UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LINDOMAR DUTRA DA SILVA

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

QUIXADÁ - CEARÁ
2023

LINDOMAR DUTRA DA SILVA

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof.: Dr. Diego de Sousa Rodrigues

QUIXADÁ - CEARÁ

2023

Dados Internacionais de Catalogação na
PublicaçãoUniversidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo SidUECE, mediante os dados fornecidos
pelo(a)

Silva, Lindomar Dutra da.
Sequência de atividades para o ensino de geometria analíticano ensino médio [recurso eletrônico] / Lindomar Dutra da Silva.
- 2023.
104 f. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadualdo Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Quixadá, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues.
1. Atividades. 2. Habilidades. 3. Ensino de GeometriaAnalítica. I. Título.

LINDOMAR DUTRA DA SILVA

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de matemática.

Aprovada em: 18/05/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues (Orientador)
Instituto Federal do Ceará - IFCE

Vitor Joel Ramiro de Castro

Prof. Dr. Antônio Joel Ramiro de Castro
Universidade Federal do Ceará - UFC

Roger Oliveira Sousa

Prof. Dr. Roger Oliveira Sousa
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Aos meus pais, Francisca Dutra da Silva (In memoriam) e Francisco Gomes da Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus que está sempre comigo dando-me forças para superar os desafios de todos os dias.

À toda minha família, por ser meu alicerce.

Aos meus amigos de mestrado, pela parceria.

Aos meus professores Dr. Diego de Sousa Rodrigues (orientador) e Dr. Jobson de Queiroz Oliveira, por todos os ensinamentos, apoio e dedicação.

E às instituições Capes, FECLESC, CNPq e SBM.

"A geometria analítica tal como a conhecemos atualmente consiste em duas associações recíprocas: (i) dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem; e (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem."

(Tatiana Roque)

RESUMO

Este trabalho consiste em uma sequência de atividades que exploraram construções geométricas feitas no plano cartesiano impresso em papel. Com elas, por meio de um roteiro nos quais os procedimentos são enunciados passo a passo, instrui-se a realização de marcações de pontos, segmentos, triângulos, retas e circunferências, bem como a verificação de medidas de distâncias utilizando-se régua e de ângulos utilizando compasso e transferidor, efetuando-se também alguns cálculos, leituras de conceitos teóricos e dedução de fórmulas. Essas atividades têm por objetivo o desenvolvimento de habilidades específicas e a apropriação de conhecimentos pertinentes à Geometria Analítica, sendo explorados com elas alguns dos tópicos de estudo dessa área para o Ensino Médio. No desenvolvimento desta dissertação, inicialmente realiza-se uma exposição gráfica e textual sobre os resultados das provas de matemática do SPAECE dos anos de 2013 a 2019, divulgados pela SEDUC, os quais demonstram haver a necessidade do desenvolvimento de uma estrutura didática com vistas ao favorecimento da aprendizagem de saberes relacionados à Geometria Analítica. Em seguida, apresenta-se um estudo sobre como as habilidades referentes à Geometria Analítica são avaliadas no SPAECE, exibindo-se modelos de questões e estabelecendo-se as inferências obtidas. Expõe-se a relevância dos descritores de Geometria Analítica para o resultado dos alunos, com base em uma pesquisa literária dos boletins de matemática do CAEd. Apresenta-se um detalhamento das habilidades desenvolvidas em cada nível de proficiência da referida avaliação externa. Prossegue-se com uma análise das propostas da BNCC de matemática para o Ensino Médio, destacando-se o modo como algumas de suas competências e habilidades são abordadas com as atividades propostas neste trabalho. Em sequência enfatiza-se a importância da realização de atividades desenvolvidas no Laboratório de Ensino de Matemática para a aprendizagem de conceitos da área em destaque. Por fim, apresenta-se cada uma das atividades, explicitando seus títulos, objetivos, materiais a serem utilizados e a descrição das instruções, e ao final de cada uma delas realiza-se comentários abordando os resultados esperados com as suas execuções, descrevendo as habilidades a serem exploradas e desenvolvidas com elas.

Palavras-chave: atividades; habilidades; ensino de geometria analítica.

ABSTRACT

This work consists of a sequence of activities that explored geometric constructions made in the Cartesian plane printed on paper. With them, through a script in which the procedures are set out step by step, the marking of points, segments, triangles, straight lines and circles is instructed, as well as the verification of distance measurements using a ruler and angles using compass and protractor, also performing some calculations, reading of theoretical concepts and deduction of formulas. These activities are aimed at developing specific skills and appropriating knowledge relevant to Analytical Geometry, exploring with them some of the study topics in this area for High School. In the development of this dissertation, a graphic and textual exposition is initially carried out on the results of the SPAECE mathematics tests from the years 2013 to 2019, released by SEDUC, which demonstrate the need to develop a didactic structure with a view to favoring of learning knowledge related to Analytical Geometry. Next, a study is presented on how skills related to Analytical Geometry are evaluated, showing models of questions and establishing the obtained inferences. The relevance of Analytical Geometry descriptors for students' results is exposed, based on a literary survey of CAEd's mathematics report cards. A breakdown of the skills developed in each proficiency level of the referred external assessment is presented. It continues with an analysis of the BNCC's proposals for mathematics for high school, highlighting the way in which some of its skills and abilities are approached with the activities proposed in this work. In sequence, the importance of carrying out activities developed in the Mathematics Teaching Laboratory for learning concepts in the highlighted area is emphasized. Finally, each of the activities is presented, explaining their titles, objectives, materials to be used and the description of the instructions, and at the end of each one of them, comments are made addressing the expected results with their executions, describing the skills to be explored and developed with them.

Keywords: activities; skills; teaching of analytical geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante pelo menos 12 anos os alunos vivenciam na escola a construção do conhecimento nas suas mais diversas áreas, e, desde as séries primárias, eles se deparam com o estudo da primeira ciência: a Matemática. Embora sendo esta trabalhada desde cedo, uma grande parte dos estudantes mantêm, durante a jornada da educação básica, uma relação difícil com a essa componente escolar. Ao ingressar no Ensino Médio, um novo tema é trabalhado com os estudantes: a Geometria Analítica (G.A.); uma importante dimensão da matemática, que permite o desenvolvimento de habilidades indispensáveis para a tecnologia e ciência. Esta, por sua vez corresponde a uma área altamente abstrata, que exige um pleno domínio de geometria plana e de álgebra. Para os discentes que acumulam dificuldades nessas duas unidades de estudo isso pode ser um grande entrave. Segundo BARBOSA e SANT'ANA (2020)

> a defasagem no estudo da geometria e da álgebra em anos anteriores podem gerar sérias dificuldades no estudo da Geometria Analítica, o que desmotiva o aluno a prosseguir com o estudo e obter uma aprendizagem significativa. (BARBOSA e SANT'ANA, 2020, p. 3)

O estudo de Geometria Analítica praticado nos dias atuais tem como base o método cartesiano (René Descartes, 1596-1650), no qual elementos geométricos são representados por equações e vice-versa, acerca disso Cardoso (2014) aponta que

> Levando em conta essa definição, é possível constatar que a geometria analítica relaciona a álgebra com a geometria, pois permite que os problemas de geometria sejam resolvidos a partir de procedimentos algébricos, bem como as relações algébricas podem ser analisadas geometricamente. (CARDOSO, 2014, p. 2)

É fato que a relação entre geometria e álgebra é indissociável no estudo de G.A. Para Cardoso (2014) qualquer problema proposto nesta área de estudo pode ser interpretado algébrica e geometricamente.

Além da notável exigência de se ter um bom desenvolvimento do aprendizado algébrico e geométrico por parte dos aprendizes, outras barreiras encontradas no ensino e aprendizagem de G.A. no ensino médio podem ser a dificuldade na compreensão dos conceitos fundamentais, a falta de contextualização e a falta da utilização de recursos didáticos adequados. Sobre este último Alves e Pereira (2016) apontam que

> O livro didático, que constitui um dos principais instrumentos para o exercício do ofício do professor de Matemática em sala de aula, pode condicionar/afetar hábitos inadequados aos aprendizes. Desse modo, uma razoável visão de mediação, não apenas de conteúdo, mas também de transmissão e transposição de um saber específico em sala de aula, pode sugerir caminhos para a superação de determinados entraves.
> Quando buscamos indicar os elementos que evidenciamos serem preocupantes, relacionados ao ensino de Geometria Analítica, possivelmente, um particular que se destaca se refere ao livro didático. De fato, esse instrumento desempenha o papel principal quando nos atemos aos suportes que apoiam a mediação do professor em sala de aula. O que sabemos, todavia, sobre a sua qualidade? Sendo ele um dos principais instrumentos didáticos do professor, até que ponto sua qualidade pode comprometer a transmissão de saberes pelo docente?
> (ALVES e PEREIRA, 2016, p. 2)

Segundo a análise feita por Nery (2008) a geometria analítica apresentada na maioria dos livros didáticos, consiste na exibição de suas fórmulas e, em seguida, aplicação de exercícios como meras aplicações diretas para sua memorização.

A transição da geometria tradicional para a geometria analítica requer a compreensão dos conceitos básicos abordados na geometria plana e de novos conceitos, como coordenadas cartesianas, equações de retas, equações de cônicas, distâncias entre pontos, dentre outros. É exatamente nesse aspecto que a natureza abstrata desses conceitos pode se tornar um obstáculo para muitos alunos, que podem vir a ter dificuldade em visualizá-los e aplica-los em problemas práticos, principalmente os estudantes que preferem aprender de forma mais concreta. De acordo com Nery (2008)

> Geralmente, com o decorrer das aulas, dependendo de como a G.A. é lecionada, o aluno acaba vendo um apanhado de fórmulas a serem decoradas: fórmulas de ponto médio, baricentro e distância entre dois pontos; as várias equações da reta (geral, reduzida, segmentária, etc.), as condições de paralelismo, perpendicularismo, distância entre ponto e reta (cuja fórmula raramente o professor deduz); as duas equações da circunferência (reduzida e geral). E, finalmente, e muito raramente, são apresentadas as equações das cônicas: elipse, parábola e hipérbole, quando o aluno já pode estar desmotivado e o professor frustrado por não ter conseguido cativar o aluno.
> (NERY, 2008, p. 19)

Levando em consideração os textos dos autores supracitados somos inclinados a pensar que um dos fatores condicionantes para que a aprendizagem dos conceitos de Geometria Analítica ocorra a contento seja a necessidade de que uma abordagem didática motivadora e diversifica venha a ser desenvolvida; do contrário, é provável que as dificuldades mantidas pelos alunos acentuem ainda mais o desinteresse por esta componente matemática, em decorrência da natureza abstrata dos conceitos e da exigência de se compreender a relação entre números, equações algébricas e formas geométricas.

No capítulo 3 deste trabalho apresentamos uma proposta metodológica para se ensinar tópicos de Geometria Analítica a partir da exploração de construções e análise de lugares geométricos no plano cartesiano, associando-os às suas fórmulas e equações algébricas. A proposta consiste em uma sequência de procedimentos indutivos, organizadas em roteiros que enunciam o passo a passo a ser desenvolvido pelos próprios discentes utilizando-se lápis, papel, régua, transferidor e compasso. Ao trabalhar com elas nas aulas os alunos têm a oportunidade de construir figuras geométricas planas, tendo com isso uma visualização e verificação de todos os elementos estudados, que são: a localização de pontos, a distância entre pontos, o ponto médio de um segmento, as medianas e o baricentro de um triângulo, as equações da reta e da circunferência, entre outros.

Essa sequência de atividades foi idealizada pelo autor do presente trabalho e tem por objetivo trazer uma abordagem diferenciada dos conceitos estudados, por meio de verificações de medições, construções geométricas e experimentação de resultados. Inspirado pela experiência docente, nasceu a ideia de discorrer sobre elas com a oportunidade de escrever esta dissertação, sendo necessário, para início, levantar alguns questionamentos motivadores que foram: Quais os resultados de aprendizagem de Geometria Analítica nas escolares cearenses? Que técnicas poderíamos utilizar para favorecer o ensino desta tão importante área da matemática no ensino médio? Discutiremos então, à luz deste contexto inicial, sobre os frutos de uma intensa pesquisa, análise e compilação de resultados que serão explanados a seguir.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Discussão dos resultados do SPAECE para as habilidades relacionadas à geometria analítica

Ao longo de mais de 30 anos a Secretaria da Educação Básica do Estado do Cerará (SEDUC) vem, por meio da aplicação da avaliação externa do Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Estado do Ceará (SPAECE) e da utilização dos seus indicadores, diagnosticando, analisando e traçando perfis da educação pública cearense, reconhecendo suas carências e fortalezas, mapeando os locais onde se precisa ter mais atenção e suporte, viabilizando a implementação de políticas públicas estruturais e educacionais que favoreçam o cenário da rede estadual ano a ano.

Com a aplicação das provas avalia-se o aprendizado de conhecimentos escolares fundamentais para a educação de crianças e adolescentes, abrangendo alguns anos do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio, dessa forma,

> O SPAECE busca, então, observar o desempenho de estudantes por meio de testes padronizados, cujo objetivo é aferir o que eles sabem e são capazes de fazer, a partir da identificação do desenvolvimento de habilidades e competências consideradas essenciais para que consigam avançar no processo de escolarização. (CEARÁ, 2017, p. 9)

As provas, também chamadas de testes, são compostas por questionários socioeconômicos e por blocos de questões de múltipla escolha chamadas de itens, que são criados tendo como fundamentação e estrutura uma série de critérios específicos, próprios do sistema. Na interpretação dos resultados utiliza-se a Teoria de Resposta ao Item (TRI) que é o modelo estatístico que permite avaliar os resultados obtidos, colocando numa mesma escala os estudantes e os testes que eles responderam, levando em consideração, nessa premissa, uma série de fatores para se chegar à pontuação final, chamada de proficiência.

Por se tratar de uma avaliação cujos resultados servirão para esboçar perfis da educação e que implicarão em investimentos de melhoria da rede estadual, sua característica difere do modelo de olimpíadas ou competições escolares, dessa forma

> A avaliação externa serve, fundamentalmente, para apresentar dados sobre os estudantes matriculados em diferentes anos escolares, a depender da abrangência, e sobre o que são capazes de saber (fazer) em um determinado

> estágio da sua trajetória escolar, em áreas como Matemática. (CEARÁ, 2022, p. 14)

Sob essa perspectiva, as questões trazem abordagens e contextualizações cuja complexidade é no máximo moderada. Convém destacar que, com a finalidade de obter bons resultados, anualmente a SEDUC, as Coordenadorias Regionais de Desenvolvimento da Educação (CREDE), gestores, coordenadores e professores estabelecem estratégias e desenvolvem uma extensa atividade de preparação dos discentes para a realização desta avaliação externa.

Atualmente, a prova de Matemática do SPAECE no Ensino Médio é aplicada na 3ª série de forma censitária. Ela é formada por blocos que totalizam 26 questões que avaliam o aprendizado de habilidades (chamados de descritores) que estão organizadas numa estrutura denotada por Matriz de Referência.

Neste trabalho trataremos apenas das habilidades relacionadas com Geometria Analítica Plana, para tanto, destacamos no Quadro 1 os respectivos descritores que farão parte do nosso estudo.

Quadro 1 - Habilidades da Matriz de Referência do SPAECE relacionados à Geometria Analítica

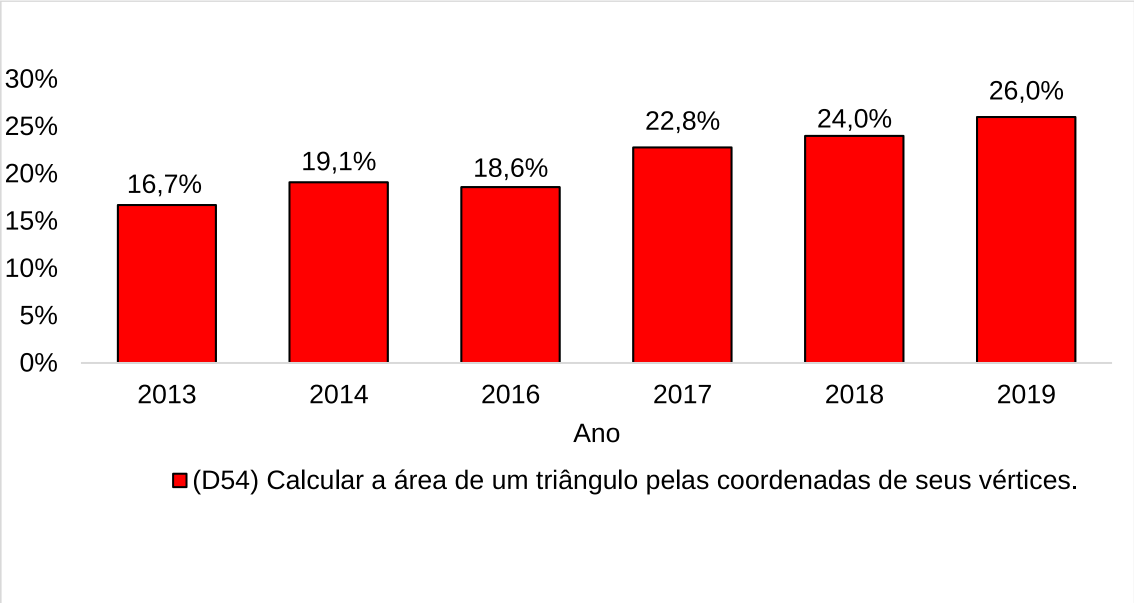
Tema II - CONVIVENDO COM A GEOMETRIA	
Código	Habilidade/Descritor
D54	Calcular a área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices.
D55	Determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
D56	Reconhecer, dentre as equações do 2° grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.
D57	Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
D58	Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

Fonte: SEDUC

Historicamente, no período correspondente aos anos de 2013 a 2019, nos testes de matemática do SPAECE, quatro dos cinco saberes relacionados à Geometria Analítica (que estão listados no Quadro 1) sempre apresentaram baixos índices de acerto, apresentando uma média geral de 24,1%. Os dados que permitem concluir esse fato foram obtidos e compilados pelo autor desse trabalho por meio da leitura e estudo dos materiais elaborados pelo Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação (CAEd) e divulgados pela SEDUC, que anualmente publiciza os resultados do SPAECE, lançando-os em suas páginas eletrônicas.

Utilizando as informações coletadas, elaboramos um conjunto de 6 apresentações gráficas, que relacionam a taxa de acerto com o tempo, em ano. A partir disso faremos uma análise mais detalhada do desempenho dos estudantes cearenses do Ensino Médio em cada uma dessas habilidades. Iniciamos pela apreciação dos resultados dos estudantes da rede estadual cearense para o descritor D54 no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Percentual Médio de acertos dos estudantes cearenses aos itens relacionados à habilidade de calcular a área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices (D54) no SPAECE de 2013 a 2019



Fonte: SEDUC

Pelo Gráfico 1 percebe-se que o descritor D54 sempre apresentou baixos percentuais de acerto por parte dos estudantes, embora tenha apresentado um crescimento a partir de 2016. Analisando resumidamente temos:

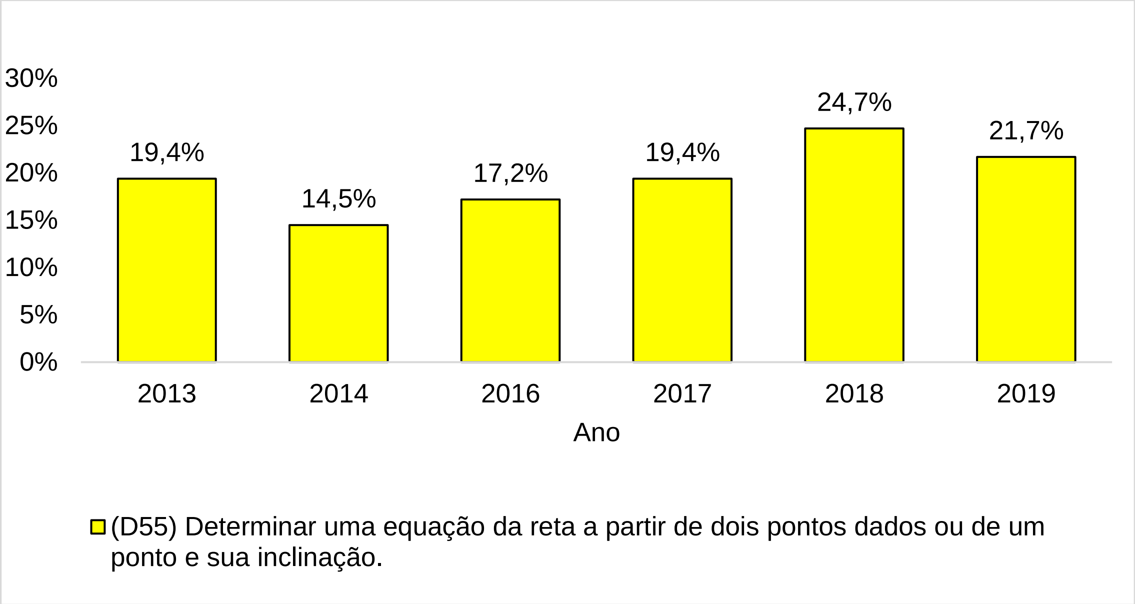
- Percentual Médio de acertos por ano: 21,2%
- Percentual Mínimo: 16,7% (Ocorrido em 2013)
- Percentual Máximo: 26% (Ocorrido em 2019)
- Variância: 13%

Sobre essa habilidade estão envolvidos processos cognitivos matemáticos, os quais destacamos:

- Reconhecimento de pontos no plano cartesiano;
- Aplicação de cálculo de determinantes, utilizando para isso as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Analisaremos no Gráfico 2 os resultados de acertos dos estudantes para o descritor D55.

Gráfico 2 – Percentual Médio de acertos dos estudantes cearenses aos itens relacionados à habilidade de determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação (D55) no SPAECE de 2013 a 2019



Fonte: SEDUC

Acerca do descritor D55, os resultados no Gráfico 2 mostram que as taxas de acertos foram oscilantes. Embora havendo um crescimento de 2014 a 2018, elas mantiveram-se sempre abaixo de 25%. Com isso temos:

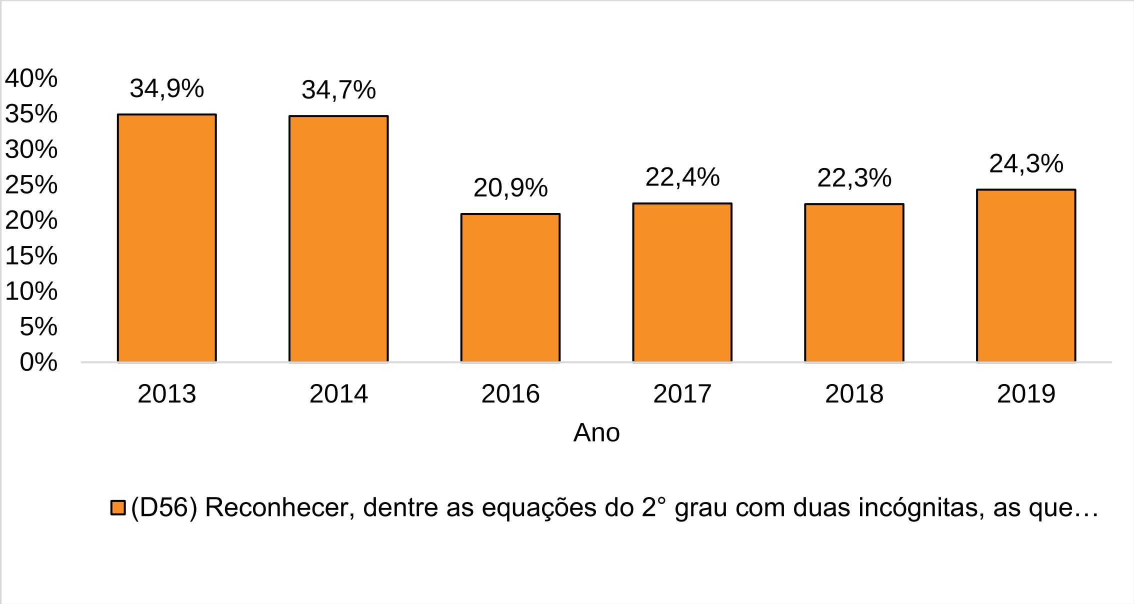
- Percentual Médio de acertos por ano: 19,5%
- Percentual Mínimo: 14,5% (Ocorrido em 2014)
- Percentual Máximo: 24,7% (Ocorrido em 2018)
- Variância: 12,44%

Para obter êxito em itens que exploram essa habilidade, é necessário que o aluno tenha um pleno domínio sobre Geometria e Álgebra, pois é exigido que ele realize processos de:

- Associação de retas no plano ao lugar geométrico de soluções de uma equação linear;
- Determinação da equação de uma reta a partir de dois pontos dados ou a partir de um ponto e sua inclinação ou seu coeficiente angular;
- Associação entre o gráfico e a expressão algébrica da reta e vice-versa;

No Gráfico 3 analisaremos os resultados de acertos dos alunos da rede estadual para o descritor D56.

