



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

DANILO TEIXEIRA MAGALHÃES

**A UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES ELEMENTARES NA CONSTRUÇÃO DE
MODELOS MATEMÁTICOS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO**

FORTALEZA – CEARÁ

2023

DANILO TEIXEIRA MAGALHÃES

A UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES ELEMENTARES NA CONSTRUÇÃO DE MODELOS
MATEMÁTICOS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leo Ivo da Silva
Souza

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Magalhaes, Danilo Teixeira.

A utilização de funções elementares na construção de modelos matemáticos: uma abordagem para o ensino médio [recurso eletrônico] / Danilo Teixeira Magalhaes. - 2023.

74 f. : il.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza..
1. modelagem matemática. 2. caracterização das funções. 3. ensino de matemática.. I. Título.

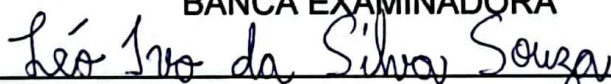
DANILO TEIXEIRA MAGALHÃES

A UTILIZAÇÃO DE FUNÇÕES ELEMENTARES NA CONSTRUÇÃO DE MODELOS
MATEMÁTICOS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 23 de maio de 2023.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Leo Ivo da Silva de Souza (Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE


Prof. Dr. Diego Sousa Rodrigues (Membro Interno ao Programa)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE


Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Membro Externo ao Programa)

Universidade Federal do Ceará – UFC

Dedicado aos que tornaram essa jornada possível.

AGRADECIMENTOS

A conclusão dessa dissertação representa a realização de um sonho, principalmente pelo fato de que durante alguns momentos do curso descreditei que chegaria até o final. Os desafios foram muitos, mas felizmente sempre tive uma rede de apoio muito grande e sem esse apoio dificilmente chegaria até aqui. Portanto, resta-me agradecer a todas essas pessoas que fizeram parte dessa conquista.

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me dado o dom da vida e por nunca me desamparar.

Ao meu amor, Livia Cavalcante, que permanece sempre ao meu lado em todos os momentos da minha vida, em particular, durante todo o meu curso de mestrado e me deu todo apoio e ajuda que foi possível. Estava presente e me ouviu em todas as minhas preocupações, medo das provas, medo do exame de qualificação e, por fim, permanece nesse momento de alegria.

À minha mãe, Maria Inez, por suas orações constantes direcionadas a mim e por ser uma mulher tão forte e sempre disponível para me ajudar e apoiar. Pelo seu amor incondicional e por sempre se alegrar com minhas conquistas.

Ao meu pai, Antônio Alair, por tanta dedicação a seus dois filhos e sempre me fazer sorrir com suas histórias.

À minha querida irmã, Dalilia Teixeira, por ser minha grande amiga desde criança, e que esteve presente em todos os momentos de minha vida.

À minha prima-irmã, Maria Aurivânia, que foi minha inspiração desde criança. Devo muito a ela a minha vontade e costume de estudar, pois sempre me incentivou e teve grande influência, inclusive, na minha escolha de profissão.

À família que ganhei depois de adulto, minha sogra Maria Ivete, meu sogro Ubirajara Germano e minha cunhada Jéssica Cavalcante, por todo apoio e torcida que demonstram por mim.

Aos meus queridos amigos, Aniele, Ricardo, Nailson, Edson e Danyel que estão sempre presentes na minha vida e que me trouxeram tantos momentos felizes que foram fundamentais durante esses dois anos de curso.

Ao meu cachorrinho Luke, que trouxe tanta alegria e vida para o meu lar.

Aos meus companheiros de turma, que compartilharam comigo, durante esses dois anos, muitos momentos dedicados aos estudos e muitas aprendizagens. Sem eles, com certeza a trajetória seria ainda mais difícil.

Aos meus professores, Leo Ivo, Nicolas Andrade e Tiago Caúla por todo o conhecimento compartilhado comigo e com minha turma durante esses dois anos.

Ao meu orientador, Leo Ivo, por ter contribuído com toda a sua experiência na construção desse trabalho, dando importantes sugestões e sempre disposto a tirar minhas dúvidas e fazer as devidas correções com bastante paciência em todo o processo.

Aos membros da banca, por aceitarem o convite de participar da defesa desse trabalho e por todas as sugestões que darão para a melhoria da dissertação ou possível continuação da pesquisa.

E, por fim, a todos que estiveram ao meu lado durante essa trajetória.

“Presentemente, eu posso me
Considerar um sujeito de sorte
Porque apesar de muito moço
Me sinto são, e salvo, e forte

E tenho comigo pensado
Deus é brasileiro
e anda do meu lado
e assim já não posso sofrer
no ano passado

Tenho sangrado demais
Tenho chorado pra cachorro
Ano passado eu morri
Mas esse ano eu não morro”

(Sujeito de sorte - Belchior)

RESUMO

Nesta pesquisa, estudamos a caracterização das funções afim, quadrática, logarítmica e exponencial bem como a utilização das mesmas em situações de modelagem que possam ser aplicadas em aulas ministradas no ensino médio. Assim sendo, o objetivo geral desta dissertação consiste em compreender os conceitos matemáticos presentes nas situações-problemas modeladas por tais funções. Já os objetivos específicos são: demonstrar, explicar e interpretar os teoremas de caracterização das funções afim, quadrática e exponencial; sugerir problemas de cada uma das funções abordadas que envolvam situações de modelagem; apresentar, para cada problema sugerido, soluções que utilizem as propriedades matemáticas abordadas na pesquisa. A metodologia utilizada foi uma revisão de literatura, utilizando-se de autores que abordam a temática pesquisada, de modo que foi realizada uma sistematização das ideias de tais autores com o intuito de apresentar a utilização das funções na construção de modelos matemáticos. Por fim, concluímos que as sugestões de problemas e soluções juntamente com os teoremas e propriedades abordadas nesta pesquisa podem auxiliar o professor que deseja trabalhar com modelagem matemática em sala de aula.

Palavras-chave: modelagem matemática; caracterização das funções; ensino de matemática.

ABSTRACT

In this research, the characterization of affine, quadratic, logarithmic and exponential functions is studied, as well as their use in modeling situations that can be applied in high school classes. Therefore, the general objective of this master's thesis is to understand the mathematical concepts present in problem situations modeled by such functions. So the specific goals are: demonstrate, explain and interpret the characterization theorem from affine, quadratic and exponential functions; suggesting problems of each of the functions addressed that involve modeling situations; present, for each suggested problem, solutions that utilize the mathematical Properties addressed on the research. The methodology used was a literature review, using authors who address the researched topic, in which a systematization of the ideas of such authors was carried out in order to present the use of functions in the construction of mathematical models. Finally, we conclude that the suggestions for problems and solutions, together with the theorems and properties discussed in this research, can help the teacher who wants to work with mathematical modeling in the classroom.

Keywords: mathematical modeling; characterization of functions; mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Gráfico da função afim.....	21
Figura 2 –	Segmento numérico.....	23
Figura 3 –	MUV.....	37
Figura 4 –	Ramo da hipérbole.....	42
Figura 5 –	Faixa H_a^b	43
Figura 6 –	As áreas hachuradas são iguais.....	44
Figura 7 –	Subdivisão dos intervalos $[a, b]$ e $[ak, bk]$	45
Figura 8 –	Faixas H_a^b e $H(3)_a^b$	52
Figura 9 –	Significado do número e^x	57
Figura 10 –	Gráfico da exponencial.....	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	FUNÇÃO AFIM	14
2.1	Intervalos.....	14
2.2	Relação entre função afim e progressão aritmética (PA).....	19
2.3	Interpretação Geométrica.....	21
2.4	Problemas e soluções.....	22
3	FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	27
3.1	Problemas e soluções.....	32
4	FUNÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL.....	40
4.1	Logaritmos em outras bases.....	51
4.2	Problemas e soluções.....	65
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	73
	REFERÊNCIAS.....	74

1 INTRODUÇÃO

A proposta do trabalho é fazer uma pesquisa sobre a aplicação de modelagem matemática no ensino de algumas funções elementares estudadas no ensino médio (função afim, quadrática, exponencial e logarítmica). Tal proposta surgiu a partir da minha prática como professor de ensino médio de escola pública, onde percebi que, em geral, os livros didáticos disponíveis trabalham a modelagem de maneira superficial, na maioria das vezes sem explicar para os alunos e professores o porquê de tal problema ser modelado por determinada função. Logo, a intenção da pesquisa é produzir um material que possa servir de apoio pedagógico para professores que lecionam nas séries iniciais do ensino médio. A partir desta problemática a pergunta de partida que enseja esta pesquisa é: Como utilizar a modelagem matemática no ensino das funções afim, quadrática, logarítmica e exponencial?

O novo projeto de ensino médio proposto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) cobra um ensino de matemática cada vez mais voltado para as suas aplicações, uma vez que o currículo deve ser pautado em competências e habilidades. Portanto, a modelagem matemática pode ser uma importante ferramenta para mostrar aos estudantes como a matemática pode contribuir em diversas áreas da ciência. Contudo, para utilizar esta ferramenta de maneira adequada, é fundamental que se entenda de forma mais detalhada o conhecimento matemático envolvido na formulação de cada problema. Sendo assim, por mais que a relevância do tema esteja ligada ao âmbito pedagógico, este trabalho tem cunho estritamente matemático.

Segundo Lima (2013), as funções citadas acima são as mais utilizadas para resolver problemas elementares na educação básica e, ainda segundo o autor, a parte mais difícil na resolução de problemas é fazer a identificação de qual modelo matemático utilizar e tendo feito a identificação a resolução dos problemas acontece de modo geralmente elementar. Tendo isso em vista, nesse trabalho mostraremos sugestões de exercícios que evitem problemas de modelagem superficiais, onde muitas vezes o próprio problema já expõe a função matemática que modela a situação, dando a falsa impressão de que o autor do problema pode escolher qualquer função para qualquer tipo de situação.

Dessa forma, o objetivo geral desta pesquisa consiste em compreender os conceitos matemáticos presentes nas situações-problemas modeladas por tais funções. Já os objetivos específicos são: I) Demonstrar, explicar e interpretar os teoremas de caracterização das funções afim, quadrática e exponencial; II) Sugerir problemas de cada uma das funções abordadas que envolvam situações de modelagem; III) Apresentar, para cada problema sugerido, soluções que utilizem as propriedades matemáticas abordadas na pesquisa.

Para cumprir os objetivos listados acima foi utilizado, como metodologia, uma revisão de literatura, utilizando autores e obras que abordam as temáticas envolvidas, tais como Logaritmos da Sociedade Brasileira de Matemática (LIMA 2013), Números e Funções Reais – Coleção Profmat (LIMA, 2013) e A Matemática do Ensino Médio – Volume 1 (LIMA et al, 1996). É importante frisar que uma parte das obras utilizadas como referência para esta pesquisa abordam as temáticas com o intuito estritamente matemático. Enquanto que, nesta dissertação, foi feita uma sistematização das ideias desses autores a fim de apresentar a utilização de funções elementares na construção de modelos matemáticos durante as aulas ministradas para ensino médio.

A estrutura da pesquisa segue a seguinte sistematização: no capítulo 2, apresentaremos as propriedades referentes às funções afins. No capítulo 3 abordaremos as funções quadráticas. No capítulo 4 as funções logarítmicas e exponenciais. No que se refere às funções logarítmicas, a abordagem será diferente do que estamos acostumados na educação básica, pois iremos definir o logaritmo de um número como a sendo a área sob o gráfico (ramo positivo) de uma hipérbole. Além disso, o último tópico de cada capítulo será composto por problemas resolvidos referentes ao tipo de função abordada.

2 FUNÇÃO AFIM

Neste capítulo demonstraremos o teorema de caracterização da função afim e a propriedade que relaciona função afim e progressões aritméticas. Contudo, antes de demonstrarmos estes resultados principais, precisaremos citar e provar alguns resultados auxiliares que serão utilizados na demonstração do teorema de caracterização.

2.1 Intervalos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, chamamos de intervalos os seguintes subconjuntos dos reais:

- i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$;
- ii) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$;
- iii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$;
- iv) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$;
- v) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$;
- vi) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$;
- vii) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$;
- viii) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$;
- ix) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

É importante citar que no caso onde $a = b$, o intervalo $[a, b]$ é um conjunto unitário e os outros três intervalos limitados são conjuntos vazios. Ainda sobre esse caso, dizemos que o intervalo $[a, b]$ é degenerado. Caso $a \neq b$, então os quatro primeiros intervalos são chamados de não-degenerados. O intervalo iv) chamamos de intervalo aberto e o intervalo i) chamamos de intervalo fechado.

Exemplo 2.1.

Os intervalos $(2, 3)$ e $[2, 3]$ são não-degenerados.

A demonstração do próximo teorema, a menos de algumas adaptações, será baseada na ideia proposta por Lima (1982).

Teorema 2.2. Todo intervalo não degenerado contém números racionais.

Demonstração:

Seja (a, b) um intervalo aberto não degenerado. O comprimento desse intervalo é $c = b - a$, onde $c > 0$. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/c$, logo $c > 1/n$. Claramente os números $0, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \dots$ estão distribuídos por toda a reta real, isto é, se considerarmos os intervalos $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], k \in \mathbb{Z}$, então $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ e o comprimento de cada um desses intervalos é exatamente $1/n$. Logo, o comprimento dos intervalos I_k é menor do que c .

Assim, como $a \in \mathbb{R} = \bigcup I_k$, então ele deverá pertencer a um destes intervalos, em outras palavras, existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$, isto é, $\frac{k}{n} \leq a \leq \frac{k+1}{n}$.

Como sabemos que $c = b - a > \frac{1}{n}$, temos então que $b > a + \frac{1}{n}$ e, como $\frac{k}{n} \leq a$, temos $\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b$, logo $\frac{k+1}{n} < b$. Por fim, como temos que $a < \frac{k+1}{n} < b$ e $\frac{k+1}{n} \in \mathbb{Q}$, então provamos que qualquer intervalo não degenerado contém números racionais. ■

Perceba que, de fato, tendo que $a < \frac{k+1}{n} < b$, podemos repetir o mesmo processo para o intervalo $\left(a, \frac{k+1}{n} \right)$ para encontrar outro racional e repetir esse processo com o novo número racional e assim por diante, logo, tendo-se que (a, b) contém números racionais.

Em outras palavras, este resultado nos diz que os racionais se espalham por toda a reta, isto é, independente do intervalo que se escolha (podendo tomar um intervalo tão pequeno quanto se queira), existirá, nesse intervalo, um número racional. Formalmente, isto quer dizer que o conjunto dos racionais é denso em \mathbb{R} .

Definição 2.1: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita afim quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo x real.

Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 5$, é afim. São casos particulares de funções afins as funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = k$.

