UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO RAFAEL DE ABREU GOMES

A EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: DE PLATÃO A GÖDEL

FORTALEZA – CEARÁ
2023

ANTONIO RAFAEL DE ABREU GOMES

A EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: E PLATÃO A GÖDEL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Gomes, Antonio Rafael de Abreu.
A evolução do pensamento matemático: de Platão a Gödel [recurso eletrônico] / Antonio Rafael de Abreu Gomes. - 2023.
93 f. : il.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Nicolas Alcântara de Andrade.
1. evolução. 2. pensamento matemático. 3. consistência.. I. Título.

ANTONIO RAFAEL DE ABREU GOMES

A EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO:
DE PLATÃO A GÖDEL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 15 de maio de 223.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nícolas Alcântara de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedicado aos que tornaram essa jornada possível: minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

À minha família, por todo o apoio e amor incondicional. Em especial:
À Dona Rocilene, minha mãe, por todo seu carinho e auxiliou durante minha jornada;
À minha esposa Daniele, pela paciência e dedicação para comigo e nossos filhos;
Aos meus Tios Cláudio e Meiriane, pelo acolhimento e carinho dado à minha família;
À minha irmã Rafaela Abreu, por suas críticas e sugestões durante a construção do texto.
Também gostaria aqui de destacar o importante papel que o meu orientador professor Nicolas Alcântara de Andrade teve durante a construção deste trabalho. Sempre solicito e atencioso, apresentou críticas e sugestões que enriqueceram ainda mais a abordagem do tema.
Aos meus colegas de turma Arthur Teixeira, Danilo Magalhães, Felipe Guimarães, Mardney de Castro, Rafael Mendonça, Sergio Monteiro, Tiago Nobre pelo companheirismo durante essa difícil trajetória.
Aos professores Leo Ivo da Silva Sousa, Nicolas Alcântara de Andrade e Tiago Caula Ribeiro pelos significativos conhecimentos repassados durante as aulas.

"Ou a matemática é grande demais para a mente humana ou a mente humana é mais do que uma máquina."

(Kurt Gödel)

RESUMO

Analisar como o homem evoluiu seu pensamento matemático através dos anos, buscando alcançar sua consistência e completude, é o objetivo central deste estudo. Para tanto, utilizaremos de uma pesquisa bibliográfica que tem seu ponto de partida, na discussão sobre a origem do conhecimento matemático e como nos apropriamos dele, iniciada na Grécia Antiga com as correntes de pensamento de Platão e Aristóteles, e que ao longo dos anos influenciaram matemáticos e filósofos. Porém, foi durante a Idade Moderna que este debate se intensificou, com o surgimento do Racionalismo, Empirismo, Criticismo, Logicismo, Intuicionismo e Formalismo. Estas escolas do pensamento, vislumbravam comprovar a consistência e completude do pensamento matemático, buscando estruturá-lo sobre bases sólidas do conhecimento. Entretanto, no início do século XX, um jovem matemático chamado Kart Gödel, publicou um artigo científico, demonstrando que se o conhecimento matemático fosse consistente, ele seria incompleto, e se fosse completo, seria inconsistente. Sua afirmativa foi aceita pela comunidade científica e frustrou os matemáticos da época, que acreditavam na consistência e na completude da matemática. Contudo, essa conclusão não minimiza a importância de todo o debate desenvolvido através dos anos, pois foi através dele, que aperfeiçoamos nossa matemática. Também mostrou, que a matemática sempre nos desafiará a desvendar seus mistérios, enquanto nós, devemos ser humildes e admitirmos que há sempre algo de novo a descobrir sobre ela, e que ainda há muito para se evoluir neste campo, em que as verdades são sempre colocadas a prova.

Palavras-chave: evolução; pensamento matemático; consistência.

ABSTRACT

Analyzing how man has evolved his mathematical thinking over the years, seeking to achieve consistency and completeness, is the central objective of this study. To do so, we will use a bibliographical research that has its starting point in the discussion about the origin of mathematical knowledge and how we appropriate it, started in Ancient Greece with the currents of thought of Plato and Aristotle, and that over the years have influenced mathematicians and philosophers. However, it was during the Modern Age that this debate intensified, with the emergence of Rationalism, Empiricism, Criticism, Logicism, Intuitionism and Formalism. These schools of thought sought to prove the consistency and completeness of mathematical thought, seeking to structure it on solid foundations of knowledge. However, at the beginning of the 20th century, a young mathematician named Kart Gödel, published a scientific paper, demonstrating that if mathematical knowledge were consistent, it would be incomplete, and if it were complete, it would be inconsistent. His statement was accepted by the scientific community and frustrated the mathematicians of the time, who believed in the consistency and completeness of mathematics. However, this conclusion does not minimize the importance of the entire debate developed over the years, as it was through it that we perfected our mathematics. It also showed that mathematics will always challenge us to unravel its mysteries, while we must be humble and admit that there is always something new to discover about it, and that there is still much to evolve in this field, in which truths are always put to the test.

Keywords: evolution; mathematical thinking; consistency.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\equiv$	Congruente a
$\wedge$	e
$\vee$	ou
$\rightarrow$	Implica que
$\leftrightarrow$	Se, e somente se
$\Rightarrow$	Implicação
$\therefore$	Portanto
$\neg$	Negação
$\approx$	Correspondência biunívoca
$\in$	Pertence a
$\notin$	Não pertence a
$\exists$	Existe um
$\forall$	Para todo
$\sim$	Abreviatura de “não”
$\supset$	Se, … então
$\cdot$	Abreviatura de “e”
$=$	É igual

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O caminho percorrido pelo pensamento matemático até sua estrutura atual foi um processo lento e rico em debates a respeito de sua origem, da forma como o concebemos, culminando na análise de sua consistência e completude. Desejando analisar como esta evolução ocorreu através dos anos, realizamos um estudo das principais correntes desse pensamento, desde a Grécia antiga até o início do século XX, onde um resultado alcançado por um jovem matemático afirmou que a consistência e completude da matemática, não podem ambas, serem alcançadas. Para atingir nosso objetivo, utilizamos uma pesquisa bibliográfica, de cunho exploratório, apresentada através de uma linguagem simples, porém técnica, de textos clássicos da matemática como "Os Elementos" escrito por Euclides (300 a. C.), obras da Idade Moderna como "A Crítica da Razão Pura" de Imanuell Kant e textos mais atuais que dão ênfase à temática.

Nossa análise tem início nas duas principais correntes do pensamento matemático presentes no período da Grécia Antiga: o Platonismo e o Aristotelismo que iniciaram um longo debate sobre a concepção dos objetos matemáticos, como o homem os conhece e sua apropriação deles. Evidenciaremos os principais pontos de discrepância entre essas duas correntes, e como influenciaram todo o conhecimento matemático construído até os dias atuais, tanto que durante séculos, pouco se evoluiu nesse debate, e somente na Idade Moderna que observamos a retomada desses questionamentos que originaram outros, como por exemplo, o da consistência do conhecimento matemático. Assim, após analisar o pensamento proposto na Grécia Antiga, daremos um salto no tempo e sairemos de um período anterior a Cristo para o séc. XV, sendo feitas ressalvas sobre acontecimentos importantes que ocorreram entre essas datas.

Após esse salto, retomaremos nossa análise comparando o racionalismo de René Descartes, com influências platônicas, e o empirismo de David Hume, com influências aristotélicas, apresentando seus principais pontos de discordância. Para facilitar a compreensão, serão construídas tabelas comparando essas duas correntes de pensamento, e também, tabelas que irão compará-las com suas origens: platonismo e aristotelismo. As diferenças entre esses dois pensamentos, dividiram a opinião dos matemáticos da época, fazendo com que cada uma tivesse seus adeptos. Porém, em meados do séc. XVIII, Imanuell Kant tentará conciliar essas duas linhas de pensamento em uma só, criando um sistema de juízos, em que as principais características de cada pensamento se relacionam em uma estrutura complexa do pensamento humano. Contudo, sofrerá várias críticas, por não aceitar como verdadeiros vários conhecimentos matemáticos, o que fez com que sua linha de pensamento fosse deixada de lado.

Foi justamente neste período histórico, que a matemática sofreu diversas crises em seus conhecimentos, ocasionando a criação de várias escolas do pensamento matemático como: o Logicismo de Frege e Russell, o Intuicionismo de Brouwer e o Formalismo de Hilbert. Essas tiveram como base alguns dos pensamentos platônicos e aristotélicos, e tinham como propósito, recolocar o conhecimento matemático sobre uma base sólida e fundamentada na aritmética. A partir desse ponto, a discussão inicial que era sobre origem e concepção do conhecimento, deu lugar à busca pela sua consistência e completude. Porém, em 1931, o jovem matemático Kart Gödel, provará que tais questões são excludentes, ou seja, se uma ocorrer, a outra não irá. Todavia, a beleza e importância do conhecimento matemático não foi ofuscada, tampouco, deixou de contribuir para a evolução das ciências naturais e da humanidade.

2 OS PENSAMENTOS MATEMÁTICOS NA GRÉCIA ANTIGA

Iniciaremos nossa análise dialogando com a obra "*Filosofias da Matemática*" de Silva (2007) e os trabalhos de Puente (2001), Paula (2009) e Fernandes (2010), buscando evidenciar a matemática antes e durante a Grécia Antiga. Colocaremos no centro desta análise, os pensamentos de Platão e Aristóteles, comparando-os e apresentando definições para as principais ideias presentes que serão construídas tomando como base um diálogo com os autores acima citados.

2.1 A Matemática Anterior e Contemporânea a Platão e Aristóteles

O ingresso da matemática na cultura ocidental se deu como uma técnica de fazer cálculos aritméticos e geométricos elementares, com origens nos primórdios da história como, por exemplo, com os egípcios e na Mesopotâmia. Estes, indiscutivelmente foram bons matemáticos, muito embora lhe faltassem um caráter sistemático, rigoroso e puro na formulação de suas matemáticas que eram pautadas no empirismo, devido às aplicações práticas necessárias à época, ou seja, para estas culturas a matemática era uma espécie de ferramenta que viabiliza trabalhos.

Essas civilizações dominavam conhecimentos como o teorema de Pitágoras, mas falta-lhes uma demonstração rigorosa, que só foi obtida posteriormente pelos gregos com sua matemática bem característica, ou seja, fundada em bases geométricas. Ao falarmos nos gregos, temos que o início de sua matemática pode ser remetido ao tempo de Tales de Mileto (VI a.C), a quem tradicionalmente atribui-se a primeira demonstração, ainda que pelo método empírico de superposição. Tanto ele quanto Anaximandro e Anaxímenes, beberam em fontes matemáticas gregas e não gregas.

Contudo, podemos considerar que os primeiros grandes matemáticos gregos tenham sido mesmo Pitágoras de Samos (VI a.C) e seus seguidores, que criaram uma seita mística onde praticavam uma corrente de pensamento que privilegiava a razão dentre as faculdades humanas, sendo ela o fundamento de todo o conhecimento possível. Apesar de pouco sabermos sobre a vida de Pitágoras e seus feitos, os pitagóricos são conhecidos principalmente por sua teoria, que mistura física, metafísica e mágica, argumentando que tudo se reduz a números. Também é atribuído aos pitagóricos a descoberta das grandezas incomensuráveis.

Além de Tales de Mileto e Pitágoras, outro personagem que influenciou bastante Platão e Aristóteles (este de forma mais contundente) foi Sócrates, conhecido como o “pai” da ética e da ironia. O princípio socrático priorizava a antropologia[1] e a subjetividade infinita, a partir do qual ele argumenta que o homem deve descobrir, a partir de si, a razão de seus atos, compreender o universo e chegar ao conhecimento da Verdade. Nessa perspectiva, mas diferindo em alguns pontos, Platão e Aristóteles fundamentaram as bases de seus pensamentos matemáticos e influenciarão matemáticos contemporâneos e posteriores a seus tempos.

Euclides (III a.C.) foi um desses matemáticos. Sua obra “*Os Elementos”* apresentou demonstrações simples e elegantes, reunindo boa parte da produção matemática grega, cabendo a ele completar as lacunas lógicas necessárias. A forma com que executou tal tarefa chama atenção, pois as fez partindo de um sistema mínimo e supostamente completo de verdades não-demonstradas e indemonstráveis (axiomas e postulados). A forma racional usada por ele para enunciar e demonstrar “*Os Elementos”* deu início ao que podemos chamar de método axiomático-dedutivo, que serviu de modelo para toda a matemática a partir de então.

Apesar de toda a genialidade da matemática grega, havia nela limitações. Um exemplo é seu sistema numérico denso, sem representação para o zero e com a inexistência da álgebra. Portanto, ao pensarmos na matemática grega é, portanto, a geometria euclidiana que nos concentramos (neste tópico eles foram mestres insuperáveis). Esta é fundamentalmente a matemática conhecida por Platão e Aristóteles. Porém, mestre e discípulo discordavam sobre alguns pontos que darão início aos diálogos propostos por esse estudo. Será esta discordância de pensamento que passaremos a analisar e comparar.

2.2 Platonismo e Diánoia

Iniciaremos nossa análise buscando compreender a filosofia do pensamento de Platão (429 ~ 347 a.C.). Para ele, a realidade (sentida ou apenas pensada) divide-se em dois níveis: a *Diánoia* e o *Mundo Sensorial*, que definiremos tomando como base a obra “*Filosofias da Matemática*” de Silva (2007).

Definição 2.2.1: A *Diánoia* é um mundo atemporal, transcendente perfeito e imutável e que só pode ser acessado através da razão ou pelo entendimento.

[1] Segundo Aurélio (2018) é a ciência que se dedica ao estudo da espécie humana em sua totalidade, tendo em conta sua origem, desenvolvimento (físico, social, cultural), comportamento, psicologia, particularidades raciais, hábitos, costumes, conhecimentos, crenças etc.

Segundo o pensamento platonista, é nesse mundo que habitam os objetos matemáticos perfeitos, como os círculos e triângulos perfeitos e a ideia de número. Morfologicamente, "*diánoia*" é uma palavra grega composta pelo prefixo "*dia"* (por meio, através de) e uma variação do sufixo *"noein"* (pensar).

Logo, uma tradução possível seria:

$$DIÁNOIA = O\ processo\ do\ pensamento$$

Definição 2.2.2: O *Mundo Sensorial* é o mundo no qual habitamos e usamos nossos sentidos para perceber tudo que nos cerca. Para Platão, este mundo é imperfeito, corruptível e passa por incessantes transformações. Dessa forma, o *Mundo Sensorial* é apenas um reflexo imperfeito da *Diánoia*.

Para ele, a *Diánoia* se distingue da *Nóesis* (a razão pura), a primeira é apropriada ao conhecimento da aritmética e da geometria, enquanto a segunda é a ciência filosófica por excelência. Apesar das duas serem atividades próprias à inteligência, a *Nóesis* nos fornece a única *Episteme* (ciência) verdadeira, enquanto a faculdade do entendimento nos fornece o produto do próprio entendimento, que é uma forma mais baixa de ciência e compreende exemplarmente a aritmética e a geometria. Para Platão, a ciência e o entendimento têm por objetivo a *Diánoia*. Por outro lado, a opinião é vista como uma crença ou conjecturas, que unida ao reino sensorial, compõem o mundo real habitado por cópias imperfeitas das Ideias e Objetos matemáticos. Segundo Platão, o real está para o sensível, assim como a inteligência está para a opinião; e aquela está para esta, assim como a ciência está para a crença, e o entendimento, para a conjectura.

Segundo Silva (2007), na linha de pensamento platonista, somente na *Diánoia* encontraremos, por exemplo, a ideia de circularidade perfeita, cabendo ao mundo sensorial que experimentamos nos apresentar apenas figuras aproximadamente circulares. Para um platonista, as ideias e formas matemáticas não admitem exemplos sensíveis, por não admitirem interferência dos sentidos no exercício do entendimento, o que contraria a razão pura. Conta-se que havia uma inscrição no pórtico da Academia de Platão que alertava para que não entrasse ali quem não conhecesse geometria, e isso porque ele a considerava, além de exemplo de conhecimento intelectual, uma atividade propedêutica essencial à filosofia própria. A academia foi fundada por ele em Atenas por volta de 387 a. C., e o próprio Platão a dirigiu até sua morte por volta de 347 a.C. Mesmo após esse acontecimento, a Academia sobreviveu até o ano de 529 d.C., quando foi fechada pelo imperador cristão Justiniano, sob a acusação de paganismo.

Segundo Platão, os geômetras contemporâneos seus, ao lançarem mão de gráficos e diagramas de natureza empírica e argumentos construtivistas, utilizaram do entendimento para realizar suas descobertas. Ou seja, apesar de trabalharem com objetos imperfeitos, conseguiam vislumbrar, através do entendimento, e analisar suas formas perfeitas. Mesmo que houvesse, no tempo de Platão, os sistemas axiomáticos modernos, estes seriam vistos como um produto do entendimento. Para ele, as ideias matemáticas admitem instâncias perfeitas e não são acessíveis aos sentidos. Para que possamos entender um exemplo clássico do pensamento platonista, se faz necessário termos em mente, as seguintes definições que foram construídas a partir de um diálogo com o texto "*Movimento e existência desde o Uno em Plotino: contribuições pitagóricas*" de Fernandes (2010):

Definição 2.2.3: *Mônada* é a ideia perfeita de unidade que habita a *Diánoia*. Ela pode ser contada e até somada. Comparando com nosso sistema de numeração, a *Mônada* seria nossa unidade inteira (1 *Mônada* = 1 unidade).

Definição 2.2.4: *Arithmoi monadikoi* são os agrupamentos de *Mônadas* que compõem os números matemáticos. Comparando com nosso sistema de numeração atual, seriam os números compostos pelos agrupamentos de unidades (Ex: 9 *Mônadas* = 9 unidades).

Definição 2.2.5: *Arithmoi eidetikoi* trata-se das instâncias perfeitas das Ideias numéricas

Exemplos 2.2.1 $\{\bullet\ \bullet\}$ o conjunto ao lado pode ser visto como uma instância do número 2. Os *números eidéticos* são classes únicas ou instâncias perfeitas de um número que se distinguem quanto à quantidade de mônadas agrupadas em sua composição.

De posse destas definições, podemos compreender como o pensamento platonista entende a ideia de dualidade ou instâncias do número 2, que são simplesmente coleções de duas mônadas. Para que Platão pudesse admitir uma soma de dois números idênticos, precisou assumir a existência de várias instâncias perfeitas desse número, pois para ele os números eidéticos eram singulares, então como admitir por exemplo 2 + 2 = 4, se só existia um único número 2. A saída foi mesmo ter que assumir uma pluralidade desses números, ou seja, Platão assumiu que existem várias formas das Ideias perfeitas da matemática. Dessa maneira, podemos diferenciar "*Ideia* e *Forma"* usando a seguinte premissa: "*Ideia*" são as ideias perfeitas da matemática (como triangularidade) e "*Forma*" são seus vários exemplos perfeitos e distintos um a um, que habitam a "*Diánoia"*. Um outro exemplo, seria a forma da dualidade, comum a todos os pares de coisas, quaisquer que sejam elas. Para Platão, as "*Formas"* participam de suas respectivas "*Ideias"* como se a "*Ideia"* de 2 fosse um conceito ou noção geral e as suas infinitas instâncias fossem a extensão desse conceito. Vale ressaltar que para ele as "*Ideias"* não se subordinam às "*Formas"*, porém faz sentido dizer que uma "*Forma"* aplica-se a si própria.

De forma geral, é possível afirmar que, segundo a concepção platônica, os pares de objetos do mundo físico têm apenas uma relação de semelhança com as "*Formas"*. Dizemos que um par qualquer de objetos tem a forma do número 2, e isso é um modo de dizer que ele é semelhante a um qualquer número 2, mas não é um deles. Podemos então afirmar, que há uma isomorfia entre os pares e a "*Ideia"* do número 2, excluindo a identidade. As "*Formas"* ocupam, assim, uma posição intermediária entre as "*Ideias"* e as coisas do mundo físico, que é imperfeito e acessível aos sentidos.

Agora é possível entendermos o porquê de Platão criticar os geômetras quando utilizam a linguagem construtivista (como por exemplo: prolongar, construir, estender, traçar etc), pois, para ele, não seria possível construir tais "*Ideais"* no mundo sensorial, apenas representá-las por meio de formas imperfeitas, cabendo ao geômetra apenas "ascender" até elas por meio do intelecto e estudá-las. Quanto aos sentidos, estes podem apenas conduzir nossa atenção para as entidades perfeitas. Platão é o exemplo acabado de um pensamento filosófico centrado na razão, atribuindo ao homem uma alma racional, que pode ascender ao mundo das "*Ideias",* e um corpo sensível. Isto só é possível devido ao argumento da teoria da reminiscência platônica, afirmando que nossa alma racional já esteve em algum momento no mundo das "*Ideias"* antes de se juntar ao corpo sensível. Dessa forma, aprender é apenas uma forma de recordar o que antes nos foi apresentado. Já o corpo sensível tem apenas o que os sentidos podem oferecer. De modo geral, as verdades matemáticas são relações universais imutáveis que conhecemos *a priori*[2] (independente dos sentidos) por meio do entendimento. E as que ainda não conhecemos, estão ao nosso alcance por meio da evolução de nosso intelecto.

Com o passar dos anos, foi perceptível a presença de várias versões do "platonismo" em meio à filosofia da matemática, tais versões eram assim chamadas pois compartilhavam

---

[2] Relativo a ou que resulta de raciocínio, cuja as definições foram dadas inicialmente, ou seja, afirmado ou estabelecido sem verificação ou consequência de uma experiência sensorial; Algo pressuposto.

algumas ideias originais de Platão. A influência que a filosofia platonista exerceu sobre as demais, explica-se por suas vantagens. Vejamos algumas:

i) Na perspectiva platonista, a matemática é uma ciência objetiva que explora certos domínios abstratos de existência. O matemático platonista persiste em uma crença, ainda que "ingênua", de que ele investiga realidades objetivas e busca verdades que estão aí para serem descobertas. Em suma, para o matemático platonista não cria, mas descobre.

ii) O matemático platonista tem uma teoria "natural" da verdade matemática e uma semântica também "natural" dos enunciados matemáticos. Uma asserção matemática é verdadeira na medida em que denota um objeto matemático independentemente existente.

iii) Para o matemático que tinha a mesma filosofia de pensamento de Platão, os enunciados matemáticos têm um valor de verdade, sendo verdadeiro ou falso, nunca os dois (princípio do terceiro excluído). Para ele, os problemas matemáticos são, em princípio, solúveis. Mesmo que não se conheça a solução de determinado problema, o matemático platonista acredita que com o desenvolvimento da matemática um dia será possível conhecer a solução, uma vez que estas respostas já estejam em si formuladas.

iv) Para o matemático platonista a matemática é uma ciência *a priori*, isto é, independente da experiência, o que está de acordo com nosso modo "natural" de vê-la.

v) O matemático platonista admite um momento de reminiscência em que a alma recupera um conhecimento esquecido. Tal momento se dá quando o matemático, através do entendimento da percepção sensível, conseguir obter um *insight* matemático (intuição matemática). Este é o momento em que dizemos, em contexto matemático, "sim, agora eu vejo!" E para ele é efetivamente um momento de "ver" algo com os olhos da mente, não com os olhos do rosto.

vi) O matemático platonista não impõe restrições aos métodos usuais de definição e demonstração matemáticas. Se as asserções matemáticas têm um valor de verdade definido, ainda que desconhecido, faz sentido, por exemplo, afirmar o *Princípio do Terceiro Excluído*[3].

[3] Este princípio impõe que toda asserção (proposição) ou é verdadeira ou é falsa, ou seja, verifica-se sempre um destes casos e nunca uma terceira possibilidade. Dessa forma este princípio garante a não contradição das ideias.

A teoria platonista, do ponto de vista matemático, apresenta uma estrutura muito cômoda aos matemáticos, pois para eles quaisquer inconsistências identificadas pela formulação do pensamento matemático serão esclarecidas à medida que o homem for aprofundando seu conhecimento matemático, porém do ponto de vista filosófico, tal perspectiva apresenta problemas sérios. O primeiro deles é identificar o "*lugar celeste" (locus)* no qual as entidades matemáticas habitam. Outro problema é aquele do acesso, ou seja, como podemos ascender ao habitat dos objetos matemáticos? Ou mesmo, como dar conta da intuição ou percepção matemática?

