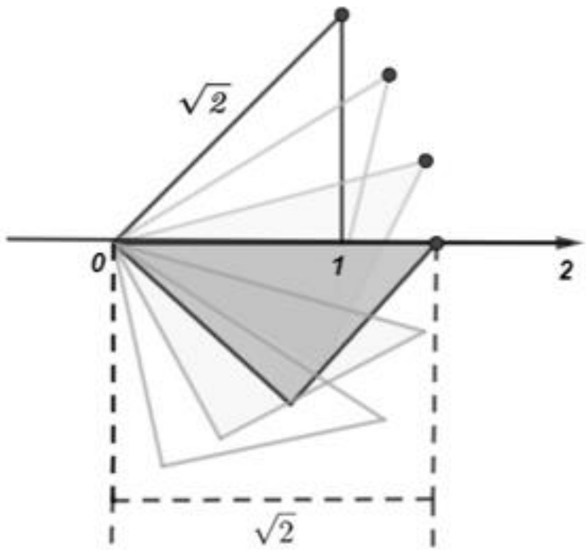


Fonte: Elaborada pelo autor

Em (a) tem-se a diagonal do quadrado de lado 1 dividindo-o em dois triângulos de área medindo 0,5. Em (b) tem-se quatro dos quadrados iniciais formando um quadrado de lado 2, com um quadrado sombreado de lado *d* no centro. Aqui o aluno deve ser instigado, através de manipulações com as imagens, a calcular a área do quadrado sombreado de lado *d,* se tratando de um quadrado formado por quatro triângulos de áreas iguais a 0,5 $(4 \times 0{,}5 = 2)$ para que posteriormente, com a ajuda do professor, seja determinado o valor de *d*, utilizando os processos algébricos e fórmula da área do quadrado ($d^2 = 2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$).

Nesse momento apresenta-se a definição dos números irracionais, aqueles que não podem ser representados por meio de uma fração e utiliza-se o número $\sqrt{2}$ como exemplo. Então, é solicitado aos alunos que estimem seu valor e sua localização aproximada na reta numérica, utilizando réguas e noções aritméticas. Solicita-se então aos alunos que apresentem os valores encontrados. Para efeitos visuais pode ser utilizada a figura 16, que pode ser projetada e mostrada aos alunos após as suas apresentações.

Figura 16 – Raiz de dois na reta real

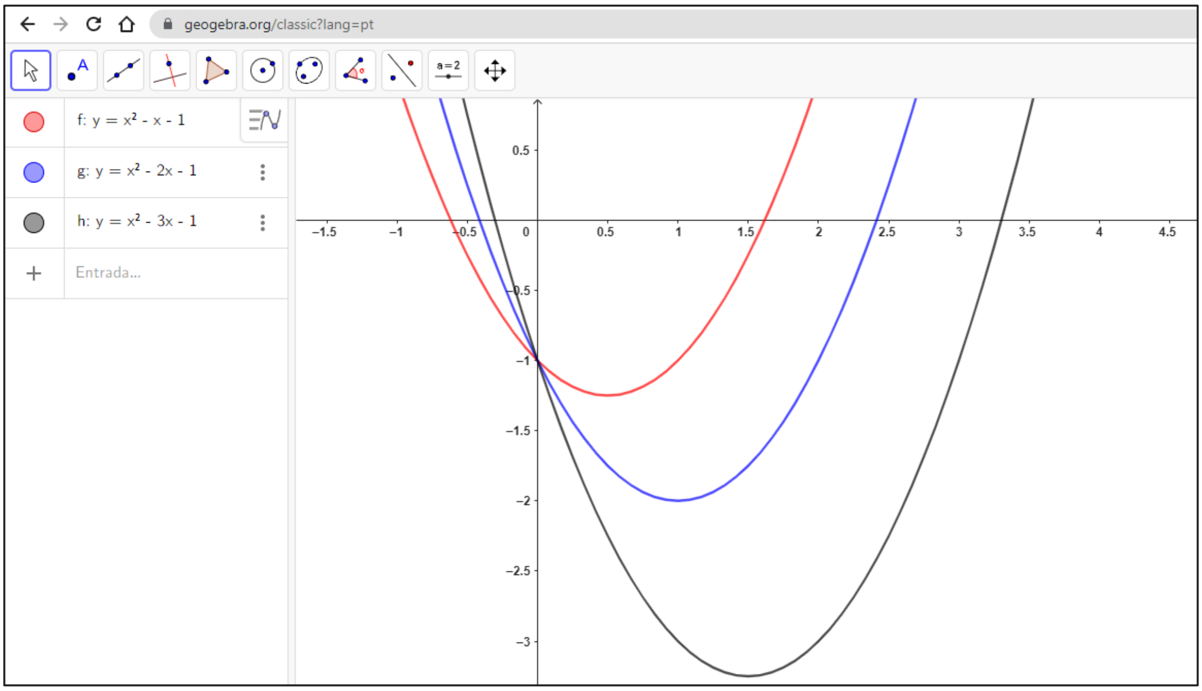


Fonte: Elaborada pelo autor

Após esse momento de construção e das constatações dos valores aproximados para o $\sqrt{2}$, apresenta-se a definição dos números metálicos, como sendo as raízes positivas da equação $x^2 - px - q = 0$, com p e q $\in \mathbb{N}$, e mostrando que outros números irracionais aparecem na matemática e que desempenham um papel importante na história, para isso, cita-se como exemplo o número de ouro e o número de prata, assim como o retângulo de ouro e de prata. Então, solicita-se como atividade aos estudantes que determinem os valores dos números de ouro e prata, utilizando-se da fórmula resolutiva tradicional da equação do segundo grau e busquem estratégias para localizar suas posições na reta real, assim como foi feito com o $\sqrt{2}$.

Em um momento posterior, pode ser solicitado aos estudantes que, com uso de computadores ou no laboratório de informática, o uso do software Geogebra, escrevendo no mesmo plano cartesiano, as equações dos números metálicos que estejam investigando para constatarem visualmente sua possível localização na reta real. Ao abrir o Geogebra, solicita-se aos alunos que escrevam na barra de entrada do programa cada equação e que seja observado a relação entre os gráficos que se apresentam, como mostrado na figura 17, onde f, g e h representam as funções quadráticas cujas raízes positivas não respectivamente o número de ouro, prata e bronze.

Figura 17 – Números metálicos no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, solicita-se como avaliação aos alunos que determinem as medidas de figuras ou objetos cuja razão determine algum número metálico ou alguma aproximação, calculando a divisão entre largura e comprimento de objetos retangulares como carteira, caderno, estojo, folha de papel ou mesmo medidas no corpo humano.

Ressalta-se que esse modelo de aula pode ser aplicado em turmas do 9º ano do ensino fundamental como também em turmas do 1º ano do ensino médio, contemplando, segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, as habilidades EF09MA02, EF09MA09 e EM13MAT402[13].

---

[13] **EF09MA02 -** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
EF09MA09 - Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
EM13MAT402 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

5 METODOLOGIA E PERCURSO METODOLÓGICO

Nesta seção apresentamos o percurso metodológico estabelecido durante a aplicação da Revisão Sistemática da Literatura (RSL), onde foram selecionados e analisados trabalhos sobre a temática dos números metálicos e de suas relações com outros ramos da matemática. Conforme Galvão e Ricarte (2020, p. 58) a RSL "É uma modalidade de pesquisa, que segue protocolos específicos, e que busca entender e dar alguma logicidade a um grande corpus documental". Um processo que utiliza critérios explícitos e objetivos para identificar, avaliar e sintetizar as evidências relevantes sobre um tópico específico.

O método da revisão sistemática da literatura é utilizado para descrever o conhecimento disponível para a prática acadêmica e profissional, conforme citam Koller, Couto &. Hohendorff (2014, p. 56): "revisão sistemática é um método que permite maximizar o potencial de uma busca, encontrando o maior número possível de resultados de uma maneira organizada".