Para os próximos resultados do capítulo vale lembrar que dada uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, então:

- i) f é crescente quando $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- ii) f é decrescente quando $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
- iii) f é não-decrescente quando $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- iv) f é não-crescente quando $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Em qualquer um dos casos mencionados acima, dizemos que f é monótona. Nos dois primeiros casos dizemos que f é estritamente monótona.

Teorema 2.3 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade).

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona. São equivalentes as seguintes afirmações:

- (1) $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Para demonstrar que as afirmações são equivalentes devemos provar as seguintes implicações: (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (1).

Como f é estritamente monótona podemos supor, sem perda de generalidade, que f é crescente.

(1) \Rightarrow (2)

Primeiramente vamos mostrar que a afirmação (1) implica que $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. De fato, seja $r = m/n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Temos que $nr = m$, daí, $nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x)$. Logo, $nf(rx) = mf(x) \Leftrightarrow f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x)$.

Agora, tome $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0) = 0$ e f é crescente, então $f(1) = a > f(0) = 0$. Temos também que $f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = ra = ar, \forall r \in \mathbb{Q}$.

Finalmente, vamos mostrar que $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Suponha que $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq ax$ (tal x é irracional, pois já foi mostrado que $f(x) = ax$ para todo x racional). Como $f(x) \neq ax$, vamos supor sem perda de generalidade que $f(x) < ax$. Então,

$$f(x) < ax \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < x.$$

Segue do teorema anterior que existe um racional r tal que $\frac{f(x)}{a} < r < x$. Multiplicando todos os membros da desigualdade por a , obtemos $f(x) < ar < ax$ (observe que a desigualdade não muda o sinal, pois já provamos acima que $a > 0$). Mas da última desigualdade segue que $f(x) < f(r)$, o que é absurdo, pois tomamos tal r menor do que x e f é crescente. Portanto, concluímos que $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

O caso onde f é decrescente possui raciocínio análogo, basta que se tome o cuidado de que, neste caso, deverá se concluir que $a < 0$, logo, ao multiplicar a desigualdade $\frac{f(x)}{a} < r < x$ por a , os sinais ficam invertidos.

(2) \Rightarrow (3)

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

(3) \Rightarrow (1)

Inicialmente vamos usar indução para provar que se $n \in \mathbb{N}$, então $f(nx) = nf(x)$.

Para $n = 2$, temos que $f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$. Logo, a igualdade é válida. Suponha agora que o resultado seja válido para algum $n \geq 2$, isto é, que $f(nx) = nf(x)$. Devemos mostrar que a igualdade também vale para $n + 1$. De fato, temos que

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n + 1)f(x),$$

onde na penúltima igualdade usamos a hipótese de indução. Portanto, segue por indução, que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. Logo, decorre que $-f(x) = f(-x)$. Portanto, dado $n > 0$, tem-se $-n < 0$ e $f(-nx) = -f(nx) = -nx$. Concluindo que $f(nx) = nx$ para todo n inteiro e todo x real. ■

Teorema 2.4 (Teorema de caracterização da função afim)

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona. O acréscimo $f(x + h) - f(x) = g(h)$ depende apenas de h , mas não de x se, e somente se, f é uma função afim.

Demonstração:

Suponha f crescente, então afirmamos que $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(h) = f(x + h) - f(x)$ é crescente. Vejamos:

Seja $h_1 < h_2$, temos que $g(h_1) = f(x + h_1) - f(x)$ e $g(h_2) = f(x + h_2) - f(x)$. Como $h_1 < h_2$, então $x + h_1 < x + h_2$. Logo, pelo fato de f ser crescente, decorre que $f(x + h_1) < f(x + h_2)$. Concluindo que $g(h_1) < g(h_2)$.

Além disso, temos que $g(0) = f(x + 0) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$. Agora vamos mostrar que a função g é linear.

De fato, sejam $t, h \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} g(h + t) &= f(x + h + t) - f(x) = f((x + t) + h) - f(x + t) + f(x + t) - f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(h + t) = g(h) + g(t). \end{aligned}$$

Como g é monótona e $g(h + t) = g(h) + g(t)$, então, podemos usar o teorema fundamental da proporcionalidade. Logo, tomando $a = g(1)$, tem-se que $g(h) = g(h \cdot 1) = h \cdot g(1) = ah, \forall h \in \mathbb{R}$. Concluindo que g é linear.

Por fim, fazendo $f(0) = b$, segue que $f(0 + h) - f(0) = ah$, isto é, $f(h) - b = ah$. Esta última igualdade é equivalente a $f(h) = ah + b$. Portanto, $f(x) = ax + b$.

Reciprocamente, seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, isto é, $f(x) = ax + b$, então $f(x + h) - f(x) = a(x + h) + b - ax - b = ah$. Portanto, o acréscimo $f(x + h) - f(x)$ depende apenas de h e não de x . ■

Para o próximo resultado vale lembrar que uma progressão aritmética (PA) é uma sequência onde a diferença entre um termo e seu anterior é constante. Morgado

e Carvalho (2015) definem, para sequências, o operador diferença $\Delta_{a_n} = a_{n+1} - a_n$. Logo, dessa definição, temos que uma sequência é uma PA se, e somente se, seu operador diferença é constante. A sequência (2, 5, 8, 11, 14, ...) é um exemplo de PA, pois seu operador diferença é igual a 3. Usualmente chamamos o operador diferença de uma PA de razão (r), isto é, $\Delta_{a_n} = a_{n+1} - a_n = r$. No exemplo dado, temos que $r = 3$. É importante lembrar também que se a razão r de uma PA for tal que $r > 0$, a PA é crescente, se $r < 0$ a PA é decrescente e se $r = 0$ a PA é constante.

2.2 Relação entre função afim e progressão aritmética (PA)

Uma outra característica bastante interessante da função afim é a relação existente entre esse tipo de função e as progressões aritméticas. Tal relação será importante para a resolução dos problemas que serão trabalhados posteriormente. Enunciaremos este resultado como uma proposição. Vale ressaltar que a recíproca da próxima proposição é válida e será demonstrada conforme a ideia presente em Lima (2013).

Proposição 2.6. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim e $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (elementos do domínio) é uma progressão aritmética, então $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ também é uma progressão aritmética.

Demonstração:

Usaremos indução sobre n .

Inicialmente vamos mostrar o caso base da indução, aqui usaremos o caso base para $n = 3$. Sejam x_1, x_2, x_3 três termos em progressão aritmética, isto é, $x_2 = x_1 + r$ e $x_3 = x_1 + 2r$. Temos que

$$f(x_1) = ax_1 + b;$$

$$f(x_2) = a(x_1 + r) + b = ax_1 + b + ar = f(x_1) + ar;$$

$$f(x_3) = a(x_1 + 2r) + b = ax_1 + 2ar + b = (ax_1 + ar + b) + ar = f(x_2) + ar.$$

Portanto, $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ é uma progressão aritmética de razão ar .

Suponha agora que tal propriedade seja válida para algum $n \geq 3$, isto é, dados x_1, x_2, \dots, x_n em progressão aritmética de razão r , então, $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ é uma progressão aritmética de razão ar .

Consideremos a progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Logo, $x_{n+1} = x_n + r$. Temos então que $f(x_{n+1}) = ax_{n+1} + b = a(x_n + r) + b = f(x_n) + ar$. Mas, por hipótese de indução, $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ é uma PA de razão ar , portanto, $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(x_{n+1})$ é uma progressão aritmética de razão ar . Logo, por indução, o resultado segue.

A recíproca deste resultado também é válida, ou seja, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona que transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ em uma outra progressão aritmética $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, então f é uma função afim.

De fato, defina $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - f(0)$. Então $g(0) = f(0) - f(0) = 0$. Vamos mostrar primeiramente que g é linear. Note que, do fato de f transformar progressão aritmética em progressão aritmética, decorre que g também tem essa propriedade. Tomemos então a seguinte progressão aritmética: Seja $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $0, x, 2x, \dots, nx$ formam uma PA. Logo, $g(0), g(x), g(2x), \dots, g(nx)$ também é uma progressão, cuja razão é $g(x) - g(0) = g(x)$. Assim, decorre da fórmula do termo geral da progressão, que $g(nx) = ng(x), \forall n \in \mathbb{N}$. Agora, observemos que $\forall x \in \mathbb{R}, -x, 0$ e x formam uma progressão aritmética, logo, $g(-x), 0, g(x)$ também estão em progressão, donde é imediato que $-g(x) = g(-x)$. Por fim, se n é um inteiro negativo, então $-n$ é natural, logo,

$$-g(nx) = g(-nx) \Leftrightarrow g(nx) = -g(-nx) = -(-ng(x)) = ng(x).$$

Daí, $g(nx) = ng(x), \forall n$ inteiro. Unindo a isso o fato de g ser monótona podemos utilizar o Teorema fundamental da proporcionalidade e concluir que g é linear, isto é, $g(x) = ax$. Portanto, fazendo $f(0) = b$, decorre que $g(x) = f(x) - b$, ou seja, $f(x) = ax + b$. ■

Os dois últimos resultados provados (que são os principais resultados do capítulo) nos mostram que, em uma função afim, acréscimos iguais dados a x resulta em acréscimos iguais em $f(x)$. Este fato caracteriza uma função afim, ou melhor, este fato nos diz quando podemos modelar uma relação entre duas grandezas por uma

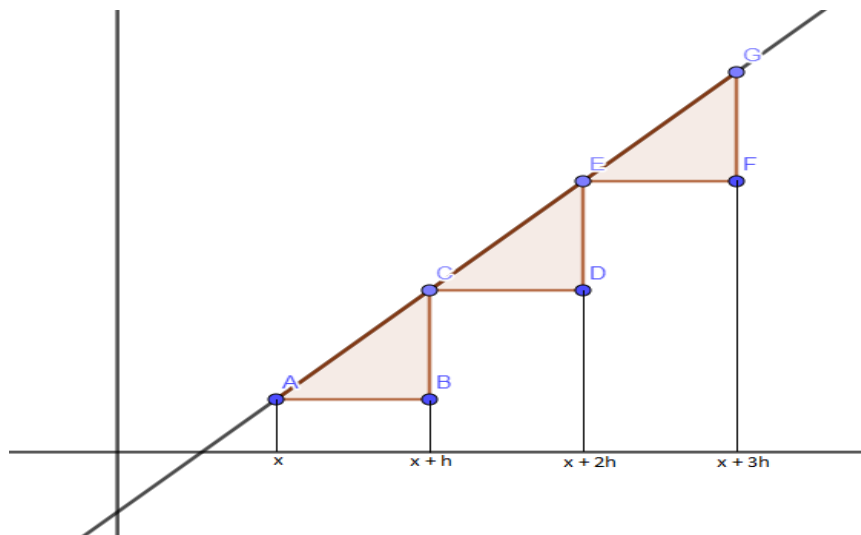
função afim. Agora, antes de trabalharmos os problemas de modelagem, iremos dar a interpretação geométrica dos resultados que provamos.

2.3 Interpretação Geométrica

Além do reconhecimento algébrico da caracterização das funções afins, se faz necessário também o reconhecimento geométrico das propriedades demonstradas, visto que gráficos de funções também nos ajudam a modelar e a entender certos fenômenos ou situações-problemas.

A figura abaixo representa o gráfico de uma função afim genérica, onde são conhecidos os pontos de abscissas $x, x + h, x + 2h$ e $x + 3h$.

Figura 1 - Gráfico da função afim



Fonte: Elaborado pelo autor.

As propriedades citadas e demonstradas anteriormente também justificam o fato de o gráfico de uma função afim ser uma reta. Observe que os triângulos retângulos na figura são congruentes pelo caso LAL (segue imediatamente do último resultado provado, pois acréscimos iguais dados no eixo x acarreta em acréscimos iguais no eixo y , além disso todos os triângulos são retângulos), logo, podemos concluir que $\widehat{BAC} = \widehat{DCE} = \widehat{FEG}$ e o fato desses ângulos serem iguais garantem que o gráfico é uma reta. Chamando esses ângulos de α , temos que α é o ângulo que a reta faz com o eixo OX .

Observemos que fixando o x podemos expressar as medidas dos catetos dos triângulos acima em função do salto h . Cada cateto paralelo ao eixo OX mede h e a partir disso vamos calcular a medida dos catetos paralelos ao eixo OY , da seguinte forma:

Primeiramente vejamos que:

$$f(x+h) = a(x+h) + b = ax + ah + b = (ax + b) + ah = f(x) + ah.$$

Assim, $\overline{BC} = f(x+h) - f(x) = f(x) + ah - f(x) = ah$. Como todos os triângulos retângulos formados na figura são congruentes (provamos acima), então, todos eles têm os catetos correspondentes iguais, dessa forma, continuaremos nosso raciocínio nos baseando apenas pelo triângulo ABC .

Os catetos do triângulo ABC são $\overline{BC} = ah$ e $\overline{AB} = h \neq 0$, de tal forma que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = a$ (perceba que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = tg\alpha$, onde α é o ângulo que mencionamos acima, logo, $a = tg\alpha$ e por isso podemos dizer que o coeficiente a é o coeficiente angular da reta). Em outras palavras, o coeficiente a da função afim $f(x) = ax + b$ pode ser calculado da seguinte forma $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ e tal coeficiente é conhecido como taxa de variação da função afim.

De forma mais geral conhecendo-se o valor da função em dois pontos quaisquer distintos, digamos x_1 e x_2 , podemos determinar o valor de a da seguinte forma: $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$, isto é, $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

2.4 Problemas e soluções

Como dito anteriormente, nesta seção abordaremos alguns problemas e sugestões de soluções visando a aplicação das propriedades da função afim trabalhadas no capítulo.

Problema 2.1: Considere a reta a seguir, onde os traços estão igualmente espaçados. Calculemos o valor referente ao traço assinalado.

Figura 2 - Segmento numérico

Fonte: Elaborado pelo autor.

Solução:

Se quisermos encontrar o valor de cada traço do segmento, podemos modelar a situação por uma função afim, uma vez que saltos iguais no segmento, representa saltos iguais nos valores associados aos traços.

Vamos então encontrar uma função afim que relacione cada traço do segmento a um valor numérico. Neste caso, fazemos $f(0) = 15$ e $f(8) = 31$, onde o zero representa o primeiro traço e o 8 representa o nono traço. Como conhecemos os valores da função em dois pontos, conseguimos determinar a lei de formação dessa função. Temos que $b = 15$, pois $f(0) = 15$, assim, $f(x) = ax + 15$. De $f(8) = 31$, decorre que $8a + 15 = 31$, logo $a = 2$. Então, a função afim que associa cada traço do segmento a um número é dada por $f(x) = 2x + 15$, onde x representa a “posição” do traço em relação ao segmento. Portanto, o valor do traço marcado é dado por $f(3) = 21$.

