UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

JOSENILDO PADRE DE ARAÚJO

EXPLORANDO A SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA E MATERIAIS CONCRETOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

CAMPINA GRANDE
2023

JOSENILDO PADRE DE ARAÚJO

EXPLORANDO A SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA E MATERIAIS CONCRETOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT/UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
2023

A663e Araujo, Josenildo Padre de.
Explorando a semelhança de figuras planas com o auxílio do GeoGebra e materiais concretos [manuscrito] : uma abordagem didática / Josenildo Padre de Araujo. - 2023.
90 p.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática - CCT. "

1. Geometria. 2. Figuras planas. 3. Proposta didática. 4. Ensino-aprendizagem. 5. Uso de softwares. I. Título

21. ed. CDD 516.15

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

JOSENILDO PADRE DE ARAÚJO

EXPLORANDO A SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA E MATERIAIS CONCRETOS: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT/UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 14/07/2023

BANCA EXAMINADORA

Luciana R. Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas - UEPB
(Orientadora)

Israel Buriti Galvão

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão - UEPB
(Membro interno)

Claudilene Gomes da Costa

Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa - UFPB
(Membro externo)

A Deus, por me dar força, sabedoria e coragem para superar os obstáculos; à minha família, especialmente a minha Mãe que sempre acreditou em mim; à minha esposa que diariamnte me apoiou nessa caminhada e a todos os amigos que torceram pela minha vitória.

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho foi a realização de um grande sonho e, na ocasião, gostaria de agradecer a todos que contribuiram para realização deste.

Agradeço imensamente à minha orientadora, Professora Dra. Luciana Roze de Freitas, por sua competência, dedicação, disponibilidade, paciência e acima de tudo, por todas as valiosas sugestões que foram imprescindíveis para a realização deste trabalho.

A toda equipe de professores do PROFMAT, que com muita competência e dedidação, transmitiram seus ensinamentos, contribuindo para minha formação e para que eu me tornasse um profissional mais capacitado podendo exercer com maestria a minha docência.

Aos colegas de mestrado, pelo compartilhamento de conhecimentos nas várias noites de estudos, especialmente aos colegas, Evanduir, Aran, Railson e Gleyton por estarem comigo durante todo o decorrer do curso, pela amizade, pela ajuda nos ensinamentos partilhados que foram essenciais e acima de tudo pela paciência em tirar minhas dúvidas quando necessitava.

Por fim, agradeço à minha família, amigos e colegas de trabalho pelo apoio, força, por acreditarem em mim e por terem contribuído de alguma forma para que eu chegasse ao final desta jornada.

A todos, os meus sinceros agradeciemntos!

RESUMO

A semelhança de figuras planas é um tema de grande importância dentro da Geometria, tanto pelas diversas aplicações, quanto pela relação direta com o mundo em que vivemos. Nesse sentido, o presente trabalho, tem como objetivo fazer um estudo sobre semelhança de figuras planas e apresentar propostas didáticas e ferramentas que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem do tema. O estudo foi realizado com alunos do 9° Ano B do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, Barão do Abiaí. A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho, com relação aos objetivos, caracteriza-se como exploratória e descritiva. Quanto aos meios técnicos utilizados, caracteriza-se como pesquisa bibliográfica e estudo de caso e em relação ao método de abordagem, caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa e quantitativa. Já os instrumentos empregados na coleta dos dados da pesquisa foram atividades realizadas com o auxílio dos softwares GeoGebra, OpenBoard, materiais concretos e um questionário diagnóstico. De modo geral, verificou-se que as atividades de ensino propostas neste trabalho e os processos lúdicos para aplicação prática do conteúdo de semelhança, além de despertarem a atenção e a motivação dos alunos, proporcionou uma maior interação entre estes e o professor em sala de aula. Concluiu-se também que a discussão de questões práticas e a aplicação de metodologias mais dinâmicas, como uso de softwares, são estratégias didáticas eficientes, que se bem empregadas, contribuem para uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: geometria; figuras planas; proposta didática; ensino-aprendizagem; uso de softwares.

ABSTRACT

The similarity of plane figures is a topic of great importance in Geometry, both for its various applications and for its direct relation with the world in which we live. In this sense, the present paper aims to make a study on similarity of plane figures and present didactic proposals and tools that assist in the teaching-learning process. The study was carried out with the Barão do Abiaí Elementary and High School 9th graders. The methodology used for the development of this study, in relation to the objectives, is characterized as exploratory and descriptive. As for the technical means used, it is characterized as a bibliographic research and case study, and in relation to the method of approach, it is characterized as a qualitative and quantitative research. As for the instruments used in the collection of research data, activities were carried out with the aid of the GeoGebra software, OpenBoard, concrete materials and a diagnostic questionnaire. In general, it was verified that the teaching activities proposed in this paper and the processes for the practical application of the similarity content, in addition to raising awareness, attention and motivation of the students, provided a greater interaction between them and the teacher in the classroom. It was also concluded that the discussion of practical issues and the more dynamic methodologies, such as the use of software, are efficient didactic strategies, which, if well used, contribute to meaningful learning.

Keywords: geometry; plane figures; didactic proposal; teaching-learning; use of software.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC - BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR
ENEM - EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO
PCN - PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a educação no Brasil vem passando por muitas transformações tendo como objetivo principal uma educação de qualidade, que atenda às necessidades da sociedade de um modo geral. E pensar numa educação de qualidade que promova a ascensão do indivíduo no campo dos estudos é um esforço conjunto dos governos, gestores educacionais e toda comunidade acadêmica.

No entanto, para que tenhamos uma educação capaz de transformar o cidadão é necessário que o processo de aprendizagem do indivíduo seja significativo. Por outro lado, sabemos que as dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de aprendizagem são imensas, e quando se fala em Geometria essas dificuldades ainda são maiores.

Um dos fatores para essa potencialização das dificuldades na aprendizagem de Geometria por parte dos alunos no ensino básico, está no fato de que seus conteúdos no livro didático, serem, na maioria das vezes, abordados nos últimos capítulos e por conta disso passam despercebidos ou falta tempo para serem lecionados.

E quando se trata de semelhança de figuras planas, o problema é o mesmo. Nesse sentido, a escolha desse tema, justifica-se pela importância do estudo de semelhança de figuras planas para a formação básica e das diversas aplicações na vida cotidiana do aluno, como também, é um dos conteúdos de Geometria em que os alunos sentem dificuldade no processo de aprendizagem, principalmente no tocante à compreensão da semelhança através da redução ou ampliação de figuras.

Além disso, trata-se de um conteúdo rico em aplicações na Geometria, especialmente as propriedades de semelhança de triângulos, que podem ser utilizadas nas demonstrações de vários resultados, tais como o Teorema das cordas, Relações métricas no triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras. Permite também explorar e reforçar outros conceitos da Geometria, como por exemplo, o estudo de áreas, perímetros, ângulos e etc. Por se tratar de um conteúdo presente no cotidiano, pode também ser trabalhado de forma contextualizada, motivando a aprendizagem não tradicional, quando bem trabalhado em sala de aula.

Este trabalho apresenta, além da sugestão de algumas atividades de semelhança de figuras planas com o uso de recursos tecnológicos e materiais concretos, o resultado de uma pesquisa realizada a partir de um estudo de caso com base na aplicação de atividades práticas e do relato da experiência vivida por uma turma de alunos do 9° Ano do Ensino Fundamental.

Portanto, mediante aos resultados desta pesquisa, será possível entender a eficácia de unir a tecnologia com atividades práticas. Para tanto, a metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho, com relação aos objetivos, caracteriza-se como exploratória e descritiva. É exploratória por objetivar uma familiarização com o objeto a ser estudado, no caso desta pesquisa, o estudo de semelhança de figuras planas com o uso dos softwares GeoGebra, OpenBoard e com o uso de materiais concretos. É descritiva porque pretende-se descrever se o uso destes softwares e dos materiais concretos são recursos capazes de facilitar o processo de aprendizagem.

Quanto aos meios técnicos utilizados, caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica e estudo de caso. A utilização da pesquisa bibliográfica visa conduzir a realização da fundamentação teórica sobre o que já foi estudado e publicado a respeito do estudo de semelhança. Já com o estudo de caso utilizado, busca-se apresentar um estudo mais aprofundado sobre semelhança a partir da utilização de softwares computacionais e materiais concretos, por meio das atividades práticas aplicadas numa turma de alunos do 9° Ano do Ensino Fundamental.

Em relação ao método de abordagem, caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa e quantitativa. É qualitativa por ter o ambiente de estudo como fonte direta dos dados. E quantitativa, por ter sido aplicada duas avaliações com a finalidade de obter dados para facilitar a interpretação dos resultados. Já os instrumentos empregados na coleta dos dados da pesquisa foram atividades realizadas com o auxílio dos softwares GeoGebra, OpenBoard, materiais concretos e um questionário diagnóstico.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Fazer um estudo sobre semelhança de figuras planas e apresentar propostas didáticas e ferramentas que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem do tema.

1.1.2 Objetivos específicos

- Averiguar se o uso de softwares computacionais despertou mais interesse nos alunos para aprendizagem do conteúdo;
- Aferir o desempenho dos alunos no conteúdo a partir da utilização dos softwares GeoGebra, OpenBoard e dos materiais concretos;
- Fazer uma pesquisa bibliográfica a fim de realizar um estudo aprofundado do tema;
- Apresentar por meio da utilização dos softwares computacionais algumas sugestões de atividades que venham contribuir para a aprendizagem dos alunos;
- Tornar a aprendizagem matemática, com o uso dos recursos tecnológicos, mais atrativa e participativa.

1.2 Estrutura do trabalho

O presente trabalho encontra-se estruturado em seis capítulos. O Capítulo 1 apresenta a introdução, e nele encontra-se o objetivo geral, a metodologia e justificativa do tema;

o Capítulo 2 por sua vez, refere-se a fundamentação teórica contendo uma abordagem histórica sobre o estudo de semelhança, algumas recomendações dos PCN e BNCC relacionadas ao tema, além disso, é tratado um pouco sobre semelhança de figuras no cotidiano dos alunos e o uso de tecnologia em sala de aula; o Capítulo 3 traz a definição de semelhança de figuras planas, além dos principais resultados sobre o tema, também expõe algumas demonstrações e representações gráficas; o Capítulo 4 apresenta as propostas de atividades com situações-problema envolvendo semelhança, além de uma investigação sobre as propriedades de áreas, perímetros e aplicação de semelhança em questões do ENEM; o Capítulo 5 traz a aplicação da pesquisa e a análise dos resultados desta experiência realizada com os alunos e por fim, o Capítulo 6 exibe as considerações finais com a conclusão sobre o trabalho desenvolvido nos capítulos anteriores.

2 ENSINO DE SEMELHANÇA

Neste capítulo apresentamos alguns fatos históricos sobre semelhança de figuras planas e buscamos compreender o que os documentos oficiais como os PCN e a BNCC orientam acerca desse tema. Além disso, falamos sobre uso de recursos tecnológicos como auxílio didático em sala de aula.

2.1 Fatos históricos sobre semelhança

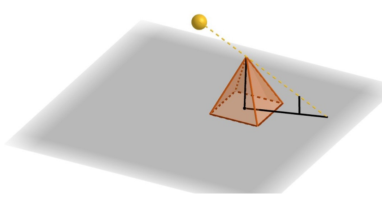
Sabe-se que semelhança de figuras planas é um assunto muito estudado desde épocas remotas, especialmente pelos Babilônios que, por volta de 2000 - 1600 a.C., já possuiam o conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes eram proporcionais (EVES, 2011 p. 60-61).

Quando falamos de semelhança de figuras planas, não podemos deixar de citar o mais importante estudioso do assunto, que foi Tales de Mileto.

Segundo Eves (2011), Tales de Mileto foi considerado um dos gênios da sua época, começou sua vida como um mercador e, após acumular muita riqueza, passou a dedicar-se ao estudo e as viagens. Ele nasceu por volta de 624 a.C. na Cidade de Mileto, onde passou sua infância até atingir a fase adulta. Daí, viveu por um bom tempo no Egito e lá despertou muita admiração ao calcular a altura da pirâmide de Quéops usando apenas sua sombra.

Relatos históricos apontam que existem duas versões de como Tales conseguiu calcular a altura da pirâmide. A primeira versão foi dada por Hierônimos, discípulo de Aristóteles 384 - 322 a.C., a qual diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que essa era igual a altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco 46 - 120 d.C., diz que ele fincou uma vara verticalmente ao chão e usou semelhança de triângulos (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Pirâmide e o Teorema de Tales



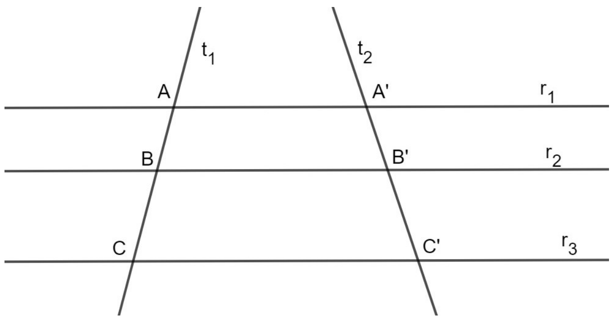
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Entretanto, ambas as versões dadas não relatam como o matemático obteve a medida do comprimento da sombra da pirâmide, isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide. Essa foi uma das principais aplicações de semelhança de figuras planas e, a partir desse estudo, Tales desenvolveu um dos resultados clássicos da

Geometria, a saber, o Teorema de Tales, que se refere à intersecção entre retas paralelas e transversais, onde estas formam segmentos proporcionais.

Tales defendia que a luz proporcionada pelo sol chegava à Terra de forma diagonal, ou seja, inclinada. Foi seguindo essa ideia que ele conseguiu identificar uma situação de proporcionalidade que relaciona as retas paralelas e as transversais.

Figura 2.2 – Feixe de paralelas e duas transversais



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Na figura acima, o feixe de retas é formado por três retas paralelas r_1, r_2 e r_3 e por duas retas transversais t_1 e t_2. Mas outros feixes podem ser formados com mais retas paralelas em um mesmo plano.

O Teorema de Tales segue a ideia de que, se existem duas retas transversais e estas são cortadas por retas paralelas, a razão entre quaisquer dois segmentos encontrados em uma das transversais será igual a razão encontrada nos dois segmentos correspondentes da outra tranversal.

No exemplo dos feixes de retas mostrado acima, na Figura 2.2, de acordo com o Teorema de Tales, podemos encontrar as seguintes razões:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}. \tag{2.1}$$

Como veremos no Capítulo 3, o Teorema de Tales pode ser utilizado para demonstrar as propriedades de semelhança de triângulos.

Outro estudioso de grande destaque no estudo de semelhança, mais especificamente a semelhança de triângulos, foi Pitágoras.

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, no mar Egeu, Grécia, por volta de 582 a. C., filho de um rico comerciante, sua vida e suas ideias são uma mistura de lenda e história real (FRAZÃO, 2023, p. 1).

Na adolescência, aos 16 anos de idade, Ele se mudou para a Cidade de Mileto, onde vivia o maior sábio daquela época, Tales de Mileto. Lá estudou e aprendeu muito com Tales. Já adulto, Pitágoras vai em busca de novos conhecimentos, como operações com números e algumas ideias sobre ciência e religião.

Em seu clássico Teorema, Pitágoras afirma que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. A hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo, ou seja, é o lado oposto ao ângulo reto. No Capítulo 3 deste trablaho, apresentamos o Teorema de Pitágoras e sua demonstração através das relações métricas no triângulo retângulo e dos critérios de semelhança.

2.2 Orientações dos docuementos oficiais

Nesta seção tratamos dos documentos oficiais que estabelecem as normas e diretrizes para a Educação Básica, buscando compreender as orientações acerca do ensino de semelhança.

Inicialmente vamos falar dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para o Ensino Fundamental anos finais. Na sequência passamos a tratar de outro documento importante que norteia a Educação Básica no Brasil, que é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm a incubência de fornecer elementos para fomentar o debate nacional sobre o ensino desse componente, além de socializar informações e resultados de pesquisas. Com isso, os PCN

> [...] explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas (BRASIL, 1998, p. 15).

Estudar Geometria, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, é de fundamental importância, pois os conceitos geométricos constituem parte indispensável do currículo de Matemática e através deles o aluno consegue desenvolver-se, aprimorando sua capacidade de compreender, descrever e além disso, de forma organizada, é capaz de representar o mundo ao seu redor.

Com isso, podemos dizer que o estudo de Geometria é, segundo Brasil (1998), um campo fértil para trabalhar com situações-problema, que é algo pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente, pois contribui para o aluno observar, perceber semelhanças, diferenças e identificar regularidades.

A Matemática tem um papel importante na forma de compreender o mundo e na construção do conhecimento humano, assim como na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Logo, no campo da Geometria, mais precisamente no conteúdo de semelhança, isso fica evidente pelo fato da Geometria fazer parte do cotidiano das pessoas, pois a semelhança e toda Geometria, revela-se em várias situações no mundo que nos cerca. Podemos encontrar propriedades de semelhança, por exemplo, no estudo de escalas, plantas baixas, mapas, ampliação ou redução de figuras e fotos. Além disso é possível estabelecer relações com outros conteúdos da matemática, tais como proporcionalidades, relações métricas entre lados de um triângulo, entre outros.

Desta forma os PCN afirmam que

> O ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança (BRASIL, 1998, p. 81 - 82).

Embora o ensino de Geometria, através da semelhança de figuras planas, tenha sua importância pelo fato de estar presente em situações cotidianas e nas mais diversas profissões, como na Engenharia, na Arquitetura, na Geografia, etc., o conteúdo de Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática, sendo confundido, muitas vezes, com o estudo de medidas.

Isso ocorre pelo fato do ensino de Geometria estar pautado no método tradicional, onde o livro didático é o único instrumento disponível para o professor ministrar suas aulas. Logo, é importante que o professor em sala de aula veja a necessidade do desenvolvimento de novas propostas metodológicas para transmitir o conteúdo de Geometria de forma que possa proporcionar condições mais favoráveis para a aprendizagem do aluno.

Já, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), trata-se de um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, (BRASIL, 2018, p. 7).

Considerado um dos mais importantes marcos legais da educação brasileira, a Base Nacional Comum Curricular, dentre outros aspectos, propõe uma mudança na concepção do ensino de matemática na escola, rompendo com a fragmentação dos conteúdos e estabelecendo competências mínimas essenciais na formação do aluno. Com isso pode-se dizer que a BNCC tem por base, a formação humana e integral do aluno, levando em consideração a função social da escola na construção do conhecimento e de uma sociedade justa, igualitária, democrática e inclusiva.

No que diz respeito ao desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, a BNCC aponta que

> é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.(BRASIL, 2018, p. 298).

De forma análoga ao que ocorre na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos, (BRASIL, 2018, p. 298).

Podemos dizer que esses significados são frutos das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos matemáticos e o seu cotidiano. É nesta fase que precisa consolidar a linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, tornando o aluno capaz de representar e argumentar nas mais diversas situações.

Em relação ao pensamento geométrico, de acordo com Brasil (2018), os alunos devem desenvolver habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança, (BRASIL, 2018, p. 527).

De acordo com a BNCC, o conteúdo de semelhança de figuras, no Ensino Fundamental, deve ser estudado no 6º e 9º, tendo os objetos de conhecimento e habilidades descritos a seguir (ver BRASIL, 2018).

6° ANO

Objetos de conhecimento: Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.

Habilidades: (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

9° ANO

Objetos de conhecimento: Semelhança de triângulos.

Habilidades: (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Objetos de conhecimento: Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.

Habilidades: (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Habilidades: (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Já para o Ensino Médio, a BNCC dividiu por áreas de conhecimento, sendo que o componente de Matemática está inserido na área de Matemática e suas Tecnologias. Desta forma a BNCC propõe

> a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade, (BRASIL, 2018, p. 527).

Competência específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral, (BRASIL, 2018, p. 532).
Habilidades: (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras), (BRASIL, 2018, p. 533).

Portanto, fica evidente a importância do ensino de semelhança de figuras planas, pois é um conteúdo muito rico em diversas aplicações no cotidiano, como também, pode ser observado nos livros didáticos e nos documentos oficiais, que recomendam sua inserção nos currículos escolares de Matemática nos diferentes níveis do ensino.

2.3 Exemplos de semelhança no cotidiano

A semelhança, de modo geral, faz parte do cotidiano das pessoas desde a infância, pois quando criança é comum brincar com miniaturas de carros, bonecos, animais entre outros objetos que podem respeitar o conceito de semelhança. Essas miniaturas tem uma relação de semelhança com os objetos reais, pois possuem a mesma forma.

Outros exemplos são os mapas, as maquetes, plantas de casas ou edifícios, ilustrados nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5.

A Figura 2.3 trata-se de um mapa do Brasil. Os mapas são exemplos da aplicação de semelhança de figuras planas, através de um coeficiente denominado de **escala**. A escala é a razão entre o comprimento do desenho e o comprimento real. Ela funciona como uma espécie de coeficiente de semelhança, pois dependendo do valor da escala podemos ampliar ou reduzir distâncias em um mapa.

Figura 2.3 – Mapa do Brasil

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/geografia/os-mapas-os-graficos.htm

Um outro exemplo de aplicação de semelhança de figuras planas é o uso de **plantas** na arquitetura ou na construção civil (Figura 2.4).

Para construir as plantas, também utilizamos a **escala** e, dependendo da escala, elas podem ser maiores ou menores. O que difere uma maquete de uma planta é que a maquete é uma representação em miniatura de um objeto maior em três dimesões, como por exemplo a maquete de um edifício, de uma casa, ou de um carro. Já a planta é uma representação plana em miniatura de um objeto maior, como exemplo o desenho dos cômodos de um imóvel que será construído em um terreno.

Figura 2.4 – Planta de uma casa

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/489133209523414855/

Podemos observar na Figura 2.5 a maquete de uma casa. Assim como nos mapas, as maquetes também fazem uso da **escala** para ampliar ou reduzir de tamanho mantendo as devidas proporções. Portanto, as maquetes são exemplos de semelhança de figuras tridimensionais.

Figura 2.5 – Maquete

Fonte: https://casaeconstrucao.org/projetos/maquetes-de-casas/

Atualmente podemos encontrar relações de semelhança entre a tela de uma TV e de um smartphone, quando é feito o espelhamento entre esses objetos, pois a mesma imagem que aparece numa tela também aparece na outra mantendo o mesmo formato. Logo, quando ampliamos uma figura ou reduzimos, mantendo-se a mesma forma, obtemos exemplos de figuras semelhantes.

Podemos também identificar propriedades de semelhança em objetos na natureza, como por exemplo os fractais. Os fractais são objetos geométricos que podem ser divididos em partes, sendo cada uma dessas partes semelhantes ao objeto original, ou seja, cada parte desse objeto é uma cópia dele mesmo (ver Figuras 2.6 e 2.7).

Figura 2.6 – Fractais encontrados na natureza

Fonte: https://pt.linkedin.com/pulse/geometria-fractal-da-natureza-glauco-reis

Figura 2.7 – Fractal natural: fronde de samambaia

Fonte: https://hypescience.com/10-estonteantes-fractais-encontrados-na-natureza/

Além disso, como veremos no Capítulo 3, a semelhança de triângulos permite calcular distâncias inacessíveis. Portanto, é comum no dia-a-dia de alguns profissionais, como os topógrafos, os cartógrafos, os geógrafos, os engenheiros, etc., o uso da semelhança para medir distâncias muito extensas ou que possuam algum obstáculo que impeça o cálculo diretamente.

2.4 Uso de recursos tecnológicos como auxílio didático

Hoje em dia, a tecnologia faz parte do nosso cotidiano. E o uso de recursos tecnológicos em sala de aula tornou-se indispensável, principalmente após os anos de ensino remoto estabelecidos em virtude da Pandemia de Covid-19, onde as aulas foram ministradas totalmente com o uso da tecnologia. Contudo, embora o uso de aplicativos e outros softwares sejam essenciais para facilitar a compreensão dos conteúdos, é importante salientar que não podemos substituir totalmente os métodos tradicionais pelo uso da tecnologia, pois, o uso desta, deve ser encarado como um recurso auxiliar no processo de ensino e não como o único meio a ser utilizado.

Usar um recurso didático diferente em sala de aula desperta a curiosidade e faz com que o aluno tenha mais atenção no que está sendo exposto. E o uso da tecnologia vai proporcionar esse diferencial. Para Oliveira (2021),

> o uso de um recurso didático nas aulas leva os alunos a aprenderem o conteúdo de uma forma dinâmica e pensativa e não de uma forma já pronta e acabada, pois o recurso dispõe da capacidade de pensar do aluno, ou seja, é o momento em que o estudante coloca a mente para funcionar. O uso da tecnologia na sala de aula faz com que o aluno se sinta motivado a aprender de maneira dinâmica e que traga resultados positivos (OLIVEIRA, 2021, p. 1).

E, atualmente nas aulas de matemática, esta vem sendo uma prática cada vez mais explorada pelos professores. Muito embora, nem todas as escolas possuam laboratórios de matemática com equipamentos tecnológicos disponíveis para professores e alunos, é comum nas aulas, o uso de projetor de imagem, TV, notebook, entre outros objetos mais acessiveis a esse público.

Assim, independentemente das dificuldades enfrentadas para aplicação de algum recurso tecnológico em sala de aula, é importante que o professor não limite suas aulas apenas ao uso do quadro e o pincel e sim, faça sempre que possível, a utilização da tecnologia, uma vez que a aplicabilidade desta também é importante no processo de aprendizagem do aluno. Como afirma Oliveira (2021) ao citar Sá e Machado[1],

> o uso das tecnologias na sala de aula vem se tornando uma ferramenta de grande importância, pois consegue auxiliar tanto o professor quanto o aluno na explicação e na compreensão dos conteúdos. Com a tecnologia na aula os alunos sentem-se mais motivados a aprender e a partir disso o docente consegue ensinar de forma mais dinâmica e criativa (SÁ; MACHADO, 2017, p. 1 apud OLIVEIRA, 2021, p. 1).

