UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALVINO BROSKA DA CRUZ

# APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINA LINEARES NOS SAQUES DE CAIXAS ELETRÔNICOS

CURITIBA

2023

ALVINO BROSKA DA CRUZ

# APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINA LINEARES NOS SAQUES DE CAIXAS ELETRÔNICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná-UFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática..

Orientadora: Profª Adriana Luiza do Prado, DSc

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cruz, Alvino Broska da
Aplicação de equações diofantina lineares nos saques de caixas eletrônicos. / Alvino Broska da Cruz. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profª Adriana Luiza do Prado, DSc

1. Equações lineares. 2. Algoritmos. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Prado, Adriana Luiza do. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

# TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ALVINO BROSKA DA CRUZ** intitulada: **Aplicações de Equações Diofantinas Lineares nos Saques de Caixa Eletrônico** , sob orientação da Profa. Dra. ADRIANA LUIZA DO PRADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 14 de Abril de 2023.

ADRIANA LUIZA DO PRADO
Presidente da Banca Examinadora

RODRIGO BLOOT
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO AMERICANA)

LUCELINA BATISTA DOS SANTOS
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

## AGRADECIMENTOS

Sempre que finalizamos um trabalho nos damos conta de que ele é fruto de um esforço conjunto, e percebemos que precisamos agradecer aos companheiros de jornada: professores, familiares e amigos, que foram fundamentais para a concretização de nosso sonho: Agradeço primeiramente a Deus por me permitir e dar força para desenvolvimento deste trabalho. À minha família, por permanecer ao meu lado. Em especial aos meus irmãos Maria do Rocio e Edson Broska que sempre estiveram me dando todo o alicerce. À minha orientadora Adriana Prado pelo apoio, e pela confiança a mim atribuído. Aos meus filhos por sempre acreditarem no meu potencial e permanecerem ao meu lado. Em especial a minha filha Luana que me incentivou na reta final. Aos professores do ProfMat que sempre me apoiaram e permitiram minha evolução. À Universidade Federal do Paraná que abriu suas portas para poder dar continuidade a esse trabalho.

**RESUMO**

A proposta deste trabalho é utilizar as Equações Diofantina como ferramenta para compreender os saques em caixas eletrônicos. Oferecendo uma visão diferente para os alunos de ensino médio como funciona saques utilizando esta ferramenta algébrica. Permitindo o professor do ensino médio uma maneira de ensinar, usando algo realmente prático e de fácil compreensão que está no dia-a-dia do aluno. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais devemos encorajar o uso da matemática como uma ferramenta para desenvolver a razão e habilidade dos estudantes.

**Palavras-chaves**: Equações Diofantina. Algoritmo Euclidiano. Maior Divisor Comum.

## ABSTRACT

The purpose os this work is to use the Diophantine equations as a tool to comprehend the withdrawals at an ATM. Offering a different vision to high school students on how they work using this algebraic tool. Allowing the teacher a way to teach, using something pratic and of easy comprehension. According to the national curriculum, which encourages the use of mathematics, as a tool to develop the student's reasoning and skills.

**Key-words**: Diophantine equations. Euclidean Algorithm. Greatest common divisor.

**LISTA DE ILUSTRAÇÕES**

## LISTA DE TABELAS

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho foi inspirado para atender ao estudante de escolas estaduais. Visando uma alternativa onde se possa ensinar equações diofantinas dentro do contexto dos caixas eletônicos. Algumas das dissertações que li, estavam com um material muito bom, porém faltava algo prático que pudesse levar o estudante poder ter um contato mais concreto que o levasse a construir o conhecimento. Sendo assim priorizei de forma sintetizada as equações Diofantina Lineares de n variáveis, visando suas aplicações.Inicialmente será feito um passeio histórico, estudando a origem das equações diofantina, a importância de Diofantes de Alexandria e como o mesmo contribuiu para a álgebra atual. A teoria dos números servirá de suporte para chegarmos em algumas conclusões.

Nos capítulos seguintes, faremos uma abordagem na teoria dos números, de uma forma pontual. Visando quais ferramentas são necessárias para a resolução de uma equação diofantina linear com duas variáveis. Estudaremos explicitamente, somente as ferramentas (Teoremas, proposições e Temas) necessárias para conseguirmos entender as equações Diofantinas.

Em conjunto, nos capítulos posteriores, estudaremos as equações, no âmbito dos saques nos caixas eletrônicos e quais as possíveis maneiras de efetuar esses saques. Em conjunto a esses estudo , será feito uma abordagem de situações problemas em respectivos saques , pois assim o aluno terá um estudo direcionado e com finalidade, que é a resolução de problemas do nosso cotidiano.

## 1.1 OBJETIVOS

Apresentar de forma sintetizada, as equações Diofantinas Lineares de $n$ variáveis, visando suas aplicações.

Compreender e analisar as equações Diofantinas no contexto do cotidiano.

### 1.1.1 Objetivo geral

Permitir ao professor de matemática uma possibilidade de ensinar equações diofantinas dentro de um contexto real. Fazer um estudo da teoria dos números, e utiizar esses resultados para a formalização das equações diofantinas.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Mostar uma breve trajetória da história de Diofante .

Utilizar as equações Diofantinas para compreender a sua utilização no problema dos caixa eletrônicos.

Resolver através das equações Diofantinas , as diversas formas de saque nos caixas eletrônicos.

## 1.2 REVISÃO DE LITERATURA

Para apresentar conceitos para o estudo de equação Diofantina é realizado uma introdução na teoria dos números como apresentando em (ALENCAR FILHO, 1981). Visando quais ferramentas são necessárias para a resolução de uma equação diofantina linear com duas variáveis.

Além disso, observamos algumas dissertações do PROFMAT com relação a este assunto como em (SILVA, 2013), (DEUS, 2017),(MAIA, 2018). Também a publicação de La Roque e Pitombeira (1991) na Revista do Professor de Matemática.

No capítulo 2, abordaremos os conjuntos númericos, propriedades e relações segundo (ALENCAR FILHO, 1981). Inclusive para formalizar as soluções usamos o algoritmo de Euclides.

No capítulo 3 estudaremos as equações diofantinas lineares com duas, três e quatro variáveis. Como resolvê-las e as aplicações nos saques de caixas eletrônicos pois assim o aluno terá um estudo direcionado e com finalidade, que é a resolução de problemas do nosso cotidiano.

# 2 PRELIMINARES

Neste capítulo vamos estudar o conjunto dos números inteiros (ALENCAR FILHO, 1981), para auxiliar no entendimento de como resolver uma equação diofantina linear. Para isto precisamos de alguns conceitos matemáticos entre eles números inteiros, máximo divisor comum e algoritmo de Euclides.

Em primeiro lugar iremos definir o conjunto dos números inteiros, a seguir como é a divisibilidade neles para poder demostrar o algoritmo de Euclides.

Nesse mesmo capítulo veremos o maximo divisor , com o qual irá auxiliar para demostrar se uma equação diofantina tem solução ou não.

## 2.1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os conjuntos numéricos são uma organização de elementos numéricos em grupos classificados pela semelhança entre estes elementos.

Dentro da matemática, o ramo que estuda os conjuntos numéricos é a Teoria dos Conjuntos.

Essa teoria diz que todos os elementos podem ser agrupados a partir de características semelhantes, desde frutas e animais até os numerais.

### 2.1.1 Números inteiros

Os números inteiros ou apenas inteiros são: ....$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...$

Cujo conjunto representa-se pela letra $\mathbb{Z}$, isto é: $\mathbb{Z}$ =$\{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$

### 2.1.2 O conjunto dos números inteiros positivos

Os números inteiro positivos $(x > 0)$ e representa-se por:

$\mathbb{Z}^*_+ = \{x \in \mathbb{Z}/x > 0\} = \{1, 2, 3, .....\}$

Os inteiros positivos são também denominados naturais e por isso o conjunto dos inteiros positivos é habitualmente designado pela letra $\mathbb{N}$ $(\mathbb{N} = \mathbb{Z}^*_+)$.

### 2.1.3 Divisibilidade em Z

**Definição** Seja $a$ e $b$ dois inteiros com $a \neq$ 0. Diz se que $a$ divide $b$, se somente se existe um inteiro $q$ tal que $b = a.q$. Denotaremos por $a \mid b$.

A relação $a \mid b$ é denominada relação da divisibilidade em $\mathbb{Z}$. (ALENCAR FILHO, 1981)

**Proposição** Se $a, m, b$,e $c$, são inteiros $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$.

**Demonstração**

Como $a \mid b$ e $b \mid c$ existem $q_1$ e $q_2$ inteiros tais que: $b = a.q_1$ (I) e $c = b.q_2$ (II)

Substituindo (I) em (II) temos que $c = aq_1.q_2$ o que implica que $a \mid c$.

**Exemplo**

Temos que $2 \mid 12$ e $12 \mid 24$ então $2 \mid 24$.

**Outra maneira de demonstrar a proposiçao:**

$a \mid b \Leftrightarrow \exists\ q_1 \in \mathbb{Z} : b = a.q_1$(I) por outro lado, como $b \mid c \Leftrightarrow \exists q_2 \in \mathbb{Z} : c = b.q_2$ (II)

Substituindo (I) em (II) chegamos em $c = a.q_1.q_2$, ou seja, $c = a.(q_1.q_2)$

Então $a \mid c$.

**Proposição** Se $a, b, c, x$ e $y$ são inteiros, $c \mid a$ e $c \mid b$ então $c \mid (xa + yb)$.

**Demonstração**

Por hipótese $c \mid a \Leftrightarrow \exists\ q_1 \in \mathbb{Z} : a = cq_1$ e $c \mid b \Leftrightarrow \exists\ q_2 \in \mathbb{Z} : b = cq_2$.