Problema 2.2: Numeração de sapatos

Segundo Jokura¹ (2008), o primeiro sistema oficial de medição de tamanho de sapatos surgiu na Inglaterra no final do século XVII. O sistema utilizava uma unidade padrão de medida, conhecida como ponto, onde na época representava um quarto de polegada (aproximadamente 0,635 cm). Esse sistema passou a ser utilizado em diferentes países com algumas variações e dura até hoje. No Brasil, por exemplo, ainda é usado esse sistema de ponto. No caso do Brasil, o ponto vale 0,66 cm (ou aproximadamente dois terços de centímetro). O sistema de medição funciona da seguinte forma: a cada 0,66 cm de comprimento do pé, aumenta-se um número do calçado. Além disso, no caso do Brasil, a extremidade “inicial” do pé começa com a

¹ Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-surgiu-a-numeracao-dos-sapatos/>. Acesso em: 15 mar. 2023.

numeração – 2, isto é, um pé hipotético de 0 cm utilizaria um calçado de numeração – 2.

Baseando-se no texto, vamos encontrar a função que modela a numeração de calçados no Brasil.

Solução:

Queremos encontrar uma função na qual a grandeza dependente é o número do calçado e a grandeza independente é o comprimento do pé. Seja x a variável que representa o comprimento do pé (em centímetros) e $f(x)$ a variável que representa a numeração do calçado. Vamos considerar a tabela a seguir que associa a alguns comprimentos de pé um número de calçado:

Tabela 1 - Numeração de sapatos

x	$f(x)$
0	- 2
0,66	- 1
1,32	0
1,98	1
2,34	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observemos que os valores de x estão em progressão aritmética de razão 0,66 e os valores de $f(x)$ estão em progressão aritmética de razão 1. Ou seja, a função que queremos encontrar transforma uma progressão aritmética em uma outra progressão aritmética, podemos interpretar este fato como “saltos constantes na grandeza x representa saltos constantes na grandeza $f(x)$ ”. Portanto, a função que modela a numeração de calçados no Brasil é uma função afim, isto é, $f(x) = ax + b$.

Para encontrarmos a lei de formação de uma função afim, basta conhecermos o valor da função em dois pontos. Para facilitar cálculos sugerimos usar $\frac{2}{3}$ ao invés de 0,66. Da tabela acima, temos que $f(0) = -2$ e $f\left(\frac{2}{3}\right) = -1$. Substituindo os valores na função $f(x) = ax + b$ e resolvendo o sistema, obtemos $a = \frac{3}{2}$ e $b = -2$. Logo, $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$ é a função que modela o problema.

Problema 2.3: Movimento uniforme

Suponha que uma partícula em movimento retilíneo se desloque sempre a uma velocidade de 80 m/s durante todo o seu trajeto. Isso significa que a cada intervalo de um segundo essa partícula percorre uma distância de 80 m. Se durante todo o percurso essa partícula mantém tal velocidade, segundo Ferraro, Soares e Fogo (2009), podemos dizer que ela permanece em movimento uniforme. Sobre o deslocamento descrito, cabe ainda observar que, após dois segundos (do instante inicial) a partícula terá percorrido 160 m. Após três segundos, a partícula terá percorrido 240 m e assim sucessivamente.

Vamos agora imaginar que um observador percebe que, no instante inicial, um móvel passa pela posição correspondente ao espaço 30 m e que sua velocidade é de 80 m/s. A partir dessas informações podemos construir a tabela 2 que mostra a variação da posição do móvel em função do tempo.

Chamaremos de x a variável tempo (medida em segundo) e de y a variável posição (medida em metro).

Tabela 2 - Movimento Uniforme

x	$f(x)$
0	30
1	110
2	190
3	270
4	350

Fonte: Elaborada pelo autor.

Obviamente podemos utilizar uma função para modelar a situação descrita e escrever a posição do móvel em função do tempo. Cabe observar que o problema recai numa função afim, pois conforme pode ser visto na tabela, acréscimos constantes dados a x implica em acréscimos constantes dados a y . Portanto, fazendo $f(0) = 30$ e $f(1) = 110$ e substituindo na fórmula $y = ax + b$, obtém-se a função $y = 80x + 30$.

Vale ressaltar que em livros de física do ensino médio se utiliza a fórmula $S = S_0 + vt$ (onde S é a posição do móvel no instante t , v é a velocidade do móvel e

S_0 é a posição inicial do móvel) para representar a função horária do movimento uniforme. Nesse caso, teríamos $S = 30 + 80t$ que é a mesma função encontrada acima. Fazendo essa comparação entre as fórmulas utilizadas pelo livro de física e o conceito de função afim fica fácil o aluno perceber que a velocidade é uma taxa de variação, nesse caso ela representa a taxa de variação da função afim.

Mas, vamos supor que um aluno desatento à caracterização da função afim modele esta situação por uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Ao utilizar o valor da função em três pontos, digamos em 0, 1 e 2, ele encontrará automaticamente que $c = 30$. Daí, ao fazer $f(1) = 110$ e $f(2) = 190$, obterá um sistema de variáveis a e b com solução $a = 0$ e $b = 80$. Concluindo que a função seria dada por $f(x) = 0x^2 + 80x + 30 = 80x + 30$. Isto acontece porque a natureza do problema não obedece à caracterização da função quadrática (como veremos adiante). Como sugestão de exercício o aluno pode tentar fazer a modelagem com outras funções como a exponencial e analisar o que acontece.

3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição 3.1: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita quadrática quando existem $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ e a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x^2 + 5x - 10$ são exemplos de funções quadráticas.

Neste capítulo abordaremos o teorema de caracterização da função quadrática. Contudo, inicialmente, iremos citar o conceito de progressão aritmética (PA) de ordem superior (no nosso caso, o foco será progressões aritméticas de segunda ordem) que será fundamental para o resultado principal do capítulo.

Como mencionado no capítulo anterior, uma PA é uma sequência onde a diferença entre um termo e seu anterior é constante, isto é, o operador diferença $\Delta_{a_n} = a_{n+1} - a_n$ é constante.

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência onde as diferenças Δ_{a_n} formam uma PA não-estacionária. A seguir temos um exemplo de uma PA de segunda ordem ou PA de ordem dois.

A sequência dada pelos termos (2, 4, 7, 11, 16, 22, ...) é uma PA de segunda ordem. Observe que as diferenças Δ_{a_n} formam uma PA crescente de razão igual a 1.

A proposição a seguir nos dar uma interessante relação entre progressões aritméticas de segunda ordem e polinômios do segundo grau, já nos dando uma sugestão da relação existente entre esse tipo de sequência e as funções quadráticas. Porém, antes de citarmos e demonstrarmos a proposição vamos mostrar o seguinte resultado:

Exemplo 3.1

Vamos mostrar que $\sum_{k=1}^n \Delta_{a_k} = a_{n+1} - a_1$. Para isso, desenvolveremos o somatório, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Delta_{a_k} &= \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \cdots + \Delta_{a_{n-1}} + \Delta_{a_n} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \Delta_{a_k} &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) \Rightarrow = \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \Delta_{a_k} = (a_{n+1} - a_1). \end{aligned}$$

Proposição 3.1. O termo geral de uma progressão aritmética de segunda ordem $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ escreve-se da forma $a_{n+1} = An^2 + Bn + C$, onde A, B, C são constantes reais.

Demonstração:

Já vimos que a diferença entre os termos consecutivos da sequência a_n geram uma PA, seja $(b_n) = (b_1, b_2, \dots)$ essa PA e digamos que (b_n) tem razão r . Temos então que:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n+1} - a_n &= b_n \end{aligned}$$

Somando todas as equações membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n) &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \Delta_{a_k} &= b_1 + b_2 + \dots + b_n \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{n+1} - a_1 &= b_1 + b_2 + \dots + b_n. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que (b_n) é uma PA., logo, pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA., segue que:

$$a_{n+1} - a_1 = \frac{(b_1 + b_n)n}{2} = \frac{nb_1 + nb_n}{2},$$

e ainda pelo fato de (b_n) ser uma PA, $b_n = b_1 + (n-1)r$. Então a igualdade acima é equivalente a:

$$a_{n+1} - a_1 = \frac{nb_1 + n(b_1 + (n-1)r)}{2} = \frac{nb_1 + nb_1 + n^2r - nr}{2} = nb_1 - \frac{r}{2}n + \frac{r}{2}n^2 = \frac{r}{2}n^2 + \left(b_1 - \frac{r}{2}\right)n,$$

logo, obtemos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_1 &= \frac{r}{2}n^2 + \left(b_1 - \frac{r}{2}\right)n \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{n+1} &= \frac{r}{2}n^2 + \left(b_1 - \frac{r}{2}\right)n + a_1, \end{aligned}$$

e, finalmente, fazendo $\frac{r}{2} = A$, $b_1 - \frac{r}{2} = B$ e $a_1 = C$, concluímos que o termo geral de (a_n) é $a_{n+1} = An^2 + Bn + C$, onde A, B e C são constantes. ■

A partir disso, trazendo para a linguagem de funções, podemos concluir que dada a PA de segunda ordem $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, existem números reais a, b e c tais que $y_n = an^2 + bn + c$ para todo n natural. Logo, tomando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, restrita apenas aos naturais, obtemos todos os termos da PA de segunda ordem $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

Para o teorema de caracterização da função quadrática é importante ressaltar que, nas hipóteses, só utilizaremos o fato da função quadrática ser contínua, pois tal função quando definida em todo o conjunto dos reais não pode ser monótona. Além disso, conforme cita Lima *et al* (1996), se duas funções contínuas $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que $f(r) = g(r)$ para todo r racional, então $f(x) = g(x)$ para todo real x . A partir disso podemos enunciar o resultado central do capítulo que é um teorema de equivalência, onde a segunda parte da demonstração seguirá os moldes da demonstração encontrada em Lima *et al* (1996).

Teorema 3.2 – Caracterização da função quadrática

A função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, f transforma a progressão aritmética não-constante $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots$

Demonstração:

Primeiramente vamos supor que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função quadrática e que $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ seja uma PA de razão r , devemos mostrar que $d_1 = f(x_2) -$

$f(x_1), d_2 = f(x_3) - f(x_2), \dots, d_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1})$ é uma PA de razão. Usaremos indução sobre n .

Vamos considerar o caso base da indução para $n = 4$. Neste caso, consideremos a PA $(x_1, x_1 + r, x_1 + 2r, x_1 + 3r)$. Então:

$$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c;$$

$$f(x_2) = a(x_1 + r)^2 + b(x_1 + r) + c = ax_1^2 + 2arx_1 + ar^2 + bx_1 + br + c;$$

$$f(x_3) = ax_1^2 + 4arx_1 + 4ar^2 + bx_1 + 2bx_1 + c \text{ (basta substituir } x_3 \text{ por } x_1 + 2r);$$

$$f(x_4) = ax_1^2 + 6arx_1 + 9ar^2 + bx_1 + 3br + c \text{ (basta substituir } x_4 \text{ por } x_1 + 3r).$$

Obtendo,

$$d_1 = f(x_2) - f(x_1) = 2arx_1 + ar^2 + br;$$

$$d_2 = f(x_3) - f(x_2) = 2arx_1 + 3ar^2 + br;$$

$$d_3 = f(x_4) - f(x_3) = 2arx_1 + 5ar^2 + br.$$

Onde claramente d_1, d_2 e d_3 é uma PA de razão $2ar^2$.

Agora, suponha que a propriedade seja válida para algum $n \geq 4$, isto é, dados x_1, x_2, \dots, x_n uma PA de razão r , então $d_1 = f(x_2) - f(x_1), d_2 = f(x_3) - f(x_2), \dots, d_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1})$ é uma PA de razão $2ar^2$. Devemos mostrar que a propriedade vale para $n + 1$.

De fato, consideremos a PA de razão r cujos elementos são $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Temos que $x_{n+1} = x_n + r$ e $x_{n-1} = x_n - r$. Assim, decorre que:

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n + r) = a(x_n + r)^2 + b(x_n + r) + c \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_{n+1}) = ax_n^2 + 2arx_n + ar^2 + bx_n + br + c. \end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} f(x_{n-1}) &= f(x_n - r) = a(x_n - r)^2 + b(x_n - r) + c \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_{n-1}) = ax_n^2 - 2arx_n + ar^2 + bx_n - br + c. \end{aligned}$$

Agora vejamos que, como $f(x_n) = ax_n^2 + bx_n + c$, então:

$$\begin{aligned}d_n &= f(x_{n+1}) - f(x_n) = 2arx_n + ar^2 + br; \\d_{n-1} &= f(x_n) - f(x_{n-1}) = 2arx_n - ar^2 + br,\end{aligned}$$

logo, $d_n - d_{n-1} = 2ar^2$. Portanto, como (por hipótese) d_1, d_2, \dots, d_{n-1} é uma PA de razão $2ar^2$, então $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$ é uma PA de razão $2ar^2$ e o resultado segue por indução.

Reciprocamente, seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua onde f transforma toda PA não constante em uma PA de segunda ordem não-degenerada. Consideremos a função g tal que $g(x) = f(x) - f(0)$. Observe que a função g conserva as propriedades de f , em particular, a propriedade de transformar uma PA em uma PA de segunda ordem não-degenerada, pois a função g é dada pela função f somada a uma constante. Além disso, temos que $g(0) = 0$. Vamos considerar a PA dada pelos números $1, 2, 3, \dots$, logo, $g(1), g(2), g(3), \dots, g(n), \dots$ formam uma PA de segunda ordem, uma vez que g também possui essa propriedade. Então, segue da proposição 3.1, que existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $g(n) = an^2 + bn + c = an^2 + bn$ ($c = 0$, pois $g(0) = 0$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, fixemos um natural p qualquer e vamos considerar a progressão aritmética $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p}, \dots$. Analogamente, temos também que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq 0$, tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = \alpha n^2 + \beta n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a igualdade:

$$an^2 + bn = g(n) = g\left(\frac{np}{p}\right) = \alpha(np)^2 + \beta(np) = (\alpha p^2)n^2 + (\beta p)n.$$

Portanto, as funções quadráticas $h(x) = ax^2 + bx$ e $h'(x) = (\alpha p^2)x^2 + (\beta p)x$ assumem os mesmos valores para todos os números naturais. Mas, conforme Lima *et al* (1996, p. 116), “se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos, então essas funções são iguais”. Logo, $h(x) = h'(x)$ e daí decorre que $a = \alpha p^2$ e $b = \beta p$, ou ainda, $\alpha = \frac{a}{p^2}$ e $\beta = \frac{b}{p}$. Concluindo assim que para quaisquer n e p naturais, vale a igualdade:

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{n}{p}\right) &= \alpha n^2 + \beta n \Rightarrow \\
 \Rightarrow g\left(\frac{n}{p}\right) &= \frac{a}{p^2} n^2 + \frac{b}{p} n \Rightarrow \\
 \Rightarrow g\left(\frac{n}{p}\right) &= a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).
 \end{aligned}$$

Ou seja, as funções $g(x)$ e $h(x) = ax^2 + bx$ assumem os mesmos valores para todo número racional $r = \frac{n}{p}$ e, como são contínuas, decorre que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo $x > 0$. De modo análogo, se considerarmos a progressão aritmética $-1, -2, -3, \dots$, concluímos que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo $x < 0$. Portanto, $g(x) = ax^2 + bx$ para todo real. Finalmente, pondo $f(0) = c$, obtemos $f(x) = g(x) + c$, isto é, $f(x) = ax^2 + bx + c$. ■

3.1 Problemas e soluções

Problema 3.1: Uma tira de papel, com espessura de 0,05 cm é enrolada em torno de um cilindro de plástico com 2 cm de diâmetro, formando um cilindro com 6 cm de diâmetro. Qual é o comprimento da tira de papel? Qual tipo de função associa o comprimento da tira ao diâmetro do cilindro formado?