Essa nova realidade em sala de aula tem respaldo legal nos documentos oficiais, pois de acordo com a BNCC, nas competências gerais da Educação Básica, mais precisamente na competência 5, o aluno deve

> compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Várias são as ferramentas tecnológicas que podem ser aplicadas numa aula de matemática, sendo o software GeoGebra o mais utilizado, pois além de ser gratuito, é uma ferramenta dinâmica e com muitas funcionalidades. Outro que merece destaque é o software OpenBoard, através dele é possível fazer construções usando régua, transferidor e compasso, semelhantes as ferramentas físicas de uso tradicional. No Capítulo 4, deste trabalho,

[1] SÁ, Adriana Lourenço; MACHADO, Marília Costa. O uso do software GeoGebra no estudo de funções. XIV EVIDOSOL e XI CILTEC online, junho 2017.

trouxemos algumas atividades com o uso dessas ferramentas tecnológicas. O software GeoGebra pode ser facilmente acessado através do link: https://www.geogebra.org/classic e o OpenBoard pelo link: https://openboard.ch/index.en.html.

Portanto, a aplicação das novas tecnologias em sala de aula é importante por proporcionar ao aluno o desenvolvimento de suas habilidades e a capacidade de enxergar os conteúdos de uma forma diferente do tradicional.

3 SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos, propriedades e resultados sobre semelhança de figuras planas. As definições, teoremas e suas demonstrações são baseados nos textos de LIMA (2019), MUNIZ NETO (2012) e REZENDE (2008).

3.1 O conceito de semelhança

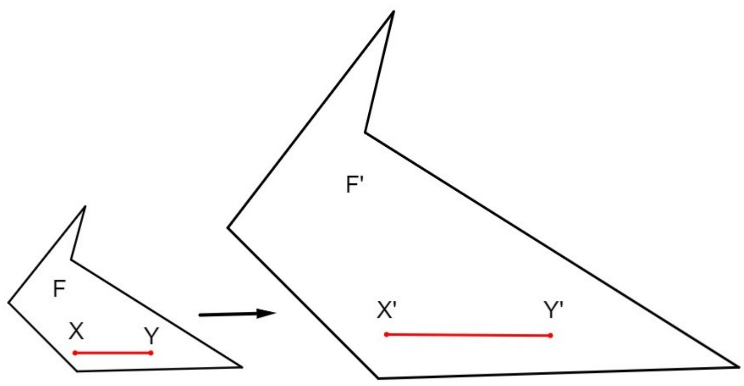
Nesta seção abordamos a definição de semelhança de figuras planas e também apresentamos algumas de suas propriedades gerais. A semelhança de figuras está presente no nosso cotidiano das mais variadas formas, como por exemplo, quando estamos usando o celular e fazemos ampliação ou redução de uma fotografia, estamos fazendo uso de semelhança de figuras planas.

A seguir, apresentamos uma definição geral de figuras semelhantes, podendo ser considerada para semelhança de figuras planas ou espaciais.

Definição 3.1. Duas figuras F e F' são semelhantes, com razão de semelhança $k > 0$, quando existe uma bijeção $S\colon F \longrightarrow F'$ entre os pontos de F e os pontos de F' tais que, se X e Y são pontos quaisquer de F e se $X' = S(X)$ e $Y' = S(Y)$ são seus correspondentes em F', então

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}} = k. \tag{3.1}$$

Figura 3.1 – Figuras semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Se duas figuras F e F' são semelhantes, então escrevemos $F \sim F'$. Daí, considerando $r = \dfrac{1}{k}$, a razão $\dfrac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}} = k$, pode ser escrita como $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$. A função S é chamada de função de semelhança e o número r é denominado fator de ampliação quando $(r > 1)$, ou fator de redução quando $(0 < r < 1)$.

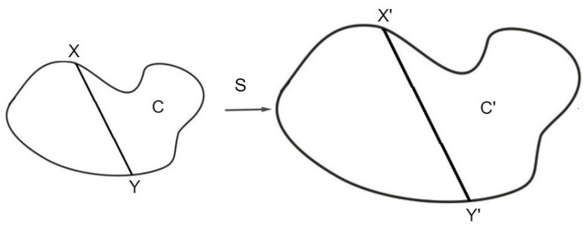
A definição seguinte trata-se da semelhança entre duas curvas quaisquer. Segue-se como um caso particular da definição anterior.

Definição 3.2. Duas curvas C e C' são ditas semelhantes quando existirem um número $r > 0$ e uma função bijetiva $S : C \to C'$ de modo que se X e Y são pontos quaisquer de C e se $X' = S(X)$ e $Y' = S(Y)$ são seus correspondentes em C', então $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$. A função S chama-se função de semelhança e o número r é o fator de ampliação ou redução das curvas C e C'. Quando $0 < r < 1$, a curva C' é chamada uma redução da curva C e quando $r > 1$, a curva C' é chamada uma ampliação da curva C.

Fazendo $r = \dfrac{1}{k}$, temos

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}} = k. \tag{3.2}$$

Figura 3.2 – Curvas semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Note que função S apenas amplia ou reduz a curva C, transformando-a na curva C'.

3.1.1 Propriedades de semelhança

Vejamos a seguir cinco propriedades importantes de semelhança.

1. **Reflexiva:** toda figura é semelhante a si mesma, ou seja, $F \sim F$.

De fato, basta considerar a função de semelhança igual a função identidade, em que $I(X) = X$, para todo $X \in F$.

2. **Simétrica:** se uma figura é semelhante a uma segunda figura, então essa segunda é semelhante a primeira, ou seja, $F \sim F' \Leftrightarrow F' \sim F$.

De fato, se $S : F \longrightarrow F'$ é uma função de semelhança, então basta considerar a função inversa $S^{-1} : F' \longrightarrow F$, que existe pelo fato de S ser uma bijeção.

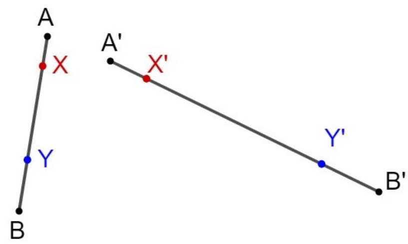
3. **Transitiva:** se três figuras, são tais que a primeira é semelhante a segunda e a segunda é semelhante a terceira, então a primeira e a terceira figuras também são semelhantes, ou seja, $F \sim F'$ e $F' \sim F'' \Rightarrow F \sim F''$.

Com efeito, sejam $S_1 : F \longrightarrow F'$ e $S_2 : F' \longrightarrow F''$ funções de semelhança, então a função composta $S_2 o S_1 : F \longrightarrow F''$ também será uma função de semelhança.

4. Dois segmentos quaisquer são sempre semelhantes.

Para justificar este fato, vamos considerar dois segmentos AB e $A'B'$ com comprimentos a e b, respectivamente. Seja $r = \dfrac{b}{a}$, para todo $X \in AB$, associamos um ponto $X' \in A'B'$ de modo que $\overline{A'X'} = r \cdot \overline{AX}$, (Figura 3.3).

Figura 3.3 – Bijeção entre dois segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Supondo que $Y \in XB$ e $Y' \in X'B'$, fica assim definida uma bijeção entre os segmentos AB e $A'B'$. Logo, para quaisquer pontos $X, Y \in AB$, suas respectivas imagens $X', Y' \in A'B'$, são tais que

$$\overline{X'Y'} = \overline{A'Y'} - \overline{A'X'} = r \cdot \overline{AY} - r \cdot \overline{AX} = r \cdot (\overline{AY} - \overline{AX}) = r \cdot \overline{XY}. \tag{3.3}$$

Portanto,

$$\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY} \Rightarrow \frac{\overline{X'Y'}}{\overline{XY}} = r. \tag{3.4}$$

Com, isso concluimos que os dois segmentos AB e $A'B'$ são semelhantes.

5. Toda função de semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.

Para justificar, vamos supor por contradição que X, Y e Z são colineares e que seus correspondentes X', Y' e Z' não são colineares, ou seja, $\overline{XZ} = \overline{XY} + \overline{YZ}$ e $X'Y'Z'$ é um triângulo.

Pela semelhança $\overline{XY} = k \cdot \overline{X'Y'}$, $\overline{YZ} = k \cdot \overline{Y'Z'}$ e $\overline{XZ} = k \cdot \overline{X'Z'}$. Logo,

$$k \cdot (\overline{X'Y'} + \overline{Y'Z'}) = \overline{XY} + \overline{YZ} = \overline{XZ} = k \cdot \overline{X'Z'}. \tag{3.5}$$

Portanto, $\overline{X'Y'} + \overline{Y'Z'} = \overline{X'Z'}$. Isto contradiz a desigualdade triangular.

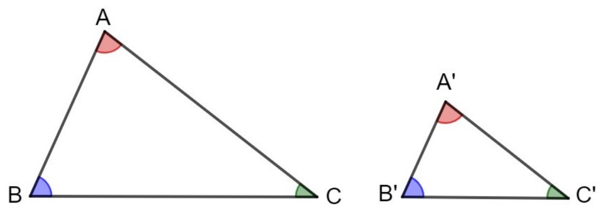
3.2 Semelhança de triângulos

Nesta seção fizemos uma abordagem mais detalhada da semelhança de triângulos. Além da definição, trouxemos os principais teoremas relacionados ao tema, assim como suas demonstrações.

Definição 3.3. Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca, entre os vértices de um e do outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais, (Figura 3.4).

Os lados correspondentes são denominados homólogos e a razão entre esses lados homólogos denomina-se razão de semelhança.

Figura 3.4 – Triângulos semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Na Figura 3.4, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$ e $C \longleftrightarrow C'$. Assim, temos que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e existe um número real positivo k, tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k. \tag{3.6}$$

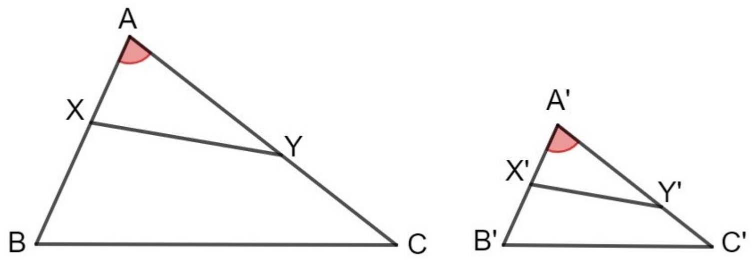
Esse real positivo k, nessa ordem, é denominado **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$. Caso inverta a ordem, ou seja, a semelhança ocorra entre $A'B'C'$ e ABC, temos como razão de semelhança $\frac{1}{k}$. Temos ainda que a relação de proporcionalidade é reflexiva, simétrica e transitiva, portanto, é uma relação de equivalência. Logo, valem as propriedades 1 a 3 de semelhança de figuras elencadas na Subseção 3.1.1.

Outro fato que merece destaque é que quando $k = 1$, os triângulos são congruentes, ou seja, a congruência de triângulos é um caso particular de semelhança.

Agora vamos mostrar que a Definição 3.3 implica na Definição 3.2 de curva semelhante, ou seja, existe uma função de semelhança.

Considere dois triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$ e um segmento qualquer que corta os lados AB e AC, nos pontos X e Y, respectivamente. Uma vez que dois segmentos quaisquer são semelhantes, usando o raciocínio análogo a justificativa da Propriedade 4 da Subseção 3.1.1, podemos considerar a função de semelhança que associa $X \in AB$ ao ponto $X' \in A'B'$ tal que $\frac{\overline{AX}}{\overline{A'X'}} = k$. De forma análoga, definimos a imagem dos pontos pertencentes a AC e BC. Vamos considerar também o segmento no triângulo $A'B'C'$, que corta os lados $A'B'$ e $A'C'$ nos pontos X' e Y', respectivamente, (Figura 3.5).

Figura 3.5 – Triângulos com segmento não paralelo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Para que a implicação seja verdadeira, precisamos mostrar que os segmentos $\overline{XY}$ e $\overline{X'Y'}$ são proporcionais com mesma constante de proporcionalidade dos lados dos triângulos ABC e $A'B'C'$.

Vamos aplicar a lei dos cossenos nos triângulos AXY e $A'X'Y'$. Logo,

$$(\overline{XY})^2 = (\overline{AX})^2 + (\overline{AY})^2 - 2 \cdot \overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot cos\hat{A}. \tag{3.7}$$

E

$$(\overline{X'Y'})^2 = (\overline{A'X'})^2 + (\overline{A'Y'})^2 - 2 \cdot \overline{A'X'} \cdot \overline{A'Y'} \cdot cos\hat{A}'. \tag{3.8}$$

Então,

$$\frac{(\overline{XY})^2}{(\overline{X'Y'})^2} = \frac{(\overline{AX})^2 + (\overline{AY})^2 - 2 \cdot \overline{AX} \cdot \overline{AY} \cdot cos\hat{A}}{(\overline{A'X'})^2 + (\overline{A'Y'})^2 - 2 \cdot \overline{A'X'} \cdot \overline{A'Y'} \cdot cos\hat{A}'}. \tag{3.9}$$

Fazendo $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{A'X'}} = k$, $\dfrac{\overline{AY}}{\overline{A'Y'}} = k$ e substituindo na igualdade (3.9), segue que

$$\frac{(\overline{XY})^2}{(\overline{X'Y'})^2} = \frac{(k \cdot \overline{A'X'})^2 + (k \cdot \overline{A'Y'})^2 - 2 \cdot (k \cdot \overline{A'X'} \cdot k \cdot \overline{A'Y'}) \cdot cos\hat{A}}{(\overline{A'X'})^2 + (\overline{A'Y'})^2 - 2 \cdot \overline{A'X'} \cdot \overline{A'Y'} \cdot cos\hat{A}'}. \tag{3.10}$$

Desenvolvendo o numerador do segundo membro da igualdade (3.10), temos

$$\frac{(\overline{XY})^2}{(\overline{X'Y'})^2} = \frac{k^2 \cdot [(\overline{A'X'})^2 + (\overline{A'Y'})^2 - 2 \cdot \overline{A'X'} \cdot \overline{A'Y'} \cdot cos\hat{A}]}{(\overline{A'X'})^2 + (\overline{A'Y'})^2 - 2 \cdot \overline{A'X'} \cdot \overline{A'Y'} \cdot cos\hat{A}'}. \tag{3.11}$$

Como, por hipótese, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, logo $\hat{A} = \hat{A}'$ e com isso temos o $cos\hat{A} = cos\hat{A}'$. Daí, simplificando o segundo membro da igualdade (3.11), temos

$$\frac{(\overline{XY})^2}{(\overline{X'Y'})^2} = k^2. \tag{3.12}$$

Finalmente, calculando a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade (3.12), chegamos ao resultado que queríamos, ou seja, $\dfrac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}} = k$.

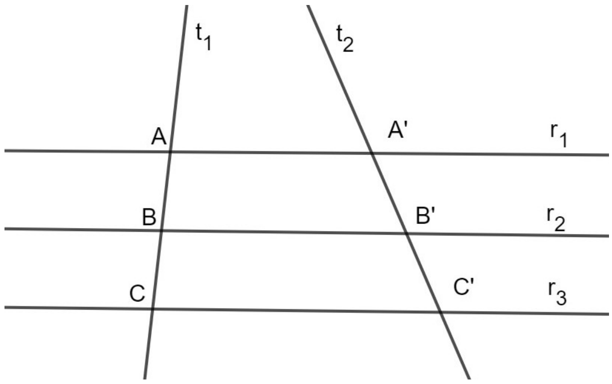
Portanto, fica provado que existe uma função de semelhança entre os triângulos.

Antes de abordar os critérios de semelhança de triângulos, vamos apresentar dois teoremas importantes sobre o tema em estudo. O primeiro teorema é um caso particular do Teorema de Tales, o qual vem logo em seguida.

Teorema 3.1. *Se um feixe de paralelas determina sobre uma transversal segmentos iguais, determinará sobre qualquer outra transversal segmentos iguais.*

Demonstração. Considere as paralelas r_1, r_2, r_3 e as transversais t_1 e t_2 (Figura 3.6).

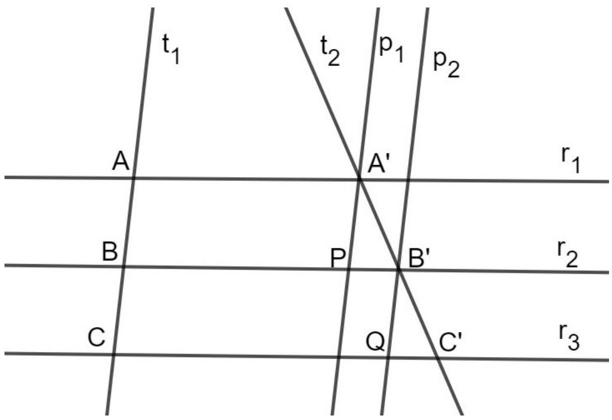
Figura 3.6 – Caso particular do Teorema de Tales: segmentos iguais



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Na figura acima, se $\overline{AB} = \overline{BC}$ então $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Para demonstrar, vamos traçar por A' e por B' paralelas a t_1, que denominamos de p_1 e p_2 (Figura 3.7).

Figura 3.7 – Prova do caso particular do Teorema de Tales



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Como da hipótese $\overline{AB} = \overline{BC}$ e na Figura 3.7 as retas t_1, p_1 e p_2 são paralelas por construção, segue que $\overline{AB} = \overline{A'P}$ e $\overline{BC} = \overline{B'Q}$, logo $\overline{A'P} = \overline{B'Q}$.

Agora note que nos triângulos $A'B'P$ e $B'C'Q$ os ângulos $A'\widehat{B'}P$ e $B'\widehat{C'}Q$ são correspondentes, pois estão do mesmo lado da transversal t_2, logo, tem a mesma medida.

Como as retas p_1 e p_2 são paralelas, então os ângulos $A'\widehat{P}B'$ e $B'\widehat{Q}C'$ dos triângulos $A'PB'$ e $B'QC'$ são iguais.

Portanto, os triângulos $A'PB'$ e $B'QC'$ são congruentes pelo caso Lado, Ângulo adjacente, Ângulo oposto. Com isso podemos concluir que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. $\square$

Agora vamos apresentar o Teorema de Tales, pois a partir dele obtemos o Teorema Fundamental de Semelhança e os critérios de semelhança. Além disso, o Teorema de Tales possui importantes aplicações no cotidiano, envolvendo semelhança entre triângulos.

Teorema 3.2. *Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos respectivamente proporcionais.*

Demonstração. No Teorema 3.1 fizemos a demonstração do caso particular em que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Agora vamos fazer a demonstração para o caso em que $\overline{AB} \neq \overline{BC}$. Para tanto, vamos considerar dois casos:

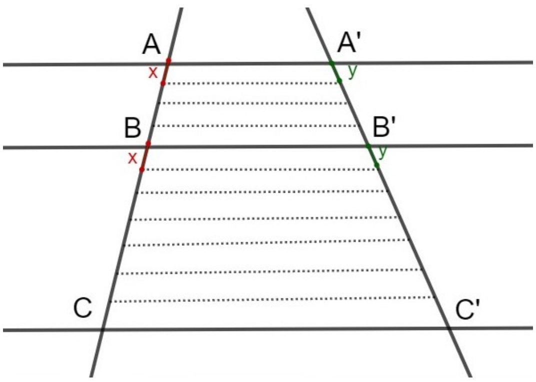
a) Vamos supor que AB e BC são segmentos comensuaveis, ou seja, existe um segmento x que cabe um número inteiro de vezes em AB e também um número inteiro de vezes em BC. Assim, $\overline{AB} = m\overline{x}$ e $\overline{BC} = n\overline{x}$ com m e n naturais. Daí, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}. \tag{3.13}$$

Agora, traçando várias paralelas pelos pontos que dividem AB e BC, todas em partes iguais (Figura 3.8), obtemos na segunda transversal $\overline{A'B'} = m\overline{y}$, $\overline{B'C'} = n\overline{y}$, para algum $\overline{y}$. Daí, chegamos a igualdade

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}. \tag{3.14}$$

Figura 3.8 – Teorema de Tales: segmentos comensuráveis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Logo, podemos concluir que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}, \tag{3.15}$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}. \tag{3.16}$$

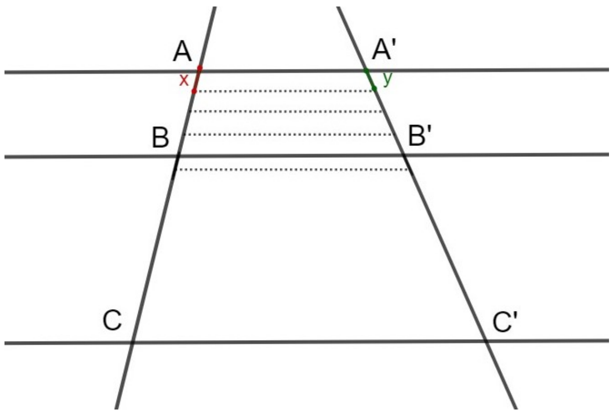
b) Agora vamos supor que AB e BC são segmentos incomensuaveis. Para isso vamos escolher um segmento x que cabe n vezes em BC, com $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\overline{BC} = n\overline{x}$. Vamos supor ainda que esse segmento x esteja contido entre m vezes e $m+1$ vezes em $\overline{AB}$. Então $m\overline{x} < \overline{AB} < (m+1)\overline{x}$ e daí, dividindo tudo por $\overline{BC} = n\overline{x}$, temos

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{m+1}{n}. \tag{3.17}$$

Agora, traçando novas paralelas, como foi feito no item anterior (Figura 3.9), temos

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} < \frac{m+1}{n}. \tag{3.18}$$

Figura 3.9 – Teorema de Tales: segmentos incomensuráveis



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Note que as duas razões, $\dfrac{AB}{BC}$ e $\dfrac{A'B'}{B'C'}$, estão entre $\dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{m+1}{n}$. Como a diferença entre as duas razões é $\dfrac{1}{n}$, que tende a zero quando n tende a infinito, podemos concluir que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}, \tag{3.19}$$

Ou seja,

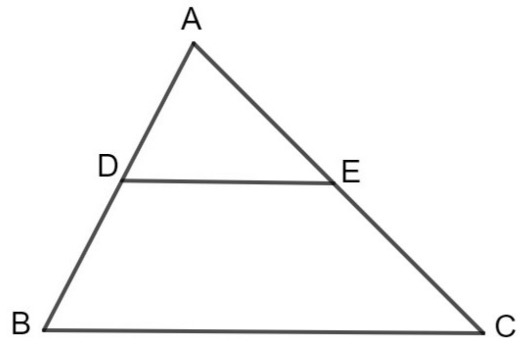
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}. \tag{3.20}$$

□

O teorema seguinte é conhecido como Teorema Fundamental da Semelhança, embora seja uma aplicação direta do Teorema de Tales, ele nos fornece relações importantes para as demonstrações dos critérios de semelhanças de triângulos que vem em seguida.

Teorema 3.3. *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

Figura 3.10 – Triângulo $ABC \sim ADE$ com $DE \| BC$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

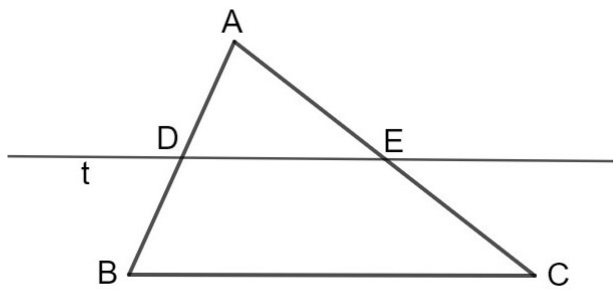
Demonstração. O teorema afirma que o segmento paralelo determina dois triângulos semelhantes. Para garantir que dois triângulos sejam semelhantes precisamos verificar se os angulos correspondentes são iguais e os lados correspondentes são proporcionais.

Para isso, faremos a demonstração em duas partes. Na primeira parte vamos mostrar que os lados são proporcionais e na segunda parte, vamos mostrar que os ângulos correspondentes são iguais.

Sejam ABC um triângulo e t uma reta paralela ao lado BC que corta os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E (Figura 3.11).

Inicialmente, vamos mostrar que os triângulos ABC e ADE tem seus lados proporcionais.

Figura 3.11 – Triângulos ABC e a paralela t



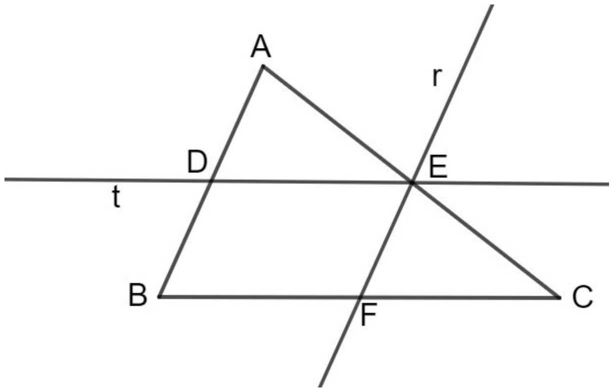
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Como a reta t é paralela ao lado BC, segue do Teorema 3.2

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{3.21}$$

Agora vamos traçar uma reta r passando por E paralela ao lado AB e cortando o lado BC no ponto F, formando assim um quadrilátero $BDEF$, (Figura 3.12).

Figura 3.12 – Triângulos ABC e as retas r e t



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Como a reta r é paralela ao lado AB, novamente segue do Teorema 3.2

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}. \tag{3.22}$$

Com isso, podemos afirmar que o quadrilátero $BDEF$ é um paralelogramo, pois DE é paralelo a BC e EF é paralelo a AB. Logo, como os lados opostos de um paralelogramo têm medidas iguais, temos

$$\overline{BF} = \overline{DE}. \tag{3.23}$$

Comparando as igualdades (3.22) e (3.23), chegamos a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}. \tag{3.24}$$

Agora comparando as igualdades (3.21) e (3.24), segue

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}. \tag{3.25}$$

Portanto, da igualdade (3.25) decorre que os três lados dos triângulos ABC e ADE estão em uma mesma proporção. Logo, os lados correspondentes são proporcionais.

Agora vamos mostrar que os triângulos ABC e ADE tem seus ângulos correspondentes iguais.