2.3 Aristóteles e o Empirismo

Aristóteles (384 ~ 322 a.C.) foi discípulo de Platão e discordava de seu mestre quanto à existência de um reino transcendente de ideias e formas matemáticas, pois para ele, as formas geométricas e numéricas existem apenas como "*Aspectos"* de objetos e coleções de objetos reais, cuja existência depende da existência dos próprios objetos. Para ele, os objetos matemáticos não têm existência independente (*a priori*), mas sim *a posteriore*[4] (em substancialidade), podendo apenas serem definidos independentemente de seu suporte material. A exemplo, podemos citar que não há uma ideia ou forma perfeita de dualidade, há apenas pares de objetos. Sob esse ponto de vista, a matemática não é diferente de qualquer ciência empírica, apenas diverge no modo de tratar os objetos sensoriais. Enquanto a matemática os considera exclusivamente do aspecto formal matemático, vendo neles apenas sua forma geométrica ou aritmética, a física, por exemplo, analisa os objetos do mundo sensível como o são, levando em consideração, suas composições e interações.

Conclui-se então que, para Aristóteles, os objetos matemáticos são abstrações extraídas de objetos do mundo sensorial, levando em consideração apenas um *Aspecto* que interessa. A operação de abstração é simplesmente uma operação lógica, não real, onde não se tem existência separada dos objetos empíricos, ou seja, abstraímos apenas "*Aspectos"* deles, e se as vezes os pensamos como independentes, isso é apenas um modo de pensar sem maiores consequências práticas. Um objeto empírico é um objeto matemático na medida em que o analisamos sob um ponto de vista de seu "*Aspecto"* matemático. Assim, a matemática estuda

[4] Algo que resulta de precedentes ou de experiências sensoriais, ou seja, uma razão gerada após as consequências do efeito à causa.

apenas certos “*Aspectos”* dos objetos, o que nos leva a afirmar que Aristóteles foi um empirista quanto à origem dos objetos matemáticos, pois para ele somente os objetos dos sentidos existem de forma plena.

Surge então uma questão sobre este pensamento: as grandezas incomensuráveis ou formas geométricas tão esdrúxulas que não podem ser forma de nenhum objeto sensorial. Para elucidar tais questões, Aristóteles faz uma diferenciação entre limite atual e potencial. Nos basearemos na fala de Fernando Rey Puente, que estudou o texto *Physics*, de Aristóteles, para melhor explicar como o pensamento aristotélico aborda o infinito.

> De modo geral, cinco motivos parecem favorecer a crença na existência do infinito, a saber: 1) a existência do tempo, que é infinito; 2) a divisão infinita da grandeza executada pelos matemáticos; 3) a suposição de que o processo de geração e de corrupção só não teria fim se aquilo de onde proviesse a geração também fosse infinito; 4) a suposição de que um limite sempre é o limite com algo situado além dele, o que tornaria impossível pensar em algo como um limite último, porquanto este já estaria em relação com o que o delimita e, deste modo, ele não mais seria o limite último e, por fim, 5) a mais importante e principal suposição – comum a todos esses pensadores, segundo o Estagirita – que se baseia no fato de que o nosso pensamento pode sempre acrescentar um novo número à série numérica, ou conceber uma extensão maior à uma figura geométrica ou a um lugar determinado, de modo que o número, as grandezas matemáticas e a região celeste seriam infinitas. A essas crenças Aristóteles só responderá no final do tratado sobre o infinito, a saber, no capítulo oito do terceiro livro da Física. (PUENTE, 2001, p. 156)

Fundamentando-se nesta fala de Puente (2001), podemos então construir as seguintes definições:

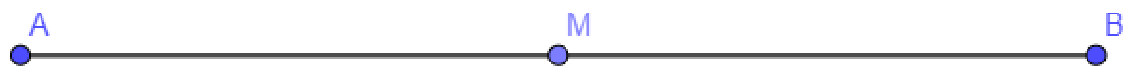
Definição 2.3.1: O *Infinito Atual* é aquele que pode ser concebido como uma entidade "completa", "acabada": todos os seus elementos podem ser pensados num ato único, ou ainda, no infinito como objeto. De forma mais simples: É completo, definido e está associado ao divino.

Exemplo 2.3.1: Se tomarmos o conjunto do Números Naturais e desejarmos obter sua cardinalidade, obteremos como resposta que sua cardinalidade é infinita, pois por mais tempo e empenho que empregarmos a sua contagem, nunca chegaremos ao fim.

Definição 2.3.2: O *Infinito Potencial* ocorre como processo sem fim ao longo do tempo, porém em objetos que atualmente são finitos e nunca se tornarão um infinito atual, ou seja, não alcançam a completude, podendo-se adicionar mais elementos indefinidamente.

Exemplo 2.3.2: Ao tomarmos um segmento de reta de extremidades A e $B(AB)$, sabemos que é possível adicionar um ponto M entre A e B.

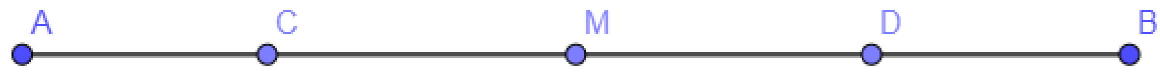
Figura 1 – Segmento de reta de extremidades *A* e *B* (*AB*)



Fonte: Elaborado pelo autor

Podemos então, posicionar pontos entre A e M e entre M e B.

Figura 2 – Pontos M, C e D inseridos no segmento de reta *AB*



Fonte: Elaborado pelo autor

Mesmo que o segmento possua uma comprimento finito, sabemos que é possível continuar refazendo infinitamente esta inserção de pontos entre os pontos já marcados no segmento.

Apesar da ideia de *Infinito Atual* ser essencial a muitas teorias matemáticas, para Aristóteles bastava aos matemáticos a ideia do *Infinito Potencial*. A respeito disso, podemos fazer aqui um adendo relatando que Poincaré (séc. XX) afirmou que o infinito matemático é sempre o potencial. E que o *Infinito Atual* recebe um tratamento apropriado apenas com a teoria dos conjuntos de Cantor (séc. XIX), ideias estas que foram e são criticadas até hoje.

Retomando agora a questão da incomensurabilidade e das formas geométricas esdrúxulas, Aristóteles argumenta que tais grandezas ou formas podem ser construtíveis por meio da definição de *Infinito Potencial*, ou seja, a criação de números por meio da ideia de sucessão e a capacidade de criação de novas figuras geométricas reais, partindo da combinação de formas mais simples, como o círculo e segmentos de retas.

A abstração aristotélica trata de uma idealização de um elemento, pois toma um objeto sensorial e simultaneamente a observação deste objeto, idealizando um objeto matemático perfeito. Um bom exemplo deste pensamento seria visualizar uma corda e dela abstrair-se um segmento de reta, ou tomar uma bola pelas mãos e delas abstrair-se uma esfera perfeita. Em ambos os casos enfatizamos *Aspectos* dos objetos sensoriais, como na corda ao visualizar um conjunto de infinitos pontos alinhados que possui dois pontos em suas extremidades, ou na bola, ao se perceber que sua parte externa é composta por infinitos pontos equidistantes a um ponto comum chamado de centro.

Exemplo 2.3.3: Se estivéssemos enunciando o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, sob um olhar aristotélico, algumas possíveis transcrições seriam:

i) A soma dos ângulos internos de um objeto triangular qualquer é igual a dois retos.

Ou ainda, equivalentemente:

ii) A soma dos ângulos internos de um objeto triangular qualquer, na medida em que ele é um objeto triangular, é igual a dois ângulos retos.

É notório que a triangularidade é condição suficiente para que os ângulos internos de qualquer objeto triangular somem dois ângulos retos. Ao observarmos que um objeto pertence a uma determinada classe, o consideramos como um representante desta, passando assim a evidenciar uma determinada(as) propriedade(es) que lhe(s) será(ão) atribuída(as) e que os demais objetos desta classe também gozam da propriedade.

Apesar de tal argumentação nos encaminhar a um pensamento empirista radical, assumindo as verdades matemáticas como as verdades empíricas, buscando justificá-las com generalização a partir da experiência, Aristóteles admitia a validade do método matemático das demonstrações, peculiar a sua época, tanto que foi pioneiro na sistematização da lógica formal, apresentando o que lhe parecia ser um elenco exaustivo das formas válidas de inferência. Ao falarmos de inferência, devemos entendê-la como um modo de obter conclusões a partir de pressupostos. Dialogando com Silva (2007), podemos definir uma inferência válida da seguinte forma:

Definição 2.3.3: Uma inferência é válida se a veracidade das conclusões depender apenas da veracidade dos pressupostos; ela será formal se independer do conteúdo (do que é dito), mas apenas da forma lógica das asserções (de como isso é dito).

Exemplo 2.3.4: Se assumirmos como premissa que todo ser vivo respira e o ser humano é um ser vivo, segue que o ser humano respira. A validade dessa inferência não depende em nada dos conceitos fisiológicos da respiração e de humanidade, ou de um ser humano em particular, mas apenas da forma das asserções envolvidas. Se, nessa inferência, substituirmos os termos por variáveis, teremos a seguinte forma válida de inferência:

Se todo *A é B, e* se *x* é um *A*, então *x* é um *B.*

O que temos é um silogismo, que é um estudo de formas corretas de inferências.

A ciência dedutiva foi outra grande contribuição do pensamento aristotélico, em particular para a matemática, pois ele a entendia como um edifício logicamente bem estruturado de verdades encadeadas em relações lógicas a partir de pressupostos fundamentais. Silva (2007), argumenta que talvez Euclides em "*Os Elementos*", estivesse tentando atender a esse silogismo aristotélico, ao fundamentar seu raciocínio sobre um sistema axiomático-dedutivo em matemática. Seja como for, é com Aristóteles que a ciência dedutiva é entendida como um edifício logicamente estruturado sobre bases evidentes e ganha status de modelo ideal e dignidade filosófica.

A ideia de uma organização lógica do edifício matemático se tornou possível na medida em que foram concebidos sistemas lógicos puramente formais, isto é, sistemas simbólicos sem interpretação, submetidos apenas a regras sintáticas da manipulação de símbolos. O que resultou numa matemática formal, buscando simplesmente as consequências lógicas de certos pressupostos formais. A matemática formal nos fornece precisamente um conhecimento em que suas origens estão na concepção aristotélica de ciência dedutiva e na possibilidade de uma lógica puramente formal.

Aristóteles também contribuiu com suas análises para esclarecimento rigoroso, através de recurso à própria matemática, de conceitos fundamentais, como os de axioma, definição, hipótese e demonstração. Uma de suas principais críticas era destinada às demonstrações por absurdo, considerando-as não explicativas, pois sabe-se que algo é verdadeiro sem saber por que é verdadeiro. A se saber que, demonstrações por redução ao absurdo, ocorrem quando ao querer mostrar que uma asserção **A** é verdadeira, supõe-se a falsidade de **A** e obtém-se como consequência uma falsidade qualquer ou, equivalentemente uma contradição. Mostrando assim, que **A** não pode ser falsa, sendo, portanto, verdadeira. O que muitos matemáticos entendem como o princípio do terceiro excluído. Tais demonstrações ocorreram com frequência na matemática grega, em particular no *Método de Exaustão*[5] de Arquimedes.

Já sabemos que, pela óptica aristotélica, os objetos matemáticos derivaram-se de abstrações ou idealizações de "*Aspectos*" de objetos reais. Dessa forma, é possível entender que para ele a asserção 2 + 2 = 4 diz apenas que a união de uma coleção de dois objetos com uma coleção, disjunta da primeira, de dois outros objetos resulta numa coleção de quatro objetos, e nós sabemos disso baseados na evidência dos sentidos. Para compreender esse processo de abstração ou idealização, devemos entendê-lo como um processo lógico-linguístico em que a separação não se dá na mente, mas no discurso. Nós abstraímos um "*Aspecto*" quando falamos dele e lhe atribuímos propriedades. Abaixo, temos um esboço de uma teoria da abstração dentro de um contexto empirista.

Suponhamos objetos reais que representaremos por letras e suas propriedades ou "*Aspectos*", também denotados por letras, por exemplo, consideremos uma bola e observemos o seu contorno que tem como "*Aspecto*" uma circunferência. Vamos, então, definir o que significa tratar um objeto sob um determinado "*Aspecto*".

Definição 2.3.4: Seja $\boldsymbol{y}$ um objeto real e $\boldsymbol{A}$ um *Aspecto* seu, iremos escrever $A(y)$ para dizer que $\boldsymbol{y}$ tem o *Aspecto* $\boldsymbol{A}$. Se considerarmos $\boldsymbol{y}$ sob o *Aspecto* $\boldsymbol{A}$, ou seja, $\boldsymbol{y}$ ***como*** $\boldsymbol{A}$, denotaremos por $\boldsymbol{y - A}$.

Agora é possível refletir sobre quais propriedades são atribuídas a $\boldsymbol{y}$, sendo intuitivo afirmar que essas propriedades também poderão ser aplicadas aos demais objetos que possuem esse mesmo *Aspecto* de $\boldsymbol{y}$. Em linhas gerais, uma propriedade de $\boldsymbol{y}$ é uma propriedade de $\boldsymbol{y}$ **como** $\boldsymbol{A}$, se sua atribuição a $\boldsymbol{y}$ depende exclusivamente de $\boldsymbol{A}$ e de nenhum outro "*Aspecto*" de $\boldsymbol{y}$. Assim, tratar um objeto $\boldsymbol{x}$ ***como*** $\boldsymbol{A}$, é considerá-lo sob a óptica de propriedades às quais $\boldsymbol{A}$ está subordinada, ou seja, dada uma propriedade $\boldsymbol{P}$ de um $\boldsymbol{y}$ ***como*** $\boldsymbol{A}$, então $\boldsymbol{y}$ possui a propriedade $\boldsymbol{P}$, se existir um $\boldsymbol{x}$ ***como*** $\boldsymbol{A}$, então $\boldsymbol{x}$ também possui a propriedade $\boldsymbol{P}$. Podemos representar esta última asserção da seguinte forma:

i) $$\boldsymbol{P(y\ como\ A) \equiv P(y - A) \equiv P(y) \wedge (x)(A(x) \rightarrow P(x))}$$

[5] Método utilizado para encontrar a área de uma figura através da inscrição em polígonos cujas somas das áreas convergiam para a área da figura onde estavam inscritos. Quanto maiores fossem as áreas dos polígonos inscritos, maior a precisão da área da figura.

Exemplo 2.3.5: Retomando o exemplo da bola ($\boldsymbol{y}$) e o "*Aspecto*" de sua circunferência que representa seu contorno ($\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y})$). Temos que uma esfera metálica ($\boldsymbol{x}$) também possui o mesmo "*Aspecto*" de $\boldsymbol{y}$ (uma circunferência como contorno). Logo, se a propriedade de que todos os pontos da circunferência de contorno da bola são equidistantes de um ponto em comum chamado centro, tal propriedade também se aplica à circunferência da esfera, pois a bola e a esfera possuem o mesmo "*Aspecto*".

Uma consequência da **Definição 2.3.4** é que se $\boldsymbol{y}$ tem a propriedade $\boldsymbol{A}$, então ***y como*** $\boldsymbol{A}$ também tem essa propriedade. Isso porque $\boldsymbol{A}$ é, claramente, uma propriedade subordinada a $\boldsymbol{A}$. Podemos entendê-la sob a ótica de uma reflexibilidade e denotá-la da seguinte forma:

$$ii) \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A})$$

Exemplo 2.3.6: Para que a curva que representa o contorno de uma bola tenha a propriedade de que as distâncias de seus pontos sejam equidistantes a um ponto em comum, basta garantir que ela seja uma circunferência, ou seja, o "*Aspecto*" de ser uma circunferência é condição necessária e suficiente para garantir que possui tal propriedade.

De *(i)* e *(ii)*, podemos formular a seguinte asserção:

$$iii) \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}) \wedge \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{A})$$

Para demonstrar a assertiva acima, devemos seguir a seguinte linha de raciocínio: Como ***y*** **como** $\boldsymbol{A}$ tem a propriedade $\boldsymbol{P}$, então todos os objetos que têm o *Aspecto* $\boldsymbol{A}$ também têm a propriedade $\boldsymbol{P}$, em particular ***z***. Por *(i)*, ***z*** como $\boldsymbol{A}$ também tem a propriedade $\boldsymbol{P}$.

Exemplo 2.3.7: Se a circunferência que representa o contorno de uma bola, tem como propriedade que as distâncias de seus pontos sejam equidistantes a um ponto em comum, então isso significa dizer que toda circunferência possui tal propriedade.

Ou seja, todos os objetos que têm a propriedade $\boldsymbol{A}$ têm exatamente as mesmas propriedades que só dependem desse "*Aspecto*". Logo, se pudermos mostrar que para um determinado $\boldsymbol{P}$ que ***y*** **como** $\boldsymbol{A}$ tem a propriedade $\boldsymbol{P}$ para algum $\boldsymbol{y}$ em particular, então sabemos que $\boldsymbol{P}$ cabe a todos os ***x como A***. Isso explica como uma demonstração conduzida sobre um objeto particular pode ter validade universal. Outro exemplo seria, se mostramos que algo vale para um objeto triangular apenas em virtude de sua triangularidade, então isso também vale para qualquer outro objeto triangular. A argumentação acima nos sugere a definição de "*Abstração de um Aspecto*" $\boldsymbol{A}$ ou *Forma de* $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{F_A}$), em que consideramos "*Aspectos*" independentemente de um objeto particular.

Definição 2.3.5: Seja $\boldsymbol{A}$ um "*Aspecto*" de objetos reais, a *Forma* $\boldsymbol{F_A}$ determinada por $\boldsymbol{A}$ é esse "*Aspecto*" considerado em si, independentemente de um objeto do qual ele seja um "*Aspecto*". As propriedades da forma abstrata $\boldsymbol{F_A}$ são as propriedades objetivas que pertencem a um objeto, porque ele instância essa forma como um "*Aspecto*". Isto é, se $\boldsymbol{P}$ é uma possível propriedade de objetos reais, então:

$$iv) \qquad \boldsymbol{P(F_A) \equiv (x)(A(x) \rightarrow P(x))}$$

Ou seja, $\boldsymbol{P(F_A)}$ se, e somente se, $\boldsymbol{A}$ é logicamente subordinada a $\boldsymbol{P}$. Segue de *(iv)* que se uma forma $\boldsymbol{F_A}$ tem a propriedade $\boldsymbol{P}$, é o equivalente a dizer que cada objeto que satisfaz $\boldsymbol{A}$ (a extensão dessa propriedade) tem a propriedade $\boldsymbol{P}$. Isso nos indica que é natural identificar $\boldsymbol{F_A}$ com a extensão de $\boldsymbol{A}$, como fazem, efetivamente, alguns empiristas.

Exemplo 2.3.8: A *Forma* triangular tem a propriedade de que os seus ângulos internos somam dois retos, pois todo objeto triangular tem essa propriedade.

Podemos dizer que o "*Aspecto*" $\boldsymbol{A}$ do objeto $\boldsymbol{y}$ é uma instância da "*Forma*" $\boldsymbol{F_A}$, ou que $\boldsymbol{y}$ participa dessa forma (na medida em que apresenta o "*Aspecto*" $\boldsymbol{A}$). Algumas consequências de da **Definição 2.3.5**:

$$v) \qquad \boldsymbol{A(F_A)}$$

Isto é, a "*Forma*" determinada por $\boldsymbol{A}$ tem a propriedade $\boldsymbol{A}$ (pois $\boldsymbol{A}$ é subordinada a si própria).

De *(i)* e *(iv)*, podemos concluir que:

$$vi) \qquad \boldsymbol{P(A) \wedge A(y) \rightarrow P(y - A)}$$

Ou seja, se um "*Aspecto*" $\boldsymbol{A}$ possui a propriedade $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{y}$ é um objeto que possui a "*Aspecto*" $\boldsymbol{A}$, então todo objeto $\boldsymbol{y}$ ***como*** $\boldsymbol{A}$ possui a propriedade ***P.***

Dada a identificação natural entre $\boldsymbol{F_A}$ e a extensão de $\boldsymbol{A}$, temos que duas "*Formas*" são iguais quando se aplicam a exatamente os mesmos objetos, ou seja:

$$vii) \qquad \boldsymbol{F_A = F_B \equiv (y)}$$

A asserção acima é comumente chamada de *Princípio de Extensionalidade*. Como consequências de *(vii)* temos:

$$viii) \qquad \boldsymbol{(F_A = F_B) = F_A \wedge F_B}$$

$$ix) \qquad \boldsymbol{P(F_A) \wedge (F_A = F_B) \Rightarrow P(F_B)}$$

A demonstração de *(viii)* segue direto de *(vii)*. Para demonstrar *(ix)*, basta argumentarmos da seguinte forma:

$$\boldsymbol{(y)(F_A(y) \rightarrow P(y)) \wedge (y)(F_A(y) \leftrightarrow F_B(y)) \Rightarrow F_B(y) \rightarrow P(y)}$$

Ou seja, se existe um $\boldsymbol{y}$ que possui a "*Forma*" *de* $\boldsymbol{A}$, sendo que $\boldsymbol{F_A}$ possui uma propriedade $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{F_A = F_B}$, então $\boldsymbol{y}$ também possui a "*Forma*" *de* $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{F_B}$ também possui a propriedade $\boldsymbol{P}$.

Uma consequência de *(viii)* e *(ix)* é:

$$x) \qquad \boldsymbol{(F_A = F_B) \equiv P(y) \therefore [P(y - F_A) \leftrightarrow P(y - F_B)]}$$

A demonstração dessa inferência pode ser verificada da seguinte forma:

$\Rightarrow$ É imediata, pois $\boldsymbol{F_A = F_B}$.

$\Leftarrow$ Tomando $\boldsymbol{y}$ um representante de $\boldsymbol{F_A}$ e $\boldsymbol{P}$, uma propriedade de $\boldsymbol{F_A}$, temos:

$$\boldsymbol{(P(y - F_A) \leftrightarrow P(y - F_B)) \Rightarrow (F_A(y) \rightarrow P(y)) \leftrightarrow (F_B(y) \rightarrow P(y)) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow (\neg F_A(y) \leftrightarrow \neg F_B(y)) \equiv (F_A(y) = F_B(y))}$$

Tomemos agora um exemplo aritmético a partir de coleções de objetos reais.

Exemplo 2.3.9: Definamos que a proposição $\boldsymbol{n}_{(\boldsymbol{a})}$ determina que a coleção $\boldsymbol{A}$ tenha $\boldsymbol{n}$ elementos $\boldsymbol{a}$. Logo $\mathbf{4}_{(\boldsymbol{a})}$ é uma coleção particular de $\mathbf{4}$ elementos $\boldsymbol{a}$.Tal coleção pode ser decomposta de forma abstrata em duas coleções complementares $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ de formas $\mathbf{2}_{(\boldsymbol{b})}$ e $\mathbf{2}_{(\boldsymbol{c})}$ reciprocamente. Essa decomposição não depende de quais são os elementos de $\boldsymbol{a}$, mas apenas de quantos eles são. Se variarmos a natureza de uma determinada "*Forma"*, mas se não variarmos sua quantidade, ainda assim poderemos continuar a decompor. Tal processo é conhecido como intuição formal. Portanto, dada qualquer coleção de objetos ***x***, ***x*** tem quatro objetos se, e apenas se, existirem coleções ***y e z***, cada uma com dois elementos, mas sem nenhum elemento em comum, cuja união é igual a ***x***.

Um outro modo de escrever isso é simplesmente $\mathbf{4 = 2 + 2}$. Essa asserção, que aparentemente se refere a objetos ideais, isto é, números, é apenas a abreviação da proposição geral acima, se refere somente às coleções de objetos reais. Assim, segundo a concepção aristotélica, uma asserção matemática pode ser vista como a generalização de uma asserção empírica baseada em uma intuição formal.

2.4 Problema ontológico e epistemológico

Finalizaremos este capítulo realizando uma comparação entre os pensamentos platônico e aristotélico. A criação deste tópico se faz necessária para que possamos ter uma visão mais abrangente sobre as questões que os diferenciam. Esta compreensão será fundamental para entendermos suas influências na formulação do pensamento matemático posterior a eles e como as divergências entre essas duas linhas de pensamento dar-se-ão sobre as questões ontológicas e epistemológicas. Para facilitar a análise destas divergências definiremos inicialmente ambas, a partir de um diálogo com os trabalhos de Silva (2007) e Puente (2001):

Definição 2.4.1: Questões *Ontológicas* referem-se a perguntas ou afirmações, do ponto de vista filosófico, sobre a natureza (origem) do ser, ou seja, que investiga a natureza da realidade e da existência.