Solução:

Nesse problema, a função quadrática já aparece naturalmente na resolução. Contudo, em sala de aula, ao terminar a solução, o professor pode mostrar a propriedade provada anteriormente.

Inicialmente vamos encontrar o comprimento do papel a cada volta. Iremos perceber que o comprimento do papel depende do número de voltas e que o número de voltas depende do raio (ou diâmetro) do rolo. Logo, o comprimento do papel depende do raio final do rolo.

$$\begin{aligned}
 1^{\text{a}} \text{ volta: raio} &= 1 \text{ cm} \rightarrow C = 2\pi; \\
 2^{\text{a}} \text{ volta: raio} &= 1 + 0,05 \rightarrow C = 2\pi(1 + 0,05); \\
 3^{\text{a}} \text{ volta: raio} &= 1 + 2 \cdot 0,05 \rightarrow C = 2\pi(1 + 0,1); \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$n^{\circ} \text{ volta: raio} = 1 + (n - 1) \cdot 0,05 \rightarrow C = 2\pi[1 + (n - 1) \cdot 0,05].$$

Calculamos o comprimento de papel utilizado por volta, para calcular o comprimento total, observe que o comprimento por volta é uma PA, então devemos calcular a soma dos n termos da PA. Logo, o comprimento total do papel será:

$$\begin{aligned} C_T(n) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_T(n) &= \frac{[2\pi + 2\pi(1 + (n - 1) \cdot 0,05)]n}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow C_T(n) &= \frac{2\pi n + 2\pi n(1 + 0,05n - 0,05)}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_T(n) = \pi n + \pi n(1 + 0,05n - 0,05) \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_T(n) = \pi n + \pi n + 0,05\pi n^2 - 0,05\pi n \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_T(n) = 0,05\pi n^2 + 1,95\pi n. \end{aligned}$$

Por outro lado, se o raio final do rolo mede x , então o número de voltas n , é dado pela expressão $n = \frac{x-1}{0,05}$, onde 1 é o raio do rolo de plástico (ou rolo inicial). Então, o comprimento total em função do raio final x do rolo, é $C_T(x) = 0,05\pi \left(\frac{x-1}{0,05}\right)^2 + 1,95\pi \left(\frac{x-1}{0,05}\right)$. Finalmente, no nosso caso temos que o raio final do rolo mede 3 cm, assim, o comprimento total do rolo será:

$$C_T(3) = 0,05\pi(40)^2 + 1,95\pi(40) = 80\pi + 78\pi = 158\pi.$$

Ao terminar a resolução, o professor pode mostrar ao aluno que a função que modela o problema transforma uma PA em uma PA de segunda ordem. Vejamos um caso particular: Vamos utilizar a PA (1, 2, 3, 4), onde seus termos representam o raio final do rolo, e analisar o que acontece com os valores relativos ao comprimento total do papel.

$$\begin{aligned} x = 1 &\rightarrow C_T(1) = 0; \\ x = 2 &\rightarrow C_T(2) = 59\pi; \\ x = 3 &\rightarrow C_T(3) = 158\pi; \end{aligned}$$

$$x = 4 \rightarrow C_T(4) = 297\pi.$$

Agora observe que a sequência $(0, 59\pi, 158\pi, 297\pi)$ é uma PA de segunda ordem de razão 40π .

Problema 3.2: Movimento Uniformemente Variado (MUV)

Neste problema abordaremos um pouco do conceito do Movimento Uniformemente Variado e o motivo de utilizarmos funções quadráticas para modelarmos situações que envolvem este tipo de movimento.

Segundo Ferraro, Soares e Fogo (2009), o MUV é o movimento em que a velocidade escalar varia uniformemente com o tempo, isto é, a velocidade escalar sofre variações iguais, em intervalos de tempos iguais. Além disso, nesse tipo de movimento, a aceleração escalar instantânea é constante (o que é fácil de perceber, uma vez que a aceleração é a taxa de variação da velocidade). Partindo dessa ideia podemos pensar no seguinte problema:

Um observador anotou a posição de um móvel ao longo do tempo na seguinte tabela:

Tabela 3 - Movimento Uniformemente Variado.

Instante (seg)	Posição (metros)
0	17
5	30
10	45
15	72

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pergunta-se:

- i) É possível utilizar uma função afim para obter a posição do móvel em determinado instante?

Solução:

A resposta é não, pois ao observar a tabela percebe-se que os instantes estão em PA enquanto que as posições formam uma PA de segunda ordem, logo,

pelo que provamos anteriormente, devemos utilizar uma função quadrática para encontrar a posição em função do tempo.

O objetivo dessa pergunta é fazer com que o aluno perceba que o problema não pode ser modelado por qualquer função, pois o padrão presente na tabela satisfaz uma propriedade de uma função específica, no caso, de uma função quadrática.

ii) Baseando-se pela tabela, qual o tipo de movimento descrito pelo móvel?

Solução: Observemos que no primeiro intervalo de 5 segundos, o deslocamento do móvel foi de 13 metros. No segundo intervalo de 5 segundos, o deslocamento foi de 15 metros. Por fim, no terceiro intervalo de 5 segundos, o deslocamento foi de 17 metros. Portanto, temos o seguinte (usaremos v para representar a velocidade, Δt para a variação do tempo, ΔS para o deslocamento e α para a aceleração):

$$1^{\circ} \text{ intervalo} \rightarrow v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{13}{5};$$

$$2^{\circ} \text{ intervalo} \rightarrow v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{15}{5};$$

$$3^{\circ} \text{ intervalo} \rightarrow v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{17}{5}.$$

Ora, a sequência $\left(\frac{13}{5}, 3, \frac{17}{5}\right)$ forma uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{5}$, o que significa que a velocidade durante o trajeto do móvel sofre variações iguais em intervalos de tempos iguais (observe que a razão da PA é a variação da velocidade). Portanto, os dados nos mostram um movimento uniformemente variado. Além disso, observe que a aceleração do móvel é $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{2}{5}}{5} = \frac{2}{25} = 0,08 \text{ m/s}^2$.

iii) Qual a lei de formação da função que associa a posição S do móvel com o instante t ?

Solução:

Aqui, vamos tomar como conhecido o fato de que uma função quadrática fica determinada quando conhecemos o valor que ela assume em três pontos. Iremos determinar a função quadrática dada por $S = at^2 + bt + c$. De acordo com a tabela

temos que $f(0) = 17$, $f(5) = 30$ e $f(10) = 45$. Como $f(0) = 17$, então já obtemos que $S = at^2 + bt + 17$. Montando o sistema com $f(5) = 30$ e $f(10) = 45$.

$$\begin{cases} 25a + 5b + 17 = 30 \\ 100a + 10b + 17 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a + 5b = 13 \\ 100a + 10b = 28 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0,04 \text{ e } b = 2,4.$$

Portanto, a função encontrada é dada por $S = 0,04t^2 + 2,4t + 17$. Tal função pode ser associada com a conhecida função horária do MUV que, segundo Ferraro, Soares e Fogo (2009), é dada por $S = S_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$ (que é bem simples de ser demonstrada), onde S_0 é a posição inicial do móvel, v_0 é a velocidade inicial, t é o tempo e S é a posição do móvel no instante t .

Na nossa linguagem, de maneira geral, o movimento uniformemente variado é descrito pela função quadrática $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, onde a é aceleração, b é a velocidade inicial e c é a posição inicial do ponto. Ora, em qualquer movimento descrito por uma função f , podemos considerar a velocidade média como sendo uma taxa de variação dada pelo seguinte quociente:

$$v = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\text{variação do espaço}}{\text{tempo}}.$$

Aplicando esse quociente na fórmula $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, obtemos:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\frac{1}{2}a(t+h)^2 + b(t+h) + c - \left(\frac{1}{2}at^2 + bt + c\right)}{h} = at + \frac{ah}{2} + b.$$

Por outro lado, temos que $\lim_{h \rightarrow 0} at + \frac{ah}{2} + b = at + b$, logo podemos concluir que, quando se tem um movimento uniformemente variado, a velocidade do ponto no instante t é dada por:

$$v(t) = at + b.$$

Uma observação importante é que a aceleração é a taxa de variação da velocidade, isto é, $a = \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$. Tendo em vista essas observações, iremos agora

passar para o próximo problema que mostra como a função quadrática consegue descrever completamente um movimento uniformemente variado.

O próximo problema é uma adaptação de um problema que pode ser encontrado em Lima (2013).

Problema 3.3: O motorista de um automóvel freia seu veículo de modo que o movimento passa a ser descrito pelo diagrama a seguir (que mostra a posição do veículo a cada instante a partir do momento em que os freios foram ativados).

Figura 3 - MUV



Fonte: Elaborado pelo autor.

i) Os dados do diagrama representam uma força de frenagem constante?

Solução:

Em outras palavras, queremos identificar se o movimento possui uma aceleração constante e obviamente não nula, ou seja, se temos um movimento uniformemente variado. Como visto no problema anterior, o MUV é descrito por uma função quadrática. Logo, devemos identificar se os dados do diagrama satisfazem a propriedade descrita no teorema de caracterização da função quadrática.

Então, sendo $f(t)$ a posição no instante t , temos que $f(0) = 0, f(1) = 35, f(2) = 65$ e $f(3) = 90$. Agora, observe que os instantes (0, 1, 2, 3) estão em PA e as posições ($f(0), f(1), f(2), f(3)$) formam uma PA de segunda ordem de razão $r = -5$. Então, a função que deve modelar a situação é quadrática e, portanto, a situação trata de um MUV onde a aceleração é, de fato, constante.

ii) Qual a posição do móvel após 6 segundos?

Solução:

Já sabemos do item anterior que devemos encontrar uma função f quadrática que associe a posição do móvel com o instante. Tendo a função já definida basta calcular $f(6)$. Como no problema anterior, vamos utilizar o valor da função em três pontos conhecidos e resolver o sistema para encontrar as constantes a, b e c da função $f(t) = at^2 + bt + c$. Segue do diagrama que $f(0) = 0, f(1) = 35$ e $f(2) = 65$. De $f(0) = 0$, segue que $c = 0$ e assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 35 \\ 4a + 2b = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2,5 \\ b = 37,5 \end{cases}$$

Logo, encontramos a função:

$$f(t) = -2,5t^2 + 37,5t.$$

Portanto, a posição do móvel no instante 6 segundos é $f(6) = 135 \text{ m}$, ou seja, o móvel está 135 m distante do ponto de partida.

iii) Quanto tempo o móvel leva para chegar ao repouso?

Solução:

Conforme mencionado anteriormente, temos que $v(t) = at + b$, onde nesse caso, $\frac{\alpha}{2} = -2,5$ (α é aceleração) e $b = 37,5$ (velocidade inicial). Logo, $v(t) = -5t + 37,5$.

Queremos encontrar o instante em que a velocidade se anula, isto é, $v(t) = 0$. Portanto, o instante em que o móvel chega ao repouso é $t = 7,5$.

Podemos perceber que nos três exercícios o aluno que tentar resolver terá que encontrar uma função para modelar os problemas a partir de propriedades estudadas, diferentemente de exercícios que encontramos em diversos livros didáticos onde o problema já coloca “magicamente” a função modeladora, o que torna o problema bem superficial, como se fosse uma simples escolha de que aquela função tenha que modelar a situação. Contudo, o objetivo é fazer com que o aluno perceba que a natureza do problema segue padrões que forçam aparecer determinado tipo de função. Em um exercício como o último que colocamos neste capítulo, o professor

pode ainda pedir para o aluno tentar escrever a posição do móvel em função do tempo a partir de uma função afim e fazê-lo observar que isso geraria alguns absurdos, como por exemplo, encontrar uma lei de formação que não obedece a todos os valores do diagrama.

4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL

Neste capítulo abordaremos a função logarítmica e só mais a frente é que trataremos das funções exponenciais, trocando a sequência que costumeiramente é utilizada no ensino médio. Portanto, iremos abordar a função exponencial como a inversa da logarítmica. É importante ressaltar que historicamente essa é a ordem natural de se estudar as duas funções, visto que dessa forma, segundo Lima (2013), algumas propriedades das funções logarítmicas, em particular a base e , surgem de forma natural.

Outra mudança importante a respeito da nossa abordagem sobre funções logarítmicas, em relação a como essas funções são trabalhadas no ensino médio, é que aqui definiremos esta função como uma área.

Para a definição de função logarítmica que daremos a seguir usaremos a notação \mathbb{R}^+ que representa o conjunto dos números reais positivos, em símbolos, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

Definição 4.1: Uma função $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, chama-se função logarítmica quando possui as duas propriedades a seguir:

- a) L é uma função crescente;
- b) $L(xy) = L(x) + L(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Proposição 4.2: Sendo $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica, valem as seguintes propriedades.

- a) $L(1) = 0$;
- b) Se $a > 1$, então $L(a) > 0$. Se $a < 1$, então $L(a) < 0$;
- c) Para todo x pertencente ao domínio de L , tem-se $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$;
- d) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ (domínio da função L), tem-se $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$;
- e) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ e $\forall r \in \mathbb{Q}$, com $r = p/q$, tem-se $L(x^r) = rL(x)$.

Demonstração:

- a) $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1) \Leftrightarrow L(1) = 2L(1) \Leftrightarrow 2L(1) - L(1) = 0 \Leftrightarrow L(1) = 0$;
- b) Como L é crescente e $a > 1$, decorre que $L(a) > L(1) = 0$. O caso em que $a < 1$ é análogo;

$$\text{c) } L\left(x \frac{1}{x}\right) = L(1) = 0 \Leftrightarrow L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x);$$

$$\text{d) } L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y);$$

e) Inicialmente vamos usar indução para provar que quando $n \in \mathbb{N}$, então $L(x^n) = nL(x)$.