Portanto $xa + yb = x(cq_1) + y(cq_2)$ e colocando $c$ em evidência temos $xa + yb = c(xq_1 + yq_2)$, logo $c \mid (xa + yb)$.

**Proposição** Se $a, d, n,$ são inteiros, então valem as seguintes propriedades:

$(a)\ n \mid n$
$(b)\ d \mid n \Rightarrow ad \mid an$
$(c)\ ad \mid an,\ a \neq 0 \Rightarrow d \mid n$
$(d)\ 1 \mid n$
$(e)\ n \mid 0$
$(f)\ d \mid n, n \neq 0 \Rightarrow |d| \leq |n|$

**Demonstração das propriedades**:

Para o item **(a)** temos que $n = 1.n$ segue da definição $n \mid n$.

No item **(b)** a hipótese $d \mid n$ assim $\exists q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $n = q_1.d$. Para $a \in \mathbb{Z}$ vale que $a.n = a.q_1.d$. Pelas propriedades de multiplicaçao escreve-se $a.n = q_1.a.d$, assim $ad \mid a.n$.

Com relação ao item **(c)** da hipótese $ad \mid na \leftrightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Z} : na = q_1.ad$. Como $a \neq 0$ podemos multiplicar a equação por $\frac{1}{a}$ a igualdade: $\frac{1}{a}na = \frac{1}{a}.q_1ad$ então $n = q_1.d \rightarrow d \mid n$, como queriamos demostrar.

Para item **(d)** Como $n = 1.n$, temos pela definição que $1 \mid n$.

No item **(e)** Como $0 = n.0$ temos pela definição que $n \mid 0$.

E por fim, **(f)** Pela hipótese temos $n = dq_1$ e $n \neq 0$, assim $q_1 \neq 0$. Como é inteiro logo $|q_1| \geq 1$ e $|n| = |d.q_1| = |d|.|q_1| \geq |d|$. Assim podemos escrever $|d| \leq |n|$.

## 2.2 ALGORITMO DA DIVISÃO

**Teorema** Dados dois inteiros $a, b$ e $b > 0$ , existe $q$ e $r$ tais que $a = qb + r$ e com $0 \leq r < b$.

Caso $r = 0 \Rightarrow b|a$ em qualquer caso o $q$ é chamado de quociente da divisão de $b$ por $a$.

**Demonstração** Seja $S$ o conjunto de todos inteiros não negativos $(> 0)$ que são da forma $a - bx$ com $x \in \mathbb{Z}$, isto é: $S = \{a - bx | x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}$.

Este conjunto $S$ é não vazio porque, sendo $b > 0$, temos $b \geq 1$ portanto para $x = |-a|$ resulta $a - bx = a + b|a| \geq 0$. Assim pelo princípio da boa ordenação, existe o elemento mínimo $r$ de $S$ tal que $r \geq 0$ e $r = a - bq$ ou $a = bq + r$ com $q \in \mathbb{Z}$.

Além disso temos $r < b$, pois se fosse $r \geq b$ teríamos $0 \leq r - b = (a - bq) - b = a - bq - b = a - b(q + 1)$ e com isto $r$ não seria o elemento mínimo de $S$.

Para demonstrar **a unicidade** de q e r, suponhamos que existe dois outros inteiros $q_1$ e $r_1$ tais que $a = bq_1 = r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$.

Então $bq_1 + r_1 = bq + r \Rightarrow r_1 - r = (q - q_1)b \Rightarrow (r_1 - r)$. Por outro lado vale $-b < r_1 - r < b$, isto é, $|r_1 - r| < b$.

Assim $-b \leq (r_1 - r)$ e $(r_1 - r) < b$ e, portanto, $r_1 - r = 0$, e como $b \neq 0$ também temos $q - q_1 = 0$ logo $r_1 = r$ e $q_1 = q$.

**Corolário** Se $a$ e $b$ são dois inteiros, com $b \neq 0$ existe e são únicos os inteiros $q$ e $r$ que satisfazem as condições $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$

**Demonstração** Com efeito, se $b > 0$, nada há que demonstrar, e se $b < 0$, então $|b| > 0$, e por conseguinte existem e são únicos os inteiros $q_1$ e $r$ tais que:

$a = |b|q_1 + r$ e $0 \leq r < |b|$ pois $|b| = b$ e como temos $a = b(q) + r$ e $0 \leq r < |b|$.

Portanto existem e são únicos os inteiros $q$ e $q_1$ e $r$ tais que:

$a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$

Os inteiros $q$ e $r$ chamam-se respectivamente o quociente e o resta na divisão de $a$ por $b$.

Observe-se $b$ é divisor de $a$ se e somente o resto $r = 0$. Neste caso, temos $a = bq$ e o quociente $q$ na divisão exata de $a$ por $b$ e indica-se $a \mid b$ , que se lê “ a sobre b”.

**Exemplo** Achar o quociente $q$ e o resto na divisão de $a = -67$ por $b = 13$.

Efetuando a divisão: $67 = 13.5 + 2$ o que implica $-67 = 13.(-5) - 2$ mas $r = -2 < 0$ não satisfaz a condição $0 \leq r < 13$.

Somando e subtraindo $13$ no segundo membro da igualdade encontramos $-67 = 13.(-6) + 11$.

Com $0 \leq 11 < 13$ temos que o quociente é $q = -6$ e o resto $r = 11$

### 2.2.1 Máximo Divisor Comum

**Definição** Sejam $a$ e $b$ dois inteiros não conjuntamente nulos $(a \neq 0)$Chama-se máximo divisor comum de $a$ e $b$ o inteiro positivo $d(d > 0)$que satisfaz as condições:

**(i)** $d \mid a$ e $d \mid b$

**(ii)** Se $c \mid a$ e $c \mid b$ então $c \leq d$

**Teorema Bézout**: Seja $c$ o divisor comum de $a$ e $b$, então existem inteiro $n_o$ e $m_o$ tais que $c = n_o.a + m_o b.$

**Demonstração** Primeiro provaremos a existência. Seja $B$ o conjunto de todas combinações lineares $\{na + mb\}$ onde $m$ e $n$ são inteiros. Este conjunto contém claramente números negativos, positivos e também o zero. Vamos escolher $n_o$ e $m_o$ tais que $c = n_o a + m_o b$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto $B$. Vamos provar que $c \mid a$ e $c \mid b$. Como as demonstrações são similares, mostraremos apenas $c \mid a$. A prova é por contradição. Suponhamos $c \mid a$. Neste caso pelo teorema 2.2 existem $q$ e $r$ tais que $a = cq + r$ com $0 < r < c$. Portanto $r = a - qc = a - q(n_o a + m_o b) = (1 - qn_o)a + (-qm_o)b$ isto mostra que$r \in b$ pois $(1 - qn_o)$ e $(-qm_o)$ são inteiros o que é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ e $c$ é menor elemento positivo de $B$. Logo $c \mid a$ e de forma análogo $c \mid b$.(SANTOS, 1998)

Agora, a demonstração da unicidade. Como d é um divisor de $a$ e $b$, existem inteiros $k_1$ e $k_2$ tais que $a = k_1 d$ e $b = k_2 d$, portanto $c = n_o a + m_o b = n_o k_1 d + m_o k_2 d = d(n_o k_1 + m_o k_2)$ o que implica $d \mid c$.

Temos $d \leq c$ (ambos positivos) e como $d < c$ não é possível uma vez que $d$ é o máximo divisor comum. Concluímos que $d = n_o c + m_o b$ (CAMPOS, 2013).

**Algoritmo de Euclides** Se $a$ e $b$ são inteiros e $a = qb + r$, onde $q$ e $r$ são inteiros então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

**Demonstração:** da relação $a = qb + r$, podemos concluir que todo divisor de $b$ e $r$ é um divisor de $a$. Esta mesma relação escrita na forma $r = a - qb$ nos diz que todo divisor de $a$ e $b$ é um divisor de $r$. logo o conjunto de divisores comum de $a$ e $b$ é igual ao conjunto de divisores de $b$ e $r$ o que nos garante que $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

**Exemplo**

Achar o $mdc(1126, 522)$, utilizando o algoritmo da divisão para dividir $1126$ por $552$ em seguida pelo resto $82$, depois o resto $82$ pelo resto $30$ e assim sucessivamente, até obtermos o resto zero.

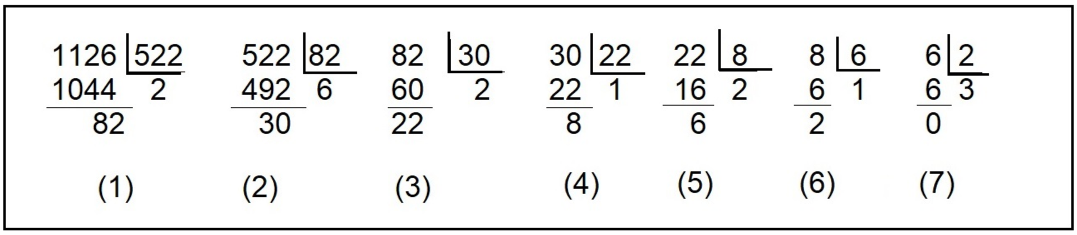



FIGURA 1 – Figura feita pelo autor da divisão pelo algoritmo de Euclides, fonte:próprio autor.

Pelo item (7) temos que $mdc(6, 2) = 2$ e pelo algotimo de Euclides podemos concluir a equação $8 = 1.6 + 2$ assim $mdc(8, 6) = mdc(6, 2)$.