Como a reta t é paralela ao lado BC, segue das propriedades de duas retas paralelas e uma transversal, que os angulos $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{E}$. Com isso garantimos que os triângulos ABC e ADE, tem seus ângulos correspondentes iguais, pois o ângulo $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$, $\hat{C}$ e $\hat{E}$, são nessa ordem, ângulos correspondentes.

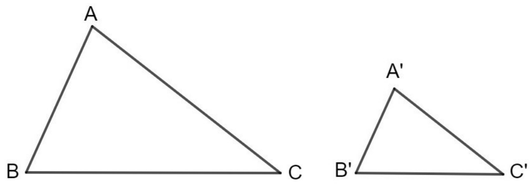
Com isso concluimos que os triângulos ABC e ADE, tem seus lados correspondentes proporcionais e seus ângulos correspondentes iguais, e portanto, são semelhantes. $\square$

3.2.1 Critérios de semelhança de triângulos

Aqui abordamos os critérios de semelhança de triângulos. As três proposições a seguir, estabelecem condições suficientes para garantir que dois triângulos sejam semelhantes.

Proposição 3.1. *(Critério de semelhança LLL) Se dois triângulos possuem lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.*

Figura 3.13 – Triângulos semelhantes pelo critério LLL



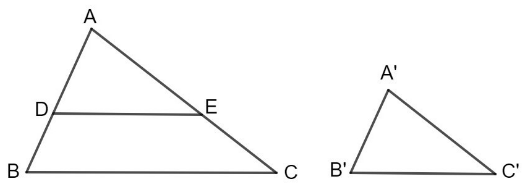
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Demonstração. Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k. \tag{3.26}$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar $k > 1$. Agora vamos traçar um segmento DE paralelo ao lado BC, de modo que por construção, $\overline{AD}$ seja igual a $\overline{A'B'}$, (Figura 3.14).

Figura 3.14 – Primeira parte da prova do critério LLL



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Pelo Teorema 3.2, temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}. \tag{3.27}$$

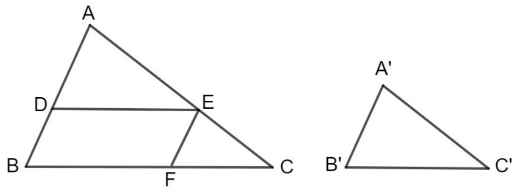
Como consideramos que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, segue que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k. \tag{3.28}$$

Logo, $\overline{AE} = \overline{A'C'}$.

Agora vamos traçar um segmento de reta paralelo ao lado AB, que vai do ponto E no lado AC, até o ponto F no lado BC, (Figura 3.15).

Figura 3.15 – Segunda parte da prova do critério LLL



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Sendo o quadrilátero $BDEF$ um paralelogramo, segue que $\overline{DE} = \overline{BF}$. Desta forma, usando novamente o Teorema 3.2, temos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k. \tag{3.29}$$

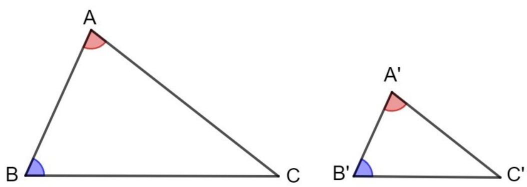
Com isso podemos afirmar que $\overline{DE} = \overline{B'C'}$.

Logo, podemos concluir que os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, $\overline{AE} = \overline{A'C'}$ e $\overline{DE} = \overline{B'C'}$.

Portanto, do Teorema 3.3, concluimos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes pela propriedade transitiva de semelhança. □

Proposição 3.2. *(Critério de semelhança AA) Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes iguais, então os triângulos são semelhantes.*

Figura 3.16 – Triângulos semelhantes pelo critério AA

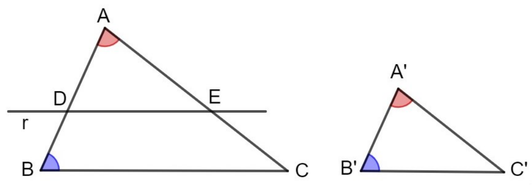


Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Demonstração. Sejam dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ (Figura 3.16).

Agora vamos traçar uma reta r paralela ao lado BC, que intercepta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente, de modo que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ (Figura 3.17).

Figura 3.17 – Prova do critério AA



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

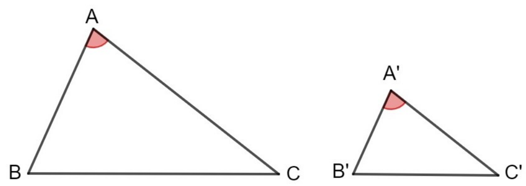
Desta forma, como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$, são ângulos correspondentes, com isso garantimos que $\hat{D} = \hat{B'} = \hat{B}$.

Logo, podemos concluir que os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso Ângulo, Lado, Ângulo (ALA).

Portanto, do Teorema 3.3 sabemos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE, logo por transitividade o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$. □

Proposição 3.3. *(Critério de semelhança LAL) Se dois triângulos tem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

Figura 3.18 – Triângulos semelhantes pelo critério LAL



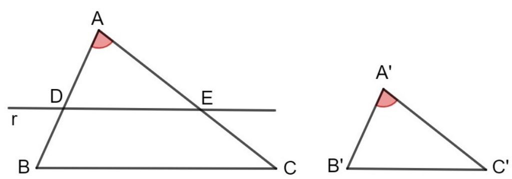
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Demonstração. Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ (Figura 3.18), tais que $\hat{A} = \hat{A'}$ e

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = k. \tag{3.30}$$

Agora vamos traçar uma reta r paralela ao lado BC, que intercepta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente, de modo que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ (Figura 3.19).

Figura 3.19 – Prova do critério LAL



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Pelo Teorema 3.3, os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Agora resta mostrar que os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes.

Como a reta r é paralela ao lado BC, então novamente pelo Teorema 3.3 os lados correspondentes dos triângulos ADE e ABC são proporcionais, ou seja,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{3.31}$$

Por construção, temos que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, então

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{3.32}$$

Note que da hipótese, segue que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}. \tag{3.33}$$

Comparando as igualdades (3.32) e (3.33), podemos concluir que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}. \tag{3.34}$$

Com isso, também concluimos que $\overline{AE} = \overline{A'C'}$. Como $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, $\overline{AE} = \overline{A'C'}$ e $\hat{A} = \hat{A}'$, concluimos que os triângulos ADE e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAL. Portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. □

Na proposição seguinte, mostramos que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Esta propriedade se estende para quaisquer polígonos semelhantes, pois do Teorema 3.4, segue que polígonos semelhantes podem ser divididos em triângulos semelhantes.

Proposição 3.4. *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes. Se k é a razão de semelhança, então k^2 é a razão entre as áreas.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, respectivamente, as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, $\overline{BC} = a$, $\overline{B'C'} = a'$ e h e h' as alturas destes triângulos, respectivamente, relativas a $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$. Como $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{a}{a'} = k$, $\dfrac{h}{h'} = k$, $\mathcal{A} = ah$ e $\mathcal{A}' = a'h'$, temos que $a = ka'$ e $h = kh'$, segue que

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{a \cdot h}{a' \cdot h'} = \frac{ka' \cdot kh'}{a' \cdot h'} = k^2. \tag{3.35}$$

□

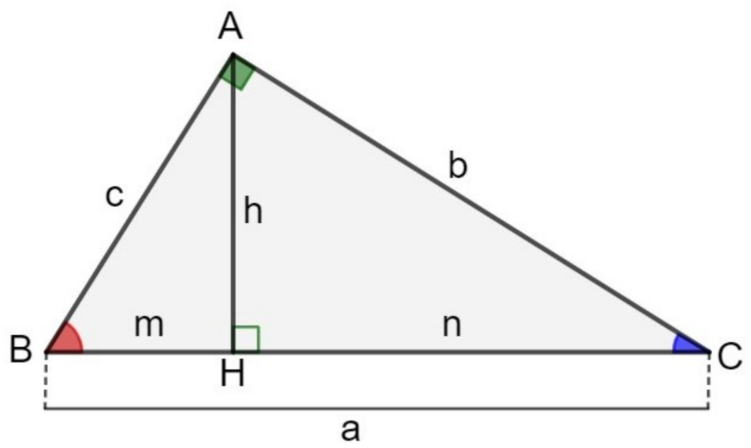
3.3 Aplicação de semelhança no triângulo retângulo

Como já foi visto até aqui, o estudo de semelhança é importante por fazer parte de um conteúdo muito presente no cotidiano das pessoas. Podemos aplicar o conceito de semelhança para resolver diversos problemas e também provar algumas relações e teoremas, como é o caso das relações métricas no triângulo retângulo e do Teorema de Pitágoras.

3.3.1 Relações métricas no triângulo retângulo

Através da semelhança é possível estabelecer algumas relações métricas. Para desenvolver estas relações, vamos considerar um triângulo ABC retângulo em $\hat{A}$ e traçar a altura relativa a hipotenusa tocando o lado BC, no ponto H. No triângulo ABC, $\overline{BC} = a$ é a medida da hipotenusa e, $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ são as medidas dos catetos. Já as medidas m e n são as projeções dos catetos, AB e AC, respectivamente, sobre a hipotenusa (Figura 3.20).

Figura 3.20 – Triângulo retângulo e a altura relativa a hipotenusa



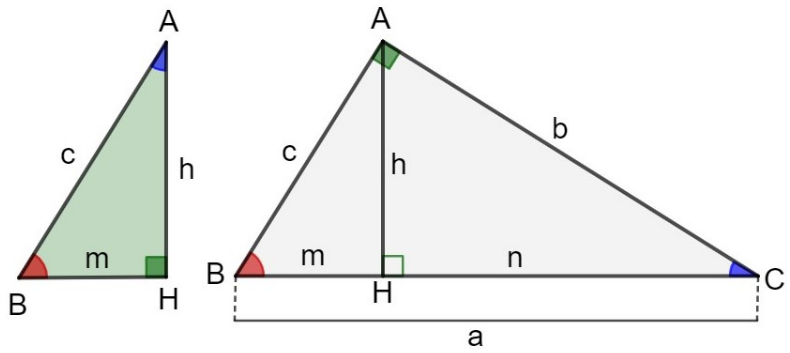
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Note que na Figura 3.20, temos três triângulos retângulos, que são os triângulos ABC, HAC e HBA. Esses três triângulos são semelhantes e através dessa relação de semelhança conseguimos estabelecer algumas relações métricas essencias.

Antes de estabelecer as relações métricas, vamos justificar a semelhança entre os três triângulos supracitados.

Inicialmente vamos comparar os triângulos retângulos ABC e HBA e observar a semelhança entre eles (Figura 3.21).

Figura 3.21 – Triângulos retângulos ABC e HBA



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Note que os triângulos ABC e HBA, tem um ângulo em comum, que é o ângulo $\hat{B}$ e como ambos são retângulos, então possuem um ângulo reto. Logo pela Proposição 3.2 os triângulos ABC e HBA são semelhantes e com isso podemos estabelcer as seguintes relações métricas:

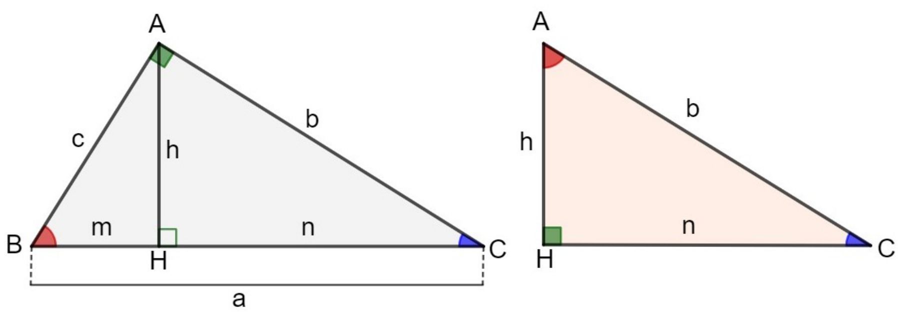
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m \tag{3.36}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c. \tag{3.37}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot m \tag{3.38}$$

Analogamente justificamos que os triângulos retângulos ABC e HAC são semelhantes (Figura 3.22).

Figura 3.22 – Triângulos retângulos ABC e HAC



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Note que os triângulos ABC e HAC, tem um ângulo em comum, que é o ângulo $\hat{C}$ e como ambos são retângulos, então possuem um ângulo reto. Logo pela Proposição 3.2 os triângulos ABC e HAC são semelhantes e com isso podemos estabelcer as seguintes relações métricas:

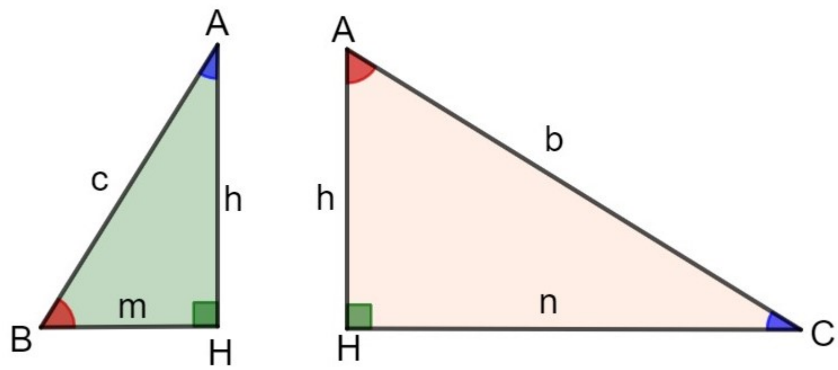
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \tag{3.39}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c \tag{3.40}$$

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n. \tag{3.41}$$

Finalmente, ao compararmos os triângulos HBA e HAC, é fácil ver que seus ângulos correspondentes são iguais, pois das justificativas anteriores ficou provado que esses ângulos tem a mesma medida (Figura 3.23).

Figura 3.23 – Triângulos retângulos HBA e HAC



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Logo, novamente pela Proposição 3.2, os triângulos retângulos HBA e HAC são semelhantes e com isso podemos estabelecer as seguintes relações métricas:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n \tag{3.42}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{h}{m} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot m \tag{3.43}$$

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n. \tag{3.44}$$

Agora note que as relações 3.37 e 3.40; 3.41 e 3.42; 3.38 e 3.43 são iguais. Logo, das nove relações obtidas, temos apenas seis diferentes.

Essas relações são ferramentas importantes para resolução de situações-problemas, assim como, para fazer a demonstração do Teorema de Pitágoras, que abordamos na subseção seguinte.

3.3.2 Demonstração do teorema de Pitágoras

Além das relações métricas elencadas na subseção anterior, temos outra ferramenta importante para aplicar na resolução de problemas que envolvam as medidas dos lados de um triângulo retângulo, que é o Teorema de Pitágoras.

O Teorema de Pitágoras afirma que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. A hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo, ou seja, é o lado oposto ao ângulo reto. Aplicando tal Teorema na Figura 3.20, temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

Existem várias maneiras de demonstrar o Teorema de Pitágoras, uma delas é usando as relações métricas mostradas na subseção anterior, as quais usaremos para fazer a demostração, a seguir.

Demonstração. Na Figura 3.20, temos que $a = m + n$, daí basta usar as relações descritas nas igualdades 3.36 e 3.39 e somar membro a membro. Assim,

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$$

$$a \cdot m + a \cdot n = c^2 + b^2 \Rightarrow a \cdot (m + n) = c^2 + b^2 \Rightarrow a \cdot a = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

□

3.4 Homotetias e figuras homotéticas

Nesta seção abordamos uma ferramenta muito importante no estudo de semelhança de figuras planas, que são as homotetias.

Há várias maneiras de identificar se duas figuras são semelhantes, como já foi mostrado nas seções anteriores. A homotetia é um recurso que pode ser utilizado para construir figuras semelhantes, seja ampliando ou reduzindo a figura original por meio de um coeficiente k, denominado de razão.

A homotetia é um tipo de transformação geométrica que ficou em segundo plano quando o assunto era semelhança de figuras. Todavia, ela é uma forte aliada para a ampliação ou redução de figuras geométricas (RIBEIRO, 2023, p. 1).

Vejamos, a seguir, a definição de homotetia.

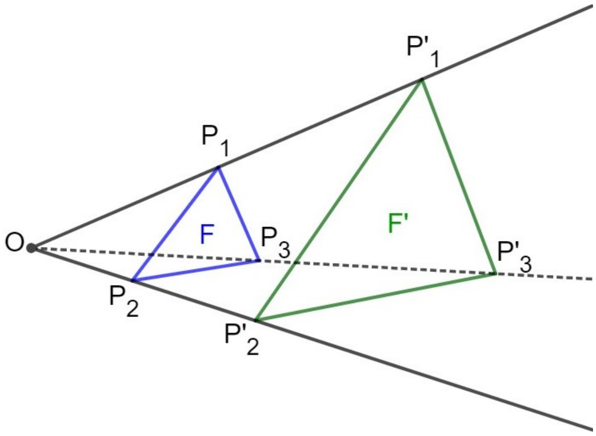
Definição 3.4. Fixado um ponto O do plano e um número real k, com esse $k \neq 0$, a homotetia de centro O e razão k é a transformação H que associa a cada ponto P do plano, o ponto $P' = H(P)$, tal que:

a) $H(O) = O$

b) $\overline{OP'} = |k|\overline{OP_1}$

c) Se $k > 0$, P' está na semireta $\overrightarrow{OP}$ e se $k < 0$, o ponto O está entre P e P'.

Figura 3.24 – Figuras homotéticas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

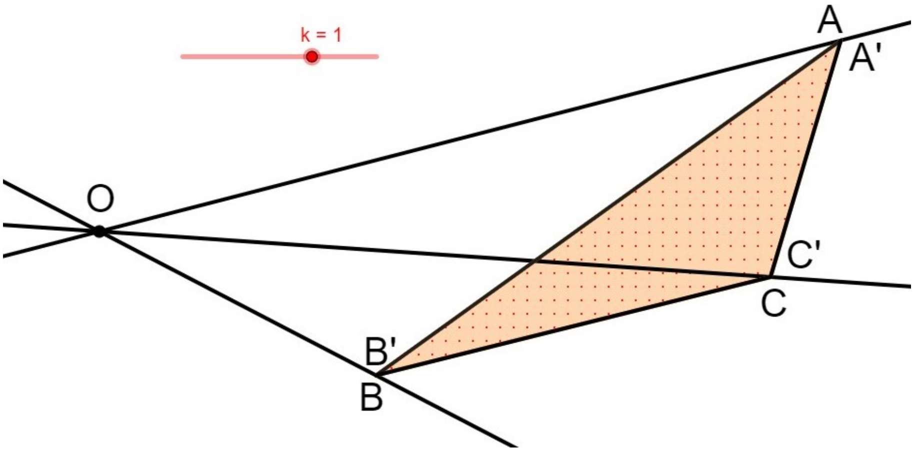
Portanto, da mesma forma que ocorre nas isometrias (ou simetrias), as homotetias são transformações geométricas no plano, que altera o tamanho de uma figura, mantendo-se as mesmas proporções. Essas transformações podem ocorrer por translação ou por reflexão.

Na prática, o que vai diferenciar as isometrias das homotetias é que duas figuras isométricas têm a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, são congruentes, enquanto isso duas figuras homotéticas conservam apenas a mesma forma. Logo, duas figuras homotéticas são semelhantes.

A homotetia pode ser direta ou inversa. É direta quando a razão k é positiva e inversa quando a razão k é negativa. A seguir, mostramos com mais detalhes através de exemplos que, se a razão $k = 1$, as figuras são congruentes, se $k > 1$, tem-se a ampliação da figura, caso, $0 < k < 1$, tem-se a redução da figura. Já para $k < 0$, a figura será invertida em relação a figura original, podendo também ser congruente, ampliada ou reduzida. Como ilustrados nas Figuras 3.25, 3.26, 3.27 e 3.28.

Na Figura 3.25, temos o caso em que a razão $k = 1$. Logo, os triâgulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, ou seja, seus vértices, seus lados correspondentes e seus ângulos coincidem.

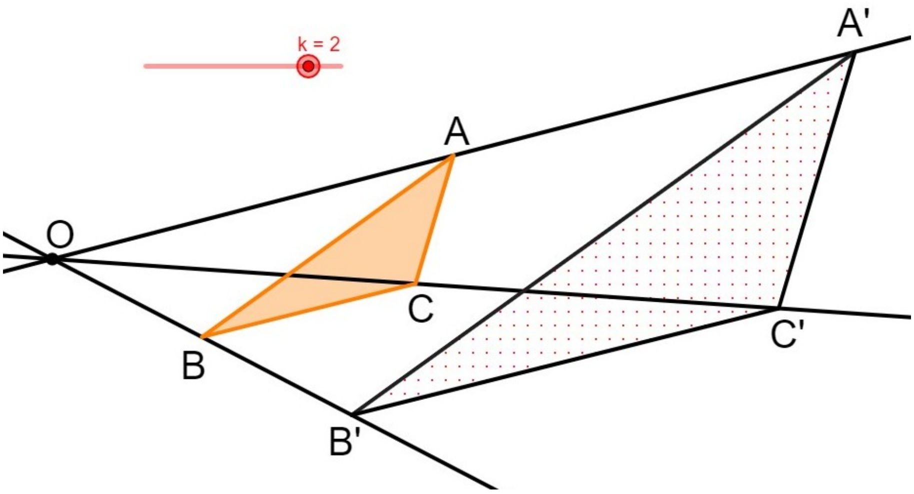
Figura 3.25 – Figuras homotéticas com razão $k = 1$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Na Figura 3.26, temos o caso em que $k > 1$. Logo, as figuras são homotéticas por ampliação, ou seja, o triângulo $A'B'C'$ é uma ampliação do triângulo ABC com razão de semelhança $k = 2$.

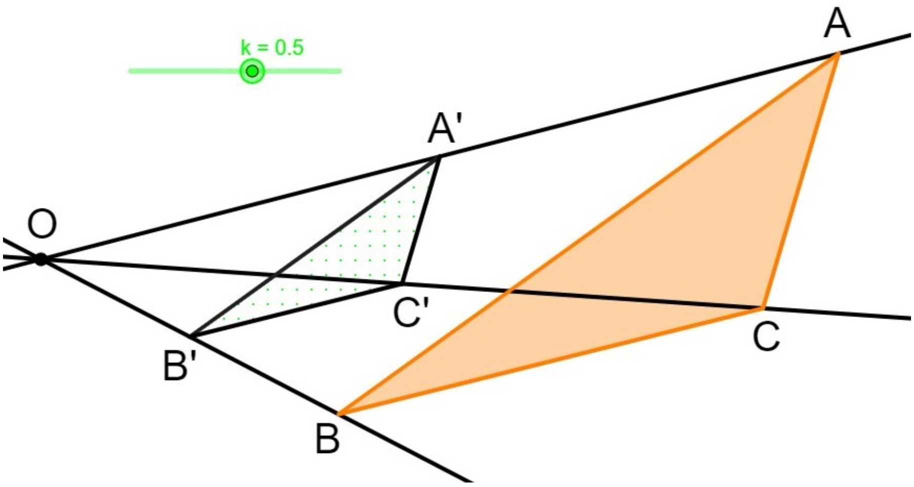
Figura 3.26 – Figuras homotéticas com razão $k > 1$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Na Figura 3.27, temos o caso em que $0 < k < 1$. Logo, as figuras são homotéticas por redução, ou seja, o triângulo $A'B'C'$ é uma redução do triângulo ABC com razão de semelhança $k = \dfrac{1}{2}$.

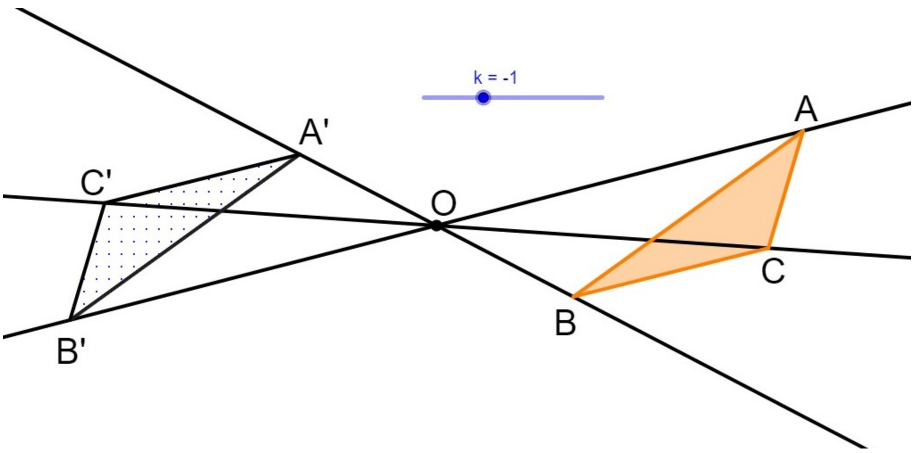
Figura 3.27 – Figuras homotéticas com razão $0 < k < 1$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Na Figura 3.28, temos o caso em que $k < 0$. Logo, as figuras são homotéticas por inversão, podendo ser congruentes ($k = -1$), uma ampliação, quando $k < -1$, ou uma redução quando $-1 < k < 0$. Neste caso em análise, o triângulo $A'B'C'$ é congruente e uma inversão do triângulo ABC com razão de semelhança $k = -1$. Logo, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são simétricos em relação ao ponto de origem "O".

Figura 3.28 – Figuras homotéticas com razão $k < 0$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

3.5 Semelhança de polígonos

Nesta seção tratamos da semelhança de polígonos e das propriedades de semelhança.

Os polígonos são figuras planas formados por segmentos de retas. Podem ser regulares ou não. Um polígono é regular quando todos seus lados tem a mesma medida, ou seja, são congruentes e todos os ângulos possuem mesma medida.

A seguir, temos a definição de semelhança de polígonos, segundo Bonjorno (2016).

Definição 3.5. Dois polígonos são semelhantes quando satisfazem duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Note que esta definição segue a mesma ideia das definições de semelhança de figuras planas e semelhança de triângulos, vistas anteriormente.

