UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TIAGO NOBRE DO NASCIMENTO

ESTUDO DE DESIGUALDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS

FORTALEZA – CEARÁ
2023

TIAGO NOBRE DO NASCIMENTO

ESTUDO DE DESIGUALDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza.

FORTALEZA – CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Nascimento, Tiago Nobre do.
Estudo de desigualdades na resolução de problemas olímpicos [recurso eletrônico] / Tiago Nobre do Nascimento. - 2023.
63 f. : il.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza..
1. desigualdades. 2. resolução de problemas. 3. olimpíadas. . I. Título.

TIAGO NOBRE DO NASCIMENTO

ESTUDO DE DESIGUALDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS OLÍMPICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 23 de maio de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Léo Ivo da Silva Souza

Prof. Dr. Leo Ivo da Silva Souza (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Diego Sousa Rodrigues (Membro interno ao programa)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Membro externo ao programa)
Universidade Federal do Ceará – UFC

À minha esposa Lainara Nobre e ao meu filho Benício. Aos meus pais: José Eudo e Francineide Nobre.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois sem ele nada seria possível.

Aos meus pais, por todo empenho e dedicação ao longo de toda a minha trajetória.

A minha esposa e ao meu filho, por todo amor e compreensão nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos do PROFMAT, por todo companheirismo durante essa difícil trajetória.

Aos meus professores de PROFMAT, por todo empenho e dedicação prestados ao longo desses difíceis dois anos.

Ao meu professor orientador Leo Ivo, pelas valiosas colaborações e sugestões para a construção desse trabalho.

“Existem muitas hipóteses em ciência que estão erradas. Isso é perfeitamente aceitável, eles são a abertura para achar as que estão certas”.

(Carl Sagan)

RESUMO

O corrente projeto possui, como principal intuito, o estudo e aplicação de desigualdades bem conhecidas da Matemática para a resolução de problemas em diversas olimpíadas. Desse modo, conceitos básicos de corpos e ordenação serão introduzidos e particularizados para os números reais, de forma que se possua o alicerce necessário para desenvolvimento da teoria, demonstrando-se alguns resultados preliminares em ambos os assuntos. Logo após, as desigualdades e suas condições de igualdade que iremos abordar serão enunciadas, juntamente com suas devidas provas, fazendo-se uso do que fora demonstrado previamente e do que é falado no apêndice. Por fim, utilizaremos tais demonstrações para a resolução de ricos problemas de desigualdades de olimpíadas matemáticas tanto brasileiras quanto do mundo afora. Assim concluímos o presente projeto com alguns comentários sobre o desenvolvimento que aqui foi feito, tendo-se esperança de que tudo tenha sido explicado da maneira mais compreensível possível e que sirva de exemplo para alunos e professores aprenderem e ensinarem.

Palavras-chave: desigualdades; resolução de problemas; olimpíadas.

ABSTRACT

The current project has, as its main aim, the study and application of well-known inequalities in Mathematics for problem solving in many olympiads. For such, basic concepts of fields and ordering will be introduced and particularized to the real numbers, in such a way there's the necessary foundation for developing the theory, proving some preliminary results on both subjects. Right after, the inequalities and their equality conditions which we'll approach will be stated, alongside their due proofs, making use of what was demonstrated before and what's talked about on appendix. Finally, we'll use such proofs to solve rich inequality problems of olympiads both from Brazil and around the world. We hence conclude the present project with some comments about the development that has been done here, hoping everything was explained in the most understandable way possible and that it serves as example for students and teachers learn and teach.

Keywords: inequalities; problem solving; olympiads.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O problema que iremos abordar advém da pergunta “Como resolver problemas de desigualdades clássicas em olimpíadas?”. Desse questionamento, tem-se a problemática representada por como vamos deduzir tais “desigualdades clássicas” e como elas seriam utilizadas para resolver problemas de olimpíadas.

A justificativa a qual se deu início a este projeto é devido à minha percepção, como professor que ministra aula de ensino médio, ao pouco uso de desigualdades nessas turmas, onde, no geral, não se é ensinado ou abordado tal conteúdo nos livros escolhidos. No entanto, tal assunto é bastante importante em olimpíadas matemáticas, servindo tanto para questões puramente de desigualdades como para problemas de possivelmente outros conteúdos como geometria ou funções. Por isso, tive motivação para abordar este assunto no presente projeto de modo a enriquecer as fontes de estudo que alunos possam ter.

Desse modo, tem-se como objetivo geral deste projeto a enunciação, prova e aplicação das desigualdades de Cauchy-Schwarz, das médias, do método de homogeneização, teorema do rearranjo juntamente com as famosas desigualdades de Jensen e Young. Como objetivos específicos, iremos primeiramente conceituar as ideias de corpo e ordenação para os números reais, provando alguns resultados básicos. Em segundo lugar, iremos provar cada uma das desigualdades, acima citadas e em sequência. Por fim, iremos aplicar os novos conhecimentos obtidos para a resolução de questões de olimpíadas.

A metodologia aqui utilizada é concentrada na pesquisa bibliográfica em suas referências, a qual tem foco quantitativo pelo intuito de apresentar e provar resultados de corpos e de ordenação nos reais para aplicarmos nas provas das desigualdades clássicas, de modo a utilizá-las na resolução de problemas. Para tal, fora-se feito consultas em diversas fontes para dar o alicerce necessário para o aprendizado das desigualdades aqui apresentadas.

O percurso metodológico foi-se feito pela apresentação das propriedades que definem um corpo, enunciando e provando alguns resultados gerais a partir delas e, daí, comentaremos sobre os números reais, de modo a, logo após, irmos para o estudo da ordenação em tal conjunto para termos a base precisa de modo a entender os próximos capítulos. No terceiro capítulo, iremos então provar as desigualdades faladas anteriormente e mostraremos o método de homogeneização. Por conseguinte, no quarto capítulo iremos aplicar tudo que foi aprendido para resolver questões de desigualdades, as quais iremos notar que não são meras aplicações diretas das desigualdades demonstradas, mas será necessária devida manipulação das variáveis em questão para que recaia em algum caso conhecido das desigualdades clássicas. Por fim, no quinto capítulo iremos concluir o presente projeto comentando em que direção um aluno curioso pode estudar mais assuntos matemáticos para descobrir e aprender outras desigualdades não menos importantes que as apresentadas aqui.

2 NÚMEROS REAIS E SUA RELAÇÃO DE DESIGUALDADE

De início, no próximo subtópico, iremos fazer uma breve discussão sobre o que são desigualdades e o porquê de querermos estudar tal assunto. Motivos disso não se limitam apenas pelo seu conteúdo interessante de ser estudado por si só, mas também pelas suas aplicações em diversas áreas tanto da matemática pura como da matemática aplicada (como em Física ou Computação). No entanto, iremos focar na primeira categoria para a resolução de problemas olímpicos.

Logo após, para falarmos de desigualdades especificamente no conjunto dos números reais, primeiro precisamos nos ater às propriedades de corpo que tal conjunto possui para depois discutirmos a questão de sua ordenação.

Com isso em mente, os próximos subtópicos após o primeiro abordarão as propriedades básicas dos reais no contexto de corpo e algumas de suas consequências. Por fim, falaremos da ordenação nos reais que geram as propriedades mais básicas de desigualdades.

Toda a análise destes próximos subtópicos foi baseada em (HEFEZ; VILLELA, 2018) e em (LIMA; ELON, 1993).

2.1 Uma breve discussão sobre o uso de desigualdades

A ideia de desigualdade está intimamente atrelada a noção de ordenação, isto é, intuitivamente, queremos comparar dois objetos e desejamos saber qual é “o maior” ou “o menor” dentre eles ou, possivelmente, conhecer uma condição advinda da situação em que eles sejam iguais. Essa percepção vem a depender bastante do contexto em que está sendo tratada, mas a intuição devida aos reais nos ajuda a compreender melhor boa parte desses cenários.

Algumas motivações as quais podem levar pessoas a estudarem tal assunto seriam, por exemplo, a necessidade de minimizar ou maximizar certa grandeza que é um número real, o desejo de se adquirir uma cota inferior ou superior para certa sequência ou função ou, pela ocasião de ter ocorrido certa igualdade oportuna, o uso de desigualdades para aplicar uma “condição de igualdade” e adquirir mais informações sobre o problema em mãos.

No primeiro caso, entrariam situações como a de maximizar o lucro de uma empresa, minimizar os prejuízos monetários advindos de escolhas empresariais ou escolher um produto que possui melhor custo-benefício.

Além de tais exemplos, há problemas de Física que desejam ter conhecimento de “casos extremos” ou “situações limite” tendo-se certas condições a serem satisfeitas. Dessa forma, com o uso das devidas desigualdades, pode-se encontrar a desejada grandeza (posição, velocidade, energia, momentum etc) maximizada ou minimizada.

Na segunda ocasião, com os dados do problema, desejamos conseguir cotas inferior e/ou superior de funções ou sequências nos reais, pois há propriedades do conjunto dos números reais que nos garantem a maior cota inferior ou a menor cota superior para tais entidades ou há resultados que só são aplicados a sequências (ou funções) limitadas, isto é, que possuem tanto cota inferior quanto superior. Com tais ferramentas, podemos resolver a questão.

Como exemplo mais aplicado, podemos citar o uso da ideia de funções assintóticas para limitar superior ou inferiormente o tempo de execução de um programa, utilizado na Programação, para um número muito grande de testes. Isso é feito de modo a termos noção de qual programa irá realizar certa tarefa de maneira mais eficiente, isto é, em menos tempo.

Por fim, a terceira situação ocorre principalmente em questões que temos uma ou várias igualdades dadas e se é pedido informação sobre as variáveis que estão envolvidas. Por vezes, ao resolver esse tipo de problema sem desigualdades, temos a impressão de que está faltando algum dado na questão para se deduzir algo proveitoso para sua resolução.

No entanto, com o uso de desigualdades e tendo-se em mãos as equações dadas, podemos aplicar a condição de igualdade da devida desigualdade, isto é, a condição sobre as variáveis a qual a igualdade ocorre em tal desigualdade, adquirindo-se assim resultados que dificilmente seriam conseguidos sem se fazer uso de tal ferramenta.

Por fim, além de todas as situações citadas, há inclusive problemas puramente de desigualdades. Isto é, questões que pedem para provar que certa desigualdade é verdadeira sob certas condições e, para tais, podemos usar tanto desigualdades mais conhecidas como outras ferramentas para prová-las.

2.2 O corpo dos números reais

De início, para falarmos o que seria um corpo, necessitamos definir inicialmente o que significa uma operação num conjunto.

Assim, temos as primeiras definições:

Definição 2.1: Dados conjuntos X e Y quaisquer, definimos o produto cartesiano de X por Y como o conjunto denotado por $X \times Y$ cujos elementos são os pares ordenados (x, y), onde $x \in X$ e $y \in Y$.

Assim, sendo F um conjunto, $F \times F$ simboliza o produto cartesiano de F por ele mesmo e, a partir de tal conjunto, podemos definir o que seria uma operação em F:

Definição 2.2: Uma operação $(\cdot)$ em F é uma função

$$(\cdot): F \times F \to F$$

$$(x, y) \to x \cdot y$$

Observação: Muitas vezes, se a operação for denotada por $(\cdot)$, em vez de escrevermos $x \cdot y$, podemos simplesmente escrever xy quando não se há perigo de confusão das operações.