Da equação $22 = 2.8+6$ que $mdc(22, 8) = mdc(8, 6)$e por sucessivas aplicações do algoritmo da divisão. Construir a sequência de igualdades $mdc(2, 6) = mdc(6, 8) = mdc(8, 22) = mdc\ (522, 1126)$. Como feito em (DE PAULA, 2014), tendo encontrado dessa forma o máximo divisor comum de $522$ e $1126$, que é o último resto não nulo das equações acima.

### 2.2.2 O Algoritmo de Euclides

Seja $a$ e $b$ dois inteiros não conjuntamente nulos $(a \neq 0$ ou $b \neq 0)$, cujo máximo divisor comum se deseja determinar é imediato:

Se $a \neq 0$, então o $mdc(a, 0) = |a|$

Se $a \neq 0$, então o $mdc(a, a) = |a|$

Se $b|a$ então o $mdc(a, b) = |b|$

Além disso por ser $mdc(a, b) = mdc(|a|, |b|)$, a determinação do mdc (a,b), reduz-se ao caso em que $a$ e $b$ são inteiros positivos distintos, com $a > 0$, tais que $b$ não divide $a$ , isto é ; $a > b > 0$ nestas condições a aplicação repetida do algoritmo da divisão de $a$ nos da as igualdades:

$$a = bq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < b$$
$$b = r_1q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2$$
$$r_2 = r_3q_4 + r_4,\ 0 < r_4 < r_3$$

Como os restos $r_1, r_2, r_3, r_4$ são todos inteiros positivos tais que: $b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4$.

E existem apenas $b-1$ inteiros positivos menores que $b$, necessariamente se chega a divisão cujo resto $r_{n-1}=0$, isto é finalmente temos:

$$r_{n-2} = r_{n-1}q + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1} + r_{n+1} = 0$$

O último resto $r_n \neq 0$ que aparece nessa sequência de divisões é o máximo divisor comum procurado de $a$ e $b$ isto é $mdc(a,b) = r_n$.

Visto que pelo algoritmo da divisão temos $mdc(a,b) = mdc(b,r_1) = mdc(r_1,r_2)..... = mdc(r_{n-2}), r_{n-1}) = mdc(r_{n-1}, r_n) = rn$. Esse processo prático para o cálculo do mdc de dois inteiros positivos $a$ e $b$ é denominado algoritmo de Euclides ou processo das divisões sucessivas.

| | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | ... | $q_n$ | $q_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $r_1$ | $r_2$ | ... | $r_{n-1}$ | $r_n$ |
| $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | ... | 0 | |

TABELA 1 – Dispositivo de cálculo no emprego do algoritmo de Euclides

Que se traduz na seguinte regra, para achar o mdc de dois inteiros positivos, divide-se o maior pelo menor, este pelo primeiro resto obtido, o segundo resto obtido pelo primeiro e assim sucessivamente até encontrar um resto nulo. O último resto não nulo é o máximo divisor comum procurado.

O algoritmo de Euclides também pode ser usado para achar a expressão do $mdc(a,b) = r_n$ como combinação linear de a e b para o que basta eliminar sucessivamente seus restos $r_{n-1}, r_{n-2}...r_3, r_2, r_1$ entre as primeiras igualdades anteriores (DOMINGUES, 1991).

**Exemplo** O algoritmo de Euclides pode ser exemplificado da seguinte maneira:

Vamos fazer a divisão $b \mid a$ e escrever da seguinte maneira $a = bq_1 + r$. Montando uma tabela:

| | $q_1$ |
|---|---|
| $b$ | $a$ |
| $r$ | |

TABELA 2 – Exemplo do algoritmo de Euclides, Fonte: próprio autor.

A seguir temos a nova divisão e montamos a próxima tabela:

| | | |
|---|---|---|
| | $q_1$ | $q_2$ |
| $a$ | $b$ | $r_1$ |
| $r_1$ | $r_2$ | |

TABELA 3 – Resultado da nova divisão $a = q_2.r_1 + r_2$, fonte: próprio autor.

E fazemos as várias divisões até o resto zero:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $\dots$ | $q_n$ | $q_{n+1}$ |
| $a$ | $b$ | $r_1$ | $r_2$ | | $r_{n-1}$ | $r_n$ |
| $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | ... | $0$ | |

TABELA 4 – Resultados sucessivos de $a = q_{n+1}.r_n + 0$, fonte: próprio autor.

**Exemplo** Calcule o mdc $(1126, 522)$ da figura 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 6 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 1126 | 522 | 82 | 30 | 22 | 8 | 6 | 2 |
| 82 | 30 | 22 | 8 | 6 | 2 | 0 | |

TABELA 5 – Resultado do exemplo em forma de tabela, fonte: próprio autor.

o mdc é o último resto não nulo. Logo mdc $(1126, 522) = 2$.

# 3 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

As equações diofantinas se sobresae dentre as equações lineares por aparecerem em diversos problemas do cotidiano e em vários níveis acadêmicos. Neste capítulo desenvolveremos alguns tópicos para mostrar se a equação diofantina tem solução ou não, e quais são as soluções. No capítulo anterios foram apresentados os números inteiros, divisibilidade, máximo divisor comum, algoritmo de Euclides, são ferramentas necessárias para a resolução das equações Diofantinas:

O tipo mais simples de equação Diofantina é a equação Diofantina Linear com duas variáveis(incógnitas) $x$ e $y$, $ax + by = c$, onde $a$ e $b$ são inteiros e n ao simultaneamente nulos. Envolveremos equações diofantinas de duas , três e quatro variáveis e a forma de representar e achar essas soluções.

Além disso, para motivar o aluno no estudo das equações diofantinas faremos uma ligação entre a teoria e a prática, utilizando sua aplicação no saque dos caixas eletronicos.

Antes porém de irmos com a teoria, vamos falar um pouco sobre o matemático que descobriu e leva o nome nas equações.

## 3.1 DIOFANTO DE ALEXANDRIA

Na Grécia antiga, a palavra aritmética significava teoria dos números. Nos anos ( 250 a 350 DC) aproximadamente, também chamado segunda idade Alexandrina, um grande talento matemático floresce: Diofantes de Alexandria. (BOYER; MERZBACH, 2012)

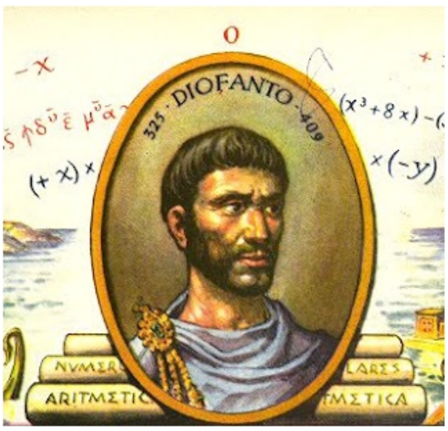



FIGURA 2 – Imagem de Diofanto adulto em seu túmulo, fonte: Google imagens.

Diofanto teve uma enorme contribuição nos campos de Álgebra e Teoria dos Números. Mas pouco se sabe da vida dele, mas uma coleção de problemas do século V ou VI chamado “Antologia Grega”, com quarenta e seis problemas aproximadamente, com um que tem o seguinte enunciado:

“Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte da sua vida e somando uma duodécima parte para isso cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe ascendeu a lâmpada nupcial após a sétima parte e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai infeliz criança tardia, depois de chegar à média da metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar da sua dor durante quatro anos com a ciência dos números terminou sua vida”.

Resolvendo esse enigma, a equação apresenta a seguinte forma:

$$\boxed{\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x}$$

Que tem como solução $x = 84$.

Diofantes deu pouca atenção a problemas do primeiro grau, então não se trata de problemas. Esse acima escrito como algo que o interessava. A principal obra que conhecemos de Diofantes é a Aritmética, treze livros originalmente, onde só os seis primeiros se preservaram.(LA ROQUE; PITOMBEIRA, 1991). A obra de Diofantes se diferencia principalmente pois é para resolução exata de equações tanto determinadas como indeterminadas.

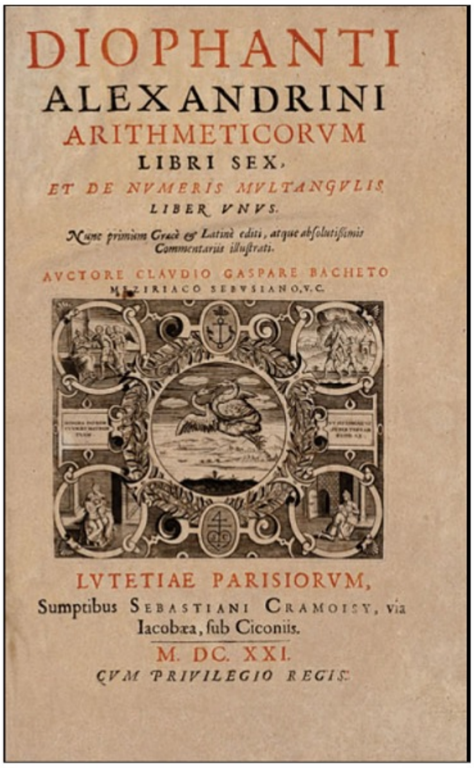
Nos livros recuperados da obra Aritmética temos:

**1o. livro** tem 39 problemas dos quais 25 são problemas que envolvem equações de $1^o$ grau e 14 são problemas de $2^o$ grau.

**2o. livro** tem 35 problemas, entre eles o mais famoso problema 8: "Decompor o quadrado 16 em dois quadrados".

**3o. livro** contém 21 problemas. E dentre eles o problema 19 que recorre-se à geometria para obter sua solução.

**4o. livro** contém 40 problemas sendo que a maioria deles trata dos números cúbicos. A seleção dos dados de Diofanto faz com que chegue-se a uma soluçaõ aceitável deste tipo de equação, já que os gregos não conheciam as fórmulas da equação cúbica.




