



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Gilmar Veríssimo da Silva

Um Método de Ensino de Área de Figuras Planas

Campina Grande - PB

Junho/2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



PROFMAT

Gilmar Veríssimo da Silva

Um Método de Ensino de Área de Figuras Planas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB

Junho/2023

S586m Silva, Gilmar Veríssimo da.
Um método de ensino de área de figuras planas / Gilmar Veríssimo da Silva. - Campina Grande, 2023.
117 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.
"Orientação: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes."
Referências.

1. Método de Ensino Matemático. 2. Conceitos Matemáticos. 3. Áreas de Figuras Planas. 4. Kit de Material Manipulável. 5. Sequência Didática. 6. Fórmulas Trigonométricas. I. Fernandes José de Arimatéia. II. Título.

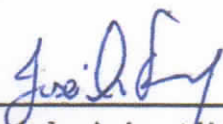
CDU 51-7(043)

Gilmar Veríssimo da Silva

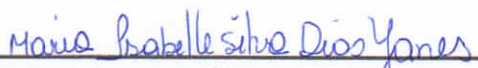
Um Método de Ensino de Área de Figuras Planas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

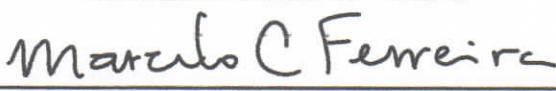
Trabalho aprovado. Campina Grande - PB, 23 de junho de 2023:



Dr. José de Arimatéia Fernandes
Orientador



Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes
Examinadora externa - UEPB



Dr. Marcelo Carvalho Ferreira
Examinador interno - UFCG

Campina Grande - PB
Junho/2023

Dedico este trabalho a meus pais, Inácio Veríssimo da Silva e Maria José da Silva (Em memória), a minha esposa, Maria Edileuza Santos Verissimo, a meus filhos queridos, Michel Ruan Santos Veríssimo e Michele Raissa Santos Veríssimo aos meus netos Bernardo Verissimo e Melissa Verissimo, genro Jair Mendes e nora Karen Dutra e a todos os docentes do curso, pelos ensinamentos e aprendizados e aos amigos Gilvandro Melo e Joselito Elias, que contribuíram muito para a conclusão desse trabalho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois sem ele nada seria possível, a minha amada esposa, Maria Edileuza Santos Veríssimo, pelo companheirismo e por sempre me apoiar, encorajando-me a vencer todos os obstáculos que surgiram ao longo dessa jornada.

Agradeço a meus filhos, Michel Ruan Santos Verissimo e Michelle Raissa Santos Verissimo, como também aos meus netos Bernardo Verissimo e Melissa Verissimo, genro Jair Mendes e Nora Karen Dutra, pelo amor, carinho e por tornar todos os momentos de minha vida mais prazerosos. A minha família, pelo apoio incondicional, que tem me ajudado a concluir este curso.

Agradeço a meu orientador, professor Dr. José de Arimatéia Fernandes, pela paciência, orientação e por estar sempre pronto em todos os momentos em que precisei.

Agradeço a meus colegas de profissão da escola onde trabalho ECI Maria José de Souza, na cidade de Montadas-Pb, e em especial aos professores, Rafael e Iara.

Agradeço aos amigos da minha turma do curso PROFMAT, de modo especial, aos amigos, André Macedo Costa e Gilvandro Melo, os quais foram imprescindíveis para a trajetória delineada e que serviram de amparo nos momentos difíceis.

Agradeço aos professores que fazem parte do PROFMAT da UFCG e UEPB, de modo especial, aos Professores Dr. Marcelo Carvalho Ferreira e a Professora Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes que participam desta banca, contribuindo para a melhoria do meu trabalho. Por fim agradeço a todos que, direta ou indiretamente, participaram da construção deste trabalho em especial a secretária do PROFMAT da UFCG, Isabela Souza.

—

"O sábio nunca diz tudo o que pensa, mas pensa tudo o que diz"
(Aristóteles)

Resumo

Este trabalho apresenta os resultados de um experimento didático envolvendo o ensino de áreas de figuras planas. O objetivo principal foi verificar o desempenho dos alunos quanto à dedução da fórmula utilizando um kit de material de manipulação, que proporcionasse uma compreensão mais visual e intuitiva desses conceitos matemáticos. Além disso, apresentamos alguns aspectos históricos sobre o objeto de conhecimento, bem como definições, teoremas de cada figura plana. No quarto capítulo foram expostas algumas fórmulas trigonométricas em que são apresentadas suas demonstrações utilizando o conceito de áreas de figuras planas. Por fim, utilizamos uma Sequência Didática que pode ser aplicada tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. De maneira geral, concluímos que a utilização de uma Sequência Didática como ferramenta de aprendizagem é de grande importância seja qual for a área do conhecimento.

Palavras-chave: Áreas de Figuras Planas. Kit de Material Manipulável. Sequência Didática.

Abstract

This work presents the results of a didactic experiment involving the teaching of areas of plane figures. The main objective was to verify the performance of the students regarding the deduction of the formula using a manipulation material kit, which provided a more visual and intuitive understanding of these mathematical concepts. In addition, we present some historical aspects about the object of knowledge, as well as definitions, theorems of each plane figure. In the fourth chapter, some trigonometric formulas were exposed in which their demonstrations are presented using the concept of areas of plane figures. Finally, we use a Didactic Sequence that can be applied both in Elementary and High School. In general, we conclude that the use of a Didactic Sequence as a learning tool is of great importance whatever the area of knowledge.

Keywords: Areas of Plane Figures. Handling Material Kit. Following teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Plimpton - 322	18
Figura 2 – Tablete Babilônico YBC 7289	18
Figura 3 – Quadrado	23
Figura 4 – Triângulo	24
Figura 5 – Região poligonal	24
Figura 6 – Figura Bandeira	25
Figura 7 – Quadrilátero ABCD	26
Figura 8 – Retângulo ABCD	26
Figura 9 – Quadrado ABCD	27
Figura 10 – Paralelogramo	27
Figura 11 – trapézio-escaleno	28
Figura 12 – Trapézio-isósceles	28
Figura 13 – Trapézio-retângulo	29
Figura 14 – Losango ABCD	29
Figura 15 – Paralelogramo	30
Figura 16 – Triângulo	31
Figura 17 – losango ABCD	31
Figura 18 – Trapézio ABCD	32
Figura 19 – Círculo de centro O e raio r	34
Figura 20 – Círculo	35
Figura 21 – Polígonos adjacentes	36
Figura 22 – Polígonos não adjacentes	36
Figura 23 – Soma de polígonos	37
Figura 24 – Soma de polígonos quaisquer	37
Figura 25 – Polígonos equivalentes	38
Figura 26 – Polígonos não equivalentes	39
Figura 27 – $CD \cap C'D' \neq \emptyset$	39
Figura 28 – $C = D'$	40
Figura 29 – $CD \cap C'D' = \emptyset$	40
Figura 30 – Paralelogramo e retângulo de mesma base e altura	41
Figura 31 – Paralelogramo e retângulo de mesma base e altura-1	41
Figura 32 – Triângulos de mesma base e altura	42
Figura 33 – Pentágono triangular	43
Figura 34 – Polígono com n lados	43
Figura 35 – Razão entre retângulos	44

Figura 36 – Razão entre retângulos-2	45
Figura 37 – Razão entre retângulos-3	46
Figura 38 – Razão entre 2 Retângulos	47
Figura 39 – Retângulo e quadrado	48
Figura 40 – paralelogramo e retângulo	48
Figura 41 – Triângulo e paralelogramo	49
Figura 42 – Trapézio e paralelogramo	50
Figura 43 – Losango e retangular	51
Figura 44 – Polígono regular de n lados	52
Figura 45 – Círculo inscrito em quadrado	53
Figura 46 – Círculo circunscrito	53
Figura 47 – Círculo e paralelogramo	54
Figura 48 – Sequências de figuras	55
Figura 49 – Triângulo das alturas	57
Figura 50 – Paralelogramo das alturas	57
Figura 51 – Triângulo-equilátero	58
Figura 52 – Triângulo-especial-2	59
Figura 53 – Triângulo-circunscrito	60
Figura 54 – Triângulo inscrito	61
Figura 55 – Triângulo Fórmula de Heron	62
Figura 56 – Triângulo equilátero 1	65
Figura 57 – Triângulo equilátero 2	66
Figura 58 – Bissetriz 1	67
Figura 59 – Bissetriz-1	68
Figura 60 – Bissetriz-2	68
Figura 61 – Teorema de Tales-1	69
Figura 62 – Teorema de Tales-2	70
Figura 63 – Triângulo isósceles	71
Figura 64 – Triângulo escaleno	73
Figura 65 – Triângulo retângulo	74
Figura 66 – Polígono-irregular-kit	77
Figura 67 – Retângulo-kit	78
Figura 68 – Quadrado-kit	78
Figura 69 – Paralelogramo-kit	79
Figura 70 – Triângulo-kit.	80
Figura 71 – Trapézio-kit	81
Figura 72 – Losango-kit	82
Figura 73 – Círculo-kit	82

Figura 74 – Quadrado unitário	83
Figura 75 – Quadrado lado n	83
Figura 76 – Quadrado meio lado	84
Figura 77 – Quadrado $m:n$	84
Figura 78 – Polígono-01-kit	85
Figura 79 – Retângulo-02-kit	86
Figura 80 – Quadrado-03-kit	86
Figura 81 – Paralelogramo-04-kit	87
Figura 82 – Triângulo-05-kit	87
Figura 83 – Losango-06-kit	88
Figura 84 – Trapézio-07-kit	89
Figura 85 – Círculo-08-kit	89
Figura 86 – Reconhecer Figuras Planas	94
Figura 87 – Reconhecer Figuras Planas	96
Figura 88 – Continuação da Atividade 1	97
Figura 89 – Kit de Material Manipulável	98
Figura 90 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 1	99
Figura 91 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 2	100
Figura 92 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 3	101
Figura 93 – Kit de Material Manipulável Fig. 4	102
Figura 94 – Kit de Material Manipulável Fig. 5	104
Figura 95 – Kit de Material Manipulável Fig. 6	105
Figura 96 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 7	106
Figura 97 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 8	107
Figura 98 – Tabela dos Resultados das Atividades	109
Figura 99 – Figura-1 Avaliação	109
Figura 100 – Figura-2 Avaliação	110
Figura 101 – Georg Alexandre Pick	113
Figura 102 – Polígono simples	114
Figura 103 – Exemplo 1	115
Figura 104 – Exemplo 2	115

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	15
1.2	Organização	15
2	CONTEXTO HISTÓRICO	16
2.1	Introdução	16
2.2	A Origem da Geometria	16
2.3	Geometria na Babilônia	17
2.3.1	Cálculo de área na Babilônia	18
2.4	Geometria no Egito	19
2.4.1	Cálculo de área no Egito	20
2.5	Geometria na Grécia	21
2.5.1	Cálculo de área na Grécia	21
3	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	23
3.1	Áreas	23
3.1.1	Introdução	23
3.1.2	Definições	23
3.1.3	Elementos de um Triângulo	24
3.2	Quadriláteros	25
3.2.1	A seguir descrevemos alguns quadriláteros	26
3.3	Figuras redondas de um mesmo plano	33
3.4	Equivalência Planas	35
3.4.1	Introdução	35
3.4.2	Definições	35
3.4.3	Redução de polígonos por equivalência	39
3.5	Como deduzir as fórmulas de área a partir das propriedades de equivalências	44
3.5.1	Introdução	44
3.5.2	Razão entre retângulos	44
3.5.3	Dedução das fórmulas de áreas	47
3.6	Fórmulas para calcular a área do triângulo	55
4	APLICAÇÕES DO CONCEITO DE ÁREAS	64

4.1	Demonstração de alguns teoremas usando o conceito de áreas e suas propriedades	64
4.2	As fórmulas trigonométricas	71
5	CONSTRUÇÃO DO KIT DE MATÉRIAS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS	76
5.1	Construção das peças do kit de material manipuláveis	77
5.2	Como utilizar o kit de materiais manipuláveis	82
6	SEQUÊNCIA DIDÁTICA: O USO DE UM KIT DE MATERIAL MANIPULÁVEL NO ENSINO DE ÁREA DE SUPERFÍCIE PLANAS	91
6.1	Introdução	91
6.2	Apresentação da Sequência Didática	92
6.2.1	Atividade 1 - Identificação das figuras e suas propriedades	94
6.2.2	Atividade 2 - Área de um Retângulo. Figura 1	98
6.2.3	Atividade 3 - Área de um Quadrado. Figura 2	99
6.2.4	Atividade 4 - Área de um Polígono Irregular. Figura 3	100
6.2.5	Atividade 5 - Área de um Paralelogramo. Figura 4	101
6.2.6	Atividade 6 - Área de um Triângulo. Figura 5	103
6.2.7	Atividade 7 - Área de um Trapézio. Figura 6	104
6.2.8	Atividade 8 - Área de um Losango. Figura 7	105
6.2.9	Atividade 9 - Área de um Círculo. Figura 8	107
6.3	Conclusão	108
6.4	Avaliação	108
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
	APÊNDICES	112
	APÊNDICE A – ANEXO	113
A.1	Método de Pick	113
	BIBLIOGRAFIA	117
	Referências Bibliográficas	117

1 Introdução

Em conformidade com os parâmetros curriculares nacionais (PCN'S) o ensino da Matemática deve estar relacionado à realidade do aluno, preferencialmente à realidade local, onde podem ser explorados os mais diversos temas de forma que constitua alternativas para o desenvolvimento de suas capacidades cognitivas e estimule a sua confiança para enfrentar desafios, ampliando os recursos necessários para o exercício da cidadania. É preciso que o professor de Matemática encontre um meio para aumentar o interesse do aluno, motive a aprendizagem de conceitos matemáticos e culturais de uma maneira geral.

No presente trabalho nos propomos a desenvolver um estudo sobre as principais dificuldades enfrentadas pelo alunos ao entrar em contato com a geometria, em particular, com o conceito de área e suas aplicações. Serão observados aspectos como as diferentes técnicas existentes para o cálculo de áreas e as aplicações destes conceitos em outras áreas do conhecimento. Para facilitar o entendimento desses conceitos, utilizaremos um kit com material concreto para o ensino de áreas de figuras planas. O uso de um kit de material de manipulação é uma maneira eficaz de ensinar o cálculo de áreas de figuras planas para alunos do ensino fundamental e médio. Com esses materiais, os alunos podem visualizar e manipular as figuras, facilitando a compreensão dos conceitos e fórmulas para calcular suas áreas.

Abordaremos também os aspectos, históricos sobre geometria e em particular áreas de figuras planas, como era feito o cálculo de áreas nas civilizações, Babilônica, Egípcia e Gregas. A história do cálculo de áreas de figuras planas remonta à Antiguidade, com os gregos sendo os pioneiros na geometria e na matemática. Um dos primeiros tratados sobre o assunto foi o Livro II dos Elementos de Euclides, escrito por volta de 300 a.C., que tratava da área de triângulos, retângulos e paralelogramos.

De modo geral, apresentemos a importância da equivalência entre áreas de figuras planas, pois várias aplicações práticas podem ser utilizadas, como no cálculo de áreas de terrenos, de superfícies em construções e na resolução de problemas. Assim utilizamos um kit de material manipulável para induzir as fórmulas de calcular a área de cada figura plana, apresentando uma Sequência Didática, de acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular). Além disso apresentamos alguns teoremas muito conhecidos na trigonometria, que são demonstrados utilizando o conceito de áreas de figuras planas, dentre eles estão alguns fórmulas trigonométricas, tais como $\text{sen}(a \pm b)$, e $\text{sen}2a$.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral analisar a aplicação e exploração de atividades relacionadas ao cálculo de área de figuras geométricas planas para melhoria do ensino e aprendizagem de Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental e médio em sala de aula. E tem como objetivos específicos:

1. Reconhecer e analisar as características de uma figura geométrica plana;
2. Comparar áreas por superposição;
3. Medir e estimar áreas de figuras planas;
4. Trabalhar com equivalência entre áreas de polígonos;
5. Promover o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático;
6. Montar um kit com material concreto para repasse do conteúdo (Áreas de superfície de figuras planas);
7. Orientar de forma eficiente, a utilização do material concreto durante a prática em sala de aula.

1.2 Organização

Este trabalho está organizado em 5 capítulos, além da introdução(capítulo 1), onde expomos seus objetivos e sua estrutura, as conclusões e considerações finais(capítulo 7).

- O capítulo 2: expõe os aspectos históricos sobre o surgimento da geometria, em especial o cálculo de áreas nas civilizações Babilônica, Egípcia e Grega;
- O capítulo 3: está exposto a equivalência de figuras planas com suas propriedades, dedução das fórmulas de áreas a partir das propriedades de equivalências, como também algumas maneiras para calcular a áreas de uma superfície triangular;
- O capítulo 4: apresentamos uma sequência de Teoremas, onde é utilizado em suas demonstrações o conceito de áreas;
- O capítulo 5: mostramos como construir um Kit de Material concreto e como manusear suas peças;
- O capítulo 6: propõe uma Sequência Didática sobre o uso de um kit de material manipulável apresentado no capítulo 5 em que aborda o cálculo de áreas de uma superfície plana.

2 Contexto Histórico

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos como várias civilizações desenvolveram métodos para calcular áreas de diferentes formas geométricas, tais como os egípcios, que usavam um sistema baseado em proporções para calcular áreas de diferentes formas, já os gregos utilizava métodos para calcular áreas de figuras mais complexas. De modo geral apresentaremos como essas civilizações usavam estratégias baseadas em proporções, divisão e aproximação para resolver problemas relacionados às áreas. Esses avanços foram fundamentais para o desenvolvimento posterior do cálculo e tiveram um impacto significativo no progresso científico e tecnológico das civilizações antigas.

2.2 A Origem da Geometria

A geometria é a parte da matemática que estuda o espaço e as figuras que podem ocupá-lo. A natureza está cheia de formas geométricas variadas: círculos, triângulos, cubos, pentágonos, hexágonos, decaedros, espirais..., mas como teria surgido o estudo dessas figuras? Acredita-se que as primeiras medições de distâncias, áreas e volumes tenham surgido de necessidades do dia a dia. Civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, precisavam medir as terras para demarcar os limites das propriedades e de plantações, projetar templos e pirâmides, prever o movimento dos astros.

Para delimitar as áreas de cultivo, os antigos faraós nomeavam os agrimensores, funcionários que deviam avaliar os prejuízos decorrentes das cheias dos rios e restabelecer as fronteiras entre as diversas propriedades. Com a ajuda de cordas esticadas que formavam ângulos retos, eles determinavam áreas de terrenos em forma de retângulos ou triângulos. Para formar ângulos retos, eles sabiam que bastaria ter um triângulo cujos lados medissem cinco, quatro e três ou que fossem múltiplos destes números. O ângulo formado pelos dois lados menores seria de 90 graus.

A necessidade de medir é muito antiga. Os povos primitivos faziam comparações de volumes, áreas e pesos, mas não sabiam medir. As primeiras unidades de medidas referiam-se, direta ou indiretamente, ao corpo humano: palmo, pé, passo, braça, cúbito. Por volta de 3500 a.C, quando, na Mesopotâmia e no Egito, começaram a ser construídos os primeiros templos, seus projetistas tiveram de encontrar unidades mais uniformes e precisas, então adotaram a longitude das partes do corpo de único homem, geralmente o rei, e com essas medidas, construíram régua de madeiras e metal, ou

cordas com nós, que foram as primeiras medidas oficiais de comprimento.

Assim teria nascido a geometria, como resultado de necessidades práticas. A palavra é de origem grega e significa "medida da terra". Foi na Grécia que a geometria se desenvolveu como uma forma de conhecimento organizada, sem a preocupação de ter aplicações práticas úteis. Os gregos argumentavam de maneira ordenada e tentavam explicar os porquês pelo argumento mais conciso e lógico possível.

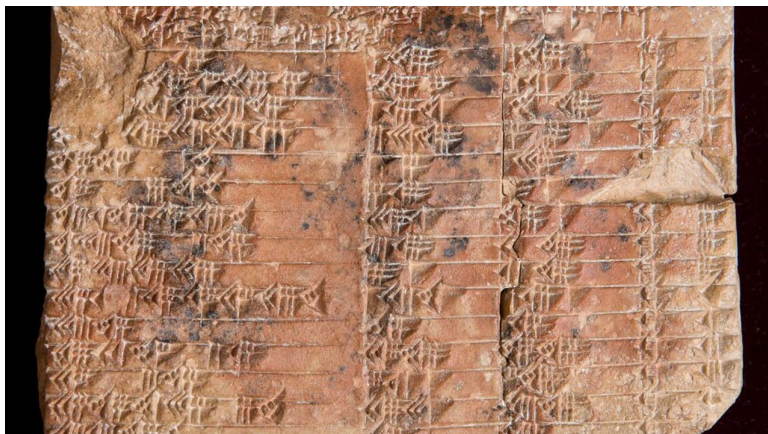
Segundo o historiador grego Heródoto (Séc. V a.C.), a geometria tem origem provável na agrimensura, medição de terrenos, no Egito Antigo. É certo, porém, que outras civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica. Nesse sentido, podemos citar as práticas geométricas das civilizações babilônica, egípcia, chinesa, hindu e árabe, entre outras, significando assim que, desde o extremo Oriente ao Oriente Médio, essas práticas se faziam necessárias e constavam nas atitudes e hábitos culturais e religiosos da nossa antiguidade.

2.3 Geometria na Babilônia

A geometria teve um papel importante na Babilônia, antiga civilização mesopotâmica que existiu por volta de 2000 a.C. a 600 a.C. Utilizavam a geometria em suas construções, como também era essencialmente prática e focada na medição de áreas, comprimentos e volumes de objetos e na medição de campos para agricultura. Eles desenvolveram um sistema posicional de base 60 conhecido como sistema sexagesimal, que é utilizada até hoje para medir o tempo em minutos e segundo.

Um dos exemplos mais famosos de geometria babilônica é a tábua de argila conhecida como Plimpton 322, encontrada nas escavações da Mesopotâmia e datada de 1800 a.C., um dos mais famosos documentos matemáticos antigos. Tem inscrita uma tabela com 15 linhas e 4 colunas de números na notação sexagesimal da Babilônia que formam triplas pitagóricas, ou seja, triplas de números inteiros a , b e c , tais que $a^2 + b^2 = c^2$. A maioria dos especialistas acredita que se trata de uma lista de exemplos para uso em sala de aula. Mas a inscrição também aponta um método de cálculo das triplas mais de mil anos antes de Pitágoras! que mostra um conhecimento de geometria que se pensava só ter sido alcançado na Grécia.

Figura 1 – Plimpton - 322



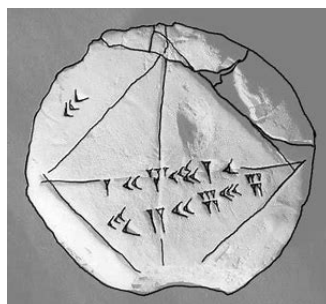
Fonte: A tábua babilônia 'Plimpton 322', de 3.700 anos
(Andrew Kelly/UNSW/Divulgação)

2.3.1 Cálculo de área na Babilônia

O cálculo de áreas na Babilônia encontra-se entre os muitos tabletas achados em sítios arqueológicos na Mesopotâmia, alguns que contêm problemas de geometria, um dos mais famosos é o YBC 7289, mostra como os Babilônios achavam raízes quadradas.

Não se sabe de onde na Mesopotâmia vem a YBC 7289, mas seu formato e estilo da escrita indicam que provavelmente foi criada na Mesopotâmia meridional, entre 1800 e 1600 a.C.[1][2]. A Universidade de Yale a adquiriu em 1909, doada pelo espólio de J. P. Morgan, que possuía várias tabuletas babilônicas; suas doações se tornaram a Coleção Babilônica de Yale ou YBC (do inglês Yale Babylonian Collection).[1][9].

Figura 2 – Tablete Babilônico YBC 7289



Fonte: Pintobeira Roque (2010)

Os Babilônios desenvolveram um método prático e eficiente para o cálculo de áreas de figuras geométricas. Eles utilizavam uma tabela de medidas, que contém os valores para calcular áreas e volumes de formas geométricas básicas, como quadrados, retângulos e cilindros. Para calcular a área de uma figura geométrica, os babilônios a dividiam

em formas básicas, como quadrados, retângulos ou triângulos. Eles então encontravam a área de cada uma dessas formas e somavam as áreas para obter a área total da figura.

Um exemplo de cálculo de área na geometria babilônica envolvia o uso de fórmulas aproximadas para calcular a área de um quadrado ou retângulo. Os babilônios consideravam que a área de um quadrado era dada pelo produto de seus lados, enquanto a área de um retângulo era calculada multiplicando-se o comprimento pela largura.

Para calcular a área de um triângulo, os babilônios usavam uma fórmula aproximada que envolvia a base e a altura do triângulo. Eles multiplicavam a base pelo valor $\frac{1}{2}$ e, em seguida, multiplicavam esse resultado pela altura para obter uma estimativa da área.

No caso de trapézios, os babilônios utilizavam uma abordagem de divisão em partes menores. Eles dividiam o trapézio em triângulos e retângulos menores, cujas áreas eram mais fáceis de calcular. Em seguida, eles somavam essas áreas parciais para obter uma estimativa aproximada da área total do trapézio. É importante notar que a geometria babilônica não buscava a precisão matemática exata, mas sim uma aproximação útil para fins práticos, como medições de terras ou construção de edifícios.[4].