Com tal definição em mãos, sendo F um conjunto que possui duas operações $(+)$ e $(\cdot)$ chamadas soma e produto, respectivamente, F será chamado de *corpo* se suas operações satisfizerem as seguintes propriedades:

S1) A operação de soma é comutativa, isto é, dados $a, b \in F$ quaisquer, temos:

$$a + b = b + a$$

S2) A operação de soma é associativa, isto é, dados $a, b, c \in F$ quaisquer, temos:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

S3) A operação de soma possui elemento neutro, isto é, existe elemento $0 \in F$ tal que, para qualquer $a \in F$, temos:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

S4) A operação de soma é tal que, para cada $a \in F$ existe $a' \in F$, chamado de simétrico de a, tal que

$$a + a' = a' + a = 0$$

P1) A operação de produto é comutativa, isto é, dados $a, b \in F$ quaisquer, temos:

$$ab = ba$$

P2) A operação de produto é associativa, isto é, dados $a, b, c \in F$ quaisquer, temos:

$$(ab)c = a(bc)$$

P3) A operação de produto possui elemento neutro, distinto do elemento neutro da soma, isto é, existe elemento $1 \in F$, com $1 \neq 0$ tal que, para qualquer $a \in F$, temos:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

P4) A operação de produto é tal que, para cada $b \in F \backslash \{0\}$, existe $b' \in F$, chamado de inverso de b, tal que

$$bb' = b'b = 1$$

D) A operação de produto é distributiva sobre a operação de soma, isto é, dados $a, b, c \in F$ quaisquer, temos:

$$a(b + c) = ab + ac;$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

Observação: Note que algumas das igualdades acimas poderiam ser descartadas devido à (S1) e a (P1), mas as mantemos para evitarmos a necessidade de citarmos tais ocasiões fora das nomeadas propriedades acima.

Com tais propriedades em mente, podemos provas os seguintes lemas:

Lema 2.1: Os a' e b' citados, respectivamente, nas propriedades (S4) e (P4) são únicos e são representados por $-a$ e b^{-1} (ou $1/b$)

Prova:

Vamos primeiro provar a unicidade de a'. Suponha que exista a' e a'' tais que temos $a + a' = a' + a = 0$ e $a + a'' = a'' + a = 0$. Assim,

$$a'' = a'' + 0 = a'' + (a + a') = (a'' + a) + a' = 0 + a' = a'$$

Onde utilizamos (S3) na primeira igualdade, uma das igualdades da suposição na segunda igualdade, (S2) na terceira igualdade, novamente uma das igualdades da suposição na quarta igualdade e, por fim, na quinta igualdade utilizamos de novo (S3).

Para a unicidade de b', podemos fazer um processo extremamente semelhante ao acima, mas utilizando o 1 no lugar de 0 e o produto no lugar da soma. Assim, sendo b' e b'' tais que $bb' = b'b = 1$ e $bb'' = b''b = 1$, temos:

$$b'' = b'' \cdot 1 = b''(bb') = (b''b)b' = 1 \cdot b' = b'$$

Dessa maneira, vemos que a' e b' descritos nas propriedades de corpo são únicos, logo podemos dar as notações citadas no enunciado do lema.

Observação: Quando fazemos a soma de um número a com o simétrico $-b$ de algum número b, podemos escrever $a + (-b)$ como $a - b$.

Lema 2.2: Os elementos 0 e 1 são únicos em F.

Prova:

Suponha que existam $0'$ e $1'$ que satisfaçam (S3) e (P3) respectivamente. Dessa maneira, nós temos:

$$0' = 0' + 0 = 0$$

$$1' = 1' \cdot 1 = 1$$

Onde nas primeiras 2 igualdades utilizamos (S3) aplicado primeiro com 0 e depois com $0'$ e nas duas últimas utilizamos (P3) aplicado primeiro com 1 e depois com $1'$.

Lema 2.3: Para todo $a \in F$, temos que:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Prova:

Note que basta provarmos que $a \cdot 0 = 0$, pois adquirimos $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ devido a (P1). Dessa maneira, note que:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

Onde nós utilizamos (S3) na primeira igualdade e (D) na segunda. Perceba que, a partir da igualdade acima, podemos somar aos dois lados da equação $-a \cdot 0$, de onde obtemos:

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \Leftrightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0) \Leftrightarrow$$

$$0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$$

Portanto,

$$a \cdot 0 = 0$$

Observação: É por isso que pressupomos que $1 \neq 0$ na (P3), pois, caso fôssemos aceitar a possibilidade de que $1 = 0$ em um corpo, chegaríamos que, dado $a \in F$ qualquer:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$$

Onde utilizamos (P3), que $1 = 0$ e o Lema 2.3, assim, teríamos que qualquer a em F teria de ser igual a 0, logo $F = 0$, o que é desinteressante no geral para ser analisado.

Lema 2.4: O simétrico de $-a$ é a, qualquer que seja $a \in F$. Isto é, $-(-a) = a, \forall a \in F$.

Prova: Basta notar que, como $a + (-a) = 0$ e o simétrico de $-a$ é único pelo Lema 2.1, então devemos ter, portanto, que $-a = a$.

Lema 2.5: O simétrico de $a + b$ é $-a - b$.

Prova: Sabemos por (S4) que $a + (-a) = 0$ e $b + (-b) = 0$, logo $\big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) = 0 + 0 = 0$, ou seja, pelas propriedades (S1) e (S2), podemos rearranjar os termos de modo a termos $(a + b) + (-a - b) = 0$. Dessa forma, pelo Lema 2.1, devemos ter $-(a + b) = -a - b$.

Assumiremos, daqui para frente, que $F = \mathbb{R}$, isto é, o conjunto dos números reais será o nosso corpo a ser estudado, com as operações de soma e produto definidas como usualmente são conhecidas desde o ensino básico e assumiremos as propriedades de corpo descritas acima no restante do texto para tal conjunto.

Agora, com a observação acima feita e os lemas provados, podemos provar o seguinte:

Teorema 2.1: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(-a)b = a(-b) = -ab \text{ e}$$

$$(-a)(-b) = ab$$

Prova:

Provamos anteriormente que $a \cdot 0 = 0$, para qualquer a real, pelo Lema 2.3. Além disso, por (S4), temos que $b + (-b) = 0$, assim:

$$a \cdot 0 = a\big(b + (-b)\big) = ab + a(-b) = 0$$

Disso, como ab e $a(-b)$ somam zero e o simétrico de ab é único pelo **Lema 2.1**, temos por fim:

$$a(-b) = -ab$$

Para mostrar a igualdade de $(-a)b$ com $-ab$, basta fazermos o seguinte:

$$(-a)b = b(-a) = -ba = -ab$$

Onde se foi utilizado (S1) na primeira e terceira igualdade, enquanto na segunda igualdade se foi utilizado o que foi provado acima.

Para provar a última igualdade, utilizaremos o Lema 2.4 e o que provamos anteriormente:

$$(-a)(-b) = -a(-b) = -(-ab) = ab$$

Com o Teorema 2.1, se denotarmos $a \cdot a$ por a^2, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1: Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que $a \cdot a = (-a)(-a) = a^2$.

Tal corolário será bastante importante no próximo tópico.

2.3 A ordenação dos números reais

Para falarmos da relação de ordem nos reais, vamos assumir a existência de um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado de números reais positivos, o qual satisfaz as seguintes propriedades:

O1) A soma e o produto de números reais positivos são positivos, isto é, se $a, b \in \mathbb{R}^+$, temos então que $a + b \in \mathbb{R}^+$ e $ab \in \mathbb{R}^+$.

O2) Se $x \in \mathbb{R}$, uma, e somente uma, das três seguintes alternativas ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Com tais propriedades, podemos indicar por $\mathbb{R}^-$ o conjunto tal que $x \in \mathbb{R}^-$ se, e somente se, $-x \in \mathbb{R}^+$ e o chamamos de conjunto dos números reais negativos. Perceba também que, por (O2), $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, $0 \notin \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$ e, assim, temos que $\mathbb{R} = 0 \cup \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$.

Devido ao Corolário 2.1, podemos provar o seguinte:

Teorema 2.2: Dado $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, temos que $x^2 \in \mathbb{R}^+$.

Prova:

Veja que, como $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, logo $x \neq 0$, assim, por (O2), ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Como $x^2 = x \cdot x = (-x)(-x)$, se $x \in \mathbb{R}^+$, temos então que $x^2 \in \mathbb{R}^+$ e se $-x \in \mathbb{R}^+,$ então $x^2 \in \mathbb{R}^+$.

Assim, em todo caso, temos que $x^2 \in \mathbb{R}^+$, como queríamos.

O Teorema 2.2, acima provado, quer dizer então que, independentemente de x ser positivo ou negativo, seu quadrado vai ser positivo.

Em particular, temos então que $1 \in \mathbb{R}^+$, já que $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$.

Com tais explicações, vamos fazer a seguinte definição:

Definição 2.3: Dados $a, b \in \mathbb{R},$ vamos escrever $a < b$ quando $b - a \in \mathbb{R}^+$ e falamos que "a é menor que b". Analogamente, escrevemos $b > a$ quando $b - a \in \mathbb{R}^+$ e dizemos que "b é maior que a". Além disso, utilizaremos a notação $a \leq b$ que significa $a < b$ ou $a = b$ e falamos "a é menor ou igual que b". Da mesma maneira, $b \geq a$ é equivalente a $b > a$ ou $b = a$ e dizemos "b é maior ou igual que a".

Observação: Com a notação explicitada, dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x < y$ e $y < z$, podemos representar essas duas informações numa única expressão como

$x < y < z$. Analogamente, se temos $z > y$ e $y > x$, podemos expressar tais informações como $z > y > x$.

Assim, temos que $a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0$, por $a - 0 = a + (-0) = a + 0 = a$ e $a \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow a < 0$, por consequência de $0 - a = -a \in \mathbb{R}^+$.

Com as notações mostradas acima e por $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, temos o seguinte corolário do Teorema 2.2:

Corolário 2.2: Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que $x^2 \geq 0$.

Ou seja, o Corolário 2.2 significa que, qualquer número real ao quadrado é positivo ou nulo.

Embora tal corolário seja aparentemente bobo, ele será de grande importância quando formos provar algumas das desigualdades clássicas.

Nesse momento, iremos agora provar certas propriedades acerca da relação de ordem nos reais:

Teorema 2.3. Dados $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ quaisquer, temos que:

P1) (Transitividade) Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;

P2) (Tricotomia) Ocorre apenas uma e somente uma das alternativas: $x = y$, $x < y$ ou $x > y$;

P3) Se $x < y$, então $x + z < y + z$;

P4) Se $x < y$ e $z > 0$, então $xz < yz$;

P5) Se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$;

P6) Se $x < y$ e $z < w$, então $x + z < y + w$;

P7) Se $0 < x < y$ e $0 < z < w$, então $xz < yw$.

Prova:

(P1):

Como $x < y$ e $y < z$, temos então que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$. Logo, por (O1), deduz-se que $(y - x) + (z - y) = z - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $x < z$.

(P2):

Por (O2) utilizada para $y - x \in \mathbb{R}$, temos que ou $y - x = 0$ ou $y - x \in \mathbb{R}^+$ ou $-(y - x) = -\big(y + (-x)\big) = -y — x = -y + x = x - y \in \mathbb{R}^+$, onde utilizamos o Lema 2.4, o Lema 2.5, a propriedade (S1) e a observação feita após o primeiro lema.

Assim, como as três opções são mutuamente exclusivas, deduz-se então que $x = y$, $x < y$ ou $x > y$, como queríamos.

(P3):

Já que $x < y$, temos assim $y - x \in \mathbb{R}^+$. Desse modo, como $(y + z) - (x + z) = y + z - x - z = y - x$, temos, por conseguinte, que $(y + z) - (x - z) \in \mathbb{R}^+$, assim, $x + z < y + z$.

(P4):

Como $x < y$ e $z > 0$, temos, portanto, que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z \in \mathbb{R}^+$ donde, pela propriedade (O1), devemos ter que $(y - x)z = \big(y + (-x)\big)z = yz + (-x)z = yz - xz \in \mathbb{R}^+$, isto é, $xz < yz$.

(P5):

Procedendo analogamente a (P4), $x < y$ e $z < 0$ são equivalentes a termos $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $-z \in \mathbb{R}^+$, assim, por (O1), temos $(y - x)(-z) \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $(y - x)(-z) = -(y - x)z = -(yz - xy) = -yz + xy = xy - yz \in \mathbb{R}^+$, portanto, $xy < yz$.

(P6):

Como $x < y$ e $z \in \mathbb{R}$, por (P3), temos que $x + z < y + z$ e, por $z < w$ e $y \in \mathbb{R}$, novamente por (P3), resulta-se $y + z < y + w$.

Por fim, pela (P1) e o que foi deduzido, temos então $x + z < y + w$.