Para $n = 2$, temos que $L(x^2) = L(x \cdot x) = L(x) + L(x) = 2L(x)$, logo a igualdade é válida.

Suponha que a propriedade seja válida para algum $n \geq 2$, isto é, para algum $n \geq 2$ tem-se $L(x^n) = nL(x)$. Devemos mostrar que o resultado vale também para $n + 1$. De fato, temos que:

$$L(x^{n+1}) = L(x^n \cdot x) = L(x^n) + L(x) = nL(x) + L(x) = (n + 1) \cdot L(x),$$

onde na penúltima igualdade usamos a hipótese de indução. Portanto, segue por indução, que se $n \in \mathbb{N}$, então $L(x^n) = nL(x)$.

Vamos mostrar agora que a propriedade vale quando n é um inteiro negativo. Consideremos $r = -n$, com $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\forall x > 0$, temos:

$$L(1) = L(x^n \cdot x^{-n}) = L(x^n) + L(x^{-n}) = 0 \Leftrightarrow L(x^{-n}) = -L(x^n) \Leftrightarrow L(x^{-n}) = -nL(x^n).$$

Por fim, para o caso onde $r \in \mathbb{Q}$, procederemos nos moldes de Lima (2013). Seja $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Então, como $q \in \mathbb{N}$ decorre que $qL(x^r) = [L(x^r)^q] = L[(x^{p/q})^q] = L(x^p) = pL(x)$ (essa última passagem segue do fato de que $p \in \mathbb{Z}$, e já provamos que a propriedade vale para qualquer inteiro). Logo, obtemos:

$$qL(x^r) = pL(x) \Leftrightarrow L(x^r) = \frac{p}{q}L(x).$$

Portanto, $L(x^r) = rL(x)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. ■

Além das propriedades acima citadas e demonstradas, vale ressaltar também que a função logarítmica é injetora (a prova sai imediatamente da primeira propriedade da definição) e sobrejetora, onde a prova da sobrejetividade pode ser

encontrada em Lima (2013). Por consequência, temos que a função logarítmica é uma bijeção, logo, admite inversa.

Um outro ponto importante é que a função logarítmica não pode ser definida no ponto $x = 0$, pois se pudesse, teríamos:

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0) \Leftrightarrow L(x) = 0,$$

isto é, L seria a função identicamente nula.

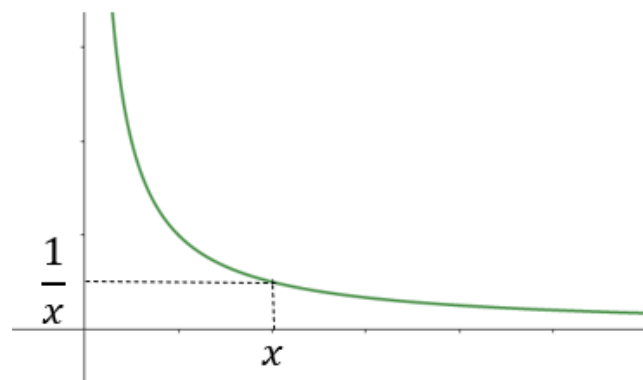
Antes de darmos a definição utilizando áreas, vamos introduzir um conceito que será fundamental para tal definição, que é o conceito de área de uma faixa de hipérbole.

Consideremos, num sistema de eixos OXY, o ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$. Denotando esse ramo por H , temos que H pode ser definido em linguagem simbólica da seguinte forma:

$$H = \left\{ (x, y); x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}.$$

Utilizando as ferramentas do cálculo tal curva é facilmente esboçada e seu esboço está representado na figura a seguir:

Figura 4 - ramo da hipérbole



Fonte: Elaborado pelo autor.

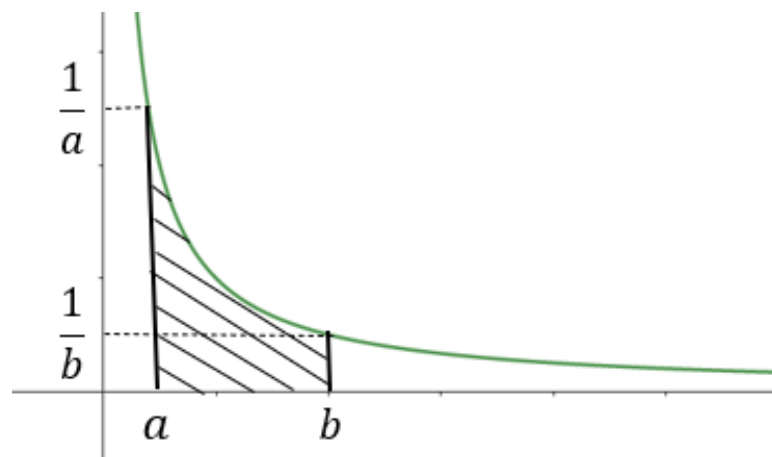
Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$ e $a < b$. Uma faixa de hipérbole é a região compreendida entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abscissas e pelo

ramo H . Representamos tal região pela notação H_a^b . Simbolicamente, a faixa da hipérbole pode ser definida como segue:

$$H_a^b = \left\{ (x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

A parte hachurada da figura a seguir representa a faixa graficamente.

Figura 5 - Faixa H_a^b



Fonte: Adaptado de Lima (2013).

Para calcular a área de uma faixa de hipérbole precisaremos utilizar o conceito abordado por Lima (2013), que é o de retângulo inscrito na faixa. Para tanto, consideremos uma faixa H_a^b , ao particionarmos o intervalo $[a, b]$ em um número finito de intervalos $[c, d]$, o comprimento de cada um desses intervalos será a base de um retângulo com altura $\frac{1}{a}$ e cujo vértice superior direito toca o ramo H . Esses retângulos são chamados de retângulos inscritos e a união deles é chamada de polígono retangular.

Ao traçarmos todos os retângulos inscritos referentes a decomposição desse intervalo, o somatório de suas áreas nos dará uma aproximação por falta da área da faixa. Obviamente, quanto mais decomposições fizermos no intervalo $[a, b]$, mais retângulos inscritos teremos e melhor será a aproximação da área da faixa. Assim, é possível obter uma área aproximada para H_a^b tão próxima quanto se queira, para isso, basta que refinemos suficientemente a partição do intervalo $[a, b]$. A área da faixa é representada por $\text{Área}(H_a^b)$.

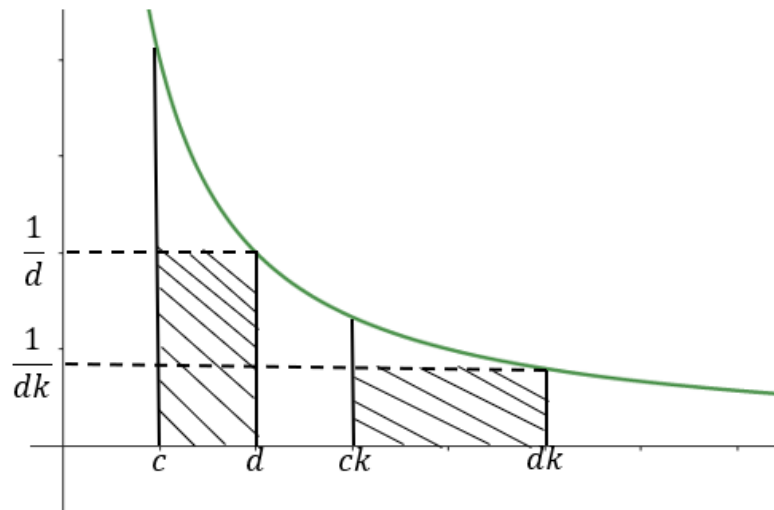
Também pode ser feito o cálculo para se obter uma aproximação por excesso da área da faixa. Para isso, conforme pode ser encontrado em Lima (2013), deve-se fazer a subdivisão do intervalo (conforme descrito acima) e utilizar o trapézio secante ao ramo H , onde os dois lados verticais possuem comprimento $\frac{1}{c}$ e $\frac{1}{d}$ e o lado horizontal tenha comprimento igual ao comprimento dos intervalos da subdivisão. Assim como no caso anterior, a área aproximada será dada pelo somatório das áreas de todos os trapézios secantes.

Teorema 4.3: Para qualquer real $k > 0$, tem-se $\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_{ak}^{bk})$.

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que a área do retângulo inscrito em H que tem base no segmento $[c, d]$ no eixo das abscissas é igual a área do retângulo inscrito em H com base no segmento $[ck, dk]$.

Figura 6 - As áreas hachuradas são iguais



Fonte: Adaptado de Lima (2013).

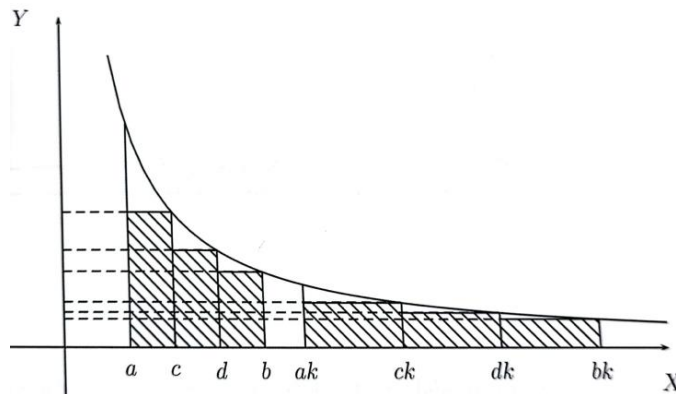
De fato, a área do retângulo de base sendo o comprimento do intervalo $[c, d]$ é dada pela expressão $(d - c)\frac{1}{d}$ e a área do retângulo de base sendo o comprimento do intervalo $[ck, dk]$ é:

$$(d - c)k \frac{1}{dk} = (d - c) \frac{1}{d}.$$

Portanto, as áreas são iguais.

Vamos considerar um polígono retangular P , inscrito na faixa H_a^b , a base desse polígono determinará um número finito de divisões do intervalo $[a, b]$ no eixo das abscissas. Ao multiplicarmos cada uma das extremidades dos intervalos da subdivisão de $[a, b]$ por uma constante k , iremos obter uma subdivisão de $[ak, bk]$ determinando um polígono retangular P' inscrito em H_{ak}^{bk} , uma possível ilustração está representada na seguinte figura.

Figura 7 - Subdivisão dos intervalos $[a, b]$ e $[ak, bk]$



Fonte: Lima (2013, p.51).

Pelo provado acima, cada um dos retângulos em P' tem área igual ao retângulo correspondente no polígono P . Logo, a área de P é igual a área de P' . Portanto, ao calcularmos a área da faixa H_a^b e a área da faixa H_{ak}^{bk} pelo método dos retângulos (citado anteriormente), obteremos a mesma aproximação por falta, logo, as faixas possuem mesma área. ■

Uma das importâncias desse teorema é que por conta dele faz sentido restringir o estudo de áreas das faixas de hipérbole às faixas da forma H_1^α , onde $\alpha = \frac{b}{a}$, pois,

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}\left(H_{\frac{a}{1}}^{\frac{b}{1}}\right) = \text{Área}(H_1^\alpha).$$

Além disso, como mencionado por Lima (2013), tem-se que $\text{Área}(H_a^a) = 0$ (pois nesse caso temos apenas um segmento de reta) e, por convenção, adota-se que $\text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a)$, o que implica que podemos considerar áreas negativas.

Definição 4.4: Dado $x \in \mathbb{R}$, com $x > 0$. O logaritmo natural de x é a área da faixa H_1^x . Em símbolos, temos $\ln x = \text{Área}(H_1^x)$.

Uma observação importante é que aqui convencionamos que $\text{Área}H_1^x < 0$ sempre que $0 < x < 1$, neste caso tem-se $\ln x < 0$. Decorre dessa definição que $\ln 1 = \text{Área}(H_1^1) = 0$. E, obviamente, quando $x > 1$, $\ln x > 0$.

Como as faixas de hipérbolas só fazem sentido para $x > 0$, então $\ln x$ não está definido para $x < 0$. Um fato interessante a se observar é que o eixo OY é uma assíntota vertical do ramo da hipérbole $xy = 1$, logo baseando-se pela definição 4.4 fica um tanto intuitivo imaginar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. Perceba que à medida que x se aproxima de zero pela direita, vai se formando faixas com áreas negativas, pois como foi convencionado acima $\ln x < 0$, quando $x < 1$.

Teorema 4.5: A função $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é logarítmica.

Demonstração:

Para provar que uma função é logarítmica, devemos mostrar que ela cumpre as duas propriedades dadas na definição 4.1. Primeiramente vamos provar que \ln transforma produto em soma, ou seja, que $\ln xy = \ln x + \ln y$.

De fato, como consequência da adoção de áreas negativas, independente das posições de $1, x$ e xy no eixo das abscissas, vale a seguinte igualdade:

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_x^{xy}),$$

temos ainda:

$$\text{Área}(H_x^{xy}) = \text{Área}(H_x^y) + \text{Área}(H_y^{xy}) = \text{Área}(H_x^y) + \text{Área}(H_1^x) = \text{Área}(H_1^y),$$

assim, das duas igualdades, decorre que:

$$\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_1^y),$$

ou seja, pela definição 4.4,

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

A fim de mostrar que \ln é crescente, tomemos $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x < y$. Então, existe $\alpha > 1$, tal que $y = x\alpha$. Daí,

$$\ln y = \ln x\alpha = \ln x + \ln \alpha.$$

Por outro lado, como $\alpha > 1$, tem-se $\ln \alpha = b > 0$. Logo,

$$\ln y = \ln x + \ln \alpha = \ln x + b > \ln x.$$

Portanto, $\ln y > \ln x$ e o resultado segue. ■

Como \ln é uma função logarítmica, segue da proposição 4.2 que \ln possui as propriedades: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}$, então:

$$\begin{aligned}\ln \frac{1}{x} &= -\ln x; \\ \ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y; \\ \ln x^m &= m \ln x; \\ \ln \sqrt[m]{x} &= \frac{1}{m} \ln x.\end{aligned}$$

Já mencionamos anteriormente que a função $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, logo, existe um único número real tal que seu logaritmo natural é igual a 1. Obviamente esse número deverá ser maior do que 1, pois como vimos acima, $\ln x > 0$ sempre que $x > 1$. Representamos esse número pela letra e e dizemos que e é a base do logaritmo natural.