Definição 2.4.2: Questões *Epistemológicas* estão relacionadas a Teoria do Conhecimento em filosofia que estuda a formação do conhecimento, a diferença entre ciência e senso comum, a validade do saber científico, dentre outras questões, ou seja, a forma com a qual conhecemos os objetos matemáticos.

O fato é que Platão dá continuidade à tradição pitagórica ao argumentar que ao se conhecer a matemática pode conhecer melhor a estrutura do mundo, enquanto Aristóteles, empenhou-se a criticar tal teoria, reconduzindo os entes matemáticos, de algum modo, ao mundo empírico. Paradigmáticos, Platão e Aristóteles, ofereceram sistemas filosóficos que embasam um vasto repertório de ideias até os dias atuais. Suas teorias sobre a natureza da matemática foram e são motivação para toda a matemática já descoberta ou produzida (a depender da corrente filosófica ao qual o leitor simpatizar) pelo homem.

Se para Platão, as entidades matemáticas constituem, *a priori*, um domínio objetivo independente e autossuficiente, que só temos acesso através do entendimento. Para Aristóteles, os objetos matemáticos têm uma existência parasitária dos objetos reais, uma vez que são "*Formas*" abstraídas de objetos reais, que nos são revelados por meio dos sentidos, ou seja, Aristóteles defende que os conceitos matemáticos são apenas modos de tratar o mundo real (*a posteriori*). Temos assim, de um lado o "*Racionalismo de Platão*", atribuindo à razão humana o poder de ascender através de métodos extra-sensoriais ao reino perfeito dos entes matemáticos. Do outro lado, temos o "*Empirismo Aristotélico*", contrapondo-se ao pensamento platonista, afirmando que os entes matemáticos estão associados a objetos do mundo sensorial.

Apesar de ambos concordarem com a tese de que a verdade matemática é independente da ação de um sujeito, discordam quanto ao que deve ser feito pelo sujeito para conhecer essa verdade. Se para Platão basta o entendimento, para Aristóteles o sujeito também deve contar com os sentidos, apesar que não possa confiar apenas neles. Para Platão, o mundo empírico é uma degradação da *Diánoia*, e a matemática em nada sofreria se o mundo que experimentamos pelos sentidos não existisse; para Aristóteles, a destruição desse mundo seria concomitantemente com a destruição dos domínios e das verdades matemáticas.

Em suma podemos fazer uma breve comparação entre as correntes platonistas e aristotélicas da seguinte forma:

Tabela 1 – Comparação entre platonismo e aristotelismo

Platonismo	Aristotelismo
Existência de dois mundos: diánoia e o sensorial	Apenas um mundo: O sensorial
O conhecimento é *a priori*	O conhecimento é *a posteriori*
O homem descobre o conhecimento a partir da reminiscência, onde somente através do entendimento o homem é capaz de enxergar os objetos matemáticos perfeitos	O homem adquire o conhecimento a partir dos sentidos, que podem proporcionar ao homem a capacidade de abstrair do objetos real seus aspectos (formas)
Exemplo: O círculo perfeito que é o conjunto de pontos equidistantes de um ponto central é uma ideia matemática que habita a "*Diánoia*". Através do entendimento o homem consegue visualizá-lo e posteriormente associá-lo aos objetos reais que possuem um formato aproximado ao da ideia de círculo, como por exemplo o contorno de uma laranja.	Exemplo: A partir de um objeto redondo, a laranja por exemplo, o homem é capaz de abstrair seu contorno e considerar que há um ponto central cuja distância aos demais pontos do contorno da laranja são equidistantes, obtendo assim um círculo perfeito.

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 1 – Escola de Atenas

Fonte: Disponível em: http://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/a-escola-de-atenas-rafael-sanzio/ Acessado em 05 jan. 2023.

Acima, temos uma imagem “Escola de Atenas” pintada na Capela Sistina por Rafaello Sanzio entre os anos de 1508 e 1511, que tenta representar as filosofias de pensamento de Platão e Aristóteles. Platão no centro à esquerda e apontando para cima (uma referência a *Diánoia)* e Aristóteles no centro a direita estendendo a mão para baixo (fazendo referência ao mundo sensorial). É considerada uma importante pintura renascentista, sendo para os cristãos o tema geral da imagem, é uma síntese do pensamento mundano (grego) e o espiritual (cristão), e está ao lado dos melhores exemplos da arte renascentista.

3 O RACIONALISMO E O EMPIRISMO

Analisando as obras que serviram de referência para este estudo, é possível perceber que após o apogeu filosófico percebido na Grécia Antiga, os estudos filosóficos não apresentaram desenvolvimento significativo, principalmente no que se refere às questões ontológicas e epistemológicas dos Objetos ou Ideias Matemáticas. Durante o período medieval, não houve desenvolvimentos técnicos e científicos expressivos no *Velho Continente*[6] devido a um completo domínio das religiões, o que ocasionava conflitos entre igrejas e seus dogmas, em diversas áreas do conhecimento.

Devido a este cenário, a Idade Média[7] é associada a um atraso e/ou desenvolvimento lento das ciências. No que diz a respeito à filosofia matemática, todos os matemáticos tinham influências do pensamento platônico ou do pensamento aristotélico, em contrapartida, nada de novo foi acrescentado ao debate sobre a origem dos entes matemáticos e como o homem toma ciências deles, o que prejudicou o desenvolvimento deste campo da matemática. Contudo, as ciências exatas floresceram entre os árabes e hindus, com o surgimento da notação algébrica, que originalmente serviu para abreviar a linguagem discursiva usual, mas aos poucos acabou dando origem a um sistema simbólico bem consistente.

Também é possível constatar que a Idade Medieval foi um período de mudanças importantes que acabaram se tornando a base de todo o conhecimento que seria produzido a partir dali. Impulsionadas pelo Renascentismo[8], ocorreram a criação de universidades e a separação definitiva entre a ciência e tecnologia. É neste cenário que surgem o racionalismo e o empirismo, duas escolas do pensamento que têm como bases os pensamentos de Platão e de Aristóteles, respectivamente. Buscavam explicar, por meio, de pontos de vistas diferentes a origem do conhecimento e a forma como os seres humanos o adquirem. Para melhor compreender tais escolas e suas diferenças realizaremos uma análise de cada uma individualmente, iniciando com o racionalismo, seguido de uma comparação entre este e o platonismo. Logo após, apresentaremos o pensamento de René Descartes que foi racionalista. Na sequência abordaremos o empirismo, e por conseguinte, o compararemos com o pensamento

[6] Status atribuído a Europa após a descoberta de novos continentes, sendo ela o berço da civilização ocidental.
[7] Período histórico que compreende o intervalo de tempo compreendido entre a Grécia Antiga (476 d.C.) e a Idade Média (1453 d.C.)
[8] Segundo Aurélio (2023) foi um movimento filosófico, artístico e cultural que ocorreu durante os séculos XV e XVI, tendo sua origem na Itália e valoriza principalmente o indivíduo e suas qualidades (Disponível em: https://www.dicio.com.br/renascimento/. Acesso em 06/02/2023)

aristotélico. Por fim, analisaremos o pensamento de David Hume com ideias empiristas e finalizaremos com uma comparação dos pensamentos de Descartes e Hume.

3.1 O Racionalismo

Definição 3.1.1: A *Escola Racionalista* tem como base o pensamento platônico (a razão como fonte do conhecimento humano). Afirma que os objetos matemáticos existem independem de objetos físicos e habitam na mente de um ser divino (Deus), ou seja, este conhecimento é *a priori* e somente através da razão e do intelecto o ser humano é capaz de acessar tais conhecimentos. Para o racionalismo, as experiências práticas não possuem valor cognitivo, podendo inclusive nos enganar e oferecer impressões errôneas. Os racionalistas defendem que as ideias surgem da pura e simples capacidade racional e impulsionam o intelecto, formando os conhecimentos com base nas leis universais da razão.

Vale ressaltar que a nomenclatura *Racionalista* só foi criada em meados do séc. XV e XVIII, entretanto, é comum dizermos que Platão era racionalista. Isto ocorre devido a influência que o pensamento platônico tem sobre as ideias racionalistas, pois ambos valorizam o conhecimento *a priori* e a razão. Mas, não podemos confundir uma com a outra, pois apesar do racionalismo ter em sua base ideias platônicas, estas sofreram algumas alterações, principalmente no que se refere ao *locus* onde se encontram as "*Ideias*" matemáticas. Se para Platão elas habitavam a "*Diánoia*", para os racionalistas elas existiam na mente de um ser divino (Deus), ou seja, se para o platonismo existiam dois mundos (*Diánoia* e *Sensorial*) para o racionalista só existia um. Enquanto Platão admitia o processo de reminiscência como meio para acessar as "*Ideias*" matemáticas, os racionalistas afirmavam que haviam três caminhos para acessá-las: a dedução, as ideias inatas e a razão. Outro ponto de divergências entre estes pensamentos tratava-se de seus objetivos: enquanto o platonismo buscava compreender o mundo, o racionalismo visava melhorar a vida do homem.

O quadro abaixo apresenta um resumo comparativo destas duas correntes, ressaltando suas principais diferenças quanto a origem e concepção do pensamento matemático.

Tabela 2 – Comparação entre o pensamento platônico e o racionalismo

Pensamento Platônico	*Racionalismo*
Havia dois mundos: Diánoia e o Sensorial	Existe apenas um mundo
Os objetos perfeitos da matemática habitam na Diánoia	Os objetos perfeitos da matemática habitam na mente de Divina (Deus)
Somente através do entendimento (reminiscência) é que o homem tem acesso a Diánoia	Há três caminhos por onde os homens podem chegar ao conhecimento: a dedução; as ideias inatas e a razão
Tinha como finalidade compreender o mundo e até o divino	Sua principal finalidade era melhorar a vida do homem por meio do desenvolvimento técnico.

Fonte: Elaborado pelo autor

Um dos principais representantes do racionalismo foi René Descartes (1596- 1650), que desenvolveu uma forma particular do pensamento matemático, contribuindo para o desenvolvimento da aritmética, geometria e álgebra. Com o objetivo de compreender melhor o racionalismo e suas contribuições à evolução do pensamento matemático, é que dedicaremos nossa atenção a uma análise do pensamento cartesiano (forma como ficou conhecida as ideias de Descartes, um dos principais representantes do racionalismo).

3.2 A Formação do Pensamento de Descartes

O furor científico, encorajado pela ideia de melhorar a vida do homem por meio de um desenvolvimento técnico, foi o que fez com que René Descartes (1596 ~ 1650) se empenhasse em estudar a intervenção do homem na natureza. Assim, emerge do século XVII a “revolução matemática”, que estava convicta do potencial da razão humana, tornando mais estreita a relação entre o mundo natural, a matemática e a filosofia.

Descartes, que além de matemático era filósofo, possui uma abordagem tradicional peculiar a sua época, cuja base eram os pensamentos de Santo Agostinho que, durante a transição da Antiguidade para o Medieval, colocou o mundo transcendente das ideias platônicas no espírito divino, ou seja, estas ideias foram criadas por razões próprias e estão na mente do Criador. São pensamentos de um ser maior e através da iluminação divina nos são reveladas, não sendo possível obter este conhecimento pela experiência do simples contato com os objetos.

Em outras palavras, ele atribui que o reconhecimento do conhecimento matemático se dá por meio da intervenção divina, que dá a irradiação de uma luz inteligível que nos proveria com as "ideias divinas".

Descartes tinha plena consciência desse pensamento, como podemos constatar em um trecho da obra "As paixões da alma" em que afirma:

> Considero também, depois que não notamos que haja algum sujeito que atue mais imediatamente contra nossa alma, que o corpo ao qual está unida e que, por conseguinte, devemos pensar que aquilo que nela é uma paixão é comumente nele uma ação. (DESCARTES, 2012, p. 32)

Logo, faz sentido o uso do termo "*Ideia"* em uma versão platônico-agostiniana. Porém, Descartes irá romper essa tradição fazendo o uso sistemático desse termo como um conteúdo da mente do próprio sujeito e não mais da mente divina, ou seja, a "*Ideia*" cartesiana torna-se um ente mental ou psicológico. Para ele, a "*Ideia*" faz parte da própria constituição do espírito humano como conteúdos ou princípios que fazem parte da alma, e servem como fundamento ao conhecimento, que através da cognoscência[9] adquirimos conhecimento do mundo, de nós mesmos e até do Criador.

Uma questão primordial na filosofia de Descartes concerne à veracidade das coisas, ou seja, Descartes defendia a aquisição de um conhecimento verdadeiro e que fosse possível de se assegurar a veracidade de tal conhecimento. Para isso, ele passou a duvidar exageradamente de tudo, inclusive de todas as informações que lhe foram repassadas durante seus anos de estudo. Foi esta dúvida metodológica, nomenclaturada de "*Dúvida Hiperbólica"* que o levou a propor o "*Argumento do Cogito" (cogito ergo sum = penso logo existo)*. Analisando a obra "*Discurso do Método; Objeções e respostas; As paixões da alma; Cartas"* (1993), definiremos a seguir tal dúvida, para que possamos compreender melhor seu pensamento.

Definição 3.2.1: A *Dúvida Hiperbólica* é a aplicação de uma dúvida metodológica implementada, que se compromete em duvidar da realidade de todo o conhecimento que um indivíduo previamente adquiriu e que sempre considerou como certo. Recebe este nome, pois a hipérbole é uma figura de linguagem que consiste de um exagero literário (Ex: Já lhe disse isso um milhão de vezes) e no caso de Descartes tratava-se de uma dúvida exagerada acerca de tudo que existia.

[9] Adjetivo que qualifica a pessoa que busca ou toma conhecimento sobre algo, também utilizado para se referir ao indivíduo que tem a capacidade de conhecer e assimilar o saber.

Devemos compreender que Descartes viveu em um período no qual as crenças mais estáveis estavam sendo colocadas sob suspeita ou, até mesmo, sendo demolidas. Assim, duvidar foi o "motor" de sua metodologia, sendo uma condição necessária para sua investigação, fazendo com que não se tenha início em conceitos que futuramente pudessem ser refutados. Por este motivo, ele utiliza a dúvida hiperbólica para excluir todas e quaisquer crenças que um dia tivera, tornando-a um estágio essencial para o início de sua proposta filosófica a caminho da verdade.

Foi utilizando esta dúvida metodológica que ele chegou ao "*Argumento do Cogito"*, que corresponde à certeza de sua própria existência, através de uma verdade inquestionável: "*cogito ergo sum*" = "se penso existo". A partir de tal certeza, se deparou com a necessidade de esclarecer com quais outros conhecimentos poderíamos garantir sua veracidade e como eram apresentados a nós. Dessa forma, a investigação cartesiana buscava observar de que modo é possível o homem reconhecer as demais verdades do mundo. Para ele, somente as percepções claras e distintas são isentas de dúvidas, ou seja, elas não poderiam ser de outro modo. É desse pensamento que são impulsionadas as fórmulas de seu argumento ontológico, inclusive quando se tratava do conhecimento dos entes matemáticos.

Devido a "*Dúvida Hiperbólica"*, Descartes duvidava até mesmo dos sentidos, já que eles poderiam ser fontes de engano; também duvidava da realidade exterior e tudo que nela se apresentava como realidade (o próprio corpo, o vento, o fogo etc). Sua dúvida se estendia até o imaginário, muito embora a imaginação fizesse parte do pensamento. Para ele, o pensamento é distinto dos corpos e de tudo que é material, distinto também de faculdades não necessariamente intelectuais, como é o caso do imaginar. Dessa forma, a "*Dúvida Hiperbólica"*, trata-se de um caminho para alcançar a certeza, conforme aponta em seu "Discurso do Método" (1637).

Para ele, não é possível duvidar das "naturezas simples", às quais comportam as realidades matemáticas, isso se deve ao objeto que, por sua vez, é puramente intelectual e seus resultados independem dos sentidos, como por exemplo: "dois mais três perfazem cinco" ou "um quadrado tem quatro lados". Estes não são enunciados que dependem dos sentidos e, também, independem de estarmos acordados ou em sono para que suas afirmativas sejam verdadeiras. Parecem tão óbvias que se mostram indubitáveis.

Porém, mesmo a possibilidade matemática, ele acredita não estar fora de dúvida, pois muitas vezes erramos, considerando certo aquilo que não é. Assim, Deus, que é a maior expressão de poder, inteligência, poderia enganá-lo em tudo o que pensa, e poderia ter colocado essas ideias de tal forma, que fôssemos enganados até nos enunciados mais evidentes. Assim, na tentativa de acrescentar rigor ao seu método, teve o cuidado de imaginar um Deus maléfico, capaz de confundi-lo a respeito das coisas mais certas e verdadeiras, chamando-o de "gênio maligno". Um "ser" de extrema potência, em que se encontram todas as possibilidades, mas que não está escuso da metodologia rigorosa de Descartes. Porém, ao passo em que levanta dúvida sobre Deus, como algo próprio dele, ele também logo as superam. Como podemos conceber no trecho de "Discurso do Método" (1993):

> É preciso, pois, que esta ideia de perfeição que reconheço em mim provenha, não de mim, mas de um ser bastante poderoso e real para dar conta da riqueza mesma de sua ideia. Tal é a primeira prova da existência de Deus pelos efeitos. [...] Sendo Deus onipotente e veraz, como pode ocorrer, entretanto, que nos enganemos? É que o erro não é absolutamente algo real, que dependa de Deus, mas apenas uma carência em mim que estende o poder de meu livre arbítrio para além de meu entendimento. Minha vontade, ou poder de julgar, é livre e infinita; eu me engano quando a estendo às coisas que não entendo. Assim, o erro tem o nada por princípio metafísico — o que justifica Deus desta carência que me é própria — e a liberdade por princípio psicológico, que é em mim, ao contrário, uma infinita perfeição. (DESCARTE, 1993, p. 14 -15)

É duvidando de tudo, desde os sentidos, passando pelo próprio corpo e chegando às realidades matemáticas mais simples que ele está convicto de que está começando sua análise do ponto fundamental, do marco zero, e desta forma começa a traçar uma busca pelo conhecimento que seja verdadeiro e indubitável. Para ele, só é possível chegar ao conhecimento por meio de um método dedutivo racional que contenha todo o rigor necessário e que não esteja sujeito a dúvida. Para tanto, afirma que não é necessário um grande número de preceitos lógicos, para se chegar a um método isento de defeitos:

> […] julguei que me bastariam os quatro seguintes, desde que tomasse firme e constante a resolução de não deixar uma só vez de observá-los: O primeiro era o de jamais acolher alguma coisa como verdadeira que eu não conhecesse evidentemente como tal; isto é, de evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção. […] O segundo, o de dividir cada uma das dificuldades que eu examinasse em tantas parcelas quantas possíveis e quantas necessárias para melhor resolvê-las. O terceiro, o de conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir, pouco a pouco, […] até o conhecimento dos mais compostos, e supondo mesmo uma ordem entre os que não se precedem naturalmente uns aos outros. E o último, o de fazer em toda parte de enumerações tão completas e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir. (DESCARTES, 1993, p. 36-37)

Para Descartes, Deus é a substância infinita, fundamentando toda a sua filosofia na separação mente/corpo (dualismo): substância pensante e substância extensa. Pretendeu construir um conhecimento universal e seguro, com base na matemática. Assim, faz uma divisão da coisa que pensa e a da coisa física e afirma que erroneamente consideramos as coisas físicas são mais fáceis de conhecer. Para discordar disso, Descartes apresenta o exemplo do pedaço de cera que, ao ser aproximado do fogo, perde suas características conhecidas pelos sentidos. As características observáveis da cera mudam, mas permanece algo, ou seja, o entendimento pela razão do objeto, que subjaz às mudanças de propriedades dos objetos. Neste exemplo, Descartes mostra que a coisa pensante, o espírito, permanece enquanto substância independente das mudanças das propriedades do objeto:

> [...] só concebemos os corpos pela faculdade de entender em nós existentes e não pela imaginação nem pelos sentidos, e que não os conhecemos pelo fato de os ver ou de tocá-los, mas somente por os conceber pelo pensamento, reconheço com evidência que nada há que me seja mais fácil de conhecer do que meu espírito. (DESCARTES, 1973b, p. 106).

Para Descartes, o conhecimento é *a priori* e somente pode ser conhecido pelo entendimento ou pela razão, mostrando assim uma grande influência das ideias platonistas. Desta forma, podemos classificar Descartes como um defensor do racionalismo, pois afirmava que embora todo homem seja racional, nem todos têm ideias claras e distintas, sendo preciso esforço para buscar sistematicamente chegar ao ponto mais alto que é a razão. Outros filósofos contemporâneos a Descartes que também se inspiraram em fontes racionalistas foram: Nicolas Malebranche (1638- 1715), Baruch Espinosa (1632-1677) e Leibniz (1646-1716).

3.3 A Matemática de René Descartes

René Descartes deixou inúmeras contribuições no campo da matemática, sobretudo na Geometria, na Aritmética e na Álgebra. Na Geometria, sua contribuição foi introduzir um método analítico que se baseava na noção de variáveis e constantes, permitindo-lhe representar curvas por equações algébricas, sendo, por isso, chamada de “Geometria Analítica”. Era assim nomenclaturada por ser contrária à Geometria Sintética[10], amplamente utilizada desde a Grécia Antiga. Também é possível perceber que o termo “Analítica” pode ser entendido no sentido da lógica, ao analisar a relação entre a modelagem algébrica e a forma geométrica ou do cálculo, ao ser relacionado a uma generalização. O fato é que Descarte criou uma base para a Geometria Analítica atual com seu plano cartesiano. Sobre este último, Descartes buscou referências muito antigas, como por exemplo, o termo “ordenadas”, que vem da expressão latina *Lineæ Ordinatæ*,

---

[10] É constituída a partir de um conjunto de axiomas ou postulados, adotados *a* priori, que constroem e demonstram as demais proposições lógicas. Encarrega-se de estudar e construir de maneira sintética as formas e lugares geométricos sem o uso de coordenadas, conhecida também como Geometria pura.

cuja tradução é “ordenada linear” que era empregada por agrimensores romanos para retas paralelas. Já o termo “abscissa” também se origina do latim e provém do verbo *Abscindere* que conjuga a ação de cortar alguma coisa. Este termo ocorre pela primeira vez em uma obra latina de 1659, escrita por *Stefano Degli Angeli* (1623 ~1697), um professor de matemática em Roma.

Vale ressaltar que, já na Grécia, Apolônio deduziu o cerne de sua geometria das secções cônicas de certas expressões que hoje poderíamos chamar de equações cartesianas. Também no século XIV, Nicole Oresme antecipou alguns aspectos que posteriormente seriam aprimorados por Descartes, ao representar graficamente certas leis, confrontando uma variável dependente (*Latitudo*) com a independente (*Longitudo*). Existem os que defendem que Oresme seria o inventor da Geometria Analítica, entretanto será em Descartes que encontraremos uma melhor formulação da ideia de movimento de um ponto. Vale ressaltar que, para a geometria grega, não havia ideia de movimento de um ponto e que Oresme não conseguiu estender amplamente seus estudos como Descartes. Esta concepção sobre o movimento de um ponto tornou-se bastante proveitosa para diversas áreas do conhecimento, graças a seu plano cartesiano, que a concebia por intermédio da distância de um ponto em relação a duas retas perpendiculares ou eixos ortogonais previamente definidos (eixos das abscissas e eixos das ordenadas). Ao movimentarmos esse ponto, essas distâncias teriam seus valores alterados gerando a ideia de coordenadas e relacionando-as com duas variáveis de uma equação, o que possibilitou o estudo de lugares geométricos.

Para a Álgebra, suas contribuições vão além do uso desta como ferramentas para a Geometria. Porém, afirmar que Descartes foi o primeiro a aplicar álgebra à geometria, não é uma afirmação muito precisa, pois François Vietè (1540 ~ 1603) e outros matemáticos árabes já o tinham feito antes. O fato é que a notação algébrica contemporânea a Descarte constituía-se de um sistema bastante flexível quanto a seu uso, dado que as técnicas árabes de resolução de equações conhecidas como “a *Al-jabr”*[11] e a *al-Muqabala*[12] que progrediram até as técnicas mais sofisticadas dos algebristas no século XVI com Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, criando basicamente métodos para reduzir equações a formas canônicas e expressar suas raízes em termos de operações algébricas. Toda esta evolução do trabalho com a álgebra através do tempo contribuiu para que o procedimento de resolução de equações se tornasse um processo mecânico de manipulação de símbolos. Porém, como já destacado, será a álgebra de

---

[11] A operação *al-jabr*, que significa "restauração", consiste em passar uma quantidade deficitária de um lado da equação para o outro. Exemplos em notação moderna: $x^2 = 40x - 4x^2$ é transformado por al-jabr em $5x^2 = 40x$. Este termo originou a palavra álgebra.