(P7):

Como $0 < x < y$, temos então que $0 < x$ e $x < y$, logo, por (P1), temos $0 < y$. Além disso, também temos que $0 < z < w$, donde $0 < z$. E, além dessas duas informações, deduzimos que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $w - z \in \mathbb{R}^+$

Assim, veja que $yw - xz = yw - yz + yz - xz = y(w - z) + z(y - x)$. Logo, como $y \in \mathbb{R}^+, w - z \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}^+$ e $y - x \in \mathbb{R}^+$, temos então que $yw - xz \in \mathbb{R}^+$ por (O1), donde $xz < yw$, como queríamos.

As propriedades provadas nesse Teorema 2.3 servirão como regras operatórias para as desigualdades e serão utilizadas por todo o restante do texto de maneira natural.

Observação: Tudo que fora provado no Teorema 2.3 serve também quando utilizamos a relação de “menor ou igual” ($\leq$) ou de “maior ou igual” ($\geq$), com o cuidado de que se utilizarmos tanto “menor que” ($<$) e “menor ou igual” ($\leq$), o que prevalecerá será apenas a relação de “menor que” ($<$). Isso se dá pela igualdade não ocorrer mais, pois, mesmo que ela aconteça em uma das desigualdades, não ocorrerá na outra.

Observação: Na mesma linha da observação anterior, quando temos uma relação de “menor ou igual” (equivalentemente para a de “maior ou igual”), se ela foi obtida de mais de uma relação de “menor ou igual” pelas propriedades do Teorema 2.3, sua igualdade ocorre se, e somente se, cada uma das igualdades das relações anteriores ocorrerem. A implicação decorre pela observação acima e a recíproca é devido a manipulação de igualdades gerar a igualdade final desejada.

Definição 2.4: Seja $a \in \mathbb{R}$, definimos $|a|$ como:

$$|a| = a, \text{ se } a \geq 0$$
$$|a| = -a, \text{ se } a < 0$$

Com isto em mãos, podemos provar os seguintes lemas:

Lema 2.6: Dado $a \in \mathbb{R}$, temos que $-|a| \leq a \leq |a|$.

Prova:

Veja que, pela definição de $|a|$, necessariamente temos que $|a| \geq 0$. Assim, temos 2 casos a considerar:

1º Caso: $a \geq 0$

Nessa situação, temos $-a \leq 0$, donde $-a \leq a = |a|$ pela (P1) do Teoremas 2.3, donde temos $-a \leq |a|$, ou seja, $-|a| \leq a = |a|$, portanto, temos que $-|a| \leq a \leq |a|$.

2º Caso: $a < 0$

Nesse caso, vamos ter $|a| = -a > 0 > a$, isto é, $a < |a|$ e, além disso, como $|a| = -a$, temos que $a = -|a|$, logo $-|a| = a < |a|$, que nos proporciona $-|a| \leq a \leq |a|$.

Lema 2.7: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ temos que $a^2 \leq b^2$ se, e somente se, $|a| \leq |b|$.

Prova:

Note que, como $|a| = a$ ou $|a| = -a$, temos então que $|a|^2 = a^2$ pelo Corolário 2.1.

Portanto,

$$a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow |a|^2 \leq |b|^2 \Leftrightarrow 0 \leq |b|^2 - |a|^2 \Leftrightarrow 0 \leq (|b| + |a|)(|b| - |a|)$$

Percebe que, como $|a| \geq 0$ e $|b| \geq 0$, temos que $|a| + |b| \geq 0$. Assim, se ocorresse de que $|b| - |a| < 0$, teríamos que $(|b| + |a|)(|b| - |a|) < 0$, que não é o caso.

Portanto, devemos ter que $|b| - |a| \geq 0$ (pela Tricotomia), donde obtemos $|a| \leq |b|$, como queríamos.

A recíproca é óbvia tendo-se $|a| < |b|$ e devido a $|a| + |b| \geq 0$ e por (O1).

Este último lema terá bastante importância quando formos provar as desigualdades das médias.

Observação: Dado um $a \in \mathbb{R}^+$, existe um único $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $a = b^2$. Tal b é denotado por $\sqrt{a}$ e é chamado de "raiz quadrada de a". Note que como $0 = 0^2$, podemos dizer que $\sqrt{0} = 0$. Assim, perceba que $a = \left(\sqrt{a}\right)^2, \forall a \geq 0$. Por fim, temos que $\sqrt{a} \geq 0$, para qualquer $a \geq 0$. Como última ideia a ser observada, quando temos $\sqrt{x^2}$, isso será igual a $|x|$, pois $|x|^2 = x^2$ e $|x| \geq 0$.

Lema 2.8: Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $0 < x < y$. Então $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Prova:

Como $0 < x$ e $x < y$, então $0 < y$ pela (Transitividade) do Teorema 2.3.

Assim, perceba que $x^{-1} = (x^{-1})^2 x > 0$, pois $x > 0$ e $x^{-1} \neq 0$, logo $(x^{-1})^2 > 0$ pelo Teorema 2.2. Analogamente, temos que $y^{-1} > 0$. Desse modo, temos então que $x^{-1}y^{-1} > 0$ por (O1). Desse modo, por (P4) do Teorema 2.3, temos então que $x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1})$, isto é, $y^{-1} < x^{-1}$

Portanto, obtemos que $0 < y^{-1} < x^{-1}$, como queríamos.

Tal lema será de suma importância para provar uma das Desigualdades das Médias.

3 DESIGUALDADES

3.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Primeiramente, dentre as desigualdades clássicas, vamos olhar, de início, para a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Dados $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ é válida a desigualdade

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

com condição de igualdade válida quando $b_i = ka_i, \forall i \in 1,2, \dots, n$ para algum $k \in \mathbb{R}$ fixo ou $a_i = k'b_i, \forall i \in 1,2, \dots, n$ para algum $k' \in \mathbb{R}$.

Rascunho de prova:

Uma possível ideia que poderia nos levar a imaginar o porquê de tal desigualdade ser válida seria ao pensarmos em vetores $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e no seu produto interno usual $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$, que já representa o termo à esquerda que será elevado ao quadrado.

E, daí, sendo $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ e $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$, existe uma importante relação de que, se θ representa o ângulo entre os vetores **a** e **b**, temos que

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \theta$$

De onde deduzimos:

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \cos^2 \theta$$

E, dessa maneira, como sabemos que $\cos \theta \in [-1,1]$, temos então que $\cos^2 \theta \in [0,1]$ e, dessa maneira,

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$$

Que é exatamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, ocorrendo igualdade quando $\boldsymbol{a} = 0$ ou $\boldsymbol{b} = 0$ ou $\cos^2 \theta = 1$, isto é, quando $\cos \theta = 1$ ou $\cos \theta = -1$, de onde tem-se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ ou seja, na situação em que os vetores são paralelos entre si, de onde existe $k \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ ou $\boldsymbol{a} = k'\boldsymbol{b}$ (note que considerar ambas as igualdades inclui também os casos em que algum dos dois vetores é nulo), que representa a exata condição de igualdade mostrada.

No entanto, essa abordagem é um tanto quanto problemática para a dedução da desigualdade de Cauchy-Schwarz como fora feita acima, tendo-se utilizado teoremas relativos ao produto interno usual, pois faz uso da noção de ângulo entre dois vetores, a qual necessita da desigualdade triangular para vetores (que não fora citada aqui) e esta, por fim, é deduzida da própria desigualdade de Cauchy-Schwarz!

Dessa maneira, precisamos fazer uso de outros artifícios para provar de fato essa desigualdade, muito embora as ideias acima nos deem confiança de que o resultado seja de fato válido. Dessa maneira, vamos agora de fato para a prova da desigualdade:

Prova:

Para atacar esse problema, vamos utilizar o Corolário 2.2:

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

Com isso em mente, temos então que:

$$(a_1 x - b_1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(a_2 x - b_2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

...

$$(a_n x - b_n)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Isto é, somando-se tudo, pelas propriedades mostradas no capítulo anterior sobre ordenação dos reais,

$$(a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \cdots + (a_n x - b_n)^2 \geq 0$$

Calculando-se os quadrados e agrupando os termos conforme x, temos:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq 0 \ (1)$$

Mas, ao olhar para cada desigualdades acima, todas elas são válidas para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $(*)$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Do Apêndice A, temos que

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 4ac \leq 0 (2)$$

O único empecilho de utilizar diretamente tal equivalência se dá ao não sabermos se $a = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ é igual a 0 ou não (pois, caso seja, a expressão à esquerda de (1) na realidade não seria uma função do segundo grau em x), mas ele é facilmente ultrapassado pois, como $a_i \in \mathbb{R}$, temos $a_i^2 \geq 0, \forall i \in 1,2, \dots, n$, com condição de igualdade quando $a_i = 0$, ou seja, se $a = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$, teríamos de ter $a_i = 0, \forall i \in 1,2, \dots, n$, pois ocorre a condição de igualdade em $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$, a qual só pode ocorrer se ocorrer a condição de igualdade para cada a_i.

Daí, teríamos que $a_i = 0, \forall i \in 1,2,\dots,n$, donde $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = \ 0^2 = 0 = 0 \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

Logo, a desigualdade (que, na verdade, é uma igualdade) é válida na situação em que $a = 0$.

Portanto, vamos supor que $a \neq 0$, donde podemos aplicar (2):

$$\left(-2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)\right)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0$$

Donde, fazendo-se uso das propriedades de corpo e de ordenação nos reais, temos afinal:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Que é exatamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Veja agora que a condição de igualdade da desigualdade acima ocorre se, e somente se, $a_ix - b_i = 0, \forall i \in 1,2,\dots,n$, já que deve ocorrer a condição de igualdade em todas as desigualdades utilizadas no início para a dedução da de Cauchy-Schwarz.

Assim, temos por fim que $b_i = xa_i, \forall i \in 1,2,\dots,n$, onde, tomando $k = x$, temos exatamente a condição $b_i = ka_i, \forall i \in 1,2,\dots,n$ que queríamos. Perceba que esse caso leva em consideração o caso quando $b_i = 0, \forall i \in 1,2,\dots n$.

Note também que a condição $a_i = k'b_i, \forall i \in 1,2,\dots,n$ que aparece no enunciado da desigualdade é equivalente a condição dada acima quando $k \neq 0$, bastando tomar $k' = k^{-1}$. No entanto, ela também encapsula o caso quando $a_i = 0, \forall i \in 1,2,\dots,n$, por isso a adicionamos no enunciado para contemplar tal situação que fora abordada antes mesmo da utilização do Apêndice A.

3.1.1 Lema de Titu

Tendo-se em mãos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos provar o seguinte lema:

Lema de Titu: Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ e $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, temos que a seguinte desigualdade é válida:

$$\frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} \leq \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n^2}{a_n},$$

com condição de igualdade quando $b_i = ka_i, \forall i \in 1,2,\dots,n$ e $k \in \mathbb{R}$.

Prova: Para provarmos o Lema de Titu, vamos utilizar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, substituindo $a_i\ por\ \sqrt{a_i}, \forall i \in 1,2,\ldots,n$ (já que $a_i > 0$ para cada i em $\{1,2,\ldots,n\}$, logo sua raiz quadrada é positiva) e $b_i\ por\ \frac{b_i}{\sqrt{a_i}}, \forall i \in 1,2\ldots,n$ (já que $a_i > 0$, então sua raiz quadrada é não nula):

$$\left(\sqrt{a_1}\cdot\frac{b_1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\cdot\frac{b_2}{\sqrt{a_2}}+\cdots+\sqrt{a_n}\cdot\frac{b_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\mathbf{2}}$$

$$\leq\left(\left(\sqrt{a_1}\right)^{\mathbf{2}}+\left(\sqrt{a_2}\right)^{\mathbf{2}}+\cdots+\left(\sqrt{a_n}\right)^{\mathbf{2}}\right)\left(\left(\frac{b_1}{\sqrt{a_1}}\right)^{\mathbf{2}}+\left(\frac{b_2}{\sqrt{a_2}}\right)^{\mathbf{2}}+\cdots+\left(\frac{b_n}{\sqrt{a_n}}\right)^{\mathbf{2}}\right)$$

O que é equivalente a:

$$(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2\leq(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_n}\right)$$

Como $a_i > 0, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$, vamos ter então que $a_1+a_2+\cdots+a_n > 0$, já que a soma de números positivos é positiva. Daí, podemos então dividir ambos os lados por tal fator para encontrarmos a desigualdade desejada:

$$\frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)}\leq\left(\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_n}\right)$$

Note que a condição de igualdade advém da condição de igualdade da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é,

$$\frac{b_i}{\sqrt{a_i}}=k\sqrt{a_i},\forall i\in\{1,2\ldots,n\},k\in\mathbb{R}\text{ ou }\sqrt{a_i}=k'\cdot\frac{b_i}{\sqrt{a_i}},\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},k'\in\mathbb{R}$$

A qual é equivalente ao seguinte:

$$b_i=ka_i,\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},k\in\mathbb{R}\text{ ou }a_i=k'b_i,\forall i\in\{1,2,\ldots,n\},k'\in\mathbb{R}$$

No entanto, note que, da segunda igualdade, como cada a_i é positivo, temos então que $k' \neq 0$, pois, caso não o fosse, teríamos $a_i = 0$, que não pode ocorrer. Logo, por k' ser não nulo, podemos apenas utilizar a igualdade $b_i = ka_i, \forall i \in 1,2,\ldots,n$ como condição de igualdade do Lema de Titu, como queríamos.