Gráfico 3 – Percentual Médio de acertos dos estudantes cearenses aos itens relacionados à habilidade de reconhecer, dentre as equações do 2° grau com duas incógnitas, as que representam circunferências (D56) no SPAECE de 2013 a 2019



Fonte: SEDUC

O Gráfico 3 revela um aspecto que merece destaque: os dois primeiros resultados se mostram até razoáveis, próximos dos 35%, mas após isso tem-se uma queda para percentuais abaixo de 25%. Pontuando a análise estatística tem-se:

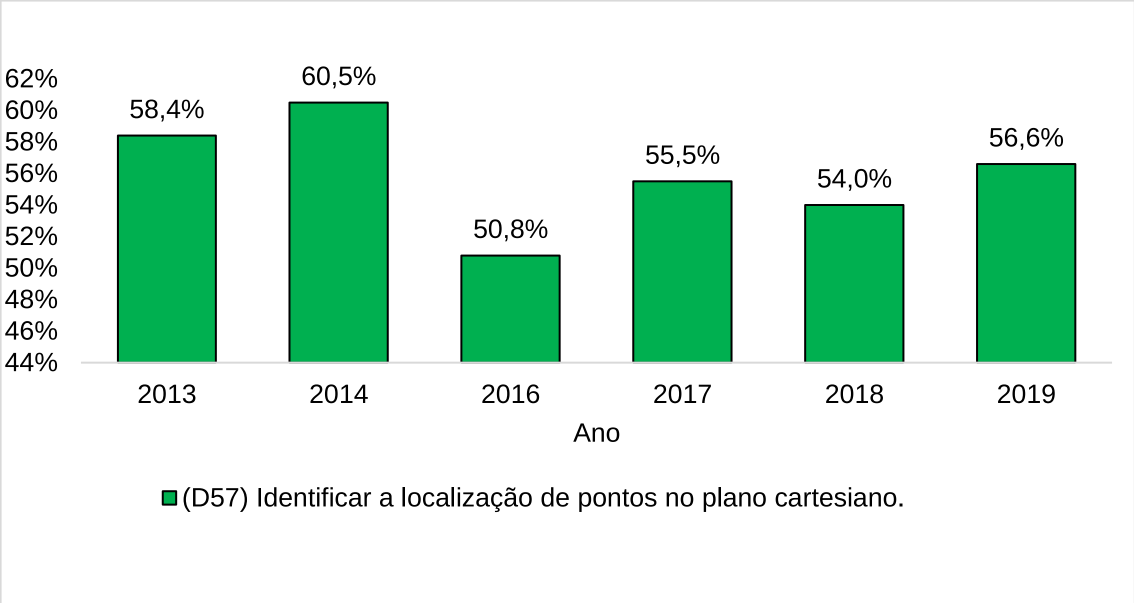
- Percentual Médio de acertos por ano: 26,6%
- Percentual Mínimo: 20,9% (Ocorrido em 2016)
- Percentual Máximo: 34,9% (Ocorrido em 2013)
- Variância: 41,68%

Para que sejam dadas respostas satisfatórias a itens que avaliam o aprendizado dessa habilidade, novamente temos em destaque o domínio da Álgebra e da Geometria simultaneamente por parte do aluno, uma vez que será necessário realizar processos de:

- Associação de uma circunferência a um lugar geométrico e que esta pode ser representada de forma algébrica;
- Determinação da equação de uma circunferência a partir dos elementos centro e raio, dados de forma literal ou em figuras.
- Determinação da equação de uma circunferência nas formas geral ou reduzida.

Analisaremos no Gráfico 4 os resultados de acertos dos estudantes cearenses para o descritor D57.

Gráfico 4 – Percentual Médio de acertos dos estudantes cearenses aos itens relacionados à habilidade de identificar a localização de pontos no plano cartesiano (D57) no SPAECE de 2013 a 2019



Fonte: SEDUC

Podemos observar, com a apreciação do Gráfico 4, o único descritor para o qual o percentual médio de acertos foi sempre superior a 50%. Resumindo temos:

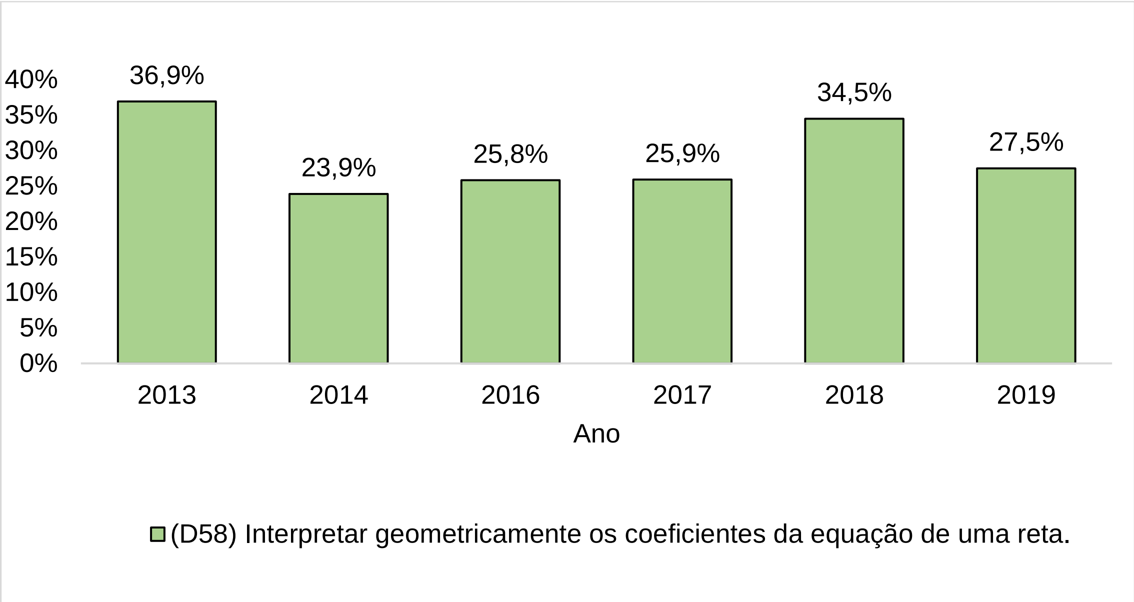
- Percentual Médio de acertos por ano: 56%
- Percentual Mínimo: 50,8% (Ocorrido em 2016)
- Percentual Máximo: 60,5% (Ocorrido em 2014)
- Variância: 11,53%

É notável que, dentre os cinco descritores abordados neste trabalho, o D57 é o que tem o grau de complexidade mais baixo, uma vez que, para acertar as questões que avaliam o aprendizado da habilidade de localizar pontos é exigido do estudante apenas o entendimento de que o sistema cartesiano funciona a partir da justaposição de duas retas reais perpendiculares entre si, da ordenação dos quadrantes, da distinção entre os eixos, definição e localização de coordenadas.

O domínio dessa habilidade pelos alunos é indispensável para o aprendizado dos demais conceitos, construções e definições estudados em Geometria Analítica.

No Gráfico 5 analisaremos os resultados de acertos dos alunos para o descritor D58.

Gráfico 5 – Percentual Médio de acertos dos estudantes cearenses aos itens relacionados à habilidade de interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta (D58) no SPAECE de 2013 a 2019



Fonte: SEDUC

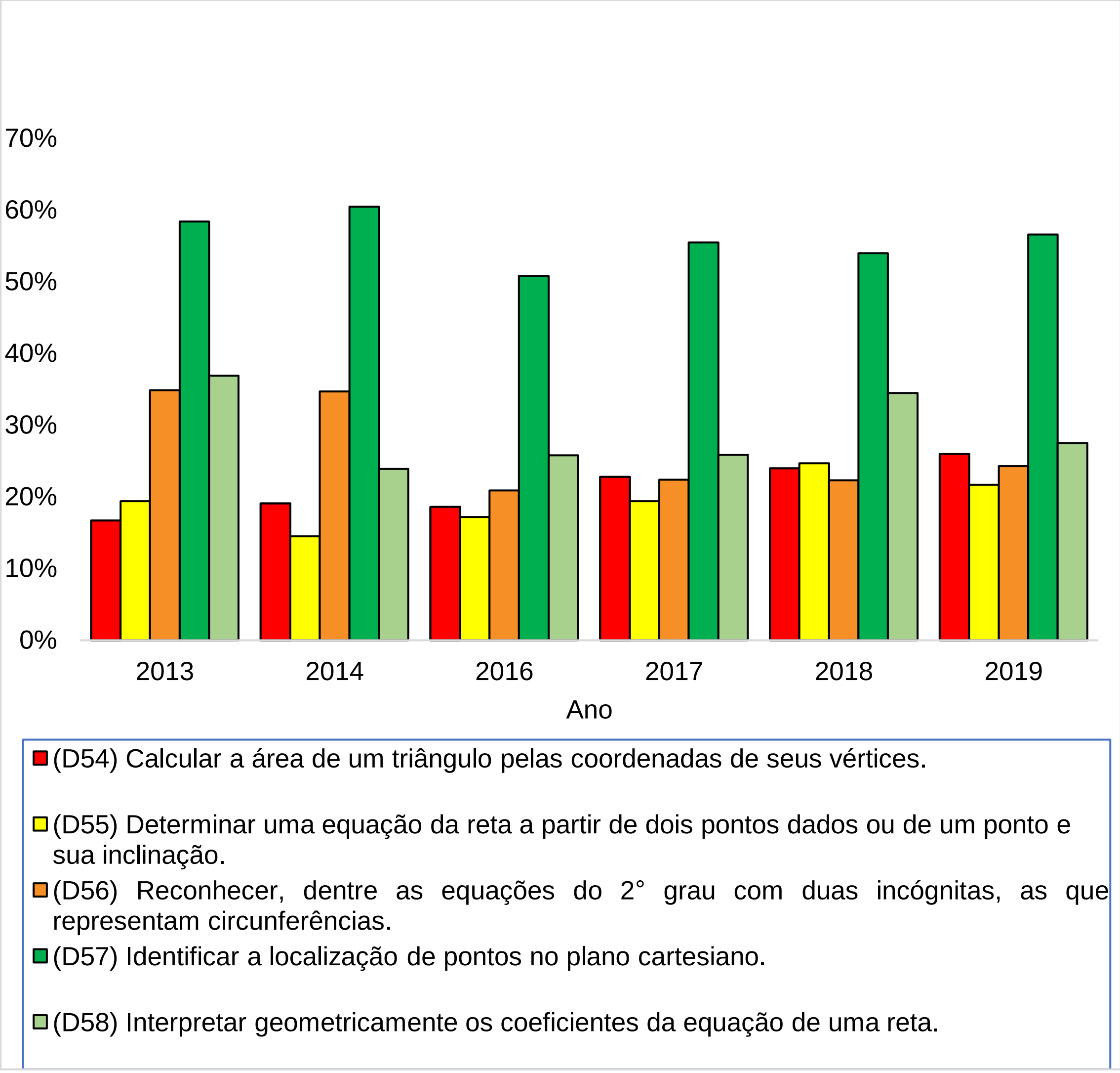
No Gráfico 5 apresenta-se também um descritor com resultado oscilante, com a variância das taxas sendo de aproximadamente 28%. Pontuando a análise estatística temos:

- Percentual Médio de acertos por ano: 29,1%
- Percentual Mínimo: 23,9% (Ocorrido em 2014)
- Percentual Máximo: 36,9% (Ocorrido em 2013)

Estão envolvidas no domínio deste tópico, por parte dos alunos, as mesmas habilidades que foram citadas para a determinação da equação da reta (D55), dando-se destaques maiores para a sua forma reduzida de equação, onde os coeficientes angular e linear estão explícitos, e para a visualização/associação gráfica, que devem ser muito bem desenvolvidas no estudante que consegue dar respostas favoráveis a itens que avaliam o aprendizado desse descritor.

O Gráfico 6 apresenta um comparativo dos resultados entre os cinco os descritores destacados neste trabalho, a saber: D54, D55, D56, D57 e D58.

Gráfico 6 – Compilado das Taxas Médias de acertos dos estudantes cearenses aos itens relacionados às habilidades de Geometria Analítica do SPAECE no período de 2013 a 2019



Fonte: SEDUC

Analisando o Gráficos 6 e todos os indicadores obtidos, percebe-se que a única habilidade a qual os estudantes obtiveram maior êxito em respostas foi a de localizar pontos no plano cartesiano (D57) que apresentou uma média geral de 56% de acertos pelos 6 períodos observados. Todas as demais habilidades apresentaram média geral de acertos inferior a 30%.

A habilidade de determinar a equação de uma reta (D55) foi a que apresentou o índice mais baixo de acertos, com média geral de 19,5%, seguida pela habilidade de calcular a área de um triângulo pelos vértices (D54), com 21,2%. As habilidades cujo resultado superaram os 25% de acertos foram as de reconhecer equações que representam circunferências (D56) e de interpretar geometricamente os coeficientes da equação da reta (D58), com média geral de acertos de 26,6% e 29,1%, respectivamente, pelos 6 anos em destaque.

Tendo como evidência os resultados supracitados, chega-se à conclusão de que eles revelam a necessidade de aperfeiçoar o ensino da geometria analítica na rede estadual, sendo imprescindível que se estudem meios que possibilitem modificar essa realidade, investindo-se no engajamento de uma abordagem metodológica que venha a proporcionar um aprendizado mais significativo dessa importante área da matemática. Nesta perspectiva, anseia-se que isso possa ser refletido em resultados mais satisfatórios tanto internamente nas escolas como em avaliações externas.

2.2 Relevância das habilidades relacionadas à geometria analítica no SPAECE

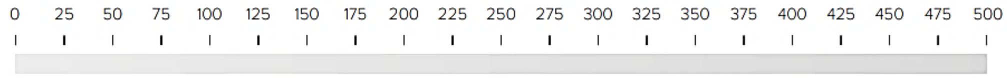
A partir do questionamento motivador: “Qual a relevância das habilidades relacionadas à Geometria Analítica na prova de Matemática do SPAECE?” discorreremos agora sobre a importância que os conceitos e saberes referentes à essa componente têm na interpretação dos resultados desta avaliação externa.

Antes de realizarmos as reflexões obtidas a partir da pesquisa literária pelas possíveis respostas da pergunta motivadora será necessário nos apropriarmos do vocabulário particular do sistema, para que possamos prosseguir dialogando de forma clara e objetiva sobre os resultados dos testes de matemática do SPAECE, o qual passamos a ter conhecimento mais aprofundado a partir da leitura dos boletins pedagógicos anuais divulgados pelo CAEd. Portanto faremos a apresentação dos termos em destaque a seguir:

Proficiência: É a medida do desempenho do aluno nos testes, calculada pela *Teoria de Resposta ao Item* (TRI). Refere-se às habilidades estimadas que o estudante é capaz de demonstrar nas questões das provas, a ser representada por um número real.

Escala de Proficiência: Forma utilizada para traduzir as medidas de proficiência, na qual os resultados são representados numa espécie de “régua” graduada de 0 a 500 pontos, onde os valores são agrupados em faixas ou intervalos a fim de indicar o grau de desenvolvimento das habilidades dos alunos em cada nível de desempenho. Veja a figura 1.

Figura 1 – Ilustração da escala de proficiência em Matemática no SPAECE



Fonte: CAEd. Boletim Pedagógico 2022.

Padrão de Desempenho: São os quatro intervalos que perfazem conjunto das habilidades avaliadas, nos quais a Escala de Proficiência está subdividida. A partir dos resultados, os alunos são agrupados em um desses padrões de acordo com o nível pedagógico no qual as evidências apontaram estar. Eles são denotados por: **Muito Crítico**, **Crítico**, **Intermediário** e **Adequado**. Esses quatro padrões serão melhor detalhados a seguir, onde descreveremos sobre eles sob a ótica da disciplina de matemática. Veja a figura 2.

Figura 2 – Ilustração dos Padrões de desempenho em Matemática no SPAECE

Etapa	Muito Crítico	Crítico	Intermediário	Adequado
3ª série EM	Até 250	250 a 300	300 a 350	Acima de 350

Fonte: CAEd. Boletim Pedagógico.

Padrão Muito Crítico: Nível mais baixo, correspondendo até metade da pontuação total da escala, ilustrado em coloração vermelha. Alunos que são classificados nesse padrão demonstram carências de aprendizagem das habilidades matemáticas mais elementares para a etapa de escolaridade avaliada.

Padrão Crítico: Subindo um pouco na escala temos esse nível, ilustrado na coloração amarela. Alunos que são classificados nesse padrão ainda estão iniciando o processo de desenvolvimento de habilidades matemáticas básicas para a etapa escolar que fora avaliada.

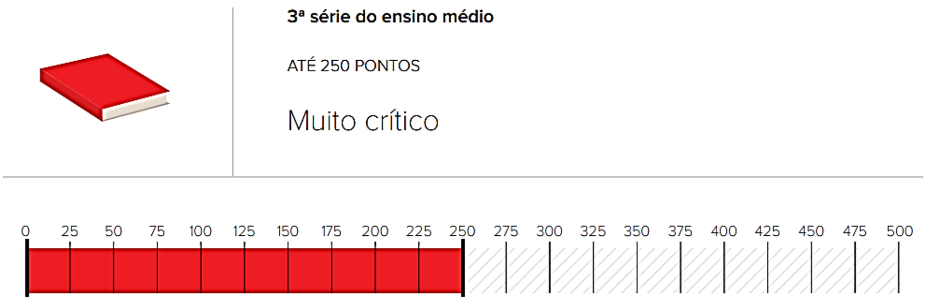
Padrão Intermediário: Nível de aprendizagem consonante com a etapa escolar avaliada, representado pela coloração verde-clara. Nesse padrão os alunos já demonstram dominar habilidades matemáticas necessárias para continuar a desenvolver uma boa trajetória estudantil.

Padrão Adequado: Nível mais alto da escala, representado pela faixa de coloração verde escura. Os alunos que se encontram nesse padrão demonstram ter desenvolvido as habilidades matemáticas referentes a sua etapa escolar e possivelmente até mais do que isso.

A fim de tomarmos conhecimento sobre a relevância das habilidades relativas à Geometria Analítica nos testes de Matemática do SPAECE, pesquisamos e analisamos atenciosamente os Boletins Pedagógicos do CAEd, desde o ano de 2013 até o ano de 2019 e constatamos que elas estão associadas a altos níveis de proficiência, correspondendo aos padrões de desempenho Intermediário e Adequado. Para que pudéssemos evidenciar tal fato, selecionamos, após intensa estudo e leitura dos materiais, apenas as habilidades relacionadas aos tópicos de Geometria Analítica pertinentes a cada nível de desempenho e as apresentaremos a seguir:

No padrão de desempenho ***Muito Crítico***, faixa de 0 a 250 pontos, não encontramos praticamente nenhuma habilidade relacionada à Geometria Analítica nos boletins pesquisados. Veja a figura 3.

Figura 3 – Ilustração do nível de proficiência “Muito Crítico”

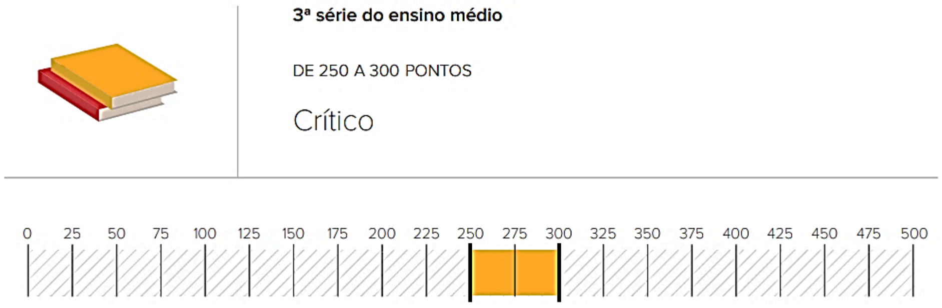


Fonte: CAEd

A partir do padrão de desempenho ***Crítico***, intervalo que vai de 250 a 300 pontos na Escala, subdivido ainda nos níveis 2 e 3, passamos a perceber habilidades a serem analisadas.

Veja a figura 4.

Figura 4 – Ilustração do nível de proficiência "Crítico"



Fonte: CAEd

O ***NÍVEL 2*** é representado na escala pela pontuação que vai de 250 a 275 pontos. A habilidade que alunos que se encontram nesse nível podem ter desenvolvido e são capazes de demonstrar nos testes, além das do nível anterior é:

- Reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro ou segundo quadrante.

Na escala, *o* ***NÍVEL 3*** corresponde ao intervalo de 275 a 300 pontos.

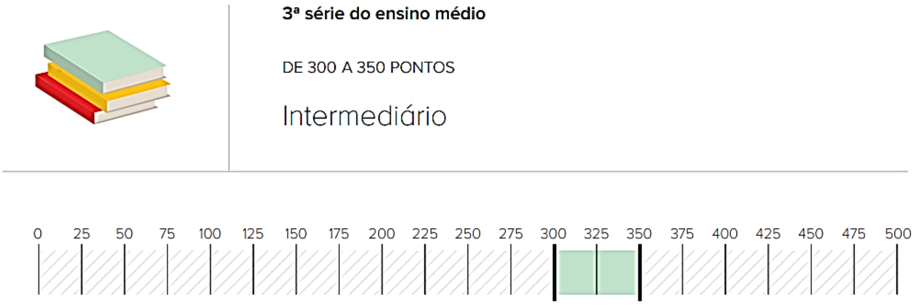
Além das dos níveis anteriores, é provável que alunos que se enquadrem nesse tenham desenvolvido as seguintes habilidades referentes à Geometria Analítica:

- Localizar pontos em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas ou vice-versa.
- Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada.
- Reconhecer que a solução de um sistema de equações dado equivale ao ponto de interseção entre as duas retas que o compõem.

Na Faixa de pontos que vai de 300 a 350, tem-se o nível ***Intermediário*** de desempenho. Ele está subdivido nos níveis 4 e 5, conforme detalhamos a seguir.

Veja a figura 5.

Figura 5– Ilustração do nível de proficiência "Intermediário"



Fonte: CAEd

O ***NÍVEL 4*** corresponde ao intervalo de 300 a 325 pontos na escala. Alunos que se encontram nessa faixa, de acordo com os resultados dos testes, demostram ter desenvolvido, além das anteriores, a habilidade de:

- Localizar pontos em um sistema de coordenadas cartesianas.

O ***NÍVEL 5*** se enquadra no intervalo de 325 a 350 pontos na escala. A habilidade que alunos que se encontram nesse nível podem ter desenvolvido e são capazes de demonstrar nos testes, além das dos níveis anteriores é:

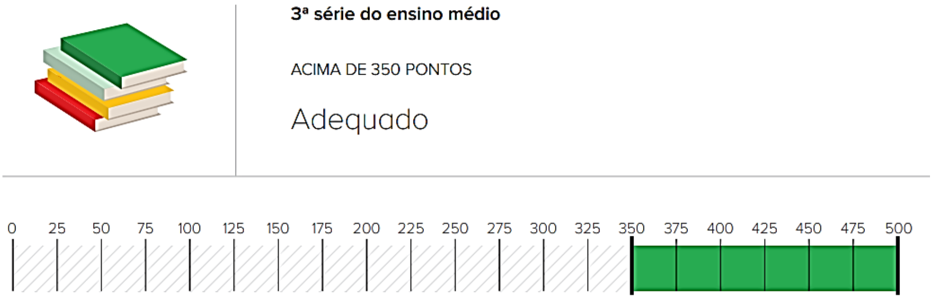
- Associar os pontos que representam os vértices de um quadrilátero, representado em cada um dos quadrantes do plano cartesiano, às suas respectivas coordenadas.