[12] Refere-se a operação de *balanceamento de expressões em uma igualdade* que consistia na redução dos termos iguais de ambos os membros de uma equação.

Descarte que direcionará o uso das letras para representar números algébricos e construir formas canônicas para alguns lugares geométricos, dando assim a forma com que tratamos a álgebra nos dias de hoje.

No tocante à aritmética, sua principal contribuição se trata da aritmetização da geometria. Para melhor compreendê-la, devemos ter em mente que, para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um determinado segmento, que o produto de dois segmentos gerava a área de um retângulo e que o produto de três segmentos gerava o volume de um paralelogramo. Não havia interpretação na geometria grega para o produto de quatro segmentos, dado que isto era um problema dimensional. Descartes, porém, deu um tratamento algébrico a esta sequência, considerando um caso particular desta problemática ao supor que os segmentos tinham o mesmo comprimento e reduzindo isto à sequência: $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x^2}$; $\boldsymbol{x^3}$; $\boldsymbol{x^4}$; $\boldsymbol{x^5}$; ... Qualquer um destes valores poderá ser facilmente representado, bastando conhecer o valor inicial $\boldsymbol{x}$. Dessa forma, ele representará as operações algébricas como soma, subtração, produto, divisões e extrações de raízes quadradas apenas por operações com segmentos, fazendo com que operações com números gerem números, operações com segmentos gerem segmentos e operações com segmentos e círculos gerem segmentos e círculos.

O pensamento cartesiano também teve grande influências na chamada Revolução Científica[13], pois acreditava ser possível entender o mundo por meio de termos matemáticos.
Em sua obra "*A Geometria"*, publicada em 1637, como o apêndice à sua principal obra, "*Discurso do Método"*, o pensamento cartesiano foi aplicado pelo próprio pensador à matemática. Ao estudarmos essa obra, podemos perceber que ela relaciona geometria com aritmética e álgebra. Também contribuiu, dando soluções aos problemas da quadratura do círculo e ao "Problema de Pappus", em que foi a partir da solução deste último, propôs a criação de um sistema de coordenadas. É importante ressaltar a riqueza desse trabalho, pois é nele que encontramos os indícios da criação da geometria analítica, do plano cartesiano e notação que passaram a ser usadas na álgebra até os dias de hoje. Tal obra é dividida em três partes: o primeiro livro trata dos problemas que podem ser construídos sem empregar mais do que círculos e linhas retas (segmentos de retas); o segundo livro trata da natureza das linhas curvas e o terceiro livro trata da construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos.

Quanto ao pensamento cartesiano, Roque (2012) ressalta que:

[13] Ocorreu entre os séculos XVI e XVII, e estimulou o desenvolvimento de diversos campos de estudos, opondo-se às ideias predominantes estabelecidas pela Igreja e pela religião.

> [...] para Descartes, as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de convencer e estabelecer uma certeza; deviam sobretudo esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-los. Por isso ele rejeitava a demonstração por absurdo (ROQUE, 2012, p. 318).

É possível agora entendermos o porquê Descartes questionar a prova por absurdo, pois seu método parte da "*Dúvida Hiperbólica*" e, para que seja feita uma demonstração por absurdo é necessário conhecer previamente o resultado desejado, o que se contrapõe ao método proposto por Descartes, e como para ele o que importa é o caminho utilizado para descobrir novos resultados matemáticos, se tornava impossível admitir uma prova que não respeitasse os pressupostos de seu método. Dessa forma, ele criticava toda a herança tradicional deixada pela lógica e aristotelismo, sendo estas as bases da escola empirista.

3.4 O Empirismo

Definição 3.3.1: A *Escola Empirista* defende que todo o conhecimento advém da experiência prática que temos cotidianamente, ou seja, que as nossas estruturas cognitivas somente aprendem por meio da vivência e das apreensões de nossos sentidos. Para esta corrente de pensamento, o conhecimento é *a posteriori*. Não há para eles a existência de objetos matemáticos independentes de objetos físicos, assim a nossa estrutura cognitiva é formada com base na experiência prática, de modo que, quanto mais vastas, intensas e ricas as nossas experiências, mais amplo e profundo torna-se o nosso conhecimento.

Esta escola tem como principais bases o pensamento aristotélico e sua lógica dedutiva. Porém, é importante ressaltar que há algumas diferenças entre essas duas correntes do pensamento, dentre elas: o empirismo assume, que além das capacidades sensoriais, o homem também utiliza de sua capacidade de imaginar e memorizar para conseguir apropriar-se de um conhecimento matemático. Também irá ampliar o campo das percepções humanas, uma vez que o aristotelismo só considera os Aspectos dos objetos, enquanto no empirismo encontraremos "*Impressões*" (percepções mais vivazes) e "*Ideias*" (percepções menos vivazes) de cada objeto matemático. Um outro ponto de discordância será o objetivo de estudo, enquanto o pensamento aristotélico visava compreender o mundo e até o Divino, o empirismo priorizava melhorar a vida do homem por meio do desenvolvimento técnico das ciências. O quadro abaixo apresenta uma síntese da comparação feita acima entre estas duas correntes do pensamento.

Tabela 3 – Comparação entre o pensamento aristotélico e o empirismo

Empirismo Aristotélico	*Empirismo*
Presença apenas da capacidade sensorial humana	Presença das capacidades sensoriais, imaginativas e de memorização do ser humano
As percepções se dão por meio dos "Aspectos" dos objetos, sendo os objetos possuírem os mesmos "Aspectos" podem ser ditos por conter a mesma forma	A percepção humana dos objetos se dá por meio das *"Impressões"* e das "*Ideias*"
Tinha como finalidade compreender o mundo e até o divino	Sua principal finalidade era melhorar a vida do homem por meio do desenvolvimento técnico.

Fonte: Elaborada pelo autor

Assim como o pensamento aristotélico se opôs ao platônico na Grécia Antiga, o empirismo irá se opor ao racionalismo na época moderna. Ambas com visões diferentes quanto às questões ontológicas e epistemológicas do conhecimento, e com vários adeptos que deram continuidade à discussão iniciada por Platão e Aristóteles. Uma das críticas feitas ao empirismo, pelos racionalistas, foi a de que se o pensamento empirista estivesse correto, a matemática não passaria de uma mera linguagem composta por símbolos que se referem aos objetos do mundo sensorial, mas, segundo ZILES (1974), os próprios empiristas refutaram esta crítica, alegando que, no campo das ciências, as afirmações ou se referem ao reino abstrato da lógica dedutiva matemática ou ao mundo concreto. Do contrário, teríamos enunciados vazios de sentido, ou seja, os empiristas defendem que bem mais que uma linguagem dedutiva o conhecimento matemático precisaria ter sentido e ser possível de ser verificado por meio de nossa experiência.

3.5 O Empirismo de David Hume

David Hume (1711 ~ 1776) foi um ilustre representante da escola empirista, merecedor de destaque, pois acrescenta muito a respeito da discussão acerca do método de conhecer. Contemporâneo a Galileu Galilei (1564 ~ 1642) e a Isaac Newton (1643 ~ 1727), ele apresenta uma estrutura de concepção do pensamento com um aspecto mais completo e implicações relevantes à temática debatida, que será melhor detalhada brevemente. Hume, e os demais acima citados, não eram adeptos do pensamento racionalista, eram defensores do empirismo, com fortes influências aristotélicas. Hume defendia que para algo estar no intelecto, primeiro deveria passar pelos sentidos, sendo que a única fonte do conhecimento seria a própria experiência, ou seja, o método adequado para a ciência é o experimental.

Na obra *"Investigação Sobre o Entendimento Humano*" (1980), Hume defende que o ser humano tem duas faculdades fundamentais para o conhecimento: a sensibilidade e o entendimento. Somente pelas percepções sensíveis é que o entendimento produz o processo de abstração, as ideias. Porém defende que a nossa abstração tem um limite, pois só podemos imaginar, criar, lembrar a partir daquilo que percebemos pelos sentidos. Segundo sua forma de pensar, o ser humano possui duas formas de percepções: as "*Impressões"* e as "*Ideias"*, que definiu da seguinte forma:

Definição 3.5.1: As *Impressões são* todas as nossas percepções mais vivazes, quando ouvimos, vemos, sentimos, amamos, odiamos, desejamos ou queremos.

Definição 3.5.2: As *Ideias* são as impressões menos vivazes, das quais temos consciência quando refletimos sobre qualquer dessas sensações (ouvir, ver, sentir, amar, odiar, desejar, querer etc).

Exemplo 3.5.1: Para melhor exemplificar a diferença entre as duas definições, podemos analisar a seguinte situação: se sentimos uma determinada dor ocasionada por uma queimadura, e algum dia recordamos deste momento infeliz, lembramos daquela dor ou de uma situação determinada que estava relacionada àquela ocasião. A lembrança que vem à nossa mente não nos faz sofrer, não tem a mesma vivacidade do tato em contato com o fogo.

De acordo com Hume, esta é a diferença entre a sensibilidade e o entendimento: sensibilidade (sentir) é o momento vivido e torna possível a aprendizagem, e o entendido (pensar) é fruto dessa experiência que faz com que o indivíduo tenha a capacidade de compreender o funcionamento de tudo que o cerca. Portanto, para Hume há uma grande diferença entre sentir e pensar, "o mais vivo pensamento é ainda inferior a mais embotada das sensações". (HUME, 1980, p.140).

Hume nega o inatismo proposto por Descartes, pois acredita que o conhecimento é a *posteriori*, ou seja, todas as nossas ideias são cópias de nossas percepções, sendo nossas impressões a origem de nosso conhecimento. Esta assertiva aplicava-se inclusive aos entes matemáticos, a partir dos quais podemos perceber, que Hume possui uma grande influência aristotélica, apesar de não ser um matemático por formação. Cabe esclarecer que, no período da idade moderna, a matemática, a astronomia, a física, bem como as outras ciências ditas naturais não tinham um campo de atuação bem definido, podendo uma transpassar pela outra, como de fato acontece.

Dessa forma, a questão ontológica e epistemológica das ideias matemáticas defendidas pelos empiristas modernos não se diferem muito da forma como Aristóteles as concebia. O que se acrescenta são as capacidades humanas de imaginação e memorização, que proporcionam uma conexão entre os diversos pensamentos ou ideias do intelecto. De tal forma que toda a ideia particular que venha interromper uma cadeia ou sequência lógica de ideia é imediatamente rejeitada. É através da memória que as impressões sensíveis são capturadas e guardadas, enquanto cabe à imaginação transpor livremente tais ideias e modificá-las com um propósito específico – no caso da idade moderna era o de melhorar a vida do homem por meio de um desenvolvimento técnico. Também foi a este propósito que o desenvolvimento da matemática, vista pela óptica empirista, estava voltado.

As ideias matemáticas empiristas defendidas por Hume estavam associadas a ideias simples que, ao serem combinadas, geram as complexas. Isto ocorria através de três propriedades: a semelhança; a contiguidade no tempo e no espaço; causa e efeito. Por semelhança, podemos pensar na ideia de altura e nos lembrar do ângulo reto necessário para obtenção de uma altura; por contiguidade, podemos remeter a uma lembrança na qual tivemos medo por estarmos em um lugar muito alto. Já causa e efeito não necessariamente terão um dado efeito esperado, não sendo possível saber qual o efeito causado no indivíduo apenas pela ideia inicial, mas que haverá algum, seja uma fobia ou até mesmo a criação de algo que possa ajudar o homem a trabalhar nas alturas. Assim, o eu e o mundo são um palco por onde passam várias impressões, o que nos impossibilita termos um conhecimento único e verdadeiro.

3.6 O racionalismo de Descartes x O empirismo de Hume

Racionalistas e Empiristas defendem correntes opostas do pensamento matemático, a respeito da sua origem e de como o homem apropriou-se deles. Enquanto os racionalista defendem o *Realismo*[14] e o racionalismo, tendo como ponto de partida e de chegada as ideias, empiristas eram irrealistas e objetivistas (constrói a ideia de um objeto por meio da relação

[14] Essa concepção do pensamento defende uma matemática real e independente da nossa percepção humana, indispensável para a compreensão do mundo sensorial. Supondo uma realidade de uma universo matemático autónomo, onde os objetos matemáticos possuem propriedade próprias.

observação-experimento). O quadro abaixo apresenta uma síntese comparativa das principais divergências entre essas duas escolas de pensamento.

Tabela 4 – Comparação entre o pensamento racionalista e o empirista

Racionalismo	*Empirismo*
Teoria filosófica que se baseia na afirmação de que a razão é a fonte do conhecimento humano	Teoria filosófica baseada na ideia de que a experiência é a fonte do conhecimento
Acreditam em intuição	Não acreditam em intuição, mas nos sentidos
Indivíduos têm conhecimentos inatos (a priori)	Indivíduos não possuem conhecimentos inatos, mas sim adquiridos por experiências sensoriais (*a posteriori*)
O conhecimento é baseado no uso da razão e da lógica	O conhecimento é baseado na experiência e experimentação
Possui como princípios chave a dedução, o conhecimento inato e a razão.	Possui como princípios chave indução e experiências sensoriais.
Capacidade ilimitada do intelecto humano (Descartes)	Capacidade limitada do intelecto humano (Hume)

Fonte: Elaborado pelo autor

As reflexões relativas a essas duas correntes possibilitaram o desenvolvimento de muitos outros pontos de vista que tentaram dar bases para a natureza do conhecimento matemático. Um deles foi o do filósofo Immanuel Kant que dedicou sua atenção à questão do conhecimento e sua apropriação. Kant apresentou uma teoria que buscava conciliar estas duas correntes do pensamento, apresentando assim, uma nova perspectiva à nossa discussão, que teve seu início na Grécia Antiga.

4 O IDEALISMO TRANSCENDENTAL

A estética transcendental é defendida por Immanuel Kant (1724 ~ 1804), um filósofo que segundo Zago (2016), afirmou que foi "despertado de um sono dogmático" pela filosofia de David Hume, já que era considerado um seguidor das ideias de Leibniz. Nasceu na Prússia, em 1724 e é considerado um dos principais filósofos da modernidade e um dos principais pensadores do Iluminismo[15]. Suas principais obras são: "A Crítica da Razão Pura", escrita em 1781, e "A Crítica da Razão Prática", escrita em 1788. Na primeira obra, Kant fala sobre como conhecemos as coisas através da razão e, na segunda, fala sobre como a razão deve elencar nossas ações. Destas duas obras, focaremos na "Crítica da Razão Pura", pois será nesta que encontraremos a teoria do conhecimento segundo Kant, que servirá de arcabouço referencial ao nosso trabalho, pois buscou conciliar racionalismo e empirismo em uma única corrente de pensamento. Contudo, devemos primeiramente ressaltar os personagens que influenciaram Kant na construção de sua teoria.

4.1 O Pensamento de Leibniz e os "Espíritos Matemáticos" contemporâneos a Kant

Gottfried Leibniz (1646 ~ 1716) entendia que as asserções verdadeiras dividem-se entre as "*Verdades de Fato"* e as "*Verdades da Razão"*. A primeira tratava das asserções que podemos negar sem infração à lógica, já a segunda, faz referência às asserções cujas negações são contradições lógicas, sendo assim necessariamente verdadeiras, o que significa que não podem ser logicamente falsas e compõem as ferramentas da lógica. Para ele, as verdades matemáticas, eram "*Verdades da Razão"*. Uma característica em comum entre Descartes e Leibniz é que não viam seu trabalho de matemáticos independentemente de suas investigações filosóficas. Por esse motivo, ele, como todos os lógicos desde a Grécia Antiga, entendia que toda asserção podia ser analisada como a atribuição de *predicado* a um *sujeito*.

Exemplo 4.1.1: Na asserção "O triângulo é escaleno", há atribuição do *predicado* "escaleno" ao *sujeito* "triângulo".

[15] Movimento cultural europeu durante os séculos XVII e XVIII que buscava gerar mudanças políticas, econômicas e sociais na sociedade da época. Os adeptos a esse movimento eram chamados de iluministas e acreditavam na disseminação do conhecimento, como forma de enaltecer a razão em detrimento ao pensamento religioso.

Podemos entender que o predicado seria uma característica ou propriedade do sujeito. Dessa forma, é possível entender o *sujeito* como contém a essência do objeto ao qual estamos nos referindo. Para Leibniz, quando em uma asserção a própria ideia do sujeito envolve a ideia expressa pelo predicado, essa asserção é uma "*Verdade da Razão*". Segundo Silva (2007), Leibniz precisou se esforçar para que seu pensamento fosse compreendido e, amadurecendo sua linha de raciocínio, definiu os dois grupos de verdades da seguinte forma:

Definição 4.1.1: As ***Verdades Necessárias ou Verdades da Razão*** são aquelas nas quais o *sujeito* contém o predicado por necessidade lógica, ou seja, são as que o predicado pertence ao *sujeito* por um imperativo da razão, não podendo ser negado sem contradição lógica.

Exemplo 4.1.2: Observe como podemos dividir a asserção abaixo:

$$\underbrace{\textit{O triângulo}}_{\textit{Sujeito}}\ \underbrace{\textit{possui a soma de seus ângulos internos igual à soma de dois ângulos retos}}_{\textit{Predicado}}$$

Na asserção acima é possível perceber que, se negarmos o *predicado*, estaremos negando o *sujeito*. Portanto, ao analisarmos o *sujeito* de forma completa, chegaremos à conclusão de que o predicado lhe cabe por direito.

Definição 4.1.2: As ***Verdades Contingentes*** **ou** ***Verdades de Fato*** são aquelas em que uma análise do sujeito converge para o predicado, sem, no entanto, abrangê-lo.

Exemplo 4.1.3: Observe como podemos dividir a asserção abaixo:

$$\underbrace{\textit{A expansão decimal de um número irracional}}_{\textit{Sujeito}}\ \underbrace{\textit{se aproxima indefinidamente de um ponto-limite}}_{\textit{Predicado}}$$

Ao realizarmos uma análise da asserção acima, vemos que esta não é conhecida *a priori*, se faz necessário o uso da lógica para conhecê-la. Assim, podemos perceber que nestas asserções há realmente uma convergência do *sujeito* ao *predicado*. Para Leibniz, as verdades matemáticas são *Verdades da Razão* e portanto necessárias e *a priori*, como também são analíticas.

Exemplo 4.1.4: Se afirmamos que "4 é um número par", atribuímos ao número 4 a propriedade de ser par. Negar tal asserção significa negar a própria definição do conceito do número 4, haja vista que para um número ser par basta que seja um múltiplo de 2, o que o 4 é.

Para ele, podemos substituir qualquer *sujeito* matemático por sua definição, o que o leva a acreditar que a matemática é uma imensa coleção de tautologias[16].

Exemplo 4.1.5: Tomemos a asserções:

$$\mathbf{3+4=7} \qquad (1)$$
$$\mathbf{3=1+1+1} \qquad (2)$$
$$\mathbf{4=3+1} \qquad (3)$$

Substituindo (2) em (3) teremos:

$$\mathbf{4=3+1=1+1+1+1}$$

Substituindo (2) em (3) em (1) teremos:

$$\mathbf{3+4=3+1+1=1+1+1+1+1+1+1=7}$$

Para Leibniz, não importa como os 1's se agrupam na expansão de 7, poderemos sempre reduzi-los a uma instância do *Princípio da Identidade*[17] do 7. Ele defendia que este princípio poderia ser aplicado a qualquer asserção matemática verdadeira, particular ou universal, mesmo que muitas vezes isso não ocorra de forma tão trivial. Outro ponto de seu pensamento era o de que uma definição de um objeto matemático não precisa nos dar de imediato todos os seus aspectos, basta utilizar a luz natural da razão humana para singularizar a noção definida, sem o auxílio dos sentidos ou qualquer outro e assim descobrir todas as propriedades que ela contém por necessidade.

---

[16] Segundo Aurélio (2023), na gramática a tautologia se refere ao uso de palavras diferentes para expressar uma mesma ideia. Uma redundância. Na lógica, trata-se de uma proposição analítica que permanece sempre verdadeira, uma vez que o atributo é uma repetição do sujeito.

[17] Formulado pelo filósofo Grego Parmênides de Eléia, que empreendeu estudos sobre a lógica. Esse princípio argumenta que todo objeto é idêntico a si mesmo.

Para melhor entender a concepção do pensamento matemático de Leibniz é preciso compreender que há dois espíritos matemáticos:

i) O *Sintético-intuitivo*, que valoriza alguma forma de intuição e a admite como uma experiência vivaz de uma determinada verdade. Este tipo de espírito matemático é bastante presente em Descartes, por ser fundamentalmente grego, privilegiando a geometria e sentindo-se desconfortável com a ideia do infinito.

ii) O *Lógico-analítico*, como o nome já induz, só se rende a evidências lógicas, ou seja, à luz pura dos princípios e regras lógicas. Leibniz é um representante fiel deste tipo, pois desconfiava da intuição e privilegiava a aritmética.

Esclarecido o viés da abordagem *Lógica-Analítica* de Leibniz, podemos entender que, para ele, somente a lógica poderia verificar a veracidade de uma verdade e não um método, como afirmava Descartes. Isso faz com que a geometria Euclidiana tenha relevância para ele, pois usa demonstrações que utilizam do "*Princípio da Identidade"*. Também é fato que, para Leibniz, as Verdades matemáticas jazem dormentes na mente humana por uma vontade divina (Deus) e novamente, pela reminiscência, o homem consegue alcançá-las. O que nos remete a uma influência do pensamento platônico sobre Leibniz. Porém, estudando um pouco sua forma de pensar, percebemos que diferentemente de Platão, para ele os sentidos têm um papel de despertar ou induzir o trabalho da razão pura. Outro ponto importante a destacar é o fato de defender que a natureza obedece às leis matemáticas e princípios metafísicos, o que significa dizer em linhas gerais que uma figura divina criou um mundo regido pela matemática, havendo assim uma comunhão entre o espírito e a natureza que criam noções de senso comum aplicadas a objetos físicos e imagináveis.

4.2 A "Crítica Kantiana" e "Os Juízos"

Em sua teoria do conhecimento, Kant propõe que tanto a experiência quanto a razão são necessárias para chegarmos ao conhecimento, o qual começa nos sentidos, mas termina na razão, e será o nosso exercício mental que organizará e dará unidade às nossas sensações, ou seja, aquilo que vemos, ouvimos, sentimos. Portanto, o conhecimento que obtemos pelos nossos sentidos será organizado pela nossa razão. Para demonstrar como a experiências e a razão podem se unir para criar ciência, ou seja, conhecimentos universais necessários e seguros, Kant na obra “*A Crítica da Razão Pura*”, nos apresenta os tipos de asserções ou juízos que são definidos da seguinte forma:

Definição 4.2.1: O *Juízo Analítico a Priori* é uma afirmação que não produz nenhum conhecimento novo sobre o que se está analisando. É, portanto, um conhecimento seguro, cujo termo *a priori* significa que ele depende tão somente da razão.

Exemplo 4.2.1: O círculo é redondo; O quadrado tem 4 lados. Cada uma das afirmações tem um sujeito e um predicado. Observemos:

$$\underbrace{O\ círculo}_{\text{Sujeito}}\ \underbrace{é\ redondo}_{\text{Predicado}}.$$

$$\underbrace{O\ quadrado}_{\text{Sujeito}}\ \underbrace{tem\ 4\ lados}_{\text{Predicado}}.$$

É possível perceber que em ambos os casos o predicado não informa nada de novo sobre o sujeito, pois dizer que o círculo é redondo não está adicionando nenhuma informação no sujeito círculo, dado que todo círculo é redondo, se não o for, não será um círculo. Essa é uma afirmação que se baseia apenas na razão. Você não precisaria ver um círculo ou tocá-lo para saber que ele é redondo, basta apenas ver o conceito do que é um círculo e saberemos que é redondo. De forma análoga, podemos usar este mesmo raciocínio para a segunda afirmação, pois todo quadrado tem 4 lados. De forma resumida e apenas para fins didáticos, vamos dizer que esse é o juízo relacionado aos racionalistas.