3.2 Desigualdades das médias

Vamos definir, neste momento, o que seriam a Média Quadrática (MQ), a Média Aritmética (MA), a Média Geométrica (MG) e a Média Harmônica (MH):

Definição 3.1: Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, definimos cada uma das médias como:

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}}$$

Observação: Vamos assumir, daqui em diante, conhecimento prévio quanto às propriedades relativas à raízes quadradas e raízes n-ésimas.

3.2.1 Média Quadrática ≥ Média Aritmética

Desigualdade MQ≥MA: Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, temos que:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

com condição de igualdade quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Prova:

Para provarmos esta desigualdade, vamos fazer uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, provada anteriormente, utilizando-se $a_i = x_i, \forall i \in 1,2, \ldots, n$ e $b_i = 1, \forall i \in 1,2, \ldots, n$, donde temos:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 1)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{n^2} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Onde usamos o fato de que $n > 0$ (pois é uma quantidade positiva de variáveis), as propriedades provadas no Teorema 2.3 para dividirmos por n^2 e o Lema 2.7 junto à observação feita logo após, já que a soma dos x_i dividido por n é positivo, logo igual ao seu módulo.

A condição de igualdade é dada pela condição de igualdade da Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$x_i = k, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, k \in \mathbb{R} \text{ ou } 1 = k' x_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}, k' \in \mathbb{R}$$

Da segunda igualdade, devemos ter que k' é não nulo, pois 1 é não nulo, logo, podemos, por simplicidade, utilizar apenas $x_i = k, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$, o que nos dá que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, como queríamos.

3.2.2 Média Aritmética ≥ Média Geométrica

Agora, nós iremos provar que MA≥MG, isto é,

Desigualdade MA≥MG: Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, temos que é válida

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

com condição de igualdade quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Prova:

Para demonstrarmos tal desigualdade para um n inteiro positivo qualquer, devemos primeiro mostrar que tal desigualdade é válida quando $n = 2^k$, com $k \geq 1$ inteiro. Para tal, faremos uso de indução sobre k:

Caso inicial: Ocorre quando $k = 1$, isto é, quando $n = 2$.

Tal caso pode ser provado ao observamos que, como x_1 e x_2 são ambos positivos, ambos possuem raiz quadrada, logo, pelo Corolário 2.2, temos que:

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

Logo, o resultado é válido para $k = 1$.

Veja que a condição de igualdade ocorre quando $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0$, isto é, quando $x_1 = x_2$.

Hipótese de indução: Vamos supor agora que o resultado seja válido para $k = l - 1$, isto é, quando $n = 2^{l-1}$, tendo-se também sua devida condição de igualdade.

Passo Indutivo: Vamos agora provar que o resultado é válido para $k = l$, isto é, para quando $n = 2^l$. Para tal, sendo dados $x_1, x_2, \dots, x_{2^l} \in \mathbb{R}^+$, vamos olhar para sua Média Aritmética (MA):

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^l}}{2^l} = \frac{\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}}}{2^{l-1}} + \dfrac{x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l}}{2^{l-1}}}{2}$$

Note que, como o numerador é composto de 2 termos e sua soma está dividida por 2, podemos aplicar o Caso inicial, donde adquirimos:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^l}}{2^l} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}}}{2^{l-1}}\right)\left(\frac{x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l}}{2^{l-1}}\right)}$$

Com condição de igualdade quando

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}}}{2^{l-1}} = \frac{x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l}}{2^{l-1}}$$

Isto é, quando

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}} = x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l} (3)$$

Observe também que, cada termo sendo multiplicado é a MA de 2^{l-1} termos, donde podemos aplicar então a Hipótese de indução em cada um:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}}}{2^{l-1}} \geq \sqrt[2^{l-1}]{x_1 x_2 \ldots x_{2^{l-1}}}; e$$

$$\frac{x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l}}{2^{l-1}} \geq \sqrt[2^{l-1}]{x_{2^{l-1}+1} \cdot x_{2^{l-1}+2} \ldots x_{2^l}}$$

Cujas circunstâncias de igualdade ocorrem quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2^{l-1}}$ e $x_{2^{l-1}+1} = x_{2^{l-1}+2} = \cdots = x_{2^l} (4)$.

Daí, como todos os 4 termos são positivos (pois todas as variáveis são positivas), podemos aplicar a (P7) do Teorema 2.3 e o Lema 2.7 junto à raiz quadrada:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}}}{2^{l-1}}\right)\left(\frac{x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l}}{2^{l-1}}\right)$$
$$\geq \sqrt[2^{l-1}]{x_1 x_2 \ldots x_{2^{l-1}}} \cdot \sqrt[2^{l-1}]{x_{2^{l-1}+1} \cdot x_{2^{l-1}+2} \ldots x_{2^l}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}}}{2^{l-1}}\right)\left(\frac{x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l}}{2^{l-1}}\right)}$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[2^{l-1}]{x_1 x_2 \ldots x_{2^{l-1}}} \cdot \sqrt[2^{l-1}]{x_{2^{l-1}+1} \cdot x_{2^{l-1}+2} \ldots x_{2^l}}}$$

Assim, pela propriedade da (Transitividade) do Teorema 2.3, temos:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^l}}{2^l} \geq \sqrt{\sqrt[2^{l-1}]{x_1 x_2 \ldots x_{2^{l-1}}} \cdot \sqrt[2^{l-1}]{x_{2^{l-1}+1} \cdot x_{2^{l-1}+2} \ldots x_{2^l}}}$$
$$= \sqrt{\sqrt[2^{l-1}]{x_1 x_2 \ldots x_{2^{l-1}} x_{2^{l-1}+1} \ldots x_{2^l}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^l}}{2^l} \geq \sqrt[2 \cdot 2^{l-1}]{x_1 x_2 \ldots x_{2^l}} = \sqrt[2^l]{x_1 x_2 \ldots x_{2^l}}$$

Ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

para $n = 2^l$.

Assim, por (3) e (4), vamos ter então que:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{l-1}} = 2^{l-1}x_1 = x_{2^{l-1}+1} + x_{2^{l-1}+2} + \cdots + x_{2^l} = 2^{l-1}x_{2^l}$$

Donde encontramos então que $x_1 = x_{2^l}$ e, portanto, com condição de igualdade quando

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2^{l-1}} = x_{2^{l-1}+1} = \cdots = x_{2^l}$$

Logo, o resultado segue por indução em k.

Com tal resultado em mãos, pode-se provar por indução que, dado n inteiro positivo, temos sempre que existe um k nulo ou inteiro positivo tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

Desse modo, chamando $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, temos então que $G^n = x_1 x_2 \ldots x_n$.

Daí, vamos olhar para MA ≥ MG quando as variáveis são $x_1, x_2, \ldots, x_n, G, G, \ldots, G$ até que se complete 2^{k+1} termos (isto é, temos $2^{k+1} - n$ termos iguais a G):

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + G + G + \cdots + G}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{x_1 x_2 \ldots x_n G G \ldots G}$$

Mas, como $G^n = x_1 x_2 \ldots x_n$, temos então que

$$x_1 x_2 \ldots x_n G G \ldots G = G^n \cdot G^{2^{k+1}-n} = G^{2^{k+1}}$$

Daí, a desigualdade se torna:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (2^{k+1} - n)G}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{G^{2^{k+1}}} = G$$

Como $2^{k+1} > 0$, obtemos, portanto:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (2^{k+1} - n)G \geq 2^{k+1}G \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 2^{k+1}G + nG - 2^{k+1}G = nG \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq G$$

Isto é,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

com condição de igualdade quando

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = G,$$

que é exatamente a condição que queríamos.

3.2.3 Média Geométrica (MG) ≥ Média Harmônica (MH)

Para provarmos que MG≥MH, vamos fazer uso de MA≥MG:

Desigualdade MG≥MH: Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, temos que:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

com condição de igualdade dada por $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Prova:

Para provarmos isso, vamos utilizar $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ como variáveis na MA≥MG:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}}$$

Daí, isso é equivalente ao seguinte:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$$

Assim, pelo Lema 2.8, como ambos os lados são positivos, vamos ter que:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}},$$

Que é exatamente a desigualdade desejada, cuja condição de igualdade ocorre quando $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n}$, o que é equivalente a termos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

3.3 Desigualdade do Rearranjo

Vamos enunciar e provar a desigualdade do rearranjo, mas antes disso, vamos definir o que é uma permutação:

Definição 3.2: Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, uma permutação σ é uma função bijetora de n objetos sobre eles mesmos. Assim, uma permutação, intuitivamente, é uma troca de posições dos elementos do domínio.

Desigualdade do Rearranjo: Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ e $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ e seja uma permutação $\sigma: \{1,2, \ldots, n\} \to 1,2, \ldots, n$ qualquer dos índices das variáveis de nome y. Então temos que é válida a desigualdade:

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \leq x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ny_{\sigma(n)} \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Prova:

Para provarmos o resultado, iremos utilizar indução em n:

Caso inicial ($\boldsymbol{n = 2}$): Sejam $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 \geq x_2$ e $y_1 \geq y_2$. Logo, temos então que $x_1 - x_2 \geq 0$ e $y_1 - y_2 \geq 0$, desse modo, deduzimos:

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0 \Leftrightarrow (x_1y_1 + x_2y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1$$

Assim, temos que, como só há 2 permutações em $\{1,2\}$, então ambas as permutações estão incluídas na desigualdade acima e logo uma é maior que ou igual à outra de acordo com as condições da desigualdade.

Hipótese de indução: Vamos supor o resultado válido para $n = k$, isto é, se há k variáveis x e k variáveis y, temos que é válida a desigualdade para as $2k$ variáveis e uma permutação qualquer dos índices de uma das variáveis.

Passo indutivo: Vamos provar que o resultado é válido para $n = k + 1$, ou seja, que a desigualdade é válida para $k + 1$ variáveis e uma permutação qualquer dos índices de uma delas.

Para tal, vamos provar cada parte da desigualdade separadamente e temos alguns casos a considerar:

1ª desigualdade:

1º Caso: $\sigma(k + 1) = 1$

Neste caso, vamos ter que a forma da soma dos termos de x e y pela permutação fica

$$x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ky_{\sigma(k)} + x_{k+1}y_1 (5)$$

No entanto, tomando-se a permutação $\pi: \{2, \dots, k, k + 1\} \to 2, \dots, k, k + 1$ tal que $\pi(i) = \sigma(i - 1), \forall i \in \{2, \dots, k, k + 1\}$, vamos ter que, pela Hipótese de indução aplicada sobre $x_1, x_2, \dots, x_k, y_2, y_3, \dots, y_{k+1}$ e π:

$$x_1y_{k+1} + x_2y_k + \cdots + x_ky_2 \leq x_1y_{\pi(2)} + x_2y_{\pi(3)} + \cdots + x_ky_{\pi(k+1)}$$

Mas, pela definição de π, os termos à direita da desigualdade são exatamente os k primeiros termos de (5), donde, ao somarmos $x_{k+1}y_1$ dos dois lados, vamos ter exatamente:

$$x_1y_k + x_2y_{k-1} + \cdots + x_{k+1}y_1 \leq x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ky_{\sigma(k)} + x_{k+1}y_1$$

2º Caso: $\sigma(k + 1) \neq 1$

Dessa forma, como a permutação σ é uma bijeção em $1,2,\dots,k,k+1$, existe $l \in 1,2,\dots,k$ tal que $\sigma(l)=1$, assim, podemos escrever a expressão do seguinte modo:

$$x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\cdots+x_ky_{\sigma(k)}+x_{k+1}y_{\sigma(k+1)}=x_ly_1+x_{k+1}y_{\sigma(k+1)}+B$$

Onde B engloba o restante dos termos.

