UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ANA CLÁUDIA PIAU CANDIDO

Explorando alguns conceitos antigos da Matemática Babilônica e aplicando na Educação escolar contemporânea

Campinas

2023

Ana Cláudia Piau Candido

Explorando alguns conceitos antigos da Matemática Babilônica e aplicando na Educação escolar contemporânea

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Lucio Tunes dos Santos

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Ana Cláudia Piau Candido e orientada pelo Prof. Dr. Lucio Tunes dos Santos.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C161e

Candido, Ana Cláudia Piau, 1996-
Explorando alguns conceitos antigos da matemática babilônica e aplicando na educação escolar contemporânea / Ana Cláudia Piau Candido. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Lucio Tunes dos Santos.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Matemática babilônica. 2. Sistema de numeração sexagesimal. 3. Plimpton 322. 4. Tabletes - Babilônia. 5. Matemática - Estudo e ensino. I. Santos, Lucio Tunes dos, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Exploring some ancient concepts of babylonian mathematics and applying them in contemporary education
Palavras-chave em inglês:
Babylonian mathematics
Sexagesimal numbering system
Plimpton 322
Tablets - Babylonia
Mathematics - Study and teaching
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Lucio Tunes dos Santos [Orientador]
Rita Santos Guimarães
Suzana Lima de Campos Castro
Data de defesa: 29-03-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0008-4602-3618
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0855701552424543

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 29 de março de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCIO TUNES DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). RITA SANTOS GUIMARÃES

Prof(a). Dr(a). SUZANA LIMA DE CAMPOS CASTRO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

A Deus, simplesmente por tudo.

Agradeço ao meu orientador, Lucio Tunes dos Santos, pela orientação e por toda ajuda durante o processo de escrita e apresentação deste trabalho. Agradeço aos meus pais, Paulo Candido e Cláudia Ribeiro Piau Candido, meus irmãos, João Paulo e Daniel, e à toda minha família por todo cuidado, apoio e incentivo aos estudos. Agradeço também a todos os meus amigos que sempre me deram suporte em diversos momentos.

Agradeço meus colegas de graduação e pós-graduação por todo o convívio.

Agradeço aos meus professores do Ensino Fundamental, Gilberto Vieira, e do Ensino Médio, Mauro Júnior, por me inspirarem a seguir na profissão de Professor de Matemática. Agradeço também aos meus colegas de trabalho que me ensinaram tanto sobre esta profissão.

Agradeço à banca examinadora, que tão prontamente se disponibilizou para este momento tão importante para minha jornada acadêmica.

À Unicamp e ao PROFMAT por darem a oportunidade do curso de mestrado.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar alguns conceitos da Matemática Babilônica, de forma que seja possível compreender, em parte, como eles pensavam culturalmente Matemática e como esses conceitos podem ser aplicados no ensino contemporâneo da Matemática. Para ser possível o entendimento dos materiais a serem analisados o trabalho se inicia com a proposta de estudo do sistema de numeração sexagesimal e então se segue para o estudo de alguns conceitos, como algoritmos para fatoração e para o cálculo de raízes quadradas, e tabletes matemáticos, como YBC 6967, YBC 7289, MS 3874 e Plimpton 322 (códigos referentes aos documentos). A análise e compreensão destes será baseada em questões culturais dessa civilização, a partir das análises de algumas referências bibliográficas que colaboram com a compreensão de alguns algoritmos babilônios, sempre buscando a possibilidade de aplicação no ensino dos conceitos estudados. Como parte final do desenvolvimento teórico, será possível compreender a construção do tablete Plimpton 322, que pode ser classificado como um material mais complexo, se comparado aos demais e será realizada uma comparação baseada na precisão de cálculos trigonométricos do tablete Plimpton 322 com a tabela de senos de Madhava. Para finalizar este trabalho, duas atividades didáticas serão apresentadas, uma para o Ensino Fundamental Anos Finais e outra para o Ensino Médio. A primeira consiste na compreensão de diferentes bases numéricas, com um foco especial no sistema de numeração sexagesimal e decimal, e aplicação da mudança de base à situações relacionadas a nossa contagem de tempo. A segunda consiste na percepção e consideração da precisão dos cálculos realizados pelos babilônios, através de seus tabletes, aplicados aos conceitos de trigonometria e também aos erros absoluto e relativo. Este trabalho contribui pelo fato de ser um material em Português e que traz uma organização sequenciada de conceitos da Matemática Babilônica, de forma que o leitor encontre informações relevantes em um único documento. Além disso, muitos outros aspectos abordados no trabalho e não necessariamente nos dois planos de aula, trazem contribuições e também podem ser aplicados em sala de aula.