O teorema seguinte apresenta uma consequência importante sobre semelhança de polígonos.

Teorema 3.4. *Se dois polígonos são semelhantes, então é possível dividi-los em triângulos respectivamente semelhantes.*

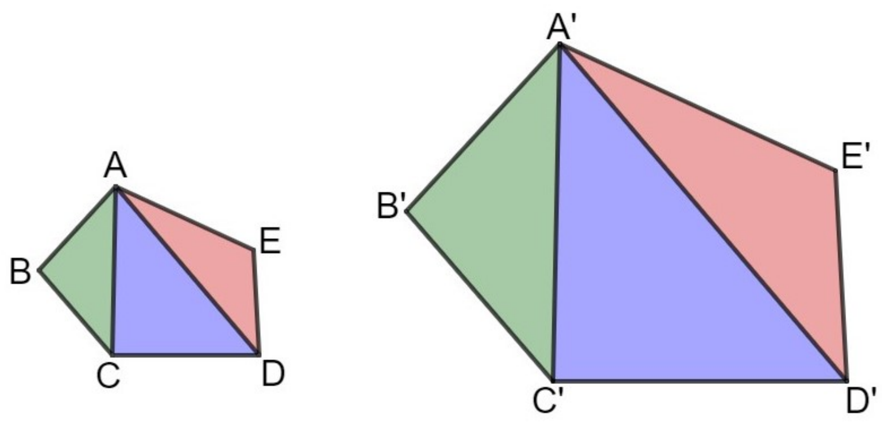
Demonstração. Para simplificar, vamos considerar o caso de um polígono de gênero 5, isto é, um pentágono. Para um polígono de gênero $n \in \mathbb{N}$ qualquer, o raciocínio pode ser repetido um número finito de vezes.

Sejam os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ semelhantes, (Figura 3.29). Vamos traçar as diagonais dos vértices correspondentes A e A'. Note que as diagonais dividiram os polígonos num mesmo número de triângulos.

Seja k a razão de semelhança. Logo, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k. \tag{3.45}$$

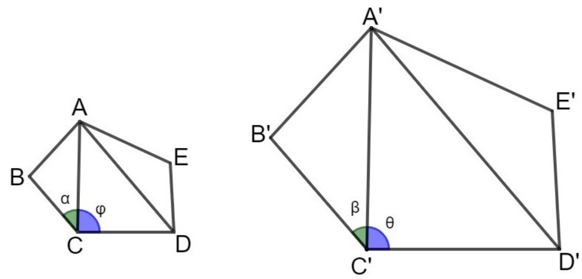
Figura 3.29 – Poligonos semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Como por hipótese, os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são semelhantes é válida a igualdade (3.45) e $\hat{B} = \hat{B}'$. Da Proposição 3.3, segue que os triâgulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Logo, temos que $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ e que $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$, (Figura 3.30).

Figura 3.30 – Prova que os poligonos são semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Ainda da hipótese, temos que $\hat{C} = \hat{C}'$ e que $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = k$. Logo, concluimos que $\hat{\varphi} = \hat{\theta}$ e que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = k. \tag{3.46}$$

Portanto, segue novamente da Proposição 3.3 que os triângulos ACD e $A'C'D'$ são semelhantes. Com isso garantimos que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = k$.

Finalmente, temos da hipótese que $\hat{E} = \hat{E}'$ e que $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{A'E'}} = k$. Logo, concluimos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{A'E'}} = k. \tag{3.47}$$

Da igualdade (3.47), temos que os triângulos ADE e $A'D'E'$ são semelhantes. Com isso concluimos a demonstração. □

3.5.1 Propriedades de semelhança de polígonos

Vejamos a seguir três propriedades de semelhança de polígonos:

1. Dois polígonos de gênero n são semelhantes quando possuem (n–1) ângulos respectivamente iguais e (n–2) lados consecutivos respectivamente proporcionais.
2. Dois polígonos de gênero n são semelhantes quando possuem (n–2) ângulos consecutivos respectivamente iguais e os (n–1) lados que os compreendem respectivamente proporcionais.
3. Dois polígonos de gênero n são semelhantes quando possuem (n–3) ângulos consecutivos respectivamente iguais e os n lados respectivamente proporcionais.

Também é importante ressaltar, que dois polígonos regulares de mesmo gênero são necessariamente semelhantes e em caso particular, são iguais. Isso ocorre de fato, pois se são regulares, serão obrigatoriamnete equiláteros e equiângulos, ou seja, assegura as condições impostas, por definição, para a existência da semelhança.

No entanto, é possível observarmos figuras que, mesmo não sendo polígonos, também são semelhantes, como por exemplo, duas circunferências. Este assunto tratamos com mais detalhe na seção seguinte.

3.6 Semelhança de circunferências

Nesta seção abordamos a semelhança de circunferências, definição e propriedades. As circunferências embora não tenham vértices como os polígonos, possuem outras relações, tais como ângulo central, raios, arcos, cordas e diâmetros, que possibilita concluir a relação de semelhança.

Inicialmente, como ilustração, vamos considerar um ponto O do plano e um número real positivo r. Assim, a circunferência de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto O.

A seguir, temos a definição de circunferência.

Definição 3.6. O conjunto dos pontos do plano situados a uma mesma distância r do centro O é a linha que delimita o círculo, chamada de circunferência.

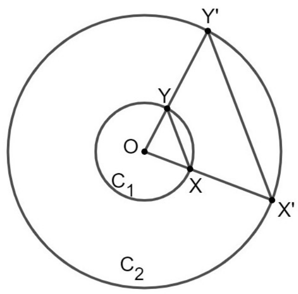
Daí, segue que duas circunferências são congruentes se seus raios são iguais.

O teorema seguinte mostra uma relação importante da semelhança de duas cicunferências.

Teorema 3.5. *Duas circunferências quaisquer são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios.*

Demonstração. Vamos considerar duas circunferências C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2, respectivamente. Sem perda de generalidade, podemos supor que C_1 e C_2 possuam o mesmo centro O e que $r_1 < r_2$. Considere a função $S : C_1 \longrightarrow C_2$ que associa um ponto $X \in C_1$ a um ponto $S(X) = X' \in C_2$ tal que X' é o ponto de interseção de C_2 com a semirreta $\overrightarrow{OX}$. Assim, considerando X, $Y \in C_1$ e seus correspondentes X', $Y' \in C_2$, segue da Proposição 3.3, que os triângulos OXY e $OX'Y'$ são semelhantes, com razão $\dfrac{r_1}{r_2}$. Logo, $\dfrac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}} = \dfrac{r_1}{r_2}$, o que prova a semelhança. □

Figura 3.31 – Circunferências semelhantes



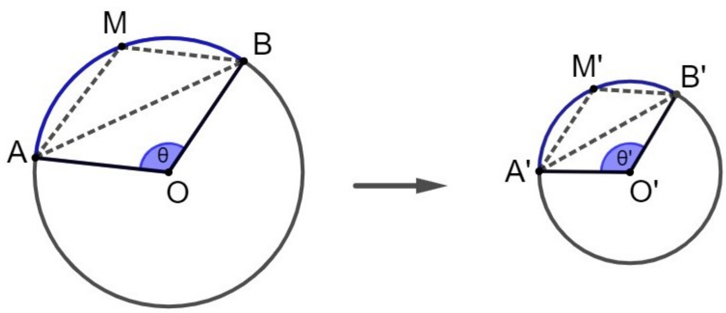
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

O teorema seguinte aborda relações de semelhança entre duas circunferências envolvendo ângulo central e arcos.

Teorema 3.6. *Dois arcos de circunferência são semelhantes se, e somente se, subtendem o mesmo ângulo central.*

Demonstração. Sejam $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ arcos de circunferências semelhantes de centro O e O' respectivamente. Vamos considerar os ângulos centrais $\theta = \hat{O}$ e $\theta' = \hat{O}'$. Sejam M e M' os pontos médios de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ respectivamente.

Figura 3.32 – Arcos semelhantes



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Portanto, toda semelhança entre os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ determina uma semelhança entre os triângulos AMB e $A'M'B'$. Logo, $\hat{M} = \hat{M}'$, garantindo assim a igualdade entre os ângulos centrais θ e θ', pois como $\hat{M}$ e $\hat{M}'$ são ângulos inscritos, temos

$$\hat{M} = \frac{(360^\circ - \theta)}{2} \tag{3.48}$$

e

$$\hat{M}' = \frac{(360^\circ - \theta')}{2}. \tag{3.49}$$

Logo, $\hat{M} = \hat{M}' \Rightarrow \theta = \theta'$. Desta forma, arcos semelhantes subtendem o mesmo ângulo central.

Reciprocamente, suponhamos que os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ tenham os ângulos centrais iguais. Supondo ainda que as circunferências onde estão situados esses arcos são concêntricas. Logo, a homotetia com este centro, que leva uma circunferências na outra, é uma semelhança entre os arcos dados. □

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES DE SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

Neste capítulo, apresentamos situações-problemas envolvendo semelhanças, como por exemplo o cálculo de alturas. Além disso, fizemos construções de figuras semelhantes através da homotetia no GeoGebra e apresentamos construções com régua e compasso utilizando o software OpenBoard. Nas atividades propostas, buscamos também investigar algumas propriedades das figuras, a exemplo de áreas e perímetros. Também trouxemos questões do ENEM relacionadas ao tema semelhança de figuras planas.

4.1 Atividades de cálculo de altura

Aqui trouxemos algumas atividades de cálculo de altura usando semelhança. É muito comum quando abrimos um livro didático, seja do Ensino Fundamental ou Médio, nos depararmos com atividades falando sobre calcular a altura de um prédio ou de uma torre, usando a semelhança dos triângulos formados pelos objetos, suas respectivas sombras e o raio do sol.

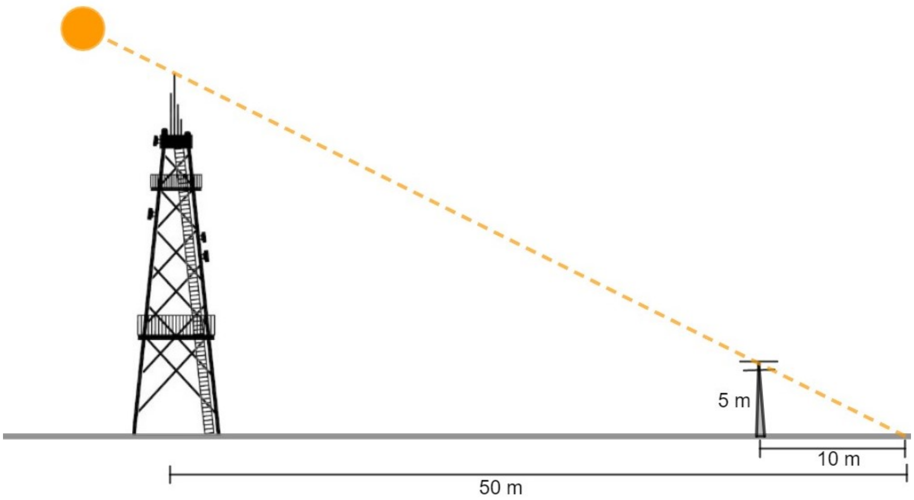
A seguir, na Atividade 1, propomos uma situação-problema que usa essa mesma linha de raciocínio dos livros didáticos. A ideia é mostrar que a teoria é importante, mas não podemos separá-la da prática, pois quando o professor usa como instrumento apenas o livro didático, pode estar deixando de lado a oportunidade do aluno ampliar seus conhecimentos e consolidar suas habilidades. Por isso, na Atividade 2, propomos uma atividade prática usando esse tipo de situação-problema.

ATIVIDADE 1: Num certo dia de sol, a sombra projetada no solo por uma torre vertical de telefonia, era de 50 metros. No mesmo instante a sombra de um poste, também vertical e de 5 metros de altura, projetada no solo, era de 10 metros. Com base nessas informações, qual a altura da torre de telefonia?

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

Com base nos dados da questão, representamos as informações por meio de uma imagem (Figura 4.1).

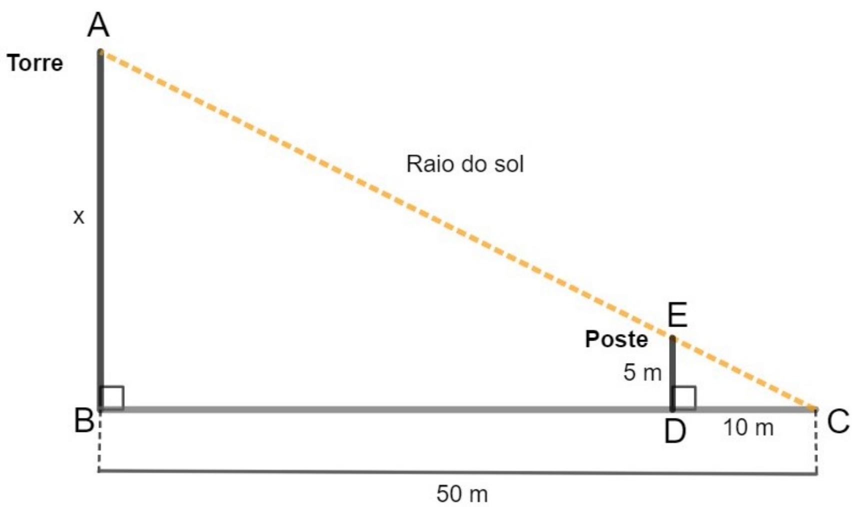
Figura 4.1 – Sol projetando a sombra na torre e no poste



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Note que o raio do sol, no mesmo instante que toca o topo da torre de telefonia, também toca o topo do poste, com isso formam-se dois triângulos semelhantes (Figura 4.2).

Figura 4.2 – Triângulos semelhantes formados pelo raio do sol e a projeção no solo



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

De fato, como os segmentos AB e ED são paralelos, segue do Teorema 3.3 que os triângulos ABC e EDC são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \Longrightarrow \frac{x}{5} = \frac{50}{10}. \tag{4.1}$$

Agora, na igualdade (4.1), aplicando a propriedade das proporções na qual o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, temos

$$10x = 250 \Longrightarrow x = 25. \tag{4.2}$$

Portanto, a altura da torre de telefonia é de 25 metros.

Outra forma de justificar a semelhança dos triângulos ABC e EDC é usar o fato de que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são iguais, pois ambos são retos e o ângulo $\hat{C}$ é o mesmo para os dois triângulos. Assim, pela Proposição 3.2, os triângulos ABC e EDC, são semelhantes.

Portanto, nessa atividade, o aluno precisa compreender e perceber a Geometria ao seu redor e como a matemática está inserida na natureza. Assim, será capaz de transformar os fenômenos da natureza em dados matemáticos, fazendo uso dos conceitos de semelhança de triângulos para chegar a solução do problema. Esse conhecimento será ainda mais aprofundado quando o aluno fizer de forma prática, como sugerido na atividade seguinte.

ATIVIDADE 2: Usando a ideia apresentada na ATIVIDADE 1, faça uma atividade prática com seus alunos. Para isso, forme grupos com quatro ou cinco pessoas e usando um bastão de 1 metro de comprimento, peça que seus alunos calculem a altura de um poste ou de uma árvore, nas proximidades da escola.

Esta atividade propõe ao professor trabalhar o conteúdo de semelhança de forma prática. Como já foi dito antes, a teoria é importante e faz parte do processo de ensino-aprendizagem, mas é na prática que se aprende de forma significativa. Portanto, espera-se que com esta atividade o aluno seja capaz de compreender melhor o conteúdo de semelhança, assim como percerber a matemática inserida no seu cotidiano.

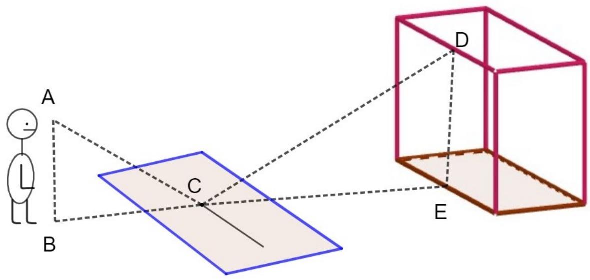
ATIVIDADE 3: Calcular a altura da parede de um prédio, supondo que não possa ser medida diretamente, utilizando apenas um espelho e uma fita métrica.

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

Inicialmente vamos fazer a representação das informações do enunciado numa figura, para que possa ficar mais claro para o leitor (Figura 4.3). Note que a questão não atribui nenhuma medida de comprimento, pois a ideia aqui é que o aluno compreenda a semelhança formada e que possa resolver qualquer situação-problema que tenha esse modelo de questão.

Para tanto, deve-se posicionar o espelho entre o prédio e uma pessoa, de modo que esta possa observar no espelho o topo do prédio. Na Figura 4.3 é possível identificar que os triângulos formados ABC e DEC são semelhantes. Logo, com a fita métrica, medem-se as medidas da altura da pessoa, representada pela medida $\overline{AB}$; da distância da pessoa até o ponto de reflexão, representada pela medida $\overline{BC}$ e desse ponto até a parede, cuja medida é dada por $\overline{CE}$; com essas medidas é possivel calcular a altura da parede, que é representada por $\overline{ED}$.

Figura 4.3 – Triângulos semelhantes por reflexão de um espelho



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Para garantir que os triângulos ABC e DEC são semelhantes, basta observar que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são iguais, pois a pessoa e a parede estão na posição vertical, logo são retos. Por outro lado, com base na 1^a Lei de Refração, o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido, então as medidas dos ângulos $A\hat{C}B$ e $D\hat{C}E$ são iguais. Logo, pela Proposição 3.2, os triângulos ABC e DEC são semelhantes, ou seja,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}. \tag{4.3}$$

Logo,

$$\overline{DE} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{AB}}{\overline{CB}}.$$

Espera-se com a aplicação e resolução desta atividade, que o aluno aprofunde ainda mais o conceito de semelhança de figuras e que consiga compreender as diversas técnicas que podem ser usadas para resolver situações-problemas usando semelhança. Aqui também é possível entender um pouco sobre as Leis da Física, como a 1^a Lei de Refração.

4.2 Atividades com o uso do software GeoGebra

Nesta seção trouxemos algumas atividades de semelhança, através da homotetia no GeoGebra, assim como investigamos as relações de semelhança e propriedades de áreas e também de perímetros de duas figuras homotéticas. Mostramos o passo a passo de como construir uma figura semelhante usando a homotetia a partir deste software e a variação da razão de semelhança através do controle deslizante.

4.2.1 Homotetia no GeoGebra

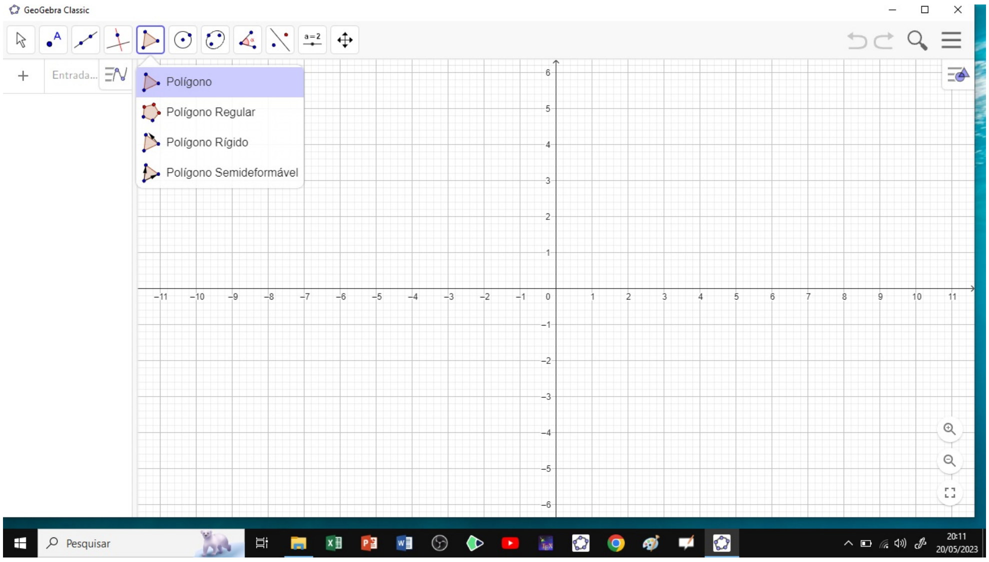
A atividade seguinte apresenta construção de figuras homotéticas usando o GeoGebra. Uma vez construída a figura, usando a homotetia e o controle deslizante, é possível ver o comportamento da figura construída de diversos ângulos e tamanhos.

ATIVIDADE 4: Dado um pentágono $ABCDE$, com o uso da ferramenta homotetia do GeoGebra, construa outros pentágonos homotéticos.

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

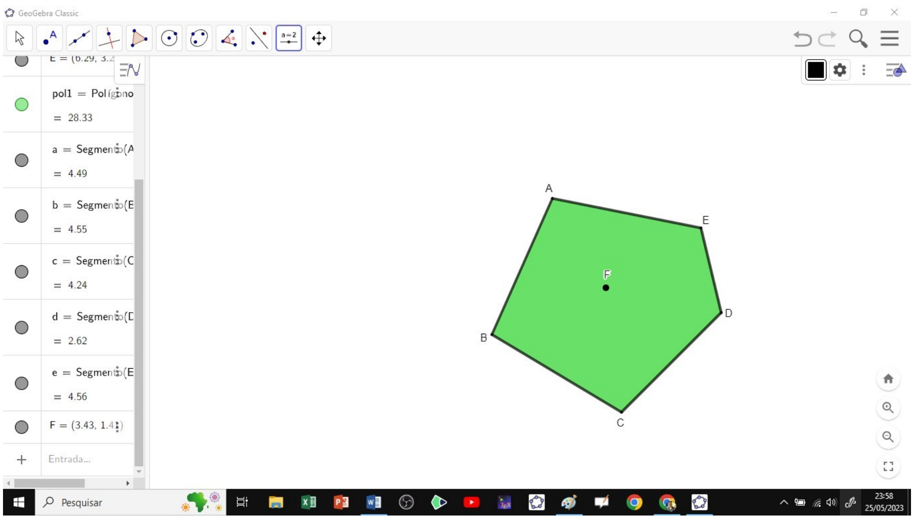
Passo 1: Abra a janela do GeoGebra, clique no ícone "polígono"e construa o pentágono $ABCDE$. Em seguida elimine os eixos e a malha quadriculada para visualizar melhor a figura, clique no ícone "ponto"e insira um ponto F em qualquer região do plano (ver Figuras 4.4 e 4.5).

Figura 4.4 – Janela do GeoGebra e a construção do pentágono



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

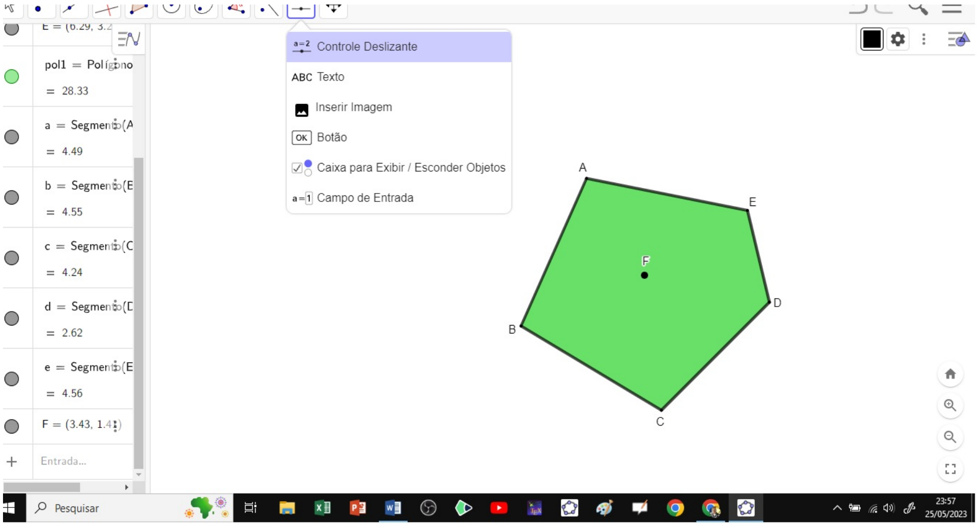
Figura 4.5 – Janela do GeoGebra com o pentágono construído



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

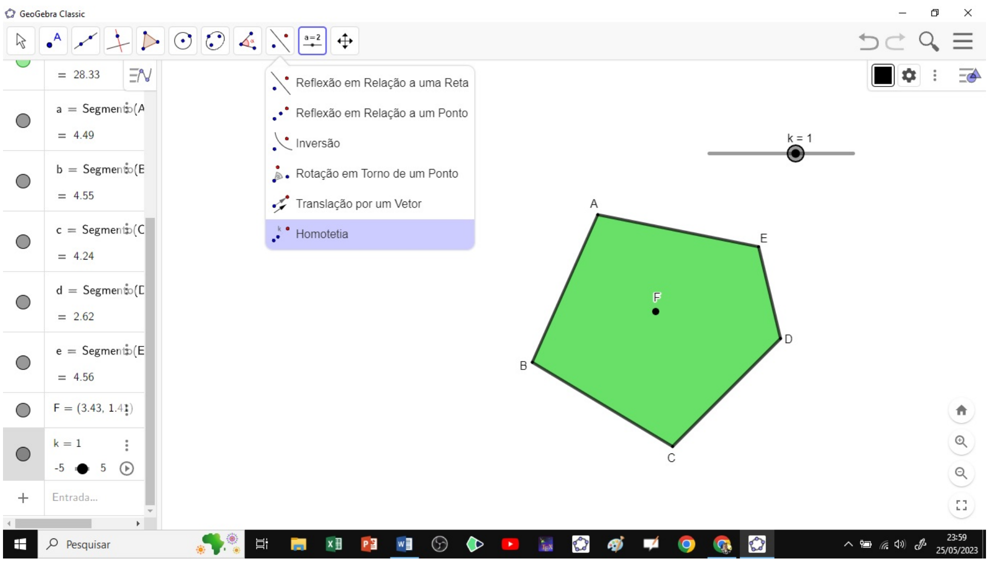
Passo 2: Já com o pentágono construído, clique no ícone "controle deslizante"e crie um controle deslizante apenas com fator k. Em seguida clique no ícone "homotetia"e, na sequência, clique no pentágono e no ponto F. Na caixa de diálogo digite o fator k, assim o processo de construção usando homotetia no GeoGebra está concluido (ver Figuras 4.6 e 4.7).