Definição 4.2.2: O *Juízo Sintético a Posteriori* é uma afirmação que produz um conhecimento sobre aquilo que está sendo analisado, daí o termo a *posteriori*, pois indica um conhecimento que depende das experiências.

Exemplo 4.2.2: Observemos as seguintes afirmações: o triângulo é equilátero; o quadrilátero é um paralelogramo.

$$\underbrace{O\ triângulo}_{\text{Sujeito}}\ \underbrace{é\ equilátero}_{\text{Predicado}}.$$

$$\underbrace{O\ quadrilátero}_{Sujeito}\ \underbrace{é\ um\ paralelogramo}_{Predicado}$$

Percebemos que o predicado acrescenta uma informação nova ao sujeito, não está no conceito de triângulo que necessariamente precise ter os lados com o mesmo comprimento, e portanto ser equilátero. Basta que seja uma figura fechada, composta por três segmentos de retas. Não é regra universal que todo triângulo é equilátero. Na frase seguinte, se apenas olharmos para a definição do que é um quadrilátero, não seria possível chegar à conclusão de que todos sejam paralelogramos. Para isto, teríamos que utilizar a experimentação, analisando todos os quadriláteros para sabermos se de fato elas são paralelogramos. Com isso, podemos perceber que essas afirmações se baseiam na experiência e são conhecimentos inseguros, já que não são universais. De forma resumida e apenas para fins didáticos, vamos dizer que esse é o juízo relacionado aos empiristas.

É importante deixar claro que Kant entendia por ciência apenas os conhecimentos universais e seguros, tomemos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.2.3: Vamos definir que para uma figura plana ser uma circunferência, ela precisará pertencer ao plano e ser constituída pelo conjunto de todos os pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano que chamaremos de centro da circunferência e a medida desta equidistância chamaremos de raio.

Se dissermos que toda circunferência possui um raio, essa afirmação é um *Juízo Analítico a Priori*, já que apenas afirmamos aquilo que já está na definição do que é ser uma circunferência. Agora, se dissermos que esta circunferência possui raio igual a 5 centímetros, esse é um *Juízo Sintético a Posteriori*, pois a informação de ter raio igual a 5 centímetros não está inclusa na definição de circunferência. Seria necessário recorrer à experiência, analisando-a para saber se possui raio igual a 5 centímetros.

Essa teoria do conhecimento defendida por Kant fundamentou toda a discussão da matemática contemporânea, pois tratava da matemática através da filosofia e sua teoria viria a ser base para discussões posteriores sobre a possibilidade do conhecimento matemático, já que a filosofia não deveria ser cética e desacreditar da razão, e nem dogmática, confiando totalmente nela.

Após compreender o que seriam os *Juízos Analíticos a priori* e os *Juízos Sintéticos a Posteriori*, podemos explanar o ponto em que Kant une a razão com a experiência através dos *Juízos Sintéticos a Priori*.

Definição 4.2.3: O *Juízo Sintético a Priori* é uma afirmação em que também o predicado não é extraído do sujeito, mas que pela experiência se forma como algo novo, construído. Porém, tal construção deve permitir ou observar com antecedência a possibilidade da repetição da experiência, que permite a universalidade e a necessidade dos juízos. A experiência aqui não é a mera disposição de fenômenos na mente em razão da sequência das percepções, mas sim a organização da mente numa unidade sintética daquilo que é recebido pela intuição. Segundo Kant, esse juízo amplia o conhecimento sobre o que está sendo analisado e ao mesmo tempo é um conhecimento seguro (universal), embora também tenha uma parte que é insegura.

Exemplo 4.2.4: Para compreendermos melhor o que seria o "*Juízo Sintético a priori*", analisemos a seguinte afirmação:

$$\mathbf{7 + 5 = 12}$$

Se somarmos 7 + 5 não há outro resultado possível senão, 12. Este é um conhecimento seguro, universal. Entretanto, o 12 é um número independente de 7 + 5, o conceito de 12 não é conseguido só pelo pensamento da união do número 7 com o número 5. O número 12 pode ser encontrado em outras operações matemáticas, como por exemplo: $2\ x\ 6 = 12$ ou $24 \div 2 = 12$. Com isso, é gerado um conhecimento novo e ao mesmo tempo seguro, e será a este tipo de conhecimento que Kant considerará como um conhecimento científico.

Para Kant, a ciência deveria sempre se basear nos "*Juízos Sintéticos a priori*", só que para isso acontecer, seria necessário mudar a forma de pensar como ocorria o processo de conhecimento da época. Antes de Kant, quando os filósofos debatiam sobre o conhecimento, muitos deles, em especial os metafísicos[18], acreditavam que as coisas possuíam uma essência, uma espécie de realidade oculta, onde se encontrava a sua verdadeira face. Essa essência deveria representar a verdade e por isso deveria ser encontrada. Entretanto, Kant dizia que essa busca

[18] A metafísica é uma palavra com origem no grego e que significa "o que está para além da física". É uma área da filosofia que busca o conhecimento da essência das coisas. Portanto, metafísico é o indivíduo que estuda a metafísica.

pela essência das coisas, que ele chama de "*númeno*[19]" ou "coisas em si", não contribui em nada para a ciência, pois não gerava conhecimento. Como a essência era algo metafísico, não poderia ser captado pelos sentidos humanos e por isso não poderia ser alcançado nunca, já que o conhecimento nasce a partir das experiências. Era preciso focar em como as coisas se mostravam ao ser humano, o que Kant chamou de "*fenômeno das coisas*".

4.3 A Revolução copernicana de Kant

Pautado no *"fenômeno das coisas"* que Kant propôs uma espécie de revolução copernicana, somente no campo filosófico, que também impactou outras áreas do conhecimento, como por exemplo a matemática. Antes da revolução copernicana, acreditava-se que o centro do universo era a Terra e que o sol girava em torno dela, o que ficou conhecido como modelo geocêntrico. Entretanto, esse modelo não atendia a vários questionamento da astronomia e da ciência em geral e muitos problemas ficavam sem solução. Foi então que Nicolau Copérnico sistematizou a teoria que dizia que o sol era o centro do universo e que a Terra e os outros planetas giravam em torno dele.

Para entendermos como se deu esta revolução copernicana de Kant, precisamos compreender que os estudiosos contemporâneos a ele definiram que em um processo de conhecimento do objeto, o sujeito era basicamente um observador e o objeto a coisa a ser observada, por exemplo, suponhamos que alguém esteja estudando uma esfera, o estudante é o sujeito e o objeto é a esfera. Este pensamento era predominante no ramo da metafísica, onde o objeto sempre era colocado no centro do processo do conhecimento, enquanto o sujeito ficava girando em torno dele. O termo "girando" se refere ao sentido de que o sujeito tentava encontrar a essência dos objetos, mas não chegava a lugar nenhum, pois segundo Kant, nós não temos a capacidade cognitiva para conhecer as coisas como elas realmente são, ou seja, suas essências ou "*númeno*". Só conhecemos aquilo que o objeto apresenta para nós, que é o "*fenômeno*".

Foi então que Kant propôs colocar o sujeito no centro do processo de conhecimento e o objeto é que ficaria girando ao seu redor. Agora seria o objeto que teria que se adaptar ao sujeito. Um exemplo bem básico para entendermos o que seria isso: imagine que um sujeito fosse estudar um cilindro (objeto) e tentasse conhecer as suas utilidades. Se o sujeito fosse um metafísico, ele tentaria encontrar a essência desse cilindro, buscando determinar uma descrição precisa da soma de todas as características dos objetos cilíndricos. Dessa forma, a pesquisa

[19] Objeto ou evento postulado que é conhecido sem a ajuda dos sentidos. Na filosofia antiga, a esfera do númeno é a realidade superior conhecida pela mente filosófica.

ficaria presa à definição do que é um cilindro e apesar de tentativas para buscar essências do cilindro, o único resultado que encontraríamos seriam suas características.

Mas, de acordo com Kant, o cilindro (objeto) é quem deve se adaptar ao sujeito. Fazendo isso, ele chegaria a diversas outras conclusões sobre o cilindro, por exemplo: as vantagens que tal objeto espacial proporciona quando usado por pescadores no processo de retirada de uma jangada da água ou a sua capacidade de ser usado na fabricação de outros objetos. Dessa forma, podemos perceber que o cilindro pode ter qualquer utilidade que a razão do sujeito permitir. É este pensamento que tira o objeto do centro para colocar, em seu lugar, o sujeito, o que ficou conhecido como a revolução copernicana de Kant.

Esse argumento utilizado por Kant pretende chegar às intuições *a priori* e deixar de lado as sensações, pois, segundo ele, somente o *espaço* e o *tempo* seriam as formas puras da intuição sensível, sendo os princípios do conhecimento *a priori*. Logo, o conhecimento matemático também o é, pois o concebe como uma ciência baseada em tempo e espaço. De fato, se observarmos que um objeto pertence a um lugar sensível, estamos realizando um exercício. Retirando toda e qualquer forma pertencente a sensação, teremos uma intuição pura, que só poderemos obter de duas formas, ou pelo tempo ou pelo espaço, pois não se pode pensar nada sem estar presente em uma temporalidade ou espaço. Dessa forma, ele argumenta que o homem só conhece o mundo empírico se for por intermédio do tempo e do espaço, pois esses estão diretamente ligados a possibilidades aritméticas e geométricas, cuja forma de obtenção para alcançar o conhecimento da matemática é a razão, que possibilita a verificação desses juízos.

4.4 A teoria do conhecimento Kantiana

Para que possamos ter uma dimensão do pensamento kantiano, precisamos admitir que nem o racionalismo dogmático e nem o empirismo são abordagens completas para compreendermos as questões ontológicas e epistemológicas do conhecimento, mas sim um racionalismo crítico ou criticismo, que é como Kant nomenclatura a forma de pensamento em sua filosofia. Ele afirmava que os racionalistas não poderiam afirmar nada de novo e os empiristas não poderiam afirmar qualquer coisa de forma universal. É no criticismo que o idealismo transcendental irá aflorar completamente, mas é preciso diferenciá-lo do elemento transcendente presente no pensamento platônico. Para tanto, tomaremos como referências Zene (1999) e Da Silveira (2002) para definirmos cada um.

Definição 4.4.1: O *Idealismo Transcendental,* presente no pensamento kantiano, faz referência a cada um dos conceitos (unidade, forma, ser, verdade etc.) capazes de identificar qualquer objeto ou realidade, ultrapassando outras categorizações possíveis. Enfim, é aquilo que dá condição de possibilidade de experiência, ou seja, que trata dos conceitos anteriores ao objeto e não dos objetos como tal.

Exemplo 4.4.1: Um bom exemplo seria o conceito de segmento de reta sendo aplicado nas diversas áreas do conhecimento. Não é preciso uma experiência com cada objeto ao qual aplicamos este conceito para compreendermos suas implicações, pois já está em nosso intelecto tal conceito e assim podemos utilizá-lo para manipular os mais variados objetos (espaço) ou situações (tempo) que se assemelham com um segmento de reta. Caso ainda não esteja clara tal semelhança, basta imaginar o conceito de reta na construção de uma estrada que interliga duas cidades, de maneira que se deseje obter a menor distância entre as duas. Neste caso, utilizaremos a intuição do espaço. Agora, se quisermos organizar de modo simplista a ordem cronológica de eventos históricos, recorreremos à criação de uma linha do tempo, por ser possível acrescentar um novo evento no intervalo quando necessário. Assim, utilizamos a intuição do tempo.

Definição 17: O *Elemento Transcendente* presente no pensamento platônico é algo sublime, superior e que está acima das ideias e conhecimentos ordinários. Estes têm independência dos objetos físicos e preexistem em um mundo perfeito (*Diánoia*). Em linhas gerais, o fato do platonismo defender que já estivemos na *Diánoia* e que só através da reminiscência podemos reconhecer os objetos perfeitos é que se difere do pensamento kantiano.

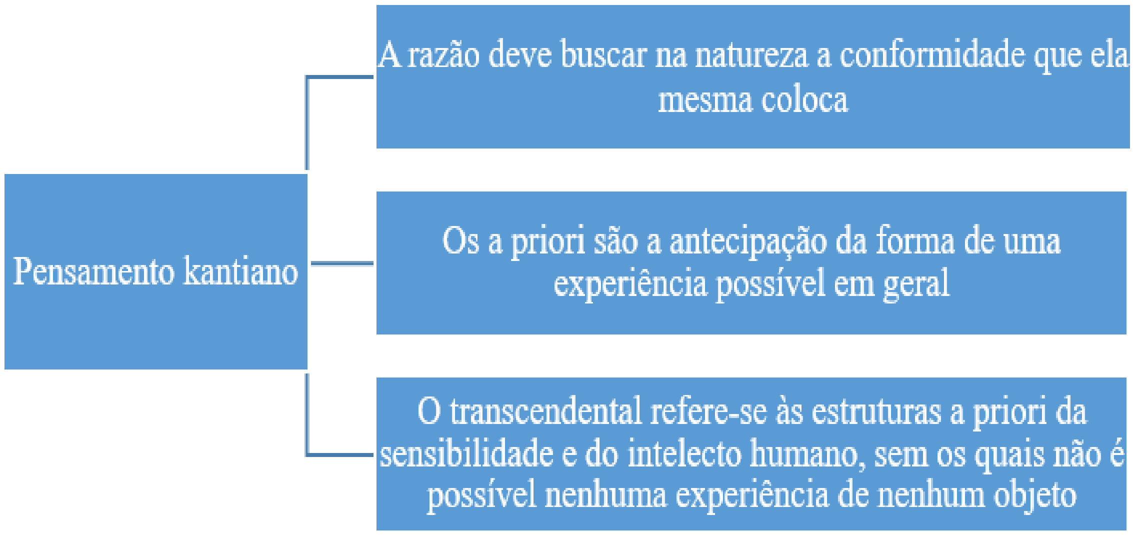
Tabela 5 – Comparação do pensamento platonista e o pensamento kantiano

Pensamento Platonista	Pensamento Kantiano
Existência independente na *Diánoia* (*lócus*)	Existência na mente humana (*lócus*)
Acessado pela reminiscência, ou seja, somente através do entendimento podemos acessar novamente essas estas informações com as quais, em momento anterior ao mundo físico, tivemos contato	Formado inicialmente pelas experiências (*Juízo Sintético a posteriori*), mas posteriormente as analisado (*Juízo Analítico a Priori)* e por fim, formulando um conhecimento universal organizado pelo *Juízo Sintético a Priori*

Fonte: Elaborada pelo autor

Para Kant, a universalidade das asserções matemáticas, puras ou aplicadas, está garantida *a priori* pela forma necessária de qualquer experiência possível. O que para Platão, a necessidade, universalidade e a prioricidade da verdade matemática eram garantidas pela Diánoia. Já os empiristas não poderiam admitir este *Idealismo Transcendental* ou o *Elemento Transcendente*, pois ligavam-se estritamente à experiência. Porém, Kant defende que para o bem ou para o mal, a generalidade matemática em nada difere da generalidade das ciências empíricas, sempre sujeita à revisão em face de evidências novas, pois a ciência é uma construção humana. Dessa forma, temos que:

Figura 3 – Pensamento kantiano



Fonte: Elaborada pelo autor

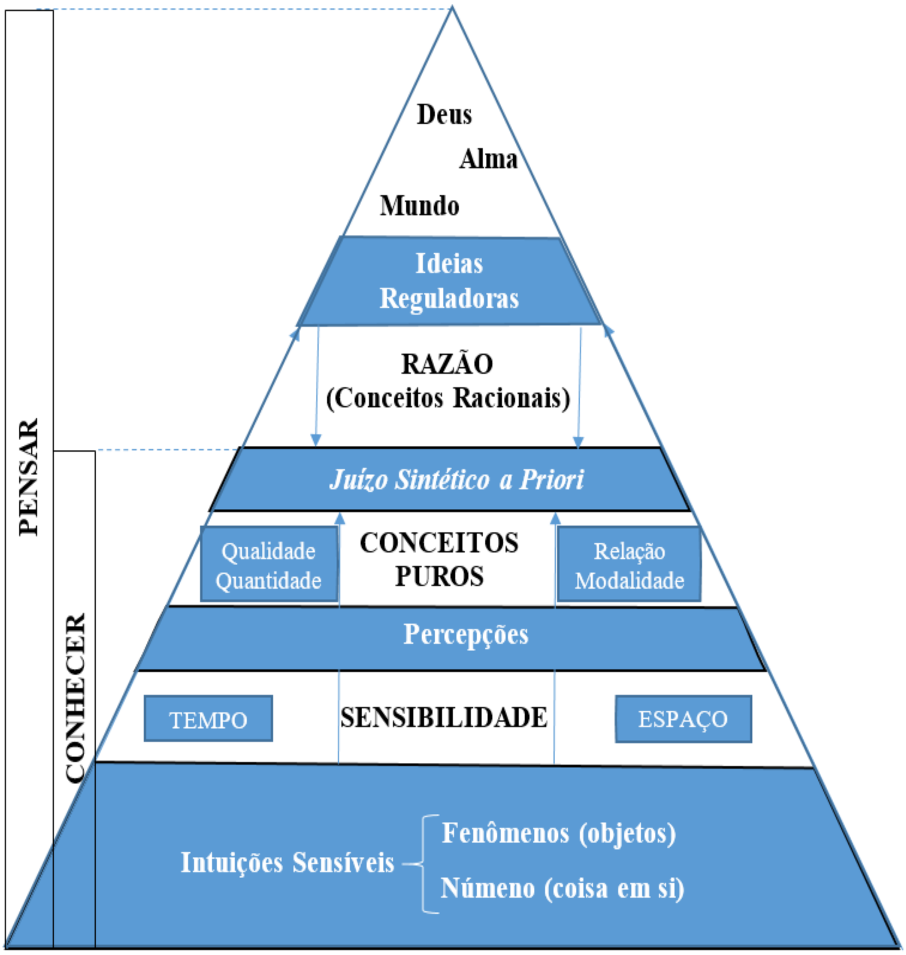
Assim, percebemos que segundo o pensamento Kantiano, no que concerne à razão pura, as ideias não podem ser conhecidas pelos homens, pois apesar de serem objetos pensáveis, não podem ser intuídos e assim, Deus, Alma e o Mundo como totalidade não constituem coisas, porém regulam as ações do homem. Podemos entender que Kant defende a formulação e a organização do conhecimento em dois níveis, a se saber:

Tabela 6 – Níveis do conhecimento segundo Kant

1° nível (Nível da Intuição)	Nesta fase, a construção do conhecimento é feita por intermédio de experiências que, através da faculdade da sensibilidade ou receptividades, temos contato com intuições puras do espaço e do tempo, organizando assim nossos fenômenos em percepções. Podemos também nomenclaturar este nível de fase do conhecimento sensível.
2° nível (Nível dos Conceitos Puros)	Nesta fase do entendimento, os fenômenos estabelecem relações entre si, organizando as percepções correspondentes, através da faculdade da imaginação, num nível superior que chamaremos de representação ou conhecimento, através do auxílio de um conjunto de regras *a priori* designadas de categorias (quantidade, qualidade, relação e modalidade). Somente neste momento, podemos falar de conhecimento, pois aqui os objetos são pensados. Este conjunto é constituído por um grupo de *Juízos Sintéticos a Priori*, que se identificam na prática como conhecimento científico.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4 – Esquema do processo do pensamento em Kant



Fonte: Disponível em: https://slideplayer.com.br/slide/1587150/ Acessado em 05/01/2022

4.5 O Pensamento Matemático de Kant

Para Kant, contrariamente à Leibniz, o conhecimento matemático é o paradigma de tal conhecimento. Afinal, nós não precisamos de modo essencial do testemunho dos sentidos para desenvolver a ciência matemática; as teorias matemáticas dispensam o teste da experiência, mas, não obstante, são indispensáveis para a organização dessa mesma experiência. O conhecimento matemático não é (acreditava Kant) uma imensa tautologia; ele não se constitui na mera explicitação dos conceitos envolvidos nos enunciados matemáticos, como pensava Leibniz. Asserções como "nenhum homem solteiro é casado", por exemplo, explicitam, mas não acrescentam nada de novo ao que já sabemos. Os enunciados matemáticos, como 2 + 2 = 4, porém (ainda segundo Kant), não são desse tipo, eles nos dizem mais do que poderíamos descobrir pela mera análise dos conceitos neles envolvidos.

Como já afirmamos, o *tempo* e o *espaço* são formas *a priori* de toda a intuição sensível possível e impõem-se necessariamente aos dados sensoriais como sua forma. Este é um jargão kantiano e significa dizer que impomos as formas do espaço e do tempo a qualquer dado dos sentidos. Dessa forma, ele poderia argumentar que os enunciados matemáticos eram necessariamente verdadeiros e portanto *juízos a priori*. Ele também coloca o espaço e o tempo como formas necessárias a toda experiência sensível e a matemática será de certa forma, a ciência do espaço e do tempo, garantindo assim que o mundo sensível possa ser visto por meio dela, pois o tempo e o espaço podem ser interpretados pelos conhecimentos matemáticos.

Tal pensamento tinha pontos positivos e pontos negativos. Listamos alguns pontos negativos sobre o pensamento kantiano e as respostas dadas por Kant a tais problemáticas:

1. A problemática do conceito geométrico de uma figura com quantidade muito grande de lados e ou do conceito numérico de números muito grandes. Ambos não podendo ser representados pela intuição, criando assim um conhecimento matemático puramente conceitual e simbólico.

Resposta: Kant admitirá a possibilidade de tal conhecimento ser fundamentado não na sua construção, mas sim na própria elaboração do conceito dos símbolos, uma espécie de geometria ou aritmética simbólica, que nada mais era do que uma manipulação dos objetos aos quais os símbolos se referem. Com isto, a filosofia de Kant apresenta um conhecimento matemático puramente simbólico, desde que os símbolos sejam dotados, efetivamente, de um significado.

2. A problemática gerada pela álgebra e suas técnicas que aparentemente não apresentavam nenhum conceito novo, mas sim uma mera manipulação de símbolos que eram uma ideia de número.

Resposta: A mesma linha de raciocínio utilizada por Kant para responder a problemática anterior, também é usada para responder esta. Ele assumirá o conhecimento algébrico como um conhecimento simbólico e de certa forma construído na intuição pura do tempo. Assim, poderíamos operar com incógnitas e variáveis numéricas como operaríamos com números propriamente ditos.

3. A problemática do conceito dos números irracionais e imaginários, que para Kant não seriam números em seu sentido próprio, mas sim pseudonúmeros que não poderiam ser representados na intuição pura do tempo ou de espaço.

Resposta: Este era o ponto mais frágil da teoria de Kant. Ele até buscou contornar essa problemática argumentando que apesar de não poder representar os números irracionais na intuição temporal, poderiam representá-los na intuição espacial (como, por exemplo, a raiz de 2 ser a diagonal de um quadrado de lado 1). Para ele, os números irracionais eram símbolos vazios de significado e entendidos por meio de regras para obtenção de números racionais, ou seja, procedimentos que nos permitiam obter aproximações racionais. Porém, sabemos hoje que nem todos os números irracionais são obtidos por meio de regras. Já os números imaginários, para Kant, nem deveriam existir, pois eram conceitos vazios e, portanto, deveriam ser banidos da matemática, por não ser possível de serem representados na intuição do tempo nem do espaço. Para ele, a raiz quadrada gerava um absurdo ao ser ao mesmo tempo positiva e negativa.

$$\boldsymbol{\sqrt{-1} = x \Rightarrow -1 = x^2 \Rightarrow -1 = x.x \Rightarrow \frac{-1}{x} = \frac{x}{1}}\,(Absurdo!)$$

Este é então um ponto frágil da teoria de Kant, pois esses números já apresentavam um tratamento elegante e poderoso na álgebra o que colocava o pensamento de Kant em uma situação muito delicada, pois para os matemáticos da época, era melhor colocar de lado a teoria de Kant do que os números imaginários. Afinal, tinham convicção de que era uma questão de tempo para que se encontrasse uma maneira de contornar esse absurdo, o que foi feito no século XIX.

4. A problemática das geometrias não-euclidianas, por não serem compatíveis, segundo Kant, com a intuição pura de espaço, que para Kant era estruturada pela geometria euclidiana.