Ao calcularmos as áreas das faixas H_1^2 e H_1^3 é fácil concluir que $\text{Área}(H_1^2) < 1$ e $\text{Área}(H_1^3) > 1$, isto é, $\ln 2 < 1$ e $\ln 3 > 1$. Então, podemos concluir que $\ln 2 < \ln e < \ln 3$, o que significa que $2 < e < 3$ (uma vez que a função \ln é crescente).

Conforme menciona Lima (2013), o número e é irracional. Mas como determinar uma aproximação para esse número? De acordo com Guidorizzi (2016), podemos utilizar a ideia de limite de seqüências para encontrar um valor aproximado para o número e . Vejamos a seguir.

Proposição 4.6: $2^n \leq (n + 1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Vamos usar indução sobre n . Inicialmente vejamos que se $n = 1$, então $2^n = 2^1 = 2 \leq (1 + 1)! = 2! = 2$. Suponha então que a desigualdade seja válida para algum $n \geq 1$, isto é, para tal n tem-se $2^n \leq (n + 1)!$. Devemos mostrar que $2^{n+1} \leq (n + 2)!$. De fato, temos que:

$$2^n \leq (n + 1)! \Rightarrow 2^n(n + 2) \leq (n + 1)!(n + 2) \Rightarrow 2^n(n + 2) \leq (n + 2)!$$

Agora veja que $n \geq 1 \Rightarrow n + 2 > 2$. Logo, a última desigualdade garante que $2^n \cdot 2 \leq (n + 2)! \Rightarrow 2^{n+1} \leq (n + 2)!$. Portanto, a propriedade é válida para $n + 1$. Logo, segue por indução, que $2^n \leq (n + 1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Tendo em vista o último resultado, decorre que:

$$\frac{1}{(n + 1)!} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 4.7: A seqüência de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada.

Demonstração:

Usando a fórmula do binômio, temos que:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \dots + \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Agora observe que os termos $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)$, ..., $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$ são todos positivos e menores do que 1. Logo,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Por outro lado, como vimos acima, $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ Logo,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Mas a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2$ (soma da P.G infinita) é maior do que a soma $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$. Logo,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3.$$

Além disso, como $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$, então, claramente $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$. Portanto, concluímos que $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, isto é, a sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é limitada.

Agora nos resta mostrar que a sequência é crescente. Para tanto, vamos comparar a_n e a_{n+1} . Onde:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \text{ e}$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Vamos mostrar que $a_{n+1} > a_n$. Ora, $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Assim, se $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, então $k > 0$, então,

$$\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1} \Rightarrow -\frac{k}{n} < -\frac{k}{n+1} \Rightarrow 1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Logo, $\frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

Do mesmo modo, temos que $1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1}$. Assim, como $0 < 1 - \frac{k}{n}$ para $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, então,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, $0 < 1 - \frac{2}{n} < 1 - \frac{2}{n+1}$, $0 < 1 - \frac{3}{n} < 1 - \frac{3}{n+1}$, então, decorre que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) &< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) &< \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, chegamos que:

$$\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right).$$

Ou seja, mostramos que, a partir da terceira parcela (já que as duas primeiras parcelas de a_n e a_{n+1} são iguais a 1), cada parcela dos termos de a_n é menor do que cada parcela de a_{n+1} , logo ao somar todas as parcelas de a_n resulta que tal soma é menor do que a soma de todas as parcelas de a_{n+1} . Assim, podemos concluir que:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) < a_{n+1},$$

perceba que, a_{n+1} ainda possui uma parcela positiva a mais, que é o termo $\frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$. Portanto, a sequência é crescente. ■

Provamos então que a sequência de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente (portanto, monótona) e limitada. Logo, conforme menciona Lima (1982), tal sequência converge, isto é, existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Definimos então o número e como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

A partir desta definição, podemos encontrar algumas aproximações para e , por exemplo, fazendo $n = 1000$ na expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, obtemos o valor 2,7169239322. Obviamente quanto maior o valor de n melhor será a aproximação para o valor de e .

Teorema 4.8: Seja $r \in \mathbb{Q}$, onde $r = \frac{p}{q}$. Então, $y = e^r$ se, e somente se, $\ln y = r$.

Demonstração:

$$y = e^r \Rightarrow \ln y = \ln e^r \Rightarrow \ln y = r \ln e \Rightarrow \ln y = r.$$

Para a recíproca, consideremos $y > 0$, tal que $\ln y = r$. Como $\ln e^r = r \ln e = r$ e, além disso, \ln é biunívoca (mais precisamente, injetiva), então obrigatoriamente deve-se ter $y = e^r$.

4.1 Logaritmos em outras bases

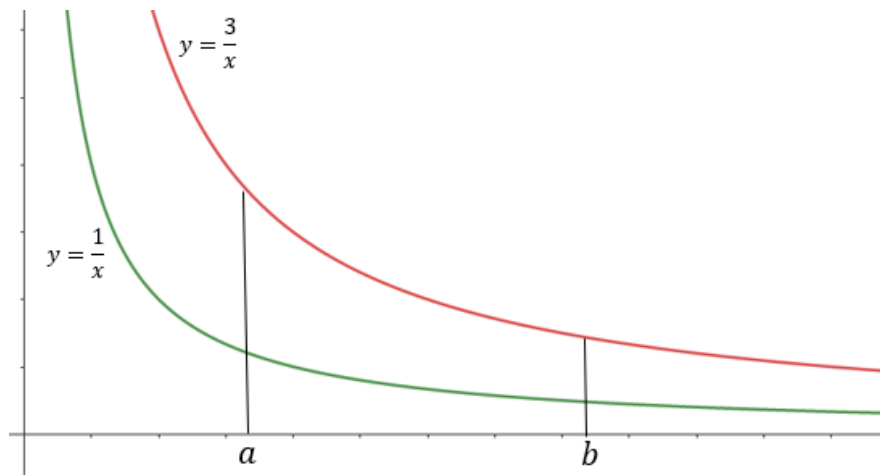
O que vimos até aqui foram os logaritmos na base e (logaritmos naturais), mas podemos definir logaritmos em uma base qualquer, onde. Para tanto, ao invés

de considerarmos a hipérbole $y = \frac{1}{x}$, iremos considerar a de equação $y = \frac{k}{x}$. Para cada k temos um novo sistema de logaritmos.

Definição 4.10: Considere dois pontos pertencentes ao ramo positivo da hipérbole $y = \frac{k}{x}$, onde esses pontos têm abscissas a e b . Uma faixa da hipérbole $y = \frac{k}{x}$ que vai de a até b é a região compreendida entre as retas $x = a$, $x = b$, o eixo x e o ramo positivo de tal hipérbole. Denotamos essa faixa por $H(k)_a^b$.

A figura a seguir representa uma faixa H_a^b e uma faixa $H(3)_a^b$.

Figura 8 - Faixas H_a^b e $H(3)_a^b$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O próximo resultado é muito importante, pois nos ajudará a definir e garantir as propriedades de logaritmos em uma base qualquer. A demonstração que apresentaremos a seguir será baseada na que se encontra em Lima (2013).

Teorema 4.11: $\text{Área}H(k)_a^b = k \cdot \text{Área}H_a^b$.

Demonstração:

Seja $[c, d]$ um intervalo contido em $[a, b]$. Tal intervalo irá determinar um retângulo inscrito na faixa H_a^b e um retângulo inscrito na faixa $H(k)_a^b$. Os dois retângulos têm mesma base (que é o comprimento do intervalo $[c, d]$). Por outro lado,

a altura do primeiro é $\frac{1}{a}$ e a altura do segundo é $\frac{k}{a}$. Portanto, o segundo retângulo tem área igual a k vezes a área do primeiro.

Dessa forma, é fácil perceber que qualquer intervalo contido em $[a, b]$ irá gerar um retângulo inscrito em H_a^b e um inscrito em $H(k)_a^b$, onde em todos os casos a relação que acabamos de provar irá ser válida. Portanto, independente da partição que fizermos em $[a, b]$, o somatório das áreas de todos os retângulos inscritos em $H(k)_a^b$ será igual a k vezes o somatório das áreas de todos os retângulos inscritos em H_a^b , isto é, a área aproximada por falta da faixa $H(k)_a^b$ será k vezes a área aproximada por falta da faixa H_a^b . E isso é o mesmo que $\text{Área}H(k)_a^b = k \cdot \text{Área}H_a^b$. ■

A partir desse resultado, Lima (2013) define logaritmo de x da seguinte forma:

Definição 4.12: Fixada a constante $k > 0$, introduzimos um novo sistema de logaritmos, pondo, por definição, para cada $x > 0$:

$$\log x = \text{Área}(H(k))_1^x.$$

Segue imediatamente da definição de $\ln x$ e do teorema anterior que:

$$\log x = k \ln x.$$

Assim como nos logaritmos naturais, a base de um sistema de logaritmos qualquer é o número real $a > 0$, tal que $\log a = 1$. Assim, vale o seguinte resultado:

$$\log a = k \ln a \Rightarrow 1 = k \ln a \Rightarrow k = \frac{1}{\ln a},$$

e, por fim, utilizando a notação $\log_a x$ para representar o logaritmo de x na base a , onde $x \in \mathbb{R}^+$, decorre da definição 4.12 a seguinte igualdade:

$$\log_a x = k \ln x = \frac{1}{\ln a} \ln x \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Portanto, sendo a base $a > 0$, então,

$$\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1.$$

Em posse desses resultados, podemos provar alguns resultados importantes.

Teorema 4.13: Sendo $a > 1$, a função $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é logarítmica.

Demonstração:

Vamos mostrar as duas propriedades da definição de função logarítmica. Para a primeira propriedade (a função transforma produto em soma), tomemos dois números reais positivos x e y . Então:

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \frac{\ln xy}{\ln a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_a xy &= \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_a xy &= \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_a xy &= \log_a x + \log_a y. \end{aligned}$$

Agora, tome x e y reais positivos tais que $x < y$. Logo, existe $k \in \mathbb{R}$, onde $k > 1$, tal que $y = kx$, logo,

$$\log_a y = \log_a kx = \log_a k + \log_a x,$$

como $k > 1$, então $\log_a k > 0$ e, portanto, $\log_a y > \log_a x$, concluindo que $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente. Logo, como tal função satisfaz as duas propriedades da função logarítmica, então $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é logarítmica. ■

Proposição 4.14: Sejam $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, com $a > 1$. Então

i) $\log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = 0$;

ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

iii) $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$;

iv) Se $1 < a < b$, então $\log_a x > \log_b x$ quando $x > 1$ e $\log_a x < \log_b x$ quando $0 < x < 1$.

v) Se $b > a > 1$, então $\log_a b > 1$.

Demonstração:

Para demonstrar estas propriedades vamos usar a igualdade (provada acima)

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

$$i) \log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln x}{\ln \frac{1}{a}} = \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln a} = 0;$$

vale ressaltar que na penúltima igualdade usamos o fato já provado que $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.

$$ii) \log_a \frac{x}{y} = \frac{\ln \frac{x}{y}}{\ln a} = \left(\frac{\ln x - \ln y}{\ln a} \right) = \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x - \log_a y.$$

$$iii) \log_a x = \log_a y \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln y}{\ln a} \Rightarrow \ln x = \ln y \Rightarrow x = y \text{ (pois } \ln \text{ é biunívoca)}.$$

iv) Sejam $1 < a < b$. Temos que $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ e $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ e, por outro lado, \ln é crescente, logo, $\ln a < \ln b$. Portanto, se $x > 1$ decorre que $\frac{\ln x}{\ln a} > \frac{\ln x}{\ln b}$ (isto é $\log_a x > \log_b x$), e se $0 < x < 1$ decorre que $\frac{\ln x}{\ln a} < \frac{\ln x}{\ln b}$ (isto é, $\log_a x < \log_b x$). Logo, o resultado segue.

v) Sejam $b > a > 1$. Temos que $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ e como \ln é crescente, então $\ln b > \ln a$. Além disso, do fato de que tanto o número b como o número a serem maiores do que 1, decorre que ambos tem logaritmo natural positivo. Unindo estes dois fatos podemos concluir que $\frac{\ln b}{\ln a} > 1$. ■

Um logaritmo escrito em uma base maior do que 1 pode ser facilmente escrito em outra base maior do 1, para isso basta que se utilize a seguinte fórmula (conhecida como fórmula da mudança de base):

$$\log_a x \log_b a = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln b} = \log_b x \Leftrightarrow \log_a x \log_b a = \log_b x.$$

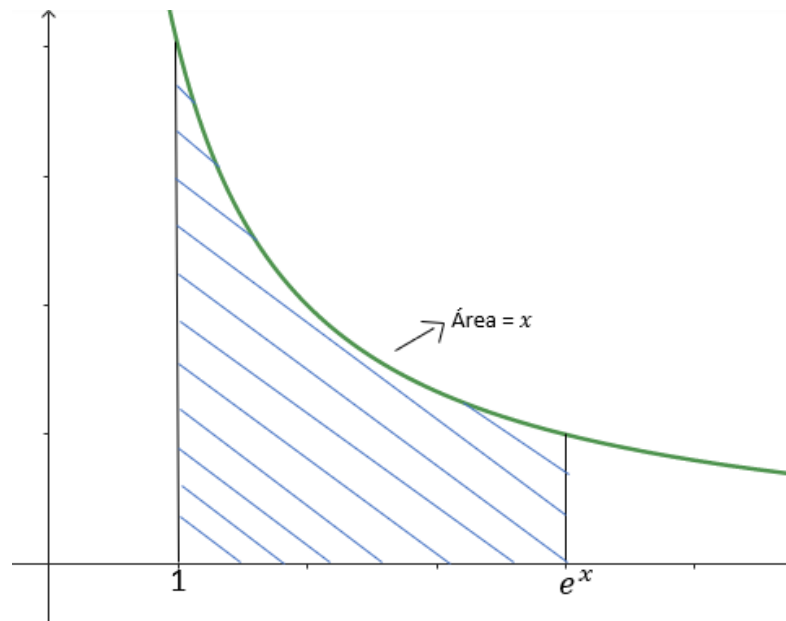
Por fim, para terminar este tópico específico de função logarítmica, vale ressaltar que levando em consideração a maneira como definimos esta função, trataremos como uma caracterização das funções logarítmicas o fato de que ela transforma um produto em uma soma.

Como dito anteriormente, a função logarítmica seja ela natural ou não, é biunívoca. Logo, faz sentido definirmos sua inversa (exponencial). Mas antes de definirmos a função inversa da logarítmica, precisamos de alguns conceitos iniciais.

Definição 4.15: Seja $x \in \mathbb{R}$, e^x é o único real positivo tal que seu logaritmo natural é igual a x .

Segundo Lima (2013), levando em consideração a definição acima, geometricamente o número real $y = e^x$ é o número tal que $\text{Área}(H_1^y) = x$. O que pode ser ilustrado pela figura 9.