Percebemos que todas essas habilidades dos níveis de 2 a 5 estão associadas a reconhecer ou localizar pontos no plano cartesiano, tema esse do Descritor D57. O grau de dificuldade de itens que avaliam esses aspectos geralmente é fácil ou médio.

Por fim, temos o mais alto padrão de desempenho da escala, o ***Adequado***, cuja faixa de pontuação vai de 350 a 500 pontos. Ele está subdivido nos níveis 6, 7, 8 e 9.

Veja a figura 6.

Figura 6– Ilustração do nível de proficiência "Adequado"



Fonte: CAEd

NÍVEL 6: De 350 a 375 pontos.

As habilidades que os estudantes do ensino médio que se encontram nesse nível podem ter desenvolvido, além das anteriores são:

- Reconhecer as coordenadas de pontos representados num plano cartesiano localizados no terceiro ou quarto quadrantes.
- Associar a representação gráfica de duas retas no plano cartesiano à solução de um sistema de duas equações lineares, ou vice-versa.

Esses aspectos correspondem aos descritores D57 e D55, respectivamente.

NÍVEL 7: Intervalo 375 a 400 pontos.

As habilidades que os alunos que se encontram nesse nível podem ter desenvolvido, além das anteriores, são:

- Determinar a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos.
- Determinar o ponto de interseção de duas retas.

Esses aspectos correspondem ao descritor D55.

NÍVEL 8: Intervalo de 400 a 425 pontos.

As habilidades que os alunos que se encontram nesse nível podem ter desenvolvido, além das anteriores, são:

- Determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano.
- Determinar a equação de uma reta a partir de sua representação gráfica.
- Interpretar o significado dos coeficientes da equação de uma reta, a partir de sua forma reduzida ou de seu gráfico.
- Determinar a equação de uma circunferência, dados o centro e o raio.

Esses aspectos correspondem, respectivamente aos descritores D57, D55, D58 e D56.

NÍVEL 9*:* Acima de 425 pontos.

As habilidades que os estudantes do ensino médio que se encontram nesse nível podem ter desenvolvido, além das anteriores, são:

- Reconhecer a equação que representa uma circunferência, dentre diversas equações dadas.
- Determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir de sua equação geral.
- Determinar a equação de uma circunferência a partir de seu gráfico.
- Identificar a equação da reta dado o ângulo agudo que esta forma com o eixo x e um de seus pontos, sem o apoio de imagem.
- Interpretar o significado dos coeficientes das equações de duas retas, a partir de sua forma reduzida ou de seu gráfico.
- Determinar a inclinação ou coeficiente angular de retas a partir de suas equações.

Os três primeiros pontos citados acima referem-se ao descritor D56, o 4ª ao D55 e os restantes ao D58.

Após essa exposição evidencia-se que os saberes que correspondem a tópicos de Geometria Analítica estão relacionados com altos níveis de desempenho no SPAECE, com isso, se voltarmos para a pergunta motivadora inicial: “Qual a relevância das habilidades relacionadas à Geometria Analítica na prova de Matemática do SPAECE?” Chegamos à formulação da resposta:

De acordo com a Escala de Proficiência de Matemática do SPAECE e com os padrões de desempenho, podemos confirmar que as habilidades pertinentes à Geometria Analítica têm relevância alta, representando uma grande importância para os indicadores dos testes, pois elas estão relacionadas com os mais altos níveis de resultado, ou seja, quando um aluno responde corretamente aos itens referentes à essa área, em especial aos dos descritores D55, D56 e D58 isso significa que ele se encontra na classificação de desempenho “Adequado” e é de se esperar que ele domine muitas outras habilidades matemáticas, tanto as mais simples como aquelas que exigem maior grau de complexidade, consequentemente, sua proficiência está acima de 350 pontos, como se pode observar nestas pontuações de habilidades destacadas e apresentadas para cada nível de proficiência.

2.3 Modo como as habilidades relacionadas com geometria analítica são avaliadas nos testes do SPAECE

Nesta seção apresentaremos modelos de questões para podermos analisar a forma pela qual as habilidades pertinentes à Geometria Analítica são avaliadas nas provas de matemática do SPAECE. Trazemos recortes de questões divulgadas pelo documento chamado de Boletim do Professor, que é uma das ferramentas utilizadas pelo Sistema para fornecer *feedback* e informações aos professores sobre o desempenho de seus alunos. Ele apresenta os indicadores estadual, municipal e local (da escola), permitindo que os professores tenham um panorama do desempenho de seus alunos e da própria prática docente.

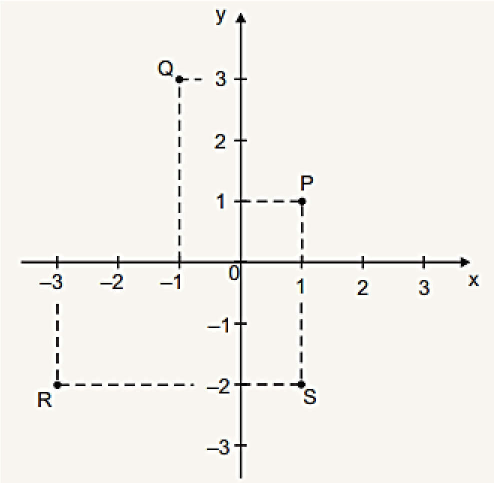
O boletim geralmente contém informações sobre os resultados alcançados pelos alunos, além de oferecer dados comparativos com a média do estado e trazer comentários sobre os itens aplicados. Com base nesses resultados, os professores podem identificar áreas de melhoria, ajustar suas estratégias de ensino e colaborar com o desenvolvimento de ações pedagógicas mais efetivas.

Dentre todos os saberes que se encaixam em cada uma das faixas de níveis de 1 a 9, destacamos apenas os que estão relacionados com Geometria Analítica e selecionamos alguns modelos de itens a seguir, extraídos dos boletins.

Na figura 7 temos um item que é respondido corretamente pelos alunos que se encontram no padrão de desempenho *Crítico*.

Figura 7 – Modelo de item que avalia a habilidade D57

(M120425ES) No plano cartesiano abaixo, foram marcados 4 pontos.



Quais são as coordenadas do ponto Q?

A) (– 1, –3)
B) (–1,3)
C) (1,3)
D) (3, –1)
E) (3, 1)

Fonte: CAEd. Boletim do Professor - Matemática Ensino Médio- Coleção 2013-Pág. 59.

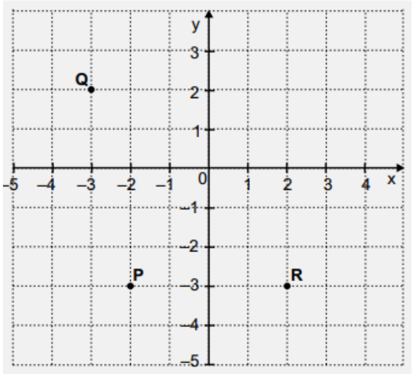
De acordo com o Boletim do Professor, alunos que estão no Nível de 2 em diante conseguem acertar esse item, a pontuação correspondente será de 250 a 300 pontos. No caso do modelo acima,

> Esse item avalia a habilidade de os alunos resolverem problemas envolvendo a localização de pontos no plano cartesiano. Para resolvê-lo, eles devem compreender que, convencionalmente, o primeiro número representado no par ordenado se refere a um valor do eixo x e o segundo ao eixo y. Dessa forma, devem reconhecer que (-1,3) são as coordenadas do ponto de Q. A escolha da alternativa B) indica que esses alunos, possivelmente, desenvolveram a habilidade avaliada pelo item. [...] Ao analisarem os pontos plotados no plano cartesiano, as dificuldades mais frequentes dos alunos estão relacionadas à orientação positiva e negativa dos eixos coordenados ou a representação do ponto, observando que a primeira coordenada refere-se ao eixo x e a segunda ao eixo y, que são, frequentemente, invertidas. Essas foram as prováveis causas que levaram os alunos a marcarem as alternativas incorreta. (CEARÁ, 2013, p. 59)

Na figura 8, apresentada a seguir, temos um modelo de item que é respondido corretamente pelos alunos que se encontram no nível 4 (Intermediário).

Figura 8 – Modelo de item que avalia a habilidade D57

(M12096264) Para a realização de uma pesquisa, foram usados os submarinos Alfa, Beta e Gama para verificar o ecossistema de determinada área marítima. As posições desses três submarinos foram relacionadas a pontos no plano cartesiano, no qual o submarino Alfa está representado pelo ponto de coordenadas (-3, 2). Beta pelo ponto (-2,-3) e Gama pelo ponto (2.-3) conforme indicado abaixo.



Os pontos que representam, respectivamente, a localização dos submarinos Alfa, Beta e Gama nesse plano cartesiano são

A) P, Q e R.
B) P, R e Q.
C) Q, P e R.
D) Q, R e P.
E) R, P e Q.

Fonte: CAEd. Boletim do Professor - Matemática Ensino Médio - Coleção 2014 - Pág. 51.

Conforme destacado no Boletim do Professor,

> Esse item avalia a habilidade de os alunos identificarem a localização de pontos no plano cartesiano. Para resolvê-lo, eles devem conhecer o plano cartesiano, sabendo que um ponto é representado por um par ordenado, no qual a primeira coordenada representa a abscissa, que se localiza no eixo x, e a segunda, a ordenada, que se localiza no eixo y. Devem reconhecer ainda que os eixos nada mais são do que retas numéricas, nesse caso, de números inteiros. A partir daí, os alunos devem se atentar aos pontos informados no enunciado e procurar no suporte dado as coordenadas que se relacionam a eles. Os alunos que assinalaram a alternativa C) provavelmente desenvolveram a habilidade avaliada pelo item. Quando se trata de plano cartesiano, as dificuldades mais comuns dos alunos estão relacionadas à ordem do par que representa o ponto, que é frequentemente invertida por eles, ou mesmo à orientação dos eixos, o que leva alguns deles a identificarem de forma incorreta a localização dos pontos que têm pelo menos uma das coordenadas negativas. Essas foram as prováveis causas que levaram os alunos a marcar as alternativas incorretas. O conhecimento da reta numérica está diretamente ligado à habilidade de localizar pontos no plano cartesiano, uma vez que esse é composto por duas retas perpendiculares assim como o domínio do conjunto numérico que está sendo utilizado para compor os pares ordenados informados no problema. Com o domínio dessas habilidades, os alunos provavelmente não terão dificuldades em resolver itens como esse exemplo. (CEARÁ, 2014, p. 51)

Nas figuras 9, 10 e 11 apresentaremos modelos de itens acertados pelos alunos que se encontram no nível 7 (Adequado):

Figura 9 – Modelo de item que avalia a habilidade D55.

(M120283H6) Dois pontos pertencentes à reta r são (-2, 3) e (1,6). Qual é a equação dessa reta?

A) $y = -3x - 3$
B) $y = 2x + 3$
C) $y = x + 5$
D) $y = x + 6$
E) $y = 2x + 2$

Fonte: CAEd. Boletim do Professor - Matemática Ensino Médio - Coleção 2017 -Pág. 53.

Na figura 9 temos um item que avalia a habilidade de determinar a equação de uma reta na forma reduzida a partir de dois de seus pontos dados. Nota-se uma questão com comando direto e que não envolve contextualização que requeira interpretação ou raciocínio de estratégia mais elaborados. O Gabarito é a opção C). Vejamos o detalhamento da resolução:

Solução 1: Utilizando o teorema angular

- Fazendo A(-2, 3) e B(1, 6) e calculando o coeficiente angular da reta que passa por A e B, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \qquad m = \frac{6-3}{1+2} \qquad \Rightarrow m = 1$$

- Escolhendo o ponto B(1, 6) e utilizando a equação fundamental da reta $y - y_B = m(x - x_B)$, temos: $y - 6 = 1(x-1)$ $\Rightarrow y = x + 5$■

Solução 2: Utilizando a condição de alinhamento de três pontos

- Considerando um terceiro ponto P(x, y) aplicamos a condição de alinhamento para esse trio de pontos A, B e P:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow y + 3x - 12 + 2y - 3 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow -3x + 3y - 15 = 0$$

$$\Rightarrow y = x + 5 ■$$

Veja a figura 10.

Figura 10 – Modelo de item que avalia a habilidade D55.

(M120703H6) Considere uma reta r que passa pelos pontos de coordenadas (-2, 3) e (4,-2). Uma equação dessa reta r está representada em A) x + 2y + 16 = 0. B) x + 6y – 16 = 0. C) 2x – 3y + 6 = 0. D) 5x + 6y – 8 = 0. E) 6x + 5y – 3 = 0.

Fonte: CAEd. (Boletim do Professor - Matemática Ensino Médio - Coleção 2018 -Pág. 47.

Na figura 10 temos outro item que avalia a habilidade de determinar a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos dados, mas agora na forma geral. Como na anterior, o comando dessa questão é direto e sem envolver uma contextualização que exija interpretação ou raciocínio de estratégia mais elaborados. O Gabarito é a opção D). Acompanhemos o detalhamento da resolução:

Solução 1: Utilizando o teorema angular

- Fazendo A(-2, 3) e B(4,-2) e calculando o coeficiente angular da reta que passa por A e B, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \qquad m = \frac{-2-3}{4+2} \quad \Rightarrow m = -\frac{5}{6}$$

- Escolhendo o ponto A(-2, 3) e utilizando a equação fundamental $y - y_A = m(x - x_A)$, temos: $y - 3 = -\frac{5}{6}(x+2)$ $\Rightarrow 6y - 18 = -5x - 10$

$$\Rightarrow 5x + 6y - 8 = 0 \blacksquare$$

Solução 2: Utilizando a condição de alinhamento de três pontos

- Considerando um terceiro ponto P(x, y) aplicamos a condição de alinhamento para esse trio de pontos A, B e P:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow 4y + 3x + 4 + 2y - 12 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow 5x + 6y - 8 = 0 \ \blacksquare$$

Veja a figura 11.

Figura 11 – Modelo de item que avalia a habilidade D55.

(M120899E4) A reta v passa pelos pontos (10, 8) e (2, –16).

Qual é a equação da reta v?

A) $y = 2x - 16$
B) $y = 3x - 22$
C) $y = 5x - 2$
D) $y = 10x + 8$
E) $y = 12x - 8$

Fonte: CAEd. Boletim do Professor - Matemática Ensino Médio - Coleção 2019 -Pág. 68.

Na figura 11 temos um modelo de item que, assim como no da figura 9, avalia a habilidade de determinar a equação de uma reta na forma reduzida a partir de dois de seus pontos dados. Igualmente aos anteriores, de forma direta e sem envolver uma contextualização que requeira interpretação ou raciocínio de estratégia mais elaborados. O Gabarito é a alternativa B). Acompanhemos o detalhamento da resolução a seguir:

Solução 1: Utilizando o teorema angular

- Fazendo A(10, 8) e B(2, -16) e calculando o coeficiente angular da reta que passa por A e B, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \qquad m = \frac{-16 - 8}{2 - 10} \qquad \Rightarrow m = 3$$

- Escolhendo o ponto A(10, 8) e utilizando a equação fundamental $y - y_B = m(x - x_B)$, temos: $y - 8 = 3(x - 10)$ $\Rightarrow y = 3x - 22$■

Solução 2: Utilizando a condição de alinhamento de três pontos

- Considerando um terceiro ponto P(x, y) aplicamos a condição de alinhamento para esse trio de pontos A, B e P:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 10 & 8 & 1 \\ 2 & -16 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow 2y + 8x - 160 - 10y - 16 + 16x = 0$$

$$\Rightarrow 24x - 8y - 176 = 0 \qquad \times \frac{1}{8}$$

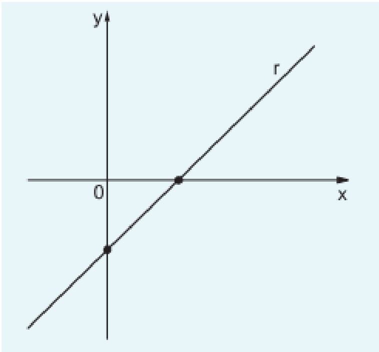
$$\Rightarrow 3x - y - 22 = 0$$

$$\Rightarrow y = 3x - 22 \blacksquare$$

Analisaremos agora modelos de itens acertados pelos alunos que se encontram no nível 8 (Adequado). Veja a figura 12.

Figura 12 – Modelo de item que avalia a habilidade D58.

(M1D0710295) No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico de uma reta r de equação y = ax + b



Os valores dos coeficientes angular e linear dessa reta, são, respectivamente

A) a < 0 e b < 0
B) a < 0 e b > 0
C) a > 0 e b > 0
D) a > 0 e b < 0
E) a > 0 e b = 0

Fonte: CAEd. Boletim do Professor-Matemática Ensino Médio - Coleção 2016-Pág. 76

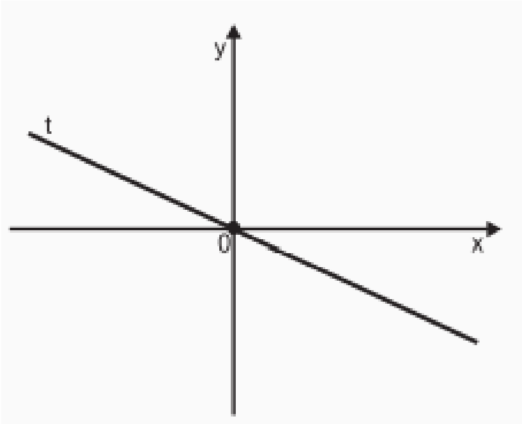
Na figura 12 temos um modelo de item que avalia a habilidade de interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta. Nesse caso, temos um gráfico crescente, portanto seu coeficiente angular $a > 0$ e a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo Oy é negativa, com isso o coeficiente linear $b < 0$. O gabarito está na alternativa D).

Na figura 13, apresentada a seguir, temos outro modelo de item que avalia a habilidade de interpretar o significado dos coeficientes da equação de uma reta a partir de seu gráfico.

Para chegar à resposta correta, apresentada pela alternativa B) não é necessário realizar procedimentos de cálculo, pois a interpretação é geométrica, basta apenas reconhecer que esse gráfico corresponde a uma reta decrescente, portanto seu coeficiente angular $j < 0$ e que ela passa pela origem do sistema cartesiano, como isso seu coeficiente linear $k = 0$. Veja a figura 13.

Figura 13 – Modelo de item que avalia a habilidade D58.

(M120881E4) A reta t de equação y = jx + k está representada no gráfico abaixo.



Os coeficientes angular j e linear k, em relação ao sinal, são, respectivamente,

A) negativo e negativo.
B) negativo e nulo.
C) positivo e negativo.
D) positivo e nulo.
E) positivo e positivo.

Fonte: CAEd. Boletim do Professor-Matemática Ensino Médio - Coleção 2017-Pág. 56.

Nas figuras 14 e 15 temos modelos de itens acertados pelos alunos que se encontram no nível 9. Veja a figura 14.

Figura 14 – Modelo de item que avalia a habilidade D56.

(M120364H6) Considere as equações abaixo.

I. $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$ II. $x^2 - y^2 - 16 = 0$ III. $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$

IV. $x^2 + y - 9 = 0$ V. $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

Quais dessas equações representam circunferências?

A) I, II e V.
B) I e V.
C) II e III.
D) II, III e IV.
E) II e IV.

Fonte: CAEd. (Boletim do Professor-Matemática Ensino Médio-Coleção 2018-Pág. 53.

De acordo com o Boletim do Professor (CEARÁ. 2018, p. 53), “esse item avalia a habilidade de os estudantes reconhecerem a equação que representa uma circunferência dentre diversas equações dadas (D56). Os estudantes que assinalaram a alternativa B), provavelmente, desenvolveram a habilidade avaliada nesse item.”

Para chegar à resposta correta o aluno deve ter aprendido muitos elementos referentes ao tópico de estudo equação da circunferência. Dentre eles, que as condições que devem ser todas satisfeitas para que uma equação completa do 2º grau com duas incógnitas $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ represente uma circunferência no plano cartesiano, comparando-se com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, são:

1) $A = B \neq 0$;

2) $C = 0$;

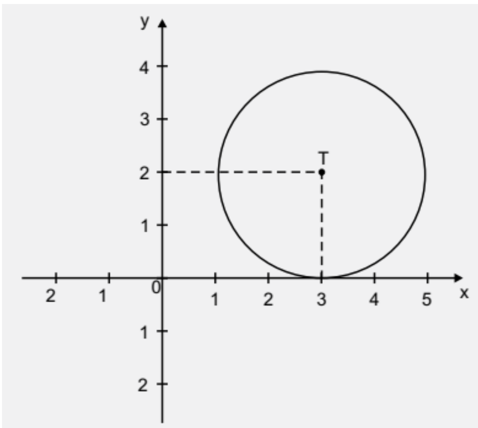
3) $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Apenas com esta análise, para essa questão, eliminamos a possibilidades das equações II), III) e IV) representarem circunferência e concluímos, pelas alternativas apresentadas, que a opção correta é a B).

Veja a figura 15.

Figura 15 – Modelo de item que avalia a habilidade D56.

(M120682ES) A circunferência de centro T representada no plano cartesiano abaixo é tangente ao eixo x.



Qual é a equação dessa circunferência?

A) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$
B) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$
C) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$
D) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 16$
E) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

Fonte: CAEd. Boletim do Professor-Matemática Ensino Médio-Coleção 2015-Pág. 51.

Conforme está destacado no Boletim do Professor,

> Esse item avalia a habilidade de os alunos relacionarem as representações algébricas e gráficas de uma circunferência. Para resolvê-lo, eles devem

> reconhecer que a equação de uma circunferência com centro no ponto O (a,b) e raio r, é dada pela equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Assim, analisando a representação gráfica da circunferência, deve-se observar que ela possui centro no ponto O, de coordenadas $(3,2)$, e que seu raio pode ser determinado pela medida do segmento com extremidades nos pontos (3,2) e $(3{,}0)$. A projeção ortogonal desse segmento, sobre o eixo y, permite observar, facilmente, que ele possui medida igual a 2 u. Dessa forma, conclui-se que a equação dessa circunferência é dada por $(x-3)^2+(y-2)^2=4$. Logo, os alunos que assinalaram a alternativa E), possivelmente, desenvolveram a habilidade avaliada pelo item. (CEARÁ. 2015, p. 51)

Após essa exposição das habilidades relacionadas a cada nível de proficiência e tendo como referência os seus respectivos exemplos de itens podemos perceber que o nível de dificuldade das questões as quais os alunos são submetidos nas questões de matemática da prova do SPAECE não é tão alto, pois observa-se que o número de operações que o estudante deve realizar até chegar a resposta final é baixo, uma vez que a grande maioria das questões não estão inseridas em contextos de complexa leitura e interpretação, também percebe-se que o raciocínio matemático exigido para resolvê-las é de “saída imediata”, bastando, para isso, que o aluno domine os conceitos e habilidades pertinentes à Geometria Analítica.

2.4 Competências e habilidades da BNCC para a matemática do ensino médio exploradas com as atividades propostas

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que todos os estudantes brasileiros devem desenvolver ao longo de sua trajetória educacional.

Trataremos agora sobre como a nova BNCC propõe que seja abordado o ensino de matemática e em especial de geometria, para que possamos embasar as sugestões de metodologias que venham a servir como contribuição didática para o ensino de Geometria Analítica (G.A.) nas escolas cearenses, a serem apresentadas como tema central desse trabalho.