Palavras-chave: Babilônia; Sistema de Numeração Sexagesimal; Tabletes; Plimpton 322; Ensino da Matemática.

Abstract

This work aims to present some concepts of Babylonian Mathematics, so that it is possible to understand, in some measure, how they thought Mathematics culturally and how these concepts can be applied in contemporary Mathematics teaching. In order to understand the materials to be analyzed, the work begins with the proposal to study the sexagesimal numbering system and then proceeds to the study of some concepts, such as algorithms for factoring and for square roots calculation, and mathematical tablets, such as YBC 6967, YBC 7289, MS 3874 and Plimpton 322 (document codes). The analysis and understanding of these will be based on cultural matters of this civilization, based on the analysis of some bibliographical references that collaborate with the understanding of some Babylonian algorithms, always looking for the possibility of application in the teaching of the studied concepts. As a final part of the theoretical development, it will be possible to understand the construction of the Plimpton 322 tablet, which can be classified as a more complex material, if compared to others, and a comparison will be made based on the accuracy of trigonometric calculations of the Plimpton 322 tablet with the Madhava's sines table. To finalize this work, two didactic activities will be presented, one for Elementary School and another for High School. The first consists of understanding different numerical bases, with a special focus on the sexagesimal and decimal numbering system, and applying the change of base to situations related to our way of counting time. The second consists of the perception and consideration of the precision of the calculations performed by the Babylonians, through their tablets, applied to the concepts of trigonometry and also to the absolute and relative errors. This work contributes to the fact that it is a material in Portuguese and that brings a sequenced organization of concepts of Babylonian Mathematics, so that the reader can find relevant information in a single document. In addition, many other aspects addressed in the work and not necessarily in the two lesson plans, bring contributions and can also be applied in the classroom.

Keywords: Babylon; Sexagesimal Numbering System; Tablets; Plimpton 322; Mathematics teaching.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Que a Matemática é uma ciência que se faz presente desde as mais antigas civilizações não se tem dúvida. Entretanto, quando pensamos na história da Matemática podemos nos deparar com o seguinte questionamento: Qual é o registro mais antigo que possuímos, quando foi que o ser humano começou a registrar seus pensamentos matemáticos?

Um dos primeiros registros matemáticos encontrados é o artefato proveniente do chamado Osso de Ishango, datado de 20000 AEC (Antes da Era Comum) e encontrado próximo a fronteira da Uganda com o Congo, contendo 168 traços finos, organizados em 16 grupos e distribuídos em três colunas. Este objeto, muito provavelmente foi utilizado por mulheres, de forma que pudessem acompanhar os ciclos lunares e assim planejarem seus ciclos menstruais (ZASLAVSKY, 1999). Porém, os vestígios mais antigos de escritos matemáticos, de documentos que nos trazem uma composição mais desenvolvida e organizada são provenientes do Egito e da Antiga Mesopotâmia. Esses povos possuíam registro de seus sistemas de numeração, e de aplicações que se relacionavam com práticas do seu cotidiano e com a natureza.

1.1 Civilização da Antiga Mesopotâmia

A civilização da antiga Mesopotâmia é uma das primeiras civilizações conhecidas e se desenvolveu entre os vales dos rios Tigre e Eufrates. Em um mapa do mundo atual (Figura 1.1), a localização corresponderia ao território da Síria e, mais especificamente, ao Iraque.

Seu surgimento se deu por volta do ano 5000 AEC. Muitos povos habitaram por aquela região, dentre eles os sumérios, acádios, amoritas (antigos babilônios), assírios e caldeus (novos babilônios). Como viviam muito próximos, suas línguas, escrita e religião se tornaram algo comum entre os mesopotâmicos, de forma que podemos nos referir a eles apenas como uma única civilização (JÚNIOR, 2021). Esses povos eram grandes estudiosos da agricultura, astronomia, arquitetura e matemática. Eles possuíam a chamada escrita cuneiforme, pois produziam seus caracteres em forma de cunha, e seu sistema de numeração era o sexagesimal.