O objetivo de uma RSL é fornecer uma avaliação crítica e imparcial das evidências disponíveis, que inclui a identificação de estudos relevantes e que pode ser usada para identificar lacunas no conhecimento e direcionar pesquisas futuras. Donato & Donato (2019) afirmam que a elaboração de uma RSL deve ser pautada em uma questão clara e específica que deve ser investigada e respondida ao final do processo de análise.

Desde o artigo intitulado "*La familia de numeros metalicos y el diseño*[14]" de 1997, escrito para a Universidade de Buenos Aires citando os números metálicos, a professora Vera W. de Spinadel escrevera outros artigos e livros que relaciona os números metálicos à resultados relacionados a diversas áreas, como sequências numéricas, recorrências, geometria e até economia. Desde então outros pesquisadores também abordaram as relações dos números metálicos com outros conteúdos da matemática, como os números irracionais, as frações contínuas, a sequência de Pell e até mesmo a função Zeta de Riemann, respectivamente trabalhados por Vinagre (2014), Araújo (2015), Oliveira (2022b) e Novoa et al. (2017). Dessa maneira, a revisão sistemática se faz necessária, por se tratar de um assunto relativamente novo e de grande potencial, pois conforme cita Donato & Donato

[14] Tradução nossa: A família dos números metálicos e o design.

(2019, p. 227): “Uma vez que a literatura científica produzida anualmente está a aumentar a uma taxa exponencial, as revisões sistemáticas que coligem as evidências disponíveis têm-se tornado cada vez mais importantes”.

Embora não exista um protocolo específico de revisões sistemáticas para a área de ensino e educação matemática, a condução deste trabalho foi realizada considerando o período de 1997 até o presente ano, obedecendo as seguintes etapas, definidas por Mendes & Pereira (2020):

i. Objetivo e pergunta (Delimitação da questão a ser pesquisada);
ii. Busca dos trabalhos;
iii. Seleção dos estudos;
iv. Análise das produções;
v. Apresentação dos resultados RSL.

De acordo com Mendes & Pereira (2020, p. 226), “estas etapas têm um potencial maior de abranger a área de Ensino e Educação Matemática, uma vez que não demos ênfase a elementos específicos que são geralmente utilizados mais nas áreas de Ciências da Saúde”. Como a primeira etapa (objetivo e pergunta) já foi apresentada, seguiremos mostrando as demais etapas.

5.1 Critérios de pesquisa

Esta pesquisa, iniciada em agosto de 2022, não encontrou nas bases de dados utilizada uma revisão de literatura da temática aqui tratada, assim, a segunda etapa desta RSL (busca dos trabalhos), considerou como período de análise o recorte temporal que vai desde o primeiro trabalho encontrado relativo aos números metálicos, sendo o artigo escrito em espanhol de autoria de Vera W. Spinadel, intitulado “*La familia de números metálicos e diseno*” de 1997, até o ano de elaboração desta pesquisa.

Como critérios de inclusão utilizou-se à palavra-chave “números metálicos”, considerando sua localização em qualquer posição no texto, nas plataformas, Google acadêmico, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Periódicos CAPES, no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, no repositório Academia.EDU e também utilizando a palavra-chave “metallic means", termo inglês utilizado para se referir aos números metálicos, considerado também sua posição em qualquer lugar no texto, quando se tratava de bases de dados estrangeira, como as plataformas Science Direct, Scielo, Web of Science, Microsoft Academic, JStor, European Reserch Council (ERC), IEEE Explore, Scopus, Oxford Jornals, Applied Social Sciences Index & Abstracts (ASSIA), Wiley Online Library (WOL), ArXiv, Analytical Absrtacts e Inspec (OVID), sendo 6 plataformas de pesquisa nacionais e 13 internacionais. A pesquisa se estendeu também às revistas nacionais que abordam conteúdos específicos da Matemática, como a Revista do Professor de Matemática Online (PMO) e a revista Eureka da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Buscou-se assim trabalhos que estivessem diretamente ligados a temática dos números metálicos. O quadro 5 indica as vinte e uma plataformas de pesquisa utilizadas e sua origem.

Quadro 5 – Plataforma de pesquisa por origem

Nacionais	Periódicos CAPES	
	Google acadêmico	
	Catálogos de T. e Dissertações - CAPES	
	BDTD	
	PMO - Professor de matemática online	
	Revista Eureka da Olimpíada Brasileira de Matemática	
	Scielo	
	Inspec (OVID)	
Internacionais	Academia.EDU	Estados Unidos
	JSTOR	Estados Unidos
	Science Direct	Holanda
	Web of Science	Estados Unidos
	Microsoft Academic	Estados Unidos
	European Reserch Council (ERC)	União Europeia
	IEEE Explore	Estados unidos
	Scopus	Holanda
	Oxford Jornals	Estado Unidos
	Applied Social Science Index & Abstracts (ASSIA)	Reino Unido
	Wiley Online Library	Estado Unidos
	ArXiv	Estados Unidos
	Analytical Absrtacts	Reino Unido

Fonte: Elaborado pelo autor.

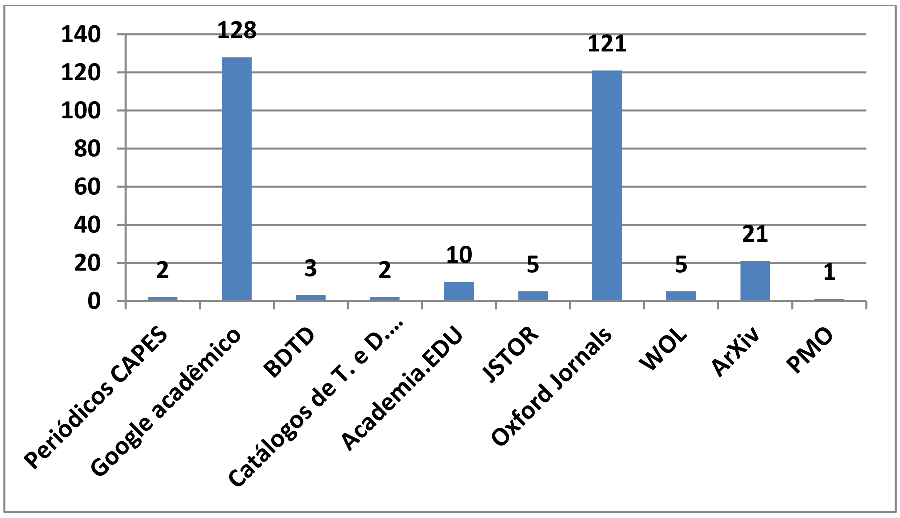
Para localizar o país de origem das bases de pesquisa internacionais, em alguns casos, a informação encontrava-se no próprio site que abriga a plataforma, em outros, foi necessário verificar a empresa ao qual pertence à base de dados.

Verificou-se que algumas obras apareceram em mais de uma base de dados, quanto a isso, Galvão e Ricarte (2020, p. 65) comentam que:

> Embora possa haver alguma duplicação de artigos em diferentes bases de dados, cada base se destina a um público-alvo, possui uma cobertura de tipos de documentos e uma cobertura temática, ou seja, conteúdos informacionais que são por ela tratados de forma preferencial. Portanto, deriva-se que é preciso buscar a informação relevante em bases de dados adequadas e compatíveis com a temática a ser desenvolvida.

Destaca-se que nas bases de dados Microsofit Academic, Scielo, Web of Science, IEEE Explore, ERC, Scopus, ASSIA, Analytical Abtracts e Inspec não foram encontrados resultados referentes a pesquisa estabelecida, assim como na revista Eureka. Na base Science Direct, foi encontrado um artigo em inglês intitulado *The generalized golden proportions, a new theory of real numbers, and ternary mirror-symmetrical arithmetic* (As proporções áureas generalizadas, uma nova teoria dos números reais e a aritmética simétrica espelhada ternária) de autoria de Alexey Staknov, porém o acesso ao arquivo era restrito. Reforçamos então que foram levadas em consideração apenas plataformas de pesquisa livres. No gráfico 1 tem-se as quantidades de trabalhos encontrados nas bases de pesquisa.