É natural pensar que o ato de ensinar G.A. represente sempre um grande desafio para os professores, pois deve-se levar em consideração o fato de que para que haja um aprendizado satisfatório a respeito de seus conceitos, a priori, é exigido como pré-requisito, que o estudante domine muito sobre duas importantes áreas da matemática: Geometria e Álgebra. A respeito de Álgebra, em G.A. aborda-se o uso de expressões e procedimentos algébricos, fórmulas como a da distância entre dois pontos no plano, a do ponto médio, a da área do triângulo pelas coordenadas dos vértices, bem como as equações da reta, da circunferência, da elipse, da hipérbole, entre outras. Com relação a Geometria, é necessário entender não somente sobre o sistema cartesiano, mas também sobre representações e construções feitas nele, figuras geométricas planas e suas propriedades, segmentos, retas, circunferências, triângulos e outros elementos.

Acerca dessas duas grandes áreas, que a BNCC denota por “pensamento algébrico” e “pensamento geométrico”, em toda a sua estrutura e organização afirma-se, tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio, que

> Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações.
> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL. 2018, p. 527)

Nesse trabalho, iremos explorar atividades para o ensino de Geometria Analítica, elas foram criadas primando pela participação ativa e expressiva do estudante no seu processo de desenvolvimento cognitivo e todas elas exploram as quatro competências gerais, propostas pela BNCC, a saber: *raciocinar*, *representar*, *comunicar* e *argumentar*, uma vez que

> [...] para o desenvolvimento de competências que envolvem **raciocinar**, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática”.
> As competências que estão diretamente associadas a **representar** pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. [...] em especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas.
> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de **comunicar** ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando

> apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros.
> Com relação à competência de **argumentar** seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar. (BRASIL. 2018, p. 529 e 530)

Todas as atividades propostas neste trabalho exploram também três das cinco competências específicas, a saber, as de número 3, 4 e 5, conforme propõe a BNCC na área de Matemáticas e suas tecnologias para o Ensino Médio e que serão apresentadas a seguir:

- *COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3*

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

De acordo com a BNCC,

> As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, ..., entre outros. [...]
> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada. [...]
> Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problemas, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados. (BRASIL. 2018, p. 535)

- *COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4*

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, ..., computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Para essa competência a BNCC destaca que

> Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo. Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. (BRASIL. 2018, p.538)

- *COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5*

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

De acordo com o texto da BNCC, sobre essa competência temos que

> O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas - induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições. (BRASIL. 2018, p. 540)

As Competências específicas citadas acima são exploradas nessas atividades por meio do processo metodológico, que, propositalmente, oferece a oportunidade do aluno exercer o autodidatismo e o seu protagonismo estudantil, sendo incentivado a desenvolver, na execução dos procedimentos, processos cognitivos e habilidades matemáticas a partir da experimentação prática como a localização de pontos no sistema cartesiano, medição de segmentos com régua e de ângulos com transferidor, construção de retas com régua e circunferências com compasso, verificação de propriedades, dedução de fórmulas. Toda a estrutura das atividades tem por objetivo tornar o processo teórico mais aproximado do prático, aliando visualizações de construções geométricas a elementos algébricos próprios da Geometria Analítica que é abordada no Ensino Médio e desenvolvendo o raciocínio do estudante, bem como as habilidades de fazer representações, estabelecer comunicação e aprimorar a argumentação.

A respeito da matemática na formação de jovens, conforme apontam os documentos de formação de professores do extinto Pacto Nacional Pelo Fortalecimento do Ensino Médio, concordamos que

> Uma das principais finalidades da Matemática é a de desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, de analisar criticamente uma situação, considerando suas diferentes possibilidades ou restrições. O ensino de Matemática com tal foco favorece a formação de cidadãos aptos a realizar intervenções na realidade, a partir da compreensão de problemas e situações da sociedade atual.
> Os tipos de raciocínios ou intuições – pensamento indutivo, raciocínio lógico-dedutivo, visão geométrico-espacial, pensamento não-determinístico – são peculiares ao fazer matemático, ..., expressos por meio de linguagens que lhe são próprias. Cabe à Matemática escolar propiciar aos estudantes o desenvolvimento de tais modos de pensar e a apropriação significativa das formas de representar objetos matemáticos. Para tanto, será importante promover ações didático-pedagógicas que levem os jovens a realizar atividades tais como: explorar/experimentar, fazer conjecturas, procurar generalizações ou o que há de invariante numa situação, entre outras, e também a fazer os registros de suas observações e hipóteses, usando diferentes tipos de representações. (BRASIL. 2014, p. 19 e 20)

2.5 A realização de atividades no laboratório de ensino de matemática

Este trabalho pretende também apontar para a importância da utilização do Laboratório de Ensino de Matemática, sugerindo, com essa sequência de atividades, uma metodologia diversificada a ser aplicada na explanação de tópicos de Geometria Analítica nesse ambiente.

A prática de atividades no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), utilizando-se metodologias fundamentadas no desenvolvimento de habilidades cognitivas específicas, afigura-se como uma vertente fundamental para que se consiga mais qualidade na aprendizagem e a partir de então a construção do conhecimento seja melhor realizada e, consequentemente, melhor aproveitada. Para que essa conquista seja alcançada o objetivo central do ensino de matemática deve ser fazer com que os alunos tenham um desenvolvimento a partir da compreensão consciente dos conceitos matemáticos, ao invés da arcaica reprodução do método de decorar fórmulas e resolver exaustivas listas de exercícios pré-definidos. Essa compreensão faz com que os alunos adquiram a capacidade de desenvolver o pensamento abstrato a partir de manipulações de instrumentos e objetos concretos, corroborando para a expansão do raciocínio lógico-matemático,

> Desse modo, na proposta de construção de um Laboratório de Ensino de Geometria, os conceitos, procedimentos e atitudes relacionados aos padrões abstratos envolvendo formas e medidas serão desenvolvidos por meio de atividades cuja execução possibilite aos alunos alcançarem as aprendizagens explicitadas nos objetivos educacionais previamente definidos. (RÊGO, p. 16, 2012)

Acreditamos de que o laboratório é o ambiente ideal para se realizar a estimulação do aluno ao aprendizado logico-dedutivo e experimental, para que este possa lidar melhor com o estudo da matemática, sendo incentivado a preservar a gratificante experiência da descoberta de soluções e passando a ter confiança em si, na sua capacidade de aprender e praticar matemática de forma prazerosa, aguçando a curiosidade e afeição pelos seu estudo. Para Guimarães (2014) “O laboratório deve ser um local de referência para as atividades de Matemática, onde os professores possam se empenhar em tornar as aulas compreensíveis, atraentes e interessantes para os alunos”. Nessa perspectiva, entendemos que o trabalho dentro de um laboratório pode ter uma grande contribuição para a formação de conceitos, procedimentos e habilidades matemáticas, podendo também acarretar a busca de relações, propriedades e regularidades, fornecendo ao aluno estímulos para desenvolver a vontade de conhecer, investigar e de descobrir sobre muitos conceitos por meio da prática.

Segundo nos afirma Lorenzato (2006) o laboratório de ensino de matemática “deve ser o centro da vida matemática da escola, um lugar onde os professores estão empenhados em tornar a matemática mais compreensível aos alunos, uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático” (LORENZATO, 2006, p. 6-7).

O estudo realizado por Lorenzato (2012) dá ênfase à importância de se aprender conceitos e objetos geométricos, partindo da experiência e da intuição, com finalidade de alcançar um nível de estudo onde o educando é capaz de explorar atividades que abranjam elementos com peso construtivo do raciocínio, como, por exemplo, o estudo e a construção de polígonos de forma dinâmica, utilizando-se jogos e recursos existentes no laboratório de matemática. Para Lorenzato (2012) o material concreto trata-se de um instrumento didático valioso, pois tem capacidade de interferir de maneira consistente no processo de ensino-aprendizagem, com a função de ser um relevante recurso para desenvolver o raciocínio lógico, crítico e científico.

Expandindo os conceitos sobre laboratório de ensino de matemática, recorremos a Silva e Silva (2004) para registrar que

> [...] o laboratório de Matemática pode ser visto como um espaço de construção do conhecimento, tanto individual como coletivo. Neste ambiente, os recursos didáticos-pedagógicos podem passar a ter vida própria, seja enquanto propostas didáticas ou mesmo outros tipos de materiais didáticos que auxiliem a construção epistemológica dos que nele se encontrem. Nesse espaço professores e alunos podem dar expansão à sua criatividade, dinamizar o trabalho e enriquecer as atividades de ensino-aprendizagem, tomando o processo muito mais dinâmico, prazeroso e eficaz (SILVA E SILVA, 2004, p. 02).

Esse trabalho propõe a utilização do Laboratório de Ensino de Matemática por meio de uma sequência de atividades de construção geométrica nas quais objetiva-se o desenvolvimento de habilidades específicas da Geometria Analítica Plana, com abordagem para o Ensino Médio. Esperamos que o professor possa ter um suporte didático com a metodologia apresentada, e que o aluno desperte a curiosidade pelos elementos estudados e passe ter interesse em ser protagonista de seu próprio aprendizado, uma vez que todo os processos organizados as explanações teóricas contidas nelas induzem propositalmente às deduções das fórmulas e elementos algébricos pertinentes ao estudo de Geometria Analítica, bem como, permite que por meio das construções no plano e das medições utilizando instrumentos concretos os conceitos teóricos sejam verificados de modo prático.

De modo análogo à proposta apresentada por Rêgo (2012) em seu livro Laboratório de Geometria, as atividades presentes nesse trabalho consistem em sequências de procedimentos que

> estão relacionados com o saber fazer. Eles envolvem raciocínios do tipo passo a passo, semelhante aos algoritmos. Para serem entendidos e utilizados em situações-problema, exigem que o aluno domine os conceitos a ele associados. A aprendizagem de Geometria demanda o domínio de uma série de procedimentos, principalmente os associados à representação de figuras [...], que envolvem, por exemplo, o uso dos instrumentos de desenho, o conhecimento dos processos de medição e de resolução de problemas por meio de construções geométricas. (RÊGO, 2012, p. 7)

De acordo com a BNCC, as *habilidades* são compreendidas como capacidades que os estudantes devem adquirir e desenvolver em diferentes áreas do conhecimento, com o objetivo de promover sua formação integral. Elas estão relacionadas com o *saber fazer*, neste sentido entendemos que o ensino pautado na exploração do saber fazer ou do desenvolvimento de habilidades dos nossos alunos deve sempre ser exercida na rotina escolar, em especial para área da matemática. Acreditamos que quanto mais for possível aproximar os conceitos teóricos das aplicações práticas melhor será para o aprendizado dos jovens. No momento de realização de avaliações internas ou externas na escola, vestibulares ou concursos os estudantes são submetidos a questões nos quais não são permitidas a utilização de recursos ou instrumentos digitais. Nessa ocasião, todas as suas habilidades relacionadas com o saber fazer estão literalmente à prova, sendo necessário demostrar domínio e destreza na aplicação de conceitos manualmente por meio da leitura, raciocínio, escrita, ou resoluções de problemas.

À luz desta vertente defendemos a ideia que a realização de processos de construção, medição, verificação e visualização geométricas, propostas pela sequência de atividade deste trabalho servem também para desenvolver essa importante capacidade do *saber fazer*, uma vez que possibilitam a assimilação de conhecimentos e habilidades por meio da exercitação do “fazer”, da experimentação prática, da busca, reflexão e argumentação sobre resultados. Coopera também para o entendimento de que as medidas, por caracterizarem comparações, apresentam resultados relativos, não sendo sempre precisos, mas passíveis de “erros” a depender de diversos fatores como o instrumento a ser utilizado ou a própria destreza necessária e/ou empregada na sua realização.

Concordamos com a reflexão de que a adoção de metodologias centralizadas apenas na execução rasa dos dois modelos extremos que são a explanação puramente teórica e a aplicação de problemas por si só, pode não ter efeitos positivos na aprendizagem matemática, pois é necessário saber dosar as duas práticas intercalando a implementação de outras metodologias para que ocorra a assimilação por parte dos jovens. Sobre esse pensamento, concordamos com Fey (2021) a respeito da utilização de atividades experimentais, uma vez que

> Na Matemática, a experimentação traz grandes benefícios, como o desenvolvimento do pensamento matemático e da capacidade do estudante trabalhar de forma autônoma, ressignificando seus conhecimentos. Diferente da resolução de problemas por si só — em que geralmente o aluno sabe onde quer chegar e deseja obter uma resposta —, a experimentação Matemática, como estratégia de ensino, enfatiza o caminho a ser percorrido, em que o

> aluno tem a responsabilidade de descobrir e justificar suas descobertas. (FEY, 2021, p. 5)

Neste sentido, entendemos que existem objetos de estudo para os quais é necessário ocorrer a apropriação do conhecimento sobre o que eles tratam, sejam conceitos, teoremas, temas, tópicos; muitas vezes antes mesmo da aplicação e resolução de problemas, com ressalva para os casos em que estes abordam apenas o desenvolvimento do raciocínio lógico ou servirão para explorar a dedução dos elementos de estudo. Por exemplo, não faz sentido propor um problema cuja resolução dependa dos conceitos de equação da circunferência, se o aluno nunca estudou, mesmo que por conta própria, sobre tal tema. Por outro lado, as abordagens somente expositivas e teóricas por si só não são suficientes para o desenvolvimento de competências e habilidades e nem contribuem expressivamente para a aquisição de saberes. Ainda em concordância com Rêgo (2012) ressaltamos que

> Há fortes indicações de que insistir no ensino de Geometria por meio da aula expositiva, utilizando a linguagem formal, sem envolver o em atividades práticas, não permite que a maioria destes desenvolva conhecimentos que respondam às demandas de saberes matemáticos atuais - sejam formativas ou funcionais. (RÊGO, 2012, p. 6)

Para Fey (2021) “A experimentação constitui-se na interação com o objeto de conhecimento, ampliando as possibilidades do ensino formal no processo de elaboração do saber. As atividades experimentais contribuem para o melhor aproveitamento acadêmico por meio da prática de problematização do conhecimento”

Então, temos na abordagem dos conceitos por meio de atividades experimentais uma ponte que une a metodologia com a aprendizagem, favorecendo e aprimorando o processo de abordagem de conceitos e trazendo mais sentido para a proposição e resolução de problemas, servindo como um recurso valioso em prol do aprendizado. De acordo com Rêgo (2012),

> Diversas experiências começam a ser divulgadas a partir de então, muitas delas baseadas nos modelos dos Van Hiele e no uso de materiais manipulativos em sala de aula, todas com o objetivo comum de resgatar o ensino de Geometria. Esta passou a ser compreendida como um campo que possibilita a realização de atividades voltadas não apenas para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, mas também de outros tipos de raciocínios, de habilidades e atitudes, em especial da capacidade de resolver problemas sobre a discriminação de formas e a manipulação destas, de medidas, do senso estético e da criatividade. (RÊGO, 2012, p. 11)

No Capítulo 3 a seguir apresentamos a sequência de atividades propostas no presente trabalho, intitulando-as, descrevendo todos os seus procedimentos passo a passo, materiais a serem utilizados, objetivos, resultados esperados, habilidades matemáticas específicas do estudo de Geometria Analítica que serão desenvolvidas com sua execução, bem como as maneiras pelas quais as habilidades da BNCC são exploradas com elas. Nas descrições das atividades são exploradas também abordagem teóricas, dessa forma as atividades podem ser utilizadas tanto nas aulas iniciais de apresentação dos conceitos e tópicos de estudo quanto nas aulas de aprofundamento dos conhecimentos já trabalhados, ficando a critério do professor decidir em qual circunstância será mais ideal para aplicá-las.

Vale destacar que todas estas atividades exploram construções feitas no plano cartesiano e a realizações de medições, então, a fim de que os resultados das medidas pudessem ser o mais precisos possível utilizamos como parâmetro de unidade nos eixos coordenados o centímetro e escolhemos trabalhar com números inteiros, embora possa haver imprecisão, em decorrência do instrumento a ser utilizado na medição. Na aplicação das atividades é importante ser conversado com os estudantes sobre esse aspecto, principalmente porque em Geometria Analítica a unidade de medida geralmente não é indicada, devido à sua relatividade. O aluno precisa entender que se fosse adotada outra unidade como o decímetro, metro ou quilômetro os resultados seriam mantidos. A escolha se dá pela conveniência e porte do plano a ser trabalhado.

3 ATIVIDADES

3.1 Atividade 1

TÍTULO: **Distância entre dois pontos no plano cartesiano**

DESCRIÇÃO:

- Dedução da fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano e verificação prática de um exemplo por meio da construção geométrica.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Plano Cartesiano em papel, régua, lápis.

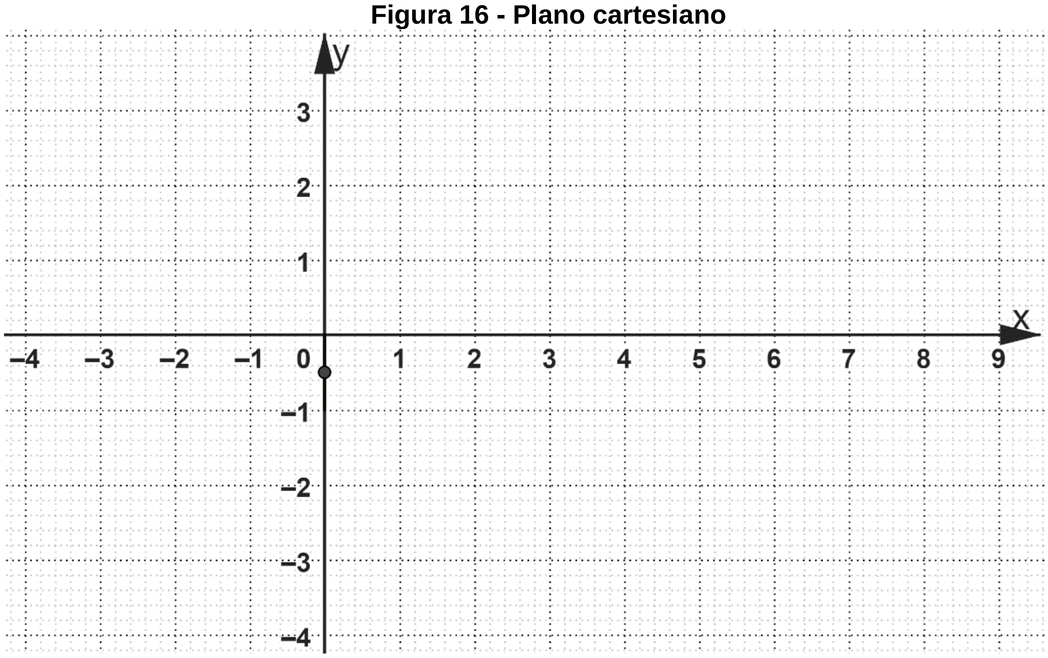
OBJETIVOS:

- Determinar e medir segmentos no plano;
- Deduzir a fórmula da distância entre dois pontos;
- Realizar procedimento de verificação prática (medição com régua) da distância entre dois pontos.

PROCEDIMENTOS:

1) O sistema cartesiano a seguir está graduado em centímetros. Localize e marque nele os pares de pontos P(-4, -3); Q(4, -3) e S(6, 3); T(6, -2):

Figura 16 - Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Sem utilizar a régua responda, qual a medida do segmento $\overline{PQ}$?
3) Utilize a régua para medir o segmento PQ e responda, como podemos obter a medida desse segmento utilizando as coordenadas dos pontos extremos?
4) Repita os passos 2) e 3) para o segmento ST.
5) Alguma das medidas desses segmentos foi um número negativo? Justifique.

RESUMO TEÓRICO:

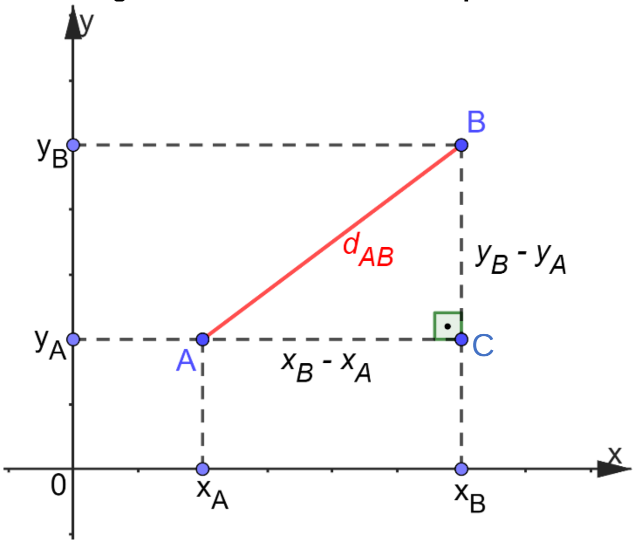
- No plano cartesiano, a medida de um segmento AB, paralelo ao eixo Ox, corresponde ao valor absoluto da menor distância real entre os dois pontos extremos A e B e é dada por: $\text{med}\,\overline{\text{AB}} = d_{AB} = |x_B - x_A|$

- De forma análoga, a medida de um segmento AB paralelo ao eixo Oy corresponde ao valor absoluto da menor distância real entre os dois pontos extremos A e B e é dada por: $\text{med}\,\overline{\text{AB}} = d_{AB} = |y_B - y_A|$

PROCEDIMENTOS:

6) Determine o segmento PS e reflita sobre como proceder para obter a sua medida sem o auxílio de uma régua.
7) Observe a figura a seguir:

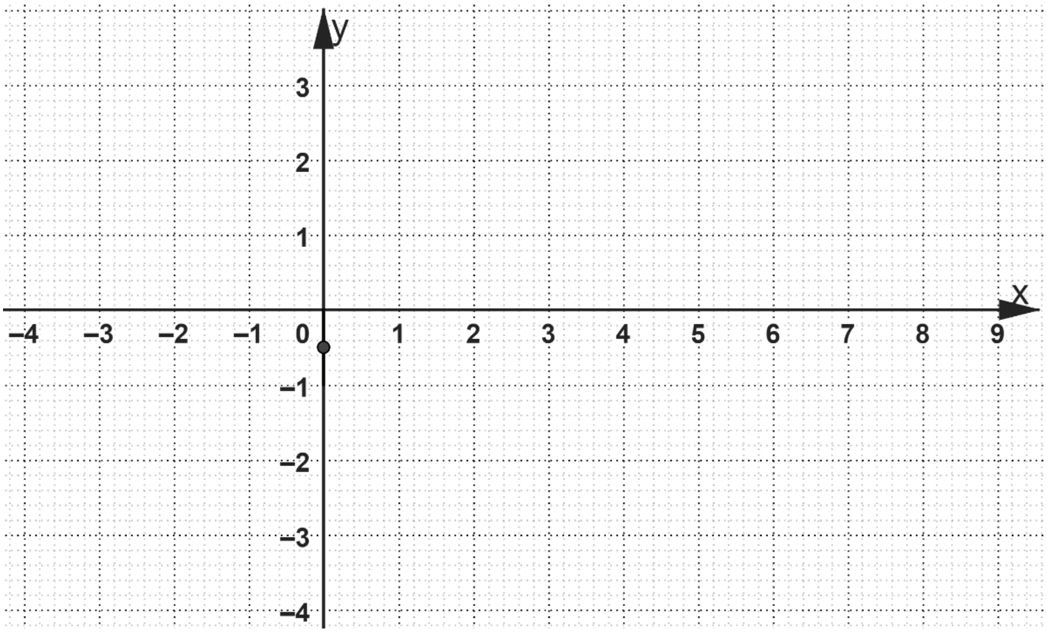
Figura 17 – Distância de dois pontos



Fonte: Elaborada pelo autor.

8) Aplicando o “Teorema de Pitágoras” para o triângulo retângulo ABC encontre uma expressão algébrica que fornece a medida da distância entre os pontos A e B (d_{AB}) em função das suas coordenadas.
9) Utilizando um lápis, localize no sistema cartesiano a seguir os pontos A(8, – 3) e B(– 4, 2) e marque-os:

Figura 18 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

10) Com o auxílio de uma régua meça a distância entre os dois pontos marcados e anote o valor encontrado.
11) Calcule a distância entre esses dois pontos utilizando a fórmula obtida na etapa 8): $d_{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2}$
12) Compare os valores obtidos nas etapas 10) e 11). Argumente sobre o que você pode concluir.

3.1.1 Comentário sobre a Atividade 1

Para o exercício dessa atividade a contento é necessário que o aluno domine, a priori, a habilidade de resolver problemas utilizando o Teorema de Pitágoras. Habilidade essa, prevista no descritor D50 do SPAECE.

