



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ JULIERME FREITAS LIMA

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: ESTUDO DE PROBLEMAS E APLICAÇÕES

QUIXADÁ - CEARÁ
2023

JOSÉ JULIERME FREITAS LIMA

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: ESTUDO DE PROBLEMAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues.

QUIXADÁ - CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos pelo(a)

Lima, Jose Julierme Freitas.

Probabilidade geométrica: estudo de problemas e aplicações
[recurso eletrônico] / Jose Julierme Freitas Lima. - 2023.
56 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual
do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado
Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional,
Quixadá, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues.

1. Probabilidade geométrica. 2. Problemas. 3. Aplicações..
I. Título.

JOSÉ JULIERME FREITAS LIMA

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: ESTUDO DE PROBLEMAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de matemática.

Aprovada em: 18 de maio de 2023.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues (Orientador)

Instituto Federal do Ceará - IFCE



Prof. Dr. Diego da Silva Pinheiro

Universidade Estadual do Ceará - UECE



Prof.ª Dra. Rosa Tayane de Vasconcelos

Instituto Federal do Ceará - IFCE

A minha querida e amada avó, Maria das Graças da Silva Freitas (in memoriam) por todo o incentivo e apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Maria do Socorro, por toda dedicação e esforço para me proporcionar o estudo e ter a melhor educação possível.

A Lauana Paiva, minha namorada, por todo o apoio, incentivo, companheirismo, compreensão antes e durante a realização de todo o mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Diego Rodrigues pela dedicação, disponibilidade e contribuições relevantes para o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Jobson Oliveira pelos ensinamentos e empatia durante todo o curso.

Aos meus colegas de curso pelos momentos compartilhados, os estudos realizados e o companheirismo.

Aos amigos Fredmar Lima, Dinardo Alves, Jonh Nathan, Lucas Oliveira, Jorge Michel, Felipe Oliveira e Luciano Thiago por sempre me incentivarem a realizar o PROFMAT.

A gestão da EEEP Professor Walquer Cavalcante Maia pelo apoio e flexibilização nos horários visando proporcionar a realização do mestrado.

A Prof.^a Cristina Marques pela colaboração na revisão ortográfica desse trabalho.

A todos os meus colegas do curso, em especial, Lindomar Dutra, Marcos Monteiro, Neyara Oliveira e Viviane Celedônio pela parceria nas viagens, os conhecimentos compartilhados, os estudos realizados e o companheirismo.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela idealização e realização do PROFMAT.

“A experiência não permite nunca atingir a certeza absoluta. Não devemos procurar obter mais que uma probabilidade.”

(Bertrand Russell)

RESUMO

Esse trabalho tem por finalidade exibir um rol de problemas (e suas resoluções), conceitos e aplicações de probabilidade que envolvem as noções geométricas de comprimento, área e volume. Mostraremos as definições de Probabilidade Geométrica e as estratégias utilizadas na resolução de problemas em \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Também abordaremos aplicações da Probabilidade Geométrica tais como: o problema do macarrão, o paradoxo de Bertrand, o problema da agulha de Buffon, a estimativa do número π , medidas de bacias hidrográficas e o jogo dos discos, que conduzem a uma visão mais ampla e geométrica da probabilidade, sendo um diferencial no estudo desse relevante conteúdo. Desejamos divulgar e contribuir com um material que auxilie estudantes interessados em probabilidade geométrica, tendo em vista que, esse conteúdo é pouco abordado no ensino básico e superior.

Palavras-chave: Probabilidade Geométrica; Problemas; Aplicações.

ABSTRACT

This work aims to display a list of problems (and their resolutions), concepts and applications of probability that involve the geometric notions of length, area and volume. We will show the definitions of Geometric Probability and the strategies used in solving problems in \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . We will also address applications of Geometric Probability such as: the Buffon's noodle problem, Bertrand's paradox, Buffon's needle problem, estimating the number π , watershed measurements and the game of discs, which lead to a broader and more comprehensive view geometric probability, being a differential in the study of this relevant content. We desire to disseminate and contribute with material that helps students interested in geometric probability, considering that this content is rarely addressed in basic and higher education.

Keywords: Geometric Probability; Problems; Applicat

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Segmento unitário AB.....	14
Figura 2 -	Equação da reta $x + y = 1$.....	14
Figura 3 -	Triângulos formados.....	15
Figura 4 -	Representação em \mathbb{R}.....	17
Figura 5 -	Seguimento \overline{OA} de comprimento L.....	18
Figura 6 -	Segmento de reta.....	19
Figura 7 -	Quadrado $EFGH$ representado no plano cartesiano.....	19
Figura 8 -	Região formada por $y - x < \frac{1}{4}$.....	20
Figura 9 -	Interseção das figuras 7 e 8.....	20
Figura 10 -	Representação em \mathbb{R}^2.....	21
Figura 11 -	Região $OPQR$ representada no plano cartesiano.....	22
Figura 12 -	Hexágono cinza representada no plano cartesiano.....	23
Figura 13 -	Triângulo equilátero de lado igual a 3.....	24
Figura 14 -	Ilustração das possíveis escolhas do ponto M.....	25
Figura 15 -	Pentágono $ABCDE$ representado no plano cartesiano.....	26
Figura 16 -	Representação em \mathbb{R}^3.....	27
Figura 17 -	Esfera C circunscrita e inscrita no cubo de aresta a.....	28
Figura 18 -	Cone circular reto inscrito na base do paralelepípedo.....	29
Figura 19 -	Triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro O e raio r.....	30
Figura 20 -	Corda AB perpendicular a \overline{OP} na circunferência de centro O..	31
Figura 21 -	Corda AP na circunferência de centro O.....	32
Figura 22 -	Raio \overline{OP} na circunferência de centro O.....	32
Figura 23 -	Agulha entre as retas paralelas no plano.....	34
Figura 24 -	Representação do espaço amostral $\Omega = \pi d$.....	35
Figura 25 -	Possibilidades de a agulha cruzar as retas paralelas.....	35
Figura 26 -	Representação da região S no plano cartesiano.....	36
Figura 27 -	Agulha não cruzar as retas paralelas no plano.....	37
Figura 28 -	Agulha cruzar uma reta paralela no plano.....	37
Figura 29 -	Representação da região S no plano cartesiano ($h \geq d$).....	38
Figura 30 -	Retangulos congruentes no plano.....	41

Figura 31 - Agulha inteiramente dentro retângulo.....	41
Figura 32 - Paralelepípedo de dimensões π, b e a	42
Figura 33 - Região coberta pela extremidade inferior da agulha ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$).....	43
Figura 34 - Região coberta pela extremidade inferior da agulha ($\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$).....	43
Figura 35 - Representação dos ladrilhos quadrados de lado L	47
Figura 36 - Representação dos lançamentos do disco de diâmetro d	47
Figura 37 - Gráfico da função $P(d) = \frac{1}{L^2} d^2 - \frac{2}{L} d + 1$	37
Figura 38 - Representação do piso com rejunte.....	49
Figura 39 - Tipos de piso.....	50
Figura 40 - Gráfico da função $P(L) = 1 - 24 \cdot \frac{1}{L} + 144 \cdot \frac{1}{L^2}$	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aproximação de π com a Agulha de Buffon.....	40
Tabela 2 - Função de probabilidade conforme o tipo do piso utilizado....	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	O Problema do Macarrão.....	15
2	CONCEITOS E PROBLEMAS.....	17
2.1	Problemas envolvendo comprimento.....	17
2.2	Problemas envolvendo áreas.....	21
2.3	Problemas envolvendo volumes.....	27
3	APLICAÇÕES DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA.....	30
3.1	Paradoxo de Bertrand.....	30
3.1.1	Soluções para o paradoxo de Bertrand.....	31
3.2	Problema da agulha de Buffon.....	33
3.2.1	Estimando o número π	39
3.3	Generalização do problema da agulha de Buffon e medidas de bacias hidrograficas.....	40
3.4	O Jogo dos Discos.....	46
3.4.1	Piso com rejunte.....	49
3.4.2	Variando os tipos de piso.....	49
3.4.3	Explorando o Jogo dos Discos.....	51
4	CONCLUSÃO.....	55
	REFERÊNCIAS.....	56

1 INTRODUÇÃO

O estudo da Teoria das Probabilidades é de fundamental importância no ensino básico, visto que a probabilidade assume papel importante no desenvolvimento de várias áreas, como: análise genética (medicina), no controle de qualidade de uma produção industrial (engenharia), na avaliação de variedades de plantas (agricultura), na previsão de riscos em investimentos financeiros (economia), nas previsões meteorológicas, e até mesmo, em estudos estáticos do comportamento humano.

Mesmo diante de todos esses exemplos de aplicações e utilização da probabilidade, o estudo desse ramo da matemática no ensino básico está fadado ao ensino e aprendizagem de conceitos e definições da probabilidade clássica (ou discreta) para auxiliar na resolução de problemas associados a métodos de contagem, geralmente envolvendo moedas, cartas, dados, entre outros. Problemas estes que, apresentam espaços amostrais/eventos finitos e igualmente prováveis, podendo ser representados por números inteiros. A utilização, quase que exclusiva, da probabilidade clássica no ensino básico também ocorre pela falta de conhecimento de outras áreas da probabilidade que abordem problemas que vão além dos métodos de contagem. No estudo da Teoria das Probabilidades podemos nos deparar com problemas que não se enquadram na probabilidade clássica (ou discreta). Por exemplo, se X é um número real aleatório entre 0 e 3. Qual a probabilidade de X estar mais próximo de 0 que de 1? Se um alvo circular é formado por dois discos concêntricos, o disco maior possui raio igual a 20 cm e o menor 10 cm. Qual a probabilidade de, ao lançar um dardo, de acertar o disco menor? Se três amigos escolhem, cada um, um número real entre 0 e 1. Qual a probabilidade de que a soma dos quadrados desses números não seja maior que 1?

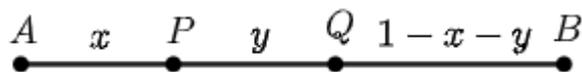
Nos problemas, como os citados acima, aparecem naturalmente conjuntos infinitos de resultados equiprováveis que, podem assumir qualquer valor em um intervalo real, portanto estamos diante de problemas que envolvem espaços infinitos de probabilidade. Quando nos deparamos com tais espaços infinitos estamos abordando a probabilidade contínua. Para ilustrar melhor a discussão, vejamos a seguir o famoso problema do macarrão.

1.1 O Problema do Macarrão

“Um macarrão cai no chão e se parte, de forma aleatória, em três pedaços. Qual a probabilidade de os três pedaços formarem os lados de um triângulo?”

Tomando um segmento \overline{AB} de comprimento unitário. Dividindo esse segmento unitário em três partes de modo que, $\overline{AP} = x$, $\overline{PQ} = y$ e $\overline{QB} = 1 - x - y$, temos que a todas formas de se obter um triângulo é dado por um par ordenado (x, y) , onde $x > 0$, $y > 0$ e $1 - x - y > 0$, pertencente a uma região limitada do plano cartesiano.

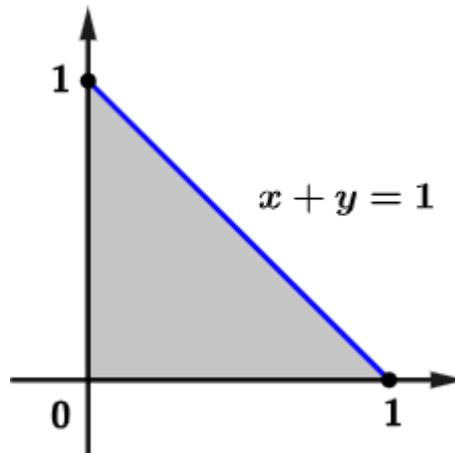
Figura 1: Segmento unitário \overline{AB} .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Do fato de $x > 0$, $y > 0$ e $x + y < 1$, temos uma região triangular como mostra na figura abaixo.