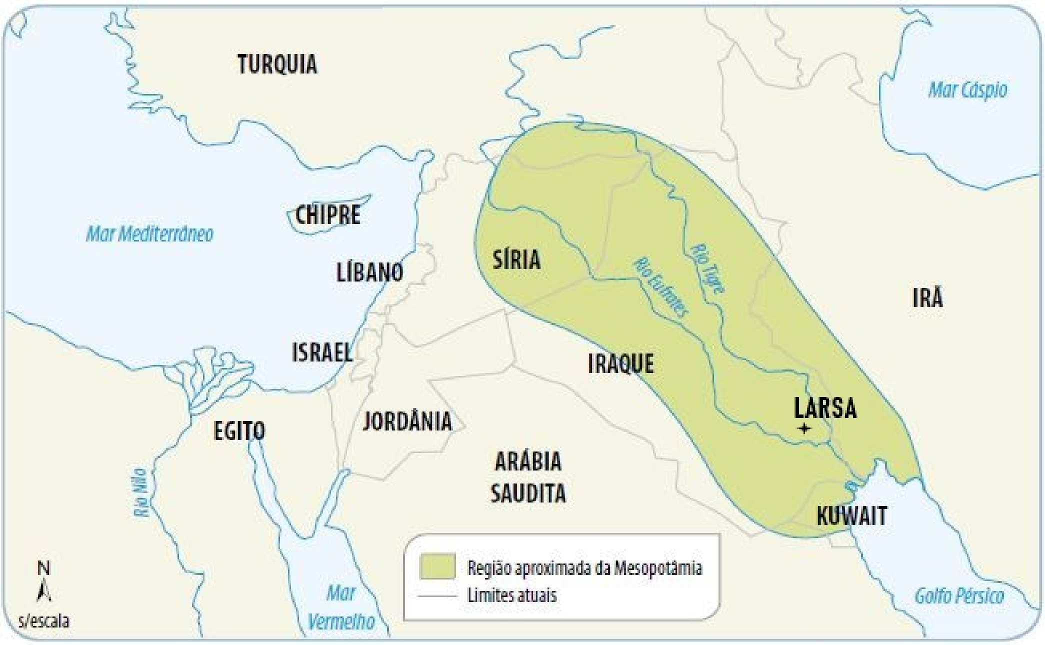


Figura 1.1 – Mapa da Antiga Mesopotâmia hoje.

1.2 Matemática na Antiga Mesopotâmia

Escavações arqueológicas permitiram encontrar mais de 500.000 tabletes de argila com escrita cuneiforme, sendo que dentre estes aproximadamente 400 são estritamente matemáticos. Dentre eles está o famoso Código de Hamurabi (sexto rei babilônico no século XVIII AEC: 1792 - 1750 AEC) (MIEROOP, 2005) datado de aproximadamente 1772 AEC, assim como inúmeros tabletes com conteúdo matemático (grande maioria datam de 1800 a 1600 AEC), que consistem de materiais que são registros de tábuas de multiplicação, tabelas auxiliares para cálculos, cálculos de áreas, equações quadráticas e algumas cúbicas, e diversos outros assuntos. Alguns deles inclusive traziam resoluções de problemas matemáticos, com o algoritmo utilizado.

As pessoas responsáveis pelo registro desses tabletes eram os chamados escribas. Os escribas tinham a função de registrar e copiar cuidadosamente o que lhes era cabido, como escrever textos, registrar dados numéricos, redigir leis, copiar e arquivar informações. Saber ler não era uma prática comum e não eram todos que tinham essa habilidade, logo, os escribas eram considerados pessoas importantes. Além disso, eram habituados a prática de contagem, uma vez que ao realizarem um cópia, eles conferiam se as quantidades de palavras e dígitos coincidiam.

Ter acesso a esses materiais permite que se conheça muito de como a Matemática se desenvolveu dentro dessas antigas civilizações, mas algo que precisa ficar claro desde o início e que deve ser levado em consideração é que a Matemática não é uma ciência inerte, isolada, livre de cultura, e sim um conjunto de convenções que são acordadas socialmente. Isso significa que apenas ser capaz de ler o que foi escrito por aquele povo não é suficiente para compreender de fato o propósito de certos documentos matemáticos históricos. É necessário estar ciente do contexto histórico, social, linguístico e de todo material possível que esteja disponível (ROBSON, 2002).