**Portada de Arithmetica.**
**Edición de 1621**

FIGURA 3 – Capa de um dos livros, fonte: domínio público

**5o. livro** consta de 30 problemas, dos quais 28 são de segundo e terceiro graus.

**6o. livro** o último livro contém 24 problemas que trazem a resolução de triângulos retânbulos de lados racionais.

## 3.2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE DUAS VARIÁVEIS

Visto a forma que se apresenta uma equação Diofantina linear de duas variáveis temos perguntas a se fazer: Essa equação tem solução inteira? Se tem solução é única? Se tem mais de uma solução, como podemos representar essas soluções?

Tomando o tipo mais simples de equação Diofantina Linear com duas variáveis $ax + by = c$, onde $a$ e $b$ são inteiros e não simultaneamente nulos e $x$ e $y$ incógnitas.

### 3.2.1 Condição de existência de solução

**Teorema** A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se e somente se $d$ divide $c$ sendo $d = mdc(a, b)$.(ALENCAR FILHO, 1981)

**Demonstração** Suponhamos que a equação $ax + by = c$ tem solução, isto é existe um par de inteiros $x_0$ e $y_0$ tais que $ax_0 + by_0 = c$. Por ser $mdc(a, b) = d$ existem inteiros $r$ e $s$ tais que $a = dr$ e $b = ds$ e temos $c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_o)$ Logo segue-se $d \mid c$ pois $rx_0 + sy_0$ é um inteiro.

Reciprocamente, suponhamos que $d \mid c$ então podemos escrever $c = d.t$ onde $t$ é um inteiro. Como o $mdc(a, b) = d$ existem inteiros $x_0$ e $y_0$ tais que $d = ax_0 + by_0$ o que implica $c = d.t = (ax_0 + by_0)t = t.(ax_0) + t(by_0)$ então o par $\begin{cases} tx_0 = \dfrac{c}{d}x_0 \\ ty_0 = \dfrac{c}{d}y_0 \end{cases}$ é uma solução da equação $ax + by = c$.

### 3.2.2 Soluções da equação

Vamos usar a equação $ax + by = c$ como base de exemplos e teoremas, bem como nas demonstrações.

**Teorema** Se $d$ divide $c$ e $d = mdc(a, b)$ e o par de inteiros $x_0$ e $, y_0$ é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são da forma: $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}.t, \ t \in \mathbb{Z} \\ y = y_0 - \frac{a}{d}.t, \ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

**Demonstração**

Suponhamos que o par de inteiros $x_0$ e $y_0$ é uma solução particular da equação $ax + by = c$, e seja $x_1$, $y_1$ outra solução qualquer desta equação.

Então temos:

$ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1;$

$a(x_0 - x_1) = -b(y_0 - y_1);$

$a(x_0 - x_1) = b(y_1 - y_0).$

Por ser o $mdc(a, b) = d$. Existem inteiros $r$ e $s$ tais que $a = dr$ e $b = ds$ "com $r$ e $s$ primos entre si".

Substituindo esses valores de $a$ e $b$ na igualdade anterior e cancelando o fator comum $d$ obtemos:

$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1)$

Assim sendo $r \mid s(y_0 - y_1)$ isto é:

$y_0 - y_1 = r.t$ e $x_1 - x_0 = s.t.$

Onde $t$ é um inteiro portanto os valores de :

$x_1 = x_0 + st = x_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{e} \quad y_1 = y_0 - rt = y_0 - \frac{a}{d}t$

Satisfazem realmente a equação $ax + by = c$ qualquer que seja o inteiro $t$ pois

$$ax_1 + by_1 = a[x_0 + \frac{b}{d}.t] + b[y_0 - \frac{a}{d}.t] = (ax_0 + by_0) + \left(\underbrace{\frac{ab}{d} - \frac{ab}{d}}_{0}\right).t = ax_0 + by_0 + 0 = c.$$

Sabemos que se $d = mdc(a, b)$ e $d$ divide $c$ então a equação diofantina linear $ax + by = c$ admite um número infinito de soluções para cada valor inteiro arbitrário $t$.

A partir daqui, usaremos o titulo problema para indicar algumas das aplicações.

**Problema 1** Deseja-se efetuar um saque de $R\$\ 30,00$ no caixa eletrônico, porém o mesmo está abastecido apenas com notas de $R\$\ 2$ e notas de $R\$\ 5$ .Quantas são as possíveis maneiras de sacar o dinheiro e quais são elas?

**Resolução**

Podemos modelar o problema com a seguinte equação diofantina: $2x + 5y = 30$, onde $x$ representa a quantidade notas de $R\$\ 2$ e $y$ representa a quantidade de notas de $R\$\ 5$.

Primeiramente vamos calcular o $mdc(2, 5)$ pelo algoritmo de Euclides:

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | 2 |
| 5 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | |

TABELA 6 – Cálculo de mdc para o problema 1, fonte: próprio autor.

Assim $mdc(5, 2) = 1$ portanto $1 \mid 30$ e a equação diofantina tem solução. Agora vamos achar a expressão do inteiro $30$ como combinação linear de $5$ e $2$:

$1 = 5 - 2(2)$ multiplicando por $30$ ambos os lados encontramos $30 = 2(-60) + 5(30)$. Assim o par de inteiros $x_0 = 30$ e $y_0 = -60$ é uma solução particular da equação diofantina e todas as outras soluções são dadas pela fórmula da solução geral:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t \text{ e } y = y_0 - \frac{a}{d}t$$

.

Substituindo os valores encontrados temos

$$x = -60 + \frac{5}{1}t \text{ e } y = 30 - \frac{2}{1}t$$

.

Lembrando que $t \geq 0$ e queremos apenas nas soluções positivas, logo:

$$\begin{cases} x = -60 + (5)t \geq 0 \Rightarrow t \geq 12 \\ y = 30 - (2)t \geq 0 \Rightarrow t \leq 15 \end{cases}$$

| $t$ | $x = -60 + \frac{5}{1}t$ | $y = 30 - \frac{2}{1}t$ |
|---|---|---|
| 12 | 0 | 6 |
| 13 | 5 | 4 |
| 14 | 10 | 2 |
| 15 | 15 | 0 |

TABELA 7 – Possíveis valores de $t$ para o problema 1 , fonte: próprio autor.

Portanto os valores possíveis $t$ são: $t = \{12, 13, 14, 15\}$.

Assim os possíveis saques são:

$$\begin{cases} (1) \ \text{Nenhuma nota de } \ R\$2 \text{ e seis notas de } R\$5; \\ (2) \ \text{Cinco notas de } \ R\$2 \text{ e quatro notas de } R\$5; \\ (3) \ \text{Dez notas de } \ R\$2 \text{ e duas notas de } R\$5; \\ (4) \ \text{Quinze notas de } \ R\$2 \text{ e nenhuma nota de } R\$5 \end{cases}.$$

## 3.3 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE TRÊS VARIÁVEIS

Seja a equação Diofantina linear $ax + by + cz = k$, onde $a, b, c$ e $k$ são não nulos simultaneamente.

### 3.3.1 Condição de existência de solução

Utilizaremos a mesma idéia do teorema para equações com duas variáveios, que garante que a equação $ax + by = c$ tem solução se e somente se $d$ divide $c$ sendo $d = mdc(a, b)$.

**Teorema** A equação diofantinha linear $ax + by + cz = k$ tem solução se e somente se $d$ divide $k$ sendo $d = mdc(a, b, c)$.

**Demonstração**

($\Rightarrow$) Suponhamos que a terna de inteiros $(x_0, y_0, z_0)$ é uma solução inteira da equação então $ax_0 + by_0 + cz_0 = k$. Seja $d = mdc(a, b, c)$ sabemos que $d \mid a, d \mid b$ e $d \mid c$. Assim $d \mid ax_0, d \mid by_0$ e $d \mid cz_0$ logo $d \mid ax_0 + by_0 + cz_0 = k$. O que prova a ida.

($\Leftarrow$) Agora se $d = mdc(a, b, c)$ divide $k$ então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $k = dm$.

Sejam $d_1 = mdc(a, b)$ e $d_2 = mdc(d_1, c)$ então existem $k_1, k_2, k_3, k_4$ inteiros tais que $ak_1+bk_2 = d_1$(i) e $d_1k_3+ck_4 = d_2$(ii). Substituindo (i) em (ii) temos $(ak_1+bk_2)k_3+ck_4 = d_2$(iii).

Multiplicando a equação (iii) por $m$ e reescrevendo esta equação

$$a.\underbrace{(k_1k_2m)}_{x_1} + b.\underbrace{(k_1k_3m)}_{y_1} + c.\underbrace{(k_4m)}_{z_1} = d_2m$$

.

Mas como $d = mdc(a, b, c) = mdc(mdc(a, b), c) = mdc(d_1, c) = d_2$, segue que $(x_1, y_1, z_1)$ é uma solução inteira particular da equação (DOMINGUES, 1991).

**Proposição** A solução geral da equação diofantina é dada pela fórmula para quaisquer $l_0, s, t \in \mathbb{Z}$:

$$S = \{x_0(l_0 - cs) + \left(\frac{b}{mdc(a, b)}\right).t, y_0(l_0 - cs) - \left(\frac{a}{mdc(a, b)}\right).t, mdc(a, b)s + r\}.$$

**Demonstração** Seja a equação $ax + by + cz = k$, com $mdc(a, b, c) = k$, podemos reescrevê-la como $ax + by = k - cz$.