Figura 2: Equação da reta $x + y = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela desigualdade triangular é possível que os seguimentos de comprimento x , y e $1 - x - y$ formem um triângulo se, e somente se:

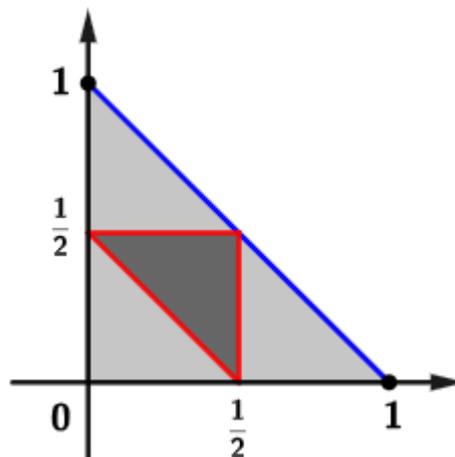
$$i) x < y + 1 - x - y \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\text{ii) } y < x + 1 - x - y \Rightarrow y < \frac{1}{2}$$

$$\text{iii) } 1 - x - y < x + y \Rightarrow x + y > \frac{1}{2}$$

Daí, teremos que os pares ordenados (x, y) , que satisfazem as condições da desigualdade triangular, ou seja, formam um triângulo, pertencem a uma região triangular delimitada por $x < \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$ e $x + y > \frac{1}{2}$, como mostra a figura abaixo.

Figura 3: Triângulos formados.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A região triangular terá área igual a $\frac{1}{4}$ da área da região total. Logo, probabilidade de um macarrão cair no chão, se partir em três pedaços de forma aleatória e os três pedaços formar um triângulo é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Podemos perceber que os conjuntos de pares ordenados (x, y) que constituem o “número de casos favoráveis” e “número de casos possíveis” apresentados na resolução do problema são conjuntos infinitos e não enumeráveis, portanto, não podem ser contados e representados por números inteiros. Assim, a probabilidade pedida no problema do macarrão não pode ser definida como a razão entre casos favoráveis e casos possíveis, entretanto, pode-se calcular a probabilidade por meio de considerações geométricas. É preciso utilizar conceitos e definições de duas áreas distintas da matemática na resolução do problema, a geometria e a probabilidade. O que reforça a necessidade de abordar a probabilidade em uma

perspectiva mais geométrica, de forma ampla, o que resulta também na ampliação do conhecimento dos estudantes.

Portanto, conceitos, problemas e aplicações de um ramo da probabilidade que não é abordado no ensino básico, a Probabilidade Geométrica, serão apresentados nos capítulos seguintes.

2 CONCEITOS E PROBLEMAS

A Probabilidade Geométrica é um ramo da probabilidade em que é preciso utilizar noções geométricas para a resolução de problemas probabilísticos. Existem muitos problemas simples e interessantes que podem motivar professores e alunos a estudarem a probabilidade de forma mais ampla, problemas com espaços infinitos de probabilidade, que envolvem valores contínuos para eventos e espaços amostrais. Além disso, abordar a Probabilidade Geométrica no ensino básico pode ser uma importante ferramenta na consolidação de aprendizagens geométricas e probabilísticas.

Podemos nos deparar com as mais variadas noções geométricas na resolução de problemas de probabilidade geométricas, porém, as mais utilizadas são as noções de comprimento, área e volume. Desse modo, apresentaremos a seguir um rol de problemas e conceitos que envolvem essas três noções geométricas importantes para o cálculo de probabilidades.

2.1 Problemas envolvendo comprimento

Definição de Probabilidade Geométrica em \mathbb{R} .

Se P e Q são pontos de uma linha de extremos A e B , admitamos que a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença a linha PQ (contida em AB) é proporcional ao comprimento de PQ e não depende da posição de dos pontos P e Q sobre AB . Assim, selecionando um ponto de AB , a probabilidade de que ele pertença a PQ sera:

$$P = \frac{\text{Comprimento } PQ}{\text{Comprimento } AB}.$$

Figura 4: Representação em \mathbb{R} .



Fonte: Elaborada pelo autor

Problema 1. Se X é um número real aleatório entre 0 e 3. Qual a probabilidade de X estar mais próximo de 0 que de 1?

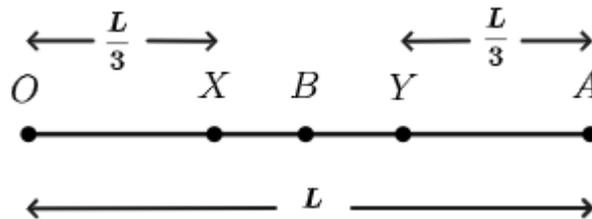
A variável X pode assumir infinitos valores, por isso iremos considerar o intervalo de possibilidades para a escolha de X no intervalo $[0, 3]$. Note que X estará mais próximo de 0 que 1 se $X < \frac{1}{2}$, desse modo, a probabilidade é dada por

$$P = \frac{\text{Comprimento do intervalo onde } 0 < X < 1/2}{\text{Comprimento do intervalo onde } 0 < X < 3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6} \approx 17\%.$$

Problema 2. Seja B um ponto escolhido ao acaso sobre um segmento \overline{OA} de comprimento L . Qual a probabilidade de que o comprimento do menor dos segmentos \overline{OB} e \overline{BA} seja superior a $\frac{L}{3}$?

Consideremos os pontos $X, Y \in \overline{OA}$, onde $\overline{OX} = \overline{XY} = \overline{YA} = \frac{L}{3}$. Os casos favoráveis são aqueles em que ponto B é interior ao segmento \overline{XY} (figura 5), visto que, $\min\{\overline{OB}, \overline{BA}\} > \frac{L}{3}$.

Figura 5: Segmento \overline{OA} de comprimento L .



Fonte: Elaborada pelo autor.

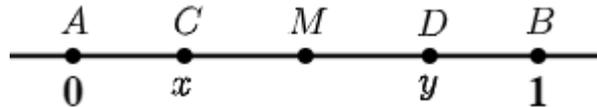
Logo, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{\overline{XY}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{L}{3}}{L} = \frac{1}{3}.$$

Problema 3. Seja M o ponto médio de um segmento. C é escolhido aleatoriamente em \overline{AM} e D é escolhido aleatoriamente em \overline{MB} , qual a probabilidade de que $\overline{CD} < \frac{1}{4} \overline{AB}$?

Considerando, na reta \overline{AB} , um sistema de coordenadas de modo que a coordenada de A seja 0 e a de B seja 1. Sendo x e y , respectivamente, as coordenadas de C e D .

Figura 6: Segmento de reta.



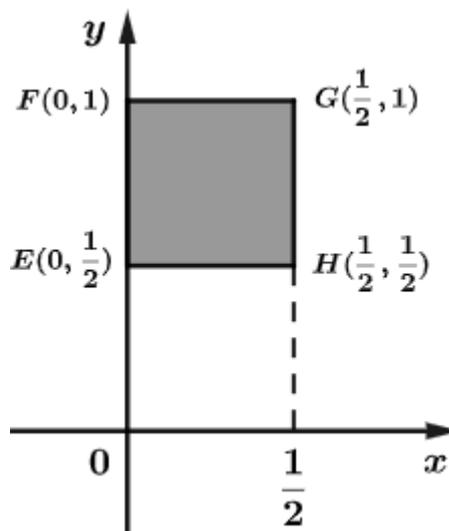
Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, temos que

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} < y < 1.$$

Assim, conclui-se que o conjunto de pares ordenados (x, y) , que satisfazem as condições acima mostradas, pertencem ao quadrado EFGH.

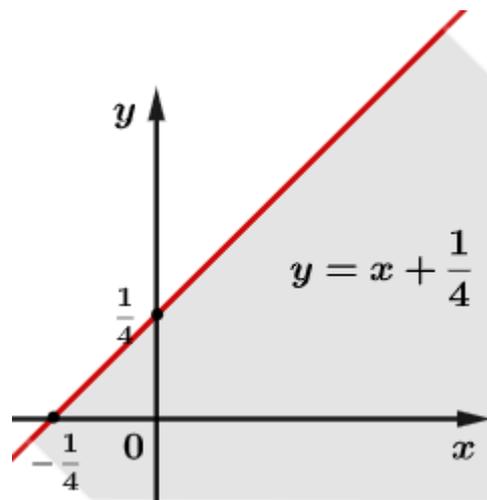
Figura 7: Quadrado EFGH representado no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $\overline{CD} = y - x$ e $\overline{AB} = 1$, os casos favoráveis, ou seja, que $\overline{CD} < \frac{1}{4} \overline{AB}$ é equivalente a região formada por $y - x < \frac{1}{4}$.

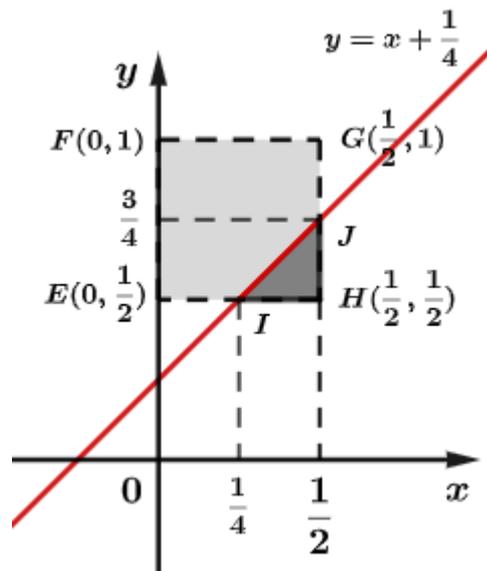
Figura 8: Região formada por $y - x < \frac{1}{4}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Representando a interseção das figuras 7 e 8, temos que

Figura 9: Interseção das figuras 7 e 8.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, a probabilidade pedida será

$$P = \frac{\text{Área do triângulo } IJH}{\text{Área do quadrado } EFGH} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right)}{\left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{1}{8}.$$

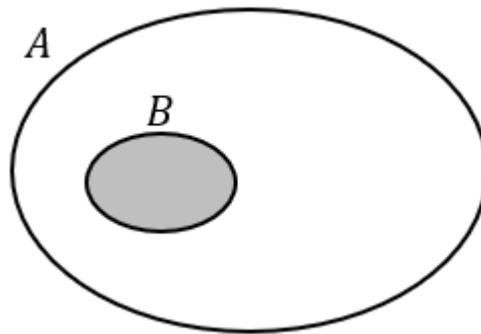
2.2 Problemas envolvendo áreas

Definição de Probabilidade Geométrica em \mathbb{R}^2 .

Considere que uma região A do plano contém a região B do plano, como na figura 10. É razoável admitir que a probabilidade de um ponto de A também pertencer à B , é proporcional a área de B e não depende da posição que B ocupa em A . Portanto, selecionando ao acaso um ponto em A , a probabilidade de que ele pertença a B será

$$P = \frac{\text{Área de } B}{\text{Área de } A}.$$

Figura 10: Representação em \mathbb{R}^2 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Problema 4. Um alvo circular é formado por dois discos concêntricos, o disco maior possui raio igual a 20 cm e o menor 10 cm. Qual a probabilidade de, ao lançar um dardo, de acertar o disco menor?

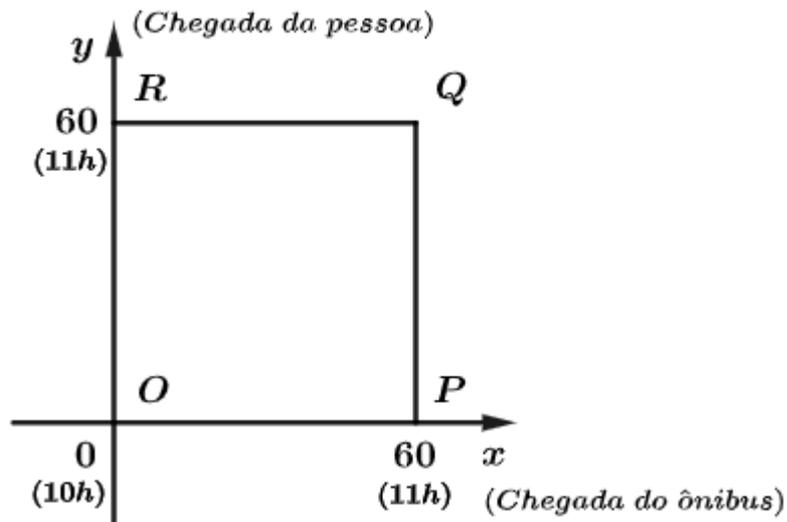
O disco menor possui área igual a $\pi \cdot 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2$. O disco maior, que contém o disco menor e o anel externo possui área igual a $\pi \cdot 20^2 = 400\pi \text{ cm}^2$. Logo, a probabilidade de acertar o disco central será

$$P = \frac{100\pi}{400\pi} = \frac{1}{3} \approx 25\%.$$

Problema 5. Entre 10h e 11h da manhã um ônibus para na parada de ônibus e espera 5 minutos antes de partir. Uma pessoa ao chegar no ponto de ônibus espera 20 minutos antes de ir embora. Qual a probabilidade de a pessoa pegar o ônibus?