Resposta: Para Kant, mesmo que uma geometria não-euclidiana fosse possível, ela não passaria de um exercício lógico vazio de conteúdo cognitivo, ou seja, não seria real, o que significa dizer que ela não poderia descrever nenhum espaço. Vale ressaltar que os conceitos vazios, ainda que logicamente possíveis, não contribuem para o nosso conhecimento segundo Kant.

Felizmente, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 ~ 1856), János Bolyai (1802 ~ 1860) e Henri Poincaré (1854 ~ 1912) descobriram e desenvolveram estudos sobre tais geometrias. Destas, podemos destacar a geometria hiperbólica que foi amplamente estudada por Poincaré, que criou um modelo chamado de Disco de Poincaré para representar o plano da Geometria Hiperbólica. O objetivo deste trabalho era mostrar que o modelo era consistente, tomando como referência os Axiomas de Hilbert, substituindo apenas os Axiomas das Paralelas para: "Por um ponto fora de uma reta passam duas retas paralelas à reta dada", através de construções da Geometria Euclidiana. Sobre esta substituição é importante ressaltar que Lobachevsky e Bolyai tomaram caminhos diferentes em seus trabalhos, enquanto o primeiro afirmou que haviam infinitas retas, o segundo afirmou que havia pelo menos duas. Posteriormente, foi comprovado que as duas afirmações eram equivalentes. A partir desse conhecimento, Poincaré conseguiu provar a consistência da geometria hiperbólica, chegando à conclusão de que negá-la seria o equivalente a negar a geometria euclidiana. Dessa forma, ou as duas eram verdadeiras ou as duas eram falsas, o que fez com que a teoria de Kant fosse ainda mais refutada após sua morte.

De certa forma todo o pensamento filosófico de Kant foi uma crítica ao conhecimento, incluindo a matemática, pois a liberdade de criar conceitos matemáticos consistentes não foi reconhecida por ele. Caso admitisse esse direito aos matemáticos, não poderia negá-lo aos metafísicos e teólogos de sua época. Isso tornava a filosofia matemática de Kant limitada pela noção de conceitos exemplificados pela intuição pura.

5 AS ESCOLAS MODERNAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Após as críticas ao pensamento kantiano, três linhas de pensamento filosófico surgiram no decorrer do século XIX, três escolas do pensamento matemático: o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo. As três buscavam fornecer uma fundamentação sólida à matemática, ou seja, sua consistência. Mas como veremos no decorrer deste capítulo, não obtiveram sucesso em seus propósitos. Discutiremos a seguir as bases que fundamentam cada um destes pensamentos e por que não conseguiram fornecer tal base sólida à matemática.

5.1 O Pensamento Logicista

O primeiro defensor desta linha de pensamento foi o matemático alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 ~ 1925), que tinha como uma de suas bases o *realismo matemático*[20] fundamentado no pensamento platonista, pretendendo reduzir a aritmética à lógica e dessa forma toda a matemática clássica. Apesar de concordar com Kant sobre a geometria, defendia que a aritmética é analítica, mas em um sentido diferente do que pensava Kant. Segundo Souza (2007), Frege discordava vilmente dos empiristas que defendiam as verdades aritméticas como generalizações de experiências (base indutiva) e dos psicologistas, que entendiam os números como entidades mentais e que as verdades aritméticas dependiam de leis empíricas que regulam nosso pensamento. Foi através de suas críticas que nos alertou para nunca confundir o lógico com o psicológico, como fazia Kant ao tentar associar a distinção entre as representações analíticas e sintéticas, pois representações são apenas cópias mentais e correm o risco de sofrerem contaminação pelo psicologismo[21], ao tentarmos estudá-las analiticamente. Dessa forma, ele defende que é possível caracterizar uma asserção a partir da análise de suas demonstrações. Isso se daria da seguinte maneira:

i) Se a demonstração de uma asserção utilizar apenas as leis gerais da lógica, esta será analítica;

ii) Se a demonstração utilizar como base um conjunto de axiomas, esta será sintética;

---

[20] Linha de pensamento que postula a realidade das estruturas matemáticas abstratas, atribuindo-lhes uma realidade independentemente da existência de seres inteligentes, ou que existiriam no próprio mundo físico ou que subsistiriam numa dimensão para além do tempo e do espaço (platonismo).

[21] Pode ser definido como um processo reducionista dos fenômenos humanos aos seus aspectos psíquicos, ou uma tendência para tentar fazer com que prevaleça o ponto de vista da psicologia sobre o de outra ciência qualquer, em uma questão comum.

iii) Se a demonstração tomar como base verdades gerais, esta será *a priori*;

iv) Se uma asserção utilizar verdades particulares expressas pelos sentidos, esta será *a posteriori*.

É possível perceber que Frege buscou melhorar as definições dadas por Kant e, com isso, dá início a criação da lógica moderna, fornecendo um conjunto de leis gerais e regras de inferências para que tivéssemos claro o que se entende por lógica. Baseado neste conjunto de leis e regras, pretendia verificar as sequências de proposições que constituem as demonstrações das asserções, buscando definir todas as noções e termos aritméticos nesta linguagem e posteriormente demonstrar todas as verdades aritméticas através desse sistema lógico. Se por acaso obtivesse êxito em seu propósito, ele teria demonstrado que toda a aritmética é pura lógica, ou seja, analítica. Porém, a simbologia apresentada por Frege é bastante complexa, portanto iremos utilizar uma notação mais atual para expor alguns de seus resultados.

Frege não viu o número como uma coleção de algo, mas sim como atributos de conceitos, ou seja, um objeto lógico e esta é uma verdade fixa para ele. Vejamos como ele argumenta a representação dessa relação:

Definição 5.1.1: Dado um conceito matemático qualquer $\boldsymbol{A}$ e um atributo $\boldsymbol{a}$ que pertence a esse conceito. Podemos representar esta relação da seguinte forma:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Ax}$ (Lemos: $\boldsymbol{a}$ é igual ao número que pertence ao conceito $\boldsymbol{A}$)

Exemplo 5.1.1: *i)* Há 3 ângulos congruentes em um triângulo equilátero.

Na asserção acima, podemos perceber que o número 3 é usado como um adjetivo para os ângulos do triângulo. Agora, analisemos a seguinte asserção:

ii) 3 é o número de ângulos congruentes de um triângulo equilátero.

Nesta asserção, podemos perceber que o 3 transformou-se em um substantivo e assim, podemos realizar a seguinte análise: Se tomarmos o conceito “ângulos congruentes em um triângulo equilátero” por A à asserção acima poderia ser representada da seguinte forma:

$\boldsymbol{3} = \boldsymbol{Ax}$ (Lemos: 3 é igual ao número que pertence ao conceito $\boldsymbol{A}$)

Se por acaso dois conceito tem o mesmo número podemos aplicar uma correspondência biunívoca entre eles. Assim, se tivermos os conceitos $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$**,** temos que:

$\boldsymbol{Bx = Cx \Leftrightarrow B \approx C}$ (Lemos: Número do conceito $\boldsymbol{B}$ é igual ao número do conceito $\boldsymbol{C}$ se, e somente se, o conceito $\boldsymbol{B}$ mantiver uma correspondência biunívoca ao conceito $\boldsymbol{C}$).

Este fato ficou conhecido como "*Princípio de Hume"* e era usado pelos matemáticos da época para determinar a ideia de igualdade entre os números. Porém, para ele este princípio não era lógico por não poder ser generalizado. Buscando solucionar este problema, definiu explicitamente o que entendia por números.

Definição 5.1.2: Os *Números* são objetos lógicos que existem independente de nós. Porém, não eram objetos reais em nenhum sentido do termo, ou seja, não eram físicos e nem mentais. Só podendo nos referir a eles, no contexto da aritmética (*lócus*) e mediado por ela.

Dessa forma, ele cria o "*Princípio do Contexto"*, no qual defende que não podemos nos referir a um termo isoladamente, mas apenas em proposições em que ele possui significado. Assim, ao reduzir os números a lógica, ele estaria reduzindo a própria aritmética a lógica, pois eles só existem no contexto da aritmética. Antes de apresentar a sua visão de números, Frege definiu o que seriam a "*Extensão de um conceito* e *Equinúmeros".*

Definição 5.1.2: Dado um conceito $\boldsymbol{K}$, a *Extensão do Conceito* $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{ext}$K) é a totalidade de objetos aos quais o conceito $\boldsymbol{K}$ se aplica. Logo, no contexto da aritmética, o número que convém ao conceito $\boldsymbol{K}$ é a extensão do conceito equinumérico ao conceito $\boldsymbol{K}$, pois realizam uma correspondência biunívoca.

$$\boldsymbol{Kx = ext}\mathbf{K}$$

Definição 5.1.3: Dois conceitos ($\boldsymbol{K}$ *e* $\boldsymbol{C}$) serão *Equinúmeros* se, e somente se, suas extensões estão em uma correspondência biunívoca pelo Princípio de Hume.

Após considerar as definições acima, Frege apresentou os números a partir dos seguintes conceitos:

- O zero ($\mathbf{0}$) é a extensão do conceito do equinúmero $\boldsymbol{x \neq x}$;
- O um ($\mathbf{1}$) é a extensão do conceito de equinúmero ao $\boldsymbol{x = 0}$;

O dois ($\mathbf{2}$) é a extensão do conceito de equinúmero ao $\boldsymbol{x = 0}$ ou $\boldsymbol{x = 1}$;

- O três ($\mathbf{3}$) é a extensão do conceito de equinúmero ao $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$ ou $\boldsymbol{x = 2}$;

$$\vdots$$

- O número $\boldsymbol{y}$ é a extensão do conceito de equinúmero ao $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{x = 2}$. ... ou $\boldsymbol{x = y - 1}$

Com isso, Frege afirma que um objeto qualquer é um número se existir um conceito $\boldsymbol{K}$ do qual ele seja a extensão do equinúmero $\boldsymbol{K}$. Um dos princípios fundamentais criados por ele foi a *Lei Básica V*[22], onde argumenta que dois conceitos $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{C}$ são idênticos se, e somente se, os dois conceitos se aplicam as mesmas coisas. Aplicando este princípio ao conceito de *Equinúmero* temos que dados dois conceitos $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{C}$ e objeto $\boldsymbol{y}$ (quantificador universal) se:

$$\boldsymbol{y = extK} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = extC}$$

Então:

$$\boldsymbol{ext}\mathbf{K} = \boldsymbol{ext}\mathbf{C}, \quad \text{ou ainda} \quad \boldsymbol{Kx = Cx}$$

Com base nessas informações, Frege formulou a seguinte “*Lei das Extensões”*.

i) Inicialmente definiu que existe um conceito $\boldsymbol{K}$, tal que para todo $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ pertence a extensão de $\boldsymbol{K}$ se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ for o número do conceito $\boldsymbol{K}$. Logo:

$$\exists\, \boldsymbol{K}\ \forall\, \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{extK} \Leftrightarrow \boldsymbol{Kx})$$

ii) Substituindo pelo quantificado universal $\boldsymbol{y = extK}$, obteve:

$$\exists\, \boldsymbol{y}\ \forall\, \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{Kx})$$

iii) Quantificando novamente sobre $\boldsymbol{K}$ temos:

$$\exists\, \boldsymbol{K}\ \exists\, \boldsymbol{y}\ \forall\, \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{Kx})$$

Porém, em 1902, Bertrand Russell (1872 ~ 1970) escreveu uma carta a Frege, apontando um problema na linha de raciocínio lógico apresentado por Frege. Tal problema ficou conhecido como “*Paradoxo de Russell*” e apresentava a seguinte argumentação:

[22] A Lei Básica V afirma que a "extensão do valor" da função f (x) é a mesma que a "extensão do valor" da função g (x) se, e somente se, ∀ x [f (x) = g (x)].

Primeiramente, Russell propôs a definição de um conceito $\boldsymbol{R}$ como sendo a extensão que não contém a si própria, gerando o seguinte questionamento: a extensão desse conceito pertence ou não a si própria? Vejamos a resposta lógica dada por Russell:

i) Inicialmente tomou o raciocínio da *Lei das Extensões* definindo um concito $\boldsymbol{R}$ da seguinte forma:

$$\exists\, \boldsymbol{extR}\ \forall\, \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{extR} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{extR})$$

ii) Substituindo pelo quantificador universal $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{extR}$, temos:

$$\exists\, \boldsymbol{y}\ \forall\, \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{y})$$

iii) Agora podemos substituir $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$ por qualquer valor. Tomemos $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.

$$\exists\, \boldsymbol{a}\ \forall\, \boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{a}) \quad (\boldsymbol{Absurdo}!)$$

A situação acima também possui uma versão mais lúdica conhecida como o "*Paradoxo do Barbeiro"*, descrita da seguinte maneira:

Em uma pequena cidade, existe apenas um barbeiro, porém nem todos os homens da cidade vão ao barbeiro, mas todos devem sempre estar barbeados. Assim, podemos dividir a população masculina da cidade em dois grupos: os que se barbeiam e os que vão ao barbeiro. Assumindo que o barbeiro faz a barba de todos os homens que não se barbeiam, temos as seguintes situações para o barbeiro:

i) Se ele não fizer a própria barba, ele deve ir ao barbeiro (ele mesmo).

ii) Se ele faz a própria barba, estará no grupo dos que não fazem a barba com o barbeiro, porém ele é o barbeiro, logo vai ao barbeiro. Assim, se ele faz a própria barba, ele não faz a própria barba!

Sendo este argumento fundamentado na lógica de Frege, Russell conseguiu mostrar uma inconsistência neste pensamento. Vendo todo o seu programa logicista desmoronar, Frege tenta corrigir esta falha, mas não obtém sucesso. Neste momento, é importante ressaltar que o "*Paradoxo de Russell*" foi apenas um de outros tantos que se apresentaram na época e causaram a chamada "*Crise dos Fundamentos*". Isto fez com que os matemáticos percebessem que haviam se tornado formalistas demais e que era necessário retomar a intuição para recolocar a matemática em bases sólidas novamente, apesar de haver alguns que ainda insistiam na proposta de Frege.

Russell, por sua vez, tentou dar continuidade ao pensamento logicista, e em parceria com seu professor Alfred North Whitehead (1861 ~ 1947), escreveu a obra "*Principia Mathematica*", dividida em três volumes que abordou os fundamentos da matemática através do pensamento logicista, publicadas nos anos de 1910, 1912 e 1913. Enquanto Frege pretendia reduzir a aritmética e suas verdades a lógica, Russell tinha a pretensão de ir mais longe, e conseguir reduzir toda a matemática da época a lógica. Ele e Whitehead eram tão criteriosos, que levaram mais de 378 páginas para mostrar a veracidade de uma asserção que foi usada na prova de que "$\mathbf{1+1=2}$". Está prova somente foi verificada no segundo volume do "*Principia Mathematica*". Abaixo temos a imagem de um recorte da página do "*Princípia"* em que finalizam essa demonstração.

Figura 4 – Recorte da página do *Princípia Mathematica* onde Russell e Whitehead finalizam a prova que "$\mathbf{1+1=2}$"

***110·643.** $\vdash . 1 +_c 1 = 2$

Dem.

$$\vdash . *110{\cdot}632 . *101{\cdot}21{\cdot}28 . \supset$$
$$\vdash . 1 +_c 1 = \hat{\xi}\{(\exists y) . y \in \xi . \xi - \iota`y \in 1\}$$
$$[*54{\cdot}3] \quad = 2 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

The above proposition is occasionally useful. It is used at least three times, in *113·66 and *120·123·472.

Fonte: Disponível em: https://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/pageviewer-idx?c=umhistmath&cc=umhistmath&idno=aat3201.0001.001&frm=frameset&view=image&seq=401. Acesso em 01 fev 2023.

Russell e Whitehead, ao escreverem os volumes do "*Principia Mathematica",* apresentaram uma grande evolução na simbologia lógica em relação a simbologia de Frege. Também chegaram a várias conclusões que Frege já havia apresentado, mas desconhecidas por eles. Tentando eliminar os paradoxos dos conjuntos, estabeleceram uma hierarquia infinita, definindo que um conjunto não pode ser membro de si mesmo, nem de qualquer conjunto de tipo inferior. A esta hierarquização, Russell chamou originalmente de "*Teoria dos Tipos"*. De forma simples, podemos dizer que a teoria de Russell ordena os conjuntos em uma hierarquia de tipos, de tal modo que não é permissível dizer que um conjunto é membro de si mesmo, nem que o não é, o que elimina conjuntos contraditórios. Os conjuntos potencialmente contraditórios são simplesmente riscados do sistema, pois não há qualquer modo significativo de os definir enquanto se respeitar as regras da "*Teoria dos Tipos*".

Russell dedicou muitos anos ao estudo da "*Teoria dos Tipos*" e a tentativa de resolução dos paradoxos que se apresentavam, tornando-se algo muito desagradável para ele, pois já não podia mais contar com seu parceiro Whitehead, que ao perder seu filho na guerra, abandonou o projeto. Para Russell, os paradoxos pareciam triviais, todavia por mais que tentasse não conseguia fazer qualquer progresso. Além disso, críticas constantes ao programa logicista eram feitas, como por exemplo, se a matemática pode ser reduzida à lógica, ela seria apenas uma linguagem vazia de sentido e seus teoremas regras gramaticais. Outra crítica seria em relação à complexidade das provas que exigiam um nível de abstração muito grande e eram bem extensas. Esses e outros fatores fizeram com que o programa logicista fosse deixado de lado, apesar de alguns poucos tentarem dar continuidade, mas sem êxito.

5.2 O Pensamento Intuicionista

O movimento intuicionista foi encabeçado pelo matemático holandês Luitzen E. J. Brouwer (1881 ~ 1966). Tinha aversão ao transcendental, colocando em dúvida a existência de qualquer objeto matemático que não pudesse ser edificado (construído), recusando-se a aceitar qualquer noção de verdade matemática sem que houvesse a verificação por meio de procedimentos de construção, negando assim a existência independente dos objetos matemáticos (realismo) e a transcendência das verdades matemáticas. Por isso, o Intuicionismo é a vertente mais difundida do construtivismo presente nas primeiras décadas do séc. XX.

Essa linha de pensamento considerava o ser humano dotado de uma intuição inicial sobre os números naturais, defendendo a reelaboração da matemática partindo sempre da intuição, levando assim a uma reconstrução de axiomas e teoremas. Dessa forma, Brouwer acreditava que toda a matemática deveria ser fundamentada em uma intuição básica, temporal, sucessiva e independente da lógica, reduzindo o conhecimento matemático a um conhecimento subjetivo. Ao estudarmos um pouco o pensamento intuicionista de Brouwer, percebemos que a única realidade que existe é a da sua consciência, tanto o mundo como as outras consciências existem apenas como mera representação da sua. Sendo assim, ele defende que as verdades mais fundamentais sobre os números naturais (inteiros positivos) são geradas pela intuição. A se saber, tais verdades são:

a) A existência de um primeiro número natural;
b) Todo número natural possui um sucessor;

c) O primeiro número natural não é sucessor de nenhum outro número;
d) Dois números naturais distintos possuem sucessores diferentes;
e) A interação finita da operação de sucessão gera todos os números naturais.

Segundo Souza (2013), Brouwer defende que toda a aritmética se fundamenta na intuição e que toda construção intuicionista matemática é um processo temporal finito. Unindo este pensamento ao de que só pode existir um objeto matemático se este puder ser construído, temos uma grande restrição ao que a matemática intuicionista admite existir, por exemplo, para um intuicionista não existe um conjunto infinito, já que ele não pode ser construído por uma sequência finita. O máximo que ele admitia era a existência de conjuntos potencialmente infinitos, ou seja, conjuntos finitos, aos quais poderiam ser acrescentados novos elementos tantos quanto necessários, entre outros dois elementos desse conjunto (infinito potencial). Esta forma de pensar não foi bem-aceita no meio matemático, pois além de não aceitar o conceito de infinito atual também refutou a ideia de conjuntos dados pelo axioma da escolha, pois nem sempre podiam ser efetivamente construídos. Isto causava um dano enorme à matemática dita clássica, pois vários teoremas, que dependiam da argumentação da construção de tais conjuntos, foram perdidos e não poderiam mais ser demonstrados pelo método construtivista.

Para ele, a matemática precedia a lógica, sendo esta apenas uma descrição *a posteriori* das regularidades formais dos procedimentos de construção matemática. Dessa forma, via a matemática constituída de um exercício criativo proporcionado por uma consciência matemática formal e construtível. Porém, Brouwer não se opôs quando um de seus alunos, Arend Heyting (1898 ~ 1980), apresentou uma formalização da lógica em procedimentos intuicionistas conhecida hoje como a Lógica de Heyting, em que propõe uma interpretação intuicionista das constantes lógicas, conectivos e quantificadores. Vejamos como se deu essa nova interpretação:

Sejam A e B duas asserções quaisquer, então temos uma demonstração de:

i) $\boldsymbol{A \wedge B}$ *(*Lê-se: $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$*)* Escrita utilizada quando temos uma demonstração de $\boldsymbol{A}$ *e* uma demonstração de $\boldsymbol{B}$.

ii) $\boldsymbol{A \vee B}$ *(*Lê-se: $\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$*)* Escrita utilizada quando temos uma demonstração de $\boldsymbol{A}$ *ou* uma demonstração de $\boldsymbol{B}$.

iii) $\boldsymbol{A \rightarrow B}$ (Lê-se: se $\boldsymbol{A}$, então $\boldsymbol{B}$*)* Escrita utilizada quando temos uma demonstração que adicionada a uma demonstração de $\boldsymbol{A}$ produz uma demonstração de $\boldsymbol{B}$.

iv) $\neg \boldsymbol{A}$ (Lê-se: não $\boldsymbol{A}$) Escrita utilizada quando temos uma demonstração que juntada a uma demonstração de $\boldsymbol{A}$ produz uma demonstração de uma asserção absurda ou falsa.

Outra escrita utilizada por Heyting é a $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, que é usada para denotar que uma propriedade qualquer $(\boldsymbol{A})$ é aplicada a um determinado objeto matemático $(\boldsymbol{x})$, logo:

v) $\forall\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ (Lê-se: para todo $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$ se aplica a $\boldsymbol{x}$) Escrita utilizada quando temos uma demonstração que, juntada à construção de um objeto $\boldsymbol{x}$ qualquer, nos dá uma demonstração da asserção $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ (isto é, que $\boldsymbol{A}$ se aplica a $\boldsymbol{x}$).

vi) $\exists\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ (Lê-se: existe um $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{A}$ se aplica a $\boldsymbol{x}$) Escrita utilizada quando temos um procedimento para construir um objeto $\boldsymbol{x}$ e uma demonstração que juntos produzem uma demonstração da asserção $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$.

Não podemos afirmar que Brouwer tenha dado importância ao trabalho de seu aluno, ou que meramente vislumbrou inutilidade em seu trabalho, o fato é que esta lógica coloca em cheque algumas notáveis verdades da lógica clássica. Focaremos em duas neste estudo:

i) O *Princípio do Terceiro Excluído*, onde temos que, para toda asserção $\boldsymbol{A}$, um objeto é $\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A}: \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A})$. Esta verdade da lógica clássica não se aplica à lógica intuicionista, pois para os intuicionistas não é possível garantir que para qualquer $\boldsymbol{A}$, temos uma demonstração de $\boldsymbol{A}$ ou uma demonstração que juntada a uma demonstração de $\boldsymbol{A}$ produz a demonstração de uma falsidade. Para Brouwer, aceitar a validade deste princípio equivale a aceitar que todo problema matemático é, em princípio, solúvel.

ii) A *Lei da Dupla Negação*, segundo o qual temos que para toda asserção $\boldsymbol{A}$, temos que um objeto que *não* é não $\boldsymbol{A}$, então esse objeto é $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A}: \neg\neg \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A})$. Esta verdade lógica clássica também não se aplica à lógica intuicionista, pois não se pode garantir a existência de uma demonstração de $\boldsymbol{A}$ a partir de uma pretensa demonstração de $\neg \boldsymbol{A}$.

O fato é que é possível perceber que ambas as verdades lógicas acima são equivalentes e abrir mão delas custaria muito aos matemáticos da época, pois a demonstração por absurdo deixaria de ter o seu valor e seria colocada de lado, já que para o intuicionista não se pode garantir a veracidade de uma asserção independentemente de uma experiência vivida dessa verdade. Vale ressaltar que estes métodos são uns dos mais usados pelos matemáticos clássicos e têm suas validades desde os tempos de Euclides e Arquimedes, o que gerou certa rejeição ao pensamento intuicionista. Entretanto, Brouwer admitia a validade do "*Princípio do Terceiro Excluído"* apenas em contextos finitos, pois dessa forma era possível realizar uma verificação, mesmo que de forma exaustiva, ou seja, a validade deste princípio depende diretamente da nossa capacidade de verificá-lo. Portanto, em contextos infinitos este princípio não é aceito por Brouwer.