Figura 4.6 – Janela do GeoGebra e o ícone controle deslizante



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

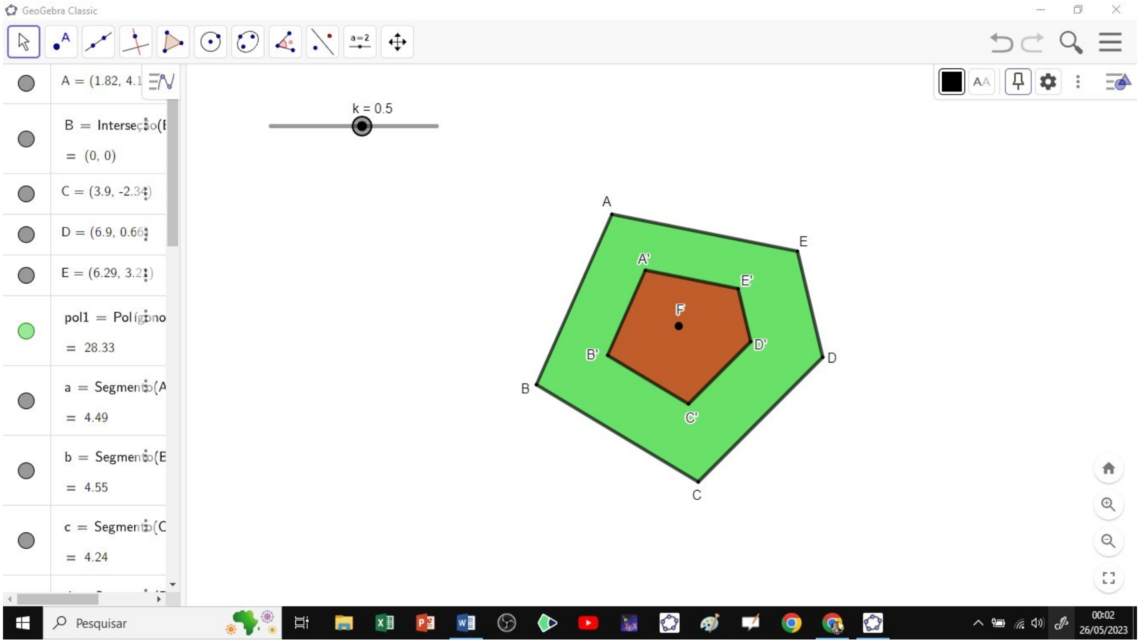
Figura 4.7 – Janela do GeoGebra e o ícone homotetia



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

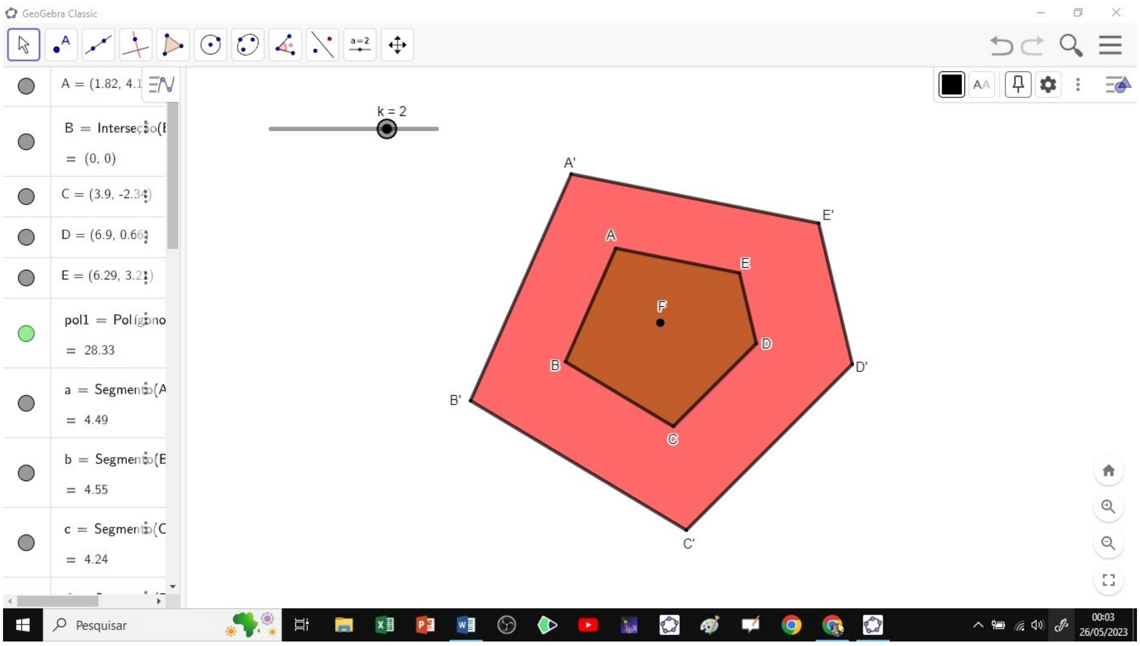
Passo 3: Agora, com todo processo concluido, basta usar o controle deslizante e observar que variando o valor da razão k criamos pentágonos $A'B'C'D'E'$ homotéticos ao pentágono $ABCDE$. Dependendo do valor de k podemos ter na homotetia direta o pentágono $A'B'C'D'E'$ homotético por redução ou por ampliação e na homotetia inversa também podemos ter o pentágono $A'B'C'D'E'$ homotético por redução ou por ampliação (ver Figuras 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11).

Figura 4.8 – Janela do GeoGebra e a homotetia direta por redução



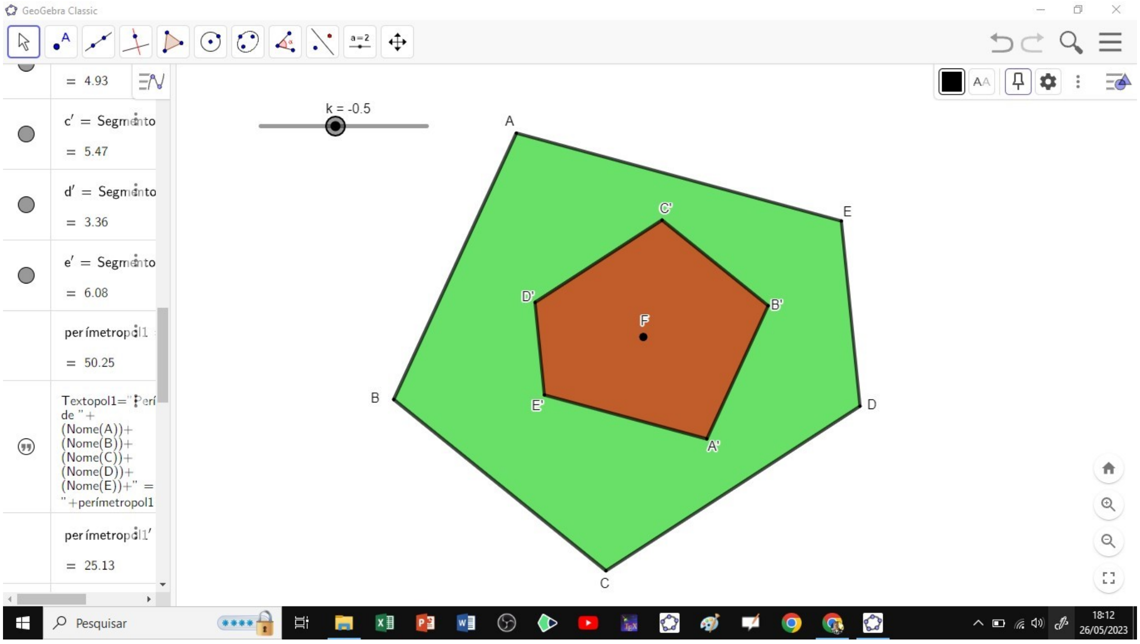
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.9 – Janela do GeoGebra e a homotetia direta por ampliação



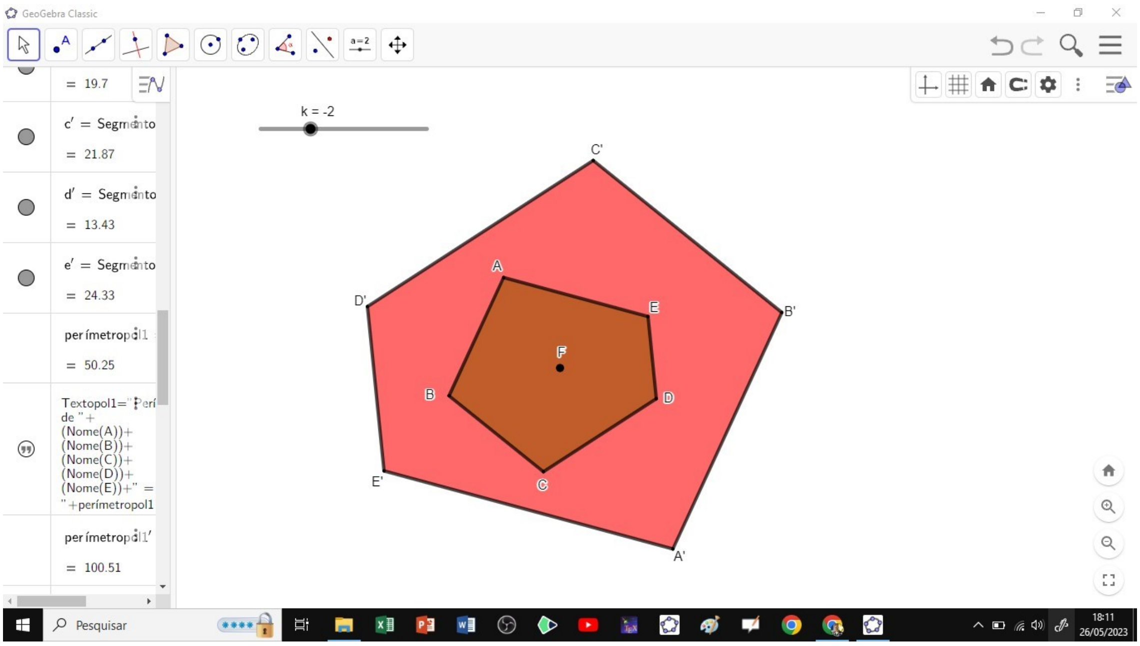
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.10 – Janela do GeoGebra e a homotetia inversa por redução



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.11 – Janela do GeoGebra e a homotetia inversa por ampliação

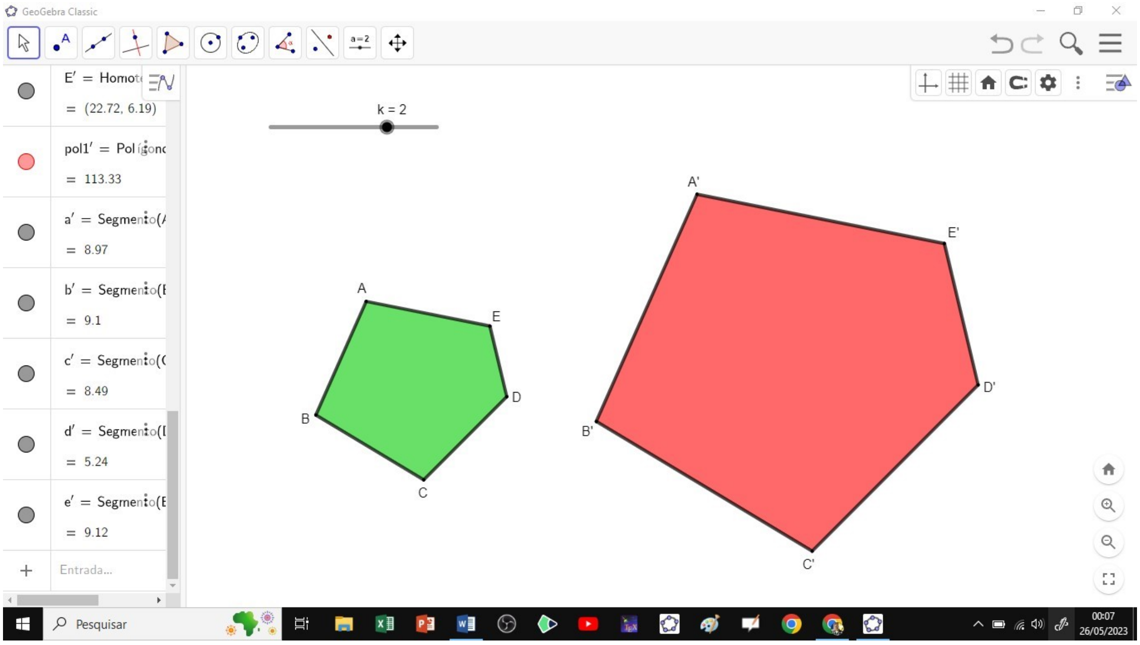


Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Para os casos em que $k = 1$ ou $k = -1$ os pentágonos $A'B'C'D'E'$ e $ABCDE$ são congruentes, tanto na homotetia direta, quanto na inversa.

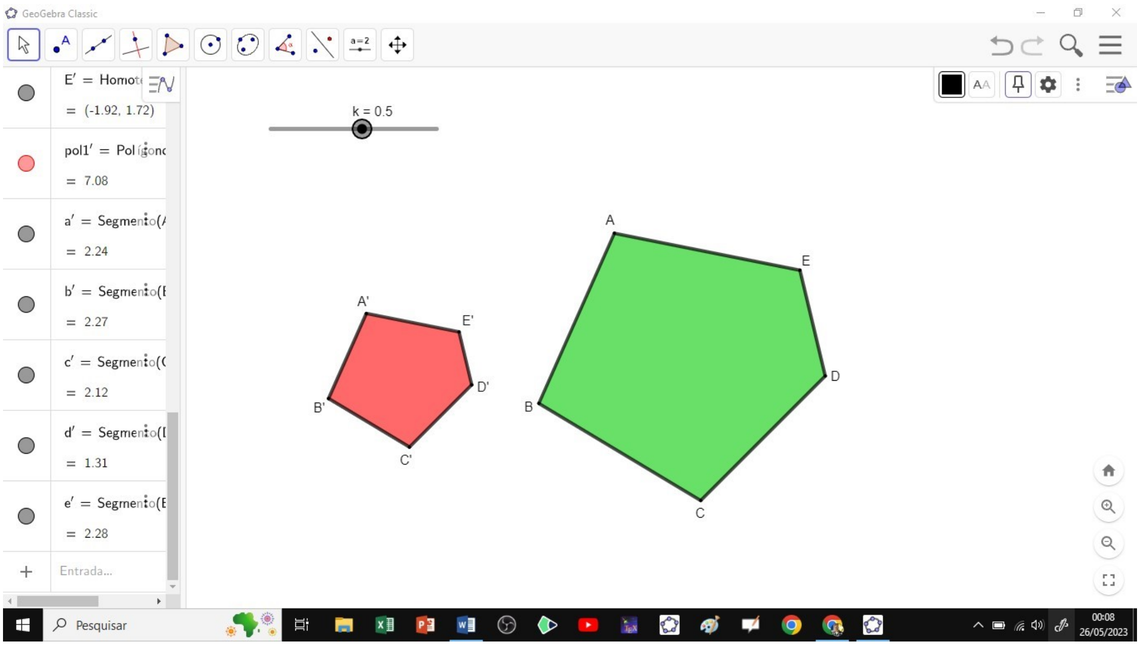
Passo 4: Mova o ponto F para qualquer região do plano fora da área interna do pentágono $ABCDE$. Com isso podemos visualizar as mesmas homotetias elencadas no **Passo 3** por uma ótica diferente (ver Figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15).

Figura 4.12 – Janela do GeoGebra e a homotetia direta por ampliação



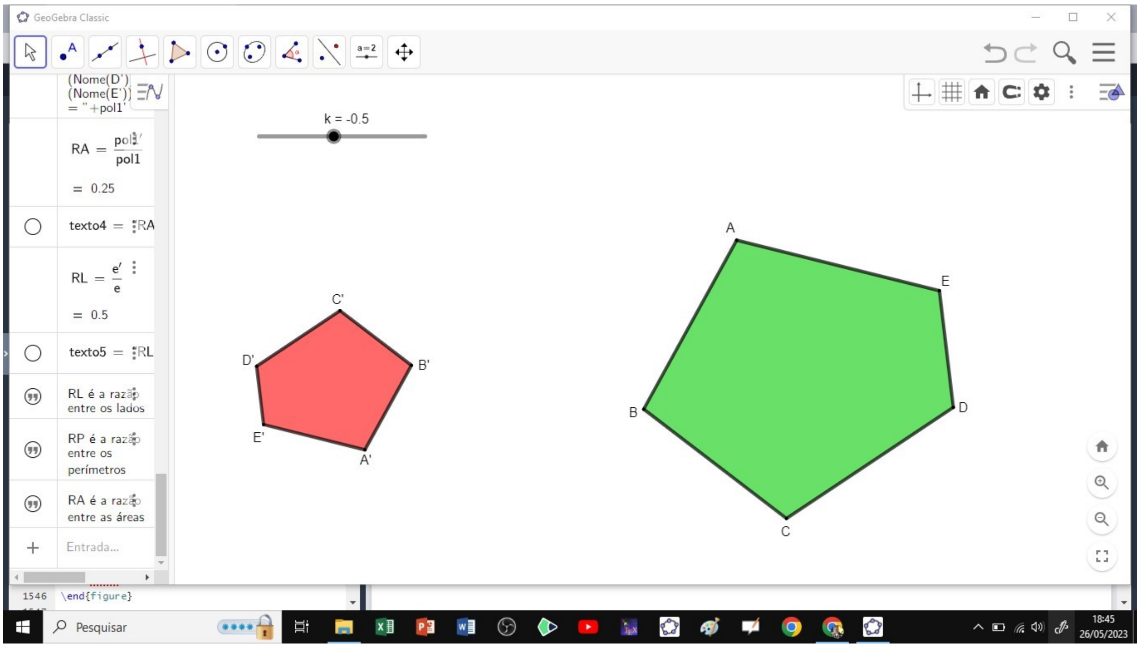
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.13 – Janela do GeoGebra e a homotetia direta por redução



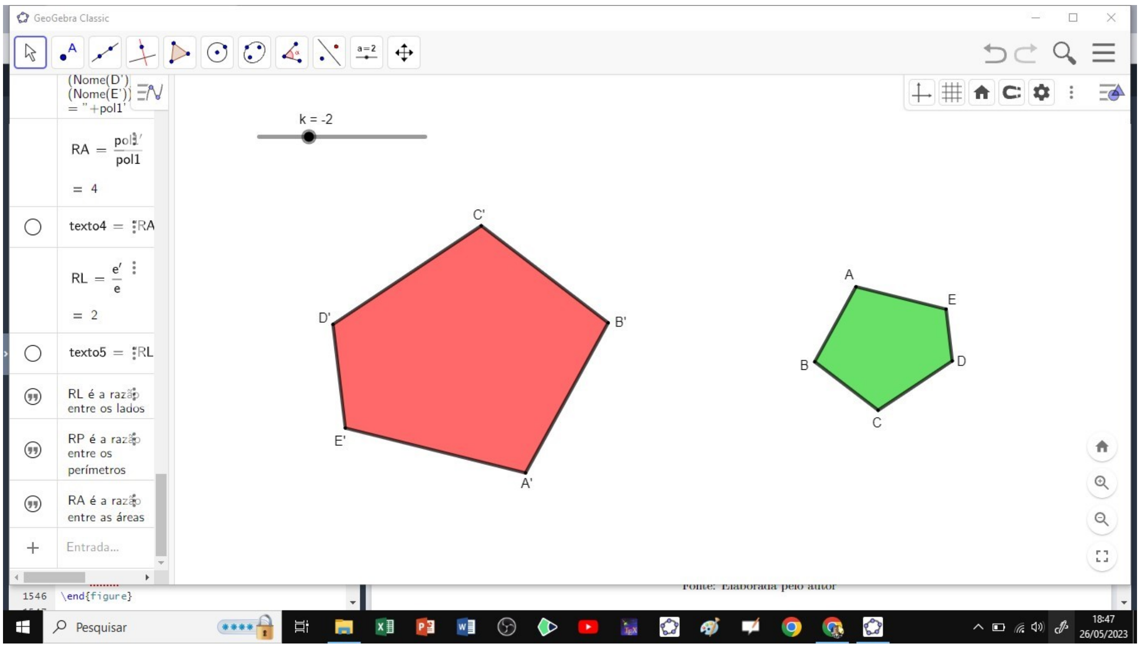
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.14 – Janela do GeoGebra e a homotetia inversa por redução



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

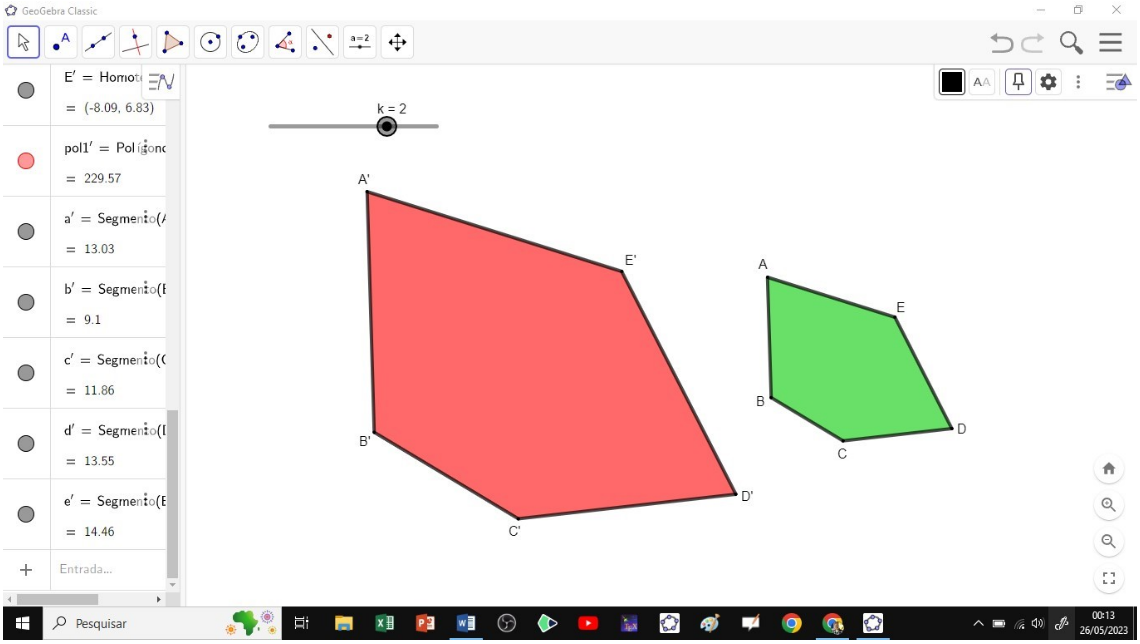
Figura 4.15 – Janela do GeoGebra e a homotetia inversa por ampliação



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

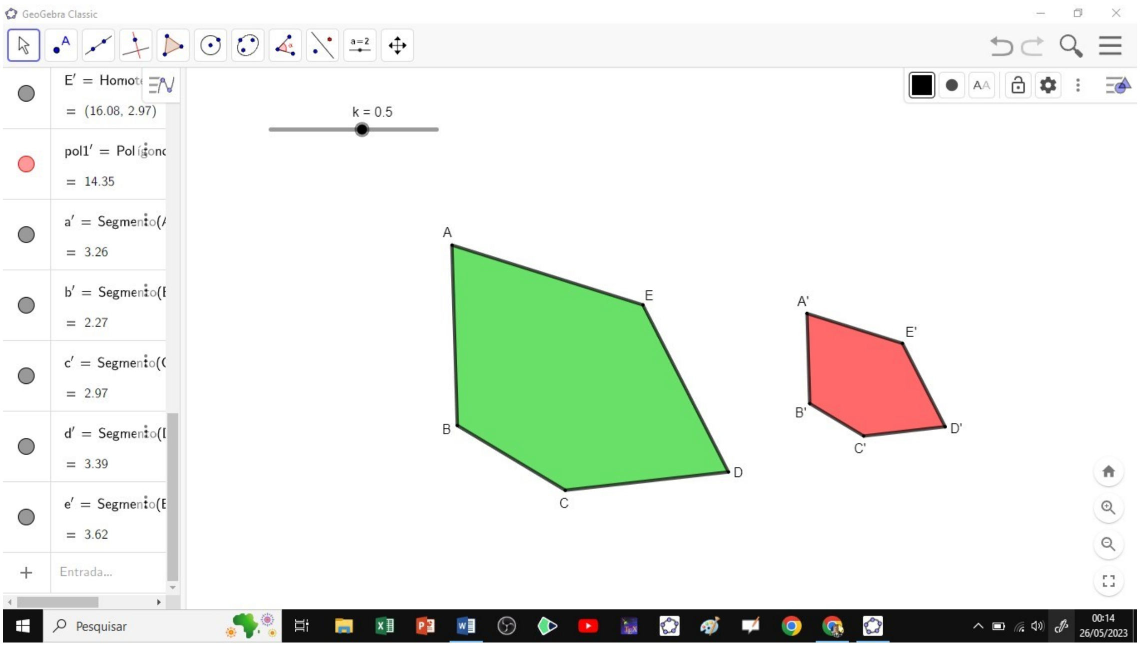
Passo 5: Mantenha o ponto F em qualquer região do plano fora da área interna do pentágono $ABCDE$ e mova os vértices deste pentágono formando qualquer figura com 5 lados ou menos. Com isso podemos visualizar outras figuras homotéticas à figura gerada após mover os vértices. (ver Figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19).