Gráfico 1 – Quantidades de obras por fonte de pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ressalta-se também que dos 298 trabalhos encontrados, alguns se repetiam em mais de uma plataforma de pesquisa, fato que foi utilizado na próxima etapa como critério de exclusão. O quadro 6 a seguir resume os critérios de inclusão utilizados na etapa 2 dessa RSL.

Quadro 6 – Critérios de Inclusão

Critério 1	Palavra – chave	"números metálicos" Base de dados nacionais
		"metallic means" Base de dados internacionais
Critério 2	Recorte temporal	1997 - 2023

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a terceira etapa da RSL destacamos os critérios de exclusão estabelecidos para a posterior análise das obras.

5.2 Coleta e seleção de dados

Na intenção de atingirmos os objetivos específicos desta pesquisa, para a terceira etapa da RSL (Seleção dos estudos), foram utilizados como critério de exclusão trabalhos onde havia apenas citações, por serem trabalhos que não estão diretamente ligados aos números metálicos e aqueles onde havia resultados repetidos, evitando duplicatas de mesmo conteúdo. Foram excluídos também trabalhos que falavam de números metálicos em outro sentido, senão o matemático.

Como o objetivo principal dessa pesquisa é investigar o desenvolvimento do estudo dos números metálicos no meio acadêmico, utilizou-se também como critério de exclusão trabalhos relacionados somente ao número de ouro, por já ter sido amplamente estudado, tendo várias dissertações e capítulos de livro a seu respeito, como na obra de Livio (2011), que dedica seu livro a tratar da razão áurea e da história de fi. O quadro 7 resume os critérios de exclusão.

Quadro 7 – Critérios de exclusão

Critério 1	Apenas citações
Critério 2	Resultados repetidos
Critério 3	Outro sentido atribuído, senão o matemático
Critério 4	Exclusivos sobre o número de ouro

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme os critérios estabelecidos e considerando as dez plataformas onde foram encontrados trabalhos relativos às pesquisas, enquadram-se dezesete trabalhos, destacados por bases de pesquisa, título e autor no quadro 8.

Quadro 8 – Seleção dos trabalhos (continua)

BASE DE PESQUISA	TÍTULO	AUTOR
Periódicos CAPES	A Razão de Bronze: uma contribuição de Vera M. W. de Spinadel para o ensino de Matemática	João Luzeilton de Oliveira
	La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro	Viviana Condesse
Google acadêmico	La familia de numeros metalicos y diseno	Vera W. De Spinadel
	Polygons, Diagonals, and the Bronze Mean	Antonia Redondo Buitrago
	Geogebra e a familia dos números metálicos	Sônia Cristina/ Estela Fainguelernt
	Los números metálicos y su vínculo con la función zeta de Riemann	Fidel López Novoa, Andrés A. González-Aguilera, Eduardo Renato Moreno Roque y Pedro M. Ricardo-Zaldívar
	O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell	João Luzeilton de Oliveira
Academia.EDU	La familia de numeros metalicos	Vera W. De Spinadel
	Quase cristais e números metálicos	Fatima Vinagre

(conclusão)

	The metallic means family and multifractal spectra	Vera W. De Spinadel
	Números metálicos	Fátima Vinagre
Catálogos de T. e Dissertações - CAPES	As frações contínuas e os números metálicos	José Junior Veloso de Araújo
JSTOR	Hemi-slant submanifolds in metallic Riemannian manifolds	Cristina E. Hretcanu/ Adara M. Blaga
ARXIV	Zeckendorf representations and mixing properties of sequences	Neil Manibo, Eden Delight P. Miro, Dan Gust, and Gwendolyn S. Tadeo
BDTD	A família dos números metálicos no ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática na educação básica	Jessica Augustin Schifler
	Números metálicos	Adriane Vaz Huber
PMO - Professor de matemática online	A razão áurea e os números de Fibonacci	Yuri Teles Moura

Fonte: Elaborado pelo autor

Dos dezessete trabalhos destacados no quadro 8, encontram-se três dissertações de mestrado, um livro e treze artigos publicados em revistas ligadas à Matemática. No quadro 9 listamos os trabalhos por categoria e em ordem do ano de publicação, no qual observa-se que os trabalhos selecionados foram, em sua grande maioria, publicados a partir de 2010. Quanto às publicações das obras, vê-se no gráfico 2 que, os artigos e dissertações são na maioria de publicações internacionais, destacando-se a plataforma Academia.EDU.

Quadro 9 – Títulos por ano e categoria

(continua)

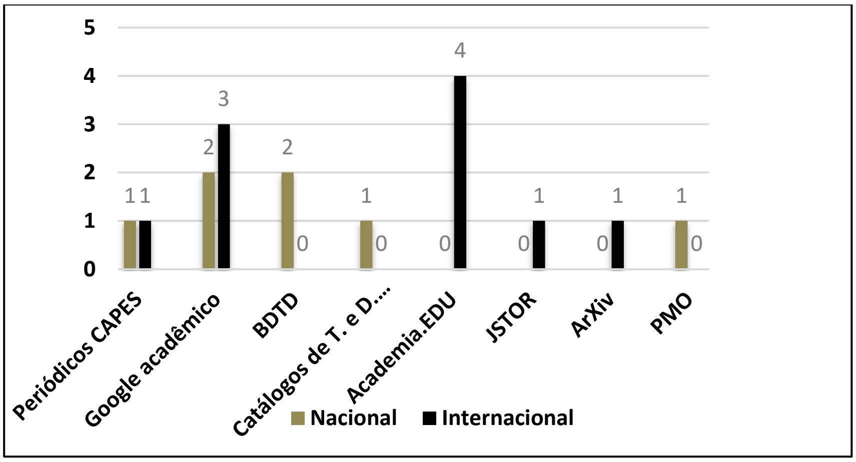
TÍTULO	AUTOR	ANO DE PUBLICAÇÃO	CATEGORIA
La familia de numeros metalicos y diseno	Vera w. De Spinadel	1997	Artigo
The metallic means family and multifractal spectra	Vera w. De Spinadel	1999	Artigo
La familia de numeros metalicos	Vera w. De Spinadel	2003	Artigo
La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro	Viviana Condesse	2007	Artigo
Polygons, Diagonals, and the Bronze Mean	Antonia Redondo Buitrago	2007	Artigo
Quase cristais e números metálicos	Fatima Vinagre	2009	Livro

(conclusão)

Geogebra e a família dos números metálicos	Sônia Cristina/ Estela Fainguelernt	2012	Artigo
Números metálicos	Fátima Vinagre	2014	Artigo
As frações contínuas e os números metálicos	José Junior Veloso de Araújo	2015	Dissertação
Los números metálicos y su vínculo con la función zeta de Riemann	Fidel López Novoa, Andrés A. González-Aguilera, Eduardo Renato Moreno Roque y Pedro M. Ricardo-Zaldívar	2017	Artigo
Números metálicos	Adriane Vaz Huber	2019	Dissertação
Zeckendorf representations and mixing properties of sequences	Neil Manibo, Eden Delight P. Miro, Dan Gust, and Gwendolyn S. Tadeo	2019	Artigo
Hemi-slant submanifolds in metallic Riemannian manifolds	Cristina E. Hretcanu/ Adara M. Blaga	2019	Artigo
A família dos números metálicos no ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática na educação básica	Jessica Augustin Schifler	2020	Dissertação
A razão áurea e os números de Fibonacci	Yuri Teles Moura	2021	Artigo
O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell	João Luzeilton de Oliveira	2022	Artigo
A Razão de Bronze: uma contribuição de Vera M. W. de Spinadel para o ensino de Matemática	João Luzeilton de Oliveira	2022	Artigo

Fonte: Elaborado pelo autor

Gráfico 2 – Publicações por fonte de pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dos trabalhos encontrados em cada plataforma de pesquisa, vale ressaltar que foram excluídos também aqueles que se encontravam escritos digitalmente em blogs ou em sites não oficiais. No quadro 10 disponibilizamos os links de acesso aos trabalhos analisados, identificados pela letra T seguidos de um número, ordenadamente.