Seendo x o tempo de chegada do ônibus e y o tempo da chegada da pessoa na parada de ônibus, e representando o sistema de coordenadas (x, y) no plano cartesiano temos a região $OPQR$, indicada a abaixo, representando todas as possibilidades para os pares ordenados (x, y) .

Figura 11: Região $OPQR$ representada no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

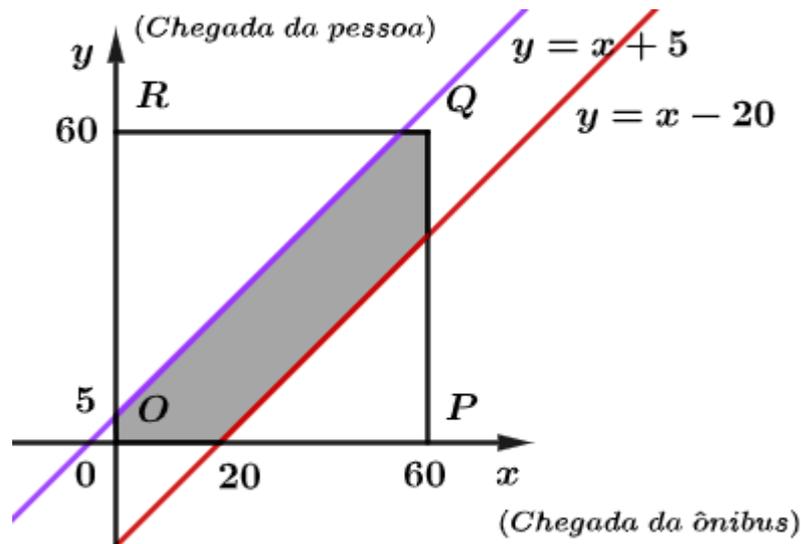
Conforme o tempo de espera de ambos na parada de ônibus, para que a pessoa possa pegar o ônibus o intervalo de tempo entre a chegada da pessoa e do ônibus deve obedecer às seguintes condições:

i) A diferença entre o tempo de chegada do ônibus e da pessoa tem que ser menor ou igual a 20 minutos, ou seja, $x - y \leq 20$.

ii) A diferença entre o tempo de chegada da pessoa e do ônibus tem que ser menor ou igual a 5 minutos, ou seja, $y - x \leq 5$.

Dessas condições, concluímos que os pares ordenados (x, y) que respondem aos tempos de chegada para os quais a pessoa pega o ônibus pertencem a região do hexágono cinza conforme a figura a seguir:

Figura 12: Hexágono cinza representada no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

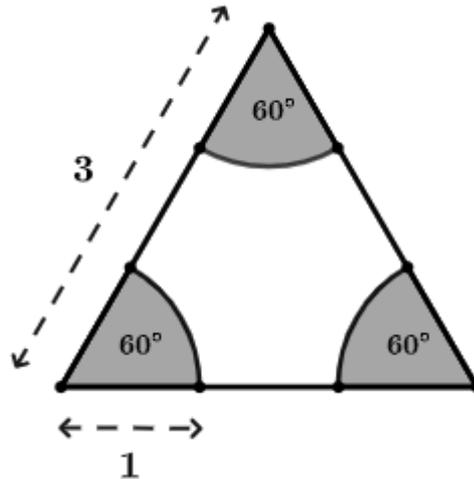
A região $OPQR$ tem área $60 \times 60 = 3600$. E a área interna a região $OPQR$ e externa ao hexágono é composta por dois triângulos retângulos isósceles. Assim a área do hexágono é $3600 - (40^2 + 55^2)/2 = 1287,5$. Logo, a probabilidade de a pessoa pegar ônibus é dada por:

$$P = \frac{\text{Área do hexágono}}{\text{Área da região } OPQR} = \frac{1287,5}{3600} = 0,3576 = 35,76\%.$$

Problema 6. (AFA). Um ponto é selecionado aleatoriamente em um triângulo equilátero de lado $l = 3$. Qual probabilidade de a distância desse ponto a qualquer vértice ser maior do que 1?

O ponto selecionado deve pertencer a região em branco do triângulo equilátero (figura 13), visto que, todos os pontos pertencentes aos setores circulares (regiões cinzas) estão a distância 1 dos vértices do triângulo.

Figura 13: Triângulo equilátero de lado igual a 3.



Fonte: Elaborada pelo autor.

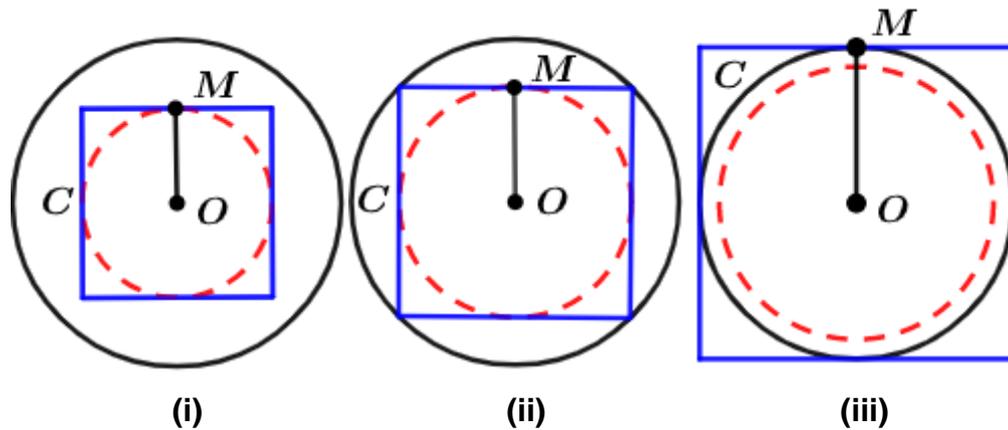
A área do triângulo equilátero é $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3^2\sqrt{3}}{4}$. E a área da região em branco é dada pela diferença entre área do triângulo equilátero e a área dos três setores circulares. Como o triângulo é isósceles, o setor circular tem ângulo igual a 60 graus e raio 1, portanto, a área dos três setores circulares corresponde a área de um semicírculo de raio 1, que é igual a $\frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$. Assim, a área da região em branco é $\frac{3^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{9\sqrt{3}-2\pi}{4}$. Logo, a probabilidade de o ponto selecionado, ao acaso, estar a distância maior que 1 dos vértices do triângulo é:

$$P = \frac{\text{Área da região em branco}}{\text{Área do triângulo equilátero}} = \frac{\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{4}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \approx 0,5971 = 59,71\%.$$

Problema 7. Um ponto M é selecionado ao acaso no interior de um círculo C, de raio 2 e centro O. Em seguida, constrói-se um quadrado também centrado em O, que tem M como ponto médio de um de seus lados. Calcule a probabilidade de que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo C.

Vejamos que o fato do quadrado está contido no círculo depende exclusivamente da distância de O e M. A figura abaixo ilustra três possíveis escolhas, dentre infinitas, para o ponto M.

Figura14: Ilustração das possíveis escolhas do ponto M.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura (i) e (ii) temos casos favoráveis, ou seja, em que o quadrado está totalmente contido no círculo C, enquanto na figura (iii), temos uma situação desfavorável. Observe que na figura (ii) a distância de M a O é maior possível, visto que, os vértices do quadrado estão sobre a borda do círculo.

Na figura (ii), seja l a medida do lado do quadrado. Temos então, que a medida de $\overline{OM} = l/2$ e que a diagonal do quadrado mede $l\sqrt{2}$. Desse modo, temos que a diagonal do quadrado é igual ao diâmetro do círculo C, logo, mede 4. Então,

$$l\sqrt{2} = 4 \Rightarrow l = 2\sqrt{2} \Rightarrow \overline{OM} = \sqrt{2}.$$

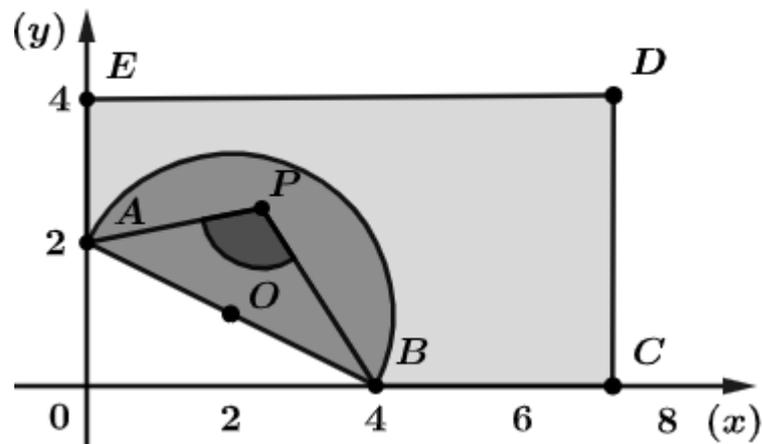
Assim, os casos favoráveis são aqueles em que M se encontra dentro do disco de raio $r = \sqrt{2}$ e centro O. Portanto, a probabilidade desejada é dada por:

$$P = \frac{\text{Área do círculo de raio igual a } \sqrt{2}}{\text{Área do círculo C}} = \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{\pi 2^2} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Problema 8. Considere, no plano cartesiano, o pentágono $ABCDE$, de vértices $A(0,2), B(4,0), C(2\pi + 1,0), D(2\pi + 1,4)$ e $E(0,4)$. Escolhendo aleatoriamente um ponto P no interior desse pentágono, qual a probabilidade de que o ângulo \widehat{APB} seja obtuso?

Para que o ângulo \widehat{APB} seja obtuso, o ponto P deve ser escolhido de modo a pertencer ao interior do semicírculo de diâmetro \overline{AB} , contido no pentágono $ABCDE$ (figura 15).

Figura 15: Pentágono $ABCDE$ representado no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, como a área do semicírculo de diâmetro \overline{AB} é dada por:

$$\begin{aligned} S_{semi} &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_{A,B}}{2} \right)^2 \\ \Rightarrow S_{semi} &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2^2 + 4^2}}{2} \right)^2 \\ \Rightarrow S_{semi} &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{20}{4} \\ \Rightarrow S_{semi} &= \frac{5\pi}{2} \text{ u. a.} \end{aligned}$$

e a área pentágono $ABCDE$ é igual a:

$$\begin{aligned} S_{penta} &= 4 \cdot (2\pi + 1) - \frac{4 \cdot 2}{2} \\ \Rightarrow S_{penta} &= 8\pi \text{ u. a.} \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{\text{Área do semicírculo de diâmetro } \overline{AB}}{\text{Área do pentágono } ABCDE} = \frac{\frac{5\pi}{2}}{8\pi} = \frac{5}{16} = 0,3125 = 31,25\%.$$

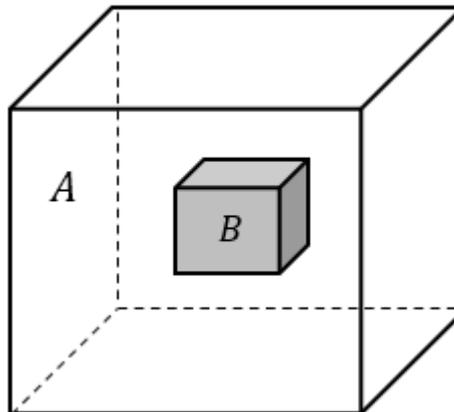
2.3 Problemas envolvendo volumes

Definição de Probabilidade Geométrica em \mathbb{R}^3 .