Assumindo que $mdc(a, b)|\,(k - cz)$ . Vamos considerar $z = mdc(a, b).s + r$, $r$ e $s$ $\in \mathbb{Z}$, assim:

$k - c.z = k - c.(mdc(a, b)s + r)$;

$k - c.z = k - c.(mdc(a, b)s) - c.r$;

$k - c.z = (k - c.r) - c.s.(mdc(a, b))$;

Como $mdc(a, b) \mid ((k - c.r) - c.s.mdc(a, b)$ e $mdc(a, b) \mid c.s.mdc(a, b)$.

Conclusivamente $mdc(a, b) \mid (k - cr)$ .Assim existe um único número $l_0$ tal que $k - cr = mdc(a, b)l_0$. Com isso segue $mdc(a, b)l_0 + cr = k$.

Observamos que a equação admite solução, pois $mdc(mdc(a, b), c) = mdc(a, b, c)$ e por hipótese $mdc(a, b, c) \mid k$.

Dessa maneira , se o par de inteiros $(l_0, r_0)$ satisfaz $mdc(a, b)l_0 + cr_0 = k$, logo, $k - cz = k - cr_0 - csmdc(a, b)$.

Tomando essa igualdade e combinando algumas equações dadas anteriormente, temos que $k - cz = k - cr_0 - csmdc(a, b) = mdc(a, b)l_0 - csmdc(a, b) = mdc(a, b)(l_0 - cs)$.

Logo obtemos a equação diofantina linear de duas variáveis $ax+by = mdc(a, b)(l_0 - cs)$ com solução para qualquer $s \in \mathbb{Z}$.

Seja $\{x_0, y_0\}$ uma solução particular da equação $ax + by = mdc(a, b)$. Assim $ax_0 + by_0 = mdc(a, b)$, multiplicando essa equação por $(l_0 - cs)$,temos:

$ax_0.(l_0 - cs) + by_0.(l_0 - cs) \ = \ mdc(a, b)(l_0 - cs)$.

Segue então a solução gerada equação diofantina pode ser expressa por (**Silva2013**):

$$\begin{cases} S = (x_0(l_0 - cs) + \left(\dfrac{b}{mdc(a,b)}\right)t, y_0(l_0 - cs) - \left(\dfrac{a}{mdc(a,b)}\right)t,\ mdc(a,b)s + r)\} \\ x = (x_0(l_0 - cs) + \left(\dfrac{b}{mdc(a,b)}\right)t \\ y = y_0(l_0 - cs) - \left(\dfrac{a}{mdc(a,b)}\right)t \\ z = mdc(a,b)s + r \text{ com } t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Para ilustrarmos a aplicação, segue mais um problema.

**Problema 2** Deseja-se efetuar um saque de R$ 30,00 no caixa eletrônico, porém o mesmo esta abastecido apenas com notas de R$ 2 , notas de R$ 5 e notas de R$ 10. Quantas são as possíveis maneiras de sacar o dinheiro e quais são elas?

**Resolução**

Podemos modelar o problema com a seguinte equação diofantina $2x+5y+10z = 30$, onde $x$ representa a quantidade notas de R$ 2 e $y$ representa a quantidade de notas de R$ 5 e $z$ representa a quantidade de notas de R$ 10

Vamos torná-la numa equação de duas variáveis, chamando $p = 2x + 5y$ temos $p + 10z = 30$ e sendo $mdc(1, 10) = 1$ e $1 \mid 30$, isto garante que a equação $p + 10z = 30$ admite solução.

Para simplificar a resolução podemos escrever: $p + 10z = 1$ pois $mdc(1, 10) = 1$ e encontramos uma solução para esta equação, que pode ser $1(-9) + 10(1) = 1$ e para voltarmos a equação anterior multipicamos por $30$ ambos os lados.

Assim $1(-270) + 10(30) = 30$. Então a solução geral para duas variáveis é

$$p = -270 + 10.t \text{ e } z = 30 - t,\ t \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$ -

Como $p, z \geq 0$ temos $z = 30 - t \geq 0$ assim $t \leq 30$, para $p = -270 + 10t \geq 0$. Com isto, $27 \leq t \leq 30$. Então $t$ sendo um inteiro temos $t = \{27, 28, 29, 30\}$.

Por outro lado $p = 2x + 5y = -270 + 10t$. A equação admite solução pois $mdc(2, 5)$ divide $-270 + 10t$. Logo a equação $2x + 5y = -270 + 10.t$ admite solução.

Primeiro encontramos uma solução particular que é $2(-2) + 5(1) = 1$. Multiplicando tudo por $(-270 + 10t)$, obtemos $2(540 - 20t) + 5(-270 + 10t) = -270 + 10t$.

A solução geral para três variáveis é

$$x = 540 - 20t + 5t_1\ , y = -270 + 10t - 2t_1 \text{ e } z = 30 - t,\ t \in \mathbb{Z} \qquad (2)$$

Como devemos ter $x \geq 0, y \geq 0$ e $27 \leq t \leq 30$. Encontramos $540 - 20t - 5t_1 \geq 0$ e $-270 + 10t - 2t_1 \geq 0$.

Fazendo um estudo em (2) para cada valor de $t$.

**Primeiro caso para** $t = 27$

Obtemos

$$\begin{array}{l|l|l} x = 540 - 20(27) + 5t_1, & y = -270 + 10(27) - 2t_1, & z = 30 - (27) \\ x = 540 - 540 + 5t_1, & y = -270 + 270 - 2t_1, & z = 3 \\ 5t_1 \geq 0 & -2t_1 \geq 0 & 0 \leq t_1 \leq 0. \end{array}$$

Que vale para $t_1 = 0$.

Assim $x = 0, y = 0$ e $z = 3$, ou seja, o saque de $\$30$ reais será feito com três notas de $R\$10$.

| |
|---|
| 3 notas de $R\$10$ |

TABELA 8 – Solução para o problema 2 com $t = 27$, fonte: próprio autor

**Segundo caso para** $t = 28$

Obtemos

$$\begin{array}{l|l|l} x = 540 - 20(28) + 5t_1, & y = -270 + 10(28) - 2t_1, & z = 30 - (28) \\ x = 540 - 560 + 5t_1, & y = -270 + 280 - 2t_1, & z = 2 \\ x = -20 + 5t_1, & y = 10 - 2t_1, & z = 2 \\ -20 + 5t_1 \geq 0, & 10 - 2t_1 \geq 0, & 4 \leq t_1 \leq 5. \end{array}$$

Que é válida para $t_1 = \{4, 5\}$.

$$\begin{array}{l|l|l} \text{para } t_1 = 4 & z = 2 & \text{para } t_1 = 5 \\ x = -20 + 5.(4), & z = 2 & x = -20 + 5.(5) \\ y = 10 - 2.(4), & z = 2 & y = 10 - 2.(5) \\ x = 0, y = 2 & z = 2 & x = 5, y = 10 \end{array}.$$

Temos que o saque de $R\$30$ reais será feito:

| | |
|---|---|
| 0 notas de $R\$2$ | 5 notas de $R\$2$ |
| 2 notas de $R\$5$ | 0 notas de $R\$5$ |
| 2 notas de $R\$10$ | 2 notas de $R\$10$ |

TABELA 9 – Soluções para o problema 2 com $t = 28$, fonte: próprio autor

**Terceiro caso para** $t = 29$

Obtemos

$$\begin{array}{l|l|l} x = 540 - 20(29) + 5t_1, & y = -270 + 10(29) - 2t_1, & z = 30 - (29) \\ x = 540 - 580 + 5t_1, & y = -270 + 290 - 2t_1, & z = 1 \\ x = -40 + 5t_1, & y = 20 - 2t_1, & z = 1 \\ -40 + 5t_1 \geq 0, & 20 - 2t_1 \geq 0, & 8 \leq t_1 \leq 10 \end{array},$$

que é válida para $t_1 = \{8, 9, 10\}$.

| para $t_1 = 8$ | para $t_1 = 9$ | para $t_1 = 10$ |
|---|---|---|
| $x = -40 + 5.(8),$ | $x = -40 + 5.(9),$ | $x = -40 + 5.(10),$ |
| $y = 20 - 2.(8),$ | $y = 20 - 2.(9),$ | $y = 20 - 2.(10).$ |
| $x = 0, y = 4, z = 1$ | $x = 5, y = 2, z = 1$ | $x = 10, y = 0, z = 1$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| | | |
|---|---|---|
| $0$ notas de $R\$2$ | $5$ notas de $R\$2$ | $10$ notas de $R\$2$ |
| $4$ notas de $R\$5$ | $2$ notas de $R\$5$ | $0$ notas de $R\$5$ |
| $1$ notas de $R\$10$ | $1$ notas de $R\$10$ | $1$ notas de $R\$10$ |

TABELA 10 – Soluções para o problema 2 com $t = 29$, fonte: próprio autor

**Quarto caso para** $t = 30$

Obtemos:

| | | |
|---|---|---|
| $x = 540 - 20(30) + 5t_1,$ | $y = -270 + 10(30) - 2t_1,$ | $z = 30 - (30)$ |
| $x = 540 - 600 + 5t_1,$ | $y = -270 + 300 - 2t_1,$ | $z = 0$ |
| $x = -60 + 5t_1,$ | $y = 30 - 2t_1,$ | $z = 0$ |
| $-60 + 5t_1 \geq 0,$ | $30 - 2t_1 \geq 0,$ | $12 \leq t_1 \leq 15.$ |

Que é válida para $t_1 = \{12, 13, 14, 15\}$.