Figura 4.16 – Janela do GeoGebra e o novo pentágono homotético diretamente por ampliação



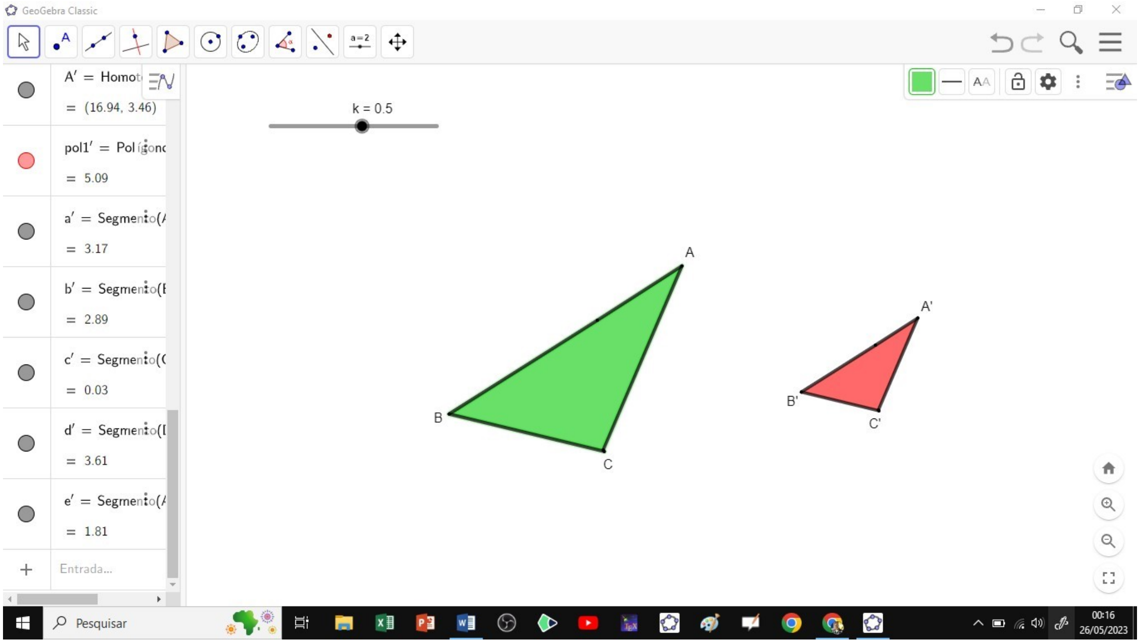
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.17 – Janela do GeoGebra e o novo pentágono homotético diretamente por redução



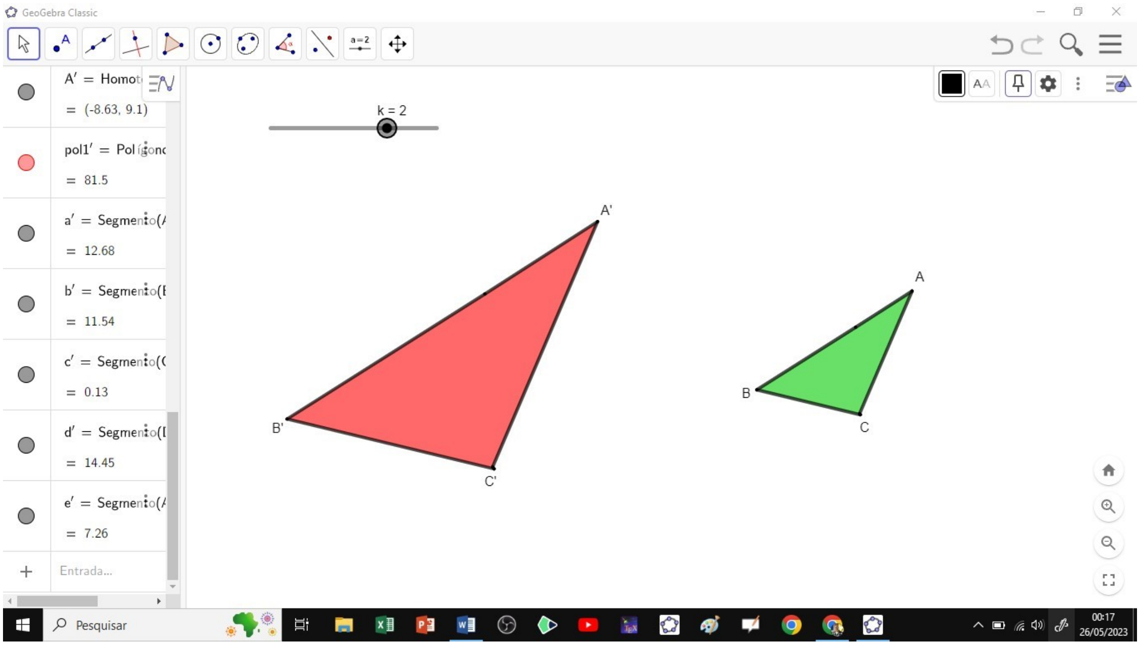
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.18 – Janela do GeoGebra e o triângulo homotético diretamente por redução



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.19 – Janela do GeoGebra e o triângulo homotético dirtamente por ampliação



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Com isso, finalizamos a resolução.

4.2.2 Investigando propriedades de área e perímetro através da homotetia no GeoGebra

Outra aplicação importante de semelhança diz respeito ao cálculo de áreas e perímetros de polígonos. Dados dois polígonos semelhantes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$, se k é a razão entre eles, então

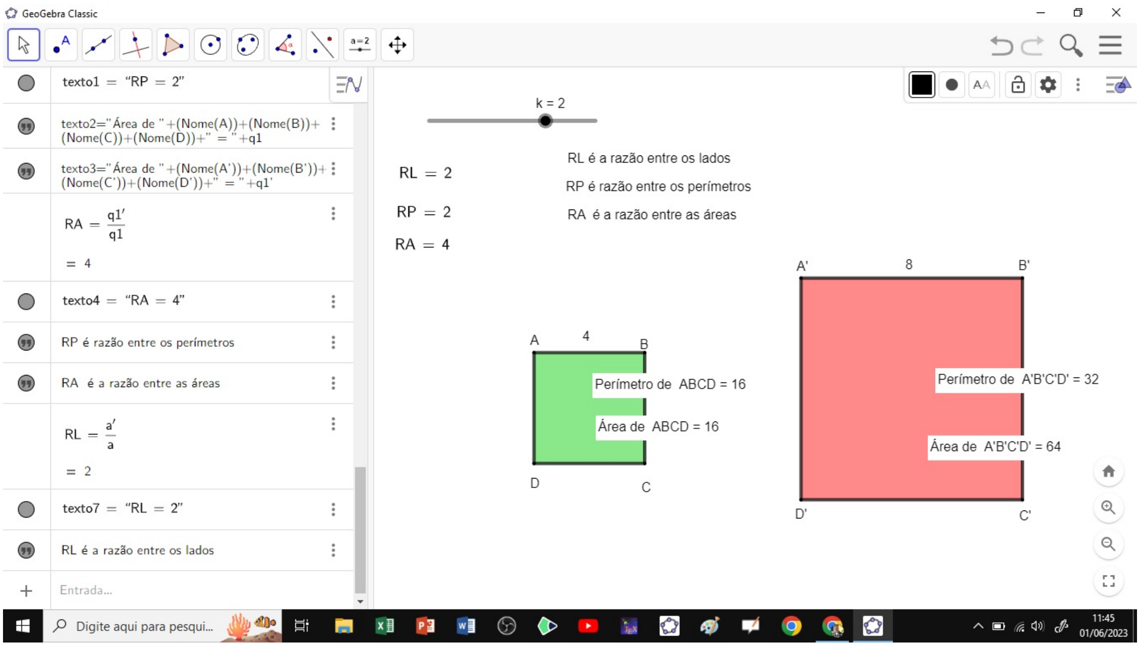
k^2 é a razão entre as áreas e k é a razão entre os perímetros. Na próxima atividade pretende-se evidenciar esses fatos através de atividades utilizando o software GeoGebra.

ATIVIDADE 5: Construa um quadrado $ABCD$ e faça uma investigação sobre a razão entre os lados, os perímetros e as áreas, quando ampliamos ou reduzimos a figura homotética.

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

Passo 1: De maneira análoga, siga os **Passos 1 e 2**, da questão anterior, construa o quadrado $ABCD$ e escolha um dos lados para destacar sua medida. Na sequência clique no ícone "perímetro"e em seguida dê um clique em cada uma das figuras. Após isso, já é possível observar o valor da medida do perímetro de cada figura. Faça o mesmo para a área e terá o valor da medida de cada área (ver Figura 4.20).

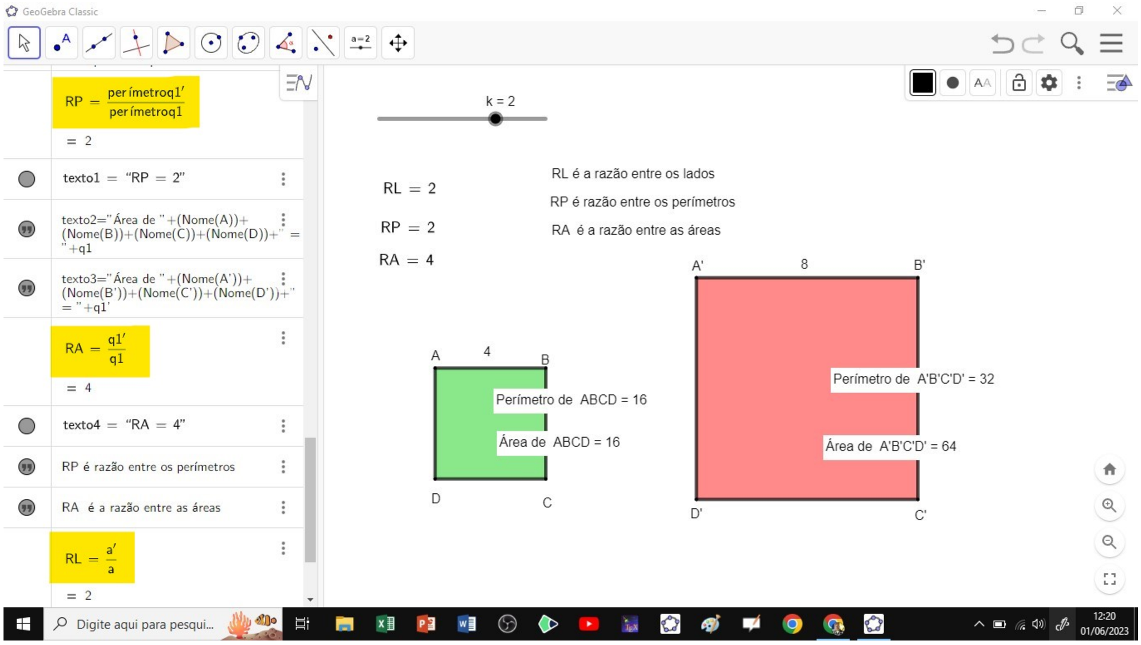
Figura 4.20 – Janela do GeoGebra e as razões de semelhança



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Passo 2: Finalmente, com os valores das medidas indicadas, calcule a razão entre os lados, os perímetros e as áreas, para isso basta clicar na barra de rolamento do lado esquerdo ir até o final e lá onde tem "Entrada", digite as razões desejadas. No caso do quadrado o software nomeia automaticamente os lados de "a"e "a'", as áreas de "$q1$"e "$q1'$"e os perímetros de "perímetro$q1$"e "perímetro$q1'$", ver Figura 4.21, com as razões destacadas. Essas nomenclaturas para as medidas dos lados, áreas e perímetros variam de acordo com cada polígono construído.

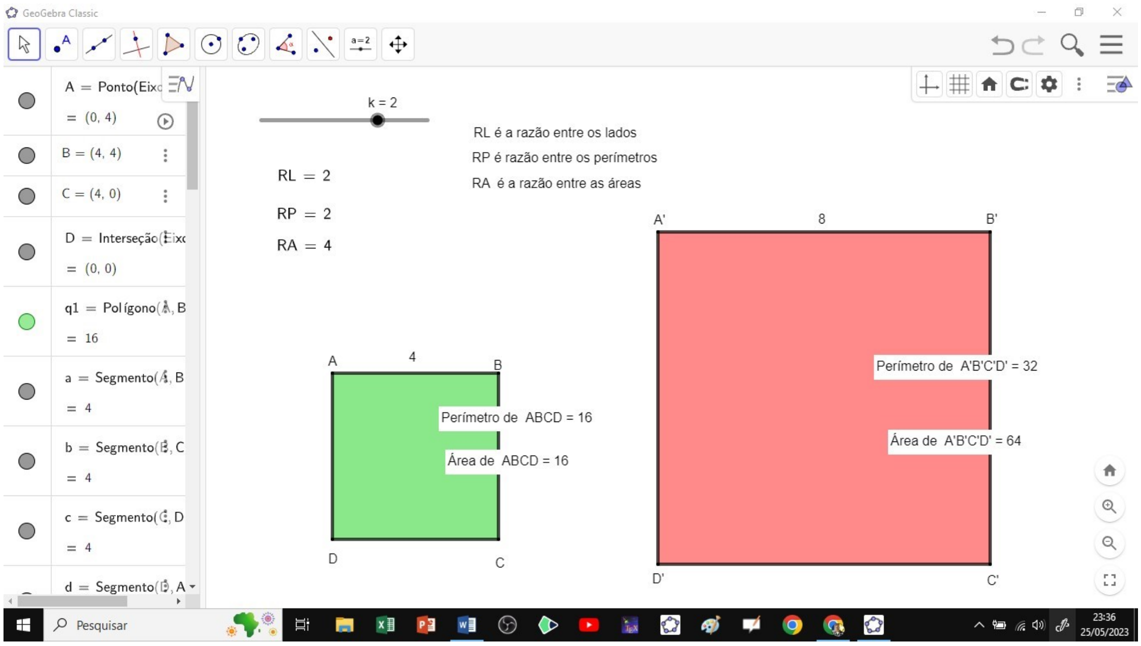
Figura 4.21 – Janela do GeoGebra e as razões de semelhança destacadas



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

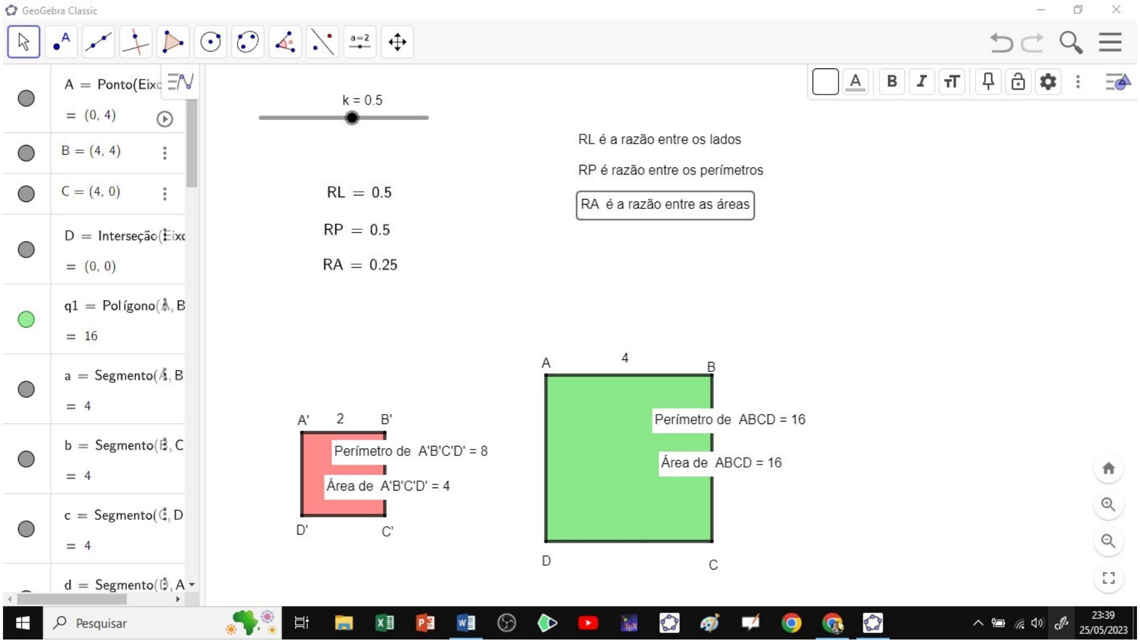
Daí use o controle deslizante e faça a investigação do que ocorre com essas razões ao mudar o valor da razão de semelhança (ver Figuras 4.22, 4.23 e 4.24).

Figura 4.22 – Janela do GeoGebra e os quadrados com razão de semelhança $k = 2$



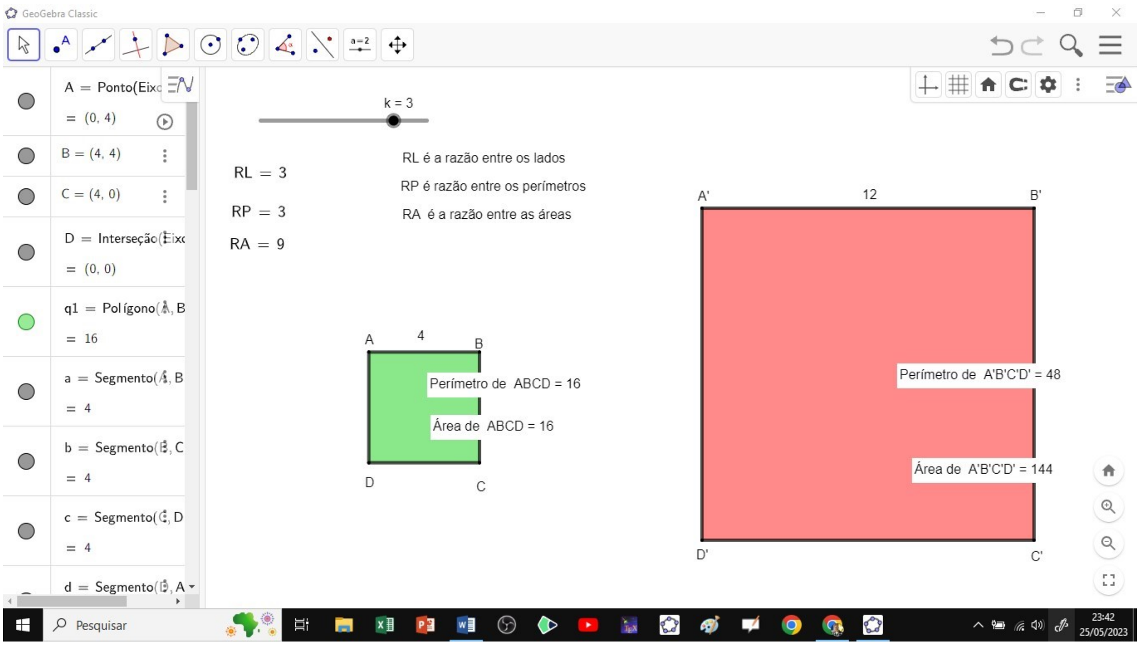
Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.23 – Janela do GeoGebra e os quadrados com razão de semelhança $k = 0,5$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.24 – Janela do GeoGebra e os quadrados com razão de semelhança $k = 3$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

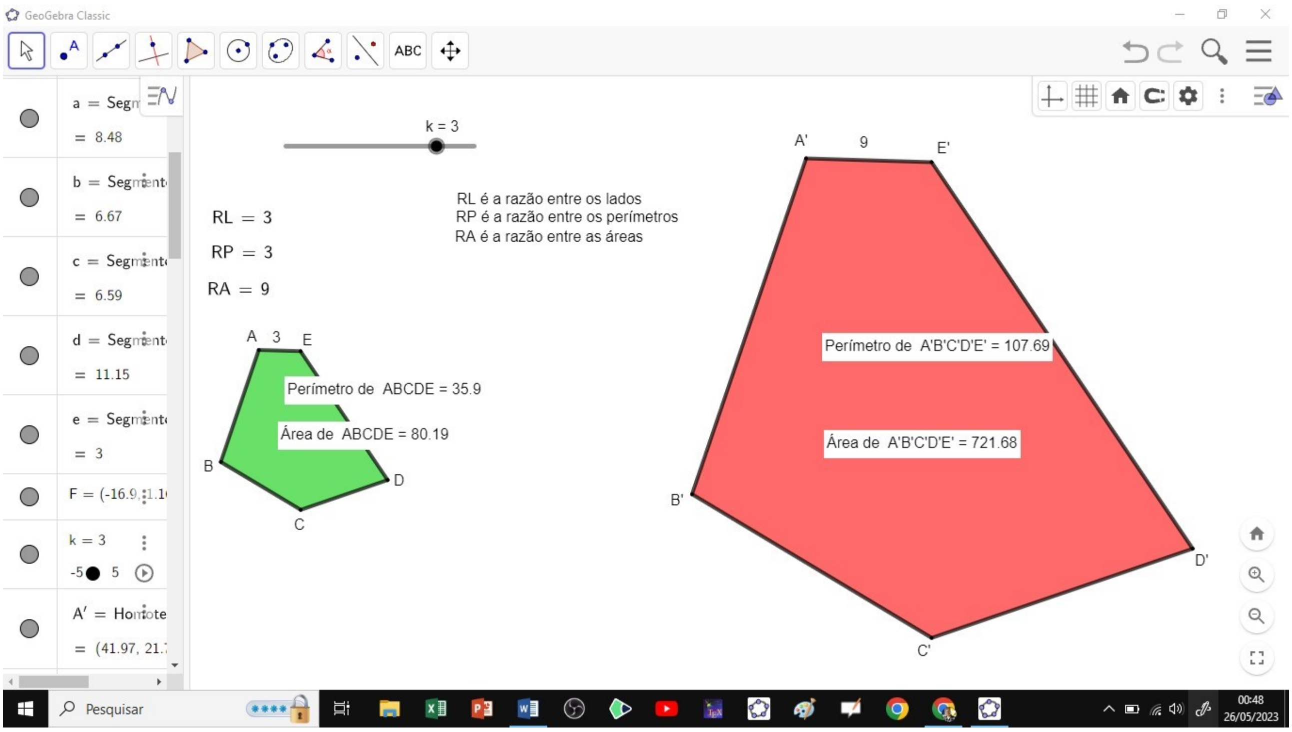
Analisando a Figura 4.22, podemos observar que para a razão de semelhança $k = 2$, o lado do quadrado maior $A'B'C'D'$ possui o dobro da medida do lado quadrado menor $ABCD$ e com isso seu perímetro também é o dobro, mas, a medida da área não é o dobro e sim, é quatro vezes a medida da área do quadrado menor. Isso ocorre pelo fato da razão de semelhança entre as áreas ser o quadrado da medida da razão de semelhança entre os lados, pois, como a razão entre os lados é $k = 2$, a razão entre as áreas é $(k^2 = 2^2 = 4)$. Assim, a área do quadrado maior é $(4 \cdot 16 = 64)$.

Na Figura 4.23, podemos observar que para a razão de semelhança $k = 0,5$, o quadrado $A'B'C'D'$ tem o lado medindo metade da medida do lado do quadrado $ABCD$ e com isso seu perímetro também é metade, mas, a área não é metade e sim $\frac{1}{4}$ da área do quadrado $ABCD$, pois $(0,5^2 = 0,25 = \frac{1}{4})$. Assim, sua área é $(\frac{1}{4} \cdot 16 = 4)$.

Já na Figura 4.24, temos a razão de semelhança $k = 3$. Logo, o lado do quadrado $A'B'C'D'$ é o tríplo da medida do lado do quadrado $ABCD$ e seu perímetro também é o triplo. Já a área é nove vezes a área do quadrado $ABCA$, pois, como a razão de semelhança $k = 3$, a razão entre as áreas é $(k^2 = 3^2 = 9)$, portanto, a área do quadrado $A'B'C'D'$ é $(9 \cdot 16 = 144)$.

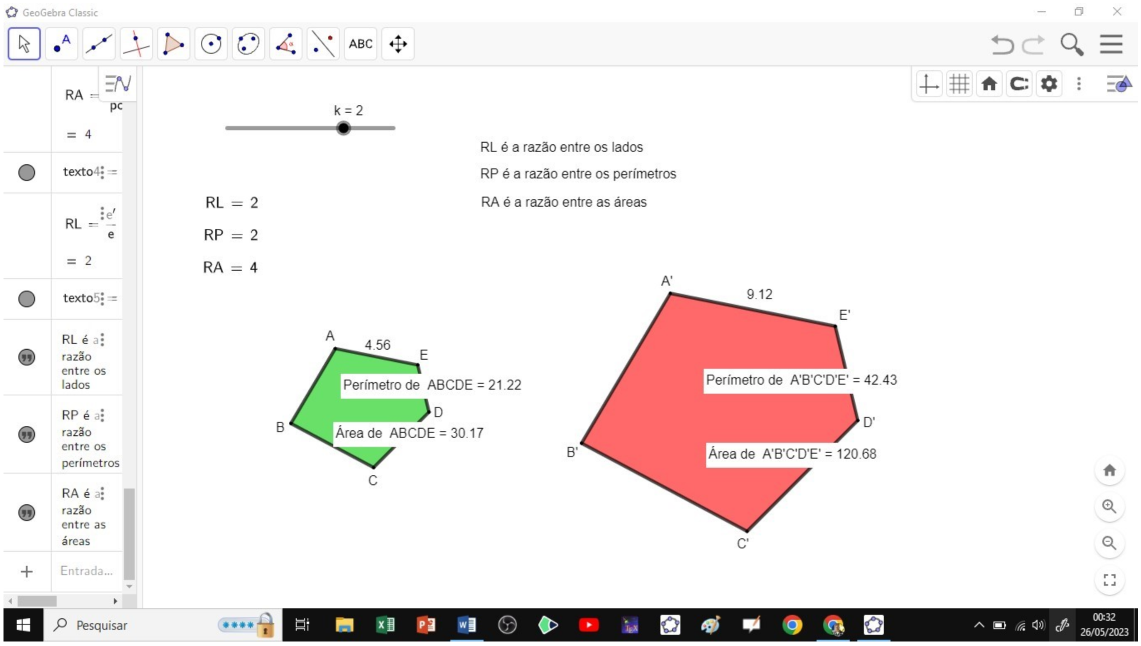
Essas mesmas propriedades observadas anteriormente no quadrado, usando a homotetia direta, também é válida para a homotetia inversa. Assim como, também é válida para qualquer tipo de polígono (ver Figuras 4.25 e 4.26). A Figura 4.25 pode ser acessada no link: https://www.geogebra.org/m/d4wanywz.