Se o volume B de um sólido qualquer está contido no volume A , de um outro sólido, como na Figura 16, podemos admitir que a probabilidade de que um ponto do volume de corpo A pertença ao volume do corpo B é proporcional ao volume de B e não depende da posição que B ocupa em A . Portanto, selecionando ao acaso um ponto de A , a probabilidade deste ponto pertencer à B , será:

$$P = \frac{\text{Volume de } B}{\text{Volume de } A}.$$

Figura 16: Representação no \mathbb{R}^3 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Problema 9. Três amigos escolhem, cada um, um número real entre 0 e 1. Qual a probabilidade de que a soma dos quadrados desses números não seja maior que 1?

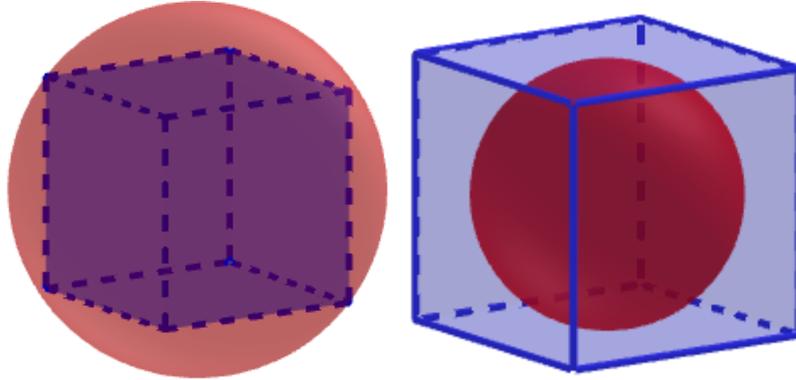
Sejam x, y, z tais números, temos que $x, y, z \in [0,1]$, logo a escolha x, y, z representa um ponto no cubo de lado igual a 1.

Como $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e $x, y, z \geq 0$, a restrição é equivalente a pedir que a escolha seja feita em um octante da bola unitária, assim, como o volume do cubo unitário é $1^3 = 1$ e um octante da bola unitária é $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \frac{\pi}{6}$, temos a seguinte probabilidade:

$$P = \frac{\pi/6}{1} = \frac{\pi}{6} \approx 52\%.$$

Problema 10. Sejam C um cubo de aresta a , sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, respectivamente, a esfera circunscrita e a esfera inscrita a C , e seja P um ponto qualquer no espaço.

Figura 17: Esfera C circunscrita e inscrita no cubo de aresta a .



Fonte: Elaborada pelo autor.

- A) Se $P \in C$ qual é a probabilidade de que $P \in \varepsilon_2$?
- B) Se $P \in \varepsilon_1$, qual é a probabilidade de que $P \in C$?
- C) Se $P \in \varepsilon_1$, qual é a probabilidade de que $P \in \varepsilon_2$?

Seja P a probabilidade pedida em cada item, e ainda V_C, V_1, V_2 , respectivamente, o volume do cubo, da esfera circunscrita e da esfera inscrita, e sejam r_1, r_2 , respectivamente, o raio da esfera circunscrita e da esfera inscrita. Então, temos que:

- A) Sendo $r_2 = \frac{a}{2}$, probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{V_2}{V_C} = \frac{\frac{\pi a^3}{6}}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52.$$

- B) Sendo $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, probabilidade pedida é dada por:

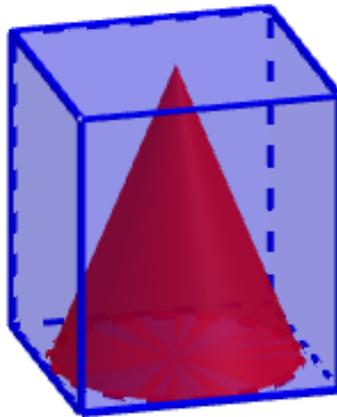
$$P = \frac{V_C}{V_1} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{2a^3}{\pi a^3 \sqrt{3}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0,37.$$

- C) A probabilidade pedida será dada por:

$$P = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{\pi a^3}{6}}{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{2\pi a^3}{6\pi a^3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 0,19.$$

Problema 11. Seja P um paralelepípedo de altura h e base quadrada de lado l e seja C o cone circular reto de altura h cuja base é o círculo inscrito na base de P . Tomando aleatoriamente um ponto de P , qual é a probabilidade de que esse ponto pertença a C ?

Figura 18: Cone circular reto inscrito na base do paralelepípedo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja P a probabilidade pedida. Seja r o raio da base do cone. Por hipótese temos $r = \frac{l}{2}$. Sejam V_p e V_c , respectivamente, os volumes do paralelepípedo e do cone. Então, temos que:

$$P = \frac{V_c}{V_p} = \frac{\frac{\pi l^2 h}{12}}{l^2 h} = \frac{\pi}{12} \cong 0,26.$$

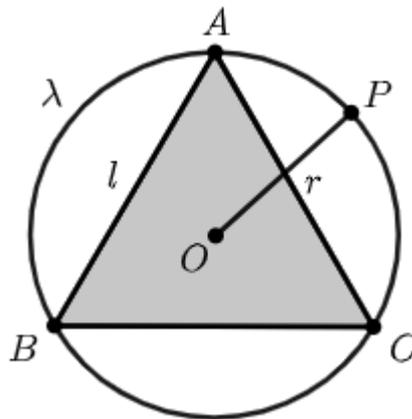
3 APLICAÇÕES DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

3.1 Paradoxo de Bertrand

Joseph Bertrand, um matemático francês, publicou em 1889, o livro *Calcul de probabilités*, obra de referência para o desenvolvimento do tema. Nesse livro, Bertrand analisa situações em que o espaço amostral de um determinado experimento é constituído por infinitos elementos e obtém alguns paradoxos muito interessantes. Um dos problemas propostos no livro ficou muito conhecido por mostrar algumas limitações da Probabilidade Clássica. O problema é o Paradoxo de Bertrand, cujo o enunciado é o seguinte:

“Escolhendo ao acaso uma corda de uma circunferência λ de raio igual a r , qual é a probabilidade de que ela seja maior que o lado do triângulo equilátero de lado l inscrito nessa circunferência?”

Figura 19: Triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro O e raio r .



Fonte: Elaborada pelo autor.

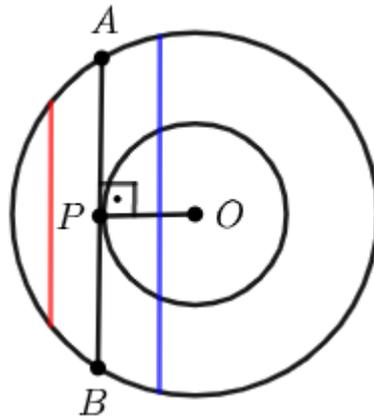
Esse problema ficou conhecido como um paradoxo, mas, não há paradoxo algum se analisarmos rigorosamente as diferentes soluções para o mesmo. O que ocorre é que o “paradoxo” é passível de diferentes interpretações, em que cada uma delas se diferencia pelo modo como a corda é escolhida, assim nos deparamos com espaços amostrais diferentes para cada uma das interpretações, gerando, portanto, três soluções distintas e aparentemente válidas.

3.1.1 Soluções para o paradoxo de Bertrand

Veamos as soluções a seguir:

1) Tomando um ponto P dentro da circunferência e o ligamos ao centro através de um seguimento de reta. A corda é traçada nesse ponto de forma a ser perpendicular ao segmento como mostra a figura a seguir.

Figura 20: Corda AB perpendicular a \overline{OP} na circunferência de centro O .



Fonte: Elaborada pelo autor.

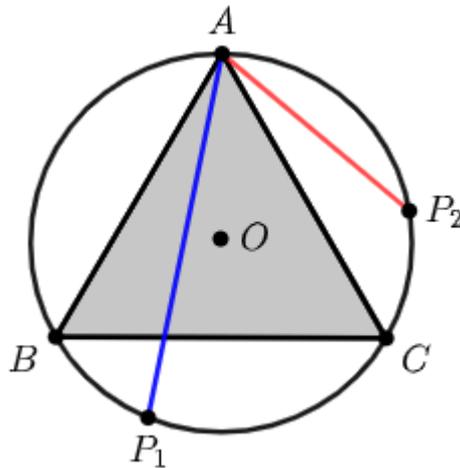
Quando $\overline{OP} = \frac{r}{2}$, temos que a corda coincide com um dos lados do triângulo equilátero, logo, para que possamos traçar as cordas desejadas o seguimento \overline{OP} deve ser menor que $\frac{r}{2}$, ou seja, o ponto P tem que ser interior ao círculo de centro O e raio igual a $\frac{r}{2}$. Daí, temos que a probabilidade de o ponto escolhido aleatoriamente no círculo de raio r , também pertença a circunferência de raio $\frac{r}{2}$ é dado por:

$$P(\text{Cordas maiores que } r\sqrt{3}) = \frac{\text{Área do Círculo } (O, r/2)}{\text{Área do Círculo } (O, r)} = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

2) A corda une dois pontos na circunferência, fixando uma extremidade e escolhendo, ao acaso, o outro extremo na circunferência. Como os casos favoráveis são as cordas maiores que $r\sqrt{3}$, então, podemos tomar os vértices do triângulo equilátero, que dividem a circunferência em três arcos iguais, e fixarmos o vértice A como uma das extremidades da corda e escolhermos, ao acaso, a outra extremidade

da corda. Os pontos a serem escolhidos de modo que a corda seja maior que $r\sqrt{3}$ pertencem a arco \widehat{BC} na circunferência. Vejamos na figura a seguir:

Figura 21: Corda AP na circunferência de centro O.



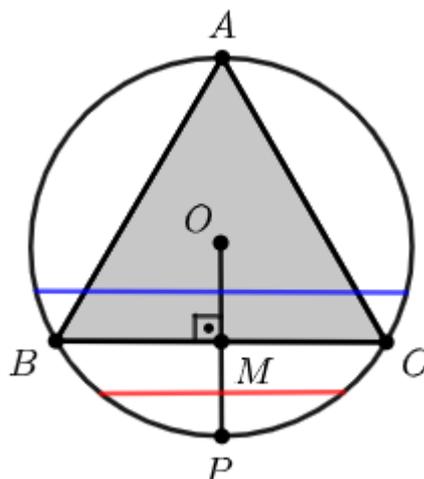
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, temos que:

$$P(\text{Cordas maiores que } r\sqrt{3}) = \frac{\text{Medida do Arco } \widehat{BC}}{\text{Comprimento da Circunferência}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{3}.$$

3) A corda é traçada escolhendo um ponto, ao acaso, em um dos raios da circunferência e por esse ponto é traçada uma perpendicular. O raio utilizado é irrelevante e o procedimento aleatório é equivalente a sortear um ponto ao acaso em um intervalo $[0, r]$. Vejamos a figura a seguir:

Figura 22: Raio \overline{OP} na circunferência de centro O.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se o ponto escolhido, ao acaso, for o ponto médio do raio $\overline{OP} = r$, então a perpendicular ao raio traçada por esse ponto é igual $r\sqrt{3}$, ou seja, coincide com o lado de um triângulo equilátero inscrito na circunferência. Daí, temos que para obtermos as cordas maiores $r\sqrt{3}$, o ponto escolhido pertencente ao raio, também deve pertencer ao seguimento de reta \overline{OM} que é igual a $\frac{r}{2}$. Logo, concluímos que:

$$P(\text{Cordas maiores que } r\sqrt{3}) = \frac{\text{Medida de } \overline{OM}}{\text{Medida de } \overline{OP}} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}.$$

As respostas apresentadas acima, aparentemente paradoxais, nos levam a refletir sobre as diferentes interpretações da frase “escolhida ao acaso”. Para responder à pergunta sobre qual das três soluções está correta, é necessário tornar mais preciso o enunciado do problema de modo a evitar várias interpretações, ou seja, o enunciado precisa conter a descrição precisa do procedimento a ser realizado, caso contrário, o termo “escolhida ao acaso” fica com significado muito vago, o que é comum no caso das probabilidades geométricas.