Figura 9 - Significado do número e^x



Fonte: Adaptado de Lima (2013).

Dessa forma, faz sentido falar de e^x com x irracional, por exemplo, e^π é o número y tal que $\text{Área}(H_1^y) = \pi$. Um outro fato importante é que e^x pode ser definido em toda a reta. Portanto, com a correspondência $x \mapsto e^x$ fica definida a função que tem domínio em toda a reta. Definimos então a função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $y = e^x$, tal que essa função é a inversa da função logaritmo natural. Chamamos essa nova função de exponencial. Logo, se a função exponencial leva o real x no real positivo e^x , então a função \ln transforma e^x em x . Temos ainda que a função exponencial transforma $\ln y$ em y .

Teorema 4.16: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, então $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

Demonstração:

Já sabemos que $\ln(e^x \cdot e^y) = \ln e^x + \ln e^y = x + y$ (a última igualdade decorre diretamente da definição 4.15). Por outro lado, segue da mesma definição, que $\ln e^{x+y} = x + y$. Portanto, $\ln(e^x \cdot e^y) = \ln e^{x+y}$. Mas como \ln é uma bijeção, então $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. ■

Decorre do último teorema que para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. De fato, sabendo que $e^0 = 1$, temos que $e^{-x} \cdot e^x = e^{x-x} = e^0 = 1$, isto é, $e^{-x} \cdot e^x = 1$ ou ainda $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Teorema 4.17: A função exponencial de domínio nos reais e contradomínio em \mathbb{R}^+ dada por $y = e^x$ é crescente e sobrejetiva.

Demonstração:

Para provar que a função exponencial é sobrejetiva, consideremos $a \in \mathbb{R}^+$. Tem-se que $e^{\ln a} = a$. Portanto, a é imagem do número real $\ln a$ pela função exponencial, isto é, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}^+$, existe um número real tal que sua imagem pela exponencial é a , portanto, a exponencial é sobrejetiva.

Vamos provar agora que a exponencial é crescente. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x < y$. Temos que $x = \ln e^x$ e $y = \ln e^y$. Pela tricotomia, temos três possibilidades ao compararmos e^x e e^y :

- i) $e^x = e^y$, o que não pode ocorrer, pois a função exponencial é injetiva e, por hipótese $x \neq y$;
- ii) $e^x > e^y$, o que também não pode ocorrer, pois se ocorresse teríamos $\ln e^x > \ln e^y$ (já que \ln é crescente), isto é, $x > y$ (absurdo);

Portanto, só podemos ter $e^x < e^y$. Logo, o resultado segue. ■

Assim como fizemos nas funções logarítmicas, nas funções exponenciais também podemos considerar outras bases.

Definição 4.18: Sejam a um real positivo e x um real qualquer. O número real a^x é o único cujo logaritmo natural é igual a $x \ln a$. Em símbolos

$$\ln a^x = x \ln a.$$

Observe que essa definição é análoga à definição da exponencial de base e que definimos como $\ln e^x = x$, o que é equivalente a $\ln e^x = x \ln e$ (pois $\ln e = 1$). Tendo a definição de a^x , podemos calcular seu logaritmo numa base $b > 0$.

$$\log_b a^x = \frac{\ln a^x}{\ln b} = \frac{x \ln a}{\ln b} = x \log_b a.$$

Proposição 4.19: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Valem as seguintes igualdades:

- i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- ii) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Demonstração:

i) $\ln(a^x \cdot a^y) = \ln a^x + \ln a^y = x \ln a + y \ln a = (x + y) \ln a = \ln a^{x+y}$, isto é, $\ln(a^x \cdot a^y) = \ln a^{x+y}$ e como \ln é biunívoca, decorre que $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

ii) $\ln(a^x)^y = y \ln a^x = xy \ln a = \ln a^{xy}$, isto é, $\ln(a^x)^y = \ln a^{xy}$ e como \ln é biunívoca, decorre que $(a^x)^y = a^{xy}$. ■

Sobre a monotonicidade da função $x \mapsto a^x$, é importante destacar o seguinte resultado:

Proposição 4.20: Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$. Tem-se

- i) Quando $0 < a < 1$, a função é decrescente;
- ii) Quando $a > 1$, a função é crescente.

Demonstração:

i) Sejam, $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$. Como $0 < a < 1$, tem-se $\ln a < 0$. Logo,

$$x < y \Rightarrow x \ln a > y \ln a.$$

Como a exponencial de base e é crescente, então decorre da implicação anterior que $e^{x \ln a} > e^{y \ln a}$. Por outro lado, $a^x = e^{x \ln a}$ e $a^y = e^{y \ln a}$ (basta observar que $\ln a^x = \ln e^{x \ln a}$ e usar o fato de que \ln é injetiva e o mesmo vale para $\ln a^y = \ln e^{y \ln a}$). Portanto, $a^x > a^y$ concluindo que a função é decrescente.

ii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $x < y$. Como $a > 1$, então $\ln a > 0$. Logo,

$$x < y \Rightarrow x \ln a < y \ln a \Rightarrow e^{x \ln a} < e^{y \ln a} \Rightarrow a^x < a^y.$$

Portanto, a função é crescente. ■

Para terminar a parte teórica do capítulo vamos enunciar e demonstrar alguns importantes resultados a respeito das funções exponenciais, tais resultados podem ser encontrados em Lima (2013). O último merece um destaque, pois relaciona essas funções com as progressões aritméticas e geométricas e terá grande importância para as sugestões das soluções dos problemas propostos neste capítulo. Contudo, antes de mostrarmos tais resultados vamos provar um Lema (que será importante na demonstração do Teorema 4.22), tal lema nos diz que dado um $a \in \mathbb{R}^+$ ($a \neq 1$), as potências de a com expoente racional se espalham por toda a reta, isto é, pode-se tomar um intervalo tão pequeno quanto se queira que mesmo assim alguma potência de a com expoente racional pertencerá a esse intervalo. É importante ressaltar que a demonstração deste resultado será escrita nos moldes da prova que pode ser encontrada em Lima (2013).

Lema 4.21: Dado um real $a \in \mathbb{R}^+$, com $a \neq 1$, então em qualquer intervalo de \mathbb{R}^+ existe alguma potência a^r , onde $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Consideremos os reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ com $\alpha < \beta$. Devemos garantir que existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r \in [\alpha, \beta]$. Vamos supor a, β maiores do que 1 (os demais casos são análogos, basta que se tenha o cuidado com os sinais das desigualdades). As potências de a com expoente natural crescem indefinidamente, isto é, dado um $k \in \mathbb{R}$, então existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $a^t > k$. Logo, existem naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n &\Leftrightarrow 1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^M} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < a^M \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Daí, para qualquer $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $\frac{m}{n} \leq M$ vale:

$$0 < a^{\frac{m}{n}} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha,$$

onde, $1, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^M$ são extremos de intervalos consecutivos e todos esses intervalos têm comprimento menor do que o comprimento do intervalo $[\alpha, \beta]$. Além disso, como $\alpha < \beta < a^M$, decorre que $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$. Portanto, pelo menos uma dessas potências (um dos extremos $a^{\frac{m}{n}}$, com $\frac{m}{n} \leq M$) deve pertencer ao intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

Teorema 4.22 (Teorema de caracterização da função exponencial)

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função monótona e injetiva, então as afirmações a seguir são equivalentes:

- i) $f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- ii) $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- iii) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Devemos mostrar que $i) \rightarrow ii) \rightarrow iii) \rightarrow iv)$. A primeira implicação será dividida em duas partes. Primeiro mostraremos que vale para $x \in \mathbb{Q}$ e depois para $x \notin \mathbb{Q}$. Consideremos $r \in \mathbb{Q}$, com $r = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$). Como $nr = m$, então

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

isto é, $f(rx)^n = f(x)^m$, o que é equivalente a $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$. Logo, fazendo $a = f(1)$, tem-se $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$. Portanto, o resultado segue para $x \in \mathbb{Q}$.

Agora, vamos supor que f seja crescente (se for decrescente o raciocínio é análogo). Logo, $1 = f(0) < f(1) = a$, isto é, $a > 1$. Suponha que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$, tal x deve ser irracional, pois já provamos que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

\mathbb{Q} . Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $f(x) < a^x$. Logo, decorre do lema anterior, que existe um $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < a^r < a^x$, isto é, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, $f(x) < f(r) \Rightarrow x < r$ e $a^r < a^x \Rightarrow r < x$, o que é um absurdo.

ii) \rightarrow iii)

$$\text{Temos que } f(x + y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x) \cdot f(y).$$

iii) \rightarrow i)

Consideraremos primeiramente $n > 0$. Mostraremos, por indução, que $f(nx) = f(x)^n$. Para $n = 2$, temos $f(2x) = f(x + x) = f(x) \cdot f(x) = f(x)^2$. Logo, o resultado é válido para $n = 2$. Suponha agora que a igualdade também vale para algum $n \geq 2$, isto é, que para algum $n \geq 2$ tenha-se $f(nx) = f(x)^n$. Devemos mostrar que a igualdade também é válida para $n + 1$. De fato, temos que

$$f((n + 1)x) = f(nx + x) = f(nx) \cdot f(x) = f(x)^n \cdot f(x) = f(x)^{n+1},$$

onde na penúltima igualdade utilizamos a hipótese de indução. Portanto, segue por indução, que se $n \in \mathbb{N}$, então $f(nx) = f(x)^n$.

Por outro lado, veja que

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Perceba que a última equivalência acima é, de fato, satisfeita, pois $f(0) \neq 0$ (tendo em vista que já foi mencionado que a imagem da função exponencial é o conjunto dos reais positivos, logo podemos dividir os dois membros da igualdade por $f(0)$). Deste modo, decorre que:

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x) = 1 \Leftrightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Logo, dado $n > 0$, tem-se $-n < 0$ e $f(-nx) = \frac{1}{f(nx)} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}$.

Portanto, $f(nx) = f(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. ■

Lima (2013) cita também um caso particular das funções exponenciais, que são conhecidas como funções do tipo exponencial e que surgem de maneira muito natural em situações de modelagem. Diz-se que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é do tipo

exponencial se f é dada por $f(x) = ba^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde a e b são números reais positivos.

A respeito da relação entre funções exponenciais e progressões (aritméticas e geométricas), temos os dois próximos resultados. A demonstração do segundo resultado (Proposição 4.24) terá como base a ideia utilizada por Lima (2013). É importante ressaltar que, algumas vezes, utilizaremos a abreviação PG ao invés de escrever a expressão progressão geométrica.

Proposição 4.23: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = ba^x$. Se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ é uma PA de razão r , então $f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, f(x_3) = ba^{x_3}, \dots, f(x_n) = ba^{x_n}, \dots$ É uma PG de razão a^r .

Demonstração:

Usaremos indução sobre n para provar este resultado. Faremos o caso base da indução para $n = 3$. Assim, para $n = 3$, vamos considerar a progressão aritmética x_1, x_2, x_3 de razão r , isto é, $x_2 = x_1 + r$ e $x_3 = x_2 + r$. Temos que:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ba^{x_1}; \\ f(x_2) &= ba^{x_1+r} = ba^{x_1}a^r = f(x_1) \cdot a^r; \\ f(x_3) &= ba^{x_2+r} = ba^{x_2}a^r = f(x_2) \cdot a^r. \end{aligned}$$

Logo, $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ é uma PG de razão a^r . Agora, suponha que a propriedade seja válida para algum $n \geq 3$, isto é, se $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é uma PA de razão r , então $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ é uma PG de razão a^r . Consideremos então a PA $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$ de razão r , então $x_{n+1} = x_n + r$, daí temos que:

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+r} = ba^{x_n}a^r = f(x_n) \cdot a^r.$$

Mas, decorre da hipótese de indução, que $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ é certamente uma PG de razão a^r , portanto, a partir da igualdade acima concluímos que $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(x_{n+1})$ é uma PG de razão a^r . Logo, o resultado segue por indução. ■

Teorema 4.24: Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona e injetiva que transforma qualquer P.A. $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ numa P.G. $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$. Pondo $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ tem-se $f(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

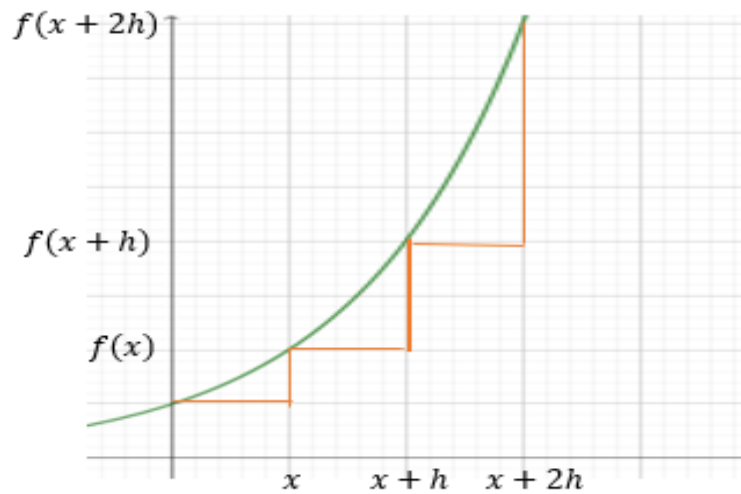
Demonstração:

Tome $b = f(0)$. Então, a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$ é monótona, injetiva e também transforma uma progressão aritmética numa progressão geométrica (pois permanece com as mesmas propriedades da função f , visto que g é apenas o resultado do produto de f por uma constante). Além disso, tem-se $g(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$. Agora vejamos que $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, a sequência $-x, 0, x$ é uma P.A, logo, $g(-x), g(0) = 1, g(x)$ é uma P.G (pois g tem essa propriedade) de razão $g(x)$. Logo, $g(x) = \frac{1}{g(-x)}$ que é o mesmo que $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$. Consideremos agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, então a sequência $0, x, 2x, \dots, nx$ é uma P.A e $g(0) = 1, g(x), \dots, g(nx), \dots$ É uma progressão geométrica de razão $g(x)$ cujo $(n + 1)$ -ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se tomarmos $-n$ como sendo um inteiro negativo, teremos $g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$. Logo, $g(nx) = g(x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$ e, dessa forma, decorre do teorema 4.22 que, pondo $a = g(1)$, tem-se $g(x) = a^x$ e, portanto, concluímos que:

$$g(x) = a^x = \frac{f(x)}{b} \Rightarrow f(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

A partir desta propriedade podemos ter a seguinte interpretação geométrica a respeito do comportamento do gráfico da função exponencial: a cada salto h dado no eixo OX é dado um salto (para cima ou para baixo, a depender se a função é crescente ou decrescente) no eixo OY , de tal forma que o “comprimento do salto” dado em OY é proporcional ao comprimento do segmento (contido em OY) referente à imagem do ponto anterior. Vejamos a figura 12:

Figura 10 - Gráfico da exponencial crescente



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em outras palavras, olhando para a figura 10, podemos dizer que o comprimento do segmento com extremidades em $f(x)$ e $f(x+h)$ (contido no eixo OY) é proporcional ao comprimento do segmento com extremidades em 0 e $f(x)$ (também contido no eixo OY). Da mesma forma, o comprimento do segmento com extremidades em $f(x+h)$ e $f(x+2h)$ (contido no eixo OY) é proporcional ao comprimento do segmento com extremidades em 0 e $f(x+h)$ (também contido no eixo OY), e assim sucessivamente. Ou seja, estes saltos proporcionais no eixo OY vão ocorrendo a medida que forem dados saltos de mesmo comprimento no eixo OX .