Pela hipótese inicial sobre as variáveis, sabemos que $x_l \geq x_{k+1}$ (já que $k+1$ representa o índice da última variável "x") e que $y_1 \geq y_{\sigma(k+1)}$ (já que 1 é o índice da variável "y" que é maior ou igual a qualquer outra), donde, pelo Caso inicial, temos que

$$x_ly_1+x_{k+1}y_{\sigma(k+1)} \geq x_ly_{\sigma(k+1)}+x_{k+1}y_1$$

Dessa maneira, somando B dos dois lados, vamos ter, por fim que:

$$\begin{aligned} x_1y_{\pi(2)}+x_2y_{\pi(3)}+\cdots+x_ky_{\pi(k+1)}+x_{k+1}y_1 \\ \leq x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\cdots+x_ky_{\sigma(k)}+x_{k+1}y_{\sigma(k+1)} \end{aligned}$$

Onde definimos a permutação $\pi\colon\{2,3,\dots,k+1\} \to 2,3,\dots,k+1$ tal que $\pi(i)=\sigma(i-1), \forall i \in \{2,\dots,l-1,l+1,\dots k+1\}$ e $\pi(l)=\sigma(k+1)$

Pela Hipótese de indução aplicada sobre as variáveis $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$ e $y_2 \geq y_3 \geq \cdots \geq y_{k+1}$ e a permutação π, temos que:

$$x_1y_{k+1}+x_2y_k+\cdots+x_ky_2 \leq x_1y_{\pi(2)}+x_2y_{\pi(3)}+\cdots+x_ky_{\pi(k+1)}$$

Donde, somando ambos os lados $x_{k+1}y_1$ e utilizando a (Transitividade) do Teorema 2.3, temos por fim que

$$x_1y_{k+1}+x_2y_k+\cdots+x_ky_2+x_{k+1}y_1 \leq x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\cdots+x_ky_{\sigma(k)}+x_{k+1}y_{\sigma(k+1)}$$

2ª desigualdade:

1º Caso: $\sigma(k+1)=k+1$

Nesta situação, o formato da expressão que envolve x e y fica do seguinte modo:

$$x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\cdots+x_ky_{\sigma(k)}+x_{k+1}y_{k+1}$$

Mas, estando em tal formato, podemos aplicar a Hipótese de indução sobre $x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,y_2,\dots,y_k$ e a restrição da permutação σ ao conjunto $1,2,\dots,k$ de modo a termos

$$x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\cdots+x_ky_{\sigma(k)} \leq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ky_k$$

Donde, somando $x_{k+1}y_{k+1}$ dos dois lados, obtemos:

$$x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\cdots+x_ky_{\sigma(k)}+x_{k+1}y_{k+1} \leq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ky_k+x_{k+1}y_{k+1}$$

2º Caso: $\sigma(k+1) \neq k+1$

Nesta situação, como σ é uma função bijetora, existe um $l \in 1,2,\dots,k$ tal que $\sigma(l) = k+1$, de modo que temos

$$x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ky_{\sigma(k)} + x_{k+1}y_{\sigma(k+1)} = x_ly_{k+1} + x_{k+1}y_{\sigma(k+1)} + B$$

Onde B representa o restante dos termos da expressão à esquerda.

Com o uso do Caso inicial para $x_l \geq x_{k+1}$ e $y_{\sigma(k+1)} \geq y_{k+1}$, temos que

$$x_ly_{\sigma(k+1)} + x_{k+1}y_{k+1} \geq x_ly_{k+1} + x_{k+1}y_{\sigma(k+1)}$$

Desse modo, temos então que, ao somar B de ambos os lados, vamos ter que:

$$x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ky_{\sigma(k)} + x_{k+1}y_{\sigma(k+1)}$$
$$\leq x_1y_{\pi(1)} + x_2y_{\pi(2)} + \cdots + x_ky_{\pi(k)} + x_{k+1}y_{k+1}$$

Onde definimos a permutação $\pi: \{1,2,\dots,k\} \to 1,2,\dots k$ tal que $\pi(i) = \sigma(i), \forall i \in 1,2,\dots,l-1,l+1,\dots,k$ e $\pi(l) = \sigma(k+1)$. Com tal definição, aplicando a **Hipótese de indução** para $x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,y_2,\dots,y_k$ e a permutação π, temos então que

$$x_1y_{\pi(1)} + x_2y_{\pi(2)} + \cdots + x_ky_{\pi(k)} \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k$$

Por fim, somando $x_{k+1}y_{k+1}$ a ambos os lados e aplicando a (Transitividade) do Teorema 2.3, temos por fim que

$$x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ky_{\sigma(k)} + x_{k+1}y_{\sigma(k+1)} \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1}$$

Que é exatamente a desigualdade final desejada.

Assim, o resultado segue por indução.

3.4 Desigualdade de Jensen

De início, para discutirmos a desigualdade de Jensen, precisamos primeiramente de algumas definições:

Definição 3.2: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, definimos os seguintes conjuntos da seguinte maneira e os chamamos de intervalos:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$
$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$
$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Definição 3.3: Considere um intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa no intervalo I se, dados $x, y \in I$ quaisquer e $t \in [0,1]$ qualquer, temos:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$$

Analogamente, dizemos que a função f é côncava no intervalo I se, dados $x, y \in I$ quaisquer e $t \in [0,1]$ qualquer, temos:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \leq f(tx + (1-t)y)$$

Definição 3.4: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo qualquer e seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é crescente em I se dados $a, b \in I$ quaisquer com $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$. Analogamente, dizemos que f é decrescente em I se dados $a, b \in I$ quaisquer com $a \leq b$, então $f(a) \geq f(b)$.

Com tais definições e com o auxílio do Apêndice B, vamos provar o seguinte:

Teorema 3.1: Seja um intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é duas vezes diferenciável com $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então f será convexa em I. Analogamente, se f é duas vezes diferenciável com $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então f será côncava em I.

Prova: Definindo-se $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y),$$

onde $t \in [0,1]$ e $f(y)$ são constantes na perspectiva de g.

Assim, como f é duas vezes diferenciável, então g é diferenciável, de onde temos, pela regra da cadeia:

$$g'(x) = tf'(x) - tf'(tx + (1-t)y)$$

Isto é,

$$g'(x) = t\big(f'(x) - f'(tx + (1-t)y)\big)$$

Temos 2 casos a considerar:

1º Caso: $x \geq y$

Veja que, por $t \in [0,1]$:

$$0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - t \leq 1$$

Assim, como $y \leq x$ e $0 \leq 1 - t$, temos que $y(1-t) \leq x(1-t) = x - tx$, assim, somando-se tx a ambos os lados, obtemos que $tx + (1-t)y \leq x$.

Como temos que $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$, então, pelos resultados do Apêndice B, temos que f' é crescente em I, donde temos:

$$f'(tx + (1-t)y) \leq f'(x) \Leftrightarrow 0 \leq f'(x) - f'(tx + (1-t)y)$$

Que, juntamente com o fato de que $0 \leq t$, temos então:

$$0 \leq t\big(f'(x) - f'(tx + (1-t)y)\big) = g'(x), \forall x \in I \cap [y, \infty)$$

Logo, temos então que g é crescente em $I \cap [y, \infty)$, donde, por $x \geq y$, temos:

$$g(x) \geq g(y) \Leftrightarrow tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y)$$
$$\geq tf(y) + (1-t)f(y) - f(ty + (1-t)y) = 0$$

Portanto, temos por fim que:

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$$

E assim, a função f é convexa neste caso.

2º Caso: $x \leq y$

Como vimos, $x \leq y$ e $0 \leq (1-t)$, logo $x(1-t) = x - tx \leq y(1-t)$, donde obtemos que $x \leq tx + (1-t)y$.

Novamente, por $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$, então temos f' crescente em I e, portanto:

$$f'(x) \leq f'(tx + (1-t)y) \Leftrightarrow f'(x) - f'(tx + (1-t)y) \leq 0$$

Desse modo, por $0 \leq t$, temos então:

$$t\big(f'(x) - f'(tx + (1-t)y)\big) = g'(x) \leq 0, \forall x \in I \cap [-\infty, y]$$

Assim, g é decrescente em $I \cap [-\infty, y]$, donde por $x \leq y$, temos:

$$g(x) \geq g(y)$$

Que é exatamente a mesma desigualdade do caso anterior, donde deduzimos, portanto, que a função f é convexa.

Assim, em ambos os casos temos que a função f é convexa, como queríamos.

A prova do caso em que f é côncava se faz pelo mesmo raciocínio e, desse modo, sua prova é análoga a feita acima.

Com o resultado do Teorema 3.1 em mãos, podemos agora nos atentar à desigualdade de Jensen:

Desigualdade de Jensen: Considere $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e uma função $f: I \to \mathbb{R}$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ tais que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Então, se f é convexa em I, temos que:

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n)$$

Se f é côncava em I, temos que:

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \leq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n)$$

Prova:

A prova será feita por indução em n:

Caso inicial $(n = 2)$**:** Neste caso, $t_1 + t_2 = 1$, donde temos $t_2 = 1 - t_1$, assim, chamando $t_1 = t$, $x_1 = x$ e $x_2 = y$, temos que a desigualdade para este caso seria

$$tf(x) + (1 - t)f(y) \geq f(tx + (1 - t)y)$$

Que é exatamente a definição de f ser convexa em I, que é o caso.

Hipótese de indução: Vamos supor o resultado válido para $n = k$, isto é, sendo $x_1, x_2, \ldots, x_k \in I$ e $t_1, t_2, \ldots, t_k \in [0,1]$ tais que $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = 1$, então se f é convexa, temos que

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_k f(x_k) \geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_k x_k)$$

Passo indutivo: Vamos mostrar que o resultado é válido para $n = k + 1$, isto é, sendo $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in I$ e $t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1} \in [0,1]$ tais que $t_1 + t_2 + \cdots + t_k + t_{k+1} = 1$ e se f é convexa, vale a desigualdade:

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_k f(x_k) + t_{k+1} f(x_{k+1})$$
$$\geq f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_k x_k + t_{k+1} x_{k+1}).$$

Para tal, temos 2 casos a considerar:

1º Caso: $t_{k+1} = 1$

Neste caso, temos então que $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$, já que sua soma com $t_{k+1} = 1$ e todos estão no intervalo $[0,1]$. Daí a desigualdade se torna:

$$1 \cdot f(x_{k+1}) \geq f(1 \cdot x_{k+1}),$$

a qual é uma desigualdade óbvia.