3.2 Problema da agulha de Buffon

O matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc, o Conde de Buffon, em 1733, no século XVIII, submeteu à Académie Royale des Sciences um artigo no qual constava, entre outros problemas, um problema que envolvia geometria e probabilidade, que ficou conhecido como o problema da agulha de Buffon. Esse problema ficou muito famoso e é muito relevante pelo fato de que sua resolução representa um dos primeiros registros de estudo sobre tema abordado nesse texto - a probabilidade geométrica.

O problema consiste na seguinte indagação: considere um plano marcado por retas paralelas equidistantes entre si. A distância entre uma reta e outra mede d e que uma agulha de comprimento h e de espessura desprezível será lançada aleatoriamente sobre esse plano. Qual é a probabilidade de a agulha cruzar uma das retas do plano?

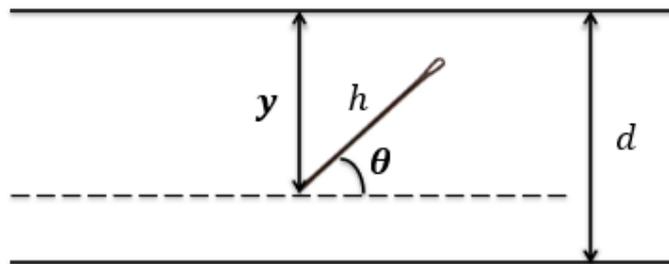
Para resolução do problema temos que considerar o comprimento da agulha (h) em relação a distância (d) entre as retas paralelas no plano. Logo, teremos dois casos a considerar:

Caso 1: Comprimento da agulha é menor ou igual a distância entre as retas paralelas no plano, ou seja, $h \leq d$.

Caso 2: Comprimento da agulha é maior ou igual a distância entre as retas paralelas no plano, ou seja, $h \geq d$.

Resolução do caso 1: Considere inicialmente $h \leq d$, ou seja, que as distâncias entre retas paralelas no plano sejam no máximo iguais ao comprimento da agulha. Para analisarmos se a agulha, ao ser lançada, cruzará ou não, uma das retas do plano, temos que considerar o ângulo θ formado pela extremidade inferior da agulha e as retas do plano e y a distância entre a extremidade inferior da agulha e a reta imediatamente superior a essa extremidade.

Figura 23: Agulha entre as retas paralelas no plano.



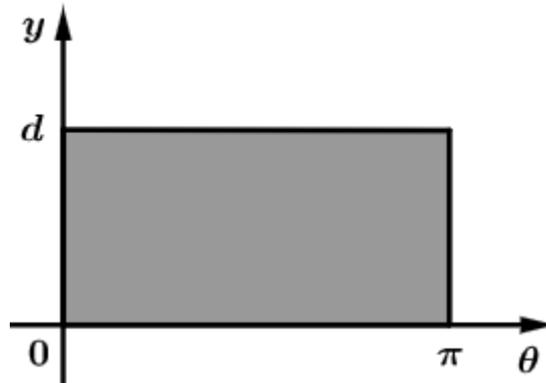
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que é irrelevante o ponto da reta onde a agulha irá cruzar a reta, ou seja, a agulha pode cruzar mais à direita, no meio ou mais à esquerda da reta, em ambos os casos o cálculo para encontrar a probabilidade só depende de dos parâmetros y e θ .

Vejamos da figura 21 que $y \in [0, d]$, já que, se a extremidade inferior da agulha tocar a reta imediatamente superior, então, $y = 0$, por outro lado, se a extremidade inferior da agulha toca a reta imediatamente inferior, então, $y = d$. Observe ainda que, ângulo $\theta \in [0, \pi]$. Podemos desconsiderar para o cálculo da probabilidade o que ocorre quando $\theta \in [\pi, 2\pi]$, pois é semelhante ao que ocorre no intervalo $[0, \pi]$ e irrelevante para o cálculo da probabilidade.

Podemos concluir que todos os possíveis casos onde a agulha pode ser lançada, ou seja, o espaço amostral, é o conjunto de todos os pares ordenados $(\theta, y) \in \Omega = \{\mathbb{R}^2 / 0 \leq \theta \leq \pi \text{ e } 0 \leq y \leq d\}$. Representando esse espaço amostral no plano cartesiano temos a seguinte região:

Figura 24: Representação do espaço amostral Ω .

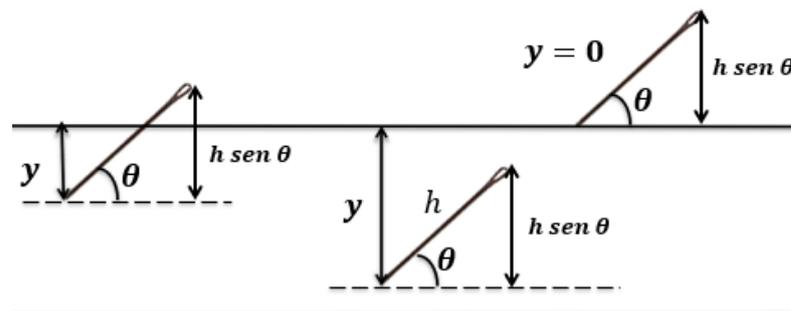


Fonte: Elaborada pelo autor.

Desse fato, temos que o espaço amostral do experimento é dado pela área da região retangular acima, logo, $\Omega = \pi d$.

Para os casos onde a agulha de fato cruzar uma das retas, ou seja, os casos favoráveis, temos duas possibilidades, vejamos a figura a seguir:

Figura 25: Possibilidades de a agulha cruzar as retas paralelas.



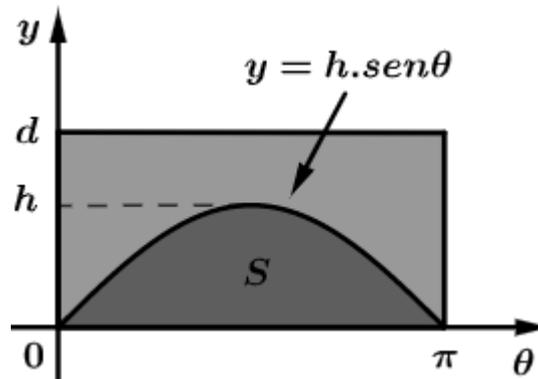
Fonte: Elaborada pelo autor.

- 1) Se $y > h \text{ sen } \theta$, então, a agulha não cruzará nenhuma das duas retas.
- 2) Se $y \leq h \text{ sen } \theta$, então, a agulha cruzará alguma das retas.

Abaixo da curva que é o gráfico da função $y = h \text{ sen } \theta$, estão localizados todos os pares ordenados (θ, y) , nos quais a agulha cruza uma das retas, portanto,

os casos favoráveis de probabilidade são dados pela área da região S , conforme a figura a seguir:

Figura 26: Representação da região S no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, a probabilidade de a agulha cruzar uma das retas, é dada por:

$$P(S) = \frac{\text{Área de } S}{\text{Área de } \Omega}.$$

A área de S é calculada da seguinte forma:

$$S = \int_0^{\pi} h \operatorname{sen} \theta \, d\theta = h[-\cos \theta]_0^{\pi} = -h(\cos \pi - \cos 0) = (-h)(-2) = 2h$$

e sendo a área $|\Omega| = \pi d$, então:

$$P(S) = \frac{\text{Área de } S}{\text{Área de } \Omega} = \frac{2h}{\pi d}.$$

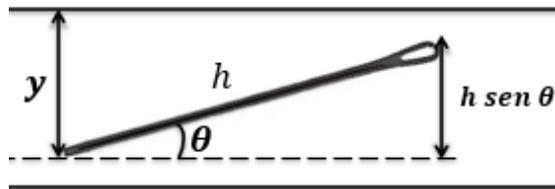
Se $h = d$, temos que $P(S) = \frac{2}{\pi}$ e se $h = \frac{d}{2}$, então $P(S) = \frac{1}{\pi}$.

Resolução do caso 2: A probabilidade encontrada acima foi para o caso ($h \leq d$). Podemos também encontrar a probabilidade de a agulha cruzar pelo menos uma das retas paralelas no plano, para o caso em que a agulha tem comprimento maior que a distância entre as retas paralelas, ou seja, $h \geq d$.

Para o caso em que $h \geq d$ temos algumas situações a considerar no cruzamento da agulha e as retas paralelas do plano. Consideremos os mesmos parâmetros y e θ , assim como no caso em que $h \leq d$. Vejamos as posições relativas da agulha com relação as retas paralelas:

1) Se $y > h \operatorname{sen} \theta$, então, a agulha não cruzará nenhuma das duas retas.

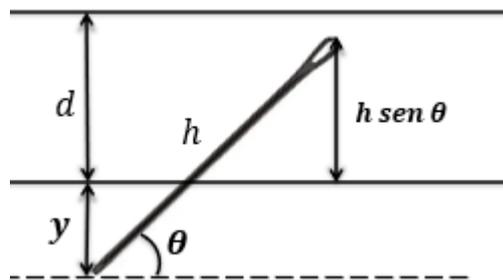
Figura 27: Agulha não cruzar as retas paralelas no plano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Se $y \leq h \operatorname{sen} \theta \leq y + d$, então, a agulha cruzará apenas uma reta.

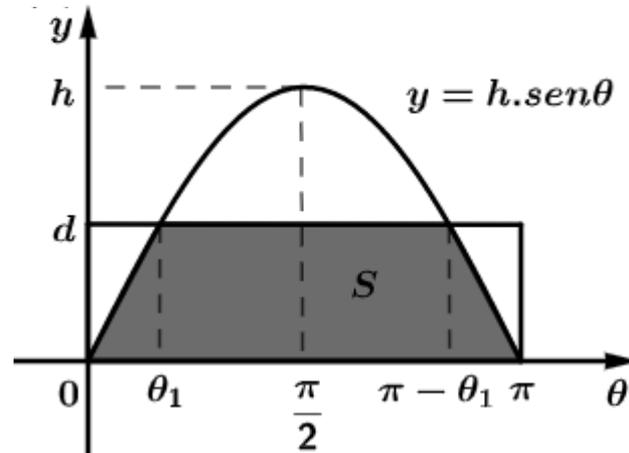
Figura 28: Agulha cruzar uma reta paralela no plano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos perceber que para a agulha cruzar pelo menos uma reta no plano é preciso que $y \leq h \operatorname{sen} \theta$. Logo, podemos interpretar graficamente, que os pares ordenados (θ, y) , que pertencem a Ω e que estão abaixo da curva que representa a função $y = h \operatorname{sen} \theta$ satisfaz a desigualdade $y \leq h \operatorname{sen} \theta$.

Figura 29: Representação da região S no plano cartesiano ($h \geq d$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe na figura 29 que, $h \operatorname{sen} \theta_1 = d$. Portanto, segue que $\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{d}{h}$, e consequentemente, $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{h^2 - d^2}}{h}$ e $\theta_1 = \operatorname{sen}^{-1} \frac{d}{h}$. Realizando o cálculo da probabilidade pedida, temos que:

$$\begin{aligned}
 P(S) &= \frac{\text{Área sombreada (S)}}{\text{Área de } \Omega} \\
 \Rightarrow P(S) &= \frac{(\pi - \theta_1 - \theta_1)d + 2 \int_0^{\theta_1} h \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{\pi d} \\
 \Rightarrow P(S) &= \frac{(\pi - 2\theta_1)d + 2h [-\cos \theta]_0^{\theta_1}}{\pi d} \\
 \Rightarrow P(S) &= \frac{(\pi - 2\theta_1)d - 2h [\cos \theta_1 - \cos 0]}{\pi d} \\
 \Rightarrow P(S) &= \frac{\pi d - 2\theta_1 d + 2h - 2h \cos \theta_1}{\pi d} \\
 \Rightarrow P(S) &= \frac{\pi d - 2d \operatorname{sen}^{-1} \frac{d}{h} + 2h - 2h \cos \frac{\sqrt{h^2 - d^2}}{h}}{\pi d}.
 \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de a agulha cruzar pelo menos uma das retas no plano, para o caso em que $h \geq d$, é:

$$P(S) = \frac{\pi d - 2d \operatorname{sen}^{-1} \frac{d}{h} + 2h - 2 \cos \frac{\sqrt{h^2 - d^2}}{h}}{\pi d}.$$

Para o caso particular em que $h = d$, temos:

$$P(S) = \frac{\pi d - 2d \operatorname{sen}^{-1} 1 + 2d - 2 \cos \sqrt{d^2 - d^2}}{\pi d}$$

$$P(S) = \frac{\pi d - 2d \frac{\pi}{2} + 2d}{\pi d}$$

$$P(S) = \frac{\pi d - 2d \frac{\pi}{2} + 2d}{\pi d} = \frac{2d}{\pi d} = \frac{2}{\pi}.$$

Como já havíamos calculado no caso 1.