| para $t_1 = 12$ | para $t_1 = 13$ | para $t_1 = 14$ | para $t_1 = 15$ |
|---|---|---|---|
| $x = -60 + 5.(12),$ | $x = -60 + 5.(13),$ | $x = -60 + 5.(14),$ | $x = -60 + 5.(15)$ |
| $y = 30 - 2.(12),$ | $y = 30 - 2.(13),$ | $y = 30 - 2.(14),$ | $y = 30 - 2.(15).$ |
| $x = 0, y = 6, z = 0$ | $x = 5, y = 4, z = 0$ | $x = 10, y = 2, z = 0$ | $x = 15, y = 0, z = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0$ notas de $R\$2$ | $5$ notas de $R\$2$ | $10$ notas de $R\$2$ | $15$ notas de $R\$2$ |
| $6$ notas de $R\$5$ | $4$ notas de $R\$5$ | $2$ notas de $R\$5$ | $0$ notas de $R\$5$ |
| $0$ notas de $R\$10$ | $0$ notas de $R\$10$ | $0$ notas de $R\$10$ | $0$ notas de $R\$10$ |

TABELA 11 – Soluções para o problema 2 com $t = 30$, fonte: próprio autor

Com base nos estudos feitos, chegamos à conclusão que para sacar $\$30$ , em um caixa eletrônico onde só existem cédulas de $R\$2$, $R\$5$ e $R\$10$ temos $10$ possíveis saques.

| |
|---|
| (1). $3$ notas de $\$10$ |
| (2). $2$ notas de $R\$5$ e $2$ notas de $R\$10$ |
| (3). $5$ notas de $R\$2$ e $2$ notas de $R\$10$ |
| (4). $4$ notas de$R\$5$ e uma nota de$R\$10$ |
| (5). $5$ notas de $R\$2$ , $2$ notas de $R\$5$ e $1$ nota de $R\$10$ |
| (6). $10$ notas de $R\$2$ e $1$ nota de$R\$10$ |
| (7). $6$ notas de $R\$5$ |
| (8). $5$ notas de $R\$2$ e $4$ notas de $R\$5$ |
| (9). $10$ notas de $R\$2$ e 2 notas de $R\$5$ |
| (10). $15$ notas de $R\$2$ |

TABELA 12 – Solução geral para o problema 2, fonte: próprio autor

## 3.4 EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES DE QUATRO VARIÁVEIS

Seja a equação Diofantina linear $a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = k$, onde $a_1, a_2, a_3, a_4$ e $k$ são não inteiros nulos simultaneamente.

### 3.4.1 Condição de existência de solução

Utilizaremos a mesma idéia do teorema para equações com três variáveis, que garante que a equação $ax + by + cw = k$ tem solução se e somente se $d$ divide $k$ sendo $d = mdc(a, b, c)$.

**Teorema** A equação diofantinha linear $a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = k$ tem solução se e somente se $d$ divide $k$ sendo $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

**Demonstração**

($\Rightarrow$) Suponhamos que a quáterna de inteiros $(x_0, y_0, z_0, w_0)$ é uma solução inteira da equação então $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_4w_0 = k$ . Seja $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$ sabemos que $d \mid a_i i = 1, 2, 3, 4.$. Assim $d \mid a_1x_0, d \mid a_2y_0, d \mid a_3z_0$ e $d \mid a_4w_0$ logo $d \mid a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_4w_0 = k$. O que prova a ida.

($\Leftarrow$) Agora se $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$ divide $k$ então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $k = dm$.

Sejam $d_1 = mdc(a_1, a_2), d_2 = mdc(d_1, a_3)$ e $d_3 = mdc(d_2, a_4)$ então existem $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ inteiros tais que

$$\begin{cases} a_1k_1 + a_2k_2 = d_1 & \text{(i)} \\ d_1k_3 + a_3k_4 = d_2 & \text{(ii)} \\ d_2k_5 + a_4k_6 = d_3 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Substituindo (i) em (ii) temos $(ak_1 + a_2k_2)k_3 + a_3k_4 = d_2$ (iv).

E depois (iv) em (iii) temos $[ak_1k_3 + a_2k_2k_3 + a_3k_4]k_5 + a_4k_6 = d_3$ (v).

Multiplicando a equação (v) por $m$ e reescrevendo esta equação

$$a_1.\underbrace{(k_1k_3k_5m)}_{x_1}+a_2.\underbrace{(k_2k_3k_5m)}_{y_1}+a_3.\underbrace{(k_4k_5m)}_{z_1}+a_4.\underbrace{(k_6m)}_{w_1} = d_2m.$$

Mas como $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4) = mdc(mdc(a_1, a_2), a_3, a_4) = mdc(mdc(d_1, a_3), a_4) = mdc(d_2, a_4) = d_3$, segue que $(x_1, y_1, z_1, w_1)$ é uma solução inteira particular da equação.

### 3.4.2 Solução geral da equação diofantina linear de quatro variáveis:

Vamos proceder de forma análoga com que foi feito para encontrar a solução geral da equação diofantina linear de três variáveis.

**Proposição** A solução geral da equação diofantina é dada pela fórmula :

$$S = \{(x_0 + \left(\frac{a_2}{d_3}\right) t_3,\, y_0 - \left(\frac{a_1}{d_3}\right) t_3, z_0 - t_2, w_0 - t_1),\, t_1,\, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}\}$$

**Demonstração** Se a equação $a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = b$. possui solução então $d = mdc(a_1, a_2, a_3, a_4)$, onde $d$ divide $b$. Reduzindo essa equação para duas variáveis, considerando $a_1x + a_2y + a_3z = p\prime$ temos $p\prime + a_4w = b$ que possui solução, pois $mdc(1, a_4) = 1$ e $1 \mid b$.

A solução geral é $S_1 = \{p\prime_0 + \frac{a_4}{d_1}t_1$ e $w_0 - \frac{1}{d_1}t_1; t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

Como $mdc(1, a_1) = 1$ então escrevemos $S_1 = \{p\prime_0 + a_4t_1$ e $w_0 - t_1\ ;\ t_1 \in \mathbb{Z}\}$.

A partir dessa solução geral podemos escolher um $t_1$ conveniente para que $d_2 = mdc(a_1, a_2, a_3)$ divida $(p\prime_0 + a_4t_1)$.

Daremos continuidade para encontrar a solução geral da equação:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = p\prime \\ p\prime = p_0\prime + a_4.t_1 \end{cases}$$

Para isso faremos nova substituição considerando $a_1x + a_2y = p''$. Analisando a equação gerada pela substituição feita:

$$p'' + a_3z = p\prime_0 + a_4t_1$$

Assim como a anterior possui solução pois $mdc(1, a_3) = 1$ e temos como solução geral:

$$S_2 = \left\{p_0\prime\prime + (\frac{a_3}{d_2})t_2 \text{ e } z_0 - (\frac{1}{d_2})t_2;\ t_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

E como $mdc(1, a_3) = 1$, segue:

$$S_2 = \{p_0\prime\prime + a_3t_2 \text{ e } z_0 - 1t_2\ ; t_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Agora basta encontrar a solução geral da equação da equação $a_1x + a_2y = p''$

$p'' = p_0\prime\prime + a_3t_2$. Escolhendo um valor conveniente para $t_2$ que satisfaça $d_3 = mdc(a_1, a_2) \mid p_0\prime\prime + a_3t_2$. Assim a solução geral da equação $a_1x + a_2xy = p_0\prime\prime + a_3t_2$:

$$S_3 = \left\{x_0 + \frac{a_2}{d_3}t_3 \text{ e} y_0 - \frac{a_1}{d_3}t_3 \; ; t_3 \in \mathbb{Z}\right\}$$

Então a solução geral da equação original é:

$$S = \left\{x_0 + \frac{a_2}{d_3}t_3 \text{ e } y_0 - \frac{a_1}{d_3}t_3 \text{ e } z_0 - t_2, w_0 - t_1 \; ; t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}\right\}$$

A cada valor conveniente arbitrário aos parâmetros $t_1, t_2$ , gera uma nova solução geral, pois o valor de $z$ é obtido através do parâmetro $t_1$, no processo de descoberta da solução geral da equação gerada pela primeira substituição feita na equação original, além do valor atribuído ao parâmetro $t_2$, assim como os valores de $x$ e $y$ , são obtidos a partir do valor atribuído anteriormente a $t_1$, e um valor conveniente a $t_2$, no processo de descoberta da solução geral da nova equação gerada pela segunda substituição.

**Problema 3** Deseja-se efetuar um saque de $R\$30$ no caixa eletrônico, porém o mesmo esta abastecido apenas com notas de $R\$2$ , notas de $R\$5$, notas de $R\$10$ e notas de $\$20$. Quantas são as possíveis maneiras de sacar o dinheiro e quais são elas?

**Resolução** Podemos modelar o problema com a seguinte equação diofantina:

$2x + 5y + 10z + 20w = 30$, onde $x$ representa a quantidade notas de $R\$2$ e $y$ representa a quantidade de notas de $R\$5$ e $z$ representa a quantidade de notas de$R\$10$ e $y$ representa a quantidade de notas de $R\$20.$

Assim a equação diofantina de 4 variáveis será $2x + 5y + 10z + 20w = 30$ chamando por $p = 2x + 5y + 10z$ reescrevendo a equação temos $p + 20w = 30$.

Como o $mdc(1, 20) = 1$ e $1 \mid 30$ logo $p + 20w = 30$ admite solução. Vamos encontrar uma solução particular de $p + 20w = 1$. Tomando $p = -19$ e $w = 1$ claro que $1(-19) + 20(1) = 1$. Basta multipicar por $30$ em ambos lados obtemos a solução da equação anterior $1(-570) + 20(30) = 30$.

A solução desta é $\underline{\{p = -570 + 20t, w = 30 - t, \; t \in \mathbb{Z}\} \text{ (I)}}$

Voltando na substituição feita que era $p = 2x+5y+10z$ e chamando $p\prime = 2x+5y$ ficamos com $p = p\prime+10z$. Mas sabemos que $p = -570+20t$ assim $p\prime+10z = -570+20t$.