Essa 1ª Atividade, além de contemplar o desenvolvimento das competências gerais da BNCC: raciocinar, representar, comunicar e argumentar, explora as Competências Específicas 3 e 4 e uma de suas habilidades:

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, ..., as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos"

Explora-se também a seguinte habilidade referente ao descritor de matemática do SPAECE:

(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;

Ao final dessa atividade o aluno deverá ter realizado os processos de:

- Localização de pontos no sistema cartesiano;
- Dedução da fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano a partir da utilização do Teorema de Pitágoras;
- Medição da distância entre dois pontos utilizando régua e verificação com o cálculo algébrico.

Os resultados esperados com essa atividade são que o aluno tenha uma melhor compreensão e significado da fórmula estudada, utilizando a representação geométrica para associar à sua expressão algébrica, uma vez que propositalmente ela fornece a instigação para que ele seja capaz de deduzi-la e que por meio da verificação prática com medição na régua esse conhecimento possa fazer mais sentido, despertando para um aprendizado efetivo do conceito de distância entre dois pontos no plano cartesiano.

3.2 Atividade 2

TÍTULO: **Ponto médio de um segmento**

DESCRIÇÃO:

- Dedução das coordenadas do ponto médio de um segmento e verificação prática de um exemplo por meio de construção geométrica.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Plano Cartesiano em papel, régua, lápis

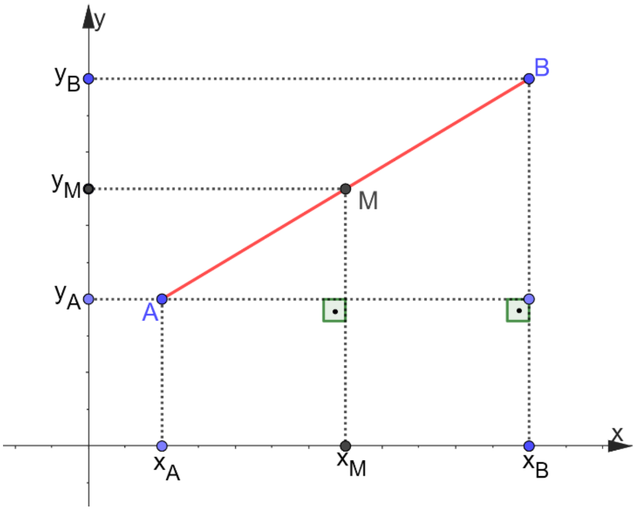
OBJETIVOS:

- Deduzir as coordenadas algébricas do ponto médio de um segmento;
- Realizar procedimento de verificação prática das coordenadas do ponto médio de um de segmento.

PROCEDIMENTOS:

1) Observe a figura a seguir e utilize a semelhança de triângulos, aliada a representação da medida de segmentos pela distância entre pontos, para deduzir as coordenadas do Ponto Médio *M* do segmento *AB* a partir das coordenadas de *A* e de *B*.

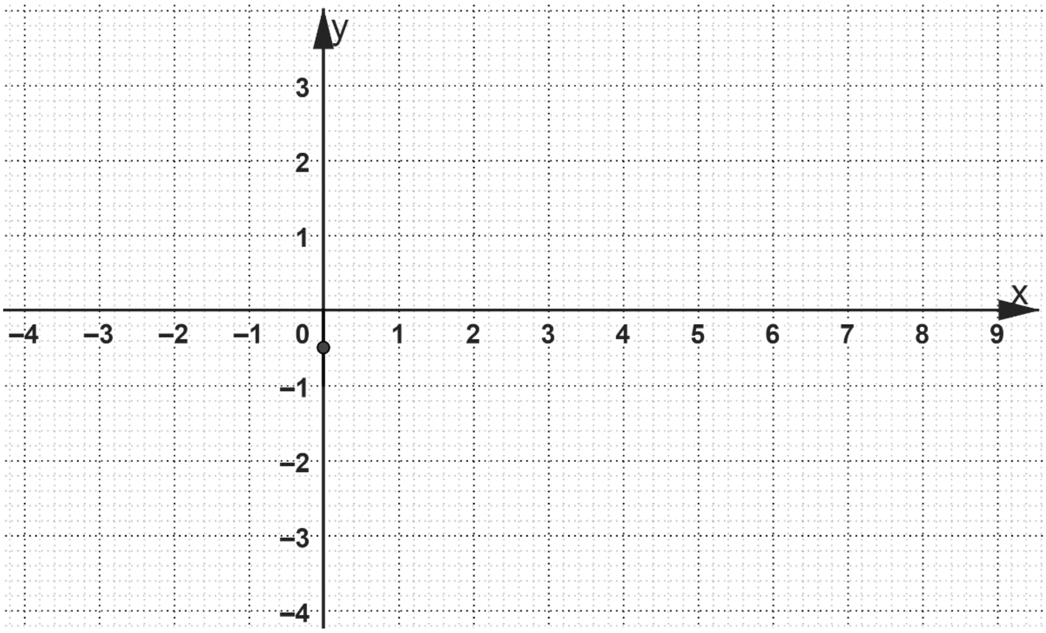
Figura 19 – Ponto Médio



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Utilizando um lápis, localize no plano cartesiano a seguir os pontos A(8, – 3) e B(– 4, 2) e marque-os. Em seguida, com o auxílio de uma régua trace o segmento AB.

Figura 20 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023

3) Localize, com o auxílio da régua, a metade do segmento AB. Anote as coordenadas exatas do ponto médio *M* que divide essas metades.
4) Utilize as fórmulas $x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}$ e $y_{\mathrm{M}} = \frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}$ e encontre as coordenadas do ponto médio do segmento AB.
5) Compare os resultados obtidos nas etapas 3) e 4). Argumente sobre o que você pode concluir?

3.2. 1 Comentário sobre a Atividade 2

Para o exercício satisfatório dessa atividade é necessário que o aluno domine, a priori, a habilidade de resolver problemas envolvendo a semelhança de triângulos. Habilidade esta, prevista no descritor D49 do SPAECE.

De forma análoga à primeira, essa 2ª Atividade contempla o desenvolvimento das competências *raciocinar*, *representa*r, *comunica*r e *argumentar*, e explora a habilidade da BNCC:

(*EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, ..., as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos*"

Explora-se também a seguinte habilidade referente ao descritor de matemática do SPAECE:

(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;

Ao final dessa atividade o aluno deverá ter realizado os processos de:

- Dedução das coordenadas do ponto médio de segmento de reta com pontos extremos distintos a partir da utilização do conceito de semelhança de triângulos;
- Localização de pontos no plano cartesiano;
- Localização geométrica do ponto médio de um segmento com o auxílio de uma régua e verificação algébrica;

Espera-se que com essa atividade o aluno tenha uma melhor compreensão e significado do conceito de coordenadas do ponto médio de um segmento em que os extremos são outros dois pontos distintos no plano cartesiano, sendo que para isso ele terá a oportunidade de deduzir a igualdade equivalente.

Também pretende-se que por meio da própria verificação prática com medição na régua esse conhecimento possa fazer mais sentido, despertando para um aprendizado efetivo do conceito estudado.

3.3 Atividade 3

TÍTULO: **Medianas e Baricentro de um triângulo**

DESCRIÇÃO:

- Cálculo e Construção das Medianas e do Baricentro de um triângulo no plano cartesiano.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Plano Cartesiano em papel, régua, lápis

OBJETIVOS:

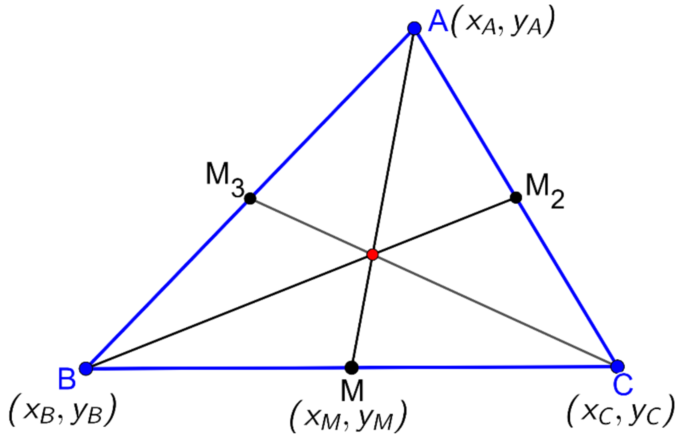
- Localizar pontos;
- Determinar algebricamente e medir geometricamente uma das medianas de um triângulo;
- Determinar geometricamente e calcular algebricamente o baricentro de um triângulo.

RESUMO TEÓRICO:

A) Medianas de um triângulo

Em todo triângulo, uma **mediana** corresponde ao segmento que é formado tendo como extremos um de seus vértices e o ponto médio do lado oposto a ele. Dessa forma, todo triângulo possui três medianas. Ver figura:

Figura 21 – Medianas de um triângulo



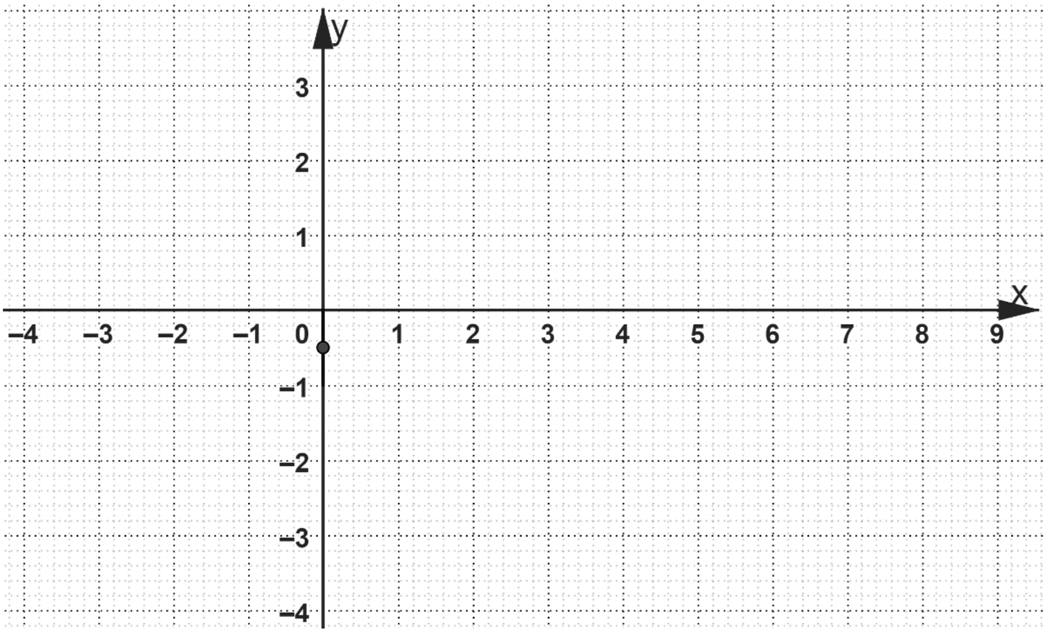
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para calcular o comprimento da mediana de um triângulo conhecendo as coordenadas seus vértices primeiro calculamos o ponto médio de um de seus lados e em seguida calculamos a distância entre ele e o vértice oposto.

PROCEDIMENTOS:

1) Utilizando um lápis e uma régua localize e marque no plano abaixo os pontos A(1, 2), B(-4,-2) e C(6,-4), em seguida construa um triângulo com vértice nos pontos marcados.

Figura 22 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Calcule o comprimento da mediana AM a partir da fórmula da distância entre pontos;
3) Verifique a medida da mediana AM na figura, utilizando a régua. Argumente sobre suas conclusões.

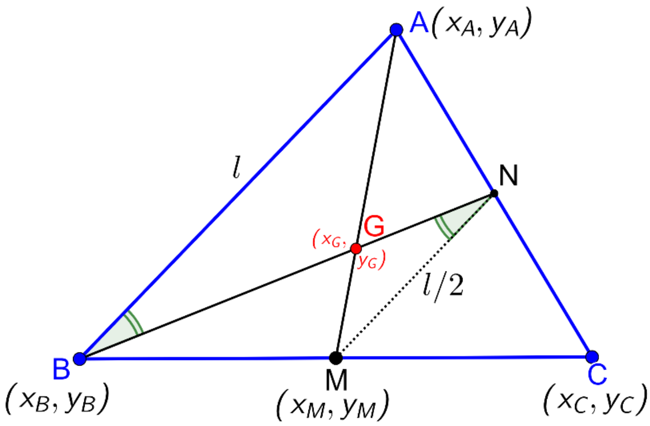
RESUMO TEÓRICO:

B) Coordenadas do baricentro de um triângulo

Em um triângulo qualquer, o ponto *G* de intersecção das suas três medianas é chamado de **baricentro**. Como todo ponto, possui coordenadas cartesianas. No processo a seguir calcularemos as coordenadas de *G*:

(I) Considere um triângulo ABC qualquer no plano cartesiano e suas medianas AM E BN, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 23 – Baricentro de um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

(II) Note que os triângulos ABG e MNG são semelhantes (Caso AA), pois $A\hat{G}B \equiv M\hat{G}N$ (O.P.V) e $G\hat{B}A \equiv M\hat{N}G$, portanto temos que:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{AB}{MN} = \frac{\ell}{\frac{\ell}{2}} = 2$$

(III) Com isso, temos que *G* divide a mediana $\overline{AM}$ na razão 2:1, então:

$$x_G = \frac{x_A + 2x_M}{1+2} = \frac{x_A + 2\frac{x_B + x_C}{2}}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \blacksquare$$

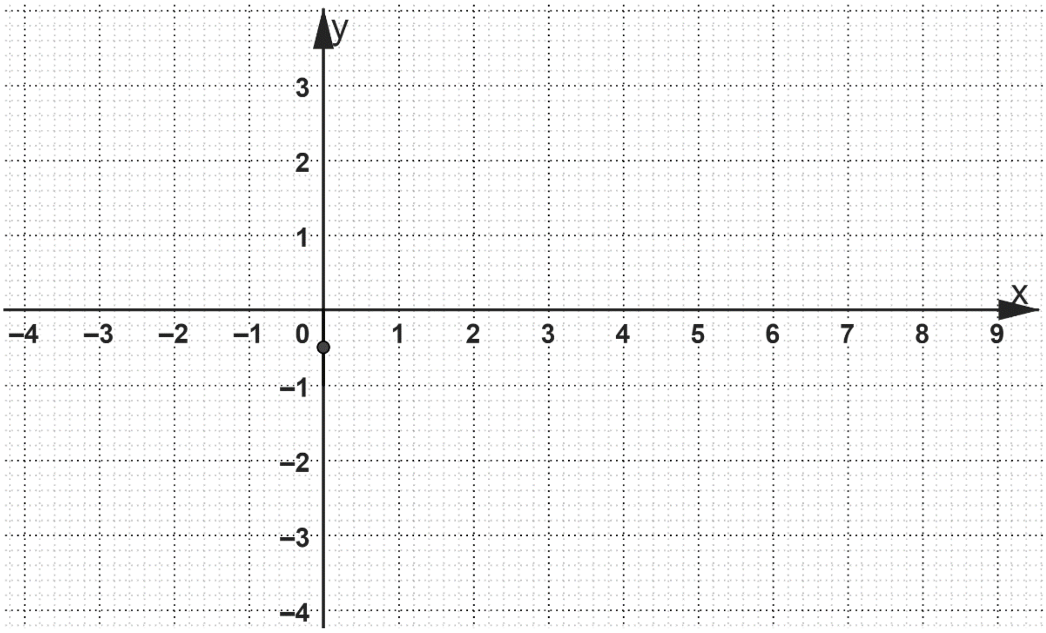
$$y_G = \frac{y_A + 2y_M}{1+2} = \frac{y_A + 2\frac{y_B + y_C}{2}}{3} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \blacksquare$$

Logo, concluímos que as coordenadas do baricentro são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices do triângulo.

PROCEDIMENTOS:

1) Utilizando um lápis e uma régua localize e marque no plano abaixo os pontos A(4, 3), B(-4,-2) e C(6,-4), em seguida construa um triângulo com vértice nos pontos marcados.

Figura 24 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Determine os pontos médios M_1, M_2 e M_3 dos lados BC, CA e AB, respectivamente, e marque no plano;
3) Utilizando a régua, trace as medianas AM_1, BM_2 e CM_3;
4) Observe e marque na figura, o ponto de intersecção das três medianas;
5) Calcule o Baricentro do triângulo ABC construído utilizando as fórmulas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

6) Argumente sobre as conclusões obtidas.

3.3.1 Comentário sobre a Atividade 3

Para a realização dessa atividade temos uma breve explanação teórica a respeito dos conceitos em estudo, a saber, mediana e baricentro. Com relação a esse último apresenta-se também uma dedução simples do cálculo das suas coordenadas no plano. Espera-se que haja uma apropriação dos saberes abordados por meio de uma leitura clara e objetiva e com os procedimentos executados deseja-se que seja efetivado o processo de aprendizagem, utilizando-se para isso, da verificação prática.

Com essa sequência temos o desenvolvimento das habilidades gerais de *representar* e *argumentar* e das competências específicas 3, 4 e 5 da BNCC, juntamente com a habilidades de determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano, medir segmentos, realizar verificação geométrica.

Explora-se também a seguinte habilidade referente ao descritor de matemática do SPAECE:

(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

Ao final dessa atividade o aluno terá realizado os seguintes processos:

- Localização de pontos e construção de triângulos no plano;
- Apropriação dos conceitos teóricos de mediana e baricentro de um triângulo no plano cartesiano;
- Cálculo algébrico da mediana de um triângulo construído no plano e verificação prática por meio da medição com régua;
- Cálculo algébrico das coordenadas do baricentro de um triângulo construído no plano e verificação prática por meio da localização geométrica do referido ponto;

3.4 Atividade 4

TÍTULO: **A equação da reta**

DESCRIÇÃO

- Construção geométrica de uma reta e dedução da sua expressão algébrica;
- Dedução das fórmulas do coeficiente angular e da Equação Fundamental da Reta.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Plano Cartesiano em papel, régua, lápis

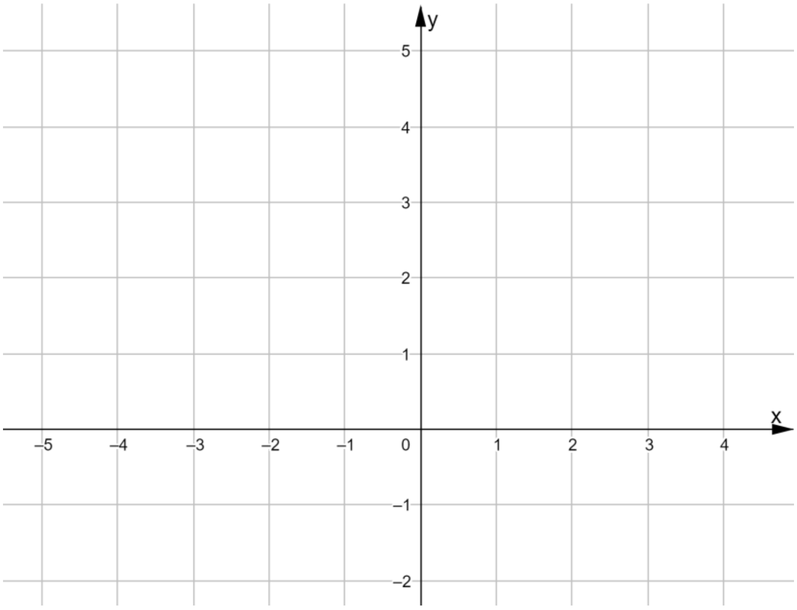
OBJETIVOS:

- Localizar pontos e observar que eles estão alinhados formando uma reta, bem como construí-la e assim deduzir a expressão que relaciona a ordenada em função da abscissa de um conjunto de pontos dados;
- Formalizar conceitos a partir da observação da construção feita, por meio de perguntas direcionadas.

PROCEDIMENTOS:

1) Utilizando um lápis, localize e marque no sistema cartesiano abaixo os pontos A(-4, -2); B(-3, -1); C(-2, 0); D(-1, 1); E(0, 2); F(1, 3) e G(2, 4). Em seguida, utilizando também uma régua, trace uma reta unindo todos esses pontos.

Figura 25 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Sobre a construção feita, responda:
   a) Era necessário marcar todos esses pontos para poder traçar a reta?
   b) Essa reta contém apenas esses sete pontos marcados? Justifique.
   c) Quantos pontos seriam suficientes para poder traçar essa reta? Na sua opinião quais seriam os “melhores”?
   d) Observe e anote dois pontos especiais:
   Ponto E: onde essa reta intercepta o eixo das ordenadas (y) e
   Ponto C: onde intercepta o eixo das abscissas (x).
   e) Observe que essa reta forma um ângulo com o eixo das abscissas. Com o auxílio de um transferidor meça e anote esse ângulo começando do eixo Ox até finalizar na reta, no sentido anti-horário. Esse ângulo é chamado *Inclinação da reta*.
   f) Obtenha a medida da tangente desse ângulo. Essa tangente é chamada *Coeficiente angular da reta*.

3) Analise com atenção e compare os valores de *x* e *y* em cada um desses pontos, observe o padrão existente e deduza uma expressão genérica que relaciona corretamente a ordenada *y* em função da abscissa *x* de cada um deles.

RESUMO TEÓRICO:

Essa expressão, que é uma função afim, é chamada de *equação da reta*, ela representa a relação que há entre ordenada e abscissa de todos os infinitos pontos que estão alinhados formando essa reta.

A toda reta *r* do plano cartesiano está associada ao menos uma equação.
Isolando a variável dependente *y* no primeiro membro da igualdade e os demais termos no segundo tem-se a sua forma *reduzida*, cuja expressão genérica é $y = mx + n$, onde m e n são números reais e (x, y) representa um ponto qualquer da reta. Retas paralelas ao eixo das ordenadas não possuem forma reduzida!
Organizando todos os termos no primeiro membro da equação igualando-a a zero tem-se a sua forma *geral*, cuja expressão genérica é $ax + by + c = 0$,

onde a, b, c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e (x, y) representa um ponto qualquer da reta.

PROCEDIMENTO:

4) Escreva a equação da reta obtida na etapa 3) na forma geral.

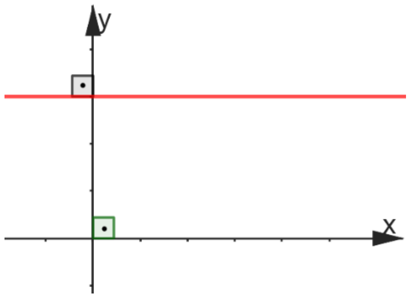
RESUMO TEÓRICO:

A) Inclinação da reta

Uma reta, no plano cartesiano, forma um ângulo α com o eixo das abscissas. Esse ângulo é medido no sentido anti-horário e é chamado de *Inclinação da reta*, sua medida em grau é sempre maior do que ou igual a 0° e menor que 180°, conforme as Ilustrações a seguir:

1º Caso: $\alpha = 0°$

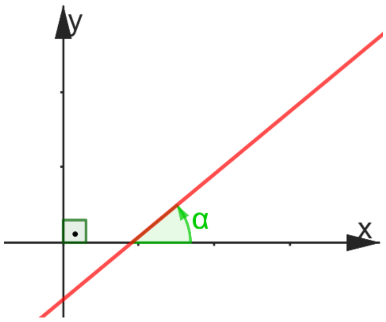
Figura 26 – Reta horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor.

2º Caso: $0° < \alpha < 90°$

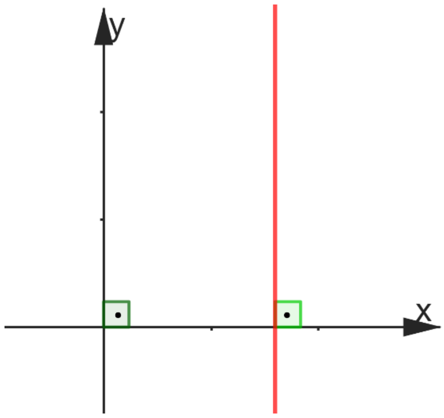
Figura 27 – Reta oblíqua crescente



Fonte: Elaborada pelo autor.