2.4 Geometria no Egito

A geometria surgiu no Antigo Egito como resultado da necessidade de medir terras e delimitar áreas após as inundações anuais do Rio Nilo. Os egípcios também usavam a geometria para construir templos, pirâmides e outros monumentos. Acredita-se que os egípcios desenvolveram seus conhecimentos matemáticos e geométricos a partir da observação dos padrões naturais e das necessidades práticas de sua vida cotidiana. Eles usavam a geometria para medir a terra e dividir os campos de cultivo, e também para calcular áreas de formas geométricas simples, como retângulos, quadrados e triângulos. Também utilizavam um sistema de numeração baseado em hieróglifos, que permitia fazer cálculos matemáticos simples. Desenvolveram métodos de medição de ângulos e construção de figuras geométricas complexas, como a esfera, a elipse e o paralelogramo.

A geometria egípcia antiga era altamente prática e baseada em fórmulas e técnicas específicas. Os egípcios antigos usavam ferramentas simples, como o cordel e o prumo, para medir distâncias e ângulos. Eles também desenvolveram uma série de símbolos geométricos para representar figuras geométricas e seus atributos. A geometria egípcia antiga teve uma influência significativa no desenvolvimento posterior da matemática e da geometria. Suas técnicas e métodos foram adotados por outras civilizações antigas, como a Babilônia e a Grécia, e continuam a ser estudados e usados hoje em dia.

O historiador grego Heródoto nascido no século V a.C nos diz que o apagamento das demarcações pelas inundações do rio Nilo tornou necessário o trabalho dos men-

suradores. Os conhecimentos dos estiradores de cordas egípcios eram evidentemente admirados por Demócrito (460 a.C.-370), um matemático de competência e um dos fundadores de uma teoria atômica, e hoje suas realizações parecem ser demasiado valorizadas, em parte em consequência da precisão admirável da construção das pirâmides. (BOYER.p.14.1974).

2.4.1 Cálculo de área no Egito

O Egito está situado no nordeste da África, entre os desertos do Saara e da Núbia, e é cortado pelo rio Nilo. Sua civilização tinha como forma de escrita o sistema hieroglífico que são sinais pictográficos que representavam objetos. Esse sistema foi desenvolvido pelos escribas e registrado em papiros, dos quais os mais importantes na Matemática são o Papiro Rhind e o de Moscou, que datam aproximadamente do século XVIII a.C. Os escribas utilizavam a Matemática para resolver questões relativas à medição de terras, ao cálculo de impostos e do volume dos depósitos de provisões, até projetos de obras arquitetônicas, etc. A geometria surgiu da necessidade de calcular áreas territoriais, volumes de celeiros e pirâmides (RPM 81. p. 05. 2013).

Os celeiros eram em formato de cilindros circulares retos. Para calcular o volume de tais celeiros, fazia-se necessário que os antigos egípcios encontrassem um método para determinar a área do círculo da base. No Papiro Rhind existem alguns problemas relativos ao cálculo da área do círculo. Citamos o Problema 50, cuja resolução nos mostra uma das maneiras usadas pelos egípcios para calcular a área do círculo.

Problema 50: Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?

Solução apresentada pelo escriba: Remova $1/9$ do diâmetro, o restante é 8. Multiplique 8 por 8; perfaz 64. Portanto, a área é 64.

Desse problema deduzimos que o método usado pelo escriba era: “Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área”. Ou seja,

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2$$

sendo d o diâmetro do círculo. Não se sabe, porém, como os egípcios chegaram a tal fórmula; percebemos que eles não utilizavam o comprimento da circunferência para calcular a área do círculo e tentavam calcular essa área como a de um quadrado, o que nos faz inferir uma tentativa de quadrar o círculo.

O conhecimento geométrico da civilização egípcia era grande: construíram grandes obras arquitetônicas, como as pirâmides, além de construírem barcos, barragens e canais. Também se encontra Geometria nas construções de suas estátuas, pórticos, templos, muralhas e lagos (RPM 81 2013).

2.5 Geometria na Grécia

As origens da Geometria, do grego medir a terra, parecem coincidir com as necessidades do dia a dia. Partilhar terras férteis às margens dos rios, construir casas, observar e prever os movimentos dos astros, são algumas das muitas atividades humanas que sempre dependeram de operações geométricas. Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam que eles possuíam bons conhecimentos do assunto, geralmente ligados à astrologia. Na Grécia, porém, é que o gênio de grandes matemáticos lhes deu forma definitiva. Dos gregos anteriores a Euclides(323-283 a.C.), Arquimedes(287-212 a.C.) e Apolônio(262-194 a.C.), consta apenas o fragmento de um trabalho de Hipócrates(470-410 a.C.). E o resumo feito por Proclo(412-485 d.C) ao comentar os Elementos de Euclides, obra que data do século IV a.C., refere-se a Tales (624-546 a.C.) de Mileto como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito.

A Geometria, ao longo do séculos, mudou de significado, paradigmas, técnicas e objetivos, tanto os Egípcios quanto os Babilônios tinham procedimentos sistemáticos para resolver problemas que hoje chamaríamos de geométricos, envolvendo medidas. Por vezes estes procedimentos estão ancorados em uma maneira conceitualmente diferente de conceber os conceitos geométricos. Querer comparar as práticas geométricas dos antigos egípcios com o encaminhamento dado à geometria pelos gregos, mais tarde, é colocar uma alternativa que não faz sentido.

2.5.1 Cálculo de área na Grécia

Na Grécia Antiga, os matemáticos desenvolveram técnicas para o cálculo da área de diversas figuras planas, incluindo triângulos, trapézios, retângulos e círculos. Para o cálculo da área de um triângulo, Tales de Mileto, considerado o pai da geometria grega, descobriu que a área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura, essa fórmula é conhecida como fórmula de Tales.

Para o cálculo da área de um trapézio, os matemáticos gregos desenvolveram uma técnica que consiste em dividir o trapézio em dois triângulos e um retângulo. A área total do trapézio é, então, calculada somando-se as áreas dos dois triângulos e do retângulo. Já para o cálculo da área de um retângulo, é simplesmente multiplicar a base pela altura.

Essas técnicas para o cálculo da área de figuras planas foram fundamentais para o desenvolvimento da geometria grega e ainda são utilizadas na matemática moderna. Além disso, essas técnicas foram ampliadas e aprimoradas por outros matemáticos gregos, como Pitágoras, Euclides, Aristóteles, Arquimedes e Apolônio.

Arquimedes, famoso matemático grego, utilizou a técnica da exaustão para aproximar o valor de π com uma precisão de 3 casas decimais. Ele inscreveu e circunscreveu o círculo com polígonos regulares de 96 lados cada, e com isso calculou que a área de um círculo é igual a π vezes o quadrado do raio.

3 Áreas de figuras planas

3.1 Áreas

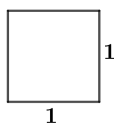
3.1.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados, definições, axiomatização do conteúdo, propriedades e teoremas, sobre o cálculo de áreas de superfícies planas, como também noções sobre o conceito de equivalências planas, com o objetivo de facilitar o entendimento do conteúdo a seguir. Alguns objetos de conhecimentos utilizados neste capítulo, estão em [2].

3.1.2 Definições

a) A reunião de um polígono com sua região interior é denominada superfície do polígono. A medida da superfície é expressa por um número real positivo e é chamada área do polígono. Para medirmos a superfície do polígono precisamos compará-la com uma unidade de medida de área. Essa unidade de medida corresponde a uma figura unitária, isto é, de dimensões unitárias. A partir daí, podemos verificar quantas vezes essa figura unitária “cabe” na região que queremos medir. A unidade de área utilizada é uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

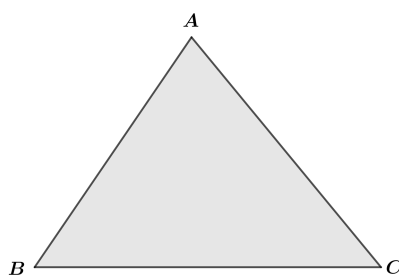
Figura 3 – Quadrado



Fonte: Autor

b) Uma região triangular é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos, cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de fronteira da região triangular.

Figura 4 – Triângulo



Fonte: Autor

3.1.3 Elementos de um Triângulo

Os principais elementos de um triângulo ABC são:

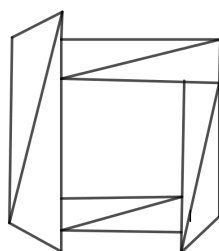
Lados: AB , AC e BC (Segmentos).

Vértices: A , B e C (Pontos)

Ângulos Internos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ (Ângulos)

Um conjunto de pontos de uma região triangular que não pertence à sua fronteira, é chamado de interior da região triangular. Uma região poligonal é a união de um número finitos de regiões triangulares que duas a duas não têm pontos interiores em comum.

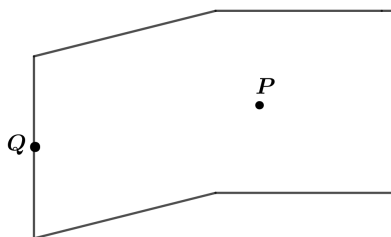
Figura 5 – Região poligonal



Fonte: Autor

Observe a figura:

Figura 6 – Figura Bandeira



Fonte: Autor

Na figura 6, dizemos que P é ponto interior à região poligonal e que Q é ponto da fronteira da região poligonal. A noção de área de região poligonal é introduzida na geometria através dos seguintes Axiomas:

1º) Axioma A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero.

2º) Axioma Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então, a sua área é a soma das áreas daquelas regiões.

3º) Axioma Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

4º) Axioma Se $ABCD$ é um retângulo, então, a sua área é dada pelo produto $(\overline{AB}) \cdot (\overline{BC})$. Ou seja:

$$S_{ABCD} = (\overline{AB}) \cdot (\overline{BC})$$

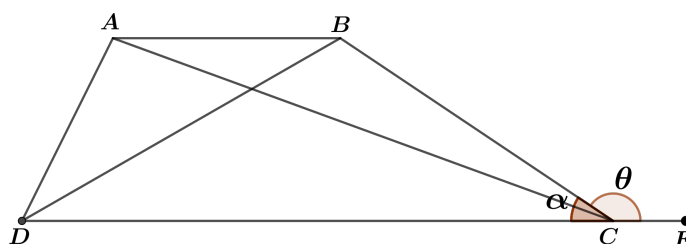
Notação: S_{ABCD} é a área de um retângulo de vértice A , B , C e D , ou seja, a área da região poligonal cuja fronteira é um retângulo.

A partir destes axiomas vamos determinar a área de algumas regiões poligonais simples. Antes de determinar como calcular a área de algumas regiões poligonais simples, vamos escrever as definições de algumas dessas figuras, que são muito importantes para o estudo da geometria.

3.2 Quadriláteros

Quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados. Sendo assim, os quadriláteros herdam todas as características e propriedades dos retângulos, como o fato de possuírem apenas duas diagonais ou de a soma dos seus ângulos internos ser sempre igual a 360° .

Figura 7 – Quadrilátero ABCD



Fonte: Autor

Elementos de um Quadrilátero

Lados: São os segmentos de reta que contornam o quadrilátero $ABCD$, AB , BC , CD e DA .

Vértices: São os pontos de encontro entre dois lados, A , B , C e D .

Ângulos Internos: São os ângulos determinados por dois lados consecutivos de um quadrilátero, $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$.

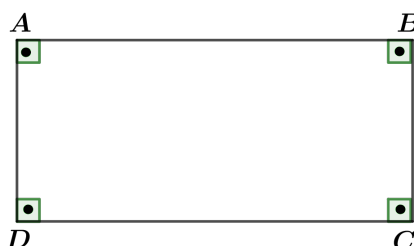
Ângulos Externos: São ângulos formados pelo prolongamento dos lados de um polígono. Um ângulo externo sempre é suplementar ao ângulo interno adjacente a ele. Na figura 7, $B\hat{C}E$ é ângulo externo.

Diagonais: São segmentos de reta cujas extremidades são dois vértices não consecutivos de um polígono. Dessa maneira, são os segmentos de reta que ligam dois vértices e que, ao mesmo tempo, não são lados AC e BD .

3.2.1 A seguir descrevemos alguns quadriláteros

- **Retângulo:** É um quadrilátero com todos os ângulos retos. Dois lados opostos de um retângulo são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Além disso, as diagonais de um retângulo possuem o mesmo comprimento e se encontram no ponto médio comum.

Figura 8 – Retângulo ABCD



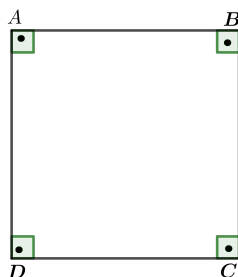
Fonte: Autor

Propriedades dos retângulos

AB paralelo DC e AD paralelo BC , $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$, com $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

- **Quadrado:** É um retângulo com os quatro lados de mesmo comprimento.

Figura 9 – Quadrado ABCD



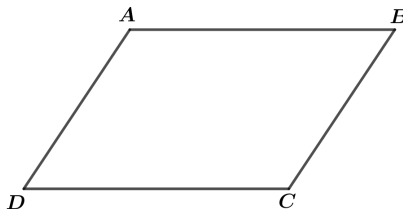
Fonte: Autor

Propriedades dos quadrados

AB paralelo DC e AD paralelo BC , $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ com $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

- **Paralelogramo:** É um quadrilátero com lados opostos paralelos. Em um paralelogramo os lados opostos possuem o mesmo comprimento e dois ângulos opostos quaisquer possuem a mesma medida.

Figura 10 – Paralelogramo



Fonte: Autor

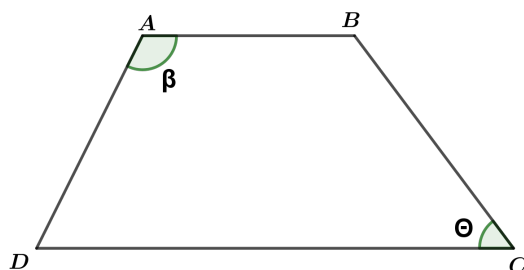
Propriedades dos paralelogramos

AB paralelo DC e AD paralelo BC , com $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$.

• **Trapézio** : É um quadrilátero com um par de lados opostos paralelos. Os lados paralelos são conhecidos como bases, um deles é a base maior e o outro é a base menor do trapézio. Conhecemos três tipos de trapézios:

1º) **O trapézio é escaleno** quando os lados não paralelos são diferentes. Na figura a seguir, vemos um trapézio com os lados AB paralelo CD e $\overline{AD} \neq \overline{BC}$, logo a figura abaixo é um exemplo de um trapézio escaleno.

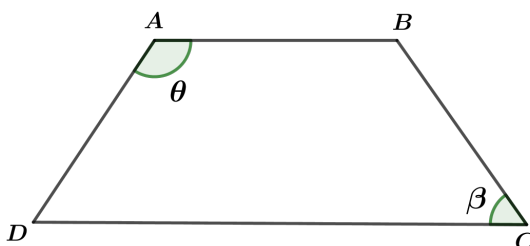
Figura 11 – trapézio-escaleno



Fonte: Autor

2º) **O trapézio é isósceles** quando os lados não paralelos são congruentes. A figura abaixo onde $\overline{AD} = \overline{BC}$ e AB paralelo DC é um exemplo de um trapézio isósceles.

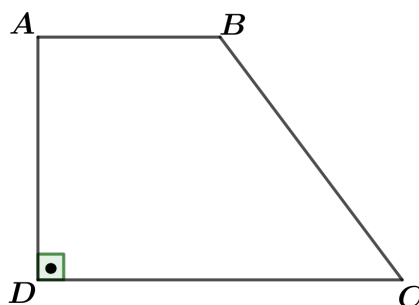
Figura 12 – Trapézio-isósceles



Fonte: Autor

3º) **O trapézio é retângulo** quando um lado não paralelo faz um ângulo de 90° com as bases da figura. A figura abaixo é um exemplo de trapézio retângulo, onde AB paralelo DC .

Figura 13 – Trapézio-retângulo



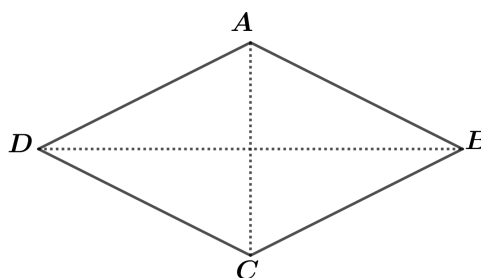
Fonte: Autor

• **Losango** É um quadrilátero com os quatro lados de mesmo comprimento. Em um losango dois lados opostos são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Dois ângulos opostos quaisquer de um losango possuem a mesma medida. As diagonais de um losango são perpendiculares e se encontram no ponto médio comum.

Lados: AB paralelo DC e AD paralelo BC com $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{AD} = \overline{BC}$

Diagonais: AC e BD , com $AC \perp BD$

Figura 14 – Losango ABCD



Fonte: Autor

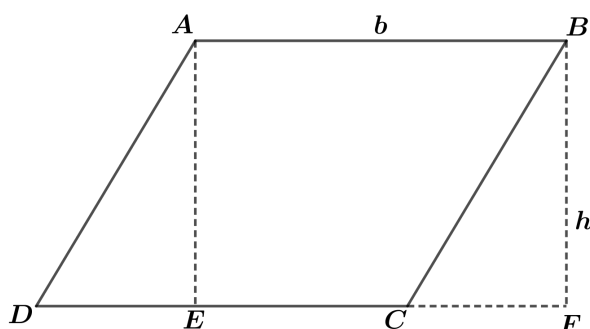
O Perímetro $2p$ de um quadrilátero é a soma dos comprimentos de seus quatro lados. E de modo geral se temos uma figura com n lados, o perímetro desta figura é a soma dos comprimentos dos seus n lados, ou seja, é o comprimento do contorno da figura.

Na figura 14 o comprimento do perímetro é

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$$

Teorema 3.1. *A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

Figura 15 – Paralelogramo



Fonte: Autor

Demonstração: Devemos mostrar que a área $S_{ABCD} = h \cdot b$. Traçamos partindo dos pontos A e B dois segmentos, AE e BF , perpendiculares à reta que contém CD . O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$. Daí segue que:

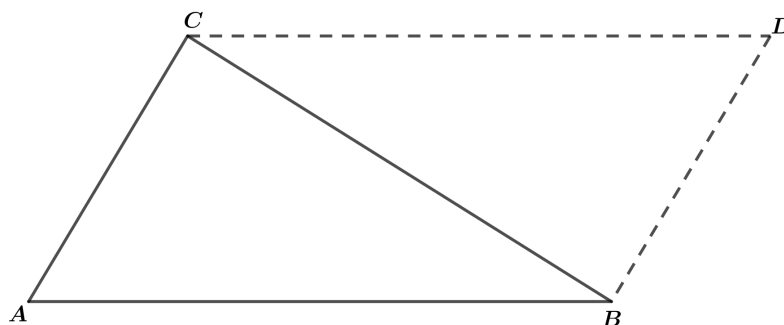
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABCE} + S_{ADE} \\ &= S_{ABCE} + S_{CBF} \\ &= S_{ABFE} \\ S_{ABCD} &= h \cdot b. \end{aligned}$$

Para concluir, devemos provar que o triângulo ADE e CBF são congruentes. Observe que:

1. Os segmentos $AD \parallel BC$ e $AB \parallel DF$, pois $ABCD$ é um paralelogramo;
2. Os ângulos $\hat{A}DE$ e $\hat{B}CF$ são congruentes, então pelo caso LAA_o , os triângulos ADE e CBF são congruentes. Com isso concluímos a demonstração. \square

Teorema 3.2. *A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Figura 16 – Triângulo



Fonte: Autor

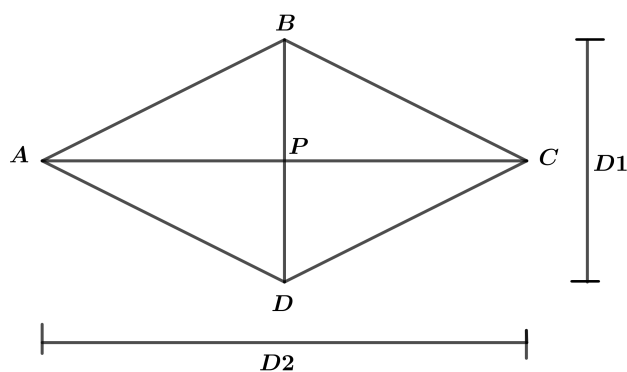
Demonstração: Dado um triângulo ABC , trace pelo vértice C , uma reta paralela ao lado AB , e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC . Essas duas retas se intersectam em um ponto D . O polígono $ABCD$ é um paralelogramo, pelo caso LLL e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes, então $S_{ABC} = S_{CDB}$. Daí temos que,

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{CDB} \\ &= S_{ABC} + S_{ABC} \\ &= 2 \cdot S_{ABC}, \text{ logo} \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot S_{ABDC} \end{aligned}$$

Para completar a demonstração, observe que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABCD$ relativo ao lado AB . \square

Teorema 3.3. *A área de um losango é metade do produto do comprimento de suas diagonais.*

Figura 17 – losango ABCD



Fonte: Autor

Demonstração: Fazendo, $\overline{AC} = D_2$, $\overline{BD} = D_1$ e $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{P\}$, devemos mostrar que $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AC} \cdot \overline{BD})$.

Seja $ABCD$ um losango, como mostrar a figura 18, então os triângulos ABD e CBD são triângulos congruentes pelo caso LLL . Logo $S_{ABD} = S_{CBD}$.

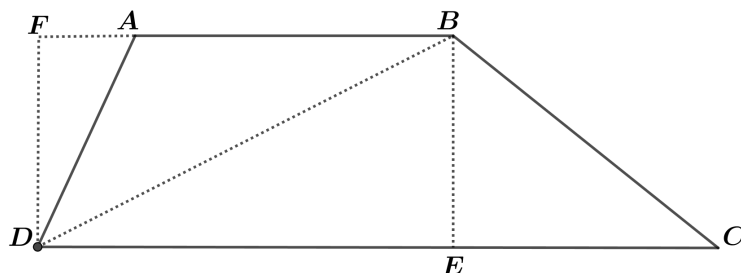
Daí segue que:

$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= S_{ABD} + S_{CBD} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{BD}) \cdot (\overline{AP}) + \frac{1}{2} \cdot (\overline{BD}) \cdot (\overline{PC}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{BD}) \cdot (\overline{AP}) + \frac{1}{2} \cdot (\overline{BD}) \cdot (\overline{PC}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{BD}) \cdot [(\overline{AP}) + (\overline{PC})] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{BD}) \cdot (\overline{AC}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{AC}) \cdot (\overline{BD}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \\
 S_{ABCD} &= \frac{\overline{D_1} \cdot \overline{D_2}}{2}
 \end{aligned}$$

Teorema 3.4. *A área de um trapézio é metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um trapézio, cujas bases são os lados AB e CD . Traçando a diagonal BD dividiremos o mesmo em dois triângulos. E traçando as alturas DF , do triângulo ABD , e BE , do triângulo DBC , temos $\overline{DF} = \overline{BE}$, pois AB e CD são paralelos. Conforme a figura 19.

Figura 18 – Trapézio ABCD



Devemos mostrar $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot (\overline{BE})$, para isso observe que

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}.$$

Fazendo $\overline{DF} = h$ e como $\overline{DF} = \overline{BE}$ então $\overline{BE} = h$ e tomando $\overline{AB} = b_1$ e $\overline{CD} = b_2$, temos:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABD} + S_{BCD} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DF} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot [b_1 h + b_2 h] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2) \cdot (h) \end{aligned}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot (\overline{BE}). \quad \square$$

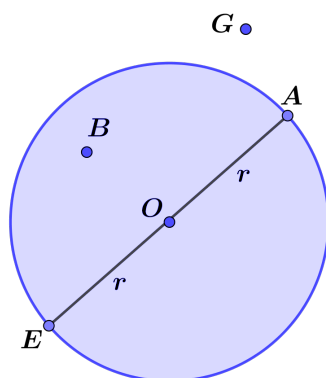
3.3 Figuras redondas de um mesmo plano

Circunferência: É uma figura geométrica pertencente ao plano que é constituída pelo conjunto de todos os pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano.

Elementos de uma Circunferência:

- Raio: A distância entre um ponto de uma circunferência e seu centro.
- Corda: Qualquer segmento de reta que liga dois de seus pontos.
- Diâmetro: Corda que contém o centro da circunferência.
- Comprimento: É a medida da própria circunferência em alguma unidade.

Círculo: É uma figura geométrica formada por uma parte de um plano que é limitada por uma circunferência. Ou seja, dados um ponto O chamado centro do círculo e um número r maior que zero chamado raio do círculo, denominamos por círculo o conjunto de pontos cuja distância até O é igual ou menor do que r .

Figura 19 – Círculo de centro O e raio r 

Fonte: Autor

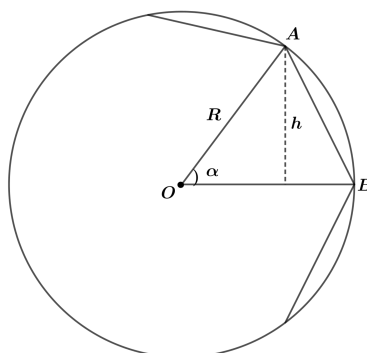
Elementos do Círculo:

Os principais elementos do círculo são:

- Raio r a distância de O a A , ou seja, $d(O, A) = r$.
- O o Centro do círculo
- O, A, E e B são pontos internos e G é um ponto externo do círculo
- $d(A, E)$ o diâmetro do círculo.