Sendo $mdc(1, 10) = 1$ e $1 \mid (-570+20t)$ logo admite solução. Novamante vamos procurar as soluções particulares.

Uma delas $1(-9)+10(1)=1$, multiplicamos ambos os lados por $(-570+20t)$ temos $1(5130-180t)+10(-570+20t)=-570+20t$.

Neste caso a solução $\underline{\{p\prime=5130-180t+10t_1, z=-570+20t-1t_1, t_1\in\mathbb{Z}\}}$ (II)

Assim $x+5y=p\prime \Rightarrow 2x+5y=5130-180t+10t_1$ e com $mdc(2,5)=1$ e $1\mid p\prime$, logo $2(-2)+5(1)=1$, multiplicamos ambos os lados por $(5130-180t+10t_1)$

$2(-10260+360t-20t_1)+5(5130-180t+10t_1)=p\prime$

Finalmente compondo a solução para esta equação:

$\underline{\{x=(-10260+360t-20t_1+5t_2), y=(5130-180t+10t_1-2t_2), t_2\in\mathbb{Z}\}}$ (III)

Assim organizando as equações temos:

| | |
|---|---|
| $x=-10260+360t-20t_1+5t_2,$ | $y=5130-180t+10t_1-2t_2$ |
| $z=-570+20t+t_1$ | $w=30-t$ |

Estamos apenas interessados nas soluções inteiras. Assim de (I) temos que $p=-570+20t\geq 0\rightarrow 20t\geq 570$ e $w=30-t\geq 0\rightarrow t\leq 30$, logo $t\geq 28.5$ e $t\leq 30$.

Então $t$ assume valores: $29\leq t\leq 30$ sendo $t$ inteiro logo $t=\{29,30\}$.

Substituindo em (II):

**Primeiro caso para** $t=29$

Obtemos

$$\begin{array}{c|c} p\prime=5130-180t+10t_1 & z=-570+20t-1t_1 \\ 5130-180(29)+10t_1\geq 0 & -570+20(29)-1t_1\geq 0 \\ -90+10t_1\geq 0 & 10-1t_1\geq 0 \\ t_1\geq 9 & t_1\leq 10 \end{array}$$

encontramos $t_1=\{9,10\}$.

Voltando com $t=29,\ t_1=9$ em (III):

$$\begin{array}{c|c} x=(-10260+360t-20t_1+5t_2) & y=(5130-180t+10t_1-2t_2) \\ (-10260+360(29)-20(9)+5t_2)\geq 0 & (5130-180(29)+10(9)-2t_2)\geq 0 \\ (-10260+10440-180+5t_2)\geq 0 & (5130-5220+90-2t_2)\geq 0 \\ 0+5t_2\geq 0 & 0-2t_2\geq 0 \\ t_2\geq 0 & t_2\leq 0 \end{array}$$

assim $t_2=0$

Tomando $t = 29,\ t_1 = 9$ e $t_2 = 0$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$ |
| $x = -10260 + 360(29) - 20(9) + 5(0),$ | $y = 5130 - 180(29) + 10(9) - 2(0)$ |
| $x = 0,$ | $y = 0$ |
| $z = -570 + 20t + t_1$ | $w = 30 - t$ |
| $z = -570 + 20(29) - 1(9)$ | $w = 30 - 29$ |
| $z = 1$ | $w = 1$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $1$ nota de $R\$10$ |
| $1$ nota de $R\$20$ |

TABELA 13 – Solução 1 do problema 3, fonte:próprio autor.

Voltando com $t = 29$ e $t_1 = 10$ em (III) encontramos:

| | |
|---|---|
| $x = (-10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2)$ | $y = (5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2)$ |
| $(-10260 + 360(29) - 20(10) + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 180(29) + 10(10) - 2t_2) \geq 0$ |
| $(-10260 + 10440 - 200 + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 5220 + 100 - 2t_2) \geq 0$ |
| $20 + 5t_2 \geq 0$ | $10 - 2t_2 \geq 0$ |
| $t_2 \geq 4$ | $t_2 \leq 5$ |

Logo $t_2 = \{4, 5\}$

Tomando $t = 29,\ t_1 = 10$ e $t_2 = 4$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$ |
| $x = -10260 + 360(29) - 20(10) + 5(4),$ | $y = 5130 - 180(29) + 10(10) - 2(4)$ |
| $x = 0,$ | $y = 2$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$ | $w = 30 - t$ |
| $z = -570 + 20(29) - (10)$ | $w = 30 - 29$ |
| $z = 0$ | $w = 1$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $0$ notas de $R\$2$ |
| $2$ notas de $R\$5$ |
| $0$notas de$R\$10$ |
| $1$ nota de $R\$20$ |

TABELA 14 – Solução 2 do problema 3, fonte:próprio autor.

Tomando $t = 29,\ t_1 = 10$ e $t_2 = 5$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$ |
| $x = -10260 + 360(29) - 20(10) + 5(5),$ | $y = 5130 - 180(29) + 10(10) - 2(5)$ |
| $x = 5,$ | $y = 0$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$ | $w = 30 - t$ |
| $z = -570 + 20(29) - 1(10)$ | $w = 30 - 29$ |
| $z = 0$ | $w = 1$ |

Temos que o saque de \$30 reais será feito:

| |
|---|
| 5 notas de $R\$2$ |
| 0 notas de $R\$5$ |
| 0 notas de $R\$10$ |
| 1 nota de $R\$20$ |

TABELA 15 – Solução 3 do problema 3, fonte:próprio autor.

**Segundo caso para** $t = 30$

| | |
|---|---|
| $p\prime = 5130 - 180t + 10t_1$ | $z = -570 + 20t - 1t_1$ |
| $5130 - 180t + 10t_1 \geq 0$ | $-570 + 20t - 1t_1 \geq 0$ |
| $5130 - 180(30) + 10t_1 \geq 0$ | $-570 + 20(30) - 1t_1 \geq 0$ |
| $-270 + 10t_1 \geq 0$ | $10 - 1t_1 \geq 0$ |
| $t_1 \geq 27$ | $t_1 \leq 30$ |

Logo $t_1 = \{27, 28, 29, 30\}$

Voltando em (III) com $t = 30$ e $t_1 = 27$:

| | |
|---|---|
| $x = (-10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2)$ | $y\ = (5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2)$ |
| $(-10260 + 360(30) - 20(27) + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 180(30) + 10(27) - 2t_2) \geq 0$ |
| $(-10260 + 10800 - 540 + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 5400 + 270 - 2t_2) \geq 0$ |
| $0 + 5t_2 \geq 0$ | $0 - 2t_2 \geq 0$ |
| $t_2 \geq 0$ | $t_2 \leq 0$ |

As desigualdades valem para $t_2 = 0$.

Tomando $t=30,\ t_1=27$ e $t_2=0$ temos:

| | |
|---|---|
| $x=-10260+360t-20t_1+5t_2,$ | $y=5130-180t+10t_1-2t_2$ |
| $x=-10260+360(30)-20(27)+5(0),$ | $y=5130-180(30)+10(27)-2(0)$ |
| $x=0,$ | $y=0$ |
| $z=-570+20t-t_1$ | $w=30-t$ |
| $z=-570+20(30)-(27)$ | $w=30-30$ |
| $z=3$ | $w=0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $0$ notas de $R\$2$ |
| $0$ notas de $R\$5$ |
| $3$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 16 – Solução 4 do problema 3, fonte:próprio autor.

Voltando com $t=30$ e $t_1=28$ em (III):

| | |
|---|---|
| $x=(-10260+360t-20t_1+5t_2)$ | $y=(5130-180t+10t_1-2t_2)$ |
| $(-10260+360(30)-20(28)+5t_2)\geq 0$ | $(5130-180(30)+10(28)-2t_2)\geq 0$ |
| $(-10260+10800-560+5t_2)\geq 0$ | $(5130-5400+280-2t_2)\geq 0$ |
| $-20+5t_2\geq 0$ | $10-2t_2\geq 0$ |
| $t_2\geq 4$ | $t_2\leq 5$ |

Logo: $t_2=\{4,5\}$

Tomando $t=30,\ t_1=28$ e $t_2=4$ temos:

| | |
|---|---|
| $x=-10260+360t-20t_1+5t_2,$ | $y=5130-180t+10t_1-2t_2$ |
| $x=-10260+360(30)-20(28)+5(4),$ | $y=5130-180(30)+10(28)-2(4)$ |
| $x=0,$ | $y=2$ |
| $z=-570+20t-t_1$ | $w=30-t$ |
| $z=-570+20(30)-(28)$ | $w=30-30$ |
| $z=2$ | $w=0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $0$ notas de $R\$2$ |
| $2$ notas de $R\$5$ |
| $2$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 17 – Solução 5 do problema 3, fonte:próprio autor.

Tomando $t = 30,\ t_1 = 28$ e $t_2 = 5$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$ |
| $x = -10260 + 360(30) - 20(28) + 5(5),$ | $y = 5130 - 180(30) + 10(28) - 2(5)$ |
| $x = 5,$ | $y = 0$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$ | $w = 30 - t$ |
| $z = -570 + 20(30) - (28)$ | $w = 30 - 30$ |
| $z = 2$ | $w = 0$ |

Temos que o saque de \$30 reais será feito:

| |
|---|
| $5$ notas de $R\$2$ |
| $0$ notas de $R\$5$ |
| $2$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 18 – Solução 6 do problema 3, fonte:próprio autor.