3º Caso: $\alpha = 90°$

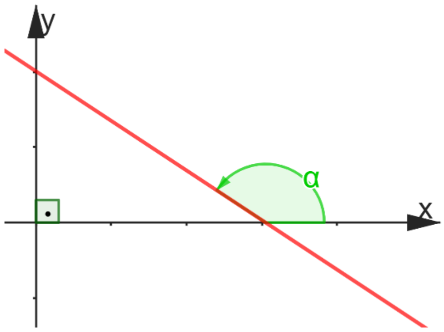
Figura 28 – Reta vertical



Fonte: Elaborada pelo autor.

4º Caso: $90° < \alpha < 180°$

Figura 29 – Reta oblíqua decrescente



Fonte: Elaborada pelo autor.

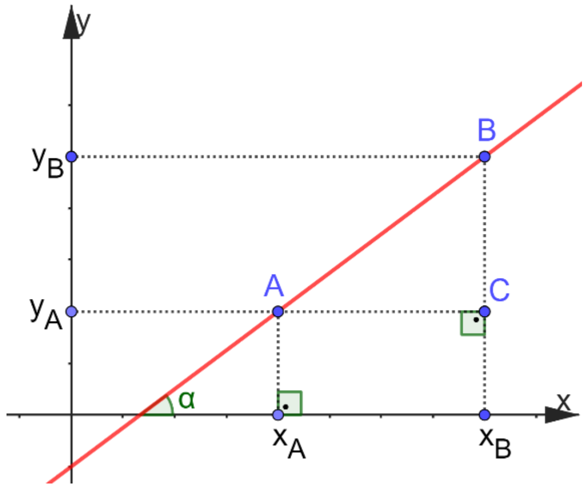
B) Coeficiente angular

Chama-se *Coeficiente angular* ou *Declividade* de uma reta (não perpendicular ao eixo das abscissas) o número real *m* que é a tangente trigonométrica de sua inclinação, $m = tg\, \alpha$

PROCEDIMENTOS:

5) Observe a figura a seguir e, aplicando a definição de tangente para o ângulo agudo CÂB no triângulo retângulo ABC, obtenha uma equação que fornece o coeficiente angular *m* a partir das coordenadas dos pontos A e B.

Figura 30 – Coeficiente angular



Fonte: Elaborada pelo autor.

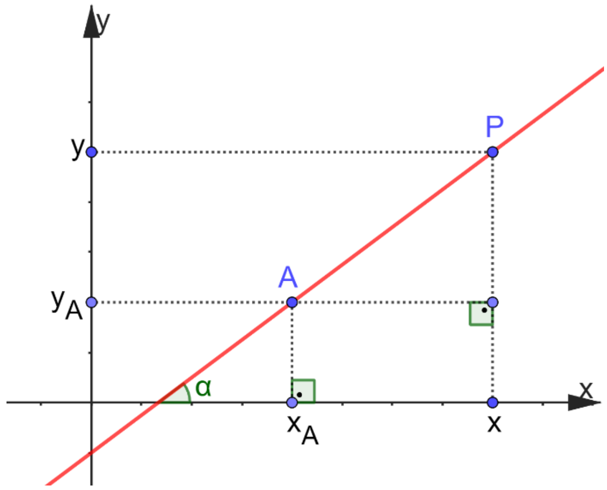
RESUMO TEÓRICO:

Uma reta é formada pela reunião de infinitos pontos alinhados no plano cartesiano e está bem determinada geométrica e algebricamente quando são conhecidos apenas dois deles ou quando são conhecidos apenas um, digamos $\mathrm{A}(\mathrm{x_A}, \mathrm{y_A})$ e seu coeficiente angular m.

PROCEDIMENTOS:

6) Observe a figura a seguir e, a partir da fórmula encontrada em 5) multiplique os meios pelos extremos e obtenha uma equação que representa a reta que passa pelo ponto conhecido A(x_A, y_A) e por um outro ponto qualquer $P(x, y)$ por meio de suas coordenadas.

Figura 31 – Equação fundamental da reta



Fonte: Elaborada pelo autor.

A expressão $y - y_A = m(x - x_A)$ é chamada *equação fundamental da reta*. Conhecendo-se dois pontos que pertencem a uma reta, ou conhecendo apenas um ponto e o coeficiente angular dela é possível usá-los para determinar a sua equação.

3.4.1 Comentário sobre a Atividade 4

Para que o exercício dessa atividade seja exitoso é necessário que o aluno domine, a priori, a habilidade de resolver problemas utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, em especial à razão tangente de um ângulo agudo, habilidade esta, prevista no descritor D53 do SPAECE.

Com essa atividade pretende-se fazer com que o aluno perceba, após realizar a localização de pontos no plano cartesiano e construção de uma reta, que todos os pontos marcados nela mantêm entre si uma relação comum que associa o valor da ordenada em função do valor da abscissa, levando-o à dedução da expressão algébrica da equação da reta na forma reduzida, e, também, que ele comece a observar elementos importantes na própria construção feita, por meio de perguntas direcionadas.

Em sequência, uma breve leitura clara e objetiva fará a formalização dos conceitos e definições necessários ao aprendizado teórico sobre equação da reta, formas geral e reduzida, inclinação e coeficiente angular, a fim de que as generalizações matemáticas necessárias sejam feitas e para que se tenha o entendimento de que a construção realizada na atividade representa apenas um caso específico, um exemplo.

Com a realização dessa atividade espera-se que haja o desenvolvimento do protagonismo e autodidatismo estudantil. Ela explora as competências gerais: raciocinar, representar, comunicar e argumentar, bem como, as competências específicas 3, 4 e 5 por meio de algumas de suas habilidades, propostas na BNCC e que estão explicitadas a seguir.

A habilidade pertinente a competência 4 que é explorada nessa atividade é:

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

As habilidades pertinentes a competência 5 que são desenvolvidas com essa atividade são:

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Explora-se também as seguintes habilidades referentes aos descritores de matemática do SPAECE:

(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;
(D55) Determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação;
(D58) Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

Ao final dessa atividade o aluno deverá ter realizado os processos de:

- Localização de pontos no plano cartesiano;
- Construção de uma reta a partir de uma série de pontos dados;
- Observação de que apenas 2 pontos são suficientes para se determinar uma reta;
- Dedução da relação que há entre a série de pontos, obtendo assim a equação da reta e escrevendo-a nas formas reduzida e geral;
- Observação dos pontos interceptos aos eixos coordenados;
- Observação e cálculo da inclinação da reta;
- Observação e cálculo do coeficiente angular da reta;
- Dedução da fórmula do Coeficiente Angular;
- Dedução da fórmula da equação fundamental da reta, explanação das formas Geral e Reduzida.

3.5 Atividade 5

TÍTULO: **Coeficientes da equação da reta na forma reduzida**

DESCRIÇÃO:

- Análise dos coeficientes angular e linear e da equação da reta por meio da construção geométrica e verificação algébrica

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Régua, transferidor, plano cartesiano em papel, lápis, calculadora, tabela trigonométrica.

OBJETIVOS:

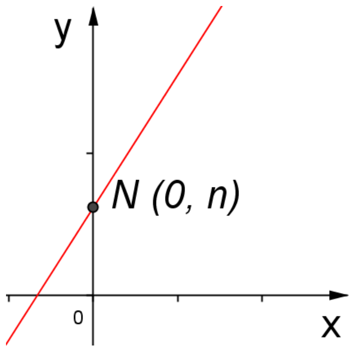
- Utilizar a construção geométrica e medições para evidenciar os elementos coeficiente angular e linear da reta comparando com os cálculos algébricos;

RESUMO TEÓRICO:

A) A forma reduzida da equação da reta

A equação fundamental da reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular *m* é dada por: $y - y_A = m(x - x_A)$.

Figura 32 – Coeficiente linear



Fonte: Elaborada pelo autor.

A reta intercepta o eixo das abscissas no ponto $N(0,\ n)$, então temos: $y = mx + n$

Essa forma é chamada equação reduzida da reta, nela:

- m é o coeficiente angular da reta;
- n é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y, também chamado de coeficiente linear.

B) Estudo do sinal dos coeficientes da reta e sua posição no plano

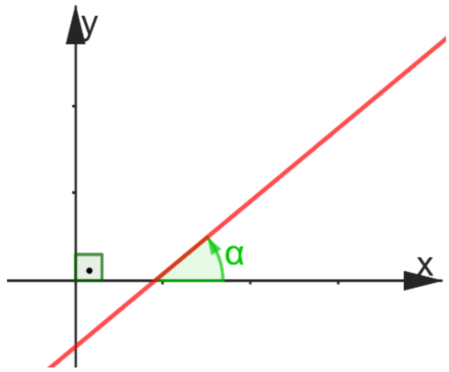
I) Coeficiente angular

1º CASO: $m > 0$

A inclinação α é aguda $(0° < \alpha < 90°)$. A reta correspondente será crescente, pois para quaisquer dois de seus de pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) se $x_1 < x_2$, então $y_1 < y_2$.

Portanto, quando $m > 0$ a reta é crescente, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 33 – Reta crescente



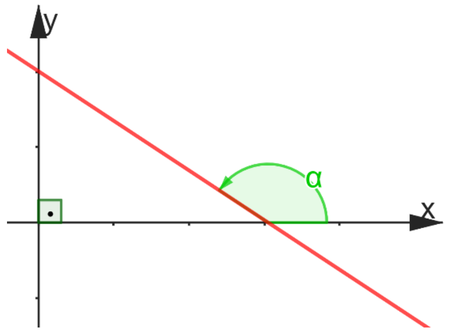
Fonte: Elaborada pelo autor.

2º CASO: $m < 0$

A inclinação α é obtusa $(90° < \alpha < 180°)$. A reta correspondente será decrescente, pois para quaisquer dois de seus de pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) se $x_1 < x_2$, então $y_1 > y_2$.

Portanto, quando $m < 0$, a reta é decrescente, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 34 – Reta decrescente



Fonte: Elaborada pelo autor.

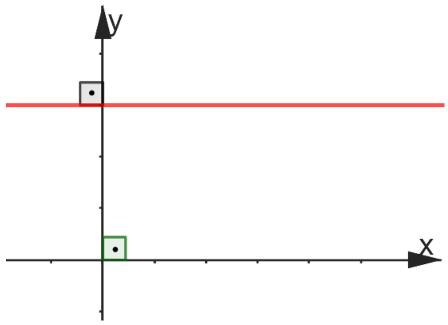
Retas do 1° e 2° Caso são chamadas de *oblíquas* aos eixos coordenados e os interceptam.

3º CASO: $m = 0$

A inclinação α é nula ($\alpha = 0°$). A reta correspondente será paralela ao eixo *Ox*, portanto, horizontal. Para quaisquer dois de seus de pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tem-se que $y_1 = y_2$.

Portanto, quando $m = 0$, a reta é horizontal (função constante), conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 35 – Reta horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor.

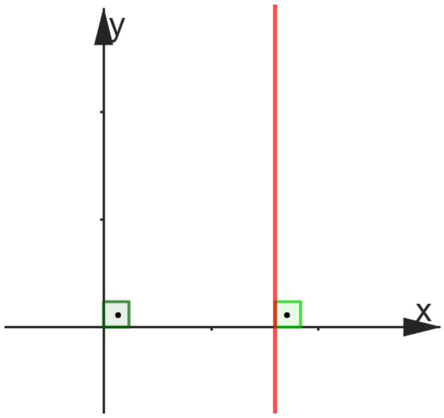
4º CASO: m é inexistente

A inclinação α é o ângulo reto ($\alpha = 90°$). A reta correspondente será paralela ao eixo *Oy*, portanto, vertical. Para quaisquer dois de seus de pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2)

tem-se que $x_1 = x_2$. Nesse caso não existe coeficiente angular ($\nexists\ m$) e não há forma reduzida para a equação da reta.

Portanto, quando a reta é vertical $\nexists\ m$, conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 36 – Reta vertical



Fonte: Elaborada pelo autor.

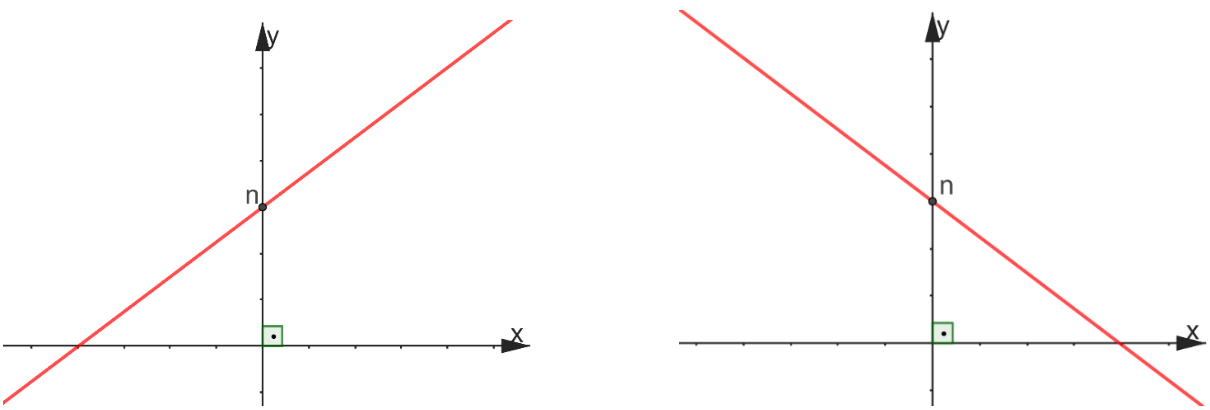
II) Coeficiente linear

1° CASO:

Quando $n > 0$, a reta intercepta o eixo das ordenadas na parte positiva.

a) $m > 0$ b) $m < 0$

Figura 37 – Coeficiente linear positivo



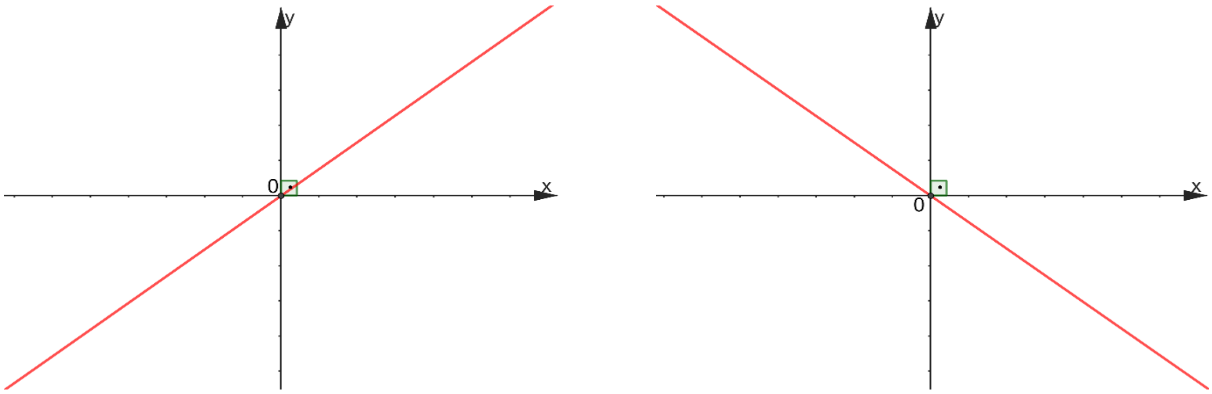
Fonte: Elaborada pelo autor.

2° CASO:

Quando $n = 0$, a reta passa pela origem do sistema cartesiano.

a) $m > 0$ b) $m < 0$

Figura 38 – Coeficiente linear nulo



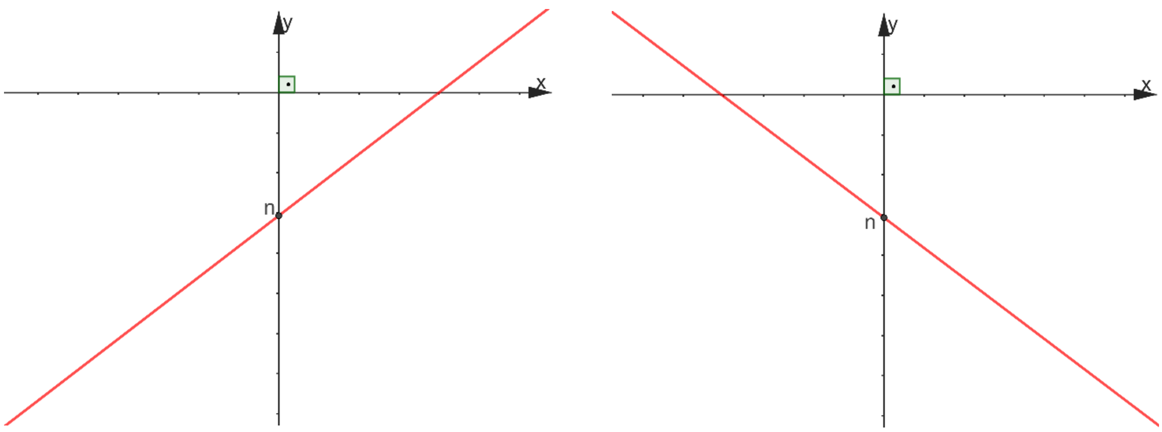
Fonte: Elaborada pelo autor.

3° CASO:

Quando $n < 0$, a reta intercepta o eixo das ordenadas na parte negativa.

a) $m > 0$ b) $m < 0$

Figura 39 – Coeficiente linear negativo

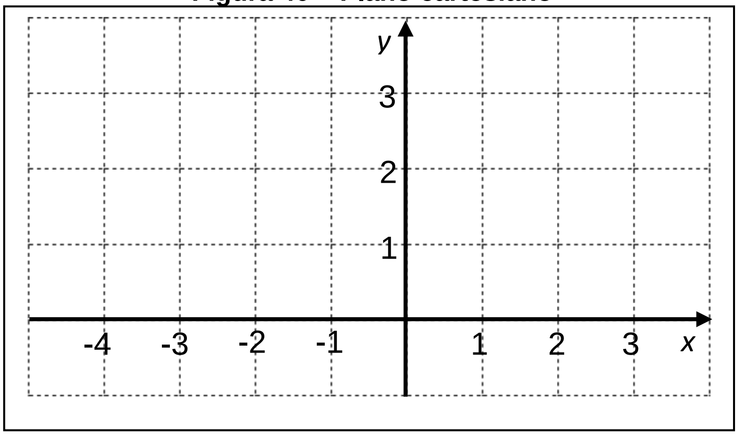


Fonte: Elaborada pelo autor.

PROCEDIMENTOS:

1) Utilizando um lápis, localize no plano cartesiano abaixo os pontos A(-2, 1) e B(2, 3) e marque-os.

Figura 40 – Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Com o auxílio de uma régua, trace uma reta unindo esses dois pontos, de modo que a ela intercepte os eixos *x* e *y*.
3) Utilize o transferidor e determine a inclinação dessa reta (*arredonde para o inteiro mais próximo*), indique-o e denote-o no plano. Qual a tangente desse ângulo? (*Pesquise na tabela em anexo – Considere apenas duas casas decimais*)

Tabela 1 - Ângulos (em grau) e suas Tangentes

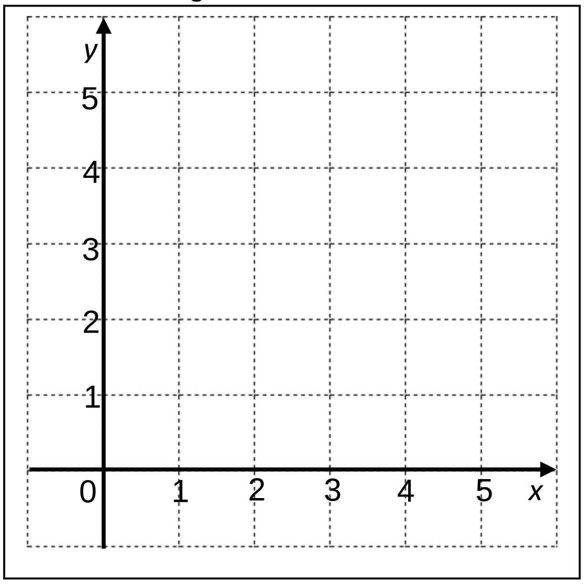
Ângulo (em Grau)	Tangente	Ângulo (em Grau)	Tangente	Ângulo (em Grau)	Tangente
1°	0,0175	13°	0,2309	25°	0,4663
2°	0,0349	14°	0,2493	26°	0,4877
3°	0,0524	15°	0,2679	27°	0,5095
4°	0,0699	16°	0,2867	28°	0,5317
5°	0,0875	17°	0,3057	29°	0,5543
6°	0,1051	18°	0,3249	30°	0,5774
7°	0,1228	19°	0,3443	31°	0,6009
8°	0,1405	20°	0,3640	32°	0,6249
9°	0,1584	21°	0,3839	33°	0,6494
10°	0,1763	22°	0,4040	34°	0,6745
11°	0,1944	23°	0,4245	35°	0,7002
12°	0,2126	24°	0,4452	36°	0,7265

Fonte: Elaborada pelo autor.

4) Determine a equação dessa reta nas formas reduzida e geral.

5) A tangente desse ângulo correspondeu ao coeficiente angular da forma reduzida da equação?
6) Observe o ponto onde a reta intercepta o eixo das ordenadas e compare com o coeficiente linear da equação reduzida.
7) Observe o ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas e responda: De qual forma esse valor pode ser calculado a partir da equação da reta?
8) Repita, no plano cartesiano a seguir, as etapas de 1) a 7), dessa vez, com os pares de pontos C(3, 1) e D(1, 3).

Figura 41– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

9) Compare os formatos das duas retas com o sinal de seus coeficientes angulares e escreva as conclusões.
10) O ponto (2, 2) pertence a alguma dessas retas? Verifique de forma algébrica (substituindo nos valores na equação) e gráfica. Indique outros pontos que pertencem e que não pertencem a essas retas.

3.5.1 Comentário sobre a Atividade 5

Antes do início dos procedimentos temos um resumo teórico com uma breve leitura clara e objetiva dos conceitos matemáticos necessários ao seu desenvolvimento.

Com a execução dessa atividade espera-se que o aluno seja capaz de apropriar-se ainda mais dos conceitos de inclinação e coeficiente angular da reta, uma vez que por meio da construção e medições realizadas tem-se uma verificação prática desses elementos. Espera-se também que por meio da visualização geométrica e comparação algébrica possam ser evidenciados e associados o formato da reta com os respectivos sinais dos coeficientes angular e linear.

Com a realização dessa atividade espera-se que haja o desenvolvimento do protagonismo e autodidatismo estudantil. Ela explora as competências gerais: raciocinar, representar, comunicar e argumentar, bem como, as competências específicas 3, 4 e 5 por meio de algumas de suas habilidades, propostas na BNCC e que estão explicitadas a seguir.

Habilidade pertinente a competência 4 que é explorada nessa atividade:

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

As habilidades pertinentes a competência 5 que são desenvolvidas com essa atividade são:

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Explora-se também as seguintes habilidades referentes aos descritores de matemática do SPAECE:

(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;
(D55) Determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação;
(D58) Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

Ao finalizar todas as etapas corretamente, o aluno terá realizado procedimentos de:

- Construção de retas no plano cartesiano a partir pares de pontos dados;
- Medição e localização da inclinação de retas utilizando o transferidor;
- Cálculo dos coeficientes angulares utilizando a fórmula específica, comparação com valores de tabela trigonométrica e com os que foram obtidos na própria determinação das equações das retas;
- Determinação da equação da reta nas formas geral e reduzida;
- Observação da localização dos coeficientes lineares na construção gráfica e comprovação com as equações das retas na forma reduzida.

3.6 Atividade 6

TÍTULO: **Posições relativas entre duas retas no plano cartesiano**

DESCRIÇÃO:

- Construção de retas e verificação da posição relativa entre retas no plano cartesiano.

OBJETIVOS:

- Construir retas no plano cartesiano para observar a posição relativa entre elas e associar aos valores dos seus coeficientes angulares e lineares.