Teorema 3.5. *A área de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio R é $\frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot n \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$.*

Figura 20 – Círculo



Fonte: Autor

Demonstração: Seja O o centro do círculo. Ligando-se cada um dos vértices do polígono ao ponto O , formam-se n triângulos isósceles, cujas bases são os lados do polígono, cujas lados iguais têm comprimento R e cujos ângulos do topo medem $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$. Seja OAB um tal triângulo. Trace a altura h do vértice A . Esta altura mede $R \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$ e o lado OB mede R . Logo, a área deste triângulo é $\frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$ e a área total do polígono é $\frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot n \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$. \square

3.4 Equivalência Planas

3.4.1 Introdução

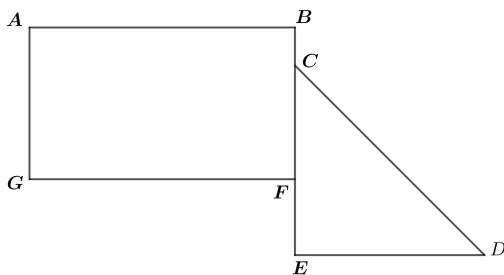
A equivalência plana é um conceito importante da geometria, que se referem a figuras planas que têm a mesma área, apesar de terem formatos diferentes. As figuras planas equivalentes podem ser obtidas por meio de transformações geométricas, como a translação, rotação e reflexão. Essas transformações preservam a área da figura plana original, mas podem alterar outras características, como a forma e a posição. O estudo dessas equivalências é fundamental para diversas áreas do conhecimento, pois permite representar diferentes opções de disposição de espaços, otimizar o uso do espaço e fazer cálculos precisos de áreas em diferentes situações. Os Teoremas, Corolários e Definições utilizados neste capítulo foram retirados do livro Geometria Métrica, [IEZZI Etal].

3.4.2 Definições

a) Polígonos Contíguos ou Adjacentes

Dois polígonos são chamados contíguos ou adjacentes quando têm em comum somente pontos de seus contornos.

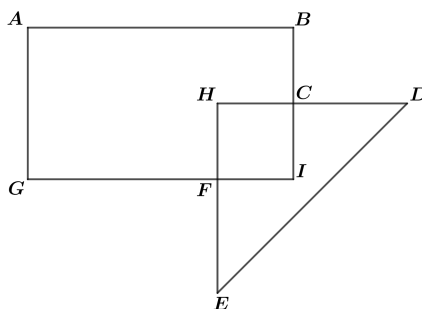
Figura 21 – Polígonos adjacentes



Fonte: Autor

Os polígonos $ABFG$ e CDE são contíguos ou adjacentes.

Figura 22 – Polígonos não adjacentes



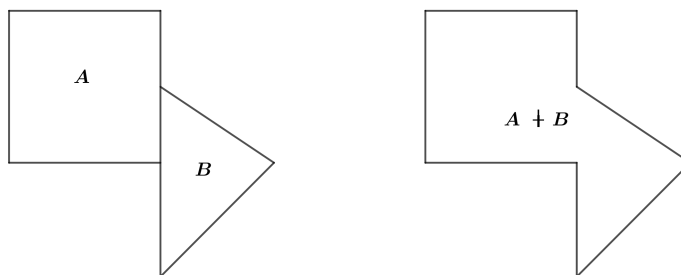
Fonte: Autor

Os polígonos $ABIG$ e DHE não são contíguos.

b) Soma de Polígonos Contíguos ou Adjacentes

Chama-se soma de dois polígonos contíguos a superfície constituída pelos pontos comuns e os não comuns aos dois polígonos.

Figura 23 – Soma de polígonos



Fonte: Autor

então A e B contíguos, $x \in A + B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$, ou ainda, $A + B = A \cup B$.

c) Soma de Dois Polígonos Quaisquer

A Soma de dois polígonos quaisquer, A e B, é definida como sendo a soma dos polígonos contíguos A' e B' em que A' é congruente a A e B' é congruente a B.

Figura 24 – Soma de polígonos quaisquer



Fonte: Autor

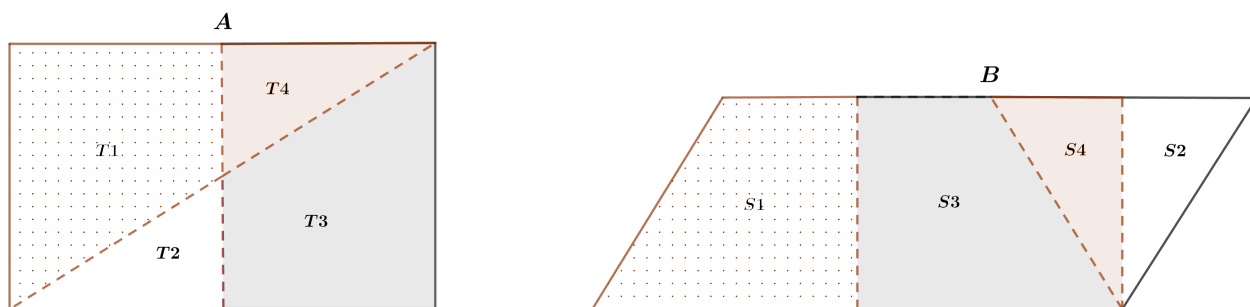
d) Equivalência Entre Polígonos

Dois polígonos A e B são chamados equivalentes ou equicompostos, denota-se por $A \approx B$, quando forem somas de igual número de polígonos, dois a dois congruentes entre si.

Em símbolos: $A \approx B \Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^n T_i, B = \sum_{i=1}^n S_i, T_i \equiv S_i, i = 1, 2, 3, \dots, n.$

Observe que, na figura 25, A e B são somas de 4 polígonos e que cada polígono-parcela T_i de A é congruente a um polígono-parcela S_i de B e reciprocamente.

Figura 25 – Polígonos equivalentes



Fonte: Autor

Daí temos, $A \approx B$, pois:

$$T_1 \equiv S_1,$$

$$T_2 \equiv S_2,$$

$$T_3 \equiv S_3,$$

$$T_4 \equiv S_4$$

$$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$B = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Propriedades Formais:

P.1) Reflexiva: $A \approx A$.

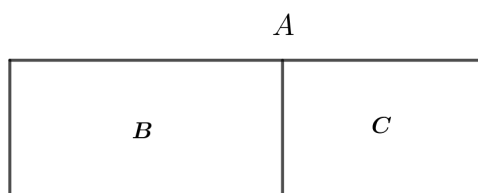
P.2) Simétrica: $A \approx B \Leftrightarrow B \approx A$.

P.3) Transitiva: $A \approx B$ e $B \approx C \implies A \approx C$

P.4) Uniforme: $T_i \approx S_i, A = \sum_{i=1}^n T_i, B = \sum_{i=1}^n S_i \Rightarrow A \approx B$.

P.5) Disjuntiva (Postulado de Zolt). Um polígono, que é soma de dois ou mais outros, não é equivalente a uma de suas parcelas.

Figura 26 – Polígonos não equivalentes



Fonte: Autor

$$A = B + C \Rightarrow (A \not\cong B) \wedge (A \not\cong C).$$

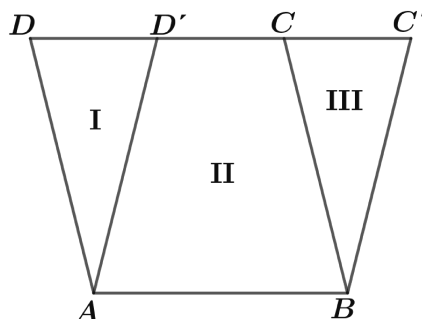
3.4.3 Redução de polígonos por equivalência

Teorema 3.6. *Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes, são equivalentes.*

Demonstração: Consideremos os paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ com base AB e com alturas congruentes. Apresentaremos três casos:

1º Caso: CD e $C'D'$ com um segmento comum, conforme figura 27 abaixo.

Figura 27 – $CD \cap C'D' \neq \emptyset$



Fonte: Autor

CD e $C'D'$ têm um segmento comum que é o segmento $D'C$.

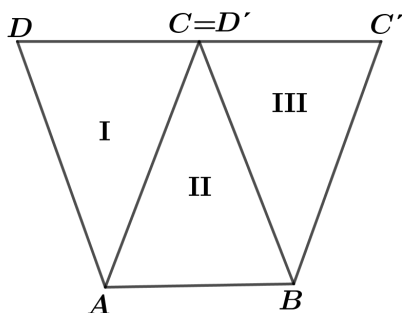
i) $I \equiv III$

ii) $II \equiv II$

Fazendo $i + ii$, temos $I + II \equiv II + III \implies (I + II) \approx (II + III) \Rightarrow ABCD \approx ABC'D'$

2º Caso: CD e $C'D'$ com um só ponto comum, conforme figura abaixo.

Figura 28 - $C = D'$



CD e $D'C'$ tem o ponto C comum.

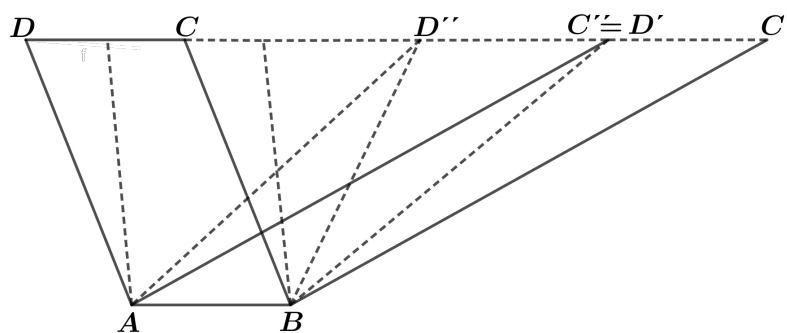
i) $I \equiv III$

ii) $II \equiv II$

Fazendo $i + ii$ temos $I + II \equiv III + II \implies (I + II) \approx (III + II) \Rightarrow ABCD \approx ABC'D'$.

3º Caso: CD e $C'D'$ não têm ponto em comum, conforme figura abaixo.

Figura 29 - $CD \cap C'D' = \emptyset$



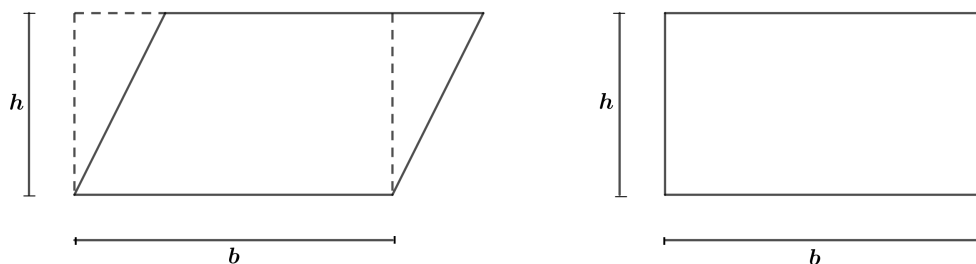
Utilizando a aplicação dos casos anteriores temos:

$$ABC'D' \approx ABC''D'' \approx \dots \approx ABCD \Rightarrow ABCD \approx ABC'D'. \square$$

Conforme os resultados anteriores, temos em particular os seguintes resultados:

Corolário 3.7. *Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base b e altura h respectivamente congruentes as do paralelogramo, logo ambos têm áreas iguais a $(b \cdot h)$.*

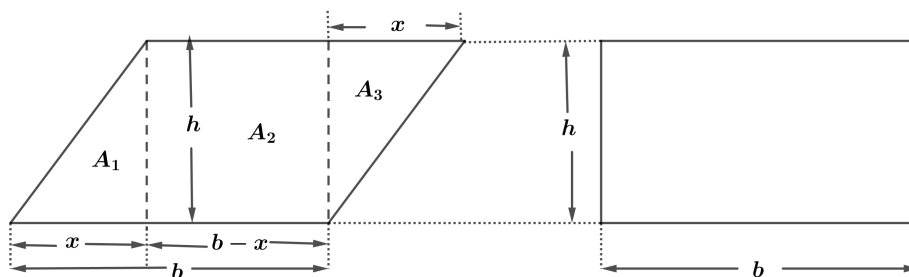
Figura 30 – Paralelogramo e retângulo de mesma base e altura



Fonte: Autor

Demonstração: Suponha que b é o comprimento da base e h é o comprimento da altura do paralelogramo. Podemos traçar uma linha perpendicular á base do paralelogramo a partir de um dos vértice opostos dividindo o paralelogramo em dois triângulos congruentes e um retângulo de comprimento $(b-x)$ e altura h , conformem a figura 31.

Figura 31 – Paralelogramo e retângulo de mesma base e altura-1



Fonte: Autor

A área de cada triângulo é dado por $A_1 = A_3 = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$. já visto no Teorema 3.2. De modo geral temos a área do paralelogramo como sendo

$$A_P = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow$$

$$A_P = \frac{x \cdot h}{2} + (b - x) \cdot h + \frac{x \cdot h}{2} \Rightarrow$$

$$A_P = \frac{x \cdot h}{2} + b \cdot h - x \cdot h + \frac{x \cdot h}{2} \Rightarrow$$

$$A_P = x \cdot h + b \cdot h - x \cdot h \Rightarrow$$

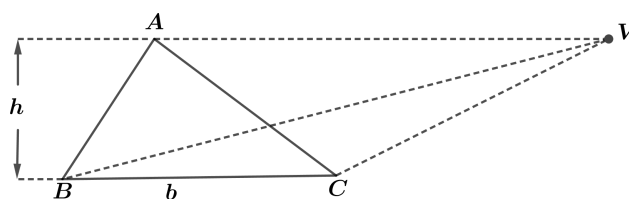
$$A_P = b \cdot h$$

Sabendo que a altura do retângulo é a mesma que a altura do paralelogramo, podemos concluir que a área do retângulo com base b e altura h é igual a área do paralelogramo, portanto

$$A_P = A_R = b \cdot h \square$$

Corolário 3.8. *Dois triângulos de bases e alturas ordenadamente congruentes são equivalentes, logo $\triangle ABC \approx \triangle VBC$.*

Figura 32 – Triângulos de mesma base e altura



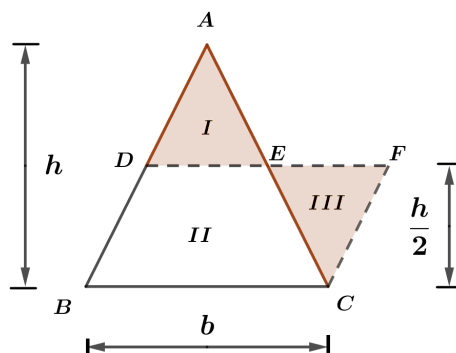
Fonte: Autor

Demonstração: Observando a figura 31 temos, $S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2}$ e $S_{BVC} = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2}$, então $S_{ABC} = S_{BVC}$, logo $\triangle ABC \approx \triangle VBC$. \square

Corolário 3.9. *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura igual à metade da altura do triângulo.*

Demostração: Seja D ponto médio de \overline{AB} e E o ponto médio de \overline{AC} , prolongando \overline{DE} até o ponto F de modo que \overline{DF} complete o paralelogramo $BDFC$. Da figura 32

Figura 33 – Pentágono triangular



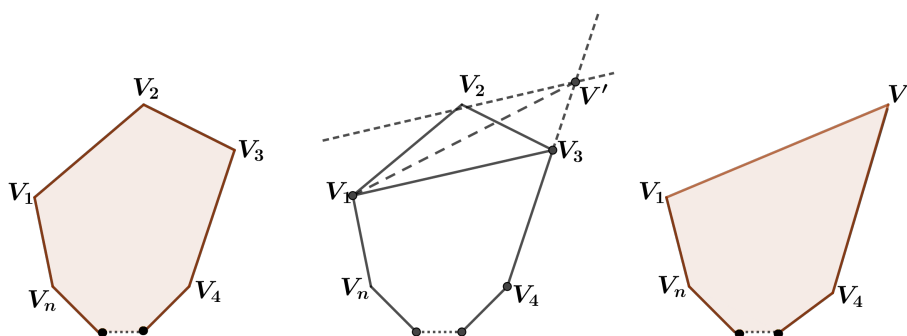
Fonte: Autor

Escrevemos, $I \equiv III$ e $II \equiv II$ então $(I + II) \approx (II + III) \Rightarrow ABC \approx BDFC. \square$

Teorema 3.10. Dado um polígono convexo com n lados, $n > 3$, existe um polígono convexo com $n-1$ lados que lhe é equivalente.

Demostração: De acordo com a figura 32 temos o polígono $pol(V_1V_2V_3V_4...V_n)$ e seja V' a intersecção da reta $\overline{V_3V_4}$ com a reta paralela a $\overline{V_1V_3}$ por V_2 .

Figura 34 – Polígono com n lados



Fonte: Autor

Daí temos $pol(V_1V_2V_3...V_n) = \triangle V_1V_2V_3 + pol(V_1V_3V_4...V_n)$ e

$pol(V_1V'V_4\dots V_n) = \triangle V_1V'V_3 + pol(V_1V_3V_4\dots V_n)$ então

$pol(V_1V_2V_3V_4\dots V_n) \approx pol(V_1V'V_4\dots V_n)$. \square

Como consequência deste teorema, podemos reduzir por equivalência um polígono de n lados $n > 3$ a um triângulo equivalente, por sua vez este a um paralelogramo e por último, este a um retângulo equivalente. Então, todo polígono é equivalente a um retângulo.

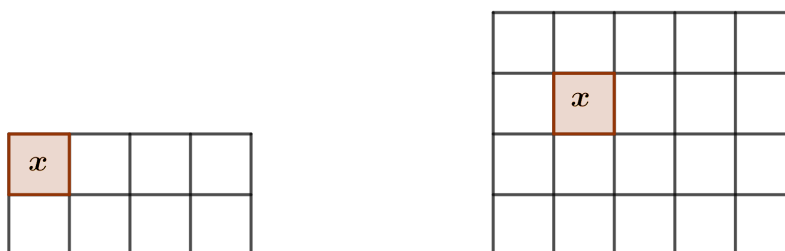
3.5 Como deduzir as fórmulas de área a partir das propriedades de equivalências

3.5.1 Introdução

Os retângulos formam uma classe de figuras para as quais se pode definir equivalência, adição e desigualdade, por isso podemos definir razão entre retângulos do mesmo modo que se define razão entre segmentos.

Exemplo: sejam R_1 e R_2 os retângulos na figura 35:

Figura 35 – Razão entre retângulos



Fonte: Autor

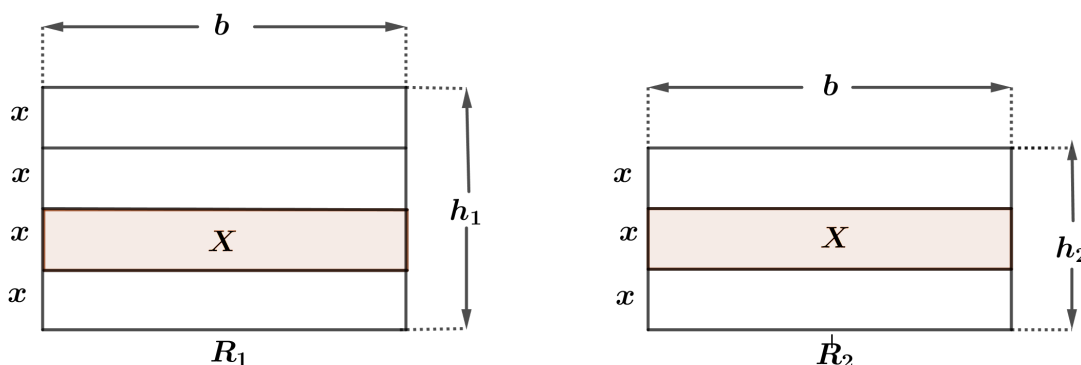
Por definição, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{8x}{20x} = \frac{2}{5}$. Nestas condições, fixando-se um retângulo unitário, podemos definir a razão entre dois retângulos quaisquer.

3.5.2 Razão entre retângulos

Teorema 3.11. *A razão entre dois retângulos de bases congruentes ou alturas congruentes é igual à razão entre suas alturas ou bases, respectivamente.*

Demonstração: Hipótese : $R_1 (b, h_1)$ e $R_2 (b, h_2)$, Tese : $\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}$
 1º caso: h_1 e h_2 são comensuráveis

Figura 36 – Razão entre retângulos-2



Fonte: Autor

Então, existe um submúltiplo de h_1 e de h_2 .

$$h_1 = px \text{ e } h_2 = qx \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Construindo os retângulos $X(b, x)$, temos:

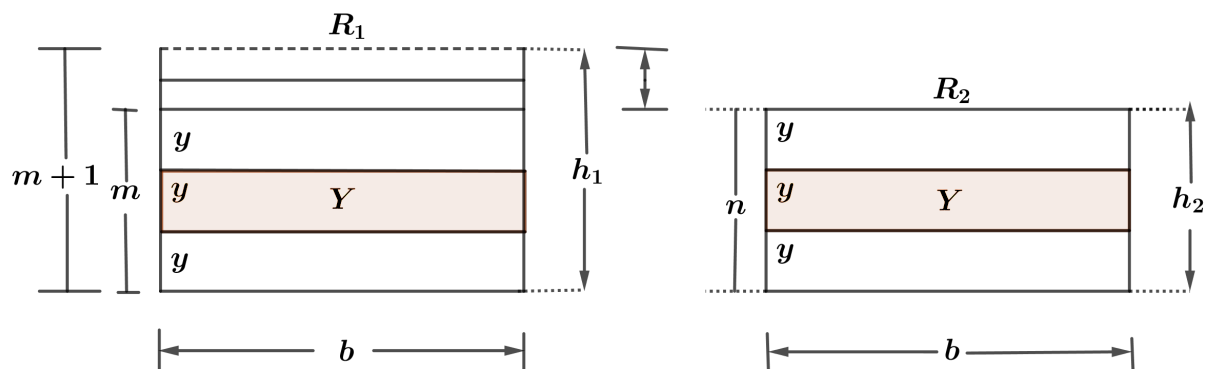
$$R_1 = px \text{ e } R_2 = qX \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

De (1) e (2), vem:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad \square$$

2º caso: h_1 e h_2 são incomensuráveis

Figura 37 – Razão entre retângulos-3



Fonte: Autor

Então, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2 . Tomemos um segmento y submúltiplo comum de h_2 onde y cabe certo número inteiro n de vezes em h_2 , isto é

$$h_2 = ny$$

Por serem h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente y e $m h_1$, chegamos a certo número inteiro m de vezes de modo que:

$$my < h_1 < (m + 1)y$$

Das relações $my < h_1 < (m + 1)y$ e $ny = h_2 = ny$, tem-se

$$\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m + 1}{n} \quad (3)$$

Construindo os retângulos $Y(b, y)$, temos: $mY < R_1 < (m + 1)Y$ e $nY = R_2 = nY$, então:

$$\frac{m}{n} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{m + 1}{n} \quad (4)$$

Sendo y submúltiplo de h_2 , pode variar e dividindo y , aumentamos n e nestas condições,

$$\frac{m}{n} \text{ e } \frac{m + 1}{n}$$

formam um par de classe contíguas que definem um único número real, que é $\frac{h_1}{h_2}$ pela expressão (3) e é $\frac{R_1}{R_2}$ pela expressão (4). Como esse número é único, então,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad \square$$

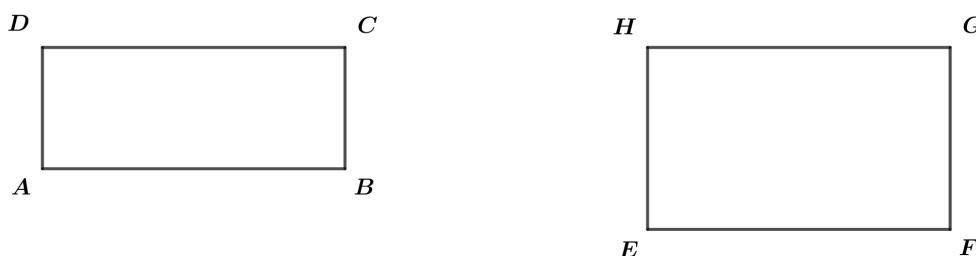
Corolário 3.12. *A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas.*

Demonstração: Sejam dois retângulos $ABCD$ e $EFGH$, com bases \overline{AB} e \overline{EF} , alturas \overline{AD} e \overline{EH} , respectivamente. A razão entre as áreas desses dois retângulos será dada por:

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{EFGH}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{EF} \cdot \overline{EH}}$$

Conforme a figura 38

Figura 38 – Razão entre 2 Retângulos



Fonte: Autor

Isso ocorre porque: $A_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$ e $A_{EFGH} = \overline{EF} \cdot \overline{EH}$. Assim, substituindo esses valores na equação anterior, temos:

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{EFGH}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{EF} \cdot \overline{EH}}$$

Portanto, concluímos que a razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas.