3.2.1 Estimando o número π

Considerando o problema da agulha de Buffon para o caso em que o comprimento h da agulha é menor ou igual a distância d entre as retas paralelas da superfície plana, podemos estimar empiricamente aproximações para o valor de π , realizando um número (N) grande o suficiente de lançamentos de uma agulha e contando o número (n) de vezes que agulha cruza uma das retas paralelas do plano. Vejamos que razão $\frac{n}{N}$ é uma excelente aproximação para o valor da $P(A)$, portanto, $P(A) = \frac{n}{N}$. Pela “lei dos grandes números” se o experimento aleatório de probabilidade $P(A)$, é repetido em ocasiões independentes por diversas vezes, então a razão $\frac{n}{N}$ converge para $P(A)$, quando o número de repetições desse evento é absurdamente grande, ou seja, quando o número de repetições tender ao infinito, temos que $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$. Como já vimos anteriormente no caso 1, quando $h = d$, $P(A) = \frac{2}{\pi}$, portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{n}{N} = \frac{2}{\pi}.$$

Logo, $\pi = \frac{2N}{n}$, para N suficientemente grande.

Ao longo da história diversos experimentos para obter aproximações para o valor de π utilizando o problema da agulha de Buffon foram realizados. Vejamos alguns resultados desses experimentos na tabela seguinte:

Tabela 1: Aproximação de π com a Agulha de Buffon

Autor/ano	Razão $\left(\frac{l}{d}\right)$	Nº de lançamentos (N)	Nº de sucessos (n)	Aproximação $\left(\pi \cong \frac{2Nh}{dn}\right)$
Wolf/1850	0,8	5000	2532	3,1596
Smith/1855	0,6	3204	1218,5	3,1553
De Morgan/1860	1,0	600	382,5	3,137
Fox/1864	0,75	1030	489	3,1595
Lazzerini/1901	0,83	3408	1808	3,1415929
Reina/1925	0,5419	2520	859	3,1795

Fonte: Adaptado de Tunala (1997).

Smith e De Morgan consideravam meio sucesso os casos em que não ficava bem definida a interseção da agulha com a reta paralela.

Apesar dos resultados para as aproximações do número π serem fascinantes, essa aproximação utilizando o método da agulha de Buffon ocorre de forma muito lenta, sendo necessário um número muito grande de lançamentos para se obter aproximação de algumas casas decimais corretas para o número. Para acelerar esse processo podem ser usados computadores e programas que simulam muitos lançamentos em alguns minutos, sendo possível constatar a veracidade do experimento.

3.3 Generalização do problema da agulha de Buffon e medidas de bacias hidrográficas

Medir o comprimento total dos canais de escoamento de uma bacia hidrográfica pode demandar muito trabalho e tempo. A medida pode ser feita utilizando um curvímeter, que é um instrumento utilizado para medir linhas curvas, por exemplo, comprimento de rios e estradas em mapas. Porém, para que se tenha precisão nas medidas realizadas com o curvímeter deve-se ter pouca variação de altitudes.

A partir do problema da agulha de Buffon é possível obter estimativas para a medida do comprimento de forma relativamente simples e mais precisas em relação a utilização do curvímetro.

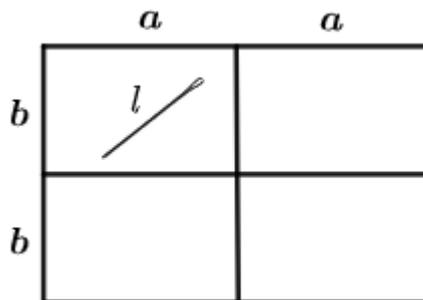
Se trocarmos a agulha do problema de Buffon por uma linha poligonal de comprimento l , qualquer, ao lançar um número muito grande de vezes essa linha poligonal entre as retas paralelas, a esperança matemática, ou seja, o número médio de pontos de interseção da linha com as retas é:

$$E(N) = \frac{2l}{\pi d}.$$

A generalização de Laplace para o problema da agulha de Buffon transforma essa relação para o caso de um plano dividido em retângulos de lados a e b . Vejamos a seguir como isso ocorre:

Considere um plano coberto por retângulos congruentes de lados a e b . Uma agulha de comprimento l , onde l é menor que os lados do retângulo, é lançada ao acaso. Qual a probabilidade da agulha não cair inteiramente dentro de um dos retângulos, ou seja, a probabilidade de agulha cruzar uma das linhas dos retângulos?

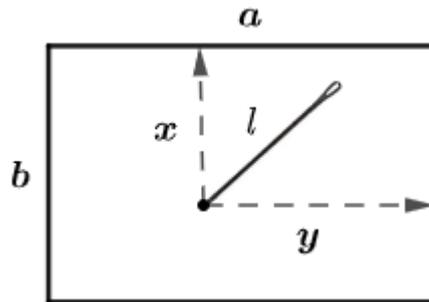
Figura 30: Retangulos congruentes no plano.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos considerar inicialmente o caso em que a agulha não cruza nenhum dos lados dos retângulos.

Figura 31: Agulha inteiramente dentro retângulo.

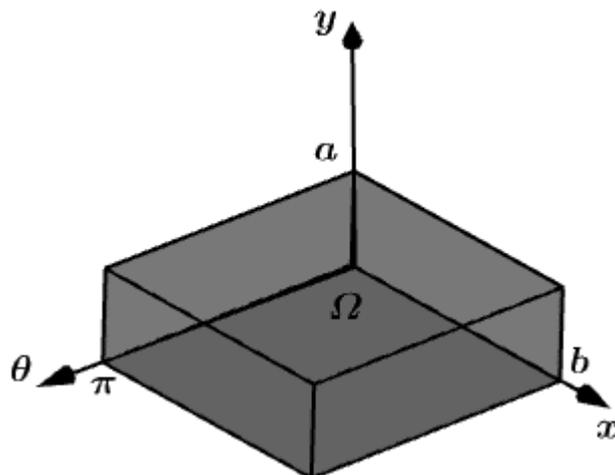


Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam θ o ângulo entre a agulha e um lado horizontal do retângulo, no sentido anti-horário, x a distância entre a extremidade inferior da agulha e o lado a do retângulo imediatamente acima dessa extremidade e y a distância da extremidade inferior da agulha e o lado b do retângulo imediatamente a direita dessa extremidade.

Considerando θ , x e y três variáveis independentes, onde $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq a$. Temos que todos os casos possíveis em que a agulha pode se encontrar após o lançamento, ou seja, o espaço amostral Ω , é composto pelos pontos do paralelepípedo de dimensões π, b e a e cujo volume é: Volume de $\Omega = \pi \cdot a \cdot b$, conforme a figura abaixo.

Figura 32: Paralelepípedo de dimensões π, b e a .



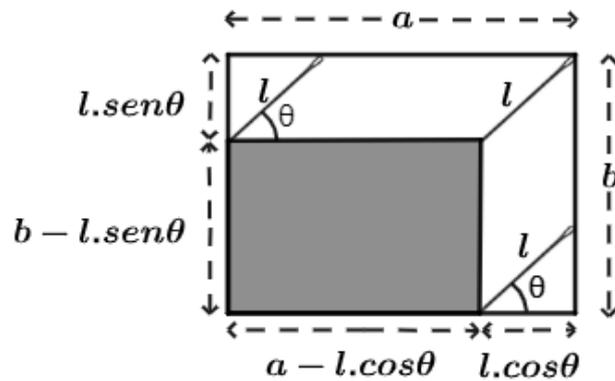
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os "casos favoráveis" para os quais a agulha não cruze um dos lados do retângulo, será a área do retângulo coberta pela extremidade inferior da agulha,

considerando o ângulo θ constante e variando os parâmetros x e y . Para calcular essa área iremos considerar os dois casos a seguir:

Caso 1: $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

Figura 33: Região coberta pela extremidade inferior da agulha ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$).



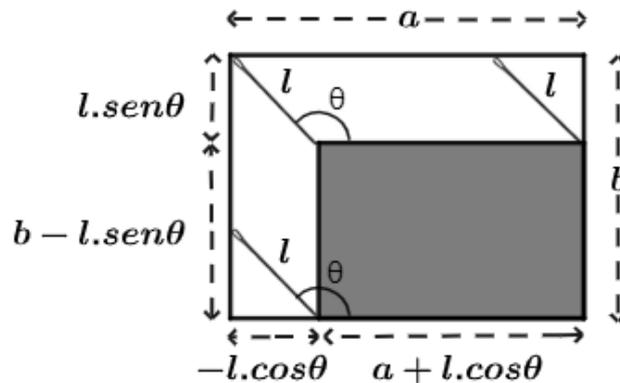
Fonte: Elaborada pelo autor.

Da figura anterior temos que a área coberta pela extremidade inferior da agulha, que indicaremos por $A(\theta)$, é:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= (a - l \cos \theta)(b - l \sin \theta) \\ \Rightarrow A(\theta) &= ab - al \sin \theta - bl \cos \theta + l^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Rightarrow A(\theta) &= ab - al \sin \theta - bl \cos \theta + \frac{l^2}{2} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Caso 2: $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$

Figura 34: Região coberta pela extremidade inferior da agulha ($\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Da figura anterior temos que $A(\theta)$ é:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= (a + l \cos \theta)(b - l \sin \theta) \\ \Rightarrow A(\theta) &= ab - al \sin \theta + bl \cos \theta - l^2 \sin \theta \cos \theta \\ \Rightarrow A(\theta) &= ab - al \sin \theta + bl \cos \theta - \frac{l^2}{2} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Variando o ângulo θ de 0 a π teremos o sólido contido no espaço amostral Ω , que é gerado pela extremidade inferior da agulha, onde esta não cruza um dos lados do retângulo de lados a e b . O volume desse sólido, ao qual denotaremos por $V(\theta)$, é:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ab - al \sin \theta - bl \cos \theta + \frac{l^2}{2} \sin 2\theta \right) d\theta \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(ab - al \sin \theta + bl \cos \theta - \frac{l^2}{2} \sin 2\theta \right) d\theta \\ \Rightarrow V(\theta) &= \left[ab\theta + al \cos \theta - bl \sin \theta - \frac{l^2}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \left[ab\theta + al \cos \theta + bl \sin \theta + \frac{l^2}{4} \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ \Rightarrow V(\theta) &= ab \frac{\pi}{2} - bl + \frac{l^2}{4} - al + \frac{l^2}{4} + ab\pi - al + \frac{l^2}{4} - ab \frac{\pi}{2} - bl + \frac{l^2}{4} \\ \Rightarrow V(\theta) &= l^2 - 2al - 2bl + \pi ab. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de agulha não cruzar qualquer lado de retângulo é:

$$\bar{P} = \frac{V(\theta)}{\text{Volume de } \Omega} = \frac{l^2 - 2al - 2bl + \pi ab}{\pi ab} = 1 + \frac{l^2 - 2l(a + b)}{\pi ab}.$$

Logo, a probabilidade de a agulha cruzar um dos lados do retângulo é dada por:

$$P = 1 - \bar{P}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= 1 - \left(1 + \frac{l^2 - 2l(a+b)}{\pi ab} \right) \\ \Rightarrow P &= \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab} \\ \Rightarrow P &= \frac{2la}{\pi ab} + \frac{2lb}{\pi ab} - \frac{l^2}{\pi ab}. \end{aligned}$$

O resultado acima é a probabilidade de a agulha cruzar o lado a ou b do retângulo. Assim, temos que, $\frac{2la}{\pi ab}$ é a probabilidade de a agulha cruzar o lado a , $\frac{2lb}{\pi ab}$ é a probabilidade de a agulha cruzar o lado b e $\frac{l^2}{\pi ab}$ é a probabilidade de agulha cruzar os lados a e b simultaneamente.