As divergências acima foram apenas algumas de outras tantas que fizeram com que o pensamento intuicionista fosse quase que universalmente rejeitado pela comunidade matemática. Além delas podemos também citar:

i) A recusa de muitos teoremas "elegantes" da matemática clássica, que para os intuicionistas, não possuíam significado;
ii) Nos teoremas aceitos pela matemática clássica e pela matemática intuicionista, as provas eram mais longa e trabalhosas no Intuicionismo;
iii) Teoremas válidos no Intuicionismo que não eram válidos na matemática clássica e o contrário, como por exemplo, os que usam a demonstração por absurdo.

Exemplo 5.2.1: Um exemplo de uma prova não-construtiva, trata-se da prova de que existem números irracionais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, tais que $\boldsymbol{a^b}$a b seja um número racional.
Prova aceita pela matemática clássica: Tomemos o número irracional $\sqrt{2}$. Temos que $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ou é racional, ou é irracional. Se for racional, a prova está concluída. Se não for, então $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ será irracional. Logo, $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ é igual a 2, que é racional.■

A prova acima não é aceita pelos intuicionistas, pois não é possível saber qual dos dois casos resolve o problema, ou seja, não é possível apresentar um exemplo para a proposição.
Prova aceita pelos intuicionistas: Uma prova construtiva para a proposição poderia ser a seguinte: sejam os seguintes números irracionais: $\sqrt{2}$ e $\log_{\sqrt{2}} 3$. Logo, $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3}$ é igual a 3, que é um número racional.■

Essa prova se caracteriza como construtivista, pois temos explicitamente que $\boldsymbol{a^b}$ é racional, com $\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{b}$ irracionais.

5.3 O Pensamento Formalista

Com a criação da Teoria dos Conjuntos por Cantor e a verificação dos paradoxos que ela apresentava, os matemáticos do séc. XX sentiram a necessidade de livrar a matemática das inconsistências. O caminho apresentado pela escola formalista, que teve como principal personagem David Hilbert (1862 ~ 1943), foi a união do método logicista ao método axiomático, tendo como principal propósito, garantir a consistência nas investigações matemáticas por meio da formalização de seu conhecimento. Assim, Hilbert e os formalistas buscavam utilizar um conjunto finito de axiomas para formalizar uma matemática livre de paradoxos. Caso conseguissem seu objetivo, a matemática deveria ser reescrita por meio de demonstrações rigorosas em um sistema formal. Para Hilbert, isso era possível, pois acreditava que analisando os processos e conceitos matemáticos (lógicos ou não), poderia representá-los por meio de uma lógica simbolista que o permitiria demonstrar proposições e regras apoiadas em uma manipulação de símbolos sem nunca levá-las a uma contradição.

Para poder embasar seu pensamento, Hilbert tomou como base a "*Filosofia Nominalista"*[23], tornando a matemática um conjunto de fórmulas que se diferenciavam das fórmulas habituais da época, pois além de terem símbolos e sinais matemáticos, também possuíam símbolos lógicos, como por exemplo: o de implicação $(\rightarrow)$ e o de negação $(\neg)$. Tais fórmulas poderiam ser equiparadas a pedras na construção de um prédio e foram chamadas de axiomas. Assim, se tivermos uma sequência de fórmulas ou axiomas $(\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3}, \ldots \boldsymbol{F_n})$, então cada membro desta sequência pode ser obtido utilizando as fórmulas ou axiomas anteriores da sequência. A esta construção de novas fórmulas foi chamada de prova, ou seja, no formalismo "as deduções são cadeias de transformações de expressões simbólicas, segundo regras explícitas de manipulação de símbolos" (SILVA, 2007, pág. 184).

Exemplo 5.3.1: Suponhamos a adição de dois números, considerados grandes na notação decimal, nesse processo é exaustivo transformá-los em unidades para somente depois adicioná-los. Isto levaria muito tempo e estaríamos propícios a cometer erros. Porém, se usarmos o algoritmo da adição, que possui regras pré-estabelecidas por um sistema formal, essa adição se torna bastante simples.

---

[23] Esta corrente do pensamento filosófico defende que as entidades da matemática não existem, nem como objetos reais e nem como objetos mentais, ou seja, elas não existem nem fora da mente humana e nem dentro como construções mentais. Para esta corrente, tais entidades são abstrações vocais ou linhas escritas, meros nomes.

Para os Formalistas, as deduções e transformações matemáticas eram passíveis de interpretações por parte de quem as manipulava, mas também possuíam um significado explícito dentro de um sistema formal. Silva (2007) nos apresenta o seguinte exemplo sobre esta temática:

Exemplo 5.3.2: O conjunto de axiomas de Dedekind-Peano é um possível conjunto de axiomas que embasam a aritmética dos números naturais. A se saber:

(i) 0 é um número.

(ii) O sucessor de qualquer número é um número.

(iii) 0 não é sucessor de nenhum número.

(iv) Se os sucessores de dois números são iguais, esses números são iguais.

(v) Se um conjunto de números contém 0 e o sucessor de qualquer número nele contido, então ele contém todos os números.

Devemos observar que os termos sublinhados são entendidos segundo seu significado habitual e com isso é possível perceber que os axiomas *(i), (ii), (iii), (iv)* e *(v)* são asserções verdadeiras sobre os números naturais. Mas podemos atribuir significados não habituais a esses termos sublinhados, como por exemplo: o “0” passaria a ser apenas o nome de um objeto, o “número” o nome de uma propriedade desse objeto e “sucessor” o nome de uma operação entres eles. Dessa forma, as asserções *(i), (ii), (iii), (iv)* e *(v)* não mais expressariam alguma verdade, já que os termos sublinhados não possuem um significado determinado, eles apenas expressam relações formais. Assim, como não designamos o significado habitual a estes termos, *(i), (ii), (iii), (iv)* e *(v)* são agora axiomas puramente formais de uma teoria não interpretada.

Analisando o exemplo anterior, é possível perceber que podemos interpretar os termos sublinhados da forma que quiséssemos, desde que nossa interpretação satisfaça *(i), (ii), (iii), (iv)* e *(v).* Para que possamos ter uma melhor compreensão do que está sendo dito, podemos assumir que “0” denote o número 3, “sucessor” seja a operação de adicionar 3 (+ 3) e “número” seja a propriedade de ser múltiplo de 3. Tomando essa leitura é possível verificar que todos os cinco axiomas são verdadeiros. Dessa forma, é possível perceber que esta não é a única interpretação possível. Podemos também interpretar “0” como o conjunto vazio, o “sucessor” como a operação de unir um conjunto ao conjunto unitário, que contém apenas esse mesmo conjunto (isto é, sucessor (x) = x U {x}) e número como qualquer conjunto obtido a partir de um número finito de interações entre o conjunto e a operação sucessor. Com essas interpretações, é fácil de ver que *(i)*, *(ii)*, *(iii)*, *(iv)* e *(v)* também são verdadeiros.

Hilbert pretendia mostrar que uma teoria axiomático-dedutiva interpretada pode ou não ser formal, mas uma teoria não interpretada é sempre formal, dado que, se os termos da teoria não possuíam significado, só era possível manipulá-los mediante a um sistema dado de regras explícitas. Isto era uma vantagem que Hilbert desejava explorar, pois impedia que o significado dos termos comprometesse as deduções, ocasionando verdades que não foram selecionadas como axiomas e evitando inconsistências ou paradoxos. Esta foi a proposta do formalismo, elaborar um conjunto de regras e símbolos que pudessem nos auxiliar a operar a matemática mecanicamente, sem contradições nas conclusões. Foi com este propósito que 1900, durante o II Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris, ele propôs 23 problemas aos matemáticos da época, dos quais identificamos que 14 são considerados resolvidos; 2 o foram parcialmente e 7 ainda se encontram em aberto:

Tabela 7 – 23 problemas matemáticos propostos por Hilbert em 1900

PROBLEMA	*DESCRIÇÃO*	*SITUAÇÃO*
Problema 1	Problema de Cantor sobre a potência do Continuum	Resolvido
Problema 2	A não contradição dos axiomas da Aritmética	Resolvido
Problema 3	A igualdade do volume de dois tetraedros com as mesmas áreas da base e alturas	Resolvido
Problema 4	O problema da linha reta como a menor distância entre dois pontos	Aberto
Problema 5	A noção de grupo contínuo de transformações de Lie sem a hipótese da diferenciabilidade das funções definidoras dos grupos	Resolvido
Problema 6	Tratamento matemático para os axiomas da física	Aberto
Problema 7	Irracionalidade e transcendência de determinados números	Resolvido
Problema 8	O problema de números primos	Aberto

Fonte: Adaptado de Noronha (2021)

Tabela 7 – 23 problemas matemáticos propostos por Hilbert em 1900

(conclusão)

PROBLEMA	*DESCRIÇÃO*	*SITUAÇÃO*
Problema 9	Prova da mais geral lei de reciprocidade em um corpo numérico qualquer	Resolvido
Problema 10	A decisão sobre a resolubilidade de uma equação diofantina	Resolvido
Problema 11	Formas quadráticas com quaisquer coeficientes numéricos algébricos	Resolvido
Problema 12	Extensão do teorema de Kronecker sobre corpos abelianos a um domínio de racionalidade algébrica qualquer	Aberto
Problema 13	Impossibilidade da resolução da equação geral do sétimo grau através de funções de somente 2 argumentos	Resolvido
Problema 14	Prova da finitude de certos sistemas de funções completos	Resolvido
Problema 15	Fundamentação rigorosa do cálculo enumerativo de Schubert Parcialmente	Parcialmente resolvido
Problema 16	Problema da topologia de curvas e superfícies algébricas Parcialmente	Parcialmente resolvido
Problema 17	Representação de formas definidas através de quadrados	Resolvido
Problema 18	Construção do espaço a partir de poliedros congruentes	Aberto
Problema 19	As soluções de problemas regulares no cálculo de variações são sempre necessariamente analíticas?	Resolvido
Problema 20	Problemas gerais dos valores de fronteira	Aberto
Problema 21	Demonstração da existência de equações diferenciais lineares tendo grupo monodrômico prescrito	Resolvido
Problema 22	Uniformização de relações analíticas por meio de funções automorfas	Resolvido
Problema 23	Mais desenvolvimento dos métodos do cálculo de variações	Aberto

Fonte: Adaptado de Noronha (2021)

Observando a ordem com que Hilbert apresentou os problemas, podemos ter um vislumbre sua concepção da natureza matemática, pois assim como os logicista, desejava colocar a aritmética sobre uma base segura de axiomas e posteriormente deduzir a geometria a partir da aritmética (assim como propôs Descartes e Russell). Dessa forma, ele poderia garantir que toda a matemática estaria sobre bases seguras. Nesta missão, ele obteve certo êxito, pois foi capaz de construir interpretações numéricas dos termos geométricos, fazendo com que as geometrias (euclidianas ou não) falassem de números, ou seja, ele conseguiu mostrar que a consistência de todas essas geometrias, depende em última análise, da consistência da aritmética dos números reais.

Hilbert porém, não estipulou de forma específica, quais métodos seriam aceitos para as demonstrações dos problemas por ele propostos. Contudo, defendia que o ponto de partida deveria ser uma teoria interpretada suficientemente simples e que sua consistência pudesse ser demonstrada por uma teoria ainda mais fundamental, num processo de regressão. Para ele, tal teoria privilegia uma forma muito elementar de aritmética dos números naturais, que chamou de "*Matemática Finitária*".

Definição 5.3.1: A "*Matemática Finitária*" é a teoria de um domínio de entidades concretas ou muito próximas de entidades concretas (os símbolos de um sistema simbólico), cuja sua consistência pode ser imediatamente verificada pelos sentidos. É possível admitir que a teoria matemática formal que mais se aproxima da "*Matemática Finitária*" hilbertiana é a "*aritmética primitivamente recursiva*"[24].

Em 1899, ele apresentou em seu trabalho "*Grundlagem der Geometrie*" (Os Fundamentos da Geometria), um axiomatização da geometria embasada em uma teoria não interpretada e formal, ou seja, enquanto Euclides definiu os termos "ponto", "reta" e "plano", Hilbert apenas considerava três conjuntos distintos de objetos (pontos, retas e planos) e que estes objetos mantinham relações ("está em", "entre" e "congruente") entre si por meio de axiomas. Enquanto as demonstrações de Euclides dependiam muito de intuições espaciais e diagramas, a abordagem proposta por Hilbert, utilizava apenas a lógica e axiomas para chegar aos teoremas da geometria. Porém, livrar a matemática da intuição tinha uma consequência, pois possibilitaria a existência de demonstrações para sistemas inconsistentes, o que lhe fez conceber a necessidade de estudos *metamatemáticos*. Isto levantou diversos questionamentos a sua teoria, levando-o a considerar o problema da completude, ou seja, a propriedade que garante que dada uma asserção qualquer, expressa na linguagem do sistema, esta asserção ou sua

---

[24] A Aritmética Primitiva Recursiva (APR), é uma formalização dos números naturais, livre de quantificadores. Foi primeiramente proposta por Skolem como uma formalização de sua concepção finitista das fundações da aritmética, e é amplamente acordado que todo raciocínio da APR é finitista.

negação, são demonstráveis. Outro ponto que também foi levado em consideração por Hilbert, foi a consistência de sistema axiomático, onde uma asserção não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Hilbert considerava a liberdade de criar como um direito inalienável dos matemáticos, mas sob a única ressalva da consistência dessa criação. Podemos então concluir, que seu programa, vislumbrava apenas garantir a *segurança* dos métodos e das teorias da matemática tradicional. Entretanto, não podemos afirmar que ele, de fato, acreditasse que a matemática formal fosse apenas um jogo simbólico, mas a considerou dessa forma como uma estratégia para demonstrar sua consistência. Será justamente este ponto que irá gerar um efeito negativo, pois se a matemática for vista apenas como uma espécie de manipulação de símbolos, ela teria um sentido vazio para as demais ciências naturais, o que exclui aspectos intuitivos e empíricos. Porém, o programa de Hilbert não alcançou seu objetivo, como veremos, em meados de 1921, Kurt Gödel provou que todo sistema formal recursivamente dedutível ou é incompleto ou inconsistente.

6 A INCOMPLETUDE DE KURT GÖDEL

Em meados de 1931, um jovem matemático de 25 anos chamado Kurt Gödel (1906 ~ 1978), escreveu um artigo intitulado: "*Uber firmal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*" ("Sobre as proposições Indecidíveis dos *Príncipia Mathematica* e Sistemas Correlatos"). Este artigo foi um marco na história da lógica e da matemática, porém na época seu conteúdo era inteligível à maioria dos matemáticos, pois tratava de um conjunto de questões que não lhes despertavam interesse. Se muito, era possível encontrar relatos dessa temática feitos por um pequeno grupo de estudiosos. O raciocínio usado nesse artigo era tão novo para época de sua publicação que apenas esse pequeno grupo de estudiosos, familiarizados com a literatura técnica desse campo altamente especializado, poderia acompanhar os argumentos utilizados e compreender a revolução que a conclusão deste artigo traria à matemática formal.

Gödel pôs os matemáticos diante de uma frustrante decepção, a de que o sistema axiomático teria limitações e portanto, eliminando a possibilidade da aritmética ser completamente fundamentada através de um conjunto finito axiomas, ou seja, ele provou que era impossível estabelecer uma consistência elementar lógica dedutiva à aritmética e que isso só seria possível se considerássemos princípios de raciocínios tão complexos que colocariam em dúvidas a consistência desses próprios sistemas. Tomando esta afirmação de uma maneira mais simples: Gödel, provou ser impossível dar garantias de que muitos ramos significativos da matemática estejam inteiramente livres de contradições. Tal afirmação vai na contramão do programa formalista de Hilbert, causando frustração e levantando novos questionamentos sobre a consistência dos conhecimentos matemáticos conhecidos até a época.

6.1 O problema da inconsistência e da incompletude

Antes de iniciarmos o debate sobre as conclusões alcançadas por Gödel e suas implicações, vale ressaltar que o objetivo deste estudo, não é relatar cada detalhe do artigo publicado por Gödel, pois seria necessário um vasto conhecimento técnico específico na área, mas sim apresentar em linhas gerais, os principais passo lógicos dados por ele, para chegar a tão brilhante conclusão. Para tanto, iremos nos referenciar nas obras: "*A prova de Gödel*", escrita por de Nargel e Newman (2015) e "*Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel*", escrita por Goldstein (2008), pois apresentam uma síntese objetiva e inteligível desse resultado.

Inicialmente, precisamos familiarizarmos com um exemplo de prova absoluta da consistência de um sistema. Para alcançar nosso objetivo, utilizaremos uma pequena porção da "*Principia"* (lógica elementar das proporções), em que a organização desse processo se dará em quatro etapas:

i) Preparar um catálogo completo dos signos (símbolos) utilizados durante o cálculo e que nos servirão de vocabulários para a construção deste tópico, tomaremos como referência os símbolos utilizados por Nargel e Newman (2015);

ii) Estabelecer "*Regras de Formação"* que afirmarão quais combinações dos signos serão aceitas como "*Fórmulas"* (sentenças), ou seja, estas "*Regras de Formação"* estarão para o nosso sistema, assim como, a gramática estará para nossa língua materna (língua portuguesa);

iii) Estabelecer as "*Regras de Transformação"* que descreverão a estrutura das derivações das fórmulas, ou seja, tais "*Regras de Transformações"* irão determinar como as "*Fórmulas"* mais elementares irão se combinar, em uma cadeia de deduções, resultando em "*Fórmulas"* mais complexas;

iv) Selecionar certas "*Fórmulas"* como axiomas (Fórmulas Primitivas), que servirão de fundamentos para todo o sistema.

Visando facilitar a compreensão do assunto, definiremos o que é um "*Teorema do Sistema"* e o que entenderemos por "*Demonstração Formal"* ou "*Prova Formal":*

Definição 6.1.1: Um "*Teorema do Sistema"* será qualquer "*Fórmula"* obtida através da derivação dos axiomas pré-estabelecidos e que respeitam as "*Regras de Transformações"* também pré-estabelecidas pelo sistema.

Definição 6.1.2: Uma "*Demonstração Formal"* ou "*Prova Formal"* é uma sequência finita de "*Fórmulas",* obtidas a partir das "*Regras de Transformações"*. Essas "*Fórmulas"* podem ser axiomas ou derivar deles.

Podemos agora iniciar nosso exemplo de uma prova absoluta da consistência de um sistema:

Exemplo 6.1.1: Primeiramente, iremos formular nosso vocabulário, que será constituído por:

i) "*Variáveis*" que poderão ser substituídas por sentenças e por isso também podem ser chamadas de "*Variáveis Sentenciais*". Tomaremos como exemplo de variáveis: '$\boldsymbol{p}$', '$\boldsymbol{q}$', '$\boldsymbol{r}$'.

ii) "*Signos constantes*" ou "*Conectivos Sentenciais*" ou "*Signos de Pontuação*" que representarão abreviaturas de conjunturas entre *Variáveis Sentenciais*. Os conectivos sentenciais são:

'$\sim$' (Esta é a abreviatura de "não")
'$\vee$' (Esta é a abreviatura de "ou")
'$\supset$' (Esta é a abreviatura de "se ... então")
'.' (Esta é a abreviatura de "e")

Formulado nosso vocabulário, consideremos agora, como estão compostas nossas "*Regras de Formação*", ou seja, se $\boldsymbol{S}$ for utilizado para representar uma "*Fórmula*" então $\boldsymbol{\sim S}$ (não $\boldsymbol{S}$) também será uma "*Fórmula*". De forma análoga, se $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ são "*Fórmulas*", então $(\boldsymbol{S_1}) \vee (\boldsymbol{S_2})$, $(\boldsymbol{S_1}) \supset (\boldsymbol{S_2})$, $(\boldsymbol{S_1}).(\boldsymbol{S_2})$ também serão. Assim, nos resta apenas formular as *Regras de* Transformação, que em nosso exemplo estabeleceremos duas:

i) Regra da Substituição: esta será válida para as "*Variáveis Sentenciais*", e admite que de uma "*Fórmula*" contendo "*Variáveis Sentenciais*", é sempre permissível derivar outra "*Fórmula*" pela substituição uniforme das "*variáveis*" por *"Fórmulas"*;

ii) Regra de Destacamento: esta irá garantir que dadas duas "*Fórmulas*" com as formas $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_1} \supset \boldsymbol{S_2}$ é sempre permissível derivar a *Fórmula* $\boldsymbol{S_2}$.

Tomando agora uma pequena porção da "*Principia*", consideremos:

$'\boldsymbol{p} \supset (\sim\boldsymbol{p} \supset \boldsymbol{q})'$ (se $\boldsymbol{p}$, então se não-$\boldsymbol{p}$ então $\boldsymbol{q}$)

Admitindo que uma "*Fórmula*" $\boldsymbol{S}$ e sua negação $\sim\boldsymbol{S}$, sejam deriváveis dos axiomas de um dado sistema. Ao substituirmos na "*Fórmula*" acima $\boldsymbol{p}$ por $\boldsymbol{S}$ (*Regra da Substituição*) e em seguida aplicarmos a "*Regra de Destacamento*" duas vezes a fórmula $\boldsymbol{q}$ será dedutível.

$\boldsymbol{p} \supset (\sim\boldsymbol{p} \supset \boldsymbol{q})$	(Se $\boldsymbol{p}$, então (se não-$\boldsymbol{p}$, então $\boldsymbol{q}$))
$\Downarrow$	
$\boldsymbol{S} \supset (\sim\boldsymbol{S} \supset \boldsymbol{q})$	(Se $\boldsymbol{S}$, então (se não-$\boldsymbol{S}$, então $\boldsymbol{q}$)) 1° aplicação
$\Downarrow$	
$\sim\boldsymbol{S} \supset \boldsymbol{q}$	(Se não-$\boldsymbol{S}$, então $\boldsymbol{q}$) 2° aplicação
$\Downarrow$	
$\boldsymbol{q}$	Logo $\boldsymbol{q}$ é permissível

Porém, se isto ocorrer ($\boldsymbol{q}$ demonstrável), significa que $\boldsymbol{S}$ e $\sim\boldsymbol{S}$ são dedutíveis a partir dos axiomas o que torna o sistema inconsistente, ou seja, todo sistema axiomático em que uma "*Fórmula*" e sua negação forem dedutíveis admitirá que toda "*Fórmula*" seja um "*Teorema do Sistema*", logo podemos derivar qualquer "*Fórmula*" de um conjunto contraditório de axiomas. Portanto, se nem toda "*Fórmula*" é um "*Teorema do Sistema*" (existe ao menos uma *Fórmula* que não é derivável dos axiomas), então o sistema é consistente. Dessa forma, Gödel resume a prova da consistência ao fato de demonstrar que há pelo menos uma *Fórmula* que não pode ser obtida pela derivação dos axiomas, respeitando as "*Regras de Formação*" e de "*Transformação*". Porém, para executar tal tarefa ele recorreu ao "*Raciocínio Metamatemático*"[25], buscando encontrar características ou propriedade estruturais nas *Fórmulas* que satisfaçam três condições:

i) A propriedade deve ser comum a todos os axiomas;

ii) A propriedade deve ser hereditária sob as "*Regras de Transformação*", ou seja, se todos os axiomas possuem esta propriedade, então uma "*Fórmula*" derivada destes axiomas também a terá;

iii) A propriedade não precisa pertencer a toda "*Fórmula*" que possa ser constituída pelas "*Regras de Formação*".

[25] A metamatemática é um conceito formulado por Jacques Herbrand em 1930 e expandido por Tarski e Gödel. Ela cuida do esclarecimento rigoroso através de recurso à própria matemática, de conceitos como o de axioma, regra de inferência e demonstração formal ou dedução, de completude e de interpolação. Portanto, o raciocínio metamatemático trata de aplicar os princípios lógicos sobre os objetos de estudo da metamatemática.