Quadro 10 – Links de acesso (continua)

	TÍTULOS	LINKS
T1	**La familia de numeros metalicos y diseno**	https://itc.scix.net/pdfs/4856.content.pdf
T2	**The metallic means family and multifractal spectra**	https://www.academia.edu/26484882/The_metallic_means_family_and_multifractal_spectra?email_work_card=title
T3	**La familia de numeros metalicos**	https://ojs.econ.uba.ar/index.php/CIMBAGE/article/view/317
T4	**La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro**	http://repositorio.unlz.edu.ar:8080//handle/123456789/320
T5	**Polygons, Diagonals, and the Bronze Mean**	https://link.springer.com/article/10.1007/s00004-007-0046-x
T6	**Quase cristais e números metálicos**	https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1364
T7	**Geogebra e a familia dos números metálicos**	https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/download/9024/6626
T8	**Números metálicos**	https://www.academia.edu/8050675/N%C3%BAmeros_Met%C3%A1licos
T9	**As frações contínuas e os números metálicos**	https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9334?locale=pt_BR
T10	**Los números metálicos y su vínculo con la función zeta de Riemann**	https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7177977.pdf
T11	**Zeckendorf representations and mixing properties of sequences**	https://arxiv.org/pdf/1912.01573.pdf
T12	**Números metálicos**	https://repositorio.ufsm.br/handle/1/17184
T13	**Hemi-slant submanifolds in metallic Riemannian manifolds**	https://www.jstor.org/stable/26603386#metadata_info_tab_contents
T14	**A razão áurea e os números de Fibonacci**	https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/10/art26_PMO_SBM_FLUXO2021.pdf
T15	**A família dos números metálicos no ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática na educação básica**	https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/24146/1/numerosmetalicosensinoaprendizagem.pdf
T16	**O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell**	https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1011

(conclusão)

T17	**A Razão de Bronze: uma contribuição de Vera M. W. de Spinadel para o ensino de Matemática**	https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8185

Fonte: Elaborado pelo autor

Após a definição dos dezessete trabalhos segundo os critérios que foram definidos, para contemplar a etapa quatro da revisão (análise das produções), os trabalhos foram submetidos a uma análise, conforme algumas categorias preestabelecidas.

5.3 Análise das produções

Para a análise dos dados, foi considerada a Teoria de Análise do Conteúdo, de Bardin (2016), separando a análise dos trabalhos por categorias. Iniciamos a verificação das obras, atento aos resumos e as palavras-chave de cada trabalho, adaptando a análise à pergunta base e buscando atingir os objetivos específicos desta pesquisa, para isso a análise foi dividida em três categorias, explicitadas no quadro 11.

Quadro 11 – Categorias

OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CATEGORIAS
Analisar algumas propriedades dos números metálicos	Propriedades dos números metálicos
Verificar relações apresentadas entre números metálicos e outros objetos do conecimenti da matemática	Interdisciplinaridade com os números metálicos
Compreender as características dos números metálicos enquanto números irracionais	Características dos números metálicos enquanto números irracionais

Fonte: Elaborado pelo autor.

Buscamos com cada categoria atender a um objetivo específico estabelecido nesta pesquisa. Segundo Bardin (2016, p. 150): “Classificar elementos em categorias impõe a investigação do que cada um deles tem em comum com o outro. O que vai permitir o agrupamento é a parte comum entre eles”. A cerca da análise dos dados, Oloki (2019, p. 22) cita ainda que:

> A extração de dados representa um passo crucial no procedimento da revisão sistemática. Nesta etapa, após a obtenção de uma lista de artigos

> da pesquisa bibliográfica, os revisores tomam informações sistemáticas de cada artigo para servir como matéria-prima para a etapa de síntese.

Para atender a primeira categoria, buscamos responder a seguinte pergunta.

- Que propriedades se destacam nos números metálicos?

O artigo **T1,** escrito por Vera W. de Spinadel, primeira autora a mencionar os números metálicos, foi obtido pela ferramenta de pesquisa Google acadêmico e publicado pela revista Nexus - Architecture and Mathematics. Nele são apresentadas propriedades dos números metálicos como a já demonstrada nessa pesquisa que diz que todo número metálico é um irracional quadrático, demonstrada também em **T8** que acrescenta o fato que todo metálico é sempre maior que um. **T1** mostra também propriedades associadas à sequência de Fibonacci, quando relaciona cada número metálico a uma sequência de Fibonacci generalizada, como mostrou-se na seção primária 3.

O artigo **T2**, também de Spinadel, foi publicado na revista Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, foi obtido através do repositório Academia.EDU. Aborda propriedades aditivas dos números metálicos, como ela cita "satisfazer propriedades aritméticas aditivas e geométricas, conferem a todos os membros da família dos meios metálicos características interessantes para se tornar a base de alguns sistemas de proporções geométricas em Design". Como foi constatado na construção dos retângulos de ouro e de prata, também mostradas na seção primária 3, associados a elementos da natureza e das artes.

De mesma autoria, **T3** é um artigo publicado na revista argentina *Cuadernos de Cimbage*, da Faculdade de Ciências Econômicas de Buenos Aires. Nele, Spinadel demonstra algumas propriedades a respeito dos números metálicos, como as seguintes:

a) São todos números irracionais quadráticos positivos;
b) Todos são obtidos como limites do quociente de termos consecutivos de uma sequência generalizada de Fibonacci;
c) Eles são os únicos números irracionais quadráticos positivos que geram uma SFG (Sequência de Fibonacci Generalizada), com propriedades aditivas que, simultaneamente, é uma progressão geométrica.

Enquanto **T1**, **T2**, e **T3** apresentam propriedades aritméticas dos números metálicos, os artigos **T4** e **T5** apresentam propriedades geométricas. **T4**, encontrado nos periódicos da CAPES de autoria de Viviane Condesse e de Claudia Minnard é um artigo em língua espanhola que apresenta, além das propriedades mostradas em T1, uma atividade voltada para a educação básica expondo a propriedade que relaciona o número de ouro ao pentágono regular. Nessa atividade as autoras utilizam-se de um tangram, diferente do convencional de 7 peças, neste são consideradas 5 peças em formatos triangulares, onde os alunos são intuídos a montarem um pentágono regular com um furo no centro, com formato também de pentágono regular e verificarem que o quociente entre a diagonal e o lado do pentágono resulta no número de ouro, como foi demonstrado na seção 3 desta pesquisa.

A relação entre a diagonal e lado do pentágono regular é apresentada também em **T5**, artigo de Antônia Redondo Buitrago, publicado pela revista argentina *iberoamericana de educación*, porém, sem apresentar a demonstração. Em seu artigo, Buitrago comenta também o fato da razão entre a segunda diagonal e o lado de um octógono regular ser igual ao número de prata, conforme também demonstrado na seção 3.

Respondendo também à pergunta em questão, os artigos **T8** e **T12**, são os que melhor descrevem as principais propriedades dos números metálicos, algumas já demonstradas neste trabalho. T8 é um artigo que tem como autora Fátima Vinagre, professora na Escola Secundária de Azambuja em Portugal, sido encontrado através da plataforma Academia.EDU, dele listamos as seguintes propriedades:

a) Todo o número metálico é um irracional quadrático ou um natural superior a 1.
b) Todo o número metálico inteiro é um natural superior a 1.
c) Para cada número metálico $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, existem $k-1$ números metálicos iguais a k, sendo estes $\varphi_{1,k(k-1)}, \varphi_{2,k(k-2)}, \varphi_{3,k(k-3)}, \cdots, \varphi_{k-1,k}$.
d) Todo o número metálico natural pode ser escrito na forma $\varphi_{p,p+1}$, com $p \in \mathbb{N}$.

e) Todo número metálico da forma $\varphi_{p,n(n+p)}$ é inteiro, quaisquer que sejam p e q $\in \mathbb{N}$.