Esta última propriedade das funções exponenciais e a maneira como definimos logaritmos serão informações de extrema importância para decidirmos qual função utilizar na modelagem dos problemas que serão abordados neste capítulo.

4.2 Problemas e soluções

Problema 4.1: Sabe-se que a meia vida é o tempo necessário para que uma grandeza atinja metade de seu valor inicial. No caso de medicamentos, meia vida é o tempo necessário para que o organismo que ingeriu o medicamento contenha apenas metade da massa inicial do medicamento. A partir disso, vamos propor o seguinte problema:

A bula de determinado remédio informa que sua meia vida é de 6 horas. Suponha que um paciente ingeriu 120 mg desta medicação. Responda:

- a) Qual função deve ser utilizada para expressar a quantidade de medicação no organismo em função do tempo transcorrido?
- b) Qual a quantidade de medicação presente no organismo 9 horas após a ingestão do remédio? E x horas após a ingestão?

Solução:

a) Inicialmente vamos observar o que acontece com a massa do remédio ao longo de algumas horas:

$$f(0) = 120;$$

$$f(6) = 60;$$

$$f(12) = 30;$$

$$f(18) = 15.$$

Percebemos que a função que devemos encontrar para modelar o problema transforma a P.A (0, 6, 12, 18) na P.G decrescente (120, 60, 30, 15). Como vimos, a única função que possui tal propriedade é a função exponencial da forma $f(x) = ba^x$, onde $b = f(0)$.

b) Utilizando a propriedade mencionada a respeito das funções exponenciais, é possível descobrir tal quantidade mesmo sem a lei de formação da função. Ora, sabemos que $f(6), f(9), f(12)$ formam a P.G (60, x , 30), logo,

$$\frac{30}{x} = \frac{x}{60} \Leftrightarrow x^2 = 1800 \Leftrightarrow x = 30\sqrt{2} \cong 42 \text{ mg}.$$

É bastante provável que um aluno mais inexperiente pensasse que bastava calcular a média aritmética dos valores de $f(6)$ e $f(12)$ que seria 45 mg. Mas isso só aconteceria se tal função fosse afim, pois transforma P.A em P.A (como já foi provado) e possui um crescimento ou decrescimento linear. Além disso é importante ressaltar que mesmo intuitivamente faz bastante sentido imaginar que a quantidade de medicação fosse menor do que 45 mg, visto que a variação a variação do primeiro intervalo de 3 horas deve ser maior do que a variação do segundo intervalo.

Para calcular a quantidade do medicamento que ainda resta no organismo x horas após a ingestão usaremos o fato de que $f(x) = 120a^x$ e que $f(6) = 60$. Então

$$120a^6 = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

$$\text{Portanto, obtemos } f(x) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}.$$

O próximo problema pode ser encontrado em Lima (2013). Contudo, faremos pequenas adaptações e colocaremos uma solução diferente da que pode ser encontrada no mesmo livro, pois nosso foco é a utilização da propriedade provada no **Teorema 4.22**.

Problema 4.24: Observações mostram que, após períodos de mesma duração, a população da terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que a população no ano de 1956 era de 2,68 bilhões e em 1972 era de 3,78 bilhões. Determine: (a) A população estimada para o ano de 2012; (b) O tempo necessário para que a população do planeta dobre de valor; (c) Em que ano a população era de 1 bilhão.

Solução:

Para responder às três perguntas do problema é essencial que tenhamos uma função que determine a população do planeta em função do ano (tempo). O trecho do enunciado que afirma “...após períodos de mesma duração, a população fica multiplicada pelo mesmo fator” é equivalente a dizer que ao tomarmos períodos de tempo em progressão aritmética, a população aumenta em progressão geométrica.

Portanto, a função que modela o problema deve ser uma função do tipo exponencial, isto é, queremos encontrar uma função da forma $P(t) = ba^t$, onde $P(t)$ é a população do planeta t anos após 1956. Logo, o ano de 1956 será nosso ponto de partida, ou ano zero. Do enunciado temos que $P(0) = 2,68$ e $P(16) = 3,78$ (observe que $1972 = 1956 + 16$). Decorre de $P(0) = 2,68$, que $P(t) = 2,68a^t$ e de $P(16) = 3,78$ obtemos:

$$2,68a^{16} = 3,78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{16} = 1,41 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = (1,41)^{\frac{1}{16}}.$$

Então, $P(t) = 2,68 \cdot (1,41)^{\frac{t}{16}}$. Para determinar a população em 2012, basta perceber que $2012 = 1956 + 56$, logo a população do planeta em 2012 era de $P(56) = 2,68 \cdot (1,41)^{\frac{56}{16}} = 2,68 \cdot (1,41)^{3,5} \cong 8,9$ (resposta em bilhões). Para responder ao item b, vamos considerar o nosso ponto de partida, nesse caso temos que $P(0) = 2,68$ e queremos encontrar t tal que $P(t) = 5,36$, ou seja,

$$2,68 \cdot (1,41)^{\frac{t}{16}} = 5,36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,41)^{\frac{t}{16}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(1,41)^{\frac{t}{16}} = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{16} \log 1,41 = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,149t = 16 \cdot 0,301 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cong 32,33.$$

Isto é, a população do planeta dobra a cada 32 anos e 4 meses (aproximadamente). E por fim, para responder ao item (c), basta resolver a equação:

$$2,68 \cdot (1,41)^{\frac{t}{16}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,68 \cdot (1,41)^{\frac{t}{16}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,41)^{\frac{t}{16}} = 0,373 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(1,41)^{\frac{t}{16}} = \log 0,373 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{16} \log 1,41 = \log 0,373 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,149t = -0,428 \cdot 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cong -46.$$

Obviamente, a população era de 1 bilhão antes do ano 1956 (que é nosso ano zero), por isso obtemos o tempo negativo. Logo, a população era de 1 bilhão, no ano de $1956 - 46 = 1910$.

Uma observação importante é que, por convenção, escrevemos $\log a$ (sem mencionar a base) para representar o logaritmo do número a na base 10, foi isso que utilizamos no último problema.

Nota-se que os dois problemas acima foram elaborados de maneira a estimular o aluno a descobrir adequadamente a função que modela a situação, fazendo com que facilite a percepção de que as características de alguns fenômenos levam naturalmente a determinada função por conta de suas propriedades, ou seja, não precisou de um problema que já coloca em seu enunciado a função que descreve o fenômeno. Obviamente nem sempre é possível elaborar os exercícios somente dessa forma, mas é importante que este tipo de problema seja utilizado algumas vezes para que o aluno adquira a noção de que as funções exponenciais e os logaritmos naturais surgem de modo espontâneo em questões onde o crescimento ou decréscimo de uma grandeza ocorre proporcionalmente ao valor dessa grandeza num dado instante.

Desintegração radioativa:

Um fato interessante sobre o primeiro problema deste capítulo é que ele é um caso particular do que conhecemos por desintegração radioativa. No problema proposto acima obtivemos um modelo matemático que descreve essa desintegração, contudo é possível obter um modelo ainda mais próximo da realidade. Conforme afirma Lima (2013, p.122):

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui (aumentando, conseqüentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante. A constante de proporcionalidade α é determinada experimentalmente. Cada substância radioativa tem sua constante de desintegração α .

Vamos considerar um corpo de uma substância radioativa cuja massa é M_0 e a taxa de desintegração é α . Procedendo conforme a ideia encontrada em Lima

(2013), vamos supor que a desintegração dessa substância aconteça a cada segundo, assim, no fim do primeiro segundo de observação sua massa M_1 será:

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1 - \alpha).$$

Dois segundos após o início da observação, teremos:

$$M_2 = M_1 - \alpha M_1 = M_1(1 - \alpha) = M_0(1 - \alpha)^2.$$

Desse modo, ao final de t segundos, a massa do corpo será de

$$M_t = M_0(1 - \alpha)^t.$$

Contudo, a desintegração ocorre de forma contínua, então se quisermos um modelo mais aproximado devemos particionar cada segundo. Para isso, vamos considerar um natural n e vamos supor que a desintegração ocorre em cada intervalo de $\frac{1}{n}$ de segundo. Logo, passado a primeira fração de tempo, a massa do corpo será:

$$M_1 = M_0 - \frac{\alpha}{n} M_0 = M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right),$$

e prosseguindo como acima, teremos que a massa após 1 segundo, será:

$$M_n = M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Assim, fazendo n tender para o infinito, isto é, dividindo o intervalo $[0, 1]$ em um número n cada vez maior, teremos:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Prosseguindo com esse raciocínio, a massa após t segundos será de

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

É possível calcular a taxa de desintegração de uma substância radioativa, para isso basta conhecer a meia vida de tal substância. Conhecendo a meia vida t_0 de uma substância e utilizando a equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M_0 &= M_0 \cdot e^{-\alpha t_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= e^{-\alpha t_0},\end{aligned}$$

assim, aplicando logaritmos, obtemos:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -\alpha t_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln 1 - \ln 2 &= -\alpha t_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\ln 2 &= -\alpha t_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\ln 2}{t_0}.\end{aligned}$$

Reciprocamente, decorre desta última igualdade que é possível calcular a meia vida de uma substância a partir da sua taxa de desintegração:

$$t_0 = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Vamos responder novamente o Problema 4.1, mas agora utilizando a função $M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$.

Problema 4.3: A bula de determinado remédio informa que sua meia vida é de 6 horas. Suponha que um paciente ingeriu 120 mg desta medicação. Qual a quantidade de medicação presente no organismo 9 horas após a ingestão do remédio?

Solução:

Já sabemos que tal fenômeno deve ser modelado pela função do tipo exponencial dada por $M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$. Então precisamos encontrar o valor de M_0 (massa inicial, nesse caso, 120) e a taxa de desintegração α . Como vimos, temos que

$$\alpha = \frac{\ln 2}{6} = \frac{0,693}{6} = 0,116,$$

logo, $M(t) = 120 \cdot e^{-0,116t}$. Para calcular a quantidade de remédio no organismo 9 horas após a ingestão, basta calcular $M(9)$:

$$M(9) = 120 \cdot e^{-0,116 \cdot 9} = 120 \cdot e^{-1,039} \cong 42,48 \text{ mg.}$$

O resultado encontrado foi bem próximo do resultado encontrado na primeira resolução, mas neste caso é possível obter uma aproximação mais fiel da realidade. Contudo, a nível de ensino médio a primeira resolução cumpre bem seu objetivo de passar para o aluno que fenômenos desse tipo são modelados por funções do tipo exponencial.

Existe uma enormidade de situações que recaem em funções logarítmicas e exponenciais e para terminar este capítulo colocaremos aqui uma curiosidade a respeito de como é medida a intensidade de terremotos.

Escala Richter

A escala Richter mede a intensidade de um terremoto e foi criada em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg. Nessa escala, a intensidade I varia de $I = 0$ até $I = 9$ e, segundo Zavala, Almeida e Mesquita (2013), é dada pela fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \log \left(\frac{E}{E_0} \right),$$

em que E é a energia liberada no terremoto medida em quilowatt-hora (kWh) e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3} kWh$. É fácil constatar, por exemplo, que a energia liberada por um terremoto de intensidade 8 na escala Richter libera uma energia de $7 \cdot 10^9 kWh$ e que aumentando uma unidade da intensidade do terremoto, a energia liberada fica multiplicada por $10\sqrt{10}$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa, que foi produzida a partir de uma revisão de literatura, atingiu seu objetivo, pois em cada problema proposto ficou destacado nas suas soluções quais propriedades devem ser identificadas a fim de determinar a função que modele o problema, fazendo com que se compreenda os conceitos matemáticos presentes em cada situação a ser modelada.

Ressaltou-se a importância de o aluno perceber que não se pode escolher de modo arbitrário uma função para modelar determinada situação. Os problemas foram elaborados de modo a estimular os estudantes e professores a utilizarem as propriedades e teoremas citados e demonstrados nesta pesquisa para encontrar a função modeladora em cada situação. Assim, ressaltamos que essa pesquisa, além de trazer o conhecimento das propriedades que caracterizam as funções (afim, quadrática, logarítmica e exponencial), visa auxiliar o professor que deseja trabalhar a modelagem matemática em sala de aula de maneira mais precisa. Sendo esse auxílio, o motivo para ter sido apresentado, em cada capítulo, uma lista de situações-problemas e sugestões de solução.

O capítulo 2 destacou que situações que tratam de crescimento ou decréscimo linear, onde uma grandeza em progressão aritmética é transformada em outra progressão aritmética, devem ser modeladas por função afim. No 3, vimos que as funções quadráticas são as únicas que transformam uma progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem. E, finalmente, no último capítulo, ficou destacado que as funções exponenciais e os logaritmos aparecem naturalmente em situações onde o crescimento ou o decréscimo de determinada grandeza se dá proporcionalmente ao valor dessa grandeza em um dado instante.

Por fim, acreditamos que esta dissertação, assim como, qualquer pesquisa que aborde a matemática na educação, pode trazer diversos benefícios e possibilidades para o professor e para a educação do nosso país, além de fomentar debates sobre a realidade e a real finalidade da educação, com o objetivo de que ocorra um ato transformador do processo de ensino e aprendizagem, em particular, da matemática.

REFERÊNCIAS

- FERRARO, N. G.; SOARES, P. A.T.; FOGO, R. **Física Básica**: volume único. 3. ed. São Paulo, 2009.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do Ensino Médio**. [S.l.]: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática).
- LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).
- LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**: volume 1. [S.l.]: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1982.
- MORGADO, A.C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- PECORARI, M. **Logaritmos e Aplicações**. 2013. 145f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro: [s.n.],2013.
- ZAVALA, A. B. P.; DE ALMEIDA, A. O.; MESQUITA, K. A.P.C. **Modelagem Matemática Aplicada a Fenômenos Exponenciais e Logarítmicos**. Londrina: Universidade Federal do Paraná, 2013.