Na Tabela 1.1 estão contidos os tabletes e seus respectivos códigos de identificação que serão utilizados e citados no decorrer deste trabalho.

Abreviações	*Museu*	*Código do museu*	Conteúdo
BM 96957 + VAT 6598	British Museum, Department of Western Asiatic Antiquities e Vonderasiatische Abteilung. Tontafein, Staatliche Museen, Berlin.	-	Equações para a diagonal de um portão.
BM 34568	British Museum, Department of Western Asiatic Antiquities	34568	Problema para encontrar a largura de um retângulo, conhecendo o comprimento e a diagonal.
IM 54472	Iraq Museum, Baghdad	54472	Raiz quadrada de 26.00.15
Si.428	Sicar	428	Algoritmo de fatoração para computação de um lado quadrado.
MS 3874	Manuscript of Schøyen Collection, Oslo, Norway	3874	Tablete de recíprocos.
YBC 6967	Yale Babylonian Collection, Yale University	6967	Problema para encontrar par de recíprocos.
YBC 7289	Yale Babylonian Collection, Yale University	7289	Aproximação de $\sqrt{2}$.
P 322	Coleção G.A. Plimpton da Columbia University. Plimpton Library, Columbia University, New York.	322	Lista de ternos Pitagóricos.

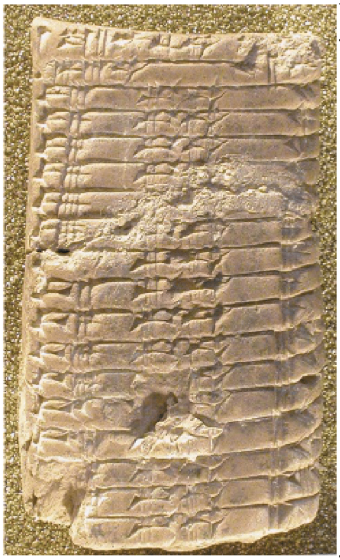
Tabela 1.1 – Código e descrição dos tabletes citados na dissertação.

A seguir apresentarei alguns tabletes com conteúdo matemático que se destacaram de forma mais proeminente devido à informações que seriam consideradas a frente de seu tempo, mas que na realidade se fizeram presentes há milhares de anos atrás.

1.2.1 Tablete de Recíprocos Padrão - MS 3874

Dentro da Matemática da antiga Mesopotâmia era possível encontrar tabletes padrões (Figura 1.2) que traziam pares de números (pares de recíprocos) que satisfaziam a condição de que a multiplicação desse par deveria resultar em uma potência de 60.

Os tabletes contendo estes pares de recíprocos, eram divididos em duas colunas, nas quais eram preenchidos os números na escrita cuneiforme e no sistema sexagesimal.



COLUNA 1		COLUNA 2
2	Recíproco	30
3	Recíproco	20
4	Recíproco	15
5	Recíproco	12
6	Recíproco	10
8	Recíproco	450
9	Recíproco	400
10	Recíproco	6
12	Recíproco	5
15	Recíproco	4
16	Recíproco	225
18	Recíproco	200
20	Recíproco	3
24	Recíproco	150
25	Recíproco	144
27	Recíproco	8000
30	Recíproco	2
32	Recíproco	6750
36	Recíproco	100
40	Recíproco	90
45	Recíproco	80

Figura 1.2 – Tablete de Recíprocos - MS 3874 e tradução. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2004].

Esta tabela era muito utilizada como um auxiliador de cálculos, então os escribas sempre possuíam uma cópia da tabela de recíprocos quando fossem realizar outras operações ou resolver problemas. Sendo assim, é possível encontrar em diferentes museus, semelhantes tabletes contendo estes pares numéricos.

1.2.2 Aproximação de $\sqrt{2}$ - YBC 7289

Um dos mais famosos e conhecidos tabletes babilônicos (Figura 1.3), feito também de argila e registrado em escrita cuneiforme, traz uma aproximação de $\sqrt{2}$, com precisão de 3 casas sexagesimais (o que equivale a 6 casas decimais). Atualmente faz parte da coleção que está na Universidade de Yale (Yale Babylonian Collection).

O tablete traz desenhado um quadrado e suas diagonais, informando a medida do lado, que corresponde a 30, e outros dois números. Seus significados serão melhor desenvolvidos no Capítulo 4 deste trabalho.