Já T12**,** tem como autora Adriane Vaz Huber, dissertação encontrada na Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações, defendida em 2019. Podemos verificar em T12 as propriedades listadas a seguir:

a) Todo o número metálico é um irracional quadrático ou um natural superior a 1.
b) Todo o número metálico inteiro é um natural superior a 1.
c) Qualquer número metálico da forma $\varphi_{p,1}$ possui expansão em fração contínua puramente periódica com período igual a p.
d) Todo número metálico $\varphi_{p,q}$ origina um retângulo metálico cuja razão entre seus lados adjacentes é o número $\varphi_{p,q}$.
e) Se removermos p quadrados do retângulo metálico $\varphi_{p,q}$, cujo lado seja igual a largura do retângulo, o retângulo remanescente ainda será um retângulo metálico, se e somente se, o retângulo $\varphi_{p,1}$ for metálico, isto é, forem os números cuja representação em frações contínuas é $[\bar{p}]$.

Percebe-se que algumas dessas propriedades aparecem somente em T8 e outras somente em T12, porém algumas fazem parte da intersecção entre ambos, como verificaremos mais a frente no quadro 12.

T9 é uma dissertação da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, localizada pelo catálogo de teses e dissertações da CAPES de autoria de José Júnior Veloso de Araújo defendida em 2015. Nela, o autor dedica um capítulo às demonstrações das propriedades dos números metálicos, algumas já mostradas em T8 e T12. A propriedade que aparece exclusivamente em T9, demonstrada na seção 3 desta pesquisa, diz que:

1. Seja o número metálico $\varphi_{p,1} = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$. Se p cresce indefinidamente, $\varphi_{p,1}$ tende a ser igual a p.

A dissertação representada por **T15** é da Universidade Tecnológica do Paraná – UTFPR, de autoria de Jessica Augistin Schifler, defendida em 2020.

Apresenta um estudo bibliográfico bem completo da associação dos números metálicos com as relações de recorrência, radicais contínuos e construções geométricas. Nele encontramos também a relação do número de ouro com o pentágono regular e do número de prata com o octógono regular e prova também que “não existe um polígono regular em que a razão entre comprimento da diagonal e o comprimento do lado seja igual ao número de bronze” (SCHIFLER, 2020, p. 42), traduzido de T5.

No quadro 12 é mostrado um resumo das propriedades dos números metálicos apresentadas nessas obras, identificadas pela letra P e em ordem de publicação. Verifica-se também em que trabalho é encontrada cada propriedade.

Quadro 12 – Propriedades dos números metálicos (continua)

IDENTIFICADOR	TÍTULOS	PROPRIEDADES DOS NÚMEROS METÁLICOS
P1	T1, T3	São todos irracionais quadráticos.
P2	T1, T2, T3	Todos são obtidos como limites do quociente de termos consecutivos de uma sequência generalizada de Fibonacci
P3	T1, T2, T3	Eles são os únicos números irracionais quadráticos que geram uma sequência generalizada de Fibonacci secundária (com propriedades aditivas) que, ao mesmo tempo, é uma progressão geométrica.
P4	T8, T9, T12	Todo o número metálico é um irracional quadrático ou um natural superior a 1.
P5	T8, T9, T12	Todo o número metálico inteiro é um natural superior a 1.
P6	T8	Para cada número metálico $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, existem $k-1$ números metálicos iguais a k, sendo estes $\varphi_{1,k(k-1)}, \varphi_{2,k(k-2)}, \varphi_{3,k(k-3)}, \cdots, \varphi_{k-1,k}$.
P7	T8, T9	Todo o número metálico natural pode ser escrito na forma $\varphi_{p,p+1}$, com p$\in \mathbb{N}$.
P8	T9, T12	Qualquer número metálico da forma $\varphi_{p,1}$ possui expansão em fração contínua puramente periódica com período igual a p.
P9	T12	Todo número metálico $\varphi_{p,q}$ origina um retângulo metálico cuja razão entre seus lados adjacentes é o número $\varphi_{p,q}$.
P10	T12	Se removermos p quadrados do retângulo metálico $\varphi_{p,q}$, cujo lado seja igual a largura do retângulo, o retângulo remanescente ainda será um retângulo metálico, se e somente se, o retângulo $\varphi_{p,1}$ for metálico, isto é, forem os

(conclusão)

		números cuja representação em frações contínuas é $[\bar{p}]$.
P11	T4, T5, T15	Em todo pentágono regular, a razão entre a diagonal e o lado é igual ao número de ouro
P12	T9, T8	Todo número metálico da forma $\varphi_{p,n(n+p)}$ é inteiro, quaisquer que sejam p e q $\in \mathbb{N}$.
P13	T9	Seja o número metálico $\varphi_{p,1} = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}$. Se p cresce indefinidamente, $\varphi_{p,1}$ tende a ser igual a p.

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, vemos treze propriedades distribuídas em oito trabalhos. Evidencia-se ainda que T8 e T9 e T12 são os trabalhos que mais apresentaram características inerentes aos números metálicos, respondendo assim à questão de nossa primeira categoria.

Para atender a segunda categoria, nossa análise visou responder à pergunta:

- Que conteúdos podem estar relacionados aos números metálicos?

Os trabalhos T6, T7, T10, T11, T13, T14, T16 e T17 não apresentam propriedades dos números metálicos, mas os relacionam com outros conteúdos da matemática, tais como a estrutura geométrica dos cristais, Equações Quadráticas, Teoria dos Números, Relações de Recorrência, Frações Contínuas, Geometria, e Sequência de Pell.

No livro, representado por **T6**, a autora Fátima Vinagre aborda, além da ligação dos metálicos com sequências recorrentes e frações contínuas, uma curiosa relação dessa família de números à Cristalografia, ciência que se dedica ao estudo dos cristais e da distribuição dos átomos nos sólidos. Nele a autora define os Quase-cristais, substâncias que ao serem difratadas[15] apresentam padrões de imagem ou simetrias de rotação de ordem 5, 8, 10 ou 12, ou seja, a união dos seus átomos se apresenta em formatos de pentágonos, octógonos, decágonos ou dodecágonos e a maneira ao qual esses átomos se unem é modelado por uma recorrência que gera uma sequência generalizada de Fibonacci, que como se viu na seção 3, estão diretamente relacionadas aos números metálicos.

[15] Fenômeno que ocorre quando uma onda vai de encotro a um obstáculo ou atravessa uma fenda. Para cada fenda se molda um padrão de imagem.

T7, artigo publicado pela revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo, a autora apresenta, de maneira bem sucinta, os números metálicos e aborda uma atividade voltada para o ensino básico, estudando as características das raízes das funções quadráticas que dão origem aos números metálicos, utilizando o software Geogebra. A atividade consiste em inserir no software as equações que geram o número de ouro, de prata e de bronze em um mesmo plano cartesiano e efetuar o estudo dos gráficos, identificando os coeficientes que variam, as raízes das equações e as similaridades entre os três gráficos. Para a autora, as tecnologias utilizadas pelos professores “podem motivar o aluno à investigação e exploração de novas descobertas, dando sentido para maior aceitação e formação de conceitos que se deseja ensinar.” (MENDES et al. 2012, p. 171).

O artigo **T10** foi publicado pela revista colombiana *Lecturas Matemáticas*, relaciona alguns dos números metálicos a uma função que teve sua origem na Teoria dos Números, a função Zeta de Riemann[16], definida por $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$, sendo s o número complexo $\alpha + \beta i$, introduzida por volta de 1859. Conforme o autor: “O objetivo principal deste artigo é apresentar alguns resultados nos quais se vinculam os valores da função Zeta de Riemann com os números metálicos[17]” (NOVOA et al. 2017, p. 20, tradução nossa). No artigo o autor relaciona o número de ouro ao valor de $\zeta(2)$ e o número de prata ao valor de $\zeta(3)$. Relaciona ainda o valor de $\zeta(4)$ ao número metálico $\varphi_{6,3}$.