Figura 4.25 – Janela do GeoGebra e os pentágonos com razão de semelhança $k = 3$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Figura 4.26 – Janela do GeoGebra e os pentágonos com razão de semelhança $k = 2$



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Com isso, finalizamos a resolução.

Espera-se com estas atividades propostas nesta seção, que o aluno aprenda o conceito de homotetia de uma maneira mais simples, dinâmica e ilustrativa, mostrando-o o quanto o uso deste software pode acrescentar no seu processo de aprendizagem. Aqui é possível aprofundar de forma significativa os conceitos de homotetia direta e inversa através da variação da razão de homotetia e da visualização do comportamento da nova figura construída pelo software. Também é possível observar o que acontece com a área e o perímetro quando altera a razão da homotetia, ou seja, a razão de semelhança.

Com um procedimento análogo, o professor pode investigar outras propriedades envolvendo os elementos das figuras semelhante, como por exemplo, as relações entre ângulos, diagonais, alturas, etc.

4.3 Atividade usando régua, compasso e o software OpenBoard

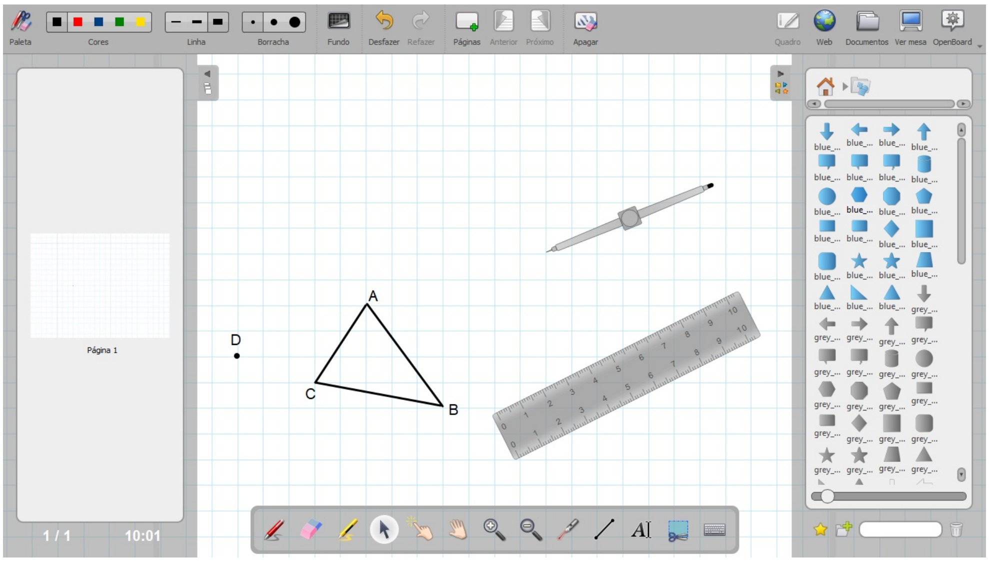
Outra ferramenta prática para a construção de figuras é o software OpenBoard. Com ele podemos construir uma figura simulando ferramentas tradicionais como a régua, o compasso e caso seja necessário, o transferidor. O processo de construção é semelhante ao utilizado com as ferramentas tradicionais e a folha de papel, o que vai diferir é que esse processo é realizado na tela do computador. A seguir, trouxemos uma atividades de construção de figuras usando essa ferramenta tecnológica.

ATIVIDADE 6: Dado um triângulo ABC. Usando as ferramentas de régua e compasso no software Openboard, construa um outro triângulo $A'B'C'$, semelhante ao primeiro com razão de semelhança $k = 2$.

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

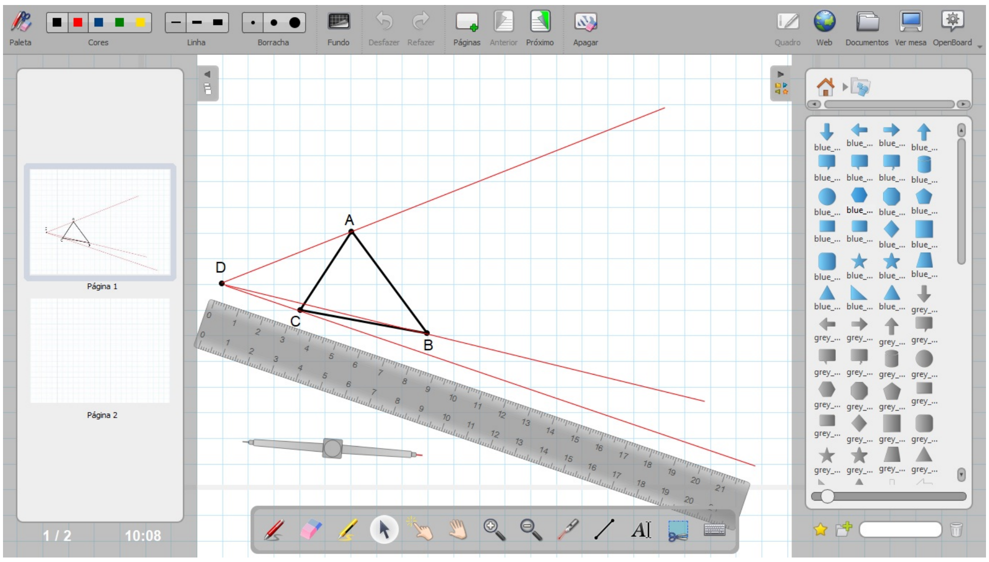
Passo 1: Abra a janela do OpenBoard, use a régua e construa um triângulo ABC. Em seguida insira um ponto D em qualquer região do plano, nesse caso o ponto foi inserido antes do triângulo construído, trace semirretas a partir do ponto D passando por cada vértice do triângulo ABC (ver Figuras 4.27 e 4.28).

Figura 4.27 – Janela do OpenBoard e a construção do triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

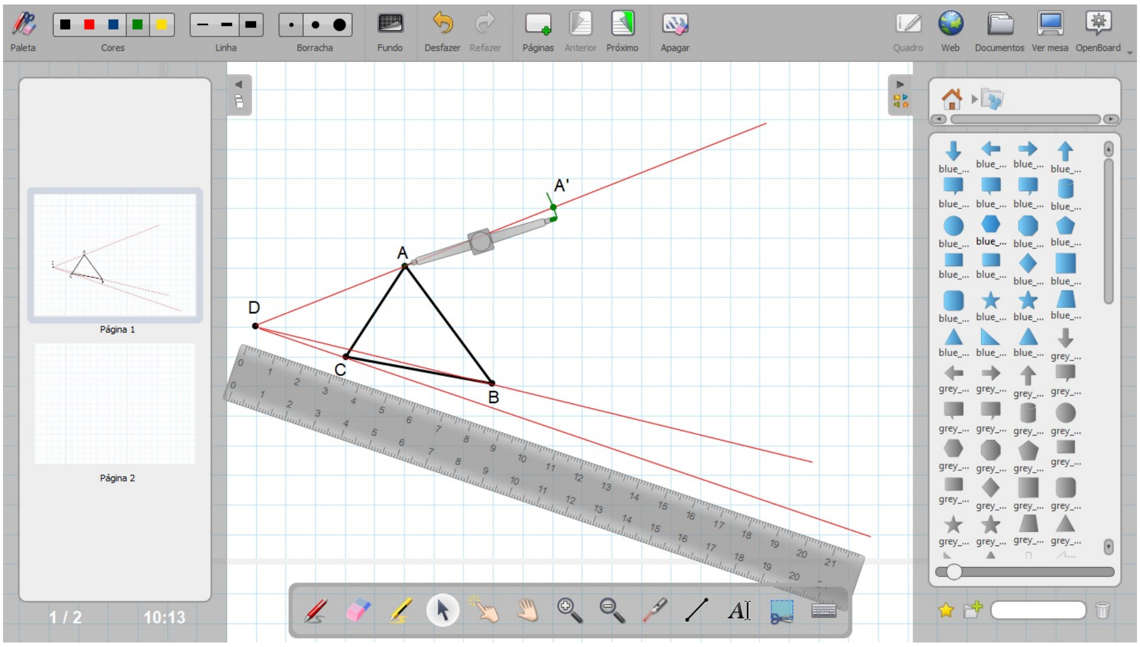
Figura 4.28 – Janela do OpenBoard e a construção do triângulo $A'B'C'$ parte I



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

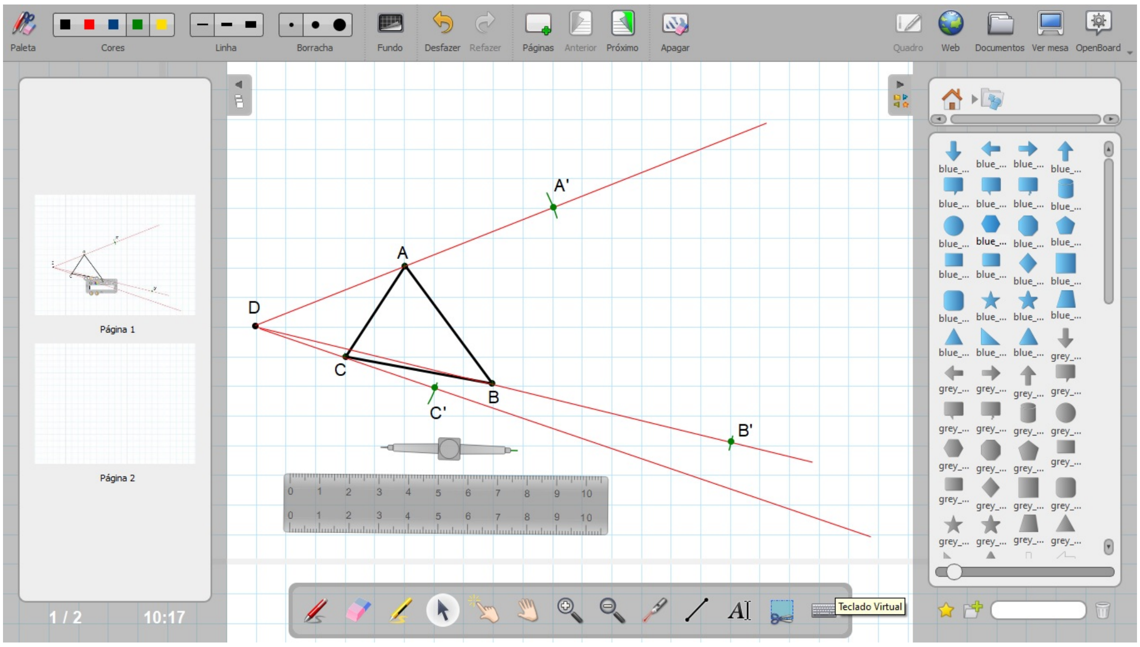
Passo 2: Agora, use o compasso, coloque a ponta seca no vértice A e faça a abertura até o ponto D, gire o compasso sobre a semirreta $\overrightarrow{DA}$ e marque o ponto A'. Repita esse processo para os vértices B e C (ver Figuras 4.29 e 4.30).

Figura 4.29 – Janela do OpenBoard e a construção do triângulo $A'B'C'$ parte II



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

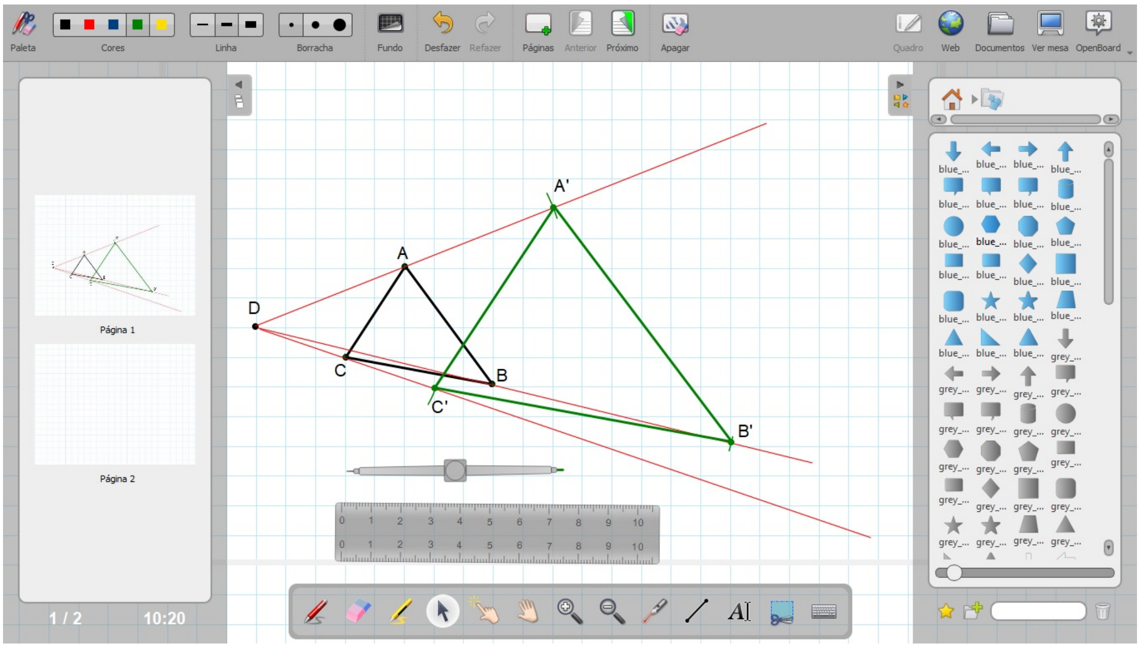
Figura 4.30 – Janela do OpenBoard e a construção do triângulo $A'B'C'$ parte III



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Passo 3: Finalmente, com os três pontos A', B' e C', que serão os vértices do triângulo construído, use a régua e una esses três pontos. com isso, temos o triângulo $A'B'C'$ solicitado na atividade (Figura 4.31).

Figura 4.31 – Janela do OpenBoard e o triângulo $A'B'C'$ construído



Fonte: Elaborada pelo autor, 2023.

Nesta atividade exploramos a proporcionalidade entre os lados através da homotetia direta. Como o comprimento do compasso foi de cada vértice do triângulo ABC até o ponto externo D e depois de girar sobre a reta, marcou-se um ponto com esse mesmo comprimento, temos então uma razão de semelhança $k = 2$, ou seja, o triângulo homotético $A'B'C'$ tem cada lado medindo o dobro do lado correspondente ao triângulo ABC e pelo fato dos lados correspondentes serem proporcionais, segue da Proposição 3.1 que os ângulos correspondentes são iguais.

Espera-se com a atividade proposta nesta seção, que o aluno consiga compreender melhor e aprimorar a técnica de construção de figuras com o uso de régua e compasso seja usando o recurso tecnológico do software OpenBoard, seja, usando os equipamentos físicos tradicionais, pois a atividade prática é fundamental para consolidação da aprendizagem.

4.4 Atividades de semelhança com o uso de materiais concretos

O uso de material concreto no ensino de semelhança, além de ser uma maneira lúdica de trabalhar o conteúdo, também vai estimular o aluno a desenvolver o raciocínio lógico matemático, através da interação entre o objeto físico e a teoria aplicada. A seguir, propomos atividades com o uso de alguns materiais concretos, tais como pedaços de madeira, disco de vinil, CD, barbante, fita métrica, régua e compasso.

ATIVIDADE 7: Usando seis pedaços de madeira ou outro objeto rígido retilíneo, com medidas 12 cm, 16 cm, 20 cm, 24 cm, 32 cm e 40 cm. Construa dois triângulos, sendo um com as três primeiras medidas e o outro com as demais medidas. Verifique se os triângulos são semelhantes e posteriormente investigue se com quaisquer das três medidas é possível construir um triângulo.

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

Note que as três primeiras medidas formam um triângulo retângulo, com a hipotenusa igual a 20 cm. Além disso, é fácil ver, que as outras três medidas formam um outro triângulo retângulo com os lados medindo o dobro das medidas do primeiro triângulo. Com isso temos que os triângulos são semelhantes, com razão $k = 2$ ou $k = \frac{1}{2}$, dependendo da ordem.

Agora, escolhendo três medidas quaisquer, só será possível construir um triângulo, caso a soma de duas medidas, seja maior que a terceira. Se escolhermos as medidas 12 cm, 16 cm e 40 cm, não será possível construir um triângulo, pois não atende as propriedades da desigualdade tringular, concluindo assim a resolução.

Espera-se com esta atividade que o aluno compreenda o conteúdo de uma forma mais simples e dinâmica, desenvolvendo suas habilidades e sua capacidade de raciocínio ao construir os triângulos e perceber a semelhança entre eles, assim como a importância da relação teoria versus prática, com o uso do material concreto. Além disso, o aluno tem a possibilidade de ampliar seus conhecimentos ao observar que devido as propriedades da desigualdade tringular, nem sempre é possível construir um triângulo usando três medidas diferentes. Com esta atividade, também é possível abordar as características dos triângulos retângulos e o Teorema de Pitágoras.

ATIVIDADE 8: Usando um disco de vinil, uma mídia de CD e um barbante, construa uma circunferência com cada um desses objetos circulares e o barbante, em seguida calcule a razão entre o comprimento de cada circunferência e seu respectivo diâmetro. Investigue os resultados e conclua que as razões encontradas são iguais, que as circunferências são semelhantes e que essa razão é o valor aproximado de π.

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

Inicialmente, utilizando o barbante, faça o contorno no disco de vinil e de forma análoga faça o mesmo no CD. Em seguida, com o uso de uma régua ou de uma fita métrica verifique a medida de cada um dos diâmetros e, na sequência, meça cada um dos pedaços de barbantes que formam as circunferências. Agora, com os valores do comprimento de cada circuferência e seu respectivo diâmetro, é só calcular as razões e fazer a investigação para chegar as conclusões solicitadas, concluindo assim a resolução.

Espera-se com esta atividade que o aluno compreenda de maneira simples e dinâmica, que duas circunferências, independentemente do tamanho, são sempre semelhantes, ver Teorema 3.5 e que a razão entre a medida do seu comprimento e do respectivo diâmetro é sempre uma constante com valor aproximado de $3,14$, denominado π. De fato, a importância do estudo do π, vem descrito nos PCN ao afirmar que

> outro irracional que pode ser explorado no quarto ciclo é o numero π. De longa história e de ocorrência muito freqüente na Matemática, o número π nessa fase do aprendizado aparece como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Essa razão, sabe-se, não depende do tamanho da circunferência em virtude do fato de que duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes (BRASIL, 1998, p. 106).

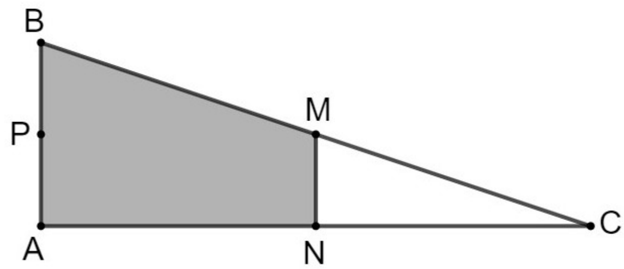
Assim, ressaltamos a importância de que trabalhar o conteúdo de semelhança de figuras planas de forma prática, seja usando ferramentas tecnológicas ou materiais concretos, possibilita ao aluno uma aprendizagem significativa. Já ao professor, como vem descrito nos PCN, permite verificar se o aluno é capaz de perceber que,

> por meio de diferentes transformações de uma figura no plano (translações, reflexões em retas, rotações), obtêm-se figuras congruentes e, por meio de ampliações e reduções, obtêm-se figuras semelhantes e de aplicar as propriedades da congruência e as da semelhança em situações-problema (BRASIL, 1998, p. 93).

4.5 Abordagem de semelhança no ENEM

Para as atividades seguintes, selecionamos questões de semelhança aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A ideia aqui é mostrar uma aplicação mais bem elaborada e contextualizada do conteúdo de semelhança, fazendo uma análise de como esse conteúdo pode ser abordado em provas nacionais.

ATIVIDADE 9: (ENEM 2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:
(A) à mesma área do triângulo AMC.

(B) à mesma área do triângulo BNC.
(C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
(D) ao dobro da área do triângulo MNC.
(E) ao triplo da área do triângulo MNC.

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

Como M e N são os pontos médios dos lados BC e AC, respectivamente, temos então que MN é a base média do triângulo ABC, logo é paralelo ao lado AB e também $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{NC}$. Daí, segue do Teorema 3.3 que os triângulos BAC e MNC são semelhantes. Seja k, a razão de semelhança. Então,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{NC}} = k \Longrightarrow \frac{2 \cdot \overline{NC}}{\overline{NC}} = k \Longrightarrow k = 2.$$

Logo, a razão entre suas áreas será

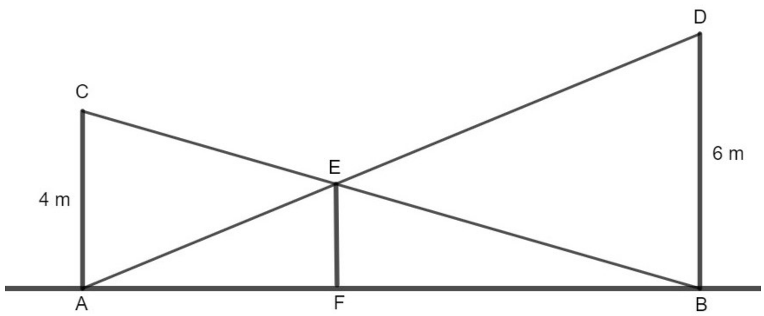
$$k^2 = 2^2 = 4.$$

Assim, sejam S a área do triângulo BAC, R a área da região rachurada que será calçada com concreto e T a área do triângulo MNC. Como $S = R + T$, então temos

$$\frac{S}{T} = k^2 \Longrightarrow \frac{R+T}{T} = 4 \Longrightarrow 4T = R + T \Longrightarrow 3T = R \Longrightarrow R = 3T.$$

Portanto, a área da região R que será calçada com concreto, corresponde ao triplo da área T do triângulo MNC. Logo, a alternativa correta é a letra "E".

ATIVIDADE 10: (ENEM 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura, a seguir, representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$?

(A) 1 m
(B) 2 m
(C) $2,4$ m
(D) 3 m
(E) $2\sqrt{6}$ m

Uma sugestão de resolução é a seguinte:

Do enunciado, temos que os dois postes e a haste são todos perpendiculares ao solo e ao mesmo tempo são paralelos entre si, logo pelo Teorema 3.3 os triângulos ACB e FEB são semelhantes e os triângulos BDA e FEA, também são semelhantes. Assim, temos

$$\frac{\overline{EF}}{4} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}}$$

e

$$\frac{\overline{EF}}{6} = \frac{\overline{FA}}{\overline{AB}}.$$

Somando membro a membro, as duas igualdades anteriores, temos

$$\frac{\overline{EF}}{4} + \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{FA}}{\overline{AB}} \Longrightarrow \frac{2\overline{EF} + 3\overline{EF}}{12} = \frac{\overline{FA} + \overline{FB}}{\overline{AB}}.$$

Agora note que $\overline{FA} + \overline{FB} = \overline{AB}$. Assim,

$$\frac{5\overline{EF}}{12} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} \Longrightarrow \frac{5\overline{EF}}{12} = 1 \Longrightarrow \overline{EF} = \frac{12}{5} \Longrightarrow \overline{EF} = 2,4.$$

Portanto, a haste de sustentação $\overline{EF}$ possui $2,4$ m de comprimento. Logo, a alternativa correta é a letra “C”.

Espera-se com estas atividades que o aluno desenvolva a habilidade de interpretar e resolver uma situação-problema textualizada ou contextualizada, como é o caso das questões do ENEM. Além disso, seja também capaz de compreender que o conceito de semelhança e suas propriedades tem suas aplicações em problemas mais elaborados como foi o caso destas atividades propostas.

5 APLICAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Levando em consideração o tema abordado na pesquisa, este capítulo apresenta o relato da experiência da atividade prática que foi realizada com os alunos e como ocorreu todo o processo.

Também apresentamos os resultados obtidos na pesquisa nas duas etapas em que foram aplicadas as avaliações. Na ocasião, realizamos uma análise destes resultados, a fim de mostrar a importância e eficiência de trabalhar os conteúdos de forma prática com o uso de recursos tecnológicos e materiais concretos.

5.1 Aplicação da pesquisa

A pesquisa aconteceu em duas etapas e foi aplicada na turma do 9° Ano B do Ensino Fundamental II, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, Barão do Abiaí, localizada no Município de Alhandra, estado da Paraíba. A turma é composta de 23 alunos, sendo 5 alunos moradores da zona rural e os demais moradores da zona urbana.

A escolha dessa turma foi feita a partir de uma análise do perfil dos alunos, após um diálogo com a turma e constatado que a maioria deles apresentavam dificuldades de aprendizagem nos conteúdos de Matemática, principalmente quando se tratava de Geometria.

No primeiro momento da etapa 1, iniciamos com um questionário aplicado no dia 17 de maio de 2023 (Apêndice A), para ter uma ideia do conhecimento prévio dos alunos a respeito do conteúdo de semelhança de figuras planas. Após a aplicação deste questionário foi iniciado a exposição do conteúdo, que nos dias, 22, 23 e 24 de maio de 2023, num total de 5 horas aula, foi ministrado de forma tradicional, usando apenas o livro didático, o quadro, pincel e régua.

Finalizada a exposição do conteúdo, os alunos foram submetidos a uma avaliação que continha duas questões sobre semelhança de figuras planas, mais precisamente sobre semelhança de triângulos (Apêndice B). Esta avaliação foi aplicada no dia 24 de maio de 2023 e os participantes tiveram um tempo total de 40 minutos para resolverem as questões propostas.

Após todo esse processo, damos início a etapa 2. No primeiro momento desta etapa, trabalhamos em sala de aula, no dia 29 de maio de 2023, com a construção de figuras homotéticas usando os softwares GeoGebra e OpenBoard. Na ocasião, os alunos puderam praticar e visualizar relações de semelhança entre figuras através da homotetia. Também investigaram propriedades de áreas e perímetros através da semelhança.