Voltando em (III) com $t = 30$ e $t_1 = 29$

| | |
|---|---|
| $x = (-10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2)$ | $y = (5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2)$ |
| $(-10260 + 360(30) - 20(29) + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 180(30) + 10(29) - 2t_2) \geq 0$ |
| $(-10260 + 10800 - 580 + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 5400 + 290 - 2t_2) \geq 0$ |
| $-40 + 5t_2 \geq 0$ | $20 - 2t_2 \geq 0$ |
| $t_2 \geq 8$ | $t_2 \leq 10$ |

Logo $t_2 = \{8, 9, 10\}$

Calculando para $t = 30,\ t_1 = 29$ e $t_2 = 8$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$ |
| $x = -10260 + 360(30) - 20(29) + 5(8),$ | $y = 5130 - 180(30) + 10(29) - 2(8)$ |
| $x = 0,$ | $y = 4$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$ | $w = 30 - t$ |
| $z = -570 + 20(30) - (29)$ | $w = 30 - 30$ |
| $z = 1$ | $w = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $0$ notas de $R\$2$ |
| $4$ notas de $R\$5$ |
| $1$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 19 – Solução 7 do problema 3, fonte:próprio autor.

Para $t = 30,\ t_1 = 29$ e $t_2 = 9$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$<br>$x = -10260 + 360(30) - 20(29) + 5(9),$<br>$x = 5,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$<br>$y = 5130 - 180(30) + 10(29) - 2(9)$<br>$y = 2$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$<br>$z = -570 + 20(30) - (29)$<br>$z = 1$ | $w = 30 - t$<br>$w = 30 - 30$<br>$w = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $5$ notas de $R\$2$ |
| $2$ notas de $R\$5$ |
| $1$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 20 – Solução 8 do problema 3, fonte:próprio autor.

Voltando com $t = 30,\ t_1 = 29$ e $t_2 = 10$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$<br>$x = -10260 + 360(30) - 20(29) + 5(10),$<br>$x = 0,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$<br>$y = 5130 - 180(30) + 10(29) - 2(10)$<br>$y = 0$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$<br>$z = -570 + 20(30) - (29)$<br>$z = 1$ | $w = 30 - t$<br>$w = 30 - 30$<br>$w = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $10$ notas de $R\$2$ |
| $0$ notas de $R\$5$ |
| $1$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 21 – Solução 9 do problema 3, fonte:próprio autor.

Substituindo $t = 30$ e $t_1 = 30$ em (III):

| | |
|---|---|
| $x = (-10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2)$ | $y = (5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2)$ |
| $(-10260 + 360(30) - 20(30) + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 180(30) + 10(30) - 2t_2) \geq 0$ |
| $(-10260 + 10800 - 600 + 5t_2) \geq 0$ | $(5130 - 5400 + 300 - 2t_2) \geq 0$ |
| $-60 + 5t_2 \geq 0$ | $30 - 2t_2 \geq 0$ |
| $t_2 \geq 12$ | $t_2 \leq 15$ |

Logo $t_2 = \{12, 13, 14, 15\}$.

Voltando com $t = 30,\ t_1 = 30$ e $t_2 = 12$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$ |
| $x = -10260 + 360(30) - 20(30) + 5(12),$ | $y = 5130 - 180(30) + 10(30) - 2(12)$ |
| $x = 0,$ | $y = 6$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$ | $w = 30 - t$ |
| $z = -570 + 20(30) - (30)$ | $w = 30 - 30$ |
| $z = 0$ | $w = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $0$ notas de $R\$2$ |
| $6$ notas de$R\$5$ |
| $0$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 22 – Solução 10 do problema 3, fonte:próprio autor.

Voltando com $t = 30,\ t_1 = 30$ e $t_2 = 13$ encontramos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$ |
| $x = -10260 + 360(30) - 20(30) + 5(13),$ | $y = 5130 - 180(30) + 10(30) - 2(13)$ |
| $x = 5,$ | $y = 4$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$ | $w = 30 - t$ |
| $z = -570 + 20(30) - (30)$ | $w = 30 - 30$ |
| $z = 0$ | $w = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $5$ notas de $R\$2$ |
| $4$ notas de $R\$5$ |
| $0$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de R$$20$ |

TABELA 23 – Solução 11 do problema 3, fonte:próprio autor.

Voltando com $t = 30,\ t_1 = 30$ e $t_2 = 14$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$<br>$x = -10260 + 360(30) - 20(30) + 5(14),$<br>$x = 10,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$<br>$y = 5130 - 180(30) + 10(30) - 2(14)$<br>$y = 2$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$<br>$z = -570 + 20(30) - (30)$<br>$z = 0$ | $w = 30 - t$<br>$w = 30 - 30$<br>$w = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $10$ notas de $R\$2$ |
| $2$ notas de $R\$5$ |
| $0$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 24 – Solução 12 do problema 3, fonte:próprio autor.

Finalmente para $t = 30,\ t_1 = 30$ e $t_2 = 15$ temos:

| | |
|---|---|
| $x = -10260 + 360t - 20t_1 + 5t_2,$<br>$x = -10260 + 360(30) - 20(30) + 5(15),$<br>$x = 15,$ | $y = 5130 - 180t + 10t_1 - 2t_2$<br>$y = 5130 - 180(30) + 10(30) - 2(15)$<br>$y = 0$ |
| $z = -570 + 20t - t_1$<br>$z = -570 + 20(30) - (30)$<br>$z = 0$ | $w = 30 - t$<br>$w = 30 - 30$<br>$w = 0$ |

Temos que o saque de $\$30$ reais será feito:

| |
|---|
| $15$ notas de $R\$2$ |
| $0$ notas de $R\$5$ |
| $0$ notas de $R\$10$ |
| $0$ notas de $R\$20$ |

TABELA 25 – Solução 13 do problema 3, fonte:próprio autor.

Com base estudos feitos, chegamos à conclusão que para sacar $\$30$ , em um caixa eletrônico onde só existem cédulas de $R\$2$, $R\$5$ ,$R\$10$ e $R\$20$ temos $13$ possíveis saques

Portanto as possíveis soluções de saque para quatro notas é

| |
|---|
| (1) $1$ notas de $\$10$ e 1 nota de $R\$20$ |
| (2) $2$ notas de $R\$5$ e 1 nota de $R\$20$ |
| (3) $5$ notas de $R\$2$ e $1$ notas de $R\$20$ |
| (4) $2$ notas de$R\$5$ e 2 nota de$R\$10$ |
| (5) $5$ notas de $R\$2$ , $2$ notas de $R\$10$ |
| (6) $4$ notas de $R\$5$ e $1$ nota de$R\$10$ |
| (7) $5$ notas de $R\$2$ e 2 notas de $R\$5$ e uma nota de $R\$10$ |
| (8) $10$ notas de $R\$2$ e $1$ notas de $R\$10$ |
| (9) $6$ notas de $R\$5$ |
| (10) $3$ notas de $R\$10$ |
| (11) $5$ notas de $R\$2$ e 4 notas de $R\$5$ |
| (12) $10$ notas de $R\$2$ e 2 notas de $R\$5$ |
| (13) $15$ notas de $R\$2$ |

TABELA 26 – Solução geral para o problema 2, fonte: próprio autor

# 4 CONCLUSÃO

Este trabalho a primórdio é levar aos alunos do ensino médio um importante ramo da matemática que são as Equações Diofantinas Lineares de Primeira Ordem. Para esse processo de aprendizagem foi utilizado um problema do cotidiano, para instigar o aluno da real importância da matemática no nosso cotidiano, despertando no mesmo a curiosidade e a capacidade de resolver problemas do dia a dia.

Abordando a saque dos caixas eletrônicos como meio real para introdução e estudos das equações. Como são feitos os saques e quais são todas as possíveis soluções para os mesmos. Levando o aluno a levar seu cotidiano a respostas na matemática.

Para essa introdução as equações fizemos um estudo em alguns conceitos fundamentais para total entendimento das Equações Diofantinas. Foi realizado um estudo pontual nos conceitos necessários em teoria dos números, visando total entendimento do aluno na sala de aula, para poder aplicar as equações diofantinas. Dando um suporte para resolução, entendimento e a aplicação da mesma.

Encontrando a resolução de equações num problema dos saques eletrônicos, se o mesmo é possível de ser executado com as cédulas disponíveis, se pode ser feito o saque com notas diferentes e quais todos possíveis saques para um valor fixado. Chegando em todas as possibilidades e mostrando quais os possíveis saques, quando o caixa estava alimentado com duas cédulas, três cédulas e quatro cédulas de valores diferentes, fazendo uma ligação com as equações diofantinas.

# REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. Edição: Editora Nobel. [S.l.]: São Paulo, 1981. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 21.

BOYER, C.; MERZBACH, U. Edição: Ed. Blucher. [S.l.]: São Paulo, 2012. Citado 1 vez na página 19.

CAMPOS, G. D. **Equações Diofantinas**. UFMT: [s.n.], 2013. Citado 1 vez na página 15.

DE PAULA, J. **Tópicos de Artimética: equações Diofantinas**. UFPR: [s.n.], 2014. Citado 1 vez na página 16.

DEUS, N. S. d. **Equações Diofantinas Lineares e o GPS: Nova Conexão Curricular**. UFBA: [s.n.], 2017. Citado 1 vez na página 11.

DOMINGUES, H. H. Edição: Editora Atual. [S.l.]: São Paulo, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 17, 25.

LA ROQUE, G.; PITOMBEIRA, J. Uma Equação Diofantina e Suas Resoluções. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, SP, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 11, 20.

MAIA, L. F. **Equações Diofantinas**. UFPA: [s.n.], 2018. Citado 1 vez na página 11.

SANTOS, J. d. O. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998. Citado 1 vez na página 15.

SILVA, A. V. d. **Uso das Equações Diofantinas Lineares no Ensino Fundamental**. UFAL: [s.n.], 2013. Citado 1 vez na página 11.