1.2.3 Problema do tipo “igi-igibi” - YBC 6967

O tablete apresentado na Figura 1.4 traz o passo a passo da resolução de um problema do tipo “igi-igibi”. Esse tipo de problema envolve descobrir pares de recíprocos específicos, uma vez que “igi” significa número regular e “igibi” o recíproco do número regular. O problema apresentado no tablete tem como propósito encontrar um par de recíprocos de forma que um número exceda seu recíproco em 7.

Figura 1.3 – Tablete que traz uma aproximação de $\sqrt{2}$. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2023].

Figura 1.4 – Tablete com problema para encontrar par de recíprocos.Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2023].

1.2.4 Plimpton 322 - P322

O Plimpton 322, ou P322, é considerado um dos artefatos científicos mais sofisticados do mundo antigo.

O tablete foi criado em Larsa, uma das antigas capitais babilônica e que hoje é conhecida por Tall Sankarah, cidade que fica localizada ao sul do Iraque, tal cidade que foi conquistada por Hammurabi em 1762 AEC. A partir disso estima-se que o tablete seja datado dentro do período de 1822 – 1762 AEC (ROBSON, 2002).

Atualmente, P322, faz parte da coleção de George Arthur Plimpton (1855 - 1936) e está na Universidade de Columbia. Este o comprou de um antiquário que o descobriu no início do século 20, no Iraque.

O tablete possui medidas de 12,7 cm por 8,8 cm, e seu conteúdo está escrito no sistema sexagesimal, sendo possível observar que sua disposição está separada em 4 colunas e 15 linhas. Pode-se perceber ainda que as linhas verticais continuam inclusive no verso do tablete, mas não possuem nenhuma informação escrita nelas. Analisando um pouco o tablete é visível que este foi vítima de algum acidente e acabou sendo quebrado, isso se torna perceptível pela presença de uma cola que indica ser de um material mais atual, indicando que aconteceu em tempos recentes. Isso danificou parte da primeira coluna da tabela, como é possível verificar na Figura 1.5.

Figura 1.5 – Tablete Plimpton 322. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2005].

Estudiosos se dedicaram ao estudo do Plimpton 322 e realizaram a reconstrução das colunas e linhas do tablete, inclusive definindo quais seriam os possíveis títulos das colunas.

Muitos matemáticos trabalharam e tem trabalhado em definir o propósito de criação do P322, já que não é um tablete convencional, mas ainda não se chegou a um consenso definitivo. No Capítulo 4 explicaremos de forma mais detalhada algumas dessas visões existentes.

1.3 Objetivos

Este trabalho não foi escrito apenas com a intenção de apresentar a história da Matemática em antigas civilizações, mas entender como o povo daquela época realizava parte de seus cálculos e além disso obtinham resultados com ótimas precisões, possuindo apenas seus tabletes de argila padrões (tabletes de multiplicação, recíprocos, raiz quadrada, etc) e seu objeto de escrita, de modo que o foco principal seja a aplicação desses conceitos estudados no ensino contemporâneo da Matemática. Faremos isso enquanto analisamos parte da profundidade e complexidade da matemática babilônica contida em alguns diferentes tabletes, e como, pontualmente cada parte acaba sendo utilizada na construção do Plimpton 322 e útil para sua compreensão. Ao observarmos suas linhas e colunas, pensaremos em como cada valor foi pensado e calculado, buscando analisar o significado de cada um. Para que tal tarefa seja possível, a análise de alguns outros tabletes babilônicos também serão realizadas, visando uma melhor compreensão do contexto de certas terminologias e conceitos que aparecem pelo caminho.

A dissertação conta com toda uma construção inicial destes conceitos, método do lado quadrado (método de Heron), algoritmo da raiz quadrada, a regra da diagonal (Teorema de Pitágoras), algoritmo de fatoração babilônico, resolução de problema do tipo "igi-igibi", necessários para a compreensão do P322. Além disso, permitirá a compreensão do sistema de numeração sexagesimal e de como ele permite uma maior precisão na realização de cálculos (principalmente os realizados à mão) assim como, em cada etapa, elementos serão trazidos à tona, de maneira que possam ser aplicados ao ensino da Matemática.