2º Caso: $t_{k+1} < 1$

Nesta situação, então vamos ter que $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = 1 - t_{k+1} > 0$, donde:

$$\frac{t_1}{1 - t_{k+1}} + \frac{t_2}{1 - t_{k+1}} + \cdots + \frac{t_k}{1 - t_{k+1}} = 1$$

Desse modo, definindo y e S_i do seguinte modo:

$$y = \frac{t_1 x_1}{1 - t_{k+1}} + \frac{t_2 x_2}{1 - t_{k+1}} + \cdots + \frac{t_k x_k}{1 - t_{k+1}}$$

$$S_i = \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} \geq 0, \forall i \in 1,2 \ldots, k$$

Vamos ter então:

$$y = S_1 x_1 + S_2 x_2 + \cdots + S_k x_k$$

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_k = 1$$

$$S_i \in [0,1], \forall i \in 1,2, \ldots, k$$

Dessa maneira, assim vamos ter que:

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_k x_k + t_{k+1} x_{k+1}) =$$

$$= f\left((1 - t_{k+1})\left(\frac{t_1 x_1}{1 - t_{k+1}} + \frac{t_2 x_2}{1 - t_{k+1}} + \cdots + \frac{t_k x_k}{1 - t_{k+1}}\right) + t_{k+1} x_{k+1}\right)$$

$$= f\big((1 - t_{k+1}) y + t_{k+1} x_{k+1}\big)$$

Assim, aplicando o Caso inicial para y e x_{k+1} e coeficientes $1 - t_{k+1}$ e t_{k+1}, temos então:

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_k x_k + t_{k+1} x_{k+1}) \leq (1 - t_{k+1}) f(y) + t_{k+1} f(x_{k+1}) =$$

$$= (1 - t_{k+1}) f\left(\frac{t_1 x_1}{1 - t_{k+1}} + \frac{t_2 x_2}{1 - t_{k+1}} + \cdots + \frac{t_k x_k}{1 - t_{k+1}}\right) + t_{k+1} f(x_{k+1})$$

$$= (1 - t_{k+1}) f(S_1 x_1 + S_2 x_2 + \cdots + S_k x_k) + t_{k+1} f(x_{k+1}) (6)$$

Mas, pela hipótese de indução aplicada à $x_1, x_2, \ldots, x_k$ com os coeficientes $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$, temos:

$$f(S_1 x_1 + S_2 x_2 + \cdots + S_k x_k) \leq S_1 f(x_1) + S_2 f(x_2) + \cdots + S_k f(x_k)$$

Assim, como $1 - t_{k+1} > 0$ e $(1 - t_{k+1}) S_i = t_i, \forall i \in 1,2, \ldots, k$, deduzimos então:

$$(1 - t_{k+1}) f(S_1 x_1 + S_2 x_2 + \cdots + S_k x_k) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_k f(x_k)$$

Por fim, somando $t_{k+1} f(x_{k+1})$ dos dois lados, temos:

$$(1 - t_{k+1}) f(S_1 x_1 + S_2 x_2 + \cdots + S_k x_k) + t_{k+1} f(x_{k+1})$$

$$\leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_k f(x_k) + t_{k+1} f(x_{k+1}) (7)$$

Dessa forma, com (6) e (7), devido à (Transitividade) do Teorema 2.3, segue a Desigualdade de Jensen.

O motivo de termos comentado da questão da segunda derivada ser positiva ou nula num intervalo implicar que a função é convexa (ou côncava) nesse mesmo intervalo é exatamente para suprir a condição de convexidade da função para a aplicação da desigualdade de Jensen.

3.5 Processo de Homogeneização de uma desigualdade

Para falarmos do processo de homogeneização, precisamos primeiramente definir o que seria uma função homogênea e, logo após, o que seria uma desigualdade homogênea, para depois discutirmos o processo de homogeneização quando a desigualdade não é homogênea e uma estratégia utilizada para algumas desigualdades homogêneas.

Definição 3.5: Uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita homogênea de grau k quando $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall x_1, x_2, \dots, x_n, t \in \mathbb{R}$

Definição 3.6: Sejam $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq B(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dizemos que a desigualdade é homogênea se, e somente se, A e B são funções homogêneas e seus graus são iguais;

Observação: A definição acima também é válida tanto para "maior que" ($>$), "menor que" ($<$) e "menor ou igual que" ($\leq$).

Intuitivamente, se as funções são homogêneas, o grau de cada função pode ser encontrado ao imaginar que cada termo x_i tem grau 1, donde ao multiplicarmos, somamos 1 de acordo com a quantidade de produtos, se dividirmos, subtraímos 1 de acordo com a quantidade de termos divididos e se tivermos expoentes fracionários, somamos ou subtraímos essas frações de acordo com as respectivas multiplicações/divisões. Perceba que soma ou subtração de funções homogêneas de mesmo grau geram funções homogêneas de tal grau, assim, olhamos parcela a parcela de somas ou subtrações na definição da função para aplicar a ideia intuitiva explicada anteriormente.

Dessa maneira, pelo que fora explicado acima, todas as desigualdades explicitadas antes deste subtópico, com possível exceção da desigualdade de Jensen, são homogêneas.

As funções que compõem a desigualdade de Cauchy-Schwarz são de grau 4, enquanto as do Lema de Titu (considerando-se apenas $\mathrm{t} > 0$) são de grau 1. Todas as funções das desigualdades das médias são de grau 1 e, por fim as da desigualdade do desarranjo são de grau 2. Caso a função f utilizada na desigualdade de Jensen seja homogênea de grau k, então as funções que a compõem serão homogêneas de grau k.

Agora, perceba como, se temos certa desigualdade a provar, ao utilizarmos alguma das desigualdades provadas anteriormente numa desigualdade homogênea, só iremos gerar novas desigualdades homogêneas. Do mesmo modo, ao manipularmos expressões homogêneas da mesma maneira sobre todas as variáveis, continuaremos a ter uma expressão homogênea.

Assim, se queremos provar uma desigualdade que não é homogênea devido aos graus das funções serem distintas ou até mesmo pelas funções não serem homogêneas, muito possivelmente a questão nos dará uma informação a mais, como uma igualdade ou desigualdade que envolve as variáveis, ou possivelmente precisamos aplicar as desigualdades anteriores a potências distintas das variáveis de modo a gerar o que desejamos.

Desse modo, no primeiro caso, utilizando a informação dada, seja por puramente usá-la ou manipulando-a para ter o grau correto, em conjunto com uma das expressões da desigualdade que queremos provar, conseguimos uma nova expressão homogênea que tenha o mesmo grau da outra expressão da desigualdade que queremos demonstrar, de modo que conseguimos utilizar uma das desigualdades mostradas anteriormente para provarmos o que desejamos.

Mas, além dessa abordagem para a homogeneização, há também uma segunda perspectiva, mais sistemática, de como utilizá-la, onde temos uma desigualdade homogênea e a transformamos na mesma desigualdade, mas com uma condição sobre as variáveis que nos ajuda a prová-la mais facilmente:

Processo de homogeneização: Tendo-se uma desigualdade homogênea $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ onde A e B têm grau m, se conhecemos uma expressão homogênea $F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ de grau k, podemos transformar a desigualdade em $A(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ com $y_1, y_2, \dots, y_n$ que satisfazem $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 1$.

Prova:

Como $F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, então podemos elevar tal expressão ao expoente de $-\frac{m}{k}$ e continuará sendo uma expressão positiva, assim, aplicando (P4) do Teorema 2.3, temos:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-\frac{m}{k}} A(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-\frac{m}{k}} B(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Como $F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-\frac{m}{k}} = \left(F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-\frac{1}{k}}\right)^m$, assim temos, por A e B serem funções homogêneas de grau m:

$$A\left(F^{-\frac{1}{k}}x_1, F^{-\frac{1}{k}}x_2, \dots, F^{-\frac{1}{k}}x_n\right) \geq B\left(F^{-\frac{1}{k}}x_1, F^{-\frac{1}{k}}x_2, \dots, F^{-\frac{1}{k}}x_n\right)$$

Assim, chamando $y_i = F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{-\frac{1}{k}}x_i$, obtemos então a desigualdade:

$$A(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq B(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

A qual é a exata desigualdade inicial, no entanto, $y_1, y_2, \dots, y_n$ satisfazem as igualdades acima e o seguinte:

$$x_i = F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\frac{1}{k}}y_i, \forall i \in \{1,2, \dots, n\},$$

Donde, olhando agora para a expressão de F, trocando cada um dos x_i pelo formato acima e se lembrando que F é homogênea de grau k, temos:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F\left(F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\frac{1}{k}}y_1, F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\frac{1}{k}}y_2, \dots, F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\frac{1}{k}}y_n\right) =$$

$$= F(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\frac{k}{k}}F(y_1, y_2, \dots, y_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)F(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Assim, como $F(x_1, x_2, \dots, x_k) > 0$, então podemos dividir ambos os lados por $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e obtemos, por fim, que $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 1$, como queríamos.

3.6 Desigualdade de Young

A desigualdade de Young é quase que consequência direta da Desigualdade de Jensen ao se utilizar os parâmetros corretos, assim vamos ir direto para seu enunciado e prova:

Desigualdade de Young: Sejam $p, q \in \mathbb{R}^+$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Assim, para quaisquer $a \geq 0$ e $b \geq 0$ é válida a desigualdade:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Com condição de igualdade dada por $a^p = b^q$.

Prova:

Se $a = 0$ ou $b = 0$, temos $ab = 0$ e $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq 0$, já que se pelo menos um for positivo, então a soma das frações será positiva, logo a desigualdade segue.

Quando temos $a \neq 0$ e $b \neq 0$, vamos olhar para a situação quando $a^p = b^q$:

$$ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} = a(a^p)^{\frac{1}{q}} = a \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{p}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{p}+\frac{p}{q}} = a^{p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} = a^p$$

Assim, como $ab = a^p = b^q$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos então:

$$ab = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

Como era de se esperar pela condição de igualdade.

Agora, vamos assumir que $a^p \neq b^q$.

Perceba agora que, com auxílio do Apêndice B, tomando-se a função exponencial $f(x) = e^x$ e sua inversa, a função logaritmo, $g(x) = \ln(x)$, e temos que $f''(x) = e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, a função exponencial é convexa, e não só isso, como a desigualdade não possui ocasião de igualdade, a desigualdade dada pela convexidade também não irá ocorrer igualdade, isto é, dados $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$, com $x \neq y$, temos que:

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

Em particular, se escolhermos $t = \frac{1}{p}$, temos que $1 - t = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, daí deduzimos:

$$e^{tx+(1-t)y} < te^x + (1-t)e^y \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{x}{p}} \cdot e^{\frac{y}{q}} < \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q} (8)$$

Assim, a desigualdade já se parece bastante com o formato final da desigualdade de Young, bastando que escolhamos x e y tais que tenhamos $e^x = a^p$ e $e^y = b^q$. Note que podemos de fato fazer isso, pois, como $a^p \neq b^q$, então devemos ter $e^x \neq e^y$, donde encontramos que $x \neq y$, já que se fossem iguais, deveríamos ter igualdade nas exponenciais também. Assim, aplicando a função logaritmo em cada equação, adquirimos:

$$x = \ln(e^x) = \ln(a^p) = pln(a) \Leftrightarrow \ln(a) = \frac{x}{p}$$

$$y = \ln(e^y) = \ln(b^q) = qln(b) \Leftrightarrow \ln(b) = \frac{y}{q}$$

Dessa maneira, iremos ter então da desigualdade (8) e pelo exposto acima:

$$e^{ln(a)} \cdot e^{ln(b)} < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Mas perceba que $e^{ln(a)} = a$ e $e^{ln(b)} = b$, já que a função exponencial é a inversa da função logaritmo, donde segue a desigualdade de Young:

$$ab < \frac{a^P}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Note que a igualdade na desigualdade de Young só ocorre quando $a^p = b^q$, já que, quando são diferentes, não pode ocorrer igualdade pelo desenvolvimento acima.

4 PROBLEMAS

Neste capitulo traremos alguns problemas que foram aplicados em algumas olimpíadas com suas devidas soluções. Em alguns desses problemas procuramos resolver usando mais de uma técnica, pois é importante salientar que a criatividade de quem está resolvendo as questões é muito importante e que não existe um único modo de obter a solução.