Basicamente devemos observar que, se uma propriedade é repassada pelos axiomas aos "*Teoremas do Sistema*", então basta encontrar uma sucessão de signos que obedeçam às exigências por serem "*Fórmula*" e que não possuam tal propriedade. Assim, teremos uma "*Fórmula*" que não poderá ser obtida pelos axiomas, tornando o sistema consistente. Um exemplo: seria a "*Tautologia*"[26], ou seja, a propriedade de substituir uma "*Fórmula*" por outras mais elementares, sem haver perda de sua verdade lógica. Logo, os axiomas possuem esse caráter tautológico que é repassado aos "*Teoremas do sistema*", assim as "*Fórmulas*" também são tautologias. Portanto, se uma "*Fórmula*" não for uma tautologia, ela não será um teorema, tornando o sistema consistente.

Outro ponto colocado em questão por Gödel trata-se da "*completude*" de um sistema axiomatizável, isto é, se é possível estabelecer um conjunto inicial de pressuposições a partir das quais deduzimos todos os enunciados verdadeiros que tratam de um determinado campo de investigação. Sobre esse ponto, Gödel afirmou que isso também não é possível, pois chegou à conclusão de que em qualquer conjunto consistente de axiomas aritméticos haverá enunciados aritméticos verdadeiros que não podem ser derivados dos axiomas, mesmo que sejam acrescentados mais axiomas indefinidamente, provando assim, que todo o programa hilbertiniano iria falhar em seu propósito. Um exemplo clássico desta incompletude seria o "*Teorema de Goldbach*", enunciando que todo número par é resultado da soma de dois números primos. Sua veracidade e falsidade, até os dias atuais, ainda não foram demonstradas.

6.2 A prova de Gödel

Gödel estrutura seu trabalho, em primeiro momento, apresentando uma "*Fórmula*" ***F***, insustentável de estrutura lógica, similar ao "*Paradoxo de Richard*".

Definição 6.2.1: O "*Paradoxo de Richard*" é uma antinomia semântica da teoria dos conjuntos de linguagem natural, descrita primeiramente pelo matemático francês Jules Richard (1905). Tal paradoxo resulta em uma contradição insustentável. De modo geral, definimos que "***x*** é richardiano, se ***x*** não possui a propriedade designada pela expressão definidora com a qual ***x***, está relacionado em um conjunto seriadamente ordenado de definições.

Exemplo 6.2.1: "O número 15 é o produto de qualquer número inteiro por si próprio."

[26] Trata-se de uma redundância, ou seja, falar a mesma coisa, porém com palavras ou termos diferentes.

É possível perceber que o número 15 está relacionado à expressão “*metamatemática”*, mas não possui a propriedade especificada pela expressão. Logo, a asserção é richardiana.

Após construir uma “*Fórmula Richardiana”*, ele atribuiu um determinado número a ela, formulando inicialmente um vocabulário composto por 10 “*Signos Constantes”* e três tipos de “*Variáveis”*:

- 3 “*Variáveis Numéricas”*, que podem ser substituídas por numerais ou expressões numéricas;
- 3 “*Variáveis Sentenciais”*, que podem ser substituídas por *Fórmulas;*
- 3 “*Variáveis predicativas”*, que podem ser substituídas por predicados, como por exemplo: “primo”, “menor que”, “maior que”.

Em seguida atribui um número para cada signo e variável da seguinte maneira:

*i) o*s “*Signos Constantes”* foram enumerados de 1 a 10;

ii) as “*Variáveis Numéricas”* foram associadas aos três primeiros números primos maiores que 10;

iii) as “*Variáveis Sentenciais”* aos quadrados dos três primeiros números primos maiores que 10;

iv) as “*Variáveis Predicativas”* aos cubos dos três primeiros números primos maiores que 10.

Esses números são únicos para cada signo e servem de rótulo ou índice distinguindo um signo de outro. Também os chamou de “*Números de Gödel”*, e esses poderiam denominar uma “*Fórmula”* ou prova. As tabelas abaixo contêm estas associações numéricas propostas:

Tabela 8 - Signos Constantes e seus respectivos Números de Gödel

Signos Constantes	*Número de Gödel*	*Significado*
~	1	Não
∨	2	Ou
⊃	3	Se ... então ...
∃	4	Existe um
=	5	É igual
0	6	Zero
s	7	O sucessor imediato
(	8	De marca de pontuação
)	9	Marca de pontuação
,	10	Marca de pontuação

Fonte: Adaptado de Nargel e Newman (2015)

Tabela 9 - Variáveis Numéricas e seus respectivos Números de Gödel

Variável Numérica	*Número de Gödel*	*Exemplo de uma possível substituição*
x	11	0
y	13	$s0$
z	17	y

Fonte: Adaptado de Nargel e Newman (2015)

Tabela 10 - Variáveis Sentenciais e seus respectivos Números de Gödel

Variável Sentencial	*Número de Gödel*	*Exemplo de uma possível substituição*
p	11^2	$0 = 0$
q	13^2	$(\exists\, x)(x = sy)$
r	17^2	$p \supset q$

Fonte: Adaptado de Nargel e Newman (2015)

Tabela 11 - Variáveis Predicativas e seus respectivos Números de Gödel

Variável Predicativa	*Número de Gödel*	*Exemplo de uma possível substituição*
p	11^3	Primo
q	13^3	Maior que
r	17^3	Menor que

Fonte: Adaptado de Nargel e Newman (2015)

Através desta decodificação, Gödel conseguiu associar um "*Número de Gödel"* para cada "*Fórmula"*. Vejamos os passos desenvolvidos por ele, para conseguir chegar a este número:

i) Reescrever as asserções utilizando signo e variáveis propostos por ele;
ii) Observar qual "*Número de Gödel"* estava associado a cada um;
iii) Tomar a sequência de números primos positivos, tanto quantos signos e variáveis existissem na "*Fórmula"*, e os elevar aos respectivos "*Números de Gödel"* identificados;
iv) Multiplicar cada uma das potências, obtendo assim, o "*Número de Gödel"* referente a *Fórmula* analisada.

Exemplo 6.2.2: Consideremos a seguinte *Fórmula*:

$(\exists \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{sy})$ (Existe um $\boldsymbol{x}$, tal que, $\boldsymbol{x}$ é sucessor imediato de $\boldsymbol{y}$)

Associado cada signo e variável presente na *Fórmula*, com seus respectivos "*Números de Gödel"*, temos:

$$\begin{array}{cccccccccc} (& \exists & x &) & (& x & = & s & y &) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 4 & 11 & 9 & 8 & 11 & 5 & 7 & 13 & 9 \end{array}$$

A "*Fórmula"* acima possui 10 signos ou variáveis, logo iremos utilizar os 10 primeiros números primos naturais e elevar cada um, ao "*Número de Gödel"* de cada signo ou variável, respeitando a ordem com que aparecem:

$$\mathbf{2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9}$$

Devido a extensão dessa multiplicação, iremos chamar tal número de $\boldsymbol{n}$, logo:

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9}$$

De maneira análoga, podemos atribuir um único *Número de Gödel* a cada *Fórmula*.

O processo realizado acima estabelece um método para a completa "aritmetização" do cálculo formal, conhecido por "*Aritmetização de Gödel"*, sendo composto por um conjunto de diretrizes que regem uma correspondência entre expressões no cálculo e um certo subconjunto de números inteiros. Logo, dado um certo número, podemos de fato analisá-lo e determinar se ele é um "*Número de Gödel"*, e se o for, podemos obter uma "*Fórmula"* que o representa no cálculo. Isso ocorre, pois se for um número menor que 10, obteremos uma "*Signo Constante"* elementar, se o número for maior que 10, podemos decompô-lo em fatores primos de forma única, identificando se é uma segunda ou terceira potência de um determinado primo. Em caso positivo, será uma variável identificável, mas se esta decomposição for um produto de potências de primos sucessivos pode ser um "*Número" de Gödel"* de uma determinada "*Fórmula"* e assim poderemos determinar exatamente a qual "*Fórmula"* pertence. Vejamos um exemplo:

Exemplo 6.2.3: Consideremos o número 243 000 000. Iremos decompô-lo e em seguida, verificar se é um "*Número de Gödel"*:

$$\mathbf{243\ 000\ 000} = \mathbf{64} \times \mathbf{243} \times \mathbf{15\ 625} = \mathbf{2^6} \times \mathbf{3^5} \times \mathbf{5^6}$$

Logo, podemos realizar a seguinte associação:

$$\begin{array}{ccccc} 2^6 & \times & 3^5 & \times & 5^6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & = & & 0 \end{array}$$

Portanto, a "*Fórmula*" "$0 = 0$" possui o "*Número de Gödel*" 243 000 000 e realizando os passos no sentido contrário, podemos obter 243 000 000 a partir de "$0 = 0$".

Através desse raciocínio, Gödel conseguiu estabelecer um mapeamento sobre as expressões do cálculo, observando as propriedades estruturais de seus enunciados metamatemáticos. Onde cada um deles é representado por uma combinação única de potências de primos, facilitando a investigação de sua estrutura, pois é possível utilizar as propriedades aritméticas. Vejamos um exemplo:

Exemplo 6.2.4: Consideremos as seguintes *Fórmulas:*

$$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}) \supset \boldsymbol{p} \qquad (1)$$

$$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}) \qquad (2)$$

Identificando o "*Número de Gödel*" de cada uma, teremos:

$$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}) \supset \boldsymbol{p} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2^8} \times \mathbf{3^{11^2}} \times \mathbf{5^2} \times \mathbf{7^{11^2}} \times \mathbf{11^9} \times \mathbf{13^3} \times \mathbf{17^{11^2}} \qquad (1)$$

$$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2^8} \times \mathbf{3^{11^2}} \times \mathbf{5^2} \times \mathbf{7^{11^2}} \times \mathbf{11^9} \qquad (2)$$

Para facilitar o tratamento desses números no texto, chamaremos de ***a*** o "*Número de Gödel*" de (1) e de ***b*** o de (2). Logo:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{2^8} \times \mathbf{3^{11^2}} \times \mathbf{5^2} \times \mathbf{7^{11^2}} \times \mathbf{11^9} \times \mathbf{13^3} \times \mathbf{17^{11^2}}$$

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{2^8} \times \mathbf{3^{11^2}} \times \mathbf{5^2} \times \mathbf{7^{11^2}} \times \mathbf{11^9}$$

Desta forma, percebemos que o enunciado matemático de (2), é uma parte inicial do enunciado de (1) *pois o "Número de Gödel"* de (1) é maior que o de (2), dado que $\boldsymbol{b}$ é um fator de $\boldsymbol{a}$**.**

Gödel, associa a permissividade de demonstração de uma "*Fórmula",* a propriedade aritmética de se decompor em potências de fatores primos sucessivos. Para determinar o "*Número de Gödel"* referente a uma demonstração devemos considera o "*Número de Gödel"* referente a cada linha que compõe a demonstração. Depois tomar a sequência dos primeiros números primos e elevá-los aos "*Número de Gödel"* de cada linha, respeitando a sequência em que se apresentam. O produto destas potências de primos será o "*Número de Gödel"* da demonstração. Para fórmula seu argumento utilizou as seguintes notações:

$\boldsymbol{Dem}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ (A sequência de "*Fórmulas"* com o "*Número de Gödel"* $\boldsymbol{x}$, é uma demonstração da "*Fórmula"* com o "*Número de Gödel"* **z**)

$\sim\boldsymbol{Dem}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ (A sequência de "*Fórmulas"* com o "*Número de Gödel"* $\boldsymbol{x}$, não é uma demonstração da "*Fórmula"* com o "*Número de Gödel"* **z**)

$\boldsymbol{sub}\ (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})$ (Trata-se do "*Número de Gödel"* da "*Fórmula"* obtida a partir da "*Fórmula"* com o "*Número de Gödel"* $\boldsymbol{m}$, substituindo-se a variável com o "*Número de Gödel"* $\boldsymbol{a}$ pelo numeral correspondente a $\boldsymbol{m}$)

De posse dessas informações, podemos agora listar todos os passos dados por Gödel para obter sua conclusão:

i) Construiu dentro do "*Principia"* uma *Fórmula* $\boldsymbol{F}$ richardiana, ou seja, $\boldsymbol{F}$ é não demonstrável, e atribuiu a ela um *Número de Gödel* **z**;

$$\neg \exists\, \boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{Dem}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}))$$

Ou seja, a "*Fórmula"* $\boldsymbol{F}$, afirma que nenhuma prova pode ser atribuída para a "*Fórmula"* com "*Número de Gödel"* **z**.

ii) Em seguida, mostrou que um caso específico dessa forma não poderá ser demonstrado. Para tanto, fez a seguinte substituição $\boldsymbol{sub}(\boldsymbol{y}, \mathbf{13}, \boldsymbol{y})$ na "*Fórmula* de *Número de Gödel"* **z**, obtendo:

$$\neg \exists \boldsymbol{x} \ (\boldsymbol{Dem}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{sub}(\boldsymbol{y}, \mathbf{13}, \boldsymbol{y}))$$

iii) Fazendo isso ele consegue obter um certo $\boldsymbol{n}$ que será o "*Número de Gödel"* referente a "*Fórmula"* que encontrou:

$$\boldsymbol{n} = \neg \exists \boldsymbol{x} \ (\boldsymbol{Dem}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{sub}(\boldsymbol{y}, \mathbf{13}, \boldsymbol{y}))$$

iv) Como a "*Fórmula"* é válida, ele substitui todas as ocorrências da variável **y** por **n**. Com isso ele afirma que não há demonstração para a "*Fórmula"* $\boldsymbol{sub}\ (\boldsymbol{n}, \mathbf{13}, \boldsymbol{n})$, obtendo uma nova "*Fórmula"*, a qual chamaremos de $\boldsymbol{G}$ e que possui um "*Número de Gödel"* $\boldsymbol{g}$. Ou seja, a "*Fórmula"* $\boldsymbol{G}$, afirma que "*Fórmula* de *Número de Gödel"* $\boldsymbol{g}$ é não demonstrável.

$$\boldsymbol{g} = \neg \exists \boldsymbol{x} \ (\boldsymbol{Dem}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{sub}(\boldsymbol{n}, \mathbf{13}, \boldsymbol{n}))$$

Logo, a "*Fórmula"* $\boldsymbol{G}$, afirma que a "*Fórmula"* $\boldsymbol{G}$ não é demonstrável.

v) Analisando agora a "*Fórmula"* $\boldsymbol{G}$, temos:

1°) Se a "*Fórmula"* $\boldsymbol{G}$ for verdadeira, teremos uma "*Fórmula"* que não será demonstrável. Logo, o sistema será incompleto.

2°) Se a "*Fórmula"* $\boldsymbol{G}$ for falsa, então $\neg\boldsymbol{G}$ demonstrável. Porém, $\neg\boldsymbol{G}$ afirma que há uma prova para $\boldsymbol{G}$. O que recai em uma inconsistência, pois $\boldsymbol{G}$ será indecidível.

Com isso Gödel provou que $\boldsymbol{G}$ pode ser definida e apresentada dentro da aritmética, embora não seja formalmente demonstrável. E sendo $\boldsymbol{G}$ tanto verdadeira como formalmente indecidível, podemos concluir que os axiomas da aritmética são incompletos. E mesmo que sejam admitidos axiomas adicionais que tornem a "*Fórmula"* $\boldsymbol{G}$ verdadeira, poder-se-ia construir outra "*Fórmula"* verdadeira porém, formalmente indecidível. Este resultado ficou conhecido como "Primeiro Teorema de Incompletude de Gödel".

$(\exists \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}){\sim}\boldsymbol{Dem}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (Existe ao menos um número $\boldsymbol{y}$, tal que, para cada número $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ não se acha na relação Dem para com $\boldsymbol{y}$, ou seja, existe ao menos uma *Fórmula* da aritmética para a qual nenhuma sequência de *Fórmulas* constitui uma prova)

Após obter seu resultado, Gödel o ampliou construir uma "*Fórmula*" aritmética $\boldsymbol{A}$ que representasse o enunciado: "Se a aritmética é consistente, ela é incompleta". Ele provou que a "*Fórmula*" $\boldsymbol{A}$ é formalmente demonstrável. Assim, como $\boldsymbol{G}$ é indecidível, então $\boldsymbol{A}$, não pode ser demonstrável por um argumento capaz de ser representado no formalismo aritmético. Ou seja, se a aritmética é consistente, sua consistência não pode ser estabelecida por qualquer raciocínio metamatemático que possa ser representado dentro do formalismo da aritmética. Tal resultado ficou conhecido como "Segundo Teorema de Incompletude de Gödel".

Devemos atentar que este resultado obtido por Gödel não exclui a consistência da aritmética, mas nega que seja possível provar formalmente todas as "*Fórmulas*" da aritmética, a partir de um conjunto finito de axiomas. Frustrando o programa hilbertiniano e confrontando o pensamento racionalista, pois para estes, se uma dada asserção matemática ainda não tem sua prova, é porque o homem ainda não desenvolveu matemática suficiente para alcançá-la, ou seja, o homem ainda precisaria passar por novos processos de reminiscência. Assim, é compreensível que sua descoberta tenha sido, ao mesmo tempo, celebrada e ignorada. O fato é que esse resultado ainda permanece até os dias atuais e seu conteúdo técnico transformou os campos da lógica e da matemática.

7 CONCLUSÃO

O resultado obtido por Gödel não minimiza a importância que as discussões iniciadas por Platão e Aristóteles tiveram para a evolução do pensamento matemático pelo contrário, ele nos mostra que não há limites para o conhecimento matemático e que é necessário dar continuidade à pesquisa, pois ainda há muito a se descobrir. Sendo esse caráter desafiador da matemática que encanta e fascina o homem através dos tempos. Para isso, devemos nos manter de mente aberta, ávidos pelo conhecimento, para assim continuarmos evoluindo o nosso pensamento matemático.

Também é possível perceber que ao longo desse processo de evolução do pensamento matemático, o foco dos debates foi mudando, deixando de estar pautado na origem desse conhecimento e das formas de concebê-lo, para se voltar a uma busca pela sua consistência e completude, o que evidencia uma busca incansável do homem pelo conhecimento através dos tempos. Sendo que no período da Idade Moderna, com as escolas de pensamentos, ocorreram grandes debates sobre a temática que impulsionaram o desenvolvimento da matemática. Essas discussões ainda hoje ocorrem e levam em consideração todas as discussões que foram desenvolvidas até a atualidade. O marroquino Alain Badiou, de 86 anos, é um destes que buscam da continuidade a esses debates e nortear os caminhos futuros que a matemática deve percorrer.

As questões apresentadas nesse estudo também nos levam a uma reflexão sobre o ensino de matemática na atualidade no que se refere a comunicação entre professor e aluno durante a educação básica. Será que eles realmente abordam a matemática sob uma mesma perspectiva filosófica? Esta é uma pergunta pertinente, pois é senso comum que os professores de matemática atuais, em sua maioria, receberam uma educação básica e acadêmica de cunho mais tradicional e portanto, apresentam em suas aulas um formalismo técnico com um viés *a priori* na abordagem dos conteúdos. Já o aluno, principalmente do ensino fundamental, devido a formação do aprender, anseia por um conhecimento *a posteriori*, dado que um conhecimento só tem sentido para ele, se estiver presente em seu cotidiano. O que nos leva a questionar se o debate iniciado na Grécia Antiga ainda hoje impacta nos rumos da evolução do pensamento matemático? E se não estará no estudo desta pergunta, a resposta para um ensino de matemática mais eficiente? Porém, obter essas respostas requer um estudo mais aprofundado sobre a temática, o que poderá ser feito em trabalhos futuros, tendo este e outros estudos como base. Essas questões só mostram o quanto é necessário debater esta temática e estudar seus impactos na evolução do pensamento matemático, inclusive na área da educação.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francione Charapa; SOUZA, Mayrla Costa de. O problema do conhecimento: René Descartes x David Hume. In: ENCONTRO CEARENSE DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 13.; ENCONTRO NACIONAL DO NÚCLEO DE HISTÓRIA E MEMÓRIA DA EDUCAÇÃO, 3.; SIMPÓSIO NACIONAL DE ESTUDOS CULTURAIS E GEOEDUCACIONAIS - SINECGEO, 3., 25 a 27 set. 2014, Fortaleza (CE). **Anais** ... Fortaleza (CE), 2014. p. 1695-1705.

CHIBENI, Silvio Seno. Descartes e o realismo científico. **Reflexão:** Universidade Estadual de Campinas, v. 57, p. 35-53, 1993.

DA SILVEIRA, Fernando Lang. A teoria do conhecimento de kant: o idealismo transcendental. **Caderno brasileiro do ensino de física**, v. 19, p. 28-51, 2002.

DESCARTES, René. **Discurso do Método**; **Objeções e respostas; As paixões da alma; Cartas.** Introdução de Gilles-Gaston Granger, prefácio e notas de Gerárd Lebrum; Tradução de J. Guinsburg e Bento Prado Júnior. 3 ed. São Paulo: Abril Cultural, 1993. (Os Pensadores).

DESCARTES, René. **As paixões da alma.** Tradução de Ciro Mioranza. São Paulo: Lafonte, 2012.

DOS SANTOS, Róbson Lousa; DA CRUZ, Fernanda Gomes. A matemática de René Descartes. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 8, p. 30-47, 2016.

EUCLIDES. **Os elementos/Euclides;** tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: UNICAMP, 2004.

FERNANDES, Edrisi. Movimento e existência desde o Uno em Plotino: contribuições pitagóricas. **Perspectiva Filosófica,** Recife, v. 2, n. 34, p. 61 – 80, jul/dez, 2010. Disponível em: file:///C:/Users/danni/Downloads/248359-180040-1-PB%20(2).pdf. Acesso em: 05 jan. 2023.

FREGE, Friedrich Ludwig Gottlob. Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. In: **Pensadores:** Pierce e Frege. Tradução do alemão para o português de Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

GOLDSTEIN, Rebecca. **Incompletude:** a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. [S.l.]: Companhia das Letras, 2008.

HUISMAN, Denis. **Sócrates**. [S.l.]: Edições Loyola, 2006.

HUME, David. **Investigação Sobre o Entendimento Humano**. 2. ed. Tradução Leonel Vallandro. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Os Pensadores).

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. [S.l.]: EDIPRO, 2020.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel. Logicismo, Formalismo e Intuicionismo: análise de seus pressupostos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2001. Rio de Janeiro. **Anais**... Rio de Janeiro: [s.n.], 2001. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/336221355_Logicismo_Formalismo_e_Intuicionismo_analise_de_seus_pressupostos. Acesso em: 15 jan. 2023.

MONDINI, Fabiane. O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática. **EBRAPEM**, v. 12, p. 1-10, 2008.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. **A pova de Gödel**; Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectivas, 2015.

NORONHA, Bruno. Breves considerações sobre os 23 Problemas de Hilbert. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 6, n. 2, p. 272-283, 2021

PAULA, Marcio Gimenes de. Sócrates entre a ironia e a ética: o pensador ateniense segundo as interpretações de Hegel e Kierkegaard. **Mal-Estar e Sociedade,** Barbacena, v. 2, n. 3, p. 151-172, nov. 2009. Disponível em: http://www.uemg.br/openjournal/index.php/malestar/article/view/24/52. Acesso em: 14 jun. 2016.

PUENTE, Fernando Rey. O pensamento e o Ápeiron em Aristóteles. **Revista Hypnos**, n. 7, 2001.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RAMOS, Arthur Freitas. **Matemática Construtiva e o Intuicionismo**. 2013. 56f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Ciência da Computação) - Universidade Federal de Pernambuco-Centro de Informática-Graduação em Computação. Recife-PE, 2013. Disponível em: https://www.cin.ufpe.br/~tg/2013-1/afr.pdf. Acesso em: 18 dez. 2022.

RUSSELL, B. **Introdução à Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1996.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: UNESP, 2007.

SOUZA, Izabel Cristina Izidoro de. **O princípio do contexto de Gottlob Frege: uma análise sistemática**. 2007. 124f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Filosofia) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/6174/1/arquivo6743_1.pdf. Acesso em: 15 dez. 2022.

ZAGO, José Antônio. O sonho de Descartes e o despertar de Kant. **Aufklärung: revista de filosofia**, v. 3, n. 1, p. 241-256, 2016.

ZENI, TIAGO. **A Dialética transcendental em Imanuell Kant**. 1999. 58f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Filosofia) – Faculdade de Filosofia Nossa Senhora da Imaculada Conceição, Viamão, 1999.

ZILES, U. O empirismo lógico da linguagem. **Letras de Hoje**, *[S. l.]*, v. 9, n. 2, 2014. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fale/article/view/19362. Acesso em: 10 dez. 2022.