A esperança matemática para o caso da generalização de Laplace nos diz que:

$$\begin{aligned} E(N) &= 0.P(N=0) + 1.P(N=1) + 2.P(N=2) \\ \Rightarrow E(N) &= P(N=1) + 2.P(N=2) \end{aligned}$$

onde, $P(N=0)$ é a probabilidade de agulha poligonal não cruzar lado algum do retângulo, $P(N=1)$ é probabilidade da agulha poligonal cruzar um único lado do retângulo e $P(N=2)$ é a probabilidade de agulha poligonal cruzar dois lados do retângulo simultaneamente.

Portanto, temos que:

$$P(N=1) + P(N=2) = \frac{2la}{\pi ab} + \frac{2lb}{\pi ab} - \frac{l^2}{\pi ab}.$$

Como $P(N=2) = \frac{l^2}{\pi ab}$, segue que:

$$\begin{aligned} P(N=1) + 2.P(N=2) &= \frac{2la}{\pi ab} + \frac{2lb}{\pi ab} - \frac{l^2}{\pi ab} + \frac{l^2}{\pi ab} \\ \Rightarrow P(N=1) + 2.P(N=2) &= \frac{2la}{\pi ab} + \frac{2lb}{\pi ab} = \frac{2l(a+b)}{\pi ab}. \end{aligned}$$

Logo,

$$E(N) = \frac{2l(a + b)}{\pi ab}.$$

Reescrevendo a expressão acima, obtemos o seguinte resultado:

$$l = \frac{E(N) \cdot \pi ab}{2(a + b)}.$$

Portanto, com base no resultado obtido, para se calcular o comprimento total (l) dos canais de escoamento de uma bacia hidrográfica, podemos lançar várias vezes sobre o mapa da bacia hidrográfica uma malha formando uma rede de retângulos, com as distâncias a e b previamente conhecidas, e determinarmos o valor médio do número de pontos de cruzamentos obtidos. Assim, obtém-se, a estimativa do comprimento total (l).

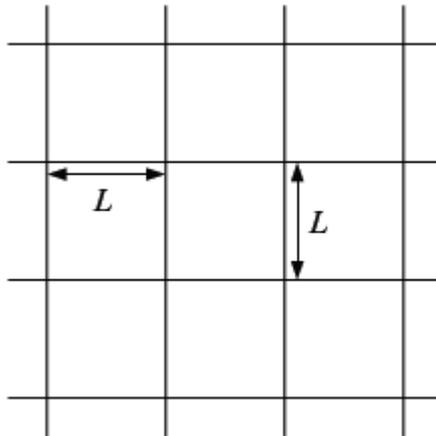
3.4 O Jogo dos Discos

Na França, no século XVIII, era muito comum ladrilhar pisos de castelos e jardins. As crianças logo fizeram desses ladrilhos um grande tabuleiro e inventaram o jogo dos discos, também conhecido como jogo do ladrilho. Uma pequena moeda era lançada ao acaso em um chão coberto por ladrilhos quadrados, em que o lado do ladrilho quadrado era maior que o diâmetro da circunferência da moeda. As crianças apostavam que a moeda cairia inteiramente dentro de um ladrilho ou que a moeda cairia intersectando o lado de algum ladrilho.

Podemos encontrar a probabilidade de ganho do jogo dos discos, ou seja, a probabilidade de uma moeda de cair inteiramente dentro de um ladrilho quadrado. Antes, vale ressaltar que, o cálculo da probabilidade depende do diâmetro do disco e do tamanho do lado do ladrilho quadrado. Se o diâmetro do disco for maior que o lado do ladrilho quadrado não teremos casos em que o disco cairá inteiramente dentro do quadrado e, conseqüentemente não poderemos calcular tal probabilidade.

Supondo um piso ladrilhado com quadrados de lado L .

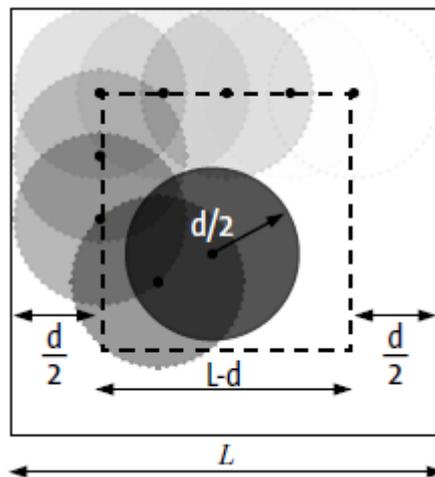
Figura 35: Representação dos ladrilhos quadrados de lado L .



Fonte: Caetano, Paterlini (2013).

Seja d , $d < L$, o diâmetro do disco (moeda) que será lançado no piso ladrilhado com quadrados de lado L . Considerando todos os casos em que um disco pode ser lançado, tocando ou não as bordas em um ladrilho quadrado, temos que o centro desse disco gera um outro quadrado de lado $L - d$.

Figura 36: Representação dos lançamentos do disco de diâmetro d .



Fonte: Caetano, Paterlini (2013).

Os casos em que o disco é lançado aleatoriamente e cai inteiramente dentro do ladrilho quadrado, é equivalente aos casos em que o centro do disco cai no interior do quadrado de lado $L - d$. Assim, podemos entender que lançar um disco aleatoriamente no piso ladrilhado é o mesmo que lançar seu centro aleatoriamente. Dessa forma, a probabilidade de o jogador ganhar é mesma probabilidade de um

ponto, lançado aleatoriamente dentro do quadrado de lado L , cair dentro do quadrado de lado $L - d$.

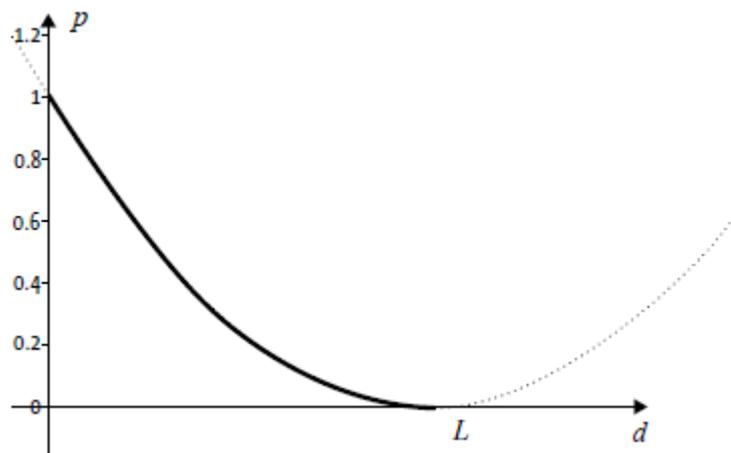
Portanto, a probabilidade de ganho do jogo é:

$$P = \frac{\text{Área do quadrado de lado } L - d}{\text{Área do quadrado de lado } L}$$

$$P = \frac{(L - d)^2}{L^2} = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1.$$

Resolvendo a equação $P(d) = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1 = P$, obtemos que $d = L(1 \pm \sqrt{P})$. Como, $0 \leq d \leq L$, temos $d = L(1 - \sqrt{P})$. Note que $P(0) = 1$, $P(L) = 0$ e que $d = L$ é uma raiz dupla da função. Assim, o gráfico de $P(d)$ é parte de uma parábola com concavidade para cima e tangente ao eixo horizontal na abscissa $d = L$.

Figura 37: Gráfico da função $P(d) = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1$.



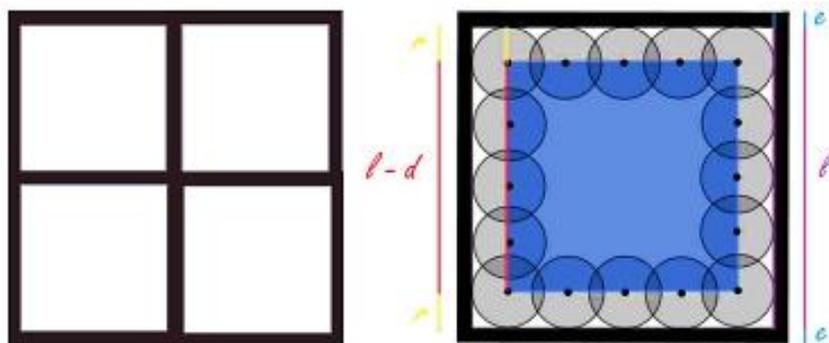
Fonte: Caetano, Paterlini (2013).

A função quadrática $P(d) = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1$, nos fornece uma forma generalizada de calcular a probabilidade de um disco de diâmetro d , $0 \leq d \leq L$, lançado aleatoriamente, cair inteiramente no interior de um quadrado de lado L . Ou ainda que, dada uma probabilidade P , encontramos o diâmetro do disco que resulta na probabilidade P de ganhar no jogo dos discos.

3.4.1 Piso com rejunte

A função de probabilidade $P(d)$ não considera a medida do rejunte utilizado no piso, caso a medida do rejunte seja considerada, a probabilidade de ganhar o jogo pode ser alterada.

Figura 38: Representação do piso com rejunte.



Fonte: Ludvig (2020).

Portanto, a função de probabilidade nesse caso será dada por:

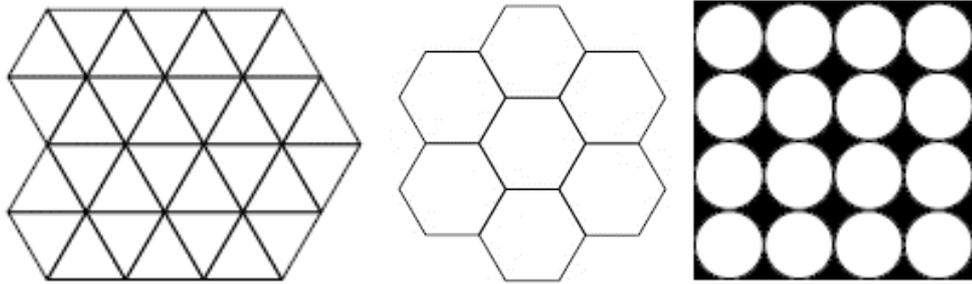
$$P = \frac{(L - d)^2}{(L + 2e)^2}.$$

Vemos que, o acréscimo da medida e do rejunte ao lado L do triângulo aumenta os casos possíveis, logo, quanto maior valor de e , menor a probabilidade de ganhar o jogo.

3.4.1 Variando os tipos de pisos

No jogo dos discos podemos utilizar variadas pavimentações de outros tipos de pisos onde serão lançados os discos. Por exemplo, podem ser utilizados pavimentações triangulares, hexagonais ou circulares.

Figura 39: Tipos de pisos.



Fonte: Caetano, Paterlini (2013).

Utilizando a definição de probabilidade geométrica e procedendo de modo semelhante ao caso do jogo dos discos em que se utiliza o piso quadriculado, podemos encontrar as funções de probabilidade de cada um dos tipos de pisos citados acima. Vejamos na tabela 2 as funções de probabilidade de acordo com o tipo de piso utilizado.

Tabela 2: Função de probabilidade conforme o tipo do piso utilizado.