1. (Instituto Militar de Engenharia/2013) Sejam p o semiperímetro de um triângulo, S sua área, r e R os raios de suas circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente. Demonstre que:

$$\frac{2\sqrt{3}}{9}S \leq rR \leq \frac{2p^2}{27}$$

Solução:

Primeiramente, da geometria plana, respectivamente, sendo a, b, c os lados opostos aos vértices A, B e C de um triângulo ABC, α, β e γ os respectivos ângulos internos associados aos vértices A, B e C do triângulo ABC, pelas fórmulas de áreas de triângulos e pela fórmula do perímetro, sabemos que:

$$S = p \cdot r = \frac{abc}{4R} > 0$$

$$2p = a + b + c > 0$$

Assim, vamos provar a última desigualdade:

$$p \cdot r = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow rR = \frac{abc}{4p}$$

Assim,

$$rR \leq \frac{2p^2}{27} \Leftrightarrow \frac{abc}{4p} \leq \frac{2p^2}{27} \Leftrightarrow abc \leq \frac{8p^3}{27} = \frac{(2p)^3}{3^3} = \frac{(a+b+c)^3}{3^3},$$

O que é verdade, devido à desigualdade MA≥MG aplicada aos lados a, b, c do triângulo e, como ambos os lados são positivos, multiplicarmos as expressões por elas mesmas 3 vezes para obter o resultado acima:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc.$$

Para provar a primeira desigualdade usaremos:

$$S = p \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{S}{p}$$

Assim, temos que:

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} S \leq rR \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{9} S \leq \frac{SR}{p}$$

Como $S > 0$, podemos multiplicar ambos os lados por S^{-1}, donde temos que o que há acima é equivalente a:

$$\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq \frac{R}{p} \Leftrightarrow \frac{2p}{R} \leq 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{R} \leq 3\sqrt{3}\ (1)$$

Mas, pela Lei dos Senos, sabemos que:

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)} = 2R$$

Donde então temos que:

$$\frac{a}{R} = 2sen(\alpha);$$

$$\frac{b}{R} = 2sen(\beta);$$

$$\frac{c}{R} = 2sen(\gamma),$$

Assim, temos que (1) é equivalente a termos

$$sen(\alpha) + sen(\beta) + sen(\gamma) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Perceba que $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ e a função $f(x) = sen(x), x \in (0, \pi)$ é tal que, pelo Apêndice B:

$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f''(x) = -sen(x)$$

Como $0 < sen(x) < 1, \forall x \in (0,1)$, então $-sen(x) < 0, \forall x \in (0,1)$, logo, temos que a função seno nesse intervalo é côncava, e, dessa maneira, pela desigualdade de Jensen aplicada nos pontos $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma$ e com termos que somam 1 sendo $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{3}$, temos então:

$$\frac{sen(\alpha) + sen(\beta) + sen(\gamma)}{3} \leq sen\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$$

Mas, como α, β e γ são ângulos de triângulo, eles somam π, donde,

$$sen(\alpha) + sen(\beta) + sen(\gamma) \leq 3sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Que mostra que a primeira desigualdade é verdadeira, como queríamos, resolvendo assim o problema.

2. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos, e $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ uma permutação de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Prove que

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$$

Solução:

Como $a_1, a_2, \dots, a_n$ são reais positivos arbitrários, podemos renomeá-los de modo que tenhamos, sem perda de generalidade que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ (1) e ainda termos que $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ continue sendo uma permutação de $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Assim, de $(*)$, nós temos também que, por todos serem positivos:

$$\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{a_1} (2)$$

Assim, por (1) e por (2), pela desigualdade do desarranjo, aplicada sobre a permutação $\left\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}\right\}$ de $\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right\}$ com as variáveis $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$, temos que:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \cdots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} = n$$

Que é exatamente o resultado desejado.

3. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ reais positivos. Mostre que

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

1ª Solução:

Como todas as variáveis estão em $\mathbb{R}^+$, podemos aplicar MA≥MG primeiro para $a_1, a_2, \dots, a_n$ e depois para $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} > 0,$$

Já que todas as variáveis são positivas.

Além disso:

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} > 0$$

Como $n > 0$, temos das duas desigualdades acima:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} > 0$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} > 0$$

Daí, pela (P7) do Teorema 2.3, temos então a desigualdade desejada:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{n^2\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} = n^2$$

2ª Solução:

Como todas as variáveis são positivas, suas raízes quadradas estão bem definidas, donde, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz usando $a_1 \leftarrow \sqrt{a_1}$, $a_2 \leftarrow \sqrt{a_2}, \ldots, a_n \leftarrow \sqrt{a_n}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots, b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$, temos:

$$\left(\left(\sqrt{a_1}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\sqrt{a_2}\right)^{\mathbf{2}} + \cdots + \left(\sqrt{a_n}\right)^{\mathbf{2}}\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right)$$

$$\geq \left(\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2$$

Donde obtemos:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq (1 + 1 + \cdots + 1)^2 = n^2$$

Como queríamos.

3ª Solução:

Como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são todos positivos, por meio de renomeação das variáveis como necessário, podemos supor, sem perda de generalidade que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$, donde obtemos também que $\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{a_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{a_1}$ já que todas as variáveis são positivas.

Assim, vamos desenvolver o produto no lado esquerdo da desigualdade desejada:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right) + \left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots+\frac{a_2}{a_n}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_n}\right)$$

Assim, vamos escrever cada expressão entre parênteses como linhas de uma matriz, sem os sinais de soma:

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{a_1} & \frac{a_1}{a_2} & \cdots & \frac{a_1}{a_n} \\ \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_2}{a_2} & & \frac{a_2}{a_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n}{a_1} & \frac{a_n}{a_2} & \cdots & \frac{a_n}{a_n} \end{bmatrix}$$

Onde o termo geral da matriz é $a_{ij} = \frac{a_i}{a_j}$. Daí, vamos formar n somas do seguinte modo:

Primeiro escolhemos um termo qualquer da primeira linha, e, consecutivamente, vamos escolher um termo de cada linha subsequente, em sequência e sem repetir colunas. Após se formar uma soma, a próxima soma não pode conter termos já utilizados anteriormente.

Assim, ao formarmos as n somas, cada uma delas estará no formato

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n},$$

onde $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ é uma permutação de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Pelo problema anterior e pelas informações que geramos sobre as variáveis, sabemos que

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$$

Assim, como $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$ é a soma dessas n somas construídas anteriormente, e cada uma delas é maior ou igual que n, temos, portanto:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n + n + \cdots + n = n \cdot n$$

$$\therefore (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Como desejávamos.

4. (IMO 1984 – adaptada) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisfazem $x + y + z = 1$. Prove que:

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz$$

Solução:

Perceba que a desigualdade acima é equivalente a

$$2xyz \leq xy + yz + zx$$

Note também que a expressão à esquerda tem grau 3 enquanto a expressão a direita tem grau 2. Portanto, tal desigualdade é não homogênea. No entanto, pelo enunciado ter-nos dado a condição adicional de que $x + y + z = 1$, podemos tornar a desigualdade numa homogênea:

$$2xyz \leq xy + yz + zx = (xy + yz + zx) \cdot 1 = (xy + yz + zx)(x + y + z)$$
$$= x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + x^2z + xyz + xz^2$$

Agora sim a desigualdade é homogênea e é equivalente a:

$$0 \leq x^2y + yz^2 + y^2z + x^2z + xy^2 + xz^2 + xyz$$

A qual é verdadeira, já que $x \geq 0, y \geq 0$ e $z \geq 0$, logo seus produtos e somas (sem subtrações) são todos maiores ou iguais que 0.

5. (Nesbitt) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Demonstre que

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução:

Primeiramente, note que a desigualdade é homogênea, já que ambos os lados possuem funções de x, y, z com mesmo grau igual a 0.

Assim, pelo processo de homogeneização, como $x > 0, y > 0$ e $z > 0$, temos então que $x + y + z > 0$. Logo:

$$\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) \cdot 1 \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)\left(\frac{\frac{1}{x+y+z}}{\frac{1}{x+y+z}}\right) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{x}{x+y+z}}{\frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z}} + \frac{\frac{y}{x+y+z}}{\frac{z}{x+y+z} + \frac{x}{x+y+z}} + \frac{\frac{z}{x+y+z}}{\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

Onde $a + b + c = 1$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Daí, temos que $b + c = 1 - a$, $c + a = 1 - b$ e $a + b = 1 - c$, donde a desigualdade é equivalente a:

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3}{2}$$

Agora, como $a + b + c = 1$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, demos ter então que $a < 1$, $b < 1$ e $c < 1$ já que todos são positivos, portanto, $\{a, b, c\} \subset (0,1)$.

Desse modo, vejamos, portanto, a função $f(x) = \frac{x}{1-x}, x \in (0,1)$ e suas derivadas, com auxílio do Apêndice B:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Logo, como $x \in (0,1)$, então temos $x < 1$, isto é, $1 - x > 0, \forall x \in (0,1)$, logo $(1-x)^{-1} > 0$ e, daí, $2(1-x)^{-3} > 0, \forall x \in (0,1)$, portanto, $f''(x) > 0, \forall x \in (0,1)$, logo, a função f é convexa no intervalo $(0,1)$ e, assim, aplicando a desigualdade de Jensen para $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{3}$, temos:

$$\frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c) \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq 3 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Que é a desigualdade de Nesbitt que desejávamos provar.

6. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Prove que:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}$$

Solução:

Inicialmente, perceba que a desigualdade é homogênea, em que ambas as expressões tem grau 0. Assim, pelo método de homogeneização, por $x + y + z > 0$, podemos supor que $x + y + z = 1$ (1).

Dito isso, perceba que, como $x > 0, y > 0$ e $z > 0$, temos então que todos os denominadores são produtos de somas de termos positivos, logo todos eles são positivos.

Assim, pelo Lema de Titu, temos que:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z) + (y+x)(y+z) + (z+x)(z+y)}$$

$$= \frac{(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 3yz}$$

Mas, como $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$, temos então que $x^2+y^2+z^2+3xy+3xz+3yz = (x+y+z)^2+xy+xz+yz$, logo, disso e por $(*)$, a desigualdade acima se torna:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+x)(y+z)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+xy+xz+yz}$$

$$= \frac{1}{1+xy+xz+yz} (2)$$

Mas, perceba que, como $a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$, então:

$$(x-y)^2 \geq 0$$
$$(x-z)^2 \geq 0$$
$$(y-z)^2 \geq 0$$

O que é equivalente a:

$$x^2-2xy+y^2 \geq 0$$
$$x^2-2xz+z^2 \geq 0$$
$$y^2-2yz+z^2 \geq 0$$

Assim, somando essas 3 desigualdades, obtemos:

$$2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geq 0$$

Ou seja,

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$$

Assim, somando-se $2(xy+xz+yz)$ de ambos os lados, temos:

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz)$$

Como $x+y+z=1$, temos assim:

$$1 \geq 3(xy+xz+yz) \Leftrightarrow xy+xz+yz \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < 1+xy+xz+yz \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+xy+xz+yz} \geq \frac{3}{4} (3)$$

Assim, de (2) e (3) por transitividade das desigualdades, temos por fim a desigualdade desejada:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+x)(y+z)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4}$$

7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Prove que:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

1ª Solução:

Perceba que, como $1 = 1^2$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, temos então:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{1^2}{c}\geq\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}=\frac{3^2}{a+b+c}=\frac{9}{a+b+c}$$

Que é a exata desigualdade pedida, tendo-se utilizado o Lema de Titu.

2ª Solução:

Da desigualdade das médias, sabemos que MA≥MG e que MG≥MH, assim, deduzimos então que MA≥MH, donde, por $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ temos que:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}>0\Leftrightarrow\frac{3}{a+b+c}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c},$$

Que é a exata desigualdade desejada.

8. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que:

$$a^2+b^2+c^2\geq a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{a^2+c^2}$$

Solução:

Vamos olhar para o lado esquerdo multiplicado por 2:

$$2a^2+2b^2+2c^2=\left(a^2+(b^2+c^2)\right)+(b^2+(a^2+c^2))$$

Daí, aplicando MA≥MG para cada parêntese, temos:

$$\frac{a^2+(b^2+c^2)}{2}\geq\sqrt{a^2(b^2+c^2)}=|a|\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\frac{b^2+(a^2+c^2)}{2}\geq\sqrt{b^2(a^2+c^2)}=|b|\sqrt{a^2+c^2}$$

No entanto, lembre-se que $|x|\geq x, \forall x\in\mathbb{R}$ pelo Lema 2.6 e por $\sqrt{x}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}^+$, pela última observação do capítulo 2,

$$|a|\sqrt{b^2+c^2}\geq a\sqrt{b^2+c^2}$$

$$|b|\sqrt{a^2+c^2}\geq b\sqrt{a^2+c^2}$$

Dessa maneira, temos então:

$$\frac{a^2+(b^2+c^2)}{2}\geq a\sqrt{b^2+c^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 2a\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\frac{b^2+(a^2+c^2)}{2}\geq b\sqrt{a^2+c^2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 2b\sqrt{a^2+c^2}$$

Somando ambas as desigualdades acima, obtemos:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2a\sqrt{b^2 + c^2} + 2b\sqrt{a^2 + c^2}$$

Donde, dividindo-se por 2 ambos os lados, obtemos a desigualdade desejada:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a\sqrt{b^2 + c^2} + b\sqrt{a^2 + c^2}$$

9. Prove que, para todo inteiro $n > 1$, tem-se

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Solução:

Perceba inicialmente que é bem possível que seja complicado utilizar diretamente alguma das desigualdades que vimos anteriormente, já que mudando n mudamos tanto o argumento como o expoente no lado direito da desigualdade. Assim temos que ser espertos com o que iremos utilizar.