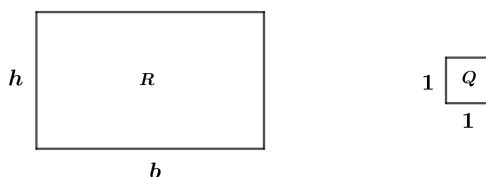
3.5.3 Dedução das fórmulas de áreas

Nesta seção, obteremos as áreas das figuras planas mais conhecidas, como foi feito na seção 2.6.1, porém agora usaremos o conceito de equivalências.

► Área do Retângulo

Dado um retângulo de base b e altura h e fixado o quadrado unitário cujo lado meça o que por definição tem área igual a 1, como mostra as figuras abaixo.

Figura 39 – Retângulo e quadrado



Fonte: Autor

Por definição, a área do retângulo A_R é a razão entre o retângulo R e o quadrado unitário Q . Ou seja:

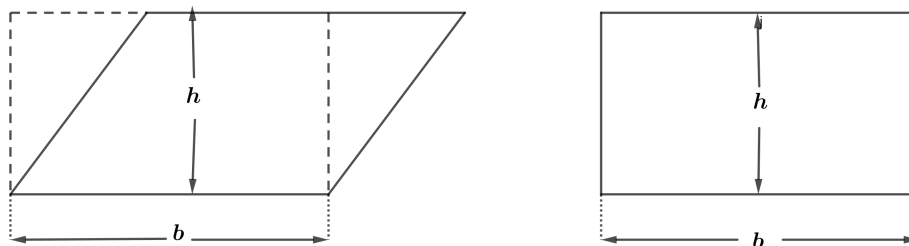
$A_R = \frac{R(b, h)}{Q(1, 1)} = \frac{b \cdot h}{1 \cdot 1} \implies A_R = (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida } h)$, portanto a área do retângulo é

$$A_R = b \cdot h$$

► Área do paralelogramo

Seja o paralelogramo $P(b, h)$, pelo teorema 2.6 ele é equivalente a um retângulo R cuja base mede b e altura mede h , daí temos:

Figura 40 – paralelogramo e retângulo



Fonte: Autor

Então, Área do paralelogramo A_P é igual a Área do retângulo A_R , logo :

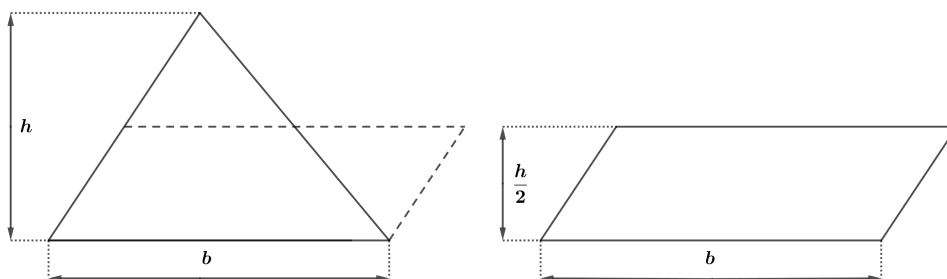
$$A_P = A_R \implies$$

$$= b \cdot h$$

► Área de um triângulo

Seja o triângulo $T(b, h)$, conforme já vimos sua área é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e altura mede $\frac{h}{2}$, daí temos:

Figura 41 – Triângulo e paralelogramo



Fonte: Autor

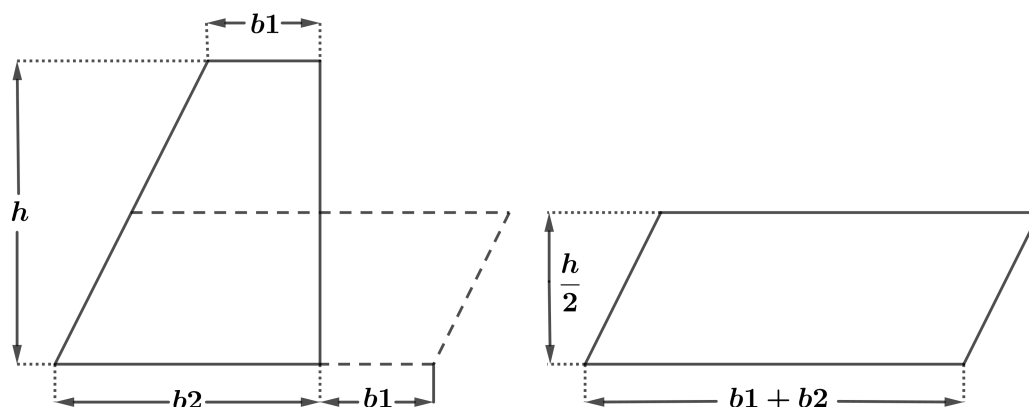
Então a área do triângulo A_T é igual a área do paralelogramo A_P ou seja:

$$A_T = b \cdot \frac{h}{2} \implies A_T = \frac{b \cdot h}{2}$$

► Área de um trapézio

Seja o trapézio $T_{ra}(b_1, b_2, h)$, sua área é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b_1 mais b_2 e altura mede $\frac{h}{2}$, daí temos:

Figura 42 – Trapézio e paralelogramo



Fonte: Autor

Então a área do trapézio A_{Tra} é igual a área do paralelogramo A_P ou seja:

$$A_{Tra} = A_P \implies$$

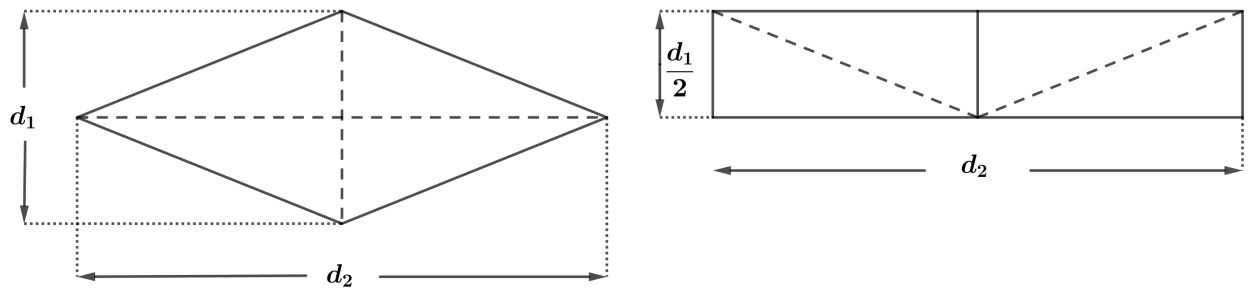
$$A_{Tra} = (b_1 + b_2) \cdot \frac{h}{2} \implies$$

$$A_{Tra} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

► Área de um losango

Seja o losango $L(d_1, d_2)$ de diagonais d_1 e d_2 , sua área é equivalente a área de um retângulo de base d_2 e altura de medida $\frac{d_1}{2}$, daí temos:

Figura 43 – Losango e retangular



Fonte: Autor

Então a área do losango A_L é igual a área do retângulo A_R ou seja:

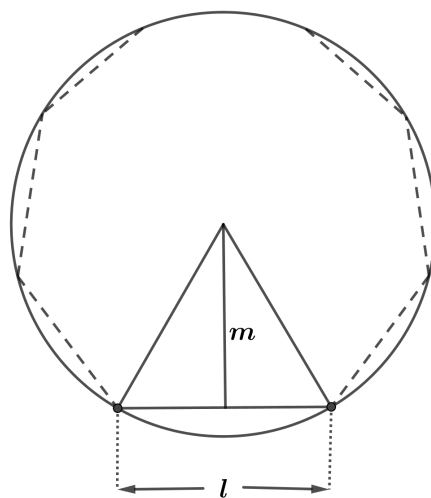
$$A_L = A_R \implies$$

$$A_L = d_2 \cdot \frac{d_1}{2} \implies$$

$$A_L = \frac{d_2 \cdot d_1}{2}$$

► **Área de um polígono regular de n lados**

Seja pol um polígono regular de n lados de medidas iguais a l e de apótema de medida m . Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base l e altura m .

Figura 44 – Polígono regular de n lados

Fonte: Autor

Então a área do polígono A_{pol} é igual a n vezes a área do triângulo A_T , ou seja:

$$A_{pol} = n \cdot A_T$$

Cálculo de A_T .

Observando a Figura 44 temos $A_T = \frac{l \cdot m}{2}$, então

$$\begin{aligned} A_{Pol} &= n \cdot A_T \\ &= n \cdot \frac{l \cdot m}{2} \\ &= \frac{n \cdot l \cdot m}{2} \\ &= \frac{(n \cdot l) \cdot m}{2} \end{aligned}$$

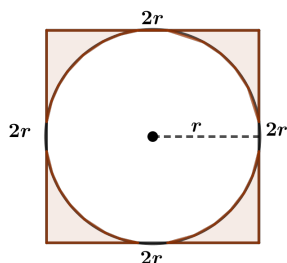
Sabendo que n representa o número de lados do polígono e l a medida de cada lado, então, $n \cdot l$ é o perímetro P desse polígono, daí temos:

$$\begin{aligned} P &= n \cdot l \implies \\ A_{pol} &= \frac{P \cdot m}{2} \implies \\ A_{pol} &= \frac{P \cdot m}{2} \end{aligned}$$

► Área de um Círculo

Observe o círculo abaixo inscrito em um quadrado.

Figura 45 – Círculo inscrito em quadrado



Fonte: Autor

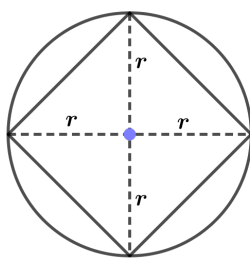
Medida do lado do quadrado: $2r$

Área da região quadrada $(2r)^2 = 4r^2$

Então a área do círculo com raio de medida r é menor do que $4r^2$

Agora observe abaixo o mesmo círculo circunscrito a um quadrado.

Figura 46 – Círculo circunscrito



Fonte: Autor

O quadrado tem diagonais de medidas $2r$.

Área da região quadrada pode ser obtida assim:

$$\frac{2r \cdot 2r}{2} = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$$

Então, a área do círculo A_C com raio de medida r é maior do que $2r^2$.

Assim, em um círculo com raio de medida r , a área é tal que:

$$2r^2 < A_C < 4r^2$$

Determinação da área do círculo

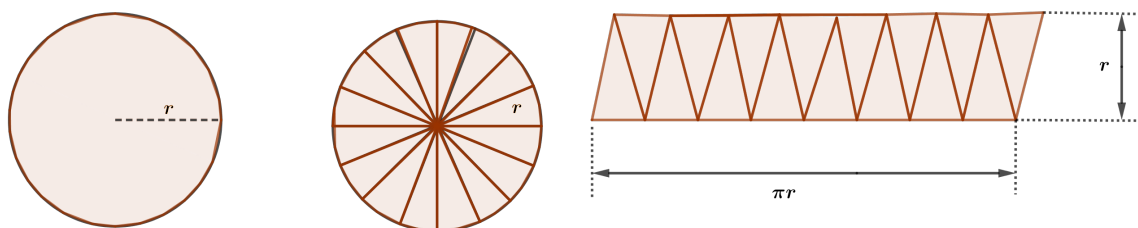
1º Caso : Usando o círculo dividido em setores

O círculo é dividido em um número par de setores que formam uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo, conforme a figura abaixo, onde sua base mede a metade do comprimento da circunferência e sua altura mede r .

A área dessa figura, que é também a área do círculo, é $A_C = (\pi r)r = \pi r^2$, isto é :

$$A_C = \pi r^2$$

Figura 47 – Círculo e paralelogramo



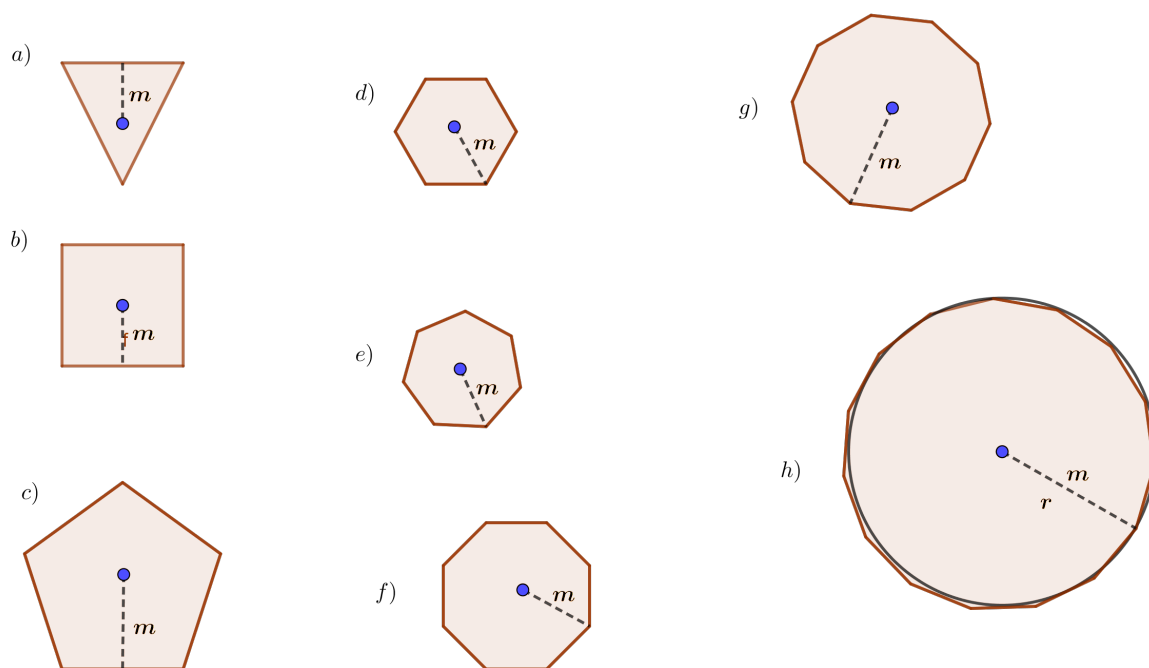
Fonte: Autor

2º Caso : Usando polígonos regulares

Já vimos que a área da região determinada por um polígono regular é dada por $A_{pol} = \frac{P \cdot m}{2}$, em que m é a medida do apótema e P é o perímetro.

Vamos analisar a sequência da figura 48 e observar o seu comportamento.

Figura 48 – Sequências de figuras



Fonte: Autor

À medida que aumentamos o número de lados dos polígonos regulares, a tendência é chegar ao círculo, no qual o apótema passa a ser o raio r e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência $2\pi r$.

Assim, a área do círculo pode ser representada por:

$$A_C = \frac{P \cdot m}{2} = \frac{r \cdot 2\pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

$$\text{ou seja } A_C = \pi \cdot r^2$$

3.6 Fórmulas para calcular a área do triângulo

Diante da importância que os triângulos têm no cálculo áreas de superfícies planas, já que qualquer polígono pode ser decomposto por triângulos, abrimos um espaço nesta seção para apresentar alguns maneiras de calcular a área de uma superfície triangular.

O triângulo é um polígono de três lados, e não possui diagonais, considerado uma figura rígida, ou seja não se deforma, por isso é de grande utilidade no setor da engenharia na construção civil, como prédios, viadutos e outras construções. É considerado uma importante figura no ramo da geometria, por estabelecer varias relações fundamentais na geometria e na trigonometria, e uma das principais relações é o Teorema de Pitágoras. Diante desses fatos apresentamos alguns fórmulas para calcular a área da superfície limitada pelo triângulo. Mas antes de apresentar essas fórmulas, vamos apresentar alguns definições sobre o triângulo.

Classificação dos triângulos

• Quanto aos os ângulos

- a) *Triângulo Acutângulo*, os três ângulos são agudos, ou seja, têm menos de 90° .
- b) *Triângulo Retângulo*, têm um ângulo que mede 90° . Dois lados são catetos e o lado oposto ao ângulo de 90° é a hipotenusa.
- c) *Triângulo Obtusângulo*, um dos três ângulos é obtuso, ou seja mede mais de 90° .

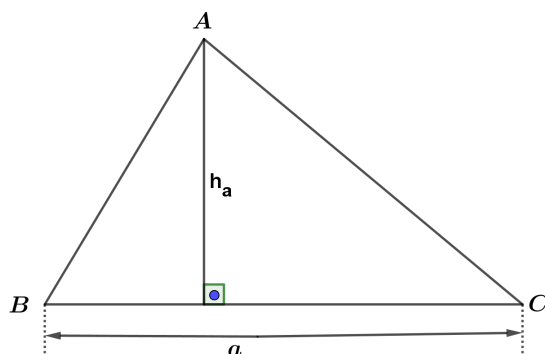
• Quanto aos lados

- a) *Triângulo Equilátero*, têm os três lados com mesma medida, e portanto seus ângulos também são iguais.
- b) *Triângulo Isósceles*, tem dois lados de mesmo comprimento. Os ângulos opostos aos lados iguais também são iguais.
- c) *Triângulo Escaleno*, os três lados têm as medidas diferentes, logo seus ângulos também são diferentes entre si.

Área de um triângulo em função dos lados e respectivas alturas

Dado o triângulo ABC na figura abaixo, onde \overline{BC} mede a e sua altura relativa à esta base mede h_a , temos:

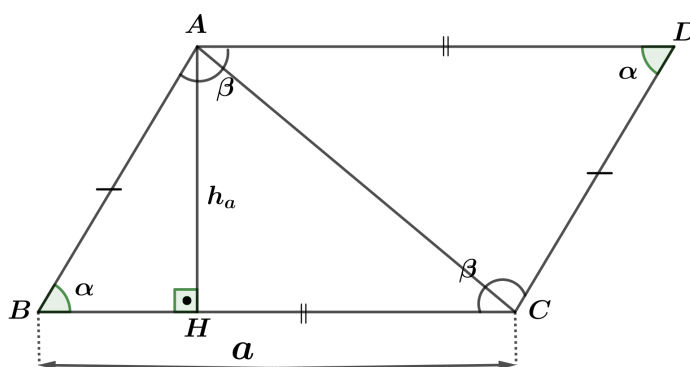
Figura 49 – Triângulo das alturas



Fonte: Autor

Traçamos as respectivas paralelas aos lados BC e AB a partir de A e C , estas interceptam-se no ponto D , determinando o paralelogramo $ABCD$, onde a e h_a são as medidas da base e altura, respectivamente.

Figura 50 – Paralelogramo das alturas



Fonte: Autoria própria

Observe que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$ porque ABCD é um paralelogramo,, pois $\hat{A}BC = \hat{A}DC = \alpha$ e $\hat{D}AB = \hat{D}CB = \beta$. Os triângulos ABC e ACD são congruentes e, portanto, suas áreas são iguais. Logo, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$, ou seja:

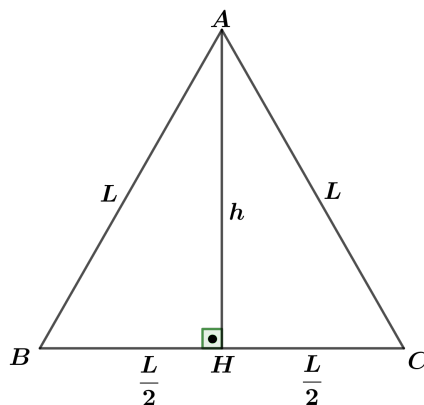
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

De forma análoga, temos: $S_{ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ e $S_{ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

Área de um triângulo equilátero de lado L

Seja o triângulo equilátero ABC , conforme a figura abaixo, onde h é a altura relativa a ao lado BC e L a medida de seus l

Figura 51 – Triângulo-equilátero



Fonte: Autor

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHB , temos:

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \cdot L^2 \Rightarrow$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot L \Rightarrow$$

$$h = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{3}$$

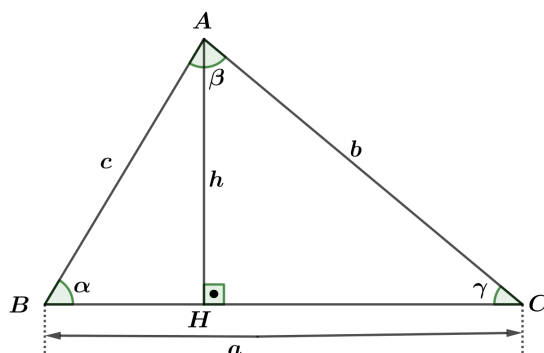
Sabendo que $S_{ABC} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$, temos a base igual L , logo

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(L \cdot \frac{L}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot L^2$$

Área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles

Seja o triângulo ABC , conforme a figura 50, onde α é o ângulo interno do vértice B , h é a altura relativa ao lado BC e c é o lado oposto ao vértice C .

Figura 52 – Triângulo-especial-2



Fonte: Autor

Do triângulo AHB , temos que:

$\text{sen } \alpha = \frac{h}{c}$, usando a fórmula geral para calcular a área de qualquer triângulo já apresentada neste capítulo, ou seja,

$$S_{ABC} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}, \text{ como } h = c \cdot \text{sen } \alpha \text{ e a base} = a \text{ então,}$$

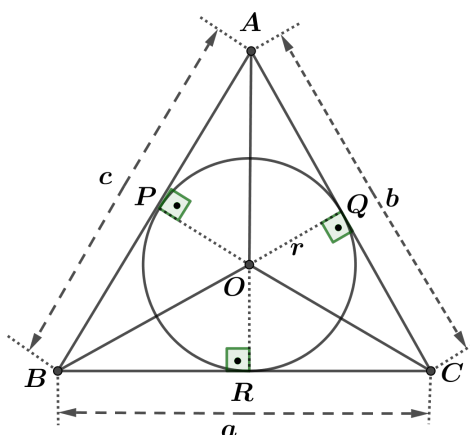
$$S_{ABC} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } \alpha}{2}, \text{ tomando } \alpha = \hat{B}, \text{ escrevemos, } S_{ABC} = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}.$$

$$\text{Analogamente obtemos: } S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}}{2} \text{ e } S_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$$

Área de um triângulo em função das medidas de seus lados e da medida do raio da circunferência inscrita

Seja o triângulo ABC , representado na figura abaixo, onde a, b e c são as respectivas medidas dos lados opostos aos vértices A, B e C e seja r a medida do raio da circunferência de centro O , inscrita nesse triângulo.

Figura 53 – Triângulo-circunscrito



Fonte: Autor

Da figura acima temos: \overline{OP} , \overline{OQ} e \overline{OR} , são as respectivas alturas dos triângulos AOB , AOC e BOC e medem r . Observe que

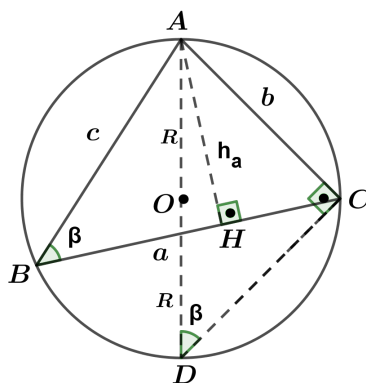
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} \Rightarrow \\ S_{ABC} &= \frac{r \cdot c}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2} \Rightarrow \\ S_{ABC} &= \left(\frac{a + b + c}{2} \right) \cdot r \Rightarrow \\ S_{ABC} &= p \cdot r \end{aligned}$$

Onde p é o semiperímetro do triângulo ABC .

Área de um triângulo em função das medidas dos lados e da medida do raio da circunferência circunscrita

Seja o triângulo ABC inscrito na circunferência de centro O e raio R , conforme a figura abaixo.

Figura 54 – Triângulo inscrito



Fonte: Autor

Podemos escrever a área do triângulo ABC como sendo :

$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot h_a}{2}$, e como $A\hat{H}B = A\hat{C}D = 90^\circ$ e $A\hat{B}C = A\hat{D}C = \frac{\widehat{AB}}{2}$, temos $\triangle AHB \equiv \triangle ACD$, daí segue:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow$$

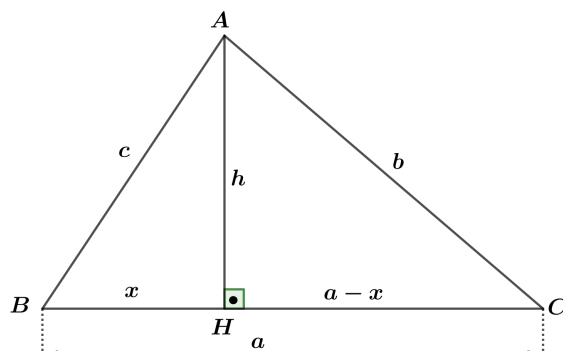
$$\frac{h_a}{b} = \frac{c}{2R} \Rightarrow h_a = \frac{b \cdot c}{2R} \quad \text{e } \overline{BC} = a, \text{ logo temos:}$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot h_a}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot \frac{b \cdot c}{2R}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Área de um triângulo em função das medidas dos lados (Fórmula de Heron)

Seja o triângulo ABC , conforme a figura 55, onde a , b e c são as medidas de seus lados e h_a a altura em relação ao lados BC .