Tipos de piso	Função de probabilidade	Figura
Triangular	$P(d) = \frac{9}{h^2}r^2 - \frac{6}{h}r + 1$, onde h é a altura do triângulo maior e r o raio do disco.	A diagram showing a large triangle with a red interior. Inside the triangle, several grey circles are arranged in a triangular pattern, touching each other and the sides of the triangle.
Hexagonal	$P(d) = \frac{1}{4h^2}d^2 - \frac{1}{h}d + 1$, onde d é o diâmetro do disco e h é a apótema do hexágono maior.	A diagram showing a large hexagon with a blue interior. Inside the hexagon, several grey circles are arranged in a hexagonal pattern, touching each other and the sides of the hexagon.
Circular	$P(r) = \frac{\pi(h^2 - 2rh + r^2)}{2h^2}$, onde h é o raio do círculo maior e r é a diferença entre o círculo maior e o menor (disco).	A diagram showing a large green circle with a smaller inner green circle. The inner circle is centered at the same point as the outer circle. A red line segment from the center to the inner boundary is labeled 'h - r', and a red line segment from the center to the outer boundary is labeled 'h'.

Fonte: Adaptado de Ludvig (2020).

3.4.1 Explorando o problema do jogo dos discos

A seguir trataremos de situações problemas nos quais podemos contextualizar e, na prática, explorar todos os conceitos mostrados acima sobre o jogo dos discos, utilizando valores exatos para a resolução do problema.

Situação problema 1: Considere que estudantes de uma escola irão participar de uma festa organizada na escola. Como estão cursando a disciplina de Empreendedorismo, foi solicitado pelo professor da disciplina que elaborassem uma atividade para arrecadar fundos para arcar com as despesas da festa de conclusão do curso. Os estudantes observaram que um dos ambientes destinados ao evento continha um piso ladrilhado com azulejos quadrados de 30 cm de lado. Então, pensaram em construir discos de papelão com um certo diâmetro d que seriam comprados pelos convidados e jogados aleatoriamente no piso. O jogador receberá um prêmio se, ao lançar o disco aleatoriamente, ele cair inteiramente dentro do quadrado, ou seja, não intersecta nenhum dos lados do quadrado. Foi decidido, em consenso pelos estudantes que, a probabilidade de um jogador ganhar seria de 40%, ou seja, 60% favorável aos estudantes. Qual deve ser o diâmetro do disco para que a probabilidade de ganhar o jogo seja de 40%?

O problema acima, pode ser uma excelente oportunidade de abordar a probabilidade geométrica. Sua resolução pode ser feita de maneira experimental, sugerindo aos estudantes que construam vários discos de diâmetros diferentes e que realizem a mesma quantidade de lançamentos para cada um deles no piso ladrilhado, afim de encontrar a probabilidade desejada. Pode-se ainda, explorar os conceitos matemáticos por traz do jogo dos discos realizando algumas perguntas aos estudantes a respeito do jogo. Vejamos:

1) O que acontece se o diâmetro do disco for maior ou igual a 30 cm ?

Se o diâmetro do disco for maior ou igual que 30 cm ninguém poderá vencer, o que torna o jogo inviável nessas condições. Portanto, o diâmetro do disco tem que ser menor que 30 cm , quanto menor o diâmetro do disco mais favorável ao jogador.

2) Considerando que os quadrados do piso têm lado L , qual a fórmula para o valor de d que resulta numa probabilidade P para o jogador?

Conforme o raciocínio já desenvolvido anteriormente, pode-se chegar à função $P(d) = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1$, com $0 \leq d \leq 30$.

3) Qual deve ser o diâmetro do disco para que a probabilidade seja 40% favorável ao jogador e de 60% favorável aos estudantes?

A probabilidade 60% favorável ao jogador é equivalente a probabilidade 40% de o jogador ganhar. Sendo $L = 30$ e $P = 0,4$ na função $P(d) = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1$, com $0 \leq d \leq 30$, temos que, $d = 30 - 6\sqrt{10} \cong 11,02 \cong 11$ cm. Portanto, o diâmetro do disco p, tal que, a probabilidade é 40% favorável ao jogador é aproximadamente 11 cm.

4) Se o disco for vendido por R\$ 1,00, e considerando que se o jogador acertasse o disco inteiramente dentro de um quadrado, ele receberia R\$ 1,50 (R\$ 1,00 como devolução e mais R\$ 2,00 como prêmio). Qual será, em média, o ganho dos estudantes se 500 discos forem vendidos na festa?

O valor arrecadado com a venda dos discos é de R\$ 500,00. Sabendo que os jogadores tem 40% de chance de ganhar o jogo, temos que:

$$\frac{40}{100} \times 500 = 200$$

Portanto, o provável valor da devolução é de $2 \times 200 = 400,00$. Logo, o valor arrecadado é R\$ 100,00.

Espera-se com as perguntas acima que os estudantes compreendam que: se o diâmetro do disco for maior que o lado do ladrilho quadrado ninguém poderá vencer o jogo, pois em todos os casos o disco intersecta algum dos lados do quadrado; que quanto menor o diâmetro do disco maior a probabilidade de o jogador ganhar o jogo; motivar os estudantes a deduzir a função que estabelece uma relação, da probabilidade de ganhar o jogo em função do diâmetro do disco utilizado para o piso com ladrilho quadrado de lado de 30 cm; utilizar a função estabelecida para calcular valor do diâmetro ideal do disco para que se tenha a probabilidade de ganho de 40%; mostrar uma situação de lucro com jogo dos discos em que os estudantes poderão perceber a real utilidade de se desenvolver todos conceitos matemáticos do visando o favorecimento no jogo.

Situação problema 2: Considere que os estudantes, da situação problema anterior, resolveram aplicar o jogo dos discos utilizando CDs comuns de 12 cm de diâmetro. Foi decidido, em consenso pelos estudantes que, a probabilidade de um jogador ganhar seria de 40%. Qual deve ser o valor do lado dos quadrados da superfície plana quadriculada que os estudantes precisaram utilizar no jogo?

Nesse caso estamos interessados em encontrar uma função que fornece a probabilidade de o jogador ganhar, ou seja, os casos favoráveis, tendo como variável o lado do quadrado da malha quadriculada. Portanto, devemos substituir o valor $d = 12$ dos diâmetros dos CDs na definição da probabilidade de ganho do Jogo dos Discos. Assim, teremos que:

$$P = \frac{(L - d)^2}{L^2} = \frac{(L - 12)^2}{L^2} = \frac{L^2 - 24L + 144}{L^2} = 1 - 24 \cdot \frac{1}{L} + 144 \cdot \frac{1}{L^2}.$$

Vejamos que a função encontrada é definida para qualquer $L \neq 0$. Mas, vale observar que os casos nos quais o lado do quadrado da malha quadriculada é menor que o diâmetro não interessam no problema, pois nesse caso seria impossível ganhar o jogo. Logo, não faz sentido para o problema valores $L \leq 12$.

Para calcular o valor de L , tal que, a probabilidade de ganhar o jogo, nesse caso, seja de 40%, temos que resolver a equação abaixo:

$$P = 0,4 = \frac{2}{5} \Rightarrow 1 - 24 \cdot \frac{1}{L} + 144 \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{2}{5}.$$

Multiplicando a equação por $5L^2$ e cancelando os denominadores, obtemos a seguinte equação:

$$2L^2 = 5L^2 - 120L + 720 \Leftrightarrow L^2 - 40L + 240 = 0.$$

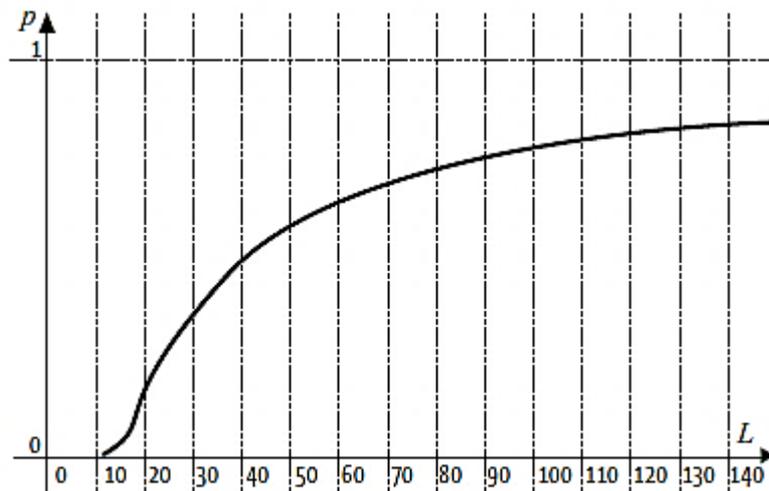
Resolvendo a equação obtemos como soluções os seguintes valores:

$$L = 20 - 4\sqrt{10} \cong 7,35 \text{ e } L = 20 + 4\sqrt{10} \cong 32,65.$$

Como já visto, valores de L não podem ser menores que 12, portanto, descartamos a solução $L = 7,35$. Logo, a medida do lado do quadrado da malha quadriculada utilizada deve ser de 32,65 cm.

Observe que a função $P(L)$ não é polinomial e sim o quociente de duas funções quadráticas, portanto, o gráfico não é uma parábola como visto na função $P(d)$. Vejamos o gráfico abaixo:

Figura 40: Gráfico da função $P(L) = 1 - 24 \cdot \frac{1}{L} + 144 \cdot \frac{1}{L^2}$.



Fonte: Caetano, Paterlini (2013).

Assim, podemos concluir que, quanto maior o valor de L , mais próximo de 1 é a probabilidade.

4 CONCLUSÃO

O estudo da Teoria das probabilidades no ensino médio ou superior é sempre direcionado a resolução de problemas de probabilidade discreta, o que envolve resolver problemas de contagem. Muitos estudantes e professores não têm conhecimento da probabilidade contínua, e muito menos que, existam definições, problemas e aplicações tão fascinantes envolvendo a probabilidade geométrica.

Os problemas e aplicações apresentados no presente trabalho tem o objetivo de proporcionar aos professores e aos estudantes uma fonte de pesquisa e estudo mais aprofundada sobre probabilidade, com foco na probabilidade geométrica. Esses problemas que são aparentemente simples e clássicos, nos mostram raciocínios e ideias surpreendentes, com potencial de motivar e fortalecer o ensino da probabilidade geométrica, caracterizando-se como um recurso eficaz e concreto para mostrar aplicações relevantes sobre esse ramo da probabilidade.

Podemos constatar que a probabilidade geométrica se relaciona com várias outras áreas da matemática como: funções, geometria analítica, geometria plana e a geometria espacial, sendo possível aplicações, até mesmo, em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na medida de bacias hidrográficas, o que contribui para o desenvolvimento de uma visão mais abrangente e significativa da probabilidade.

Por fim, buscamos colaborar com a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática no ensino básico, em especial, da probabilidade, assim como, cooperar para o enriquecimento do conhecimento acadêmico dos professores e dos estudantes de matemática interessados em aprender sobre a probabilidade geométrica.

REFERÊNCIAS

- AMORIM, Vitor; MOZER, Grazielle. **Probabilidade Além da Combinatória: Tópicos e Problemas Reais Com Foco no Raciocínio Probabilístico**. 1. ed. Rio de Janeiro: ANPmat, 2020.
- CAETANO, Paulo; PATERLINI, Roberto. **Matemática na Prática: Jogos dos Discos**. Módulo 1. Cuiabá: Central de Texto, 2013.
- LUDVIG, Daniela. **O Ensino de Probabilidade por meio do Jogo dos Discos**. 26f. TCC (Graduação) – COMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2020.
- MAGALHÃES, Marcos. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 2. ed. São Paulo: Editoria da universidade de São Paulo, 2006.
- MORAES, José. **Probabilidade Geométrica e Aplicações**. 35f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, 2014.
- NETO, Vicente. **Combinatória e Probabilidade com Aplicações no Ensino de Geometria**. 81f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2014.
- PATERLINI, Roberto. O problema do Jogo dos Discos, **Revista do Professor de Matemática**, SBM, vol. 48.
- SILVA, Antônio. **Probabilidade Geométrica: Generalização do Problema da Agulha de Buffon e Aplicações**. 76f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal do Ceará, 2014.
- TUNALA, Nelson. Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos, **Revista do Professor de Matemática**, SBM, vol. 20, 1995.
- VIANA, Fernando. **Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos**. 86f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- WAGNER, Eduardo. Probabilidade Geométrica, **Revista do Professor de Matemática**, SBM, vol. 34, 1997.