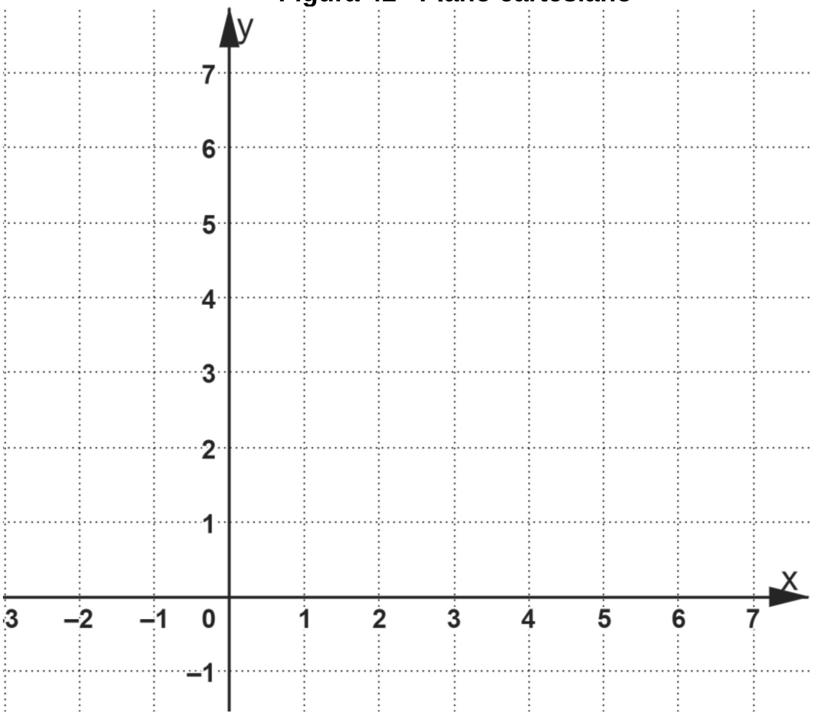
MATERIAL NECESSÁRIO:

- Régua, papel (plano cartesiano), lápis, transferidor.

PROCEDIMENTOS:

1) Utilizando um lápis, marque no plano cartesiano abaixo os pontos: A(0, -1) e B(6, 5), com o auxílio de uma régua trace uma reta *r* passando por eles até cruzar os eixos coordenados.

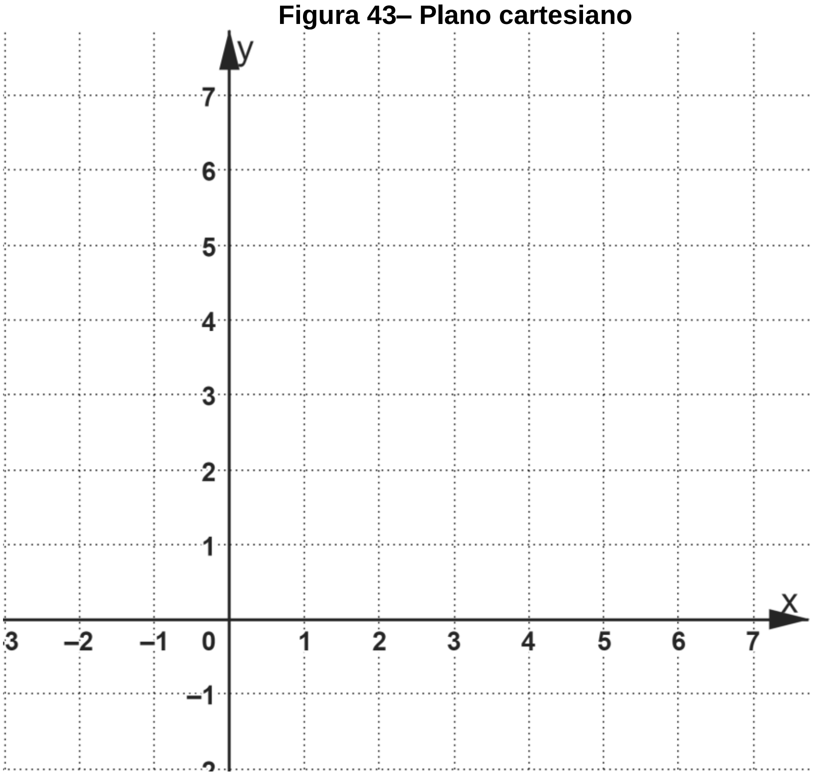
Figura 42– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Determine a equação dessa reta nas formas geral e reduzida.
3) Anote os valores dos coeficientes angular e linear e responda: O que eles representam no gráfico (reta)?
4) Verifique de forma algébrica e gráfica se os pontos U(5, 2) e V(4, 3) pertencem à reta *r.*
5) Verifique se a reta passa pela origem do sistema cartesiano.
6) Marque no mesmo plano acima os pontos C(-1, 1) e D(4, 6), trace uma reta ***s*** unindo-os.
7) Determine a equação dessa reta nas formas geral e reduzida.
8) Anote os valores dos coeficientes angular e linear e responda: O que eles representam no gráfico (reta)?
9) Qual a posição relativa entre as retas ***r*** e ***s***?
10) Há pontos em comum entre essas retas? Justifique.
11) Quais relações podem ser extraídas observando-se os coeficientes angular ***m*** e linear ***n*** dessas duas retas?
12) Transcreva a reta ***r*** no plano Cartesiano a seguir.

Figura 43– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

13) Marque neste mesmo plano cartesiano os pontos E(6, -1) e F(-2, 3), trace uma reta ***t*** unido esses pontos até cruzar os eixos. Determine a equação reduzida dessa reta.

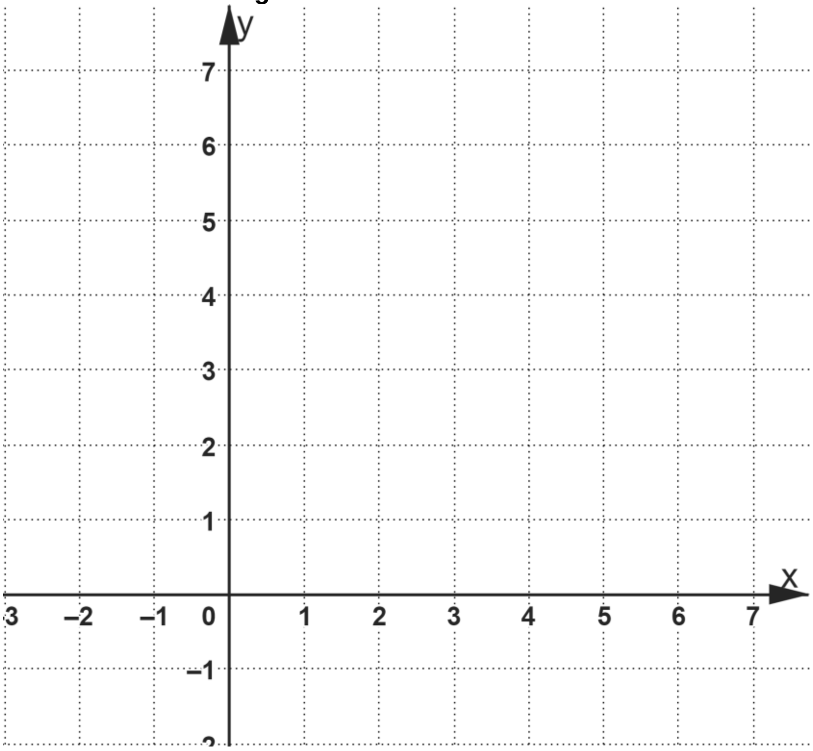
14) Qual a posição relativa entre essas as retas ***r*** e ***t***?

15) Há pontos em comum entre essas retas? Quantos? Qual?

16) Quais relações podem ser extraídas observando-se os coeficientes angular ***m*** e linear ***n*** dessas duas retas?

17) Transcreva a reta ***s*** no plano cartesiano abaixo.

Figura 44– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

18) Marque no plano cartesiano acima os pontos G(-2, 6) e H(5, -1), trace uma reta ***u*** unido esses pontos até cruzar os eixos. Determine a equação reduzida dessa reta.

19) Qual a posição relativa entre essas as retas ***s*** e ***u***? Quais relações podem ser extraídas observando-se os coeficientes angular ***m*** e linear ***n*** dessas duas retas?

20) Com o auxílio de um transferidor, meça o ângulo formado entre as retas ***s*** e ***u***.

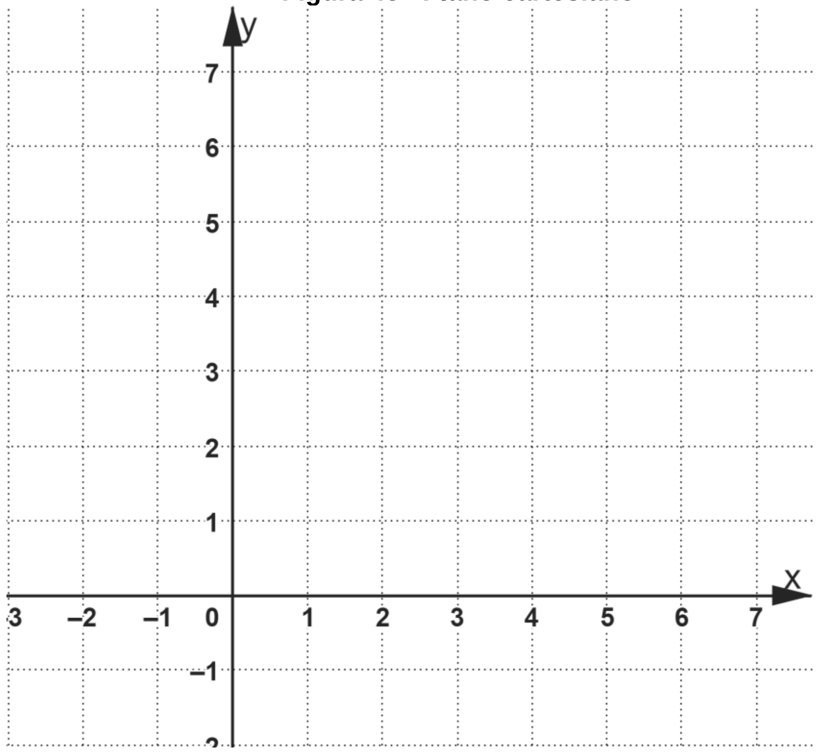
21) Verifique qual o ponto de intersecção das retas ***r*** e ***t***; ***s*** e ***u*** utilizando suas equações (resolução dos sistemas lineares) e analisando seus gráficos.

22) Esboce no plano cartesiano a seguir as retas de equações:

v: $3x + y - 3 = 0$

w: $6x + 2y - 6 = 0$

Figura 45– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

23) Qual a posição relativa entre essas as retas ***v*** e ***w***?

24) Há pontos em comum entre essas retas? Quantos? Quais?

25) Quais relações podem ser extraídas observando-se os coeficientes angular *m* e linear *n* dessas duas retas?

3.6.1 Comentário sobre a Atividade 6

Com a realização dessa atividade espera-se que o aluno de aprenda sobre as posições relativas entre duas retas por meio das observações de suas próprias construções geométricas, analisando, refletindo e tirando conclusões a respeito da comparação dos coeficientes angulares e lineares das retas tanto de forma geométrica como algébrica.

Executando corretamente todos as etapas da atividade o estudante terá realizado procedimentos de:

- Construção de retas no plano cartesiano a partir pares de pontos dados;
- Observação da posição relativa entre as retas construídas;
- Medição de ângulo entre retas utilizando o transferidor;
- Observação dos coeficientes angulares e lineares das retas construídas e comparação com os valores das equações das retas na forma reduzida;
- Resolução de sistema linear com duas equações e duas incógnitas para comprovar o ponto de intersecção entre duas retas.

Com a realização dessa atividade espera-se que haja o desenvolvimento do protagonismo e autodidatismo estudantil. Ela explora as competências gerais: raciocinar, representar, comunicar e argumentar, bem como, as competências específicas 3, 4 e 5 por meio de algumas de suas habilidades, propostas na BNCC e que estão explicitadas a seguir.

A habilidade pertinente a competência 3 que é explorada nessa atividade é:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

A habilidade pertinente a competência 4 que é explorada nessa atividade é:

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

As habilidades pertinentes a competência 5 que são desenvolvidas com essa atividade são:

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Explora-se também as seguintes habilidades referentes aos descritores de matemática do SPAECE:

(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;
(D55) Determinar uma equação da reta a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação;
(D58) Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

3.7 Atividade 7

TÍTULO: **Condição de alinhamento de três pontos e área de um triângulo pelos vértices**

DESCRIÇÃO

- Verificação da condição de alinhamento entre três pontos e cálculo da área de um triângulo no plano cartesiano utilizando as coordenas dos vértices.

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Régua, plano cartesiano em papel, lápis.

OBJETIVOS:

- Localizar pontos e construir um triângulo no plano cartesiano;
- Calcular a posição relativa entre trios de pontos e a área de triângulo utilizando determinantes e visualizar geometricamente o resultado obtido.

RESUMO TEÓRICO:

Condição de alinhamento de três pontos no plano cartesiano e Cálculo da área de um triângulo pelas coordenadas dos vértices

Para a posição de três pontos distintos quaisquer no plano cartesiano só há duas possibilidades:

1ª Estão alinhados, formado assim uma reta; ou
2ª Não estão alinhados, formando assim um triângulo.

Ocorrendo sempre apenas uma dessas possibilidades e jamais ambas;
A respeito de três pontos distintos $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ no plano cartesiano analisaremos essas duas possibilidades:

1ª POSSIBILIDADE

Sabemos que, se os pontos $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados, uma condição a ser verificada para que isso ocorra é que o determinante calculado com suas coordenadas seja igual a zero:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Essa igualdade é bem útil para determinarmos a equação da reta *r* que passa por dois pontos de coordenadas conhecidas, para nosso estudo utilizaremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Considerando um terceiro ponto genérico $P(x, y)$ e admitindo que os três estão alinhados, temos:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot y_A + x_A \cdot y_B + x_B \cdot y - x_B \cdot y_A - x \cdot y_B - x_A \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$$

Fazendo: $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = c$ temos a equação geral de r:

$$ax + by + c = 0$$

onde a, b, c são reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e (x, y) são as coordenadas de um ponto *P* qualquer que pertença à reta determinada por A e B.

2ª POSSIBILIDADE

Caso os três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ formem um triângulo, consequentemente,

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

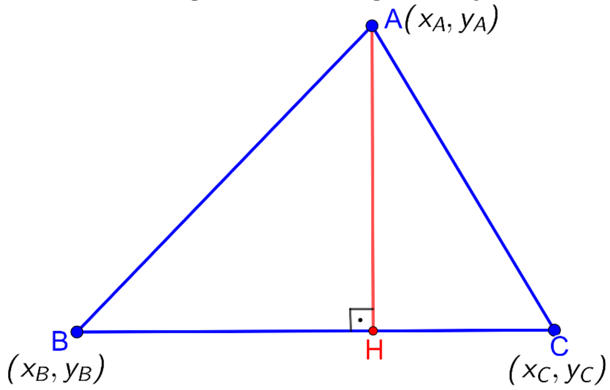
Uma consequência que podemos extrair desse último caso, com o cálculo desse determinante, é que metade do módulo de *D* equivalerá à área do triângulo ABC.

DEMONSTRAÇÃO:

Considere que a distância entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta *r*, de equação $ax + by + c = 0$ é obtida pela fórmula: $d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Calculemos a área do triângulo formado pelos pontos $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$:

Figura 46– Triângulo no plano



Fonte: Elaborada pelo autor.

(I) Sabemos, pela Geometria Plana, que a área de um triângulo qualquer é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot base \cdot altura$$

Então temos,

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

(II) Pela fórmula da distância entre dois pontos, temos que:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2}$$

(III) A equação geral da reta que passa por BC é:

$$\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_B - y_C)x + (x_C - x_B)y + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B = 0$$

Fazendo: $y_B - y_C = a, \quad x_C - x_B = b$ e $x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B = c$, vem:

$$ax + by + c = 0$$

(IV) E a distância do ponto A à reta BC é:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Com isso,

$$AH = d = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2}}$$

(V) Então, fazendo (II) e (IV) em (I) temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_B - x_C)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2}} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$ ou

$$S = \frac{1}{2} |D| \qquad\qquad c.q.d$$

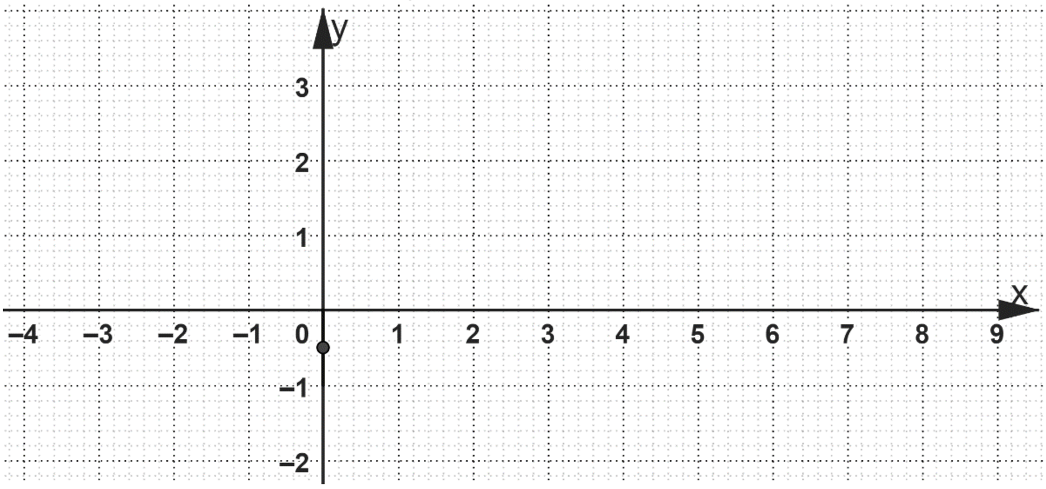
PROCEDIMENTOS:

1) Utilizando a condição de alinhamento verifique a posição relativa entre cada trio de pontos a seguir:

   1º trio: A(-3, -2), B(1, 3) e C(5, -1) 2º trio: M(2, 3), N(8, -1) e P(5,1)

2) Utilizando lápis e régua, localize e marque no plano abaixo os dois trios de pontos acima e visualize geometricamente o resultado do cálculo feito no passo 1).

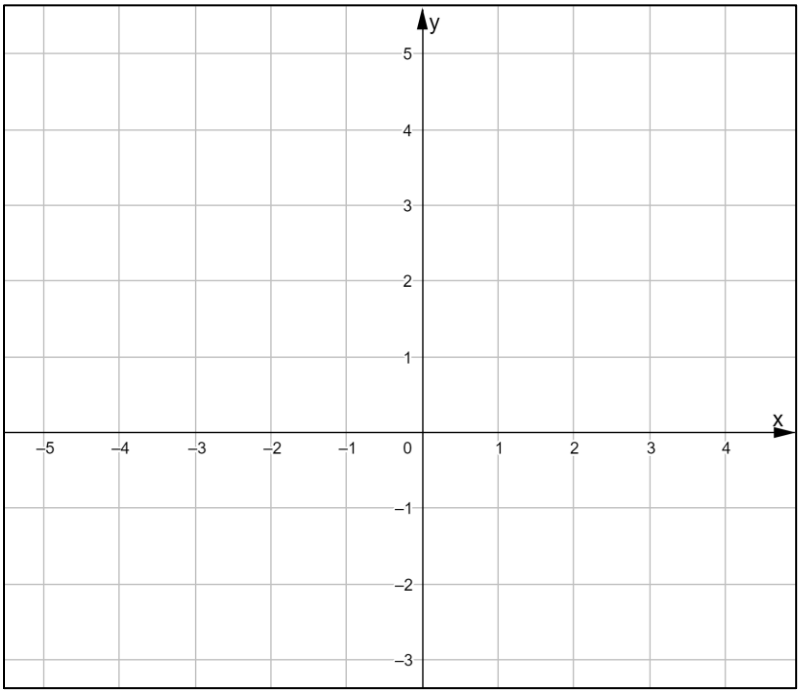
Figura 47– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

3) Obtenha a equação geral da reta formada pelo trio de pontos que está alinhado.
4) Utilizando um lápis e uma régua localize e marque no plano a seguir os pontos A(4,-3), B(-2,3) e C(-2,-3), em seguida construa o triângulo formado por eles:

Figura 48– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

5) Determine a base e a altura desse triângulo e calcule a sua área utilizando a fórmula da geometria plana:

$$S = \frac{1}{2} \cdot base \cdot altura$$

6) Analise a figura construída e visualize esse resultado.
7) Calcule a área desse triângulo utilizando seus vértices a partir do determinante:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

8) Compare os resultados obtidos em 5) e 7) e argumente sobre as suas conclusões.

3.7.1 Comentário sobre a Atividade 7

Com a realização dessa atividade espera-se que o aluno relacione os processos de cálculos de determinantes a partir das coordenadas dos vértices de três pontos com dois propósitos bastante úteis: verificar se três pontos estão alinhados ou se formam um triângulo no plano cartesiano e, caso ocorra a segunda opção, determinar a sua área. Inicialmente é necessário fazer uma explanação teórica a respeito do tema abordado, utilizando para isso uma breve demonstração.

São exploradas as mesmas competências 3, 4 e 5 da BNCC e suas respectivas habilidades assim como nas atividades anteriores, acrescida da habilidade:

(EM13MAT307): Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Explora-se também as seguintes habilidades referentes aos descritores de matemática do SPAECE:

(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;
(D54) Calcular a área de um triângulo pelas coordenadas de seus vértices.

Ao final dessa atividade, o aluno terá realizado processos de:

- Cálculos de determinantes para a verificação da posição de três pontos no plano.
- Localização de pontos no plano cartesiano para verificação geométrica do cálculo algébrico efetuado com determinantes;
- Cálculo da área de um triângulo utilizando seus vértices e verificação do resultado com a forma usual da geometria plana.
- Obtenção da equação geral da reta formada por pontos alinhados utilizando o cálculo de determinantes.

3.8 Atividade 8

TÍTULO: **A equação da circunferência**

DESCRIÇÃO:

- Dedução das equações reduzida e geral da circunferência e verificação prática por meio da construção geométrica de um exemplo

MATERIAL NECESSÁRIO:

- Régua, compasso, plano cartesiano em papel, lápis.

OBJETIVOS:

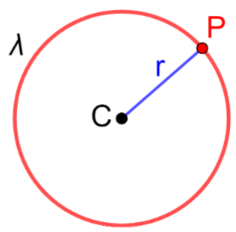
- Deduzir a equação da circunferência nas formas reduzida e geral;
- Construir circunferências utilizando compasso, dados centro e raio;
- Identificar os elementos centro e raio por meio da visualização gráfica e associá-los na forma reduzida da equação da circunferência.

RESUMO TEÓRICO:

Circunferência

Dados um ponto C no plano e uma distância r, não nula, o lugar geométrico dos pontos P que estão à distância r de C é chamado de circunferência.

Figura 49– Circunferência

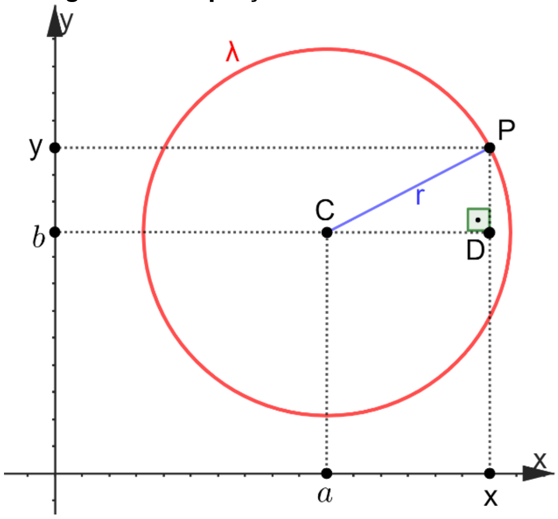


Fonte: Elaborada pelo autor.

PROCEDIMENTOS:

1) Analise a figura a seguir e, utilizando o “Teorema de Pitágoras” no triângulo retângulo PDC, deduza uma equação que relaciona a medida do raio da circunferência λ com as coordenadas de um ponto P qualquer que pertença a ela e as coordenadas do centro C.