O artigo **T11**, encontrado através da plataforma Arxiv, é apoiado pela fundação de pesquisa alemã por meio do centro de pesquisa colaborativa (Collaborative Research Centre - CRC) apresenta a relação dos números metálicos com o teorema de Zeckendorf, o Teorema de Zeckendorf do número metálico (Metallic Mean Zeckendorf Theorem) que garante que qualquer número inteiro positivo pode ser escrito como combinação linear de termos das sequências que geram os números metálicos, conforme verificado na seção 3.

T13 é um artigo em língua inglesa que se encontra na plataforma JSTOR, foi publicado na revista romena *Carpathian Journal of Mathematics*. Investiga a

[16] Função estudada pelo matemático Georg Riemann (1826 – 1866).
[17] El objetivo principal de este artículo es presentar algunos resultados en los que se vinculan los valores de la función zeta de Riemann con los números metálicos.

relação das subvariedades riemannianas [18] metálicas. Conforme os autores (HRETCANU & BLAGA, 2019, p. 59): “O objetivo desse trabalho é investigar as propriedades das subvariedades semi-inclinadas em variedades Riemannianas metálicas (ou douradas). Usando uma estrutura polinomial em uma variedade e os números metálicos[19]”. (tradução nossa).

O artigo **T14**, relaciona o número de ouro ao retângulo áureo, assim como em T5 e T12. Acrescenta a ligação do número de ouro com triângulos áureos, mostrando que um triângulo isósceles é dito áureo quando “a razão entre um de seus lados côngruos e a base é igual a Φ”. (MOURA, 2021, p. 373). O artigo mostra também que, nesse triângulo, o ângulo interno que não se repete é igual a 36º.

T16, de autoria do professor João Luzeilton de Oliveira, da Universidade Estadual do Ceará - UECE foi publicado pela Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática. Apresenta o número de prata e a relação deste com o retângulo de prata e com o octógono regular, verificadas na seção 3. Aborda principalmente a relação do número de prata com a sequência de Pell (1, 2, 5, 12, 29, 70, ...) sequência recorrente cuja equação característica é a mesma que gera o número de prata. Similarmente, o mesmo autor aborda em **T17**, artigo publicado no Boletim Cearense de Educação e História da Matemática – BOCEHM, a relação do número de bronze com o retângulo de bronze e apresenta a sequência (1, 3, 10, 33, 109, ...) que possui a mesma equação de recorrência cuja sequência converge para o número de bronze, assim como a sequência de Fibonacci converge para número de ouro e a sequência de Pell converge para o número de prata.

Para responder à pergunta da nossa segunda categoria, evidenciamos as palavras-chave de cada obra na nuvem de palavras da imagem a seguir.

[18] Generalização do espaço métrico Euclidiano para o espaço Riemanniano. Assunto abordado em Geometria Diferencial.

[19] Traduzido de: The purpose of the presente paper is to investigate the properties on hemi-slant submanifolds in metallic (or Golden) Riemannian manifolds. Using a polynomial structure on a manifold and the metallic number.

Figura 18 – Nuvem de palavras

Fonte: Elaborado pelo autor

Constata-se então que os números metálicos se inter-relacionam com vários objetos do conhecimento da matemática, tendo ênfase as frações contínuas, as sequências, as relações de recorrência e a geometria, conteúdos abordados na seção 2 de nossa pesquisa.

Para atender a terceira categoria desta RSL, a análise visou responder a seguinte questão.

- Que características os números metálicos apresentam enquanto números irracionais?

A análise dos dezessete trabalhos desta RSL garantiu, conforme o quadro 12, que os números metálicos são todos irracionais quadráticos, segundo **T**1 e **T3**, por serem solução de equações quadráticas da forma $x^2 - px - q = 0$ com p e $q \in \mathbb{N}$. Essa propriedade foi estendida em **T8**, **T9** e **T12** e mostrado que todo o número metálico é um irracional quadrático ou um natural superior a 1, visto que para o menor valor possível para p e q $(p = q = 1)$, a equação tem como solução exatamente o número de ouro e o primeiro número metálico natural é o número de cobre $\varphi_{1,2} = 2$, ao ter $p = 1$ e $q = 2$. As características dos números metálicos, enquanto números irracionais quadráticos, foram encontradas nos trabalhos T4, T7, T9, T12 e T14.

Em **T4** e **T9** encontramos a caracterização dos metálicos irracionais como frações contínuas simples. T4 comenta que “todo número real pode ser expresso como uma fração contínua simples [...], se é um número irracional, se representa mediante uma fração contínua simples infinita[20]” (CONDESSE & MINNARD, 2007, p. 2, tradução nossa). T9 e T12 apresenta a demonstração do teorema atribuído ao matemático Leonard Euler (1707 – 1783) que diz que “Se x é uma fração contínua periódica, então x é um irracional quadrático”. (ARAÚJO, 2015, p. 17). Portanto, todo metálico irracional tem representação em fração contínua simples de forma periódica, como pôde ser verificado na seção 3.

Em **T7** a autora comenta que a atividade apresentada “permitiu-nos relacionar as funções quadráticas e seus respectivos gráficos a números irracionais”. (CRISTINA & FAINGUELERNT, 2012, p.161), e que ao utilizar o software Geogebra possibilitou visualizar onde encontrar os números metálicos irracionais, enquanto raízes de equações quadráticas, no plano cartesiano. Os objetivos da atividade apresentada em T7 eram.

1. Perceber que não há um ponto que expresse as raízes irracionais das funções;
2. Observar e identificar a qual intervalo pertence um número irracional.

E em sua conclusão as autoras comentam (CRISTINA & FAINGUELERNT, 2012, p. 171):

> Conjecturamos que a inserção desse estudo, relacionando a família dos números metálicos ao tópico das funções quadráticas, além da utilização do software Geogebra para auxiliar no ensino dos números irracionais, potencializam a necessidade de aprender com prazer as novas descobertas, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da habilidade de abstrair e perceber o conceito de infinito.

O que mostra a potencialidade do uso dos números metálicos no ensino dos números irracionais.

[20] Todo número real puede expresarse como una fracción continua simple. Si el número es racional, se expresa mediante una fracción continua simple finita; si el número es irracional, se representa mediante una fracción continua simple infinita.

T14 garante que “todos os números metálicos são gerados por razões entre segmentos e são raízes de equações quadráticas”. (SCHIFLER, 2020, p. 31). O que possibilita a abordagem geométrica, mesmo para os metálicos irracionais, como a construção dos retângulos de ouro em Moura (2015), de prata em Oliveira (2022a) e de bronze em Oliveira (2022b). Aponta ainda uma atividade voltada para turmas do 8º ano utilizando a sequência de Fibonacci e o conceito do número de ouro para facilitar o entendimento das definições de números racionais e irracionais, conforme a autora essas definições “normalmente demoram a serem compreendida pelos alunos”. (SCHIFLER, 2020, p. 55). A atividade consistia em calcular os valores das razões entre os termos da sequência de Fibonacci, verificar que são números racionais que, ao passo que aumentam, tendem para um número irracional. Corroborando com o fato de os números metálicos colaborarem com o ensino de diversos conteúdos.

Como resumo, para evidenciar a resposta da terceira categoria, ordenou-se no quadro 13 as características dos números metálicos irracionais, conforme as obras analisadas.

Quadro 13 – Características dos números metálicos irracionais

São irracionais quadráticos
Possuem representação em fração contínua simples periódicas
São gerados através de razões entre segmentos
Possuem grande potencial de uso no ensino dos números irracionais

Fonte: Elaborado pelo autor

Seguindo as etapas definidas para esta RSL, serão apresentados agora os resultados desta revisão.

5.4 Apresentação dos resultados

Para a etapa cinco dessa revisão (Apresentação dos resultados da RSL), tem-se que, após a análise qualitativa dos dezessete trabalhos segundo os critérios estabelecidos, da primeira categoria de análise foram retiradas treze propriedades relativas aos números metálicos, algumas relacionadas à Aritmética, outras à Geometria.