Figura 55 – Triângulo Fórmula de Heron



Fonte: Autor

Dos triângulos ABH e AHC na figura 52 e utilizando o Teorema de Pitágoras temos, respectivamente,

$$\text{I) } c^2 = x^2 + h^2 \text{ e}$$

$$\text{II) } b^2 = (x - a)^2 + h^2 \Rightarrow b^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2 + h^2 \Rightarrow 2 \cdot x \cdot a = a^2 + h^2 + x^2 - b^2 \Rightarrow \\ 2 \cdot x \cdot a = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a}.$$

$$\text{De } c^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = (c - x) \cdot (c + x) \Rightarrow h^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a}\right) \cdot \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a}\right) \Rightarrow$$

$$h^2 = \left(\frac{2 \cdot a \cdot c - a^2 - c^2 + b^2}{2 \cdot a}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot a \cdot c + a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a}\right) \Rightarrow$$

$$h^2 = \left(\frac{b^2 - (a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2)}{2 \cdot a}\right) \cdot \left(\frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot c + c^2 - b^2}{2 \cdot a}\right) \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{(b^2 - (a - c)^2) \cdot ((a + c)^2 - b^2)}{4 \cdot a^2} \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{(b - a + c) \cdot (b + a - c) \cdot (a + c - b) \cdot (a + c + b)}{4 \cdot a^2} \Rightarrow$$

$$* \quad h^2 = \frac{(b + c - a) \cdot (a + b - c) \cdot (a + c - b) \cdot (a + b + c)}{4 \cdot a^2}$$

Sabemos que o perímetro do $\triangle ABC$ é $2p = a + b + c$, daí segue que:

$$\text{I) } 2p - 2a = a + b + c - 2a \Rightarrow 2 \cdot (p - a) = (b + c - a)$$

$$\text{II) } 2p - 2b = a + b + c - 2b \Rightarrow 2 \cdot (p - b) = (a + c - b)$$

$$\text{III) } 2p - 2c = a + b + c - 2c \Rightarrow 2 \cdot (p - c) = (a + b - c)$$

Substituindo I , II e III em (*) , temos:

$$h^2 = \frac{2 \cdot (p - a) \cdot 2 \cdot (p - b) \cdot 2 \cdot (p - c) \cdot 2p}{4 \cdot a^2} \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4 \cdot p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}{a^2} \Rightarrow$$

$$h = \frac{2 \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}}{a}$$

$$\text{Sabemos que: } S_{ABC} \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}}{a}}{2} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Onde $p = \frac{a + b + c}{2}$ é o semi-perímetro do triângulo. \square

Portanto essa é a fórmula para calcular a área de um triângulo conhecendo as medidas de seus lados, também conhecida com a Fórmula de Heron.

4 Aplicações do conceito de áreas

Neste capítulo daremos ênfase as demonstrações de alguns teoremas, tais como o Teorema de Viviane, Teorema de Tales e da Bissetriz, como também alguns proposições envolvendo fórmulas trigonométricas, tais como arco duplo e arco metade, sempre utilizando o conceitos de área de uma figura plana. Os teoremas que seguem neste capítulo foram extraídos de [12].

4.1 Demonstração de alguns teoremas usando o conceito de áreas e suas propriedades

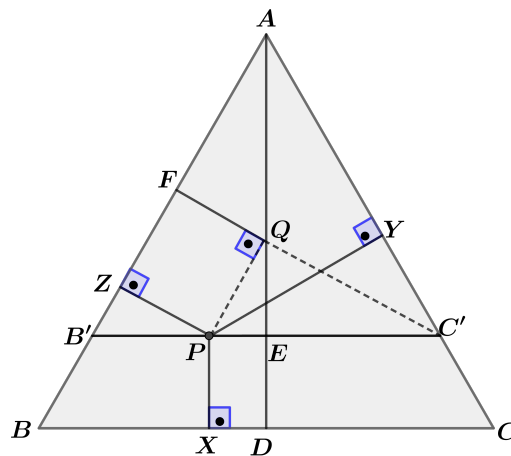
Para mostrar a importância do conceito de áreas, apresentaremos algumas demonstrações em geometria e trigonometria, utilizando o conceito de área e suas propriedades. Como primeiro exemplo, comparemos duas demonstrações de um conhecido problema.

Teorema 4.1. (*Viviani*)

A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual a medida da altura do triângulo.

Demonstração 1: Consideremos o triângulo equilátero ABC da figura abaixo, um ponto P interior e as perpendiculares PX , PY e PZ aos lados. Tracemos por P , $B'C'$ paralelo à BC , formando o triângulo equilátero $AB'C'$ porque $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, logo $\hat{A} = \hat{B}' = \hat{C}'$. Tracemos ainda as alturas AE e $C'F$ desse triângulo e a perpendicular PQ a $C'F$.

Figura 56 – Triângulo equilátero 1



Fonte: Autor

Pelo caso de congruência hipotenusa ângulo agudo dos triângulos retângulos PQC' e PYC' , são congruentes pois $AB' \parallel PQ$, então $\hat{A}B'P = \hat{Q}P'E$ e $AB'C'$ equilátero, logo $\hat{A}B'P = \hat{Y}C'P$, daí $\hat{Q}P'E = \hat{Y}C'P$.

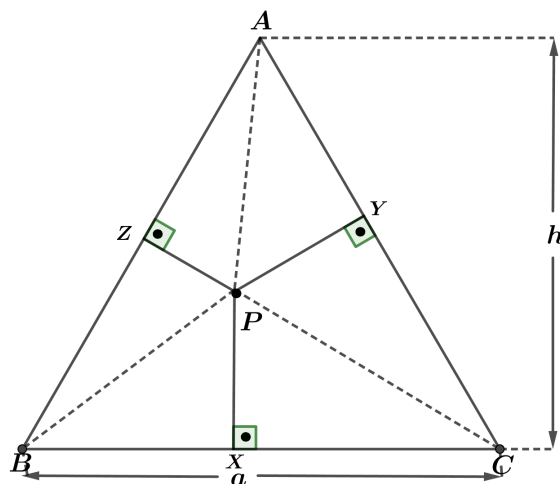
Concluimos que $PY = C'Q$ e, como $PQFZ$ é um retângulo, temos que $PZ = QF$. Daí escrevemos que,

$$PY + PZ = C'Q + QF = C'F \quad \textcircled{*}$$

Observe que as alturas AE e $C'F$ do triângulo equilátero $AB'C'$ são iguais e, portanto, $PY + PZ = AE$. Prolongando AE até a base BC do triângulo, obtemos $ED = PX$. Finalmente, na igualdade $\textcircled{*}$, somando PX do lado esquerdo e ED do lado direito para obter $PX + PY + PZ = AE + ED = AD$, altura do triângulo ABC .

Demonstração 2: Consideremos agora o triângulo equilátero ABC com lado $\overline{BC} = a$ e altura h , como na figura 57. Traçamos os segmentos PA , PB e PC , então a soma das áreas dos triângulos PBC , PCA e PAB é igual à área de ABC .

Figura 57 – Triângulo equilátero 2



Fonte: Autor

Sejam X,Y,Z respectivamente os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB. De acordo com a figura acima temos:

$$S_{PBC} + S_{PAC} + S_{PAB} = S_{ABC} \Rightarrow$$

$$S_{PBC} = \frac{a \cdot \overline{PX}}{2}, \quad S_{PAC} = \frac{a \cdot \overline{PY}}{2} \quad \text{e} \quad S_{PAB} = \frac{a \cdot \overline{PZ}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a \cdot \overline{PX}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PY}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PZ}}{2} = S_{ABC} \Rightarrow$$

$$\frac{a \cdot (\overline{PX} + \overline{PY} + \overline{PZ})}{2} = S_{ABC}$$

$$\text{Mas, } S_{ABC} = \frac{a \cdot h}{2} \quad \text{daí } \overline{PX} + \overline{PY} + \overline{PZ} = h. \quad \square$$

E o problema está resolvido.

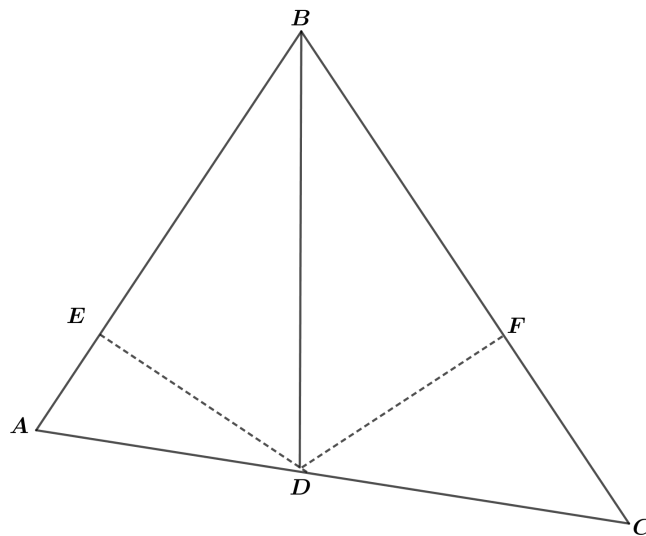
Observe que na primeira solução usamos o conceito de congruência de triângulos, já na segunda solução foi utilizado o conceito de área.

Teorema 4.2. (da Bissetriz)

A bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Ou seja, se BD for bissetriz do ângulo do triângulo ABC, então,

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$$

Figura 58 – Bissetriz 1



Fonte: Autor

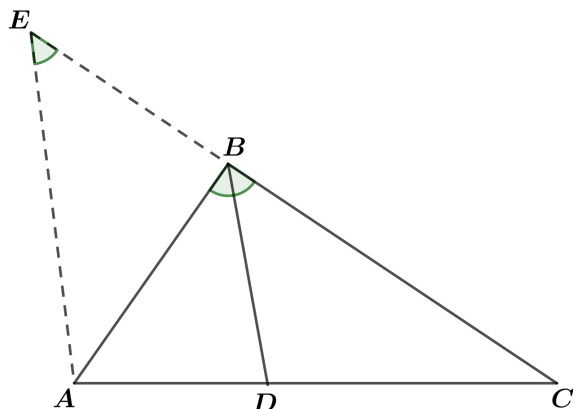
Demonstração 1: Utilizando os conceitos de área, e lembrando um deles, que se dois triângulos possuem mesma altura, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. De acordo com a figura acima temos:

A razão entre as áreas dos triângulos BDA e BDC é igual a $\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$. Por outro lado, qualquer ponto da bissetriz de um ângulo equidista de seus lados e, portanto, as perpendiculares DE e DF aos lados BA e BC são iguais. Logo,

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{S_{BAD}}{S_{BDC}} = \frac{1/2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{DE}}{1/2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DF}} = \frac{1/2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{DE}}{1/2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{DE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \implies \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}. \quad \square$$

Demonstração 2: Do triângulo ABC da figura 56 o segmento BD é a bissetriz do $\hat{A}BC$ desse triângulo. Além disso traçamos o prolongamento do seu lado CB até o ponto E , onde o segmento AE é paralelo ao segmento BD .

Figura 59 – Bissetriz-1



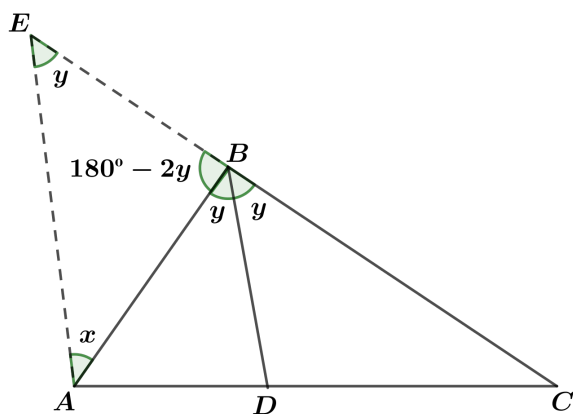
Fonte: Autor

Da figura 56 o ângulo \widehat{AEB} é congruente ao ângulo \widehat{DBC} , pois CE é uma reta transversal aos segmentos paralelos AE e BD . Então, aplicando o Teorema de Tales, concluímos que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

Daí nos resta demonstrar que $\overline{BE} = \overline{AB}$. Sendo y a medida dos ângulos \widehat{ABD} e \widehat{DBC} , o ângulo $\widehat{ABE} = 180^\circ - 2y$ e sendo x a medida do ângulo \widehat{EAB} , conforme a figura 57, temos:

Figura 60 – Bissetriz-2



Fonte: Autor

A soma dos ângulos internos do triângulo ABE é 180° , então:

$$\begin{aligned} 180^\circ - 2y + x + y &= 180^\circ \implies \\ -y + x &= 180^\circ - 180^\circ \implies \\ -y + x &= 0^\circ \implies \\ y &= x. \end{aligned}$$

Daí segue que $\widehat{BEA} = \widehat{BAE}$, com isso concluímos que o triângulo ABE é isósceles. Portanto, o lado $\overline{AB} = \overline{BE}$. Logo, fica provado que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$

Teorema 4.3. (Teorema de Tales)

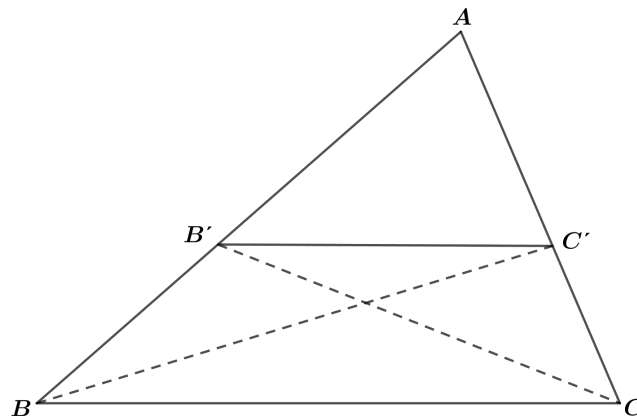
Sejam B' e C' pontos dos lados AB e AC , respectivamente, do triângulo ABC . Se $B'C'$ for paralelo à BC , então:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

Demonstração: (Utilizando o conceito de área):

Observando a figura abaixo

Figura 61 – Teorema de Tales-1



Fonte: Autor

Consideremos os segmentos BC' e CB' na figura acima. E como $B'C' \parallel BC$, então os triângulos $B'C'B$ e $B'C'C$ têm mesma área porque possuem mesma base $B'C'$ e alturas relativas a essa base também iguais.

Acrescentando a esses triângulos, o triângulo $AB'C'$, concluímos que os triângulos ABC' e ACB' também possuem a mesma área. Daí temos:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC'}} = \frac{S_{AB'C'}}{S_{ACB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \implies \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}.$$

Portanto, fica provado o teorema. \square

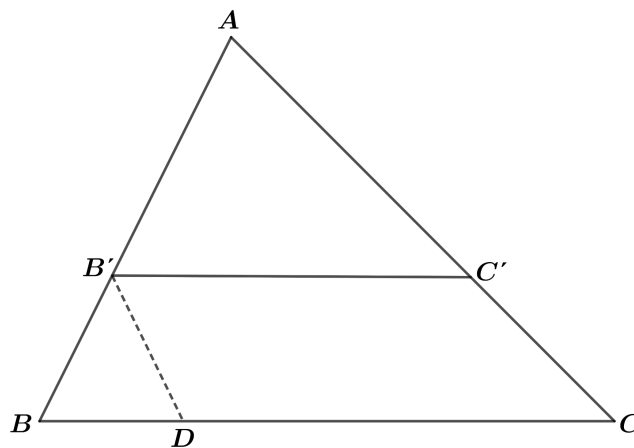
2ª solução: Sejam B' e C' pontos dos lados AB e AC , respectivamente, do triângulo ABC . Se $B'C'$ for paralelo à BC , estão:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$$

Demonstração (utilizando o conceito de semelhança)

Considerando a figura 59, da semelhança dos triângulos ABC e $AB'C'$, temos

Figura 62 – Teorema de Tales-2



Fonte: Autor

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \implies \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} \quad \square$$

4.2 As fórmulas trigonométricas

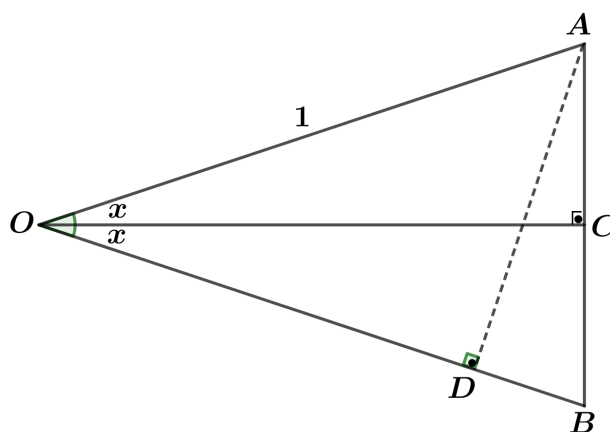
Usando o conceito de área e suas propriedades, vamos demonstrar algumas fórmulas trigonométricas bem usuais no ensino médio.

Proposição 4.4. *Se $0^\circ < x < 45^\circ$, então $\text{sen}(2x) = 2 \cdot \text{sen}x \cdot \text{cos}x$.*

Demonstração: Consideremos a figura 63 formada por dois triângulos retângulos OCA e OCB iguais e tomando

$$\overline{AO} = \overline{OB} = 1$$

Figura 63 – Triângulo isósceles



Fonte: Autor

Temos então $\overline{CA} = \overline{CB} = \text{sen}x$, $\overline{OC} = \text{cos}x$ e, traçamos AD perpendicular a OB então $\overline{AD} = \text{sen}(2x)$. Agora, observe que:

$$S_{AOB} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{AD}}{2}, \text{ ou } S_{AOB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2}, \text{ daí escrevemos que:}$$

$$\overline{OB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{OC} \implies$$

$$1 \cdot \text{sen}(2x) = (\overline{CA} + \overline{CB}) \cdot \text{cos}x \implies$$

$$\text{sen}(2x) = (\text{sen}x + \text{sen}x) \cdot \text{cos}x \implies \text{sen}(2x) = 2 \cdot \text{sen}x \cdot \text{cos}x$$

assim concluímos a demonstração. \square

Proposição 4.5. Se $0^\circ < x < 90^\circ$, então

A

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Demonstração: Consideremos a figura 63, o ângulo $O\hat{B}C = \Theta = 90^\circ - x$.
Como $\overline{OD} + \overline{DB} = 1$, temos:

$\cos 2x + 2\operatorname{sen}x \cdot \cos\Theta = 1$ ou $\cos 2x + 2\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}x = 1$,
uma vez que $\cos\Theta = \frac{\overline{DB}}{\overline{AC} + \overline{BC}} \Rightarrow \overline{DB} = (\overline{AC} + \overline{BC}) \cdot \cos\Theta \Rightarrow$
 $\overline{DB} = (\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x) \cdot \cos(90^\circ - x) \Rightarrow \overline{DB} = 2 \cdot \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}x$, porque x e Θ , são complementares. Logo,

$$\operatorname{sen}x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

substituindo $2x$ por x e, conseqüentemente, x por $\frac{x}{2}$, teremos:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Assim fica demonstrada a proposição. \square

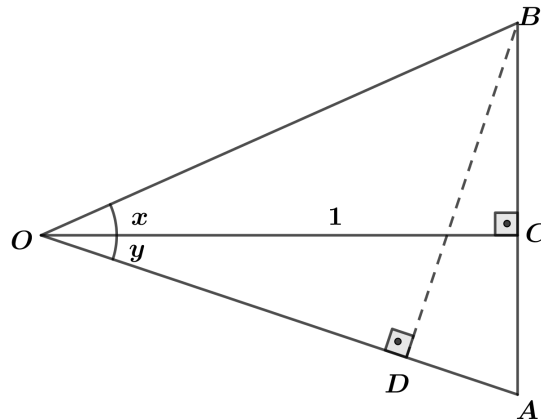
Proposição 4.6. Se x , y , $x + y$ e $x - y$ são ângulos agudos, então:

- a) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}x \cdot \cos y + \operatorname{sen}y \cdot \cos x$
- b) $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}x \cdot \cos y - \operatorname{sen}y \cdot \cos x$

Demonstração (letra a)

Para demonstrar o item a, consideremos a figura abaixo:

Figura 64 – Triângulo escaleno



Fonte: Autor

Da figura 64, temos: $\overline{OC} = 1$, $AB \perp OC$, $C\hat{O}A = y$, $B\hat{O}C = x$ e $B\hat{O}A = x + y$.
Daí, segue os triângulos OAC e OBC

$$\cos y = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}, \quad \cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}, \quad \tan y = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \quad \text{e} \quad \tan x = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}}.$$

$$\text{Então: } \cos y = \frac{1}{\overline{OA}}, \quad \cos x = \frac{1}{\overline{OB}}, \quad \tan y = \frac{\overline{AC}}{1} \quad \text{e} \quad \tan x = \frac{\overline{BC}}{1}.$$

Daí segue:

$$\overline{OA} = \frac{1}{\cos y}, \quad \overline{OB} = \frac{1}{\cos x}, \quad \overline{CA} = \tan y, \quad \overline{CB} = \tan x \quad \text{e, traçamos } BD \perp OA.$$

$$\text{Ainda da figura 64 temos } \sin(x + y) = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} \implies \overline{BD} = \overline{OB} \cdot \sin(x + y).$$

Como $BD \perp OA$ e $AB \perp OC$, então os triângulos BDA e OCA são semelhantes, logo:

$$\overline{AB} \cdot \overline{OC} = \overline{BD} \cdot \overline{OA} \implies (\overline{CA} + \overline{CB}) \cdot \overline{OC} = \overline{BD} \cdot \overline{OA} \implies$$

$$(\tan y + \tan x) \cdot 1 = \overline{OB} \cdot \sin(x + y) \cdot \frac{1}{\cos y} \implies$$

$$(\tan y + \tan x) \cdot 1 = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin(x + y) \cdot \frac{1}{\cos y} \implies$$

$$\frac{\text{sen}y}{\text{cos}y} + \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin(x + y) \cdot \frac{1}{\cos y} \implies$$

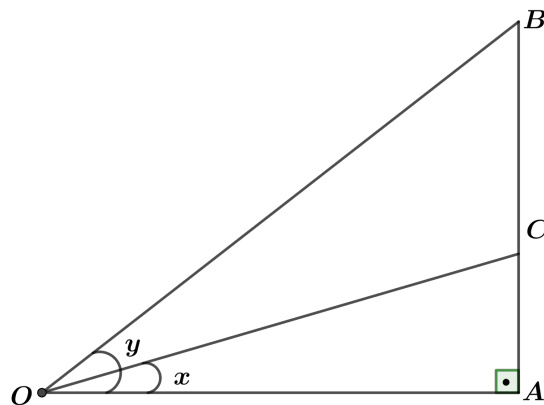
$$\frac{\overline{sen y} \cdot \overline{\cos x} \cdot \overline{\cos y}}{\overline{\cos y}} + \frac{\overline{\cos x} \cdot \overline{\cos y}}{\overline{\cos x}} = \overline{\sin(x + y)} \implies$$

$$\overline{\sin(x + y)} = \overline{\sin x} \cdot \overline{\cos y} + \overline{\sin y} \cdot \overline{\cos x}.$$

Assim fica provada a proposição letra (a). \square

Demonstração (letra b)

Figura 65 – Triângulo retângulo



Fonte: Autor

Da figura 65, em que $\overline{OA} = 1$ por construção, temos do triângulo AOB

$$\overline{\sin y} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \text{ e } \overline{\cos y} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{1}{\overline{OB}}.$$

Do triângulo AOC segue,

$$\overline{\sin x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \text{ e } \overline{\cos x} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{1}{\overline{OC}}.$$

E do triângulo BOC , tomando OB como base, temos:

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{\sin(y - x)}$$

Usando o conceito de área, escrevemos:

$$S_{AOC} = S_{AOB} - S_{BOC} \implies S_{BOC} = S_{AOB} - S_{AOC}$$

Observe que:

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos y} \cdot \text{sen}(y - x)$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC} \implies S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{AC} \implies S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen } x$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AB} \implies S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{AB} \implies S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{OB} \cdot \text{sen } y$$

Concluimos que:

$$-S_{BOC} = S_{AOC} - S_{AOB} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos y} \cdot \text{sen}(x - y) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen } x - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \overline{OB} \cdot \text{sen } y \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos y} \cdot \text{sen}(x - y) = \overline{OC} \cdot \text{sen } x - \overline{OB} \cdot \text{sen } y \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos y} \cdot \text{sen}(x - y) = \frac{1}{\cos x} \cdot \text{sen } x - \frac{1}{\cos y} \cdot \text{sen } y \Rightarrow$$

$$\text{sen}(x - y) = \frac{\cos x \cdot \cos y}{\cos x} \cdot \text{sen } x - \frac{\cos x \cdot \cos y}{\cos y} \cdot \text{sen } y \Rightarrow$$

$$\text{sen}(x - y) = \text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x$$

Assim fica provado a proposição letra b. \square

5 Construção do Kit de Matérias Manipuláveis no Ensino de Área de Figuras Planas

Para associar-se com a realidade dos alunos, a geometria é um assunto muito interessante, o estudo da mesma é um campo fértil para trabalhar com situações problemas, facilitando a aprendizagem de medidas e números, segundo os parâmetros curriculares nacionais (PCN). Para facilitar o ensino da geometria, é de suma importância que os professores possuam uma diversidade de materiais concretos, pois se tornará mais agradável e didático, gerando assim, uma participação maior em sala de aula, desenvolvendo habilidades e gerando uma maior aplicação daquilo que foi ensinado ao aluno.