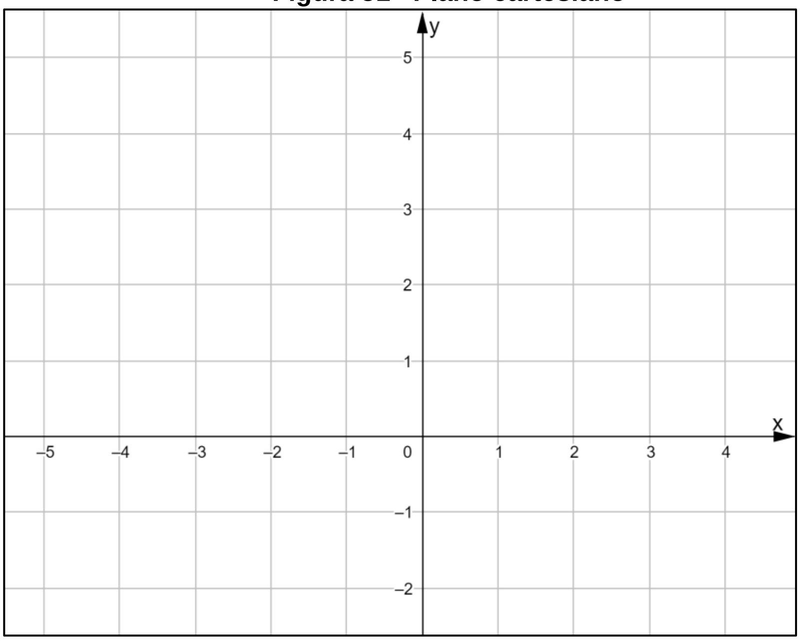
Figura 50– Equação da circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor.

2) A expressão encontrada em 1): $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, onde (a,b) são as coordenadas do centro e r é a medida do raio, é chamada *equação reduzida da circunferência*.
3) Desenvolva os quadrados da equação reduzida obtida em 2) organize os termos na ordem decrescente dos expoentes de *x* e *y*, mantenha todos os termos no primeiro membro e iguale-a a zero. Esta é chamada *equação geral da circunferência*: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$
4) Utilizando um compasso, construa, no plano cartesiano a seguir, uma circunferência com 3 cm de raio e que tem centro no ponto C(-2, 1).

Figura 51– Plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor.

5) Determine a equação dessa circunferência nas formas reduzida e geral.
6) Verifique algebricamente se os pontos A(-1, 4), B(-5, 1) C(1, 2) e D(1, 2) pertencem à essa circunferência em seguida verifique geometricamente localizando esses pontos no desenho construído.
7) Fixe o raio de 3 cm, escolha outros pontos centrais e construa, no plano cartesiano uma circunferência que:

a) esteja apenas no 1º quadrante;
b) esteja apenas no 2º quadrante;
c) esteja apenas no 3º quadrante;
d) esteja apenas no 4º quadrante;
e) passe pelos 4 quadrantes;
f) esteja apenas no 1º e 2º quadrantes;
g) esteja apenas no 1º e 4º quadrantes;
h) esteja apenas no 2º e 3º quadrantes;
i) esteja apenas no 3º e 4º quadrantes.
j) tenha centro na origem do sistema cartesiano.

8) Escreva as equações reduzidas de todas essas circunferências e escolha quantas quiser para escrever as suas equações na forma geral.

3.8.1 Comentário sobre a Atividade 8

Com a realização desta e de todas as atividades propostas espera-se que haja o desenvolvimento do protagonismo e autodidatismo estudantil. Ela explora as competências gerais: raciocinar, representar, comunicar e argumentar, bem como, as competências específicas 3, 4 e 5 propostas na BNCC.

Explora-se também as seguintes habilidades referentes aos descritores de matemática do SPAECE:

(D56) Reconhecer, dentre as equações do 2° grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.
(D57) Identificar a localização de pontos no plano cartesiano;

A atividade começa objetivando fazer com que o aluno compreenda melhor os elementos algébricos presentes nas equações da circunferência nas formas reduzida e geral, uma vez que as primeiras etapas trazem a oportunidade de o estudante deduzir essas igualdades. O raciocínio envolvido nesse processo é de baixa complexidade e explora-se com ele o autodidatismo.

Espera-se que, com essa atividade, o aluno seja capaz de obter um melhor significado para o que uma circunferência no plano cartesiano representa, fazendo-o compreender que os elementos centro e raio são suficientes para poder determiná-la graficamente e que eles estão explícitos na forma reduzida da sua equação. Também pretende-se que o estudante perceba claramente que a equação geral é obtida a partir da reduzida e vice-versa.

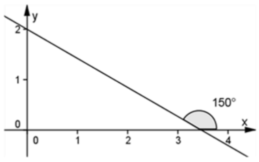
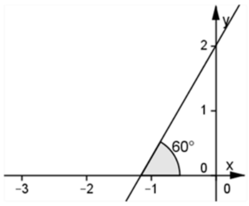
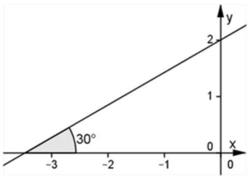
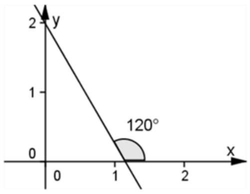
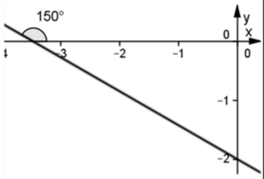
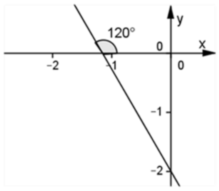
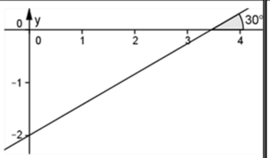
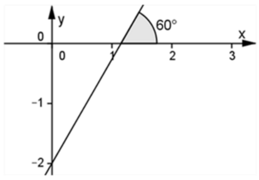
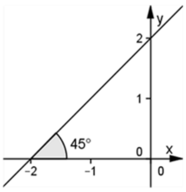
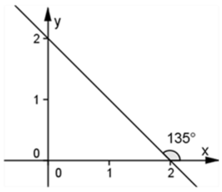
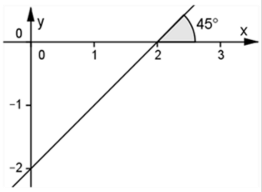
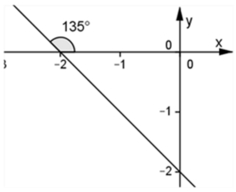
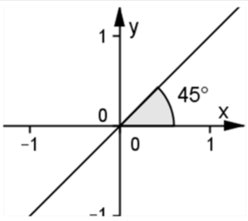
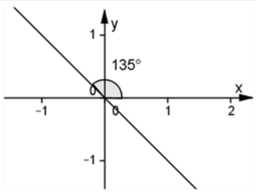
Ao final dessa atividade, o aluno terá desenvolvido processos de:

- Dedução da forma reduzida da equação da circunferência;
- Dedução da forma geral da equação da circunferência;
- Construção de circunferências no plano cartesiano;
- Associação dos elementos centro e raio com as circunferências construídas;
- Determinação das equações de circunferências nas formas geral e reduzida.

3.9 Atividades Extras

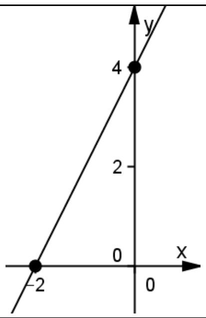
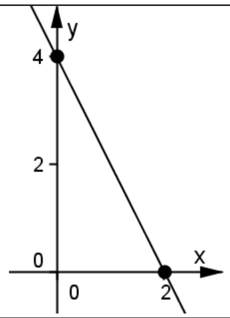
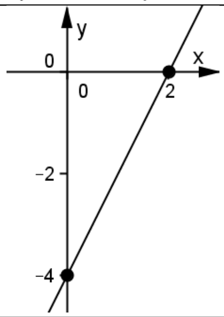
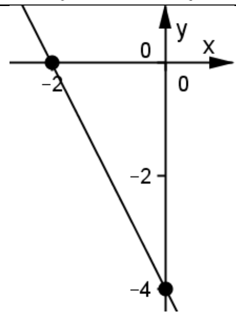
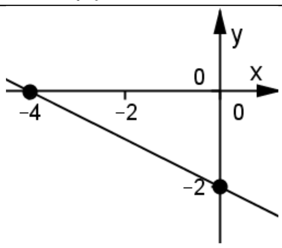
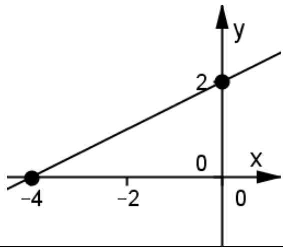
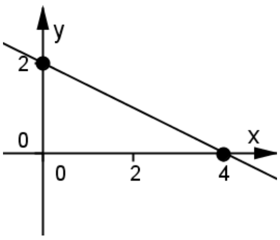
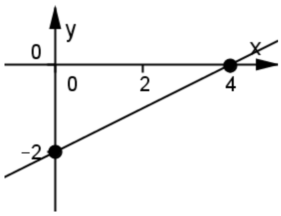
3.9.1 Jogo da Memória com retas (para recorte)

Figura 52– Jogo da memória com retas

	$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$		$y = \sqrt{3}x + 2$
	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$		$y = -\sqrt{3}x + 2$
	$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$		$y = -\sqrt{3}x - 2$
	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$		$y = \sqrt{3}x - 2$
	$y = x + 2$		$y = -x + 2$
	$y = x - 2$		$y = -x - 2$
	$y = x$		$y = -x$

Fonte: Elaborada pelo autor.

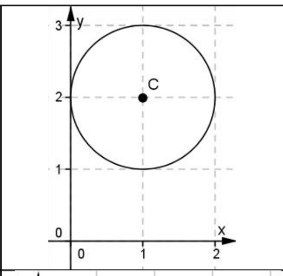
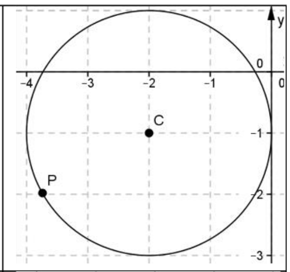
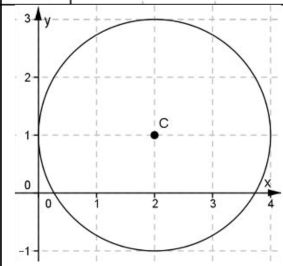
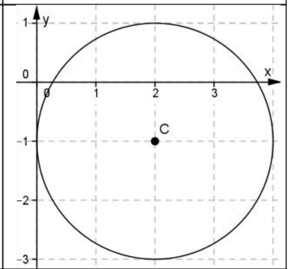
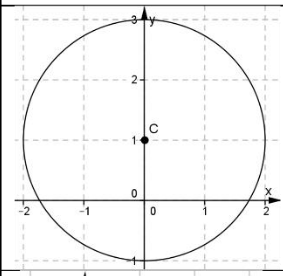
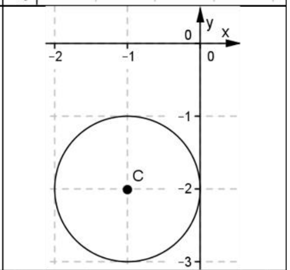
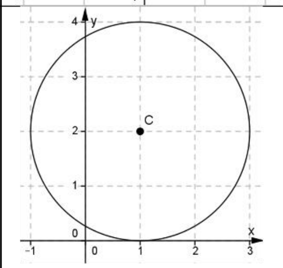
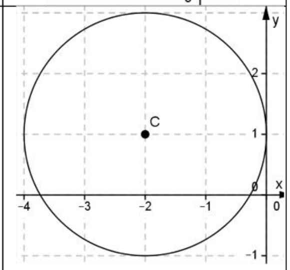
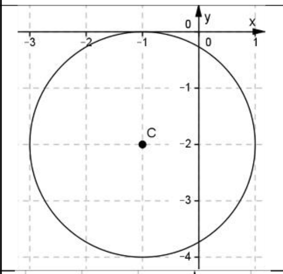
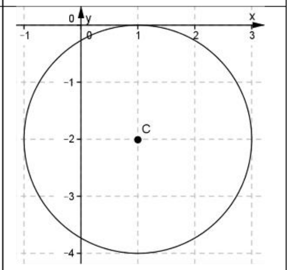
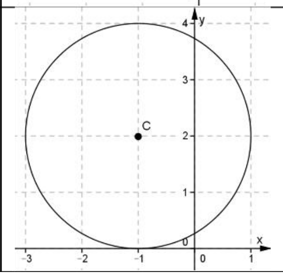
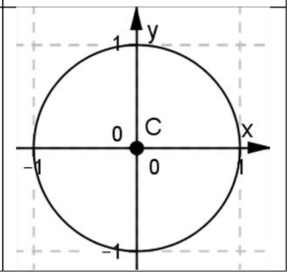
Figura 53– Jogo da memória com retas

$y = 2x + 4$		$y = -2x + 4$	
$y = 2x - 4$		$y = -2x - 4$	
$y = -\frac{1}{2}x - 2$		$y = \frac{1}{2}x + 2$	
$y = -\frac{1}{2}x + 2$		$y = \frac{1}{2}x - 2$	

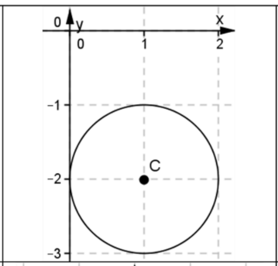
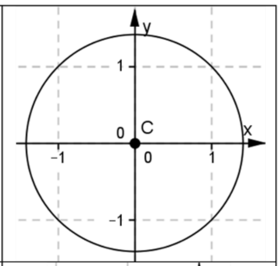
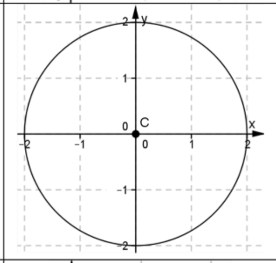
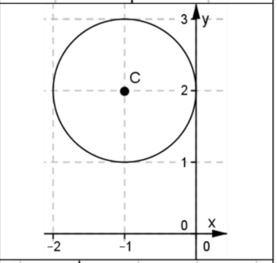
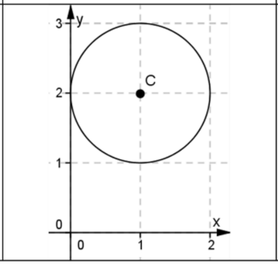
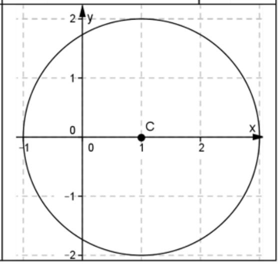
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.9.2 Jogo da Memória com circunferências (Para recorte)

Figura 54– Jogo da memória com circunferências

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$		$(x+2)^2+\ (y+1)^2=4$	
$(x-2)^2+(y-1)^2\ =4$		$(x-2)^2+(y+1)^2=4$	
$x^2\ +\ (y\ -\ 1)^2\ =\ 4$		$(x+1)^2+(y+2)^2\ =1$	
$(x-1)^2+\ (y-2)^2=4$		$(x+2)^2+(y-1)^2\ =4$	
$(x+1)^2\ +(y+2)^2\ =4$		$(x-1)^2+(y+\ 2)^2\ =4$	
$(x+1)^2\ +(y-2)^2\ =4$		$x^2\ +\ y^2\ =\ 1$	

Fonte: Elaborada pelo autor.

$(x-1)^2+(y+2)^2 = 1$		$x^2 + y^2 = 2$	
$x^2 + y^2 = 4$		$(x+1)^2+(y-2)^2 = 1$	
$(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$		$(x-1)^2 + y^2 = 4$	

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conceitos relacionados à geometria analítica estão inseridos profundamente na esfera abstrata dos saberes, necessitando um pleno desenvolvimento cognitivo de habilidades centradas no campo das ideias, como muitos outros da matemática. Embora seja possível trabalhá-los com a exibição de construções, representações e figuras no plano cartesiano, por muitas vezes os objetivos de aprendizagem não são alcançados pelos estudantes que mantêm dificuldades relacionadas à álgebra, abstração e visualização de construções geométricas planas.

É exatamente neste aspecto que a utilização de atividades que exploram construções e verificações práticas ou manipulativas pode permitir um favorecimento à assimilação de conhecimentos e elementos de estudo por meio da análise de figuras, exploração das habilidades de visualização objetivando à associação de equações às suas representações gráficas, medição, verificação de resultados e cálculos a serem realizados pelo próprio discente.

O presente trabalho torna-se uma ferramenta didática diferencial para o ensino de Geometria Analítica no ensino médio, uma vez que, revisando a literatura atual, não encontramos trabalhos expressivos que tenham o mesmo propósito de criar circunstâncias onde o aluno possa aprendê-la por meio da experimentação e utilização de instrumentos concretos. Percebemos a existência de um elevado número de artigos, livros e obras que contêm reflexões e discussões sobre o seu ensino, mas raramente sugestões metodológicas mais específicas e completas a serem aplicadas efetivamente em prol do aprendizado da referida área da matemática; a não ser com a exploração de recursos digitais.

Refletindo sobre essa questão, acrescentamos que toda a sequência didática proposta aqui pode ser desenvolvida por meio da utilização de softwares ou aplicativos como, por exemplo, o *Geogebra*, porém para este trabalho escolhemos tomar o rumo das atividades dispondo da utilização de materiais concretos e instrumentos de medidas, a fim de trazer uma visualização “menos abstrata” dos conceitos trabalhados, de modo que o aluno tenha a oportunidade de realizar efetivamente todo o processo de localização de pontos, desenho de segmentos, triângulos, retas e circunferências, mantendo com isso uma espécie de “verificação” de resultados a partir da própria construção e medições manuais e aproximando assim os elementos teóricos estudados da visualização prática.

Entendemos não ser prudente desprezar o estudo de matemática pautado na investigação científica e na experimentação, uma vez que elas são o alicerce pelo qual toda tecnologia que dispomos está fundamentada. É necessário então, apontarmos para essa realidade cotidianamente em nossas aulas.

Não há dúvidas de que é importante e necessário utilizarmos dos recursos digitais para abordarmos e desenvolvermos conceitos de forma mais criativa e didática com vistas a otimizar o processo de ensino-aprendizagem, utilizando para isso, softwares, jogos, pesquisas, entre outros meios. Mas jamais podemos desistir de explorar a criatividade de nossos alunos, colocando em desuso a aplicação de tarefas práticas com o manuseio de instrumentos e materiais manipulativos e a utilização do Laboratório de Matemática. Pelo contrário, devemos expô-los a atividades de construção e experimentação, tornando-os participantes ativos no processo de apropriação dos saberes e desenvolvimento de habilidades, promovendo ocasiões em que possam surgir questionamentos, reflexões, construções manuais e consequentemente um aprendizado mais significativo, estimulando-os ao desejo de desenvolverem novas tecnologias tanto quanto a consumir e usufruir dela.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco Regis Vieira; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Ensino de geometria analítica: alguns pressupostos da sequência *Fedathi* no contexto da formação de professor de matemática. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, Vila Velha - ES. V. 6, N. 2, p. 26 - 45, junho, 2016. Disponível em https://doi.org/10.36524/dect.v6i02 . Acesso em: 18 mar. 2023.

BARBOSA, Nelson Machado; SANT'ANA, Érika da Costa. Experimentação didática visando o ensino de Geometria Analítica utilizando *smartphones*: uma adaptação do Projeto Reforço Escolar com o aplicativo *GeoGebra*. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 6, n. 2, p. e2007, 16 out. 2020. Disponível em: https://doi.org/10.35819/remat2020v6i2id4177. Acesso em: 18 mar. 2023.

BEZERRA, Licio Hernanes e SILVA, Ivan Pontual Costa e. **Geometria Analítica**. 2. ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB). **Formação de professores do ensino médio: matemática**: **Etapa II: Caderno V. Pacto Nacional Pelo Fortalecimento do Ensino Médio**. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2014

CARDOSO, Franciele Catelan; NEHRING, Cátia Maria. O ensino da geometria analítica na perspectiva de uma professora formadora. In: IV EIEMAT – ENCONTRO DE INVERNO DE EDCUCAÇÃO MATEMÁTICA - 2º ENCONTRO NACIONAL PIBID MATEMÁTICA, V. 1, N.1, **Anais ...** Santa Maria, RS: UFSM, 2014. Disponível em: https://www.ufsm.br/cursos/pos-graduacao/santa-maria/ppgemef/anais-do-4o-eiemat-e-2o-encontro-nacional-pibid-matematica. Acesso em: 19 mar. 2023

CAVALCANTE, Luciano Moura. **Geometria Analítica**. 3 ed. Fortaleza: EdUECE, 2015.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **SPAECE 2013** - **Boletim Pedagógico - Matemática - Ensino Médio e EJA - 1º e 2º períodos.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2013. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 13 dez. 2022

CEARÁ. Secretaria da Educação. **SPAECE 2014** - **Boletim Pedagógico - Matemática - Ensino Médio e EJA - 1º e 2º períodos.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2014. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 13 dez. 2022.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **SPAECE 2015** - **Boletim Pedagógico - Matemática - Ensino Médio e EJA - 1º período.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2015.

Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 13 dez. 2022.

CEARÁ. Secretaria da Educação. **SPAECE 2016 - Boletim do Professor - Matemática.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2016. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 14 dez. 2022.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Estado do Ceará. **SPAECE 2017 - Boletim do Professor - Matemática.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2017. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 14 dez. 2022.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Estado do Ceará. **SPAECE 2018 - Boletim do Professor – Matemática – Ensino Médio.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2018. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 14 dez. 2022.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Ceará. **SPAECE 2019 - Boletim do Professor - Matemática.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2019. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 15 dez. 2022.

CEARÁ. Secretaria da Educação do Ceará. **SPAECE 2022 - Boletim do Professor - Matemática.** Juiz de Fora: UFJF, CAEd, 2022. Disponível em: https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes. Acesso em: 27 jan. 2023.

CEARÁ. Ensino Médio. **Secretaria da Educação.** Fortaleza, 2017. Disponível em: www.seduc.ce.gov.br/ensino-medio/. Aceso em: 12 dez. de 2022.

CEARÁ. Resultado por descritores. **Secretaria da Educação.** Fortaleza, 2023. Disponível em: www.seduc.ce.gov.br/resultado-por-descritores/. Aceso em: 12 dez. de 2022.

FEY, Franciele. **Guia do ensino experimental de matemática**. Santo Antônio da Patrulha, 2021. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/603314/2/FRANCIELE_produto.pdf. Acesso em: 20 fev. 2023.

GUIMARÃES, Charles Zuconeli et al. Como introduzir geometria analítica de uma forma Diferenciada. In: IV EIEMAT – ENCONTRO DE INVERNO DE EDCUCAÇÃO MATEMÁTICA - 2º ENCONTRO NACIONAL PIBID MATEMÁTICA, V. 1, N.1, **Anais ...** Santa Maria, RS: UFSM, 2014.
Disponível em: https://www.ufsm.br/cursos/pos-graduacao/santa-maria/ppgemef/anais-do-4o-eiemat-e-2o-encontro-nacional-pibid-matematica. Acesso em: 19 mar. 2023

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 7: Geometria Analítica**. 6 ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

LORENZATO. Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio (org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2012.

NERY, Chico. A Geometria Analítica no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática**, V. 67, N. 3, p. 19 – 24, São Paulo, SP: SBM. 2008. Disponível em https://rpm.org.br/cdrpm/67/6.html. Acesso em: 18 mar. 2023.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva, vol. 3**. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

PIRES, Elise Cristina Pinheiro da Silva. **O ensino da Geometria Analítica por meio de atividades**. 2016. 347 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2017. Disponível em https://ccse.uepa.br/ppged/wpcontent/uploads/dissertacoes/10/Elise_Cristina_Pinheiro_da_Silva_Pires_final.pdf. Acesso em: 19 mar. 2023.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo M. do e VIEIRA, Kleber M. **Laboratório de Ensino de Geometria: coleção formação de professores**. 1ª ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (org.). **Diálogo**: **Matemática e suas Tecnologias - Manual do Professor - Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2020.