A análise sugere a possibilidade do estudo dessas propriedades junto a outras áreas do conhecimento, por exemplo, o fato dos números metálicos serem irracionais quadráticos pode ser utilizado em problemas de modelagem matemática ou de computação. Pode ser analisado ainda uma comparação entre essas propriedades com propriedades de outras sequências numéricas, como a sequência dos números primos, estabelecendo padrões e regularidades, ajudando a compreender melhor as propriedades matemáticas comuns a essas sequências. Das propriedades aritméticas destacamos a que diz: todo o número metálico é um irracional quadrático ou um natural superior a 1, demonstrada na seção 3.1, por além de caracterizar os números metálicos, ser mais uma opção para o ensino dos números irracionais e das equações quadráticas na educação básica. Já das propriedades geométricas destaca-se a relação do número de ouro com o pentágono regular, vista na seção 3.4, por possuir forte base histórica, pois foi, segundo Livio (2011), a preocupação com o pentágono combinada com o conhecimento geométrico que havia no meio do século V a. C. que tornou plausível aos pitagóricos a descoberta da Razão Áurea e, através dela, da incomensurabilidade[21].

Destaca-se da segunda categoria adotada na análise das obras que a família dos números metálicos apresenta relações com diversos contextos matemáticos que vão desde a educação básica, no que diz respeito ao ensino e construção do entendimento lógico de alguns conteúdos, à educação superior, quando os relaciona com conteúdos a níveis de graduação e pós-graduação. Destacando sua relevância na Teoria dos Números e na Geometria Fractal, na primeira os números metálicos são objeto de estudo em relação às suas propriedades aritméticas e a sua distribuição nos números reais, na segunda, os números metálicos estão relacionados com a dimensão fractal de certas figuras geométricas.

Por serem uma classe particular de números irracionais e por estarem diretamente ligados a uma equação quadrática, destaca-se da terceira categoria de análise desta RSL que quando associados ao ensino da Matemática, os números metálicos podem ser grandes aliados dos professores.

---

[21] Conceito filosófico que se refere à ideia de que algumas entidades ou conceitos não podem ser comparados ou medidos em relação a outras entidades ou conceitos usando uma unidade comum de medida.

Fazendo um paralelo com os números primos, que “vem sendo estudados pelos matemáticos desde 500 a.C., aproximadamente” Probst (2003, p. 4), e que hoje, cita Verma (2013, p.111) “não apenas entretém os matemáticos; recentemente, eles também possuem uma aplicação prática muito importante. São a chave para códigos criptografados, que mantém o comércio via internet seguro”, salientamos a potencialidade da temática dos números metálicos, que tiveram seus estudos introduzidos em 1997 e hoje já se mostram importantes ao se relacionarem com ramos da Matemática, como Cristalografia no trabalho de Vinagre (2009) em Portugal, Geometria Diferencial como nos estudos de Hretcanu & Blaga (2019) da Romênia e Teoria dos Números em Mañibo et al. (2019) estudo colaborativo entre Alemanha e as Filipinas. Destacando-se também o artigo de Novoa et al. (2017) da Universidade de Granma em Cuba, onde se estabelecem relações dos números de ouro e de prata respectivamente aos valores $\zeta(2)$ e $\zeta(3)$ da função zeta de Riemann, assim como relaciona o valor de $\zeta(4)$ com o número metálico $\varphi_{6,3}$ e “consideram que o resto dos valores da função Zeta de Riemann com argumentos inteiros estão vinculados aos números metálicos, mas isso fica a consideração da comunidade científica desta área de investigação[22]”. (NOVOA et al. 2017, p. 26, tradução nossa), mostrando ser um estudo inacabado quando deixa aberta a comunidade acadêmica esta conjectura.

Verifica-se, portanto, que os números metálicos se mostram propícios ao ensino e aprendizagem da matemática ao se associarem a conteúdos da matemática elementar, não somente dos números irracionais, mas também funções quadráticas, sequências e geometria.

Em resumo, o estudo dos números metálicos tem se mostrado um campo promissor e em constante evolução na matemática.

[22] NOVOA et al. (2017, p. 26), Los autores consideran que el resto de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros están vinculados a los números metálicos, pero esto queda a consideración de la comunidad científica de esta área de la investigación.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, abordamos o desenvolvimento do estudo dos números metálicos tendo como diretriz a pergunta: como se encontra o desenvolvimento do estudo dos números metálicos no meio acadêmico? Com o intuito de auxiliar na obtenção da resposta, o objetivo geral que guiou todo o processo de construção desta pesquisa foi de investigar esse desenvolvimento. A análise dos trabalhos revelou que a maioria deles é recente e aborda conteúdos relacionados à campos atuais da matemática. Essas pesquisas demonstram um interesse cada vez maior em compreender os números metálicos, incluindo suas propriedades e aplicações, indicando que o estudo desses números se encontra em um estágio promissor.

Dessa forma, nosso primeiro objetivo específico era analisar algumas propriedades dos números metálicos. Utilizando o método da revisão sistemática da literatura, investigamos como cada autor entende, define e relaciona essas propriedades com outros campos da matemática. Ao fazer isso, pudemos apresentar conteúdos relacionados aos números irracionais e geometria, incluindo a relação entre diagonais e lados de polígonos, que são temas estudados no ensino fundamental, além de sequências e relações de recorrência, conteúdos comumente abordados no ensino médio. Também exploramos tópicos avançados, como Teoria dos Números e Geometria Diferencial, que são vistos em cursos de graduação e pós-graduação. Essa análise evidencia que os números metálicos estão presentes em todas as etapas da educação.

Além disso, nosso segundo objetivo específico era verificar as relações apresentadas entre os números metálicos e outros objetos do conhecimento da matemática. A análise das obras, juntamente com o plano de aula sugerido na seção 4, demonstra que é possível utilizar os números metálicos como aliados no ensino e aprendizagem da matemática, introduzindo-os em turmas de ensino fundamental e médio. Consideramos até mesmo a possibilidade de incluir o conteúdo dos números metálicos em livros da educação básica, associados à introdução do conjunto dos números irracionais ou a tópicos clássicos de Geometria, com o objetivo de despertar curiosidade e habilidades de investigação nos estudantes.

No decorrer da pesquisa, encontramos algumas dificuldades. Porém, essas dificuldades foram superadas por meio de uma extensa revisão bibliográfica e análise minuciosa dos trabalhos selecionados, garantindo a robustez dos resultados obtidos.

Considerando uma perspectiva futura dessa pesquisa, acredita-se que os resultados alcançados podem ser utilizados como base para futuros estudos relacionados a números metálicos. Novas investigações podem aprofundar-se em propriedades específicas, explorar aplicações práticas ou até mesmo examinar a influência dos números metálicos em outros ramos da matemática. Esse campo de pesquisa promissor pode contribuir para um melhor entendimento dos números metálicos e suas implicações.

Em conclusão, esta pesquisa permitiu detalhar e organizar as propriedades dos números metálicos, bem como identificar os ramos da matemática aos quais estão associados. Os resultados obtidos corroboram o potencial dos números metálicos como recursos de ensino e aprendizagem, desde o ensino fundamental até níveis mais avançados. Com um enfoque cuidadoso na introdução e exploração dos números metálicos, é possível despertar o interesse dos estudantes, incentivando sua curiosidade e ampliando suas habilidades matemáticas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, José Júnior Veloso de. **As frações contínuas e os números metálicos.** 2015. 50 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luís Antero Neto, Augusto Pinheiro. São Paulo. Edições 70. 2016.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números, uma história ilustrada da matemática**. tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar. 2009.

BUILTRAGO, Antônia Redondo. **Polygons, Diagonals, and the Bronze Mean**. 2007. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s00004-007-0046-x. Acesso em: 27 dez. 2022.