Quando desenvolvido de forma crítica, o ensino da matemática deve levar à reflexão sobre os conteúdos estudados, facilitando a didática para o aluno conseguir relatar o que lhe foi ensinado, fazendo com que os mesmos possam estruturar seus pensamentos e fazer generalizações, sendo capazes de interpretar gráficos, desenhos e construções. Priorizamos a ação dos estudantes ao fazermos uso de materiais concretos para o ensino da geometria plana, com isso fazemos os alunos refletirem sobre os resultados encontrados, para daí desenvolverem conceitos e habilidades necessárias para aprimorarem os seus conhecimentos. Por volta de 1970, os materiais manipuláveis tiveram uma grande valorização, com a tendência empírica ativista, o aluno era considerado um ser ativo que poderia aprender praticando (FIORENTINI, 1995). Os materiais são definidos como objetos ou coisas capazes de sentir, tocar, movimentar ou manipular, podem ser objetos reais que terão aplicação no dia a dia, para os alunos. Portanto, materiais como giz, calculadora, filme, livro, quebra-cabeça, um jogo, ou uma embalagem, partindo dessas concepções, podemos dizer que independente da definição, classificação, ou nomenclatura, esse materiais serão objetos importantes no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Como tudo, devem ser aplicados de forma que venha a contribuir com esse processo.

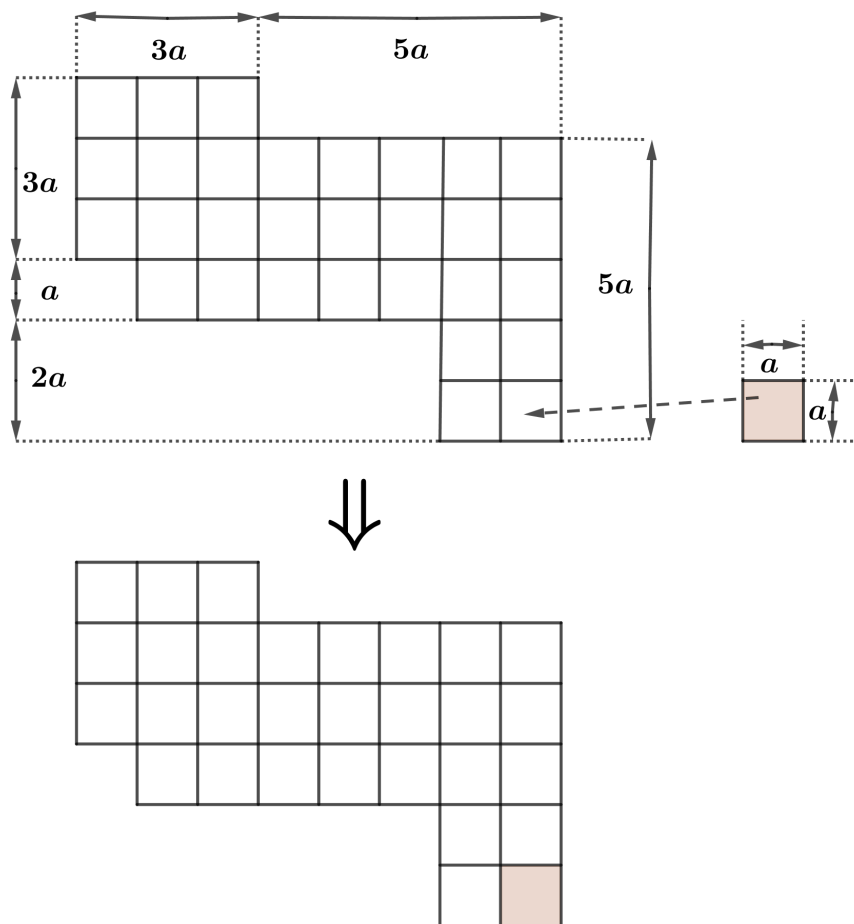
É importante entender, que não devemos priorizar apenas o uso desses materiais, mas sim fazer com que eles sejam algo a mais no processo de aprendizagem, para deixar algo mais harmônico, e sair daquilo monótono, assim é importante não ficar garantida a aprendizagem somente no seu uso rotineiro, e sim diversificar, para desenvolver um aprendizado mais heterogêneo. Em todos os conteúdos estudados, não só na matemática, deve contribuir a formação de pensamentos e desenvolvimentos do conhecimento, os alunos devem ter à sua disposição estratégias de ensino e materiais coerentes, levando à potencialização na aprendizagem, e assim contribuindo para que percebam a aplicação e utilização da matemática estudada. (DAIANE, SANI, ELSA, 2017)

5.1 Construção das peças do kit de material manipuláveis

Este material é composto de oito peças que são:

Primeira peça: Construção de um Polígono Irregular

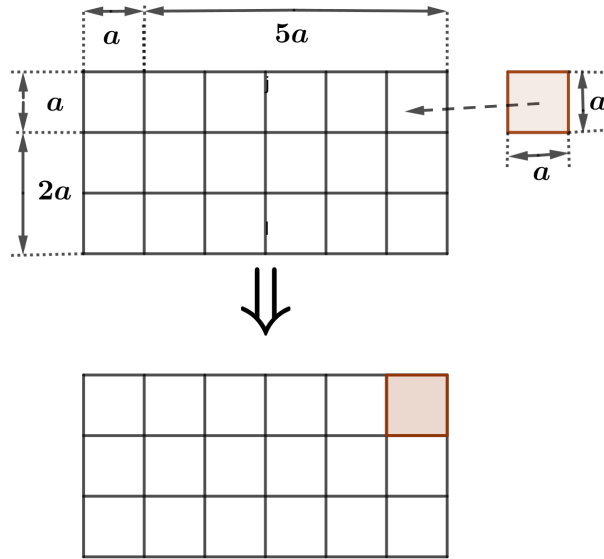
Figura 66 – Polígono-irregular-kit



Fonte: Autor

Segunda Peça: Construção de um retângulo

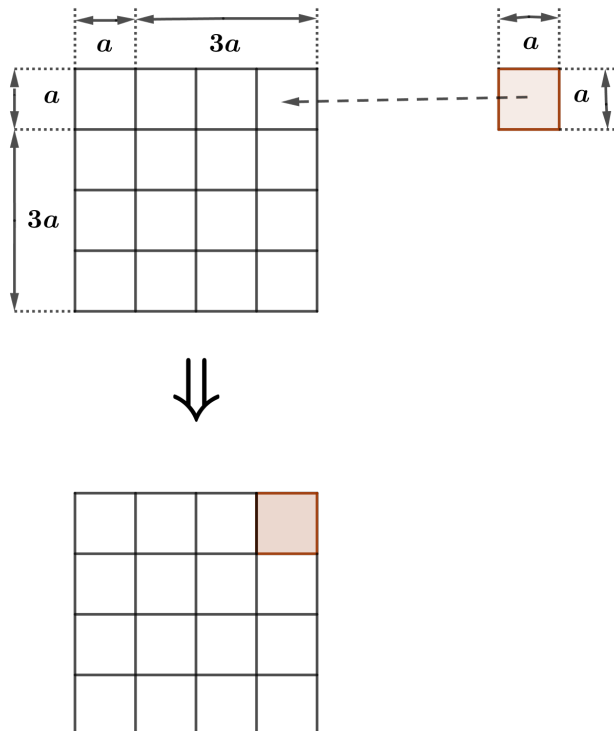
Figura 67 – Retângulo-kit



Fonte: Autor

Terceira peça : Construção de Um quadrado

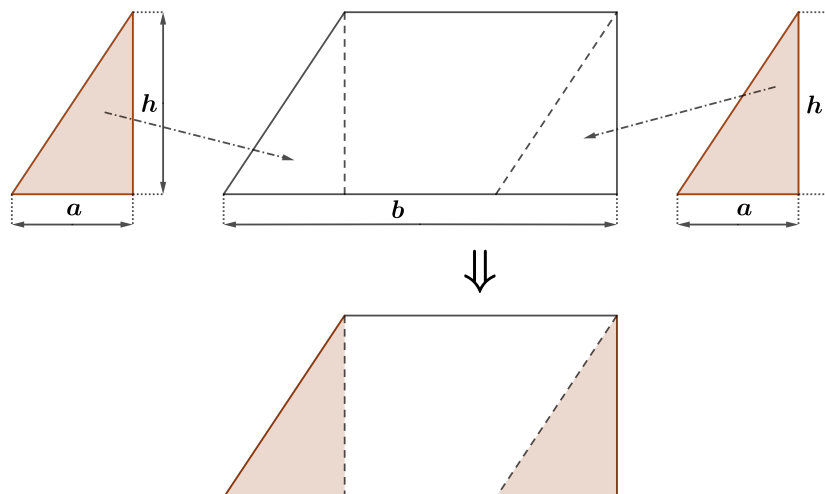
Figura 68 – Quadrado-kit



Fonte: Autor

Quarta Peça : Construção de um paralelogramo a partir de um retângulo

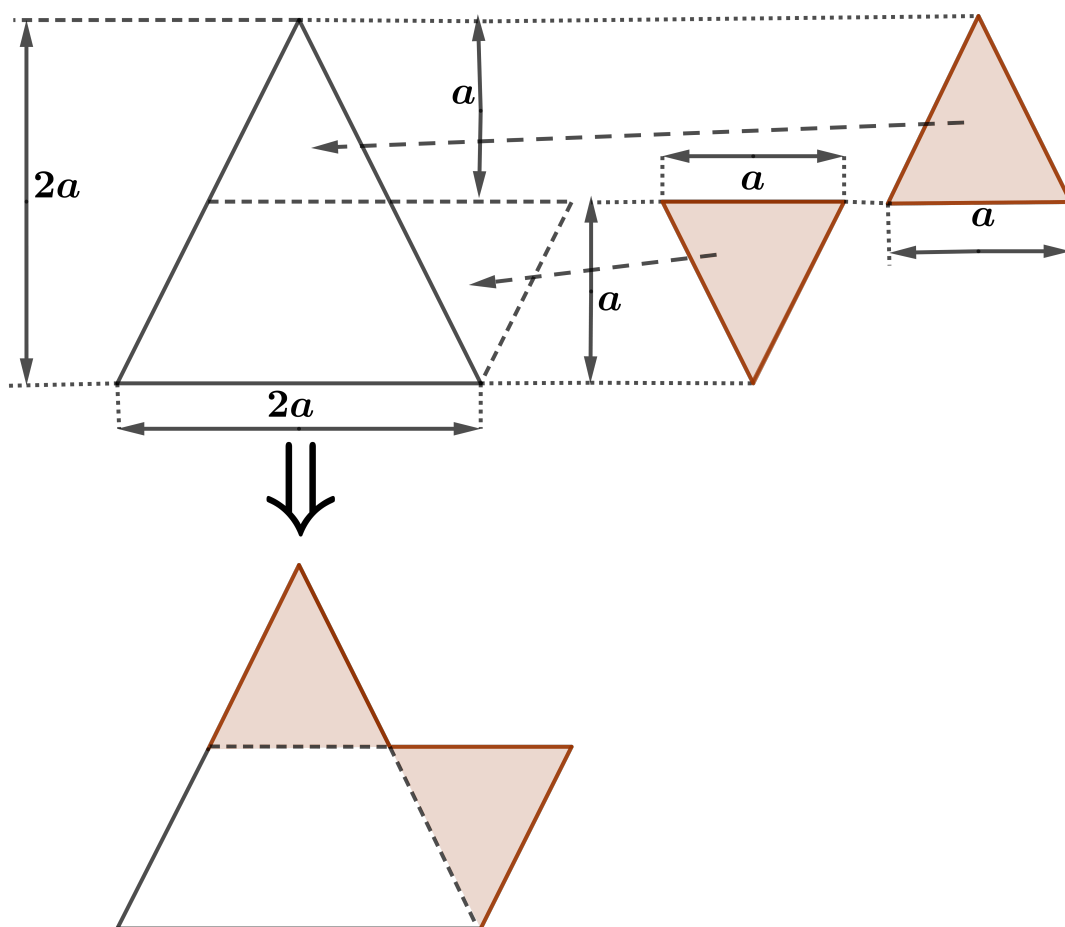
Figura 69 – Paralelogramo-kit



Fonte: Autor

Quinta peça : Construção de Um triângulo a partir de um paralelogramo

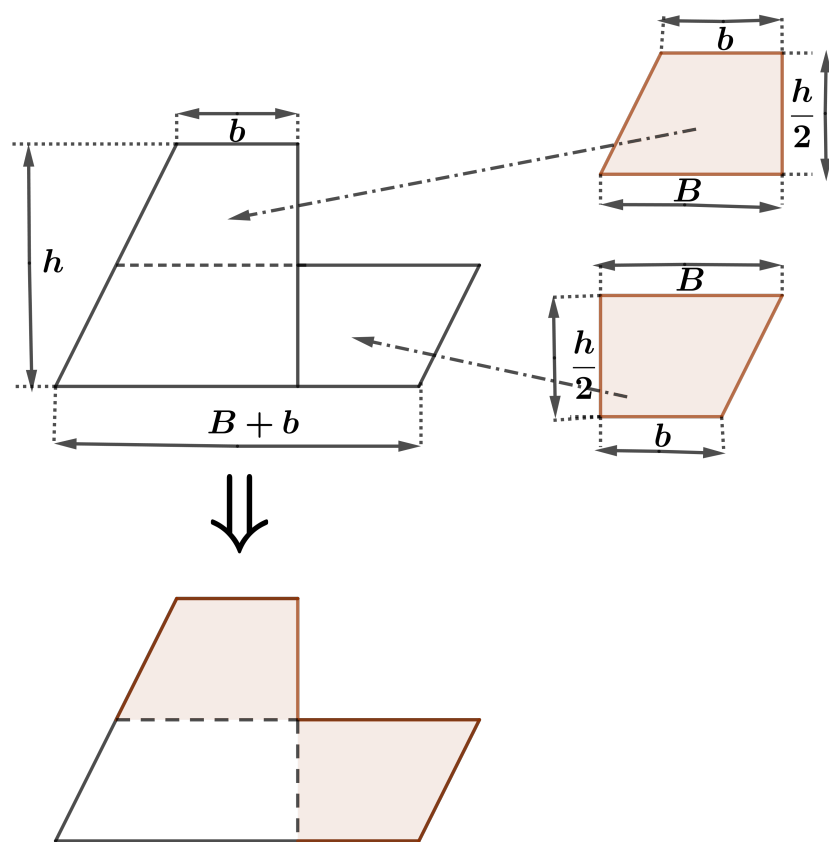
Figura 70 – Triângulo-kit.



Fonte: Autor

Sexta Peça : Construção de um trapézio a partir de um paralelogramo

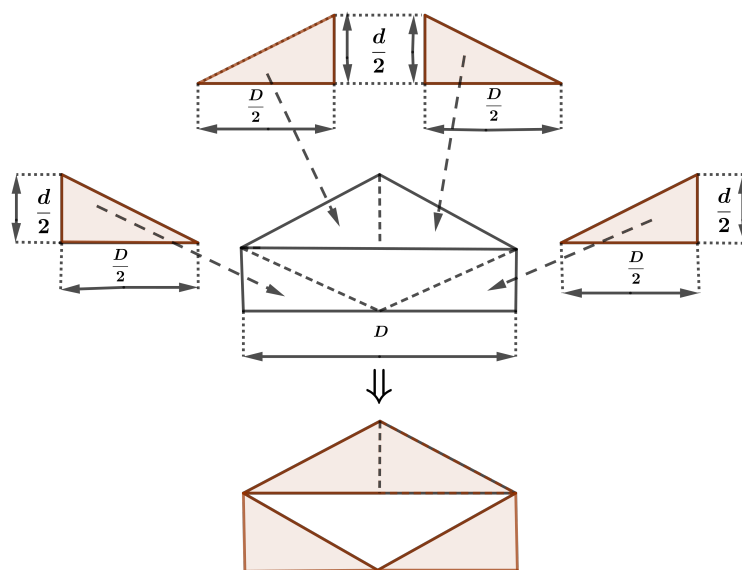
Figura 71 – Trapézio-kit



Fonte: Autor

Sétima peça : Construção de losango a partir do retângulo

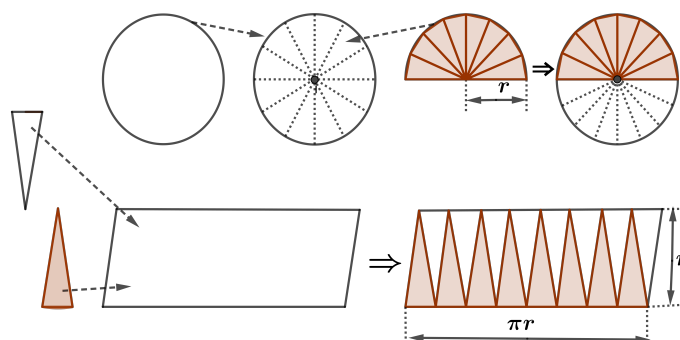
Figura 72 – Losango-kit



Fonte: Autor

Oitava peça : Construção de um círculo a partir do paralelogramo

Figura 73 – Círculo-kit



Fonte: Autor

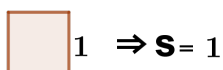
5.2 Como utilizar o kit de materiais manipuláveis

È de grande importância iniciar a aula sobre áreas mostrando aos alunos que calcular a área de uma figura plana, nada mais é do que compará-la com uma unidade de área previamente definida, que é verificar quantas vezes esta unidade de área cabe dentro da figura que se quer medir.

- Unidade de área

Adotaremos como unidade de área um quadrado cujo lado mede 1, que chamaremos de quadrado unitário.

Figura 74 – Quadrado unitário

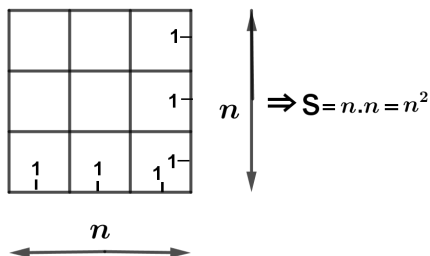


Fonte: Autor

S é a área do quadrado unitário.

Consideremos um quadrado de lado n , onde n é um número inteiro positivo. Como o segmento mede n , podemos dividi-los em n segmentos de medida 1. Generalizando, temos n fileiras onde cada fileira terá n quadrados unitários, sendo assim, a área do quadrado é n^2 . Ou seja, $S = n \cdot n = n^2$.

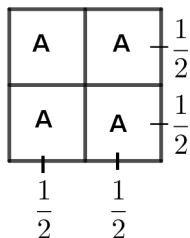
Figura 75 – Quadrado lado n



Fonte: Autor

Considere agora um quadrado unitário. Dividimos este quadrado em 4 quadrados iguais, conforme a figura 76.

Figura 76 – Quadrado meio lado



Fonte: Autor

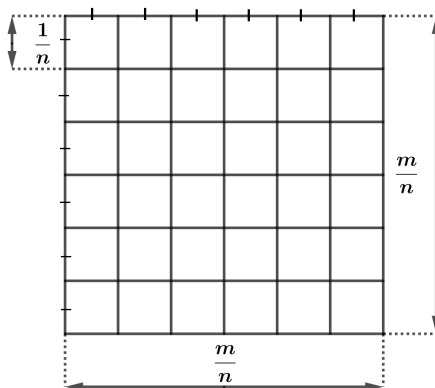
Considerando que a área de cada quadrado menor seja $S(A)$, daí podemos afirmar que:

$$4 \cdot S(A) = 1 \Rightarrow S(A) = \frac{1}{4} \Rightarrow S(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Se, em vez de dividimos o quadrado unitário em 4 quadrados iguais, tivéssemos divididos em n^2 quadrados iguais, teríamos que cada lado em vez de ser $\frac{1}{2}$, seria $\frac{1}{n}$. De modo geral, a área do quadrado cerar $S(A) = \left(\frac{1}{n}\right)^2$.

Vamos agora considerar, já de forma genérica que termos um quadrado de lado $\frac{m}{n}$. Conforme figura 77.

Figura 77 – Quadrado m:n



Fonte: Autor

Por um processo análogo ao anterior, podemos tomar este quadrado e dividir em m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$. Dessa forma a área de um quadrado de lado $\frac{m}{n}$ ficará do

seguinte modo. Temos m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$. Só que a área de um quadrado de lado m^2 , pelo que vimos é $(\frac{1}{n})^2$.

Então dessa forma, teremos: $S = m^2 \cdot (\frac{1}{n})^2 = (\frac{m}{n})^2$. com $n \neq 0$

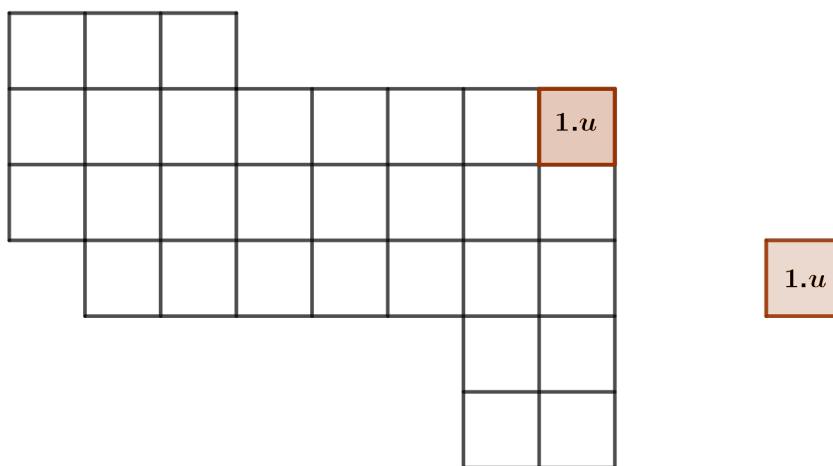
Daí concluímos que, a área de um quadrado de lado l qualquer que seja l inteiro ou racional é igual a l^2 , e a partir do quadrado podemos determinar as áreas das demais figuras geométricas planas.

- Utilização do Kit

Para isto procede-se da seguinte forma:

1º passo: Apresentar ao aluno a figura 66, e pedir que o mesmo verifique quantas unidades de área estão contidas na figura.

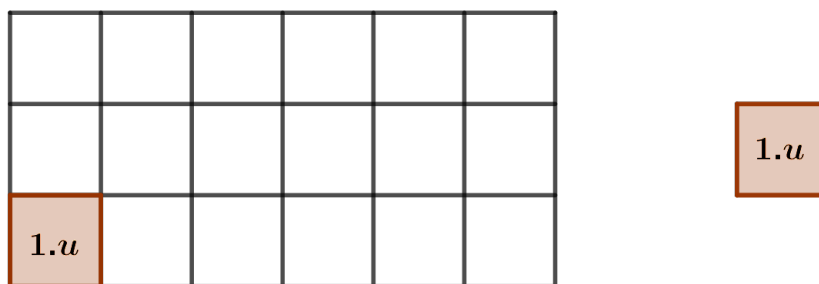
Figura 78 – Polígono-01-kit



Fonte: Autor

2º passo: Mostrar ao aluno a figura 67 e pedir que o mesmo determine quantas unidades de área contém a figura e induzir o aluno a deduzir a fórmula da área de uma região limitada por um retângulo.

Figura 79 – Retângulo-02-kit

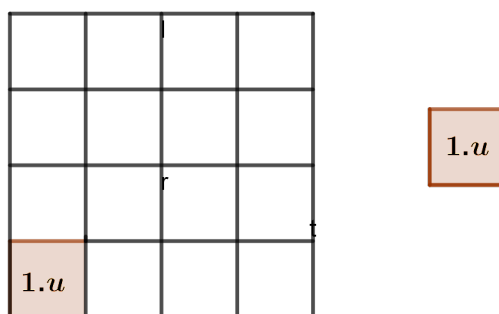


Fonte: Autor

O objetivo é que o aluno chegue a fórmula $A_R = \text{base} \times \text{altura}$, onde A_R é a área do retângulo.

3º passo: Apresentar ao aluno a figura 68 e mostrar que o quadrado é um caso particular do retângulo e induzir o mesmo a deduzir a fórmula para calcular a área de uma região limitada por um quadrado.

Figura 80 – Quadrado-03-kit

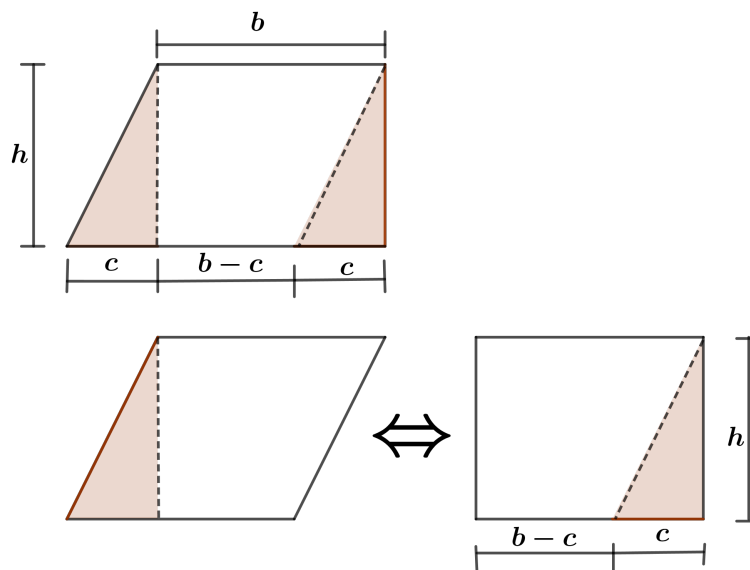


Fonte: Autor

O objetivo é que o aluno chegue a dedução da fórmula $A_Q = \text{lado} \times \text{lado}$, onde A_Q é a área do quadrado.

4º passo: Apresentar ao aluno a figura 69 e induzir o mesmo a deduzir a fórmula para calcular a área da região limitada por paralelogramo.