Na sequência, no dia 30 de maio de 2023, os alunos participaram de uma atividade prática fazendo a medição da altura das árvores existentes na área verde da escola usando uma fita métrica, um bastão de 1 metro de comprimento e a medida da sombra projetada no solo. Na ocasião, eles puderam observar na prática o que os livros didáticos mostram na teoria, também puderam apreciar e entender a relação entre a matemática e a natureza ao nosso redor.

Após esta atividade da medição das alturas das árvores, os alunos participaram de uma outra, usando um espelho e uma fita métrica. Nesta atividade eles mediram a altura da parede da escola, colocando o espelho no chão na frente da parede, a certa distância desta e, posicionando-se na frente do espelho, afastando-se deste até que o topo da parede fosse visualizado no centro do espelho. Os detalhes desta atividade podem ser encontrados na Atividade 3, no Capítulo 4. Finalizadas estas duas atividades práticas realizadas fora da sala de aula, os alunos retornaram para sala e particiaram de um debate sobre os resultados encontrados.

No dia seguinte, em 31 de maio de 2023, os alunos participaram de uma última atividade prática, desta vez em sala de aula, usando pedaços de madeiras com tamanhos distintos. Na, ocasião eles investigaram as propriedades da desigualdade triangular verificando se três medidas distintas formam um triângulo e caso conseguissem formar um triângulo, verificaram se eram semelhantes.

Após essa sequência de atividades práticas, os alunos foram submetidos a uma outra avaliação, que novamente, continha duas questões sobre semelhança de triângulos e mais uma questão teórica relacionada ao tema semelhança de figuras (Apêndice C). Esta avaliação foi aplicada também no dia 31 de maio de 2023 e os participantes tiveram um tempo total de 40 minutos para resolverem as questões propostas.

No segundo momento da etapa 2, última etapa da pesquisa, foi aplicado no dia 5 de junho de 2023, um questionário final, para sondar a opinião dos alunos com relação as atividades propostas nas duas etapas (Apêndice D). Além disso, verificar se após todo o processo de aula prática com o uso dos recursos tecnológicos e materiais concretos, o nível de aprendizagem do conteúdo foi significativo.

5.2 Análise dos resultados

Na primeira etapa da pesquisa, do total de 23 alunos matriculados na turma, apenas 22 participaram do questionário inicial (Apêndice A) e da primeira aplicação da avaliação (Apêndice B), tendo os seguintes resultados.

Relativo ao questionário, quando foi questionado na pergunta 1 se eles já haviam estudado ou ouvido falar em semelhança de figuras, apenas 3 alunos responderam que sim e 19 responderam que não, o que mostra que os conteúdos de Geometria são poucos abordados em sala de aula. Na pergunta 2, foi repetido o mesmo questionamento anterior só que relacionado a semelhança de triângulos e apenas 5 alunos responderam que sim e 17 responderam que não, ou seja, um número significativamente pequeno da turma teve algum contato com o conteúdo de semelhança de triângulos. As perguntas 3 e 4 abordaram situações que envolviam respostas pessoais e nesse conexto as alternativas “sim”e “não”, tiveram respostas variadas. Já a pergunta 5, que tratava da dificuldade em compreender o conteúdo de Geometria, 17 alunos responderam que sim, que possuem dificuldades em compreender este conteúdo e apenas 5 alunos responderam que não. Isso mostra a necessidade de uma intervenção pedagógica, no ensino deste conteúdo, que posssa minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Assim, diante da negativa dos alunos no que diz respeito ao estudo de semelhança de figuras e semelhança de triângulos, iniciou-se uma sequência didática sobre o ensino de semelhança de figuras planas, ministrada baseando-se no livro didático, em seguida aplicamos uma avaliação.

Esta avaliação, também aplicada no primeiro momento da etapa 1, composta de duas questões de cálculo de altura usando semelhança de triângulos, teve o resultado seguinte. Nenhum aluno deixou as duas questões sem respostas, apenas 1 aluno acertou as duas questões propostas e 10 alunos erraram as duas questões. Houve também um total de 6 alunos que acertaram apenas a primeira questão e 5 alunos que acertaram parcialmente alguma das questões propostas.

Como já era de se esperar, os alunos não obtiveram um resultado satisfatório na primeira etapa da aplicação, tendo em vista que o conteúdo foi passado apenas de forma expositiva e restrito ao livro didádico.

Assim, dando continuidade a pesquisa, na segunda etapa, fizemos as intervenções pedagógicas aplicando uma série de atividades práticas, com o uso de materiais concretos e softwares. É importante ressaltar que, durante a aplicação das atividades práticas, os alunos participaram massivamente, interagindo e bastante motivados. Além disso, foi possível observar o quanto estavam curiosos em descobrir os resultados dos cáclulos das alturas das árvores e, da altura da parede da escola, sempre questionando se os resultados eram reais.

De volta a sala de aula, iniciou-se um debate acerca do tema trabalhado e das atividades realizadas nas duas etapas. Na ocasião, os alunos fizeram diversos relatos de cunho positivo, enaltecendo o trabalho realizado, afirmando que conseguiram entender melhor o conteúdo, após as atividades práticas realizadas. Foi um momento importante, pois, como professor, pude compreender o quanto é proveitoso para a aprendizagem do aluno, trabalhar a prática associada a teoria.

Na sequência, aplicamos uma segunda avaliação (Apêndice C), que novamente contemplava duas questões de semelhança de triângulos mais uma questão teórica relacionada ao tema semelhança de figuras, cujo resultado descrevemos a seguir. Do total de 23 alunos matriculados na turma, 20 alunos estavam presentes no dia da aplicação. Desse quantitativo, nenhum aluno deixou as três questões sem respostas, 5 alunos acertaram as três questões propostas, 14 alunos acertaram duas questões e 1 aluno acertou apenas uma das três questões, mostrando assim, um resultado satisfatório.

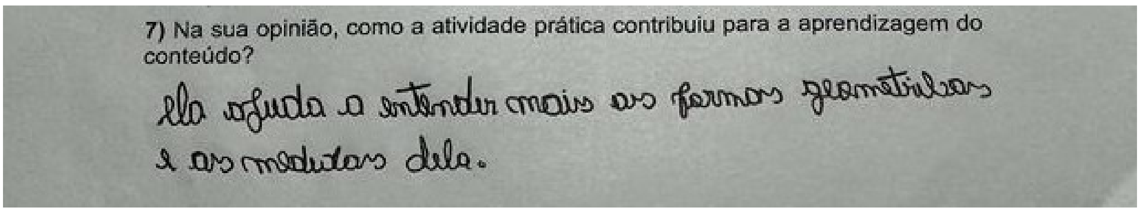
Com relação ao questionário final (Apêndice D), aplicado no dia 5 de junho de 2023.

Neste dia, do total de 23 alunos matriculados na turma, 21 estavam presentes. No entanto, apenas 20 alunos participaram da aplicação do questionário final, pois, 1 desses alunos não esteve presente na aplicação da atividade anterior e para não haver distorções no resultado da pesquisa, não foi permitida a sua participação no questionário final, cujo resultado descevemos a seguir.

A primeira pergunta tratava da exposição do conteúdo feita apenas de forma teórica ser suficiente para a aprendizagem, 6 alunos responderam que sim, que foi suficiente, já 14 responderam que não; a segunda pergunta referia-se ao uso de recursos tecnológicos na construção de figuras, como o GeoGebra e o OpenBoard, 3 alunos responderam que sim, já haviam utilizados tais recursos e 17 responderam que não; a terceira pergunta queria saber se o uso dos recursos tecnológicos despertou a curiosidade e interese no tema, 18 alunos responderam que sim e apenas 2 alunos responderam que não; na quarta pergunta foram questionados sobre a realização de atividade prática de matemática realizada fora da sala de aula, 9 responderam que sim e 11 responderam que não; a quinta pergunta fazia mensão sobre o despertar do interesse pelo tema em virtude das atividades realizadas, 16 alunos responderam que sim e 4 alunos responderam que não; a sexta pergunta questionava se a atividade prática ajudou a perceber como a Geometria pode estar presente ao nosso redor, todos os alunos responderam que sim. Já a sétima e oitava perguntas eram de cunho pessoal.

Na sétima pergunta, quando foi questionado sobre a contribuição da atividade prática para a aprendizagem do conteúdo, apenas 4 alunos se mostraram indiferentes e, 16 alunos concordaram que a atividade prática com o uso do lúdico, de recursos tecnológicos e de materiais concretos, tornou o conteúdo mais simples e compreensível. A seguir, apresentamos as respostas de três alunos, selecionados aleatoriamnete, os quais chamaremos apenas de "aluno A", aluno "aluno B"e "aluno C"(ver Figuras 5.1, 5.2 e 5.3).

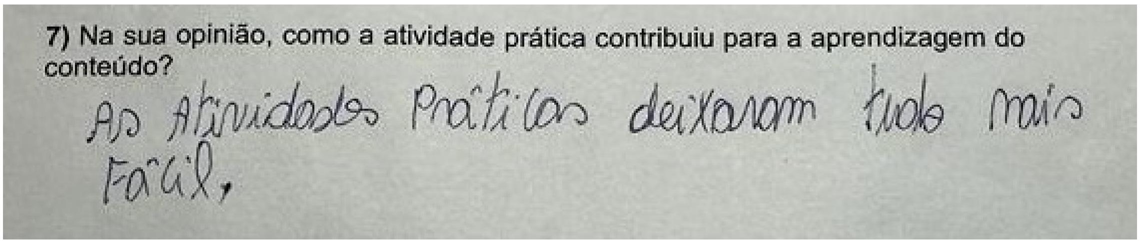
Figura 5.1 – Resposta da pergunta 7 do aluno A


7) Na sua opinião, como a atividade prática contribuiu para a aprendizagem do conteúdo?

ela ajuda a entender mais as formas geometricas e as medidas dela.

Fonte: Questionário aplicado em sala.

Figura 5.2 – Resposta da pergunta 7 do aluno B

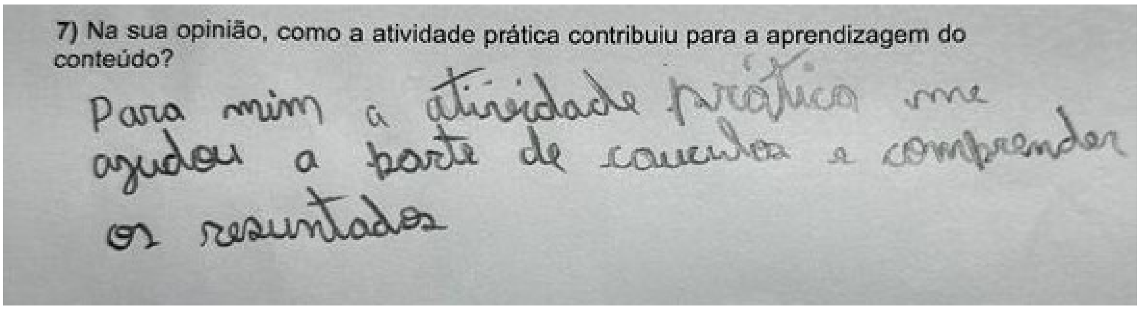


7) Na sua opinião, como a atividade prática contribuiu para a aprendizagem do conteúdo?

As Atividades Práticas deixaram tudo mais Fácil,

Fonte: Questionário aplicado em sala.

Figura 5.3 – Resposta da pergunta 7 do aluno C



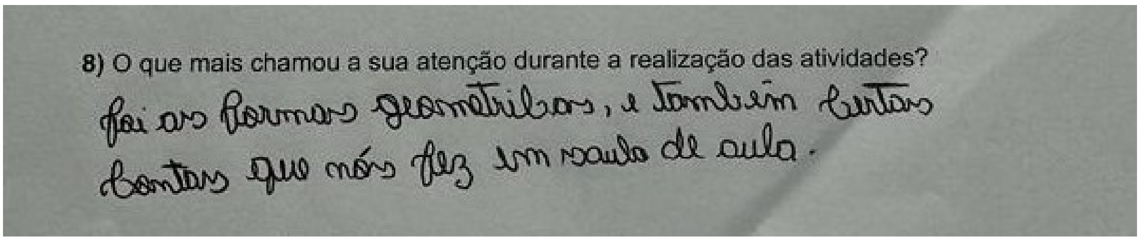
7) Na sua opinião, como a atividade prática contribuiu para a aprendizagem do conteúdo?

Para mim a atividade prática me ajudou a parte de cauculos e compreender os resuntados

Fonte: Questionário aplicado em sala.

Finalmente, na oitava pergunta, que indagava sobre o que mais chamou a atenção durante a aplicação das atividades práticas, 5 alunos responderam que foi a forma de coletar os dados e fazer os cálculos, 3 alunos responderam que foram as formas geométricas e as relações de semelhança, 2 alunos responderam que foi a relação da matemática com a natureza e o nosso meio e, 10 alunos responderam que foi a facilidade nos cálculos após participar de todas as atividades práticas. A seguir, apresentamos as respostas dos três alunos selecionados anteriormente (ver Figuras 5.4, 5.5 e 5.6).

Figura 5.4 – Resposta da pergunta 8 do aluno A

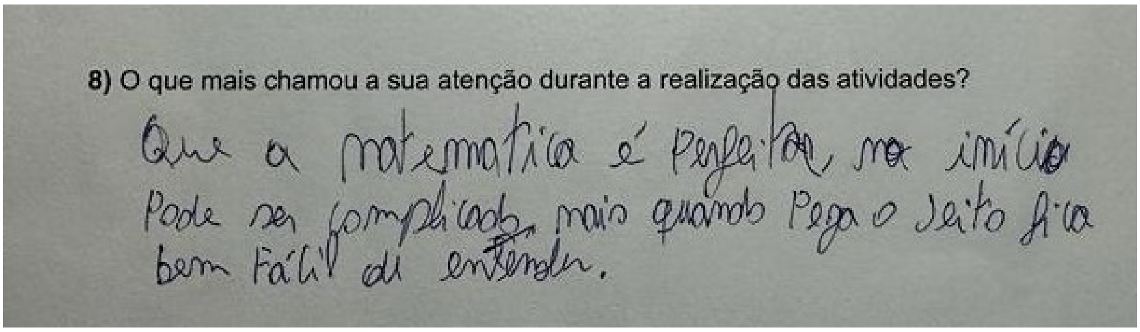


8) O que mais chamou a sua atenção durante a realização das atividades?

foi as formas geometricas, e também certos contas que nós fez em sala de aula.

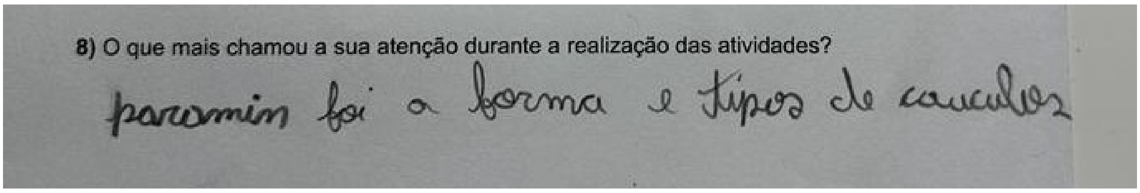
Fonte: Questionário aplicado em sala.

Figura 5.5 – Resposta da pergunta 8 do aluno B



Fonte: Questionário aplicado em sala.

Figura 5.6 – Resposta da pergunta 8 do aluno C



Fonte: Questionário aplicado em sala.

Com esse resultado obtido na etapa 2, fica evidente que apenas a aula expositiva baseando-se somente no livro didático não é suficiente para o aluno aprender os conteúdos, desenvolver e consolidar as habilidades necessárias. Portanto, para que o educando tenha uma aprendizagem significatva, é necessário que o professor traga para sua prática pedagógica uma importante ferramenta auxiliar que é o uso da prática associada a teoria, pois essa prática traz resultados positivos e o processo de aprendizagem é finalizado com a consolidação das habilidades.

Essas habilidades que os alunos devem consolidar, são abordadas nos documentos oficiais, como é o caso dos PCN ao fazer mensão ao uso de recursos tecnológicos e da prática associado a teoria, no ensino de transformações de figuras planas, ao afirmar que

> as atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para este estudo. Atualmente, existem softwares que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. Também é interessante propor aos alunos situações para que comparem duas figuras, em que a segunda é resultante da reflexão da primeira (ou da translação ou da rotação) e descubram o que permanece invariante e o que muda (BRASIL, 1998, p. 124).

Já a BNCC nas competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, na competência número 5 traz a importância do uso de recursos tecnológicos como ferramenta auxiliar na aprendizagem, quando propõe utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BRASIL, 2018, p. 267).

De fato, como podemos ver nas Figuras 5.1, 5.2 e 5.3, os alunos conseguem entender melhor os conteúdos quando a teoria é posta em prática de uma forma lúdica, seja com o uso de recursos tecnológicos, como o GeoGebra e o OpenBoard, ou com o uso de materiais concretos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar o conteúdo de semelhança de figuras planas através dos conceitos e de propostas de atividades que permita ao professor ministrar suas aulas utilizando de estratégias diversificadas, de modo que seus alunos compreendam o conteúdo e suas aplicações, de uma maneira mais simples e agradável.

Diante de tudo que foi proposto e apresentado neste trabalho, fica evidente que o ensino de semelhança de figuras planas, quando realizado de maneira prática com o uso de recursos tecnológicos e de materiais concretos, vai estimular o raciocínio lógico do aluno e também ampliar a sua compreensão de mundo ao seu redor, possibilitando-o o entendimento dos conceitos geométricos e as aplicações em diversas situações cotidianas.

Finalmente, as atividades propostas neste trabalho, busca tratar os conceitos e aplicações do tema abordado de uma maneira simples e diversificada, não se limitando apenas em encontrar o resultado de uma situação problema, mas sim, mostrar na prática, as aplicações, as deduções e as construções dos conceitos trabalhados, de tal forma que aluno organize suas ideias e possa abstraí-las para lhe auxiliar em qualquer problema relacionado ao tema.

Além disso, espera-se que este trabalho possa servir para o professor utilizar como mais um instrumento da sua prática pedagógica e, com isso, proporcionar a seus alunos, uma aula sobre semelhança de figuras planas mais criativa, participativa e atrativa, alcançando assim, uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Matemática Completa 1º ano**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2016.

BRASIL: Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental . **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

ENEM 2010 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em maio de 2023.

ENEM 2013 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em maio de 2023.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRAZÃO, Dilva. **Biografia de Pitágoras**. Disponível em: https://www.ebiografia.com/pitagoras/. Acesso em maio de 2023.

LIMA, Elon Alges. **Medida e Forma em Geometria**. São Paulo, 2019.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 1ª ed. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

OLIVEIRA, Edvaldo Ramalho de; CUNHA, Douglas da Silva. **O uso da tecnologia no ensino da Matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau**. Revista Educação Pública, v. 21, nº 36, 28 de setembro de 2021. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/36/o-uso-da-tecnologia-no-ensino-da-matematica-contribuicoes-do-isoftwarei-geogebra-no-ensino-da-funcao-do-1-grau. Acesso em maio de 2023.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. 2 ed - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. **"Homotetia"**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/homotetia.htm. Acesso em abril de 2023.

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO INICIAL APLICADO NA TURMA ANTES DA EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

1) Você já estudou ou ouviu falar de semelhança de figuras?

( ) SIM ( ) NÃO

2) Você já estudou ou ouviu falar de semelhança de triângulos?

( ) SIM ( ) NÃO

3) Se marcou sim em alguma das perguntas anteriores, você concorda que tal conteúdo chamou sua atenção para a aula?

( ) SIM ( ) NÃO

4) Você acha que estes conteúdos são indispensáveis para o seu desenvolvimento intelectual e compreensão da geometria ao seu redor?

( ) SIM ( ) NÃO

5) Você sempre teve dificuldade em compreender os conteúdos de geometria?

( ) SIM ( ) NÃO

APÊNDICE B - PRIMEIRA AVALIAÇÃO APLICADA NA TURMA

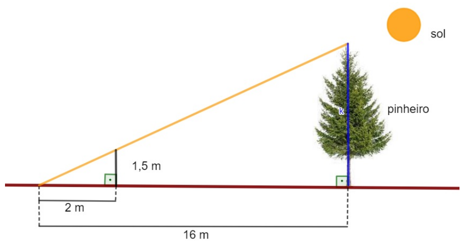
**SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
E DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
1ª GERÊNCIA REGIONAL DE ENSINO
EEEFM BARÃO DO ABIAÍ/ALHANDRA/PB**

PROFESSOR: Josenildo P. de Araújo. **COMPONENTE:** Matemática.

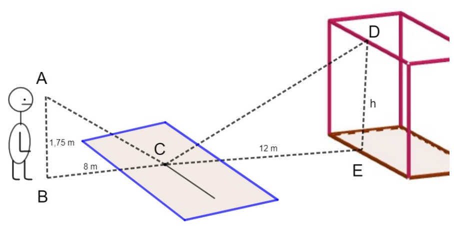
ALUNO(A): ____. **TURMA:** _______.

AVALIAÇÃO DE PESQUISA PARA O MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT(1ª APLICAÇÃO)

QUESTÃO 1: Para medir a altura de um pinheiro fiz o seguinte: peguei um bastão de $1,5m$ e verifiquei que ele projetava uma sombra de $2m$. No mesmo instante, percebi que o pinheiro projetava uma sombra de $16m$, como ilustrado na figura abaixo. Qual é a altura desse pinheiro?



QUESTÃO 2: Calcular a altura da parede de um prédio, supondo que não possa ser medida diretamente, utilizando apenas um espelho e uma fita métrica, como ilustrado na figura abaixo.



APÊNDICE C - SEGUNDA AVALIAÇÃO APLICADA NA TURMA

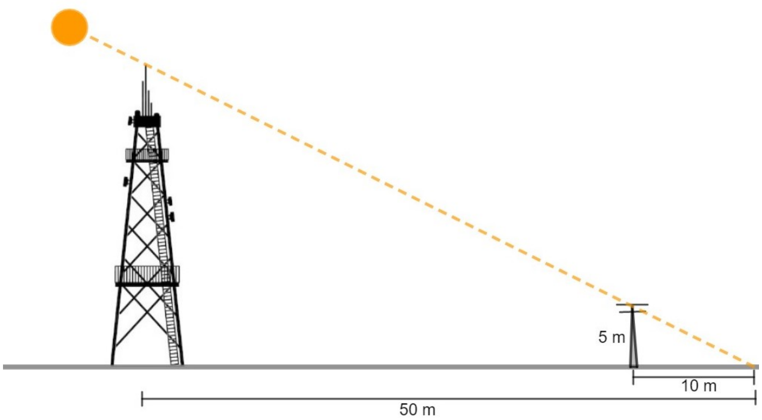
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
E DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
1ª GERÊNCIA REGIONAL DE ENSINO
EEEFM BARÃO DO ABIAÍ/ALHANDRA/PB

PROFESSOR: Josenildo P. de Araújo. **COMPONENTE:** Matemática.

ALUNO(A): ____. **TURMA:** ________.

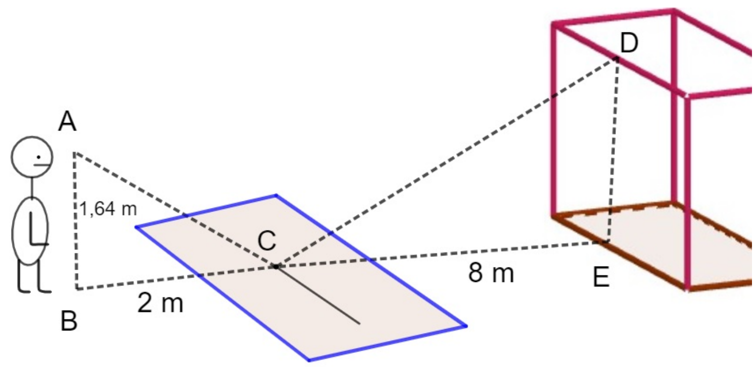
AVALIAÇÃO DE PESQUISA PARA O MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT(2ª APLICAÇÃO)

QUESTÃO 1: Num certo dia de sol, a sombra projetada no solo por uma torre vertical de telefonia, era de 50 metros. No mesmo instante a sombra de um poste, também vertical e de 5 metros de altura, projetada no solo, era de 10 metros. Com base nessas informações, qual a altura da torre de telefonia?



Fonte: Elaborada pelo autor

QUESTÃO 2: Calcular a altura da parede de um prédio, supondo que não possa ser medida diretamente, utilizando apenas um espelho e uma fita métrica, como ilustrado na figura abaixo.



QUESTÃO 3: Explique com suas palavras o que você entende por semelhança de figuras e quais as condiçoes para que duas figuras sejam semelhantes?

APÊNDICE D - QUESTIONÁRIO FINAL APLICADO NA TURMA APÓS A INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA COM AS ATIVIDADES PRÁTICAS

1) Apenas com a exposição teórica do conteúdo, feito no primeiro momento, foi suficiente para você aprender o conteúdo e responder as atividades propostas?
SIM ( ) NÃO ( )

2) Já havia feito alguma atividade de construção de figuras utilizando recursos tecnológicos, como o GeoGebra ou o OpenBoard?
SIM ( ) NÃO ( )

3) O uso desses recursos tecnológicos despertou sua curiosidade e interesse pelo tema abordado?
SIM ( ) NÃO ( )

4) Já havia feito alguma atividade prática de matemática fora da sala de aula?
SIM ( ) NÃO ( )

5) As atividades realizadas despertaram o seu interesse pelo tema abordado?
SIM ( ) NÃO ( )

6) A atividade prática ajudou você a perceber como a Geometria pode estar presente ao nosso redor?
SIM ( ) NÃO ( )

7) Na sua opinião, como a atividade prática contribuiu para a aprendizagem do conteúdo?

8) O que mais chamou a sua atenção durante a realização das atividades?

APÊNDICE E - MATERIAIS CONCRETOS UTILIZADOS NAS ATIVIDADES

Espelho

Trena

Bastão