BROETTO, Geraldo Cláudio. Wagner, Vânia Maria Pereira dos Santos. **O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática:** um círculo vicioso está em curso? Rio Claro - SP. 2019. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a14. Acesso em: 10 fev. 2023.

CASTELBLANCO, Deissy M. S. **Frações contínuas**. São Paulo. 2015. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5430903/mod_resource/content/2/Fra-cont-15.pdf. Acesso em: 15 fev. 2023.

COLTO, Aline Grassi. **Frações contínuas e números reais**. 2017. 63f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal da Grande Dourados, Dolrados, 2017.

CONDESSE, Viviana. MINNARD, Claudia. La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro. **Revista Iberoamericana de Educación**, Zamora, n. 42, 2007. Disponível em: http://repositorio.unlz.edu.ar:8080//handle/123456789/320. Acesso em: 11 jan. 2022.

CRAVEIRO, M.; TEIXEIRA M.A.G. Uma Interpretação Combinatória para os Números de Catalan. **Porandu**, v. 3, p. 41 – 48, 2019.

DONATO, Helena. DONATO, Mariana. **Etapas na Condução de uma Revisão Sistemática.** Lisboa. 2019. Disponível em: https://doi.org/10.20344/amp.11923. Acesso em: 8 dez. 2022.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues, Campinas: Unicamp, 2004.

GALVÃO, Maria Cristiane Barbosa. RICARTE, Ivan Luis Marques. **Revisão sistemática da literatura:** conceituação, produção e publicação. Rio de Janeiro. 2020. Disponível em: https://doi.org/10.21728/logeion.2019v6n1.p57-73. Acesso em 27 dez. 2022.

HEFEZ, Abramo. VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e equações algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HRETCANU, Cristina E. BLAGA, Adara M. **Hemi-slant submanifolds in metallic Riemannian manifolds**. 2019. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/26603386#metadata_info_tab_contents. Acesso em 27 jan. 2023.

HUBER, Adriane Vaz. **Números metálicos**. 2019. 65f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel**. Fundamentos de matemática elementar, Vol. 4**. São Paulo: Atual, 1993

KOLLER, Sílvia H. COUTO, Maria Clara P. de Paula. HOHENDORFF, Jean Von. **Manual de produção científica**. Porto Alegre: Penso, 2014.

LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio, Vol. 2.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Francisca Luana Alves de. **Aproveitamento de resíduos de frutos na elaboração de hambúrgueres com potencial valor nutritivo:** uma revisão. 2021. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Alimentos) - Centro de Ciências Agrárias, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

LÍVIO, Mário. **Razão áurea, A história de Fi**. Rio de Janeiro: Record, 2011.

MANIBO, Neil Eden MIRO Delight P., RUST, Dan. TADEO Gwendolyn S. **Zeckendorf representations and mixing properties of sequences.** 2019. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1912.01573.pdf. Acesso em: 27 jan. 2023.

MENDES, Luiz Otavio Rodrigues; PEREIRA, Ana Lucia. **Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática:** análise do processo e proposição de etapas. São Paulo: EMP, 2020. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p196-228. Acesso em: 28 dez. 2022.

MENDES, Sônia Cristina da Cruz. FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Rodrigues, Chang Kuo. Geogebra e a família dos números metálicos. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012. São Paulo. **Anais**... São Paulo: [s.n.], 2012. p.160-171. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/download/9024/6626. Acesso em: 28 dez. 2022.

MORETO, Gisleno Lopes da. **Os números de Fibonacci e a representação de Zeckendorf**. 2021. 43f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Campo Grande, 2021.

MORGADO, Augusto César. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

MOURA, Yuri Teles. **A razão áurea e os números de Fibonacci**. 2021. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo926. Acesso em: 28 dez. 2022.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Fundamentos de Cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NOVOA, Fidel López. GONZÁLEZ-AGUILERA Andrés A., ROQUE, Eduardo Renato Moreno. ZALDÍVAR, Pedro M. Ricardo. Los números metálicos y su vínculo con la función zeta de Riemann. **Lecturas matemáticas,** v. 1, 2017. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7177977.pdf. Acesso em 28 dez. 2022.

OKOLI, Chitu. Guia para realizar uma Revisão Sistemática de Literatura. **EAD em Foco,** v. 9, n. 1, 2019.

OLIVEIRA, João Luzeilton de. **A Razão de Bronze:** uma contribuição de Vera M. W. de Spinadel para o ensino de Matemática. 2022a. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/8185. Acesso em 27 dez. 2022.

OLIVEIRA, João Luzeilton de. O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática,** *[S. l.]*, v. 9, n. 27, p. 1–17, 2022. Disponível em https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1011. Acesso em: 28 dez. 2022.

PROBST, Roy Wilhelm. **Números Primos**. 2003. 53f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2003.

SCHIFLER, Jessica Augustin. **A família dos números metálicos no ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática na educação básica**. 2020. 72f. Dissertação (Mestrado em Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

SILVA, Bruno Astrolino e. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. 2017. 99f. Dissertação (Mestrado em Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

SILVA, Victor Hugo Ferreira. **Proporções matemáticas aplicadas às artes gráficas:** Um estudo sobre os números irracionais nas Artes e no Design. 2021. Disponível em: https://play.google.com/books/reader?id=zAsrEAAAQBAJ&pg=GBS.PA66&hl=pt-BR. Acesso em 13 jan. 2023.

SPINADEL, Vera W. de. **La família de números metálicos y disseno**. 1997. Disponível em: https://itc.scix.net/pdfs/4856.content.pdf. Acesso em: 28 dez. 2022.

SPINADEL, Vera W. de. La familia de numeros metálicos. **Cuadernos Del Cimbage,** p. 17 – 44, 2003.

SPINADEL, Vera W. de. The metallic means Family and multfractal spectra. **Nonlinear Analysis,** Buenos Aires, n. 36, 1999. Disponível em: https://www.academia.edu/26484882/The_metallic_means_family_and_multifractal_spectra?email_work_card=title. Acesso em: 28 dez. 2022.

SPIRA, Michel. A espiral logarítmica e o logo da SBM. **Revista Universitária**, v. 2, 2021. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/11/sites/11/2022/01/RMU-2021_2-6.pdf. Acesso em: 10 jan. 2023.

VERMA, Surendra. **Ideias geniais na matemática:** teoremas, teorias e curiosidades. Tradução de Amanda Pavani. São Paulo: Gutemberg, 2013.

VINAGRE, Fátima. **Números metálicos**. [S.l.]: Escola Secundária de Azanbuja, 2014.

VINAGRE, Fátima. Quase cristais e os números metálicos. **Gazeta da matemática,** 2009. Disponível em: https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1364. Acesso em: 10 jan. 2023.

APÊNDICE A – PLANO DE AULA REFERENTE À SEÇÃO 4

TEMA

Uso dos números metálicos no ensino dos números irracionais

Duração

2 h/a

Objetivos

Objetivo geral:

- Reconhecer a importância dos números irracionais.

Objetivos específicos:

- Reconhecer um número irracional como medida geométrica;
- Localizar números irracionais na reta real;
- Reconhecer os números metálicos como números irracionais.

Conteúdos

Geometria básica;
Equação do segundo grau.

Recursos didáticos

Quadro;
Papel;
Projetor;
Computador e uso do software *Geogebra*

Procedimento metodológico

- Determinar geometricamente o valor da diagonal de um quadrado de lado 1;
- Definir os números irracionais;
- Determinar a localização aproximada do valor $\sqrt{2}$ na reta numérica;
- Apresentar a definição e os principais números metálicos e localizar sua posição na reta numérica;
- Apresentar os retângulos de ouro e de prata;

Atividade

- Usar o software Geogebra para analisar os gráficos das funções que geram os números metálicos.

Avaliação

- Propor aos estudantes calcular as medidas de determinadas formas retangulares, como paredes, pisos, folha de papel, estojo determinando assim a razão entre largura e comprimento e verificando se encontram aproximações para os números metálicos.