Figura 81 – Paralelogramo-04-kit



Fonte: Autor

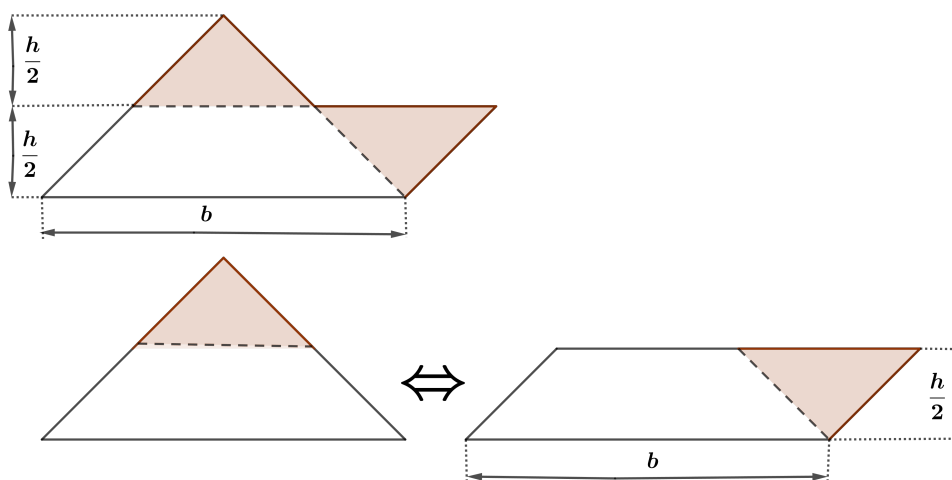
O objetivo é que o aluno chegue a dedução da fórmula

$$A_P = base \cdot altura = b \cdot h$$

ou seja que a área do paralelogramo é equivalente a área do retângulo. Onde A_P é a área do paralelogramo.

5º passo: Apresentar ao aluno a figura 70 e induzir o mesmo a deduzir a fórmula para calcular a área da região limitada pelo triângulo.

Figura 82 – Triângulo-05-kit



Fonte: Autor

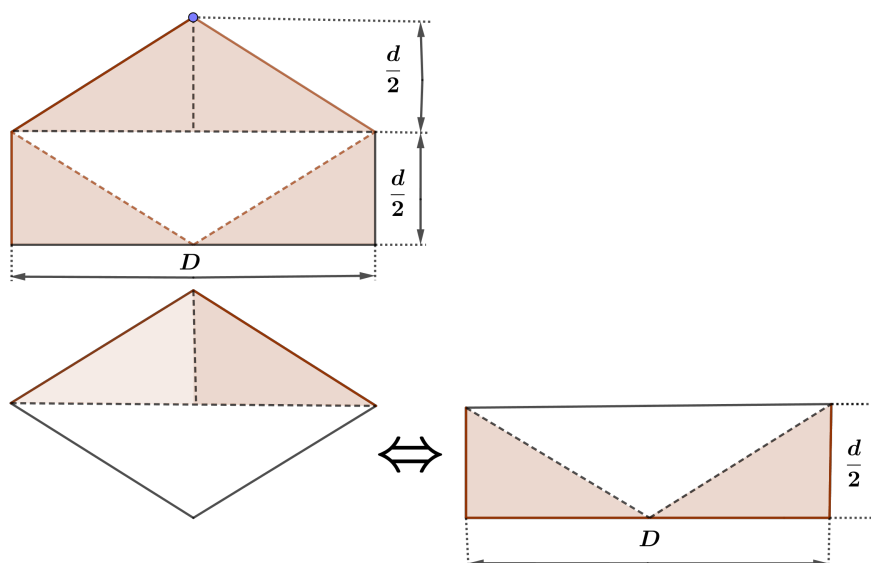
O objetivo é que o aluno chegue a dedução da fórmula

$$A_T = \frac{\textit{base} \cdot \textit{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

ou seja que a área do triângulo é equivalente a área do paralelogramo de altura igual a metade da altura do triângulo, com a mesma medida da base. Onde A_T é a área do triângulo.

6º passo: Apresentar ao aluno a figura 71: e induzir o mesmo a deduzir a fórmula para calcular a área da região limitada pelo losango.

Figura 83 – Losango-06-kit



Fonte: Autor

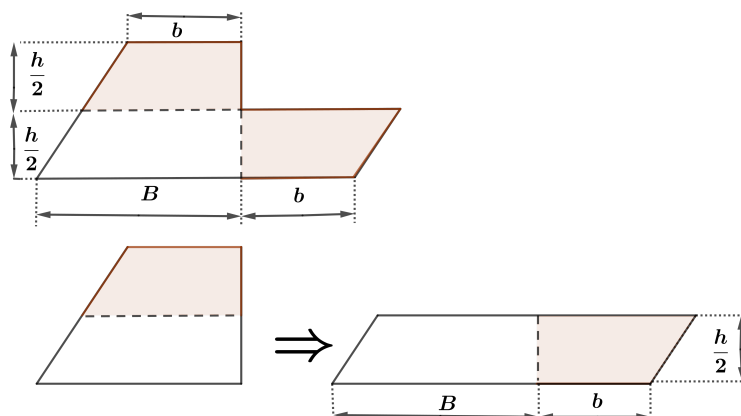
O objetivo é que o aluno chegue a dedução da fórmula

$$A_L = \frac{\textit{diagonal maior} \cdot \textit{diagonal menor}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Onde A_L é a área de um losango, ou seja perceber que a área do losango equivale a área do retângulo de base igual a uma das diagonais e a altura é a metade da outra diagonal.

7º passo: Apresentar ao aluno a figura 72: e induzir o mesmo a deduzir a fórmula para calcular a área da região limitada pelo trapézio.

Figura 84 – Trapézio-07-kit



Fonte: Autor

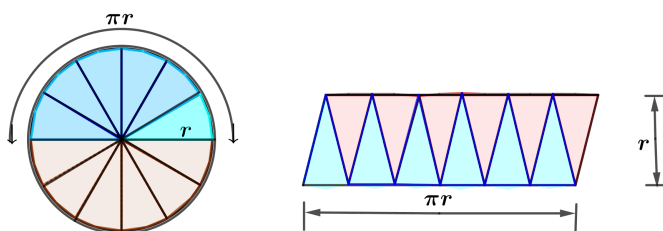
O objetivo é que o aluno chegue a dedução da fórmula

$$A_{Trap} = \frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2} = \frac{B + b}{2}$$

Onde A_{Trap} é a área do trapézio, ou seja, perceber que a área do trapézio equivale a área de um paralelogramo de base com medida $B + b$ onde B é a medida da base maior e b é a medida da base menor e altura que mede a metade da altura do trapézio considerado.

8º passo: Apresentar ao aluno a figura 73 e induzir o mesmo a deduzir a fórmula para calcular a área da região limitada pelo círculo.

Figura 85 – Círculo-08-kit



Fonte: Autor

O objetivo é que o aluno chegue a dedução da fórmula

$$A_C = \pi \cdot r^2$$

ou seja que a área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos triangulares contidos no retângulo da figura acima.

6 Sequência Didática: O Uso de um Kit de Material Manipulável no Ensino de Área de Superfície Planas

6.1 Introdução

Segundo, [7] a Sequência Didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). As sequências didáticas podem ser consideradas como uma maneira de situar as atividades, e não podem ser vistas apenas como um tipo de tarefa, mas como um critério que permite identificações e caracterizações preliminares na forma de ensinar (ZABALA, 1998).

O ensino das áreas de superfície plana é uma das principais habilidades exigidas na disciplina de Matemática. No entanto, muitos estudantes têm dificuldades para compreender conceitos abstratos, que envolvem cálculos e fórmulas. Neste sentido, recursos didáticos que estimulem a participação prática, ganham cada vez mais importância no processo de ensino-aprendizagem. Diante disso, neste trabalho será abordado uma Sequência Didática com a utilização de um Kit de Material Manipulável para o ensino de áreas de superfície plana, que busca promover uma aprendizagem mais significativa e motivadora aos alunos. No entanto não se deve priorizar somente o uso desses materiais, mas fazer com que eles sejam complementares para o processo de ensino e aprendizagem.

A Sequência Didática proposta neste trabalho, foi aplicada em 6 aulas, onde nas duas primeiras apresentamos os tópicos do conteúdo da mesma. A primeira aula foi aplicada uma atividade envolvem a identificação de cada figura plana e suas propriedades, a segunda aula, o professor diante dos resultados obtidos na atividade 1 mostrou ao aluno os pontos positivos e negativos desta atividade e em seguida passa a expor o conteúdo sobre cada figura plana. Da 3^a a 6^a aula foi utilizado o kit de manipulação a turma foi dividida em grupos.

De acordo com (JO BOALER), parte da razão pela qual os alunos desistem de aprender é porque acham difícil e pensam que estão sozinhos nesse esforço. Uma mudança importante acontece quando os alunos trabalham juntos e descobrem que todo mundo tem dificultado em algum ou em todos os trabalhos.

6.2 Apresentação da Sequência Didática

Título: Área de Figuras Planas (utilizando um kit de material concreto).

Professor: Gilmar Veríssimo da Silva

Turma: Ensino Fundamental (7º e 8º anos) e Ensino Médio (2º A).

Duração: 6 aulas.

Área do conhecimento: Matemática e Suas Tecnologias.

Componente Curricular: Matemática.

Habilidades:

De acordo com os objetivos da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a área de superfície limitadas por figuras planas a nível de ensino fundamental e médio tem como desenvolvimento as seguintes habilidades (BRASIL, 2018):

Habilidades a ser desenvolvidas para o Ensino Fundamental

- (EFO7MA32). Resolver e elaborar problemas de cálculo de medidas de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos. Utilizando a equivalência entre áreas.
- (EF08MA14). Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação Congruência de triângulos.
- (EF08MA18). Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de Softwares de geometria dinâmica.
- (EF08MA19). Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Habilidades a ser desenvolvidas para o Ensino Médio

- (EM13MAT307). Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplica-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Dentre as 10 competências listadas na BNCC, daremos ênfase neste trabalho a duas, que são:

- **Competência 3** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentos consistente.

- **Competência 4** Compreender e utilizar, com flexibilidades e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de soluções e Comunicação de resultados de problemas.

Objetivos de conhecimento:

- Conhecer conceitos e características de cada figura geométrica plana.
- Identificar os elementos das figuras geométricas planas.
- Identificar superfície planas equivalentes.
- Aprender a manusear as peças do kit de manipulação.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo perímetro e áreas de figuras planas.
- Construir figuras diferentes que sejam equivalentes.
- Identificar a fórmula de cada figura plana e utilizar corretamente em cálculos.

Recursos:

- Quadro branco ou negro para as apresentações
- Papel milimétrico
- Kit de Material de Manipulação que inclua peças em forma de quadrado retângulo, triângulo, trapézio, losango e círculo.

Desenvolvimento:

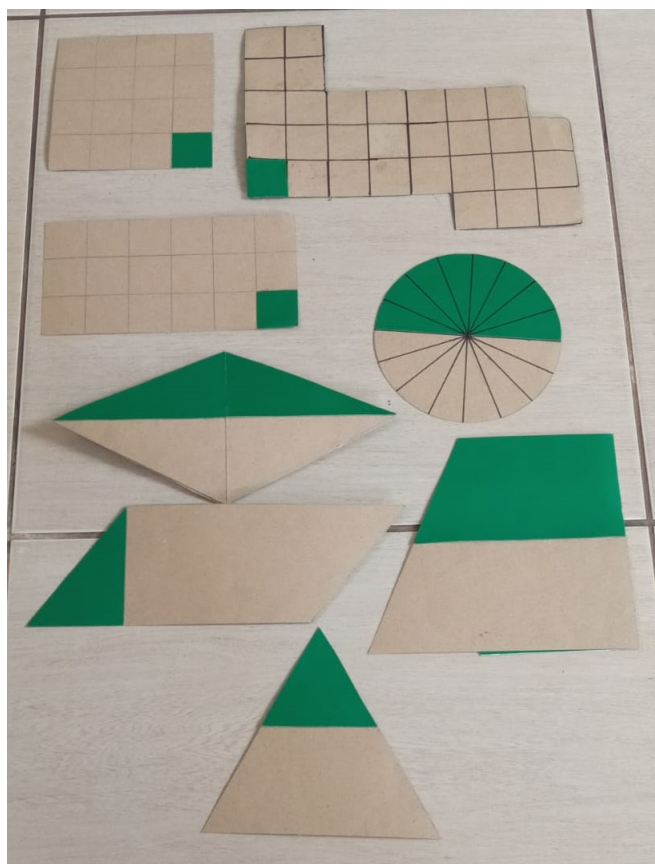
Estrutura das Aulas:

A pesquisa foi desenvolvida em uma turma do 2º ano A do ensino médio com 33 alunos na Escola ECI Maria José de Souza na cidade de Montadas-PB, durante algumas aulas da disciplina de Nivelamento (Propulsão). O objetivo da escolha dessa turma foi a razão de que o professor de Matemática desenvolverá suas ações com o tema sustentabilidade, relacionado este tema com arquitetura, em um projeto pedagógico sobre a construção de uma maquete do prédio da escola, e devido aos conteúdos que seriam abordados, por julgar que os alunos teriam um conhecimento geral dos conceitos de geometria plana, o que poderia contribuir para o aprofundamento desses conceitos e a

abordagem de outros conceitos mais específicos.

A intervenção pedagógica foi desenvolvida em 6 aulas, sendo que todo esse processo aconteceu nos horários das aulas de Propulsão, com a presença do professor titular da disciplina. Todas as atividades desenvolvidas na sequência didática fizeram uso do kit de Materiais de Manipuláveis que está representado na figura abaixo.

Figura 86 – Reconhecer Figuras Planas



Fonte: Acervo do pesquisador

Roteiro das Atividades:

6.2.1 Atividade 1 - Identificação das figuras e suas propriedades

Duração: 02 aulas de 50 minutos

Objetivos:

- Reconhecer as figuras planas
- Diferenciar as figuras e compreender suas propriedades
- Identificar todos os elementos de cada figura plana

Conteúdos trabalhados: Figuras plana.

Materiais utilizados: Figuras planas regulares e Irregulares contidas na Atividade 1 entregue a cada grupo, para que eles respondam o que se pede.


Desenvolvimento da atividade 1:


O objetivo principal dessa atividade era o aluno reconhecer cada figura plana e a identificação de seus elementos e suas propriedades. Essa atividade se deu com os seguintes procedimentos: os alunos foram separados em grupos com 3 ou 4 participantes e em seguida o professor distribuiu a atividade proposta a cada grupo, logo após o término dessa atividade, o professor observou os resultados e em seguida propôs para a turma que na próxima aula ele daria uma explanação do conteúdo sobre, as características e seus elementos de cada figura plana, antes da aplicação das próximas atividades.

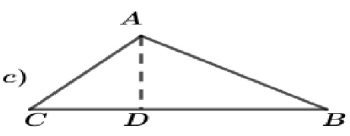
Figura 87 – Reconhecer Figuras Planas

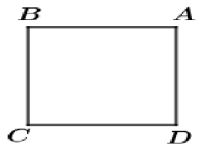
ATIVIDADE 1

1ºQ). Nomear, escrever suas características e seus elementos de cada figura plana abaixo.

a) 

b) 

c) 

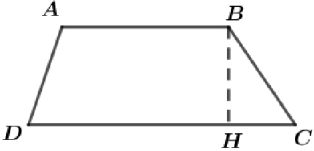
d) 

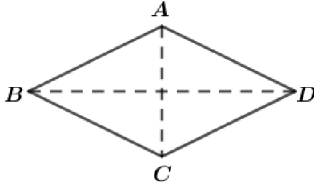
GRUPO Nº _____

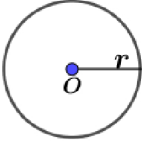
Resposta:

Figura 88 – Continuação da Atividade 1

CONTINUAÇÃO DA ATIVIDADE 1

e) 

f) 

g) 

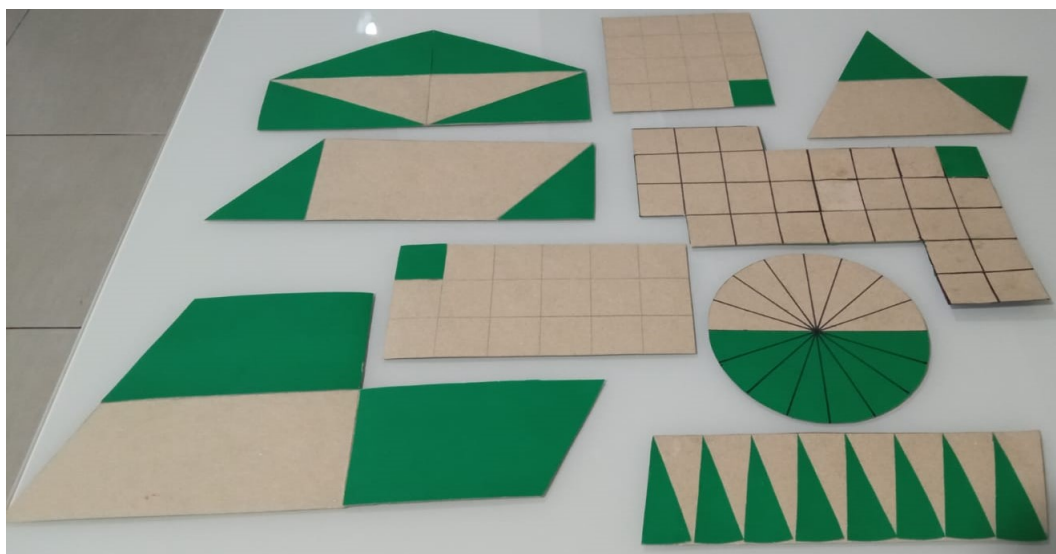
GRUPO Nº _____

Respostas:

Fonte: Autor

Para as demais atividades foram utilizados o kit de Materiais Manipuláveis da figura 83.

Figura 89 – Kit de Material Manipulável



Fonte: Acervo do Pesquisador

A partir da segunda atividade, tínhamos como objetivo principal a decomposição de cada peça do kit em uma outra peça equivalente a anterior, fazendo com que o aluno chegue-se a deduzir a fórmula para calcular a área de cada figura plana.

6.2.2 Atividade 2 - Área de um Retângulo. Figura 1

- **Duração:** 20 minutos.
- **Objetivo:** Determinar a fórmula de calcular a área do retângulo.
- **Material utilizado:** Figura Retangular do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 86 nos procedimentos.

Figura 90 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 1

Figura 3: Retângulo



Atividade 2

Título: Área do Retângulo

Procedimento:

- Apresentar ao grupo a 1ª peça do kit.
- Considere um lado quadriculado como unidade de comprimento
- Considere um quadradinho do quadriculado como unidade de área.
- Determinar a área do Retângulo contando os quadrinhos. E em seguida determinar a área sem contar os quadrinhos. (Generalizar uma fórmula)

Conclusão:

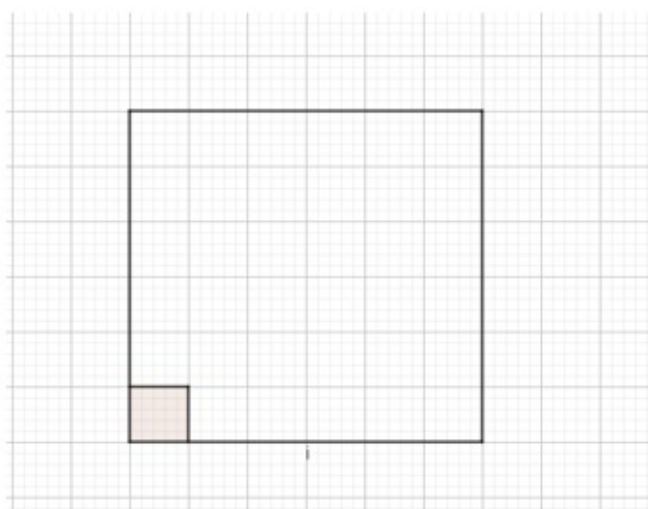
Fonte: Autor

6.2.3 Atividade 3 - Área de um Quadrado. Figura 2

- **Duração:** 20 minutos.
- **Objetivo:** Determinar a fórmula de calcular a área do Quadrado.
- **Material utilizado:** Figura Quadrada do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 87 nos procedimentos.

Figura 91 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 2

Figura 4: Quadrado



Atividade 3

Título: Área do Quadrado

Procedimento

- Apresentar ao grupo a 2ª peça do kit.
- Considere um Quadrado do Quadriculado como unidade de área.
- Pedir ao grupo que o mesmo verifique quantas unidades de áreas estão contidas na Figura 4.
- Depois de observar os resultados de cada grupo, pedir que os grupos tentem determinar a área da figura sem contar os quadradinhos. (Generalizar uma fórmula).

Conclusão:

Fonte: Autor

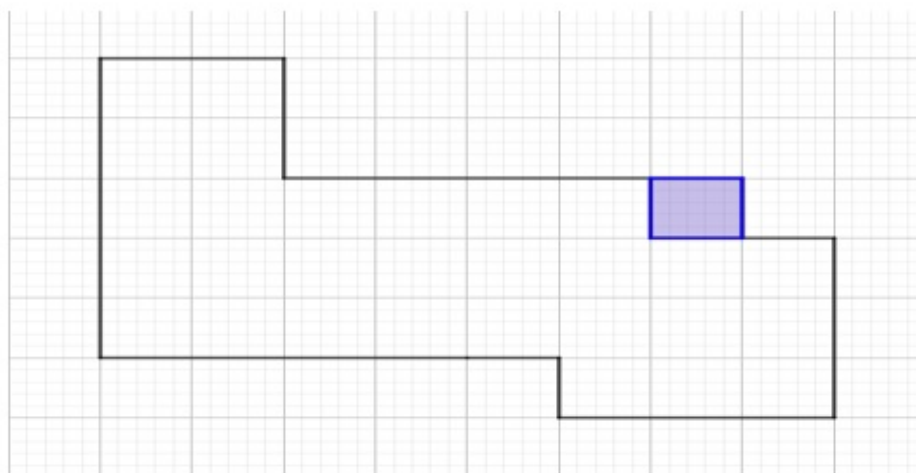
6.2.4 Atividade 4 - Área de um Polígono Irregular. Figura 3

- **Duração:** 30 minutos.
- **Objetivo:** Determinar como fazer o calcular da área do polígono de varias formas.

- **Material utilizado:** Figura do Polígono Irregular do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 88 nos procedimentos.

Figura 92 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 3

Figura 5: Polígono Irregular



Atividade 4

Título: Área do polígono irregular

Procedimento

- Apresentar ao grupo a 3ª peça do kit.
- Considere um Quadrado do Quadriculado como unidade de área.
- Pedir ao grupo que o mesmo verifique quantas unidades de áreas estão contidas na Figura 1.
- Depois de observar os resultados de cada grupo, pedir que os grupos tentem determinar a área da figura sem contar os quadrados, ou seja de outras formas.

Conclusão:

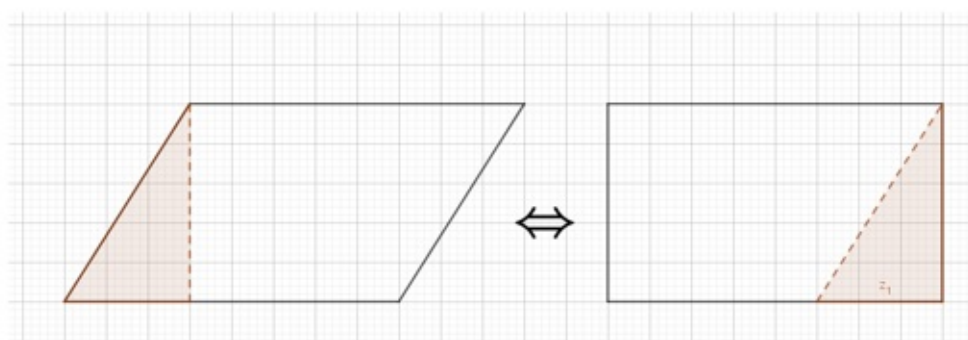
Fonte: Autor

6.2.5 Atividade 5 - Área de um Paralelogramo. Figura 4

- **Duração:** 20 minutos.
- **Objetivo:** Determinar a fórmula de calcular a área do Paralelogramo.
- **Material utilizado:** Figura do paralelogramo do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 89 nos procedimentos.