Para tal, lembrando-se das propriedades do logaritmo natural, temos que:

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)\,, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\ln(a^k) = kln(a), \forall a \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{R}$$

Com isso em mente, olhando para a função $f(x) = \ln(x)\,, x \in \mathbb{R}^+$, temos que $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, assim, a função f é côncava, donde podemos aplicar a desigualdade de Jensen para a $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$ e $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n}(\ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n)) \leq \ln\left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n}\right)$$

Como $n > 0$, temos e pelas propriedades anteriores, temos:

$$\ln(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) = \ln(n!) \leq nln\left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n}\right) = nln\left(\frac{n(n+1)}{2n}\right) = nln\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (1)$$

Assim, como a função exponencial $g(x) = e^x$ é crescente, isto é, se $a \leq b$ temos que $e^a \leq e^b$, por (1) e esse fato, temos:

$$\ln(n!) \leq ln\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Rightarrow e^{\ln(n!)} \leq e^{\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)^n} \Leftrightarrow n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Devido à função exponencial ser a inversa da função logaritmo natural, o resultado segue como desejado.

10. (Romênia) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{n+1}$. Prove que:

$$\sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + \sqrt{x_2(x_{n+1} - x_2)} + \cdots + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)}$$
$$\leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + x_{n+1}(x_{n+1} - x_2) + \cdots + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}.$$

Solução:

Chamando-se $y_i = x_{n+1} - x_i > 0$ e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $a_1 = \sqrt{x_1}, a_2 = \sqrt{x_2}, \dots, a_n = \sqrt{x_n}, b_1 = \sqrt{y_1}, b_2 = \sqrt{y_2}, \dots, b_n = \sqrt{y_n}$, já que temos $x_i > 0$ e $y_i > 0, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$, obtemos então:

$$\left(\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \cdots + \sqrt{x_n y_n}\right)^2$$
$$\leq \left(\left(\sqrt{x_1}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{x_n}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{y_1}\right)^2 + \left(\sqrt{y_2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{y_n}\right)^2\right) =$$
$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = x_{n+1}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

Daí, como ambos os lados são positivos, temos então:

$$\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \cdots + \sqrt{x_n y_n} \leq \sqrt{x_{n+1}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + \sqrt{x_2(x_{n+1} - x_2)} + \cdots + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)}$$
$$\leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + x_{n+1}(x_{n+1} - x_2) + \cdots + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}$$

Que é a exata desigualdade que queríamos.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo aprofundar o estudo sobre desigualdades, demonstrando-se primeiramente teoremas, propriedades e lemas de corpo e ordem dos números Reais.

De posse desses resultados, fizemos uso deles nas demonstrações das desigualdades elementares aqui apresentadas e partimos para sua aplicação em problemas olímpicos, mostrando que, em alguns casos, podemos fazer uso de diferentes desigualdades para resolver o mesmo problema, onde a criatividade é fundamental na solução.

Por fim, espero que este trabalho sirva como ferramenta pedagógica para alunos e professores, de modo que possam se aprofundar nos estudos sobre desigualdades e seu uso em diversos problemas olímpicos.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo.** 5. ed. São Paulo: LTC, 2001. 778 p. 1 v

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres**. Polinômios e Equações Algébricas.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018. (Coleção PROFMAT).

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Conjuntos e Funções. 9. ed. São Paulo: Ed. Atual, 2013.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Polos olimpicos de treinamento intensivo**. 2022. desigualdades. Disponível em: https://poti.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=35 Acesso em: 5 dez. 2022.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real Volume 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 1993. (Coleção Matemática Universitária).

SICHINEL, Valentino Amadeus. **Desigualdades Uma Viagem Olímpica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ. Sistema de Bibliotecas. **Guia de normalização de trabalhos acadêmicos.** 4. ed. Fortaleza, CE, 2022. 170 p. Disponível em: https://www.uece.br/biblioteca/wp-content/uploads/sites/27/2022/12/GUIA-UECE-2022__Atualizado-13.12.2022.pdf. Acesso em: 27 jan. 2023.

APÊNDICE A – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Baseando-se nas ideias de (IEZZI, 2013), vamos deduzir alguns resultados sobre funções quadráticas, principalmente sobre a existência de raízes:

Definição: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função quadrática quando sua lei é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Uma raiz de tal função é um certo $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = ak^2 + bk + c = 0$.

Vamos, dessa maneira, analisar o formato da função para encontrar suas raízes:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como $a \neq 0$, podemos reescrever essa lei como:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Dessa forma, vamos completar quadrados dentro dos parênteses:

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Assim, chamando-se $\Delta = b^2 - 4ac$, temos que:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Assim, temos 3 casos a considerar:

1º Caso: $\Delta > 0$

Nessa situação, existe $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}^+$, donde, pelo produto notável $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$, temos:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

O que é equivalente a termos:

$$f(x) = a\left(x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$

Assim, temos então que f possui 2 raízes, as quais são:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Além disso, se $a > 0$, temos que $z_1 < z_2$ e se $a < 0$, temos $z_1 > z_2$, já que $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}^+$.

Desse modo, temos $f(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$ e, além disso, temos alguns casos a considerar:

Subcaso 1.1: $x < z_1 < z_2$:

Assim, iremos ter então que $z_1 - x > 0$ e $z_2 - x > 0$, ou seja, obtemos $(z_1 - x)(z_2 - x) > 0$, o que é equivalente a termos $(x - z_1)(x - z_2) > 0$. Assim, o sinal de $f(x)$ depende de a, isto é, se $a > 0$, teremos que $f(x) > 0$ e se $a < 0$, temos então que $f(x) < 0$. Observe que não precisamos nos preocupar com a posição relativa das raízes quando $a < 0$, já que, de qualquer modo, teremos que x será menor que ambas.

Subcaso 1.2: $z_1 < x < z_2$

Nesta situação, temos que $x - z_1 > 0$ e $x - z_2 < 0$, donde deduzimos, portanto, que $(x - z_1)(x - z_2) < 0$, assim, o sinal de f será o sinal "contrário" ao sinal de a, isto é, se $a > 0$, então $f(x) < 0$ e se $a < 0$, temos que $f(x) > 0$. Analogamente ao caso anterior, não precisamos nos preocupar com as posições relativas das raízes, que se invertem quando $a < 0$, se sabemos que x está entre elas, o resultado seguirá do mesmo modo.

Subcaso 1.3: $z_1 < z_2 < x$

Neste caso, deduzimos que $x - z_1 > 0$ e $x - z_2 > 0$ e, assim, temos $(x - z_1)(x - z_2) > 0$, e este subcaso se reduz ao subcaso 1.1.

Perceba que quando $x = z_1$ ou $x = z_2$, temos então que $f(x) = 0$, já que tais números são as raízes da função.

Portanto, em resumo, temos:

1ª Situação: $a > 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < z_1 \; ou \; z_2 < x$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = z_1 \; ou \; x = z_2$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow z_1 < x < z_2$$

2ª Situação: $a < 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow z_2 < x < z_1$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = z_1 \; ou \; x = z_2$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < z_2 \; ou \; z_1 < x$$

2º Caso: $\Delta = 0$

Nesse caso, temos que a função f tem lei no seguinte formato:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Assim, ela possui duas raízes iguais a:

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Perceba assim que, como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, então a irá definir o sinal de f, isto é, se $a > 0$, teremos $f(x) \geq 0$ e se $a < 0$, obteremos $f(x) \leq 0$, assim, temos duas situações:

1ª Situação: $a > 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{b}{2a}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$f(x) < 0 \; não \; ocorre.$$

2ª Situação: $a < 0$

$$f(x) > 0 \; não \; ocorre.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{b}{2a}$$

3º Caso: $\Delta < 0$

Devido a essa circunstância, vamos ter que:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right)$$

Como $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$ e, por $4a^2 = (2a)^2 > 0$ e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, temos então que necessariamente f terá o mesmo sinal que a e não possui raiz, isto é, temos então 2 situações:

1ª Situação: $a > 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = 0\ não\ ocorre.$$
$$f(x) < 0\ não\ ocorre.$$

2ª Situação: $a < 0$

$$f(x) > 0\ não\ ocorre.$$
$$f(x) = 0\ não\ ocorre.$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Desse modo, nós temos todas as situações analisadas cuidadosamente, e elas nos dão um resultado bastante importante sobre funções quadráticas:

Se f é uma função quadrática tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que deduzimos acima, isso obriga a termos $\Delta \leq 0$, que é exatamente o que fora utilizado para a prova da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso, se $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então necessariamente temos que $\Delta < 0$.

APÊNDICE B – RESULTADOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Para os resultados aqui apresentados, iremos nos basear nas seções 3.2, 3.3, 3.9, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.7, 7.10, 9.1 e 9.2 de (GUIDORIZZI, 2001).

Dessa maneira, vamos às definições:

Definição 1: Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f: X \to Y$ uma função dada por $y = f(x)$. Assim, vamos dizer que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$, obtemos então que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Essa definição significa, de modo simples, que se dermos uma margem de erro $\varepsilon > 0$, conseguimos encontrar um valor $\delta > 0$ tal que, escolhendo qualquer $x \in X$ de modo que sua distância (em módulo) a x_0 seja menor que δ, obrigamos que a distância de $f(x)$ a L seja menor (em módulo) que ε. Caso não consigamos encontrar $\delta > 0$ para algum $\varepsilon > 0$ escolhido, então ou L não é o limite de f quando x está próximo de x_0 ou o limite não existe.

A partir dessa definição, de manipulações algébricas e da Desigualdade Triangular, pode-se provar as propriedades operatórias de limites, cujas provas podem ser encontradas na seção 3.9 de (GUIDORIZZI, 2001):

Propriedades operatórias de limites: Dados $k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, temos:

(P1):

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(P2):

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = kL = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

(P3):

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$$

(P4): Se $M \neq 0$, temos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

Com tais propriedades em mãos, vamos agora para a definição de derivada:

Definição: Definimos a função $f': X' \to \mathbb{R}$, chamada "derivada de f" ou "f linha", em que $X' \subset X$ sendo dada por

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x},$$

quando o limite à direita existe e é um número real. Dizemos que f é derivável quando $X' = X$, isto é, quando f é derivável em todo ponto de seu domínio.

Com tal definição e diversos resultados sobre limites, pode-se provar todas as seguintes derivadas, às quais estão devidamente provadas em (GUIDORIZZI, 2001):

Derivada de $\boldsymbol{f(x) = x^n}$:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Derivada de $\boldsymbol{f(x) = e^x}$:

$$f'(x) = e^x$$

Derivada de $\boldsymbol{f(x) = ln(x)}$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Derivada de $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$:

$$f'(x) = \cos(x)$$

Derivada de $\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$:

$$f'(x) = -sen(x)$$

Regra da cadeia: Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis em que a imagem de g está no domínio de f. Então se $h(t) = f\big(g(t)\big)$, é válido o seguinte resultado:

$$h'(t) = f'\big(g(t)\big)g'(t)$$

Vamos falar agora das propriedades operatórias de derivadas:

Propriedades operatórias de derivadas:

Se f e g são funções definidas em $X \subset \mathbb{R}$, tendo-se X' como domínio das suas derivadas, e dado $k \in \mathbb{R}$ definimos as funções $f + g$, kf, fg e $\frac{f}{g}$ da seguinte maneira:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, onde\ g(x) \neq 0$$

Desse modo, com tais definições em mente, podemos falar das regras operatórias de derivadas:

(P1):

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(P2):

$$(kf)'(x) = kf'(x)$$

(P3):

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(P4):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

As provas de todas essas propriedades podem ser encontradas na Seção 7.7 de (GUIDORIZZI, 2001).

Por fim, o último resultado necessário para este trabalho é o seguinte sobre derivadas:

Crescimento e decrescimento em intervalos: Se f é derivável num intervalo aberto I, temos que:

1) Se $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, então f é crescente em I
2) Se $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, então f é decrescente em I

Tal resultado é provado na seção 9.2 de (GUIDORIZZI, 2001) utilizando-se resultados das seções 3.2 e 9.1, juntamente com o que fora citado anteriormente.