Figura 93 – Kit de Material Manipulável Fig. 4

Figura 6: Paralelogramo



Atividade 5

Título: Área do Paralelogramo

Procedimento:

- Considere um lado do quadriculado como unidade de comprimento
- Apresentar ao grupo a 4ª peça do kit.
- Pedir ao grupo que o mesmo verifique quantas unidades de áreas estão contidas na Figura 6
- Utilizando a figura da 4ª peça do kit, em seguida pedir ao grupo que observe a decomposição do paralelogramo em um retângulo de mesma área.
- Observar o resultado e descobrir uma maneira de determinar a área da figura sem contar os quadrinhos. (Generalizar uma fórmula)

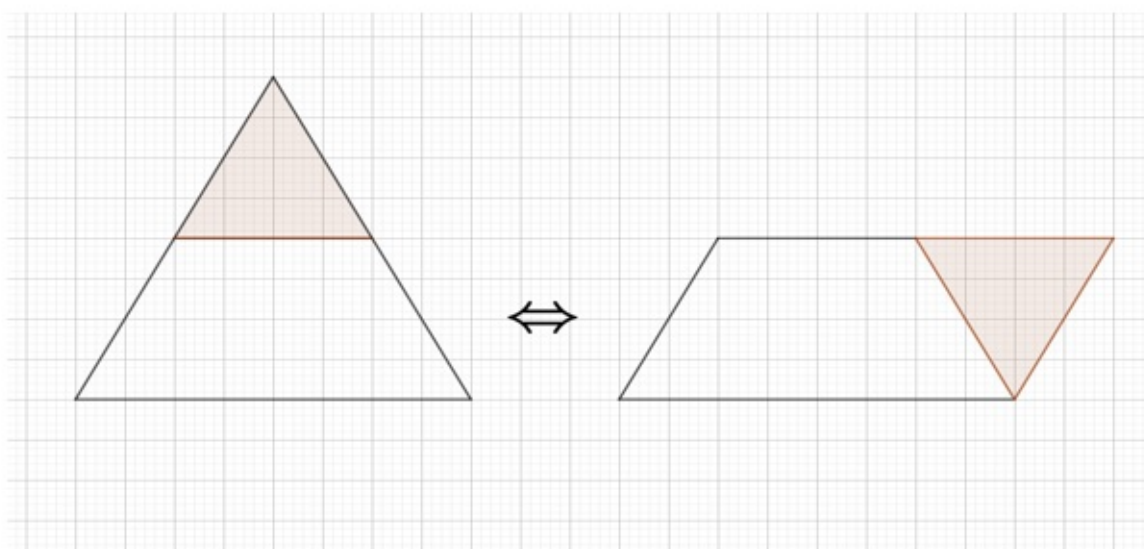
Conclusão:

6.2.6 Atividade 6 - Área de um Triângulo. Figura 5

- **Duração:** 20 minutos.
- **Objetivo:** Determinar a fórmula de calcular a área do Triângulo.
- **Material utilizado:** Figura Triangular do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 90 nos procedimentos.

Figura 94 – Kit de Material Manipulável Fig. 5

Figura 7: Triângulo



Atividade 6

Título: Área do Triângulo

Procedimento:

- Considere um lado do quadriculado como unidade de comprimento
- Apresentar ao grupo a 5ª peça do kit.
- Pedir ao grupo que o mesmo verifique quantas unidades de áreas estão contidas na Figura 7.
- Utilizando a figura da 5ª peça do kit, pedir ao grupo que observe a decomposição do Triângulo em um Paralelogramo de mesma área.
- Observar o resultado e descobrir uma maneira de determinar a área da figura sem Contar os quadrinhos. (Generalizar uma fórmula geral)

Conclusão:

Fonte: Autor

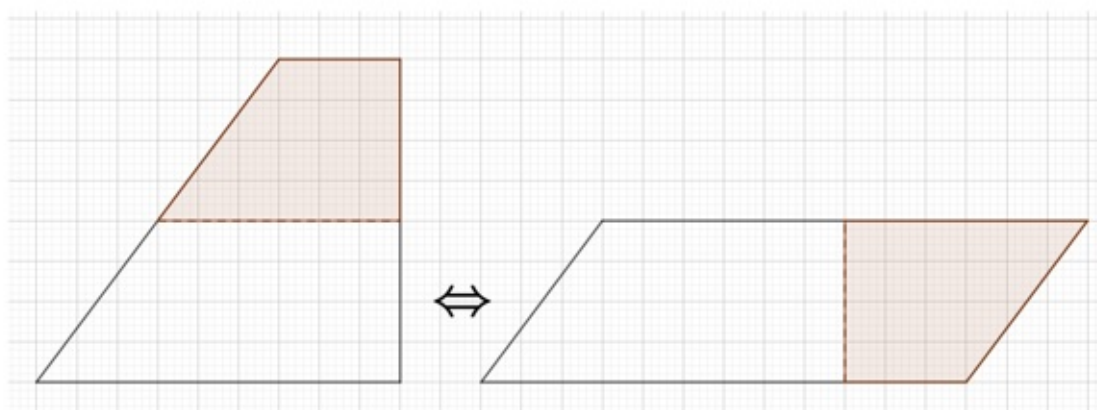
6.2.7 Atividade 7 - Área de um Trapézio. Figura 6

- **Duração:** 30 minutos.

- **Objetivo:** Determinar a fórmula de calcular a área do Trapézio.
- **Material utilizado:** Figura do Trapézio do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 91 nos procedimentos.

Figura 95 – Kit de Material Manipulável Fig. 6

Figura 8: Trapézio



Atividade 7

Título: Área do Trapézio

Procedimento:

- Considere um lado do quadriculado como unidade de comprimento
- Apresentar ao grupo a 6ª peça do kit.
- Determinar a medida da base, da altura.
- Pedir ao grupo que o mesmo verifique quantas unidades de áreas estão contidas na Figura 5.
- Utilizando a figura da 6ª peça do kit, pedir que o grupo observe a decomposição do Trapézio em um Paralelogramo de mesma área.
- Observar o resultado e descobrir uma maneira de determinar a área da figura sem contar os quadrinhos. (Generalizar uma fórmula).

Conclusão:

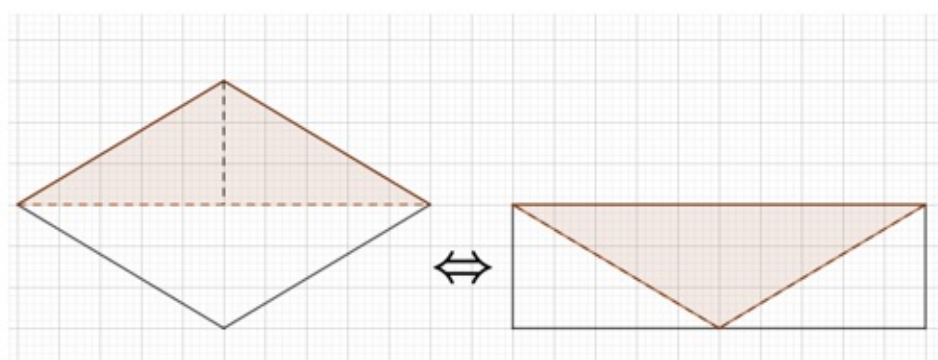
Fonte: Autor

6.2.8 Atividade 8 - Área de um Losango. Figura 7

- **Duração:** 20 minutos.
- **Objetivo:** Determinar a fórmula de calcular a área do Losango.
- **Material utilizado:** Figura do Losango do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 92 nos procedimentos.

Figura 96 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 7

Figura 9: Losango



Atividade 8

Título: Área do Losango

Procedimento:

- Considere um lado do quadriculado como unidade de comprimento
- Apresentar ao grupo a 7ª peça do kit.
- Determinar a medida das diagonais ou Base e Altura.
- Pedir ao grupo que o mesmo verifique quantas unidades de áreas estão contidas na Figura 9.
- Utilizando a 7ª peça do kit, pedir que o grupo observe a decomposição do Losango em um Retângulo de mesma área.
- Observar o resultado e descobrir uma maneira de determinar a área da figura sem Contar os quadrinhos. (Generalizar uma fórmula)

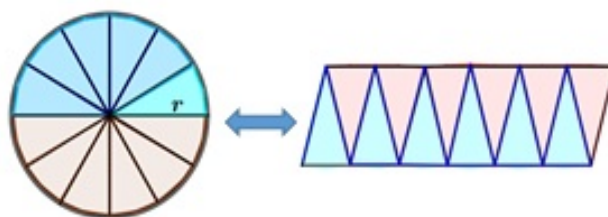
Conclusão:

6.2.9 Atividade 9 - Área de um Círculo. Figura 8

- **Duração:** 30 minutos.
- **Objetivo:** Determinar a fórmula de calcular a área do Círculo.
- **Material utilizado:** Figura Circular do kit.
- **Desenvolvimento:** está exposto na figura 93 nos procedimentos.

Figura 97 – Kit de Material de Manipuláveis Fig. 8

Figura 10: Círculo



Atividade 9

Título: Área do Círculo

Procedimento:

- Considere um lado do quadriculado como unidade de comprimento
- Apresentar ao grupo a 8ª peça do kit.
- Pedir ao aluno que o mesmo verifique quantas unidades de áreas estão contidas na Figura 10.
- Utilizando a figura da 8ª peça do kit, pedir ao grupo que observe a decomposição do círculo em um Paralelogramo de mesma área.
- Observar o resultado e descobrir uma maneira de determinar a área da figura sem contar os quadradinhos. (Generalizar uma fórmula)

Conclusão:

6.3 Conclusão

A Sequência Didática foi aplicada na ECI Maria José de Souza na turma do 2º ano do Ensino Médio nas aulas de nivelamento (propulsão), da qual foi possível aferir os seguintes resultados: Desenvolvimento abaixo do esperado, assim após a aplicação das atividades em sala identificamos que na disciplina de Matemática os alunos do 2º ano apresentaram dificuldades já na primeira atividade, a mesma seria uma análise e descrever as características de cada figura plana.

Diante desse estudo, desenvolveu-se ações e metodologias que foram desenvolvidas ao longo do segundo encontro, para sanar a defasagem dos estudantes nessas habilidades. Para as demais atividades o professor aplicador apresentou o kit de material manipulável que tiveram como objetivo principal desenvolver as competências e habilidades da sequência didática, fazendo com que o estudante deduzisse as fórmulas de cada figura plana.

Assim, verificamos muita dificuldade ao que diz respeito a enumeração dos elementos da figura em questão, com isso foi necessário uma intervenção e moderação do professor aplicador para um melhor aproveitamento dessas atividades. Diante dessas dificuldades, sugere-se que a sequência seja aplicada no início do 1º ano Médio para que os estudantes cheguem no 2º ano com mais um pouco de base para desenvolver as atividades propostas relacionadas a geometria e figuras planas.

Por fim, embora tenha percebido dificuldades nas aplicações do material, mesmo assim, foi relevante para sanar algumas dessas dificuldades relatadas no desenvolvimento das atividades.

6.4 Avaliação

Foi verificado que os alunos resolveram as atividades parcialmente, e que houve uma participação muito grande após a apresentação do kit de material manipulável. Observamos também que os alunos apresentaram uma grande dificuldade nas características de cada figura plana. Por fim apresentamos no quadro da figura 94 os resultados do que fizeram cada grupo.

Figura 98 – Tabela dos Resultados das Atividades

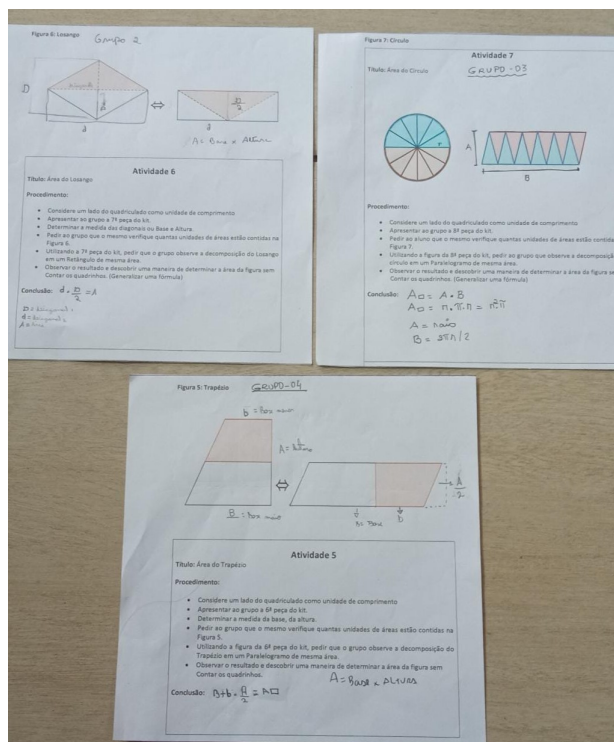
Tabela dos Resultados das Atividades

Polígonos	Grupos que deduziram a fórmula	Grupos que não deduziram a fórmula	Grupos que deduziram a fórmula parcialmente
Retângulo	10	00	00
Quadrado	10	00	00
Paralelogramo	08	02	00
Triângulo	06	02	02
Losango	04	03	03
Trapézio	03	04	03
Círculo	04	04	02

Fonte: Autor

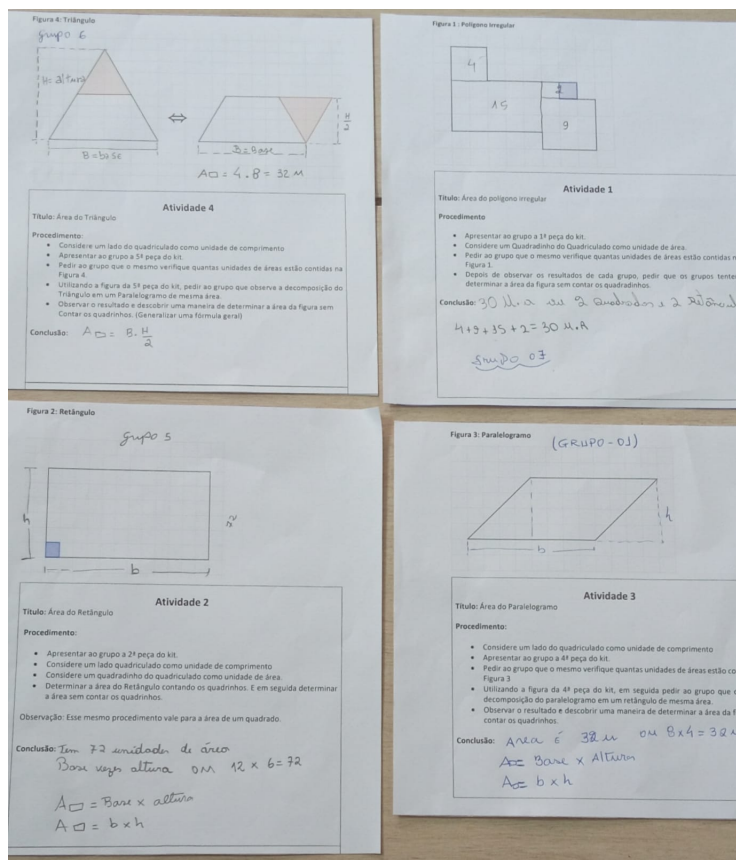
Nas figuras 95 e 96 estão expostos alguns resultados obtidos pelo os alunos nas aplicações das atividades propostas da Sequência Didática.

Figura 99 – Figura-1 Avaliação



Fonte: Autor

Figura 100 – Figura-2 Avaliação



Fonte: Autor

Analisamos os resultados obtidos com a sequência didática. Observamos que os alunos demonstraram um pouco da compreensão dos conceitos de área das figuras planas e que houve melhoras no desempenho em relação ao início da sequência. Por fim fica aqui o registro dessa fonte de pesquisa, para que no futuro venha ajudar algum professor no Ensino Básico, se preciso adaptar a mesma e utilizar em sala de aula. Nesse contexto, o trabalho também pode servir como uma ferramenta de consulta a professores da educação básica e adaptar se preciso.

7 Considerações Finais

Pode-se concluir que o ensino de áreas de figuras planas em sala de aula é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos estudantes. Através de atividades práticas e contextualizadas, é possível despertar o interesse dos alunos pelo tema, proporcionando uma aprendizagem significativa e duradoura.

Apresentamos a princípio o surgimento da geometria em algumas civilizações antigas, como eram feitos os cálculos de áreas de algumas superfícies planas em cada uma dessas civilizações. Logo após expormos uma série de conceitos, definições e teoremas sobre superfície de áreas planas, como também mostramos uma série de teoremas em que usamos como demonstração o conceito de áreas, além disso apresentamos diversas formas de calcular a áreas de uma superfície triangular.

Além disso, é importante que o professor utilize diferentes estratégias didáticas, explorando as múltiplas linguagens e recursos tecnológicos disponíveis, a fim de promover uma aprendizagem mais dinâmica e interativa.

A utilização de kit de materiais de manipulação para a dedução das fórmulas de figuras planas foi uma estratégia muito eficaz para o ensino de áreas de figuras planas em sala de aula. Ao manipular os objetos, os alunos conseguiram visualizar e compreender de forma mais concreta os conceitos abstratos relacionados à área, o que pode tornou a aprendizagem mais significativa e prazerosa. Por fim, diante dos resultados obtidos nesta pesquisa, esperamos que de uma forma ou de outra, com este trabalho, possamos contribuir como fonte de pesquisa em sala de aulas para os professores que desejarem uma forma alternativa de ensinar áreas de figuras planas.

Apêndices

APÊNDICE A – ANEXO

A.1 Método de Pick

Outro método de calcular a área de um polígono simples, é utilizar um teorema conhecido como **Teorema de Pick**. Este Teorema foi descoberto em 1899 por Georg Alexander Pick e permite calcular a área de um polígono simples contando o número de seus pontos da fronteira e o número, dos seus pontos interiores.

Figura 101 – Georg Alexandre Pick



Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre

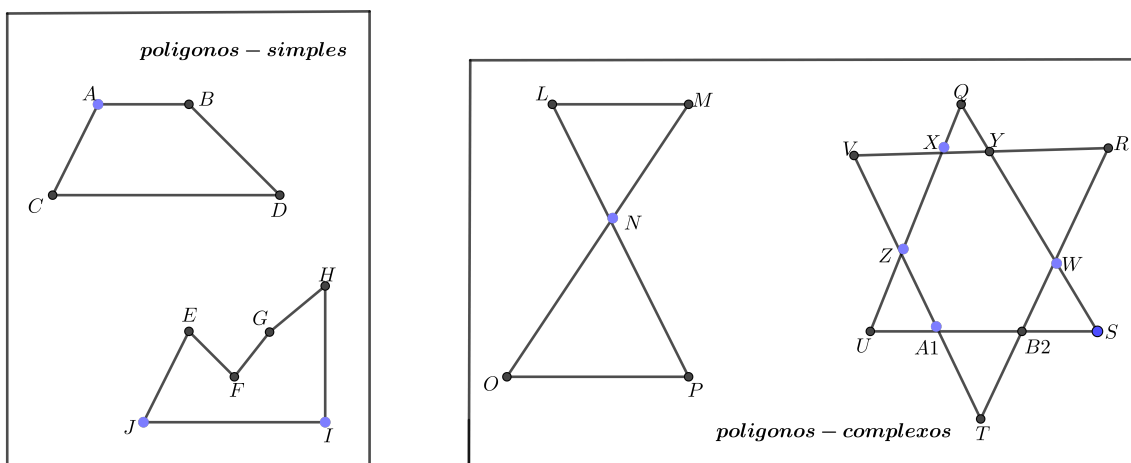
Um pouco da história de **Georg Alexandre Pick**, nasceu em uma família judaica em 1859, na Áustria. Sua formação início foi dada pelo seu pai em casa até os onze anos de idade, após isso foi estudar no Leopoldstaedter Communal Gymnasium, onde permaneceu até se qualificar em 1875 para entrar em uma universidade. tornou-se um matemático renomado, tendo sido eleito membro da Academia Tcheca de Ciências e Artes de onde foi expulso quando os nazistas invadiram a Áustria. Conquistou o Título de Doutor em Matemática, com a tese sobre uma classe de integrais abelianos. Ele se aposentou em 1929 quando foi morar em Viena, mas quando a Áustria foi ocupada, durante a segunda guerra mundial, ele partiu para Praga. Em 1942, foi capturado e deportado juntamente com muitos judeus para o campo de concentração em Theresienstad onde veio a falecer.

Antes de anunciar este teorema veremos aqui algumas definições:

Segundo Elon Lages, **uma rede no plano** é conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a uma unidade.

Polígono simples é um polígono do plano cuja fronteira é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice. Um polígono que não é simples é complexo.

Figura 102 – Polígono simples



Fonte: Autor

Teorema A.1. *A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela fórmula*

$$A = \frac{f}{2} + I - 1$$

Onde :

f é o número de pontos da fronteira.

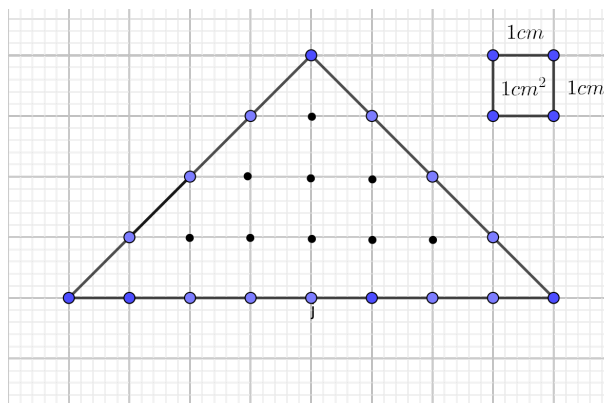
I é o número de pontos internos.

A é a área do polígono.

Há diversas demonstrações desse teorema, uma delas se encontra no livro *Meu Professor de Matemática*, LIMA(2012, p. 119-123), na demonstração o Autor utilizou alguns Teoremas e um Corolário.

Exemplo - 1) Calcular a área do polígono abaixo.

Figura 103 – Exemplo 1



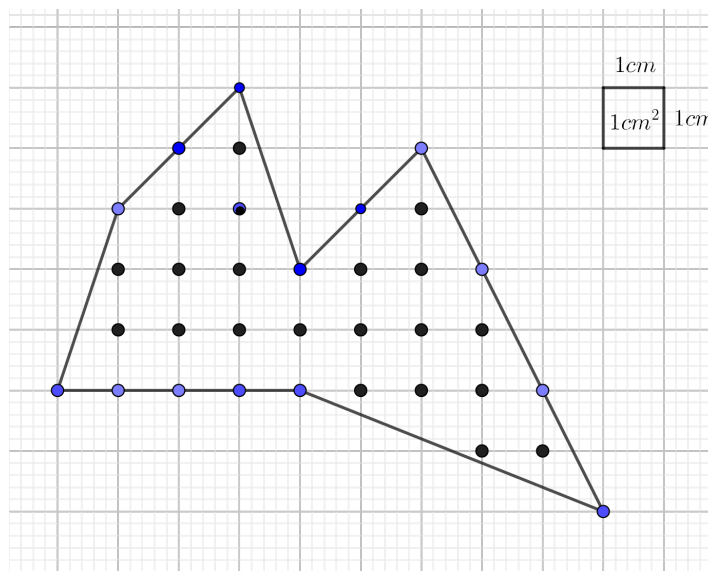
Fonte: Autor

Solução: Temos, $f = 16$ e $I = 9$ daí segue que

$$A = \frac{f}{2} + I - 1 \Rightarrow A = \frac{16}{2} + 9 - 1 \Rightarrow A = 8 + 9 - 1 \Rightarrow A = 16\text{cm}^2$$

Exemplo - 2) Calcular a área do polígono abaixo.

Figura 104 – Exemplo 2



Fonte: Autor

Solução : Temos, $f = 14$, $I = 21$, daí segue que

$$A = \frac{f}{2} + I - 1 \Rightarrow A = \frac{14}{2} + 21 - 1 \Rightarrow A = 7 + 21 - 1 \Rightarrow A = 27\text{cm}^2.$$

Bibliografia

- [1] BARBOSA, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*, 11^a Edição, Rio de Janeiro - SBM, Ano, (2012). Nenhuma citação no texto.
- [2] BOALER J. Mentas sem Barreiras. 1^a edição, Editora Instituto Sidarta, Ano (2017). Nenhuma citação no texto.
- [3] CID A. G. ,IEZZI G. *Geometria Métrica*, 1^a Edição, São Paulo – Editora Moderna Ltda. Ano (xx). Nenhuma citação no texto.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*.Matemática. Brasília: MEC/SEF, (1998). Nenhuma citação no texto.
- [5] BRITO, A. J., CARVALHO, D. L. *Utilizando a história no ensino da Geometria*. Historia da matemática em atividades didáticas. Natal, RN: editora EDUFRN da UFRN, Ano (2005). ($p.11 - 52$). Nenhuma citação no texto.
- [6] DAINE,ELSA,SANI. Manual de utilização do kit de materiais manipuláveis para o ensino de geometria plana para uma aluna com surdocegueira, Ponta Grossa. Ano (2017).https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2472/2/PG_PPGECT_MGalv Acesso em 18 de março de 2023. Nenhuma citação no texto.
- [7] DANTE, L. R. , *Matemática : contexto e aplicações*, 1^a edição, São Paulo - Ática, Ano (2010). Nenhuma citação no texto.
- [8] DOLCE. O. , POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar 9 geometria plana, 9^a edição, São Paulo- Editora Atual. Ano (2013). Nenhuma citação no texto.
- [9] DUTENHEFINER, F.; CARDA, L., *Encontro de Geometria*, parte 1, 1^a Edição, Rio de Janeiro - IMPA, Ano, (2016). Nenhuma citação no texto.
- [10] EVES H. *Introdução a História da Matemática*, 3^a Edição - Campinas-SP. Editora da Unicamp, Ano, (2004). Nenhuma citação no texto.
- [11] FIORENTINI D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. Revista Zetetiké, no 3, n. 4, Ano (1995). Nenhuma citação no texto.
- [12] HELLMEISTER, A. C. P., *Geometria Em Sala de Aula*, 1^a Edição, Rio de Janeiro - SBM, Ano, (2013). Nenhuma citação no texto.

-
- [13] LIMA. E. L. Meu Professor de Matemática, 6^a edição, Rio de Janeiro Editora SPM. Ano (2012). Nenhuma citação no texto.
- [14] SHULMAN L. S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado Nenhuma citação no texto.
- [15] ZABALA A. *Prática educativa: como ensinar*, trad. Ernani F.da F.Rosa. Porto Alegre. ArtMed, (1998). Nenhuma citação no texto.