No Capítulo 2 abordaremos o sistema de numeração sexagesimal, considerando que os tabletes foram registrados dessa maneira, introduzindo como os babilônios realizavam sua representação numérica, que símbolos utilizavam e o porquê desse sistema ser utilizado dado o contexto em que esses povos viviam. Trataremos do conceito de pares de recíprocos padrão adotado pelos babilônios e veremos a partir de alguns tabletes antigos (BM 34568 e YBC 7289) como os babilônios tinham consciência da Regra da Diagonal, conhecida atualmente como Teorema de Pitágoras.

Em seguida, no Capítulos 3, serão apresentados alguns métodos que os povos da antiga mesopotâmia utilizavam para encontrar os valores de raízes quadradas. Para isso, olharemos para o tablete YBC 7289, que possuía uma aproximação para o valor de $\sqrt{2}$, para uma construção geométrica, que apresentará novos conceitos muito utilizados na matemática babilônica, e por fim como realizavam o algoritmo da raiz quadrada e o algoritmo babilônico para fatoração de números, que se baseava na identificação dos algarismos finais dos números em questão.

No Capítulo 4 compreenderemos alguns detalhes finais para a compreensão da formação do Plimpton 322, além das etapas de construção de cada coluna e linha. Analisaremos também o propósito deste tablete, veremos vários aspectos anteriores utilizados neste tablete e realizaremos uma comparação com a tabela de seno de Madhava.

No Capítulo 5, como última parte deste trabalho, serão apresentadas duas propostas de atividades para serem trabalhadas em sala de aula. As propostas estarão ligadas ao trabalho com o sistema de numeração sexagesimal, e também com a questão de precisão de cálculos aplicados à trigonometria.

2 Sistema de Numeração Sexagesimal

A matemática babilônica já mostrava o seu diferencial e potencial a partir do seu sistema de numeração. O sistema utilizado por eles era o sexagesimal, e, portanto, é muito relevante que compreendamos como eles se apropriavam de tal sistema, uma vez que todos os tabletes estavam dentro desta realidade.

Para isso, o conceito de base numérica sempre é importante quando estamos lidando com diferentes civilizações. O nosso sistema de numeração é o decimal, e o aprendemos desde o início de nossas vidas, de forma que fiquemos habituados a ele e não tenhamos problemas para realizar operações ou para contarmos. Mas quando olhamos para outras civilizações vemos que estas possuíam diferentes formas de expressarem suas contagens, os maias, por exemplo, utilizavam um sistema de numeração vigesimal.

Um determinado sistema de numeração de base b é assim chamado se pode ser descrito como mostra a definição 2.0.1.

Definição 2.0.1. (Sistema de numeração de base b). Dado um número natural $b > 1$ e o conjunto de símbolos $(0, 1, 2, \cdots, b-1)$, a sequência de símbolos

$$(d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0)_b$$

representa o número natural

$$d_n \cdot b^n + d_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + d_1 \cdot b^1 + d_0,$$

sendo $0 \leqslant d_k < b$, para todo $k = \{0, \ldots, n\}$.

O nome de um sistema numérico se baseia no valor atribuído a b, o decimal possui $b = 10$, e o sexagesimal, $b = 60$. A partir do conjunto de símbolos, se torna possível a representação de qualquer número dentro daquele sistema.

Por que, então, considerando que existem muitas possibilidades de bases numéricas, uma civilização antiga como a Babilônia escolheria utilizar um sistema de numeração sexagesimal? Quais seriam as vantagens de se utilizá-lo em relação decimal Indo-Arábico que é o mais utilizado atualmente?

Os Babilônios tinham uma escrita cuneiforme, ou seja, escrita a partir do auxílio de objetos em formato de cunha, e que foi uma herança dos povos sumérios, de aproximadamente 5.000 anos atrás. Além disso, possuíam um sistema de numeração posicional (provavelmente o primeiro sistema posicional criado, e um grande diferencial), o que implica que eles tinham estabelecido o conceito de ordem, uma vez que o valor de um algarismo é definido pela posição que este ocupa dentro de um número, e a partir deste conceito estabelecido eles eram capazes de representar qualquer número dentro do contexto deles.

Por ser um sistema sexagesimal, em que a construção dos números é feita na base 60, temos 59 diferentes algarismos que representam os números de 1 a 59 (Figura 2.1). São 59 diferentes algarismos e não 60 porque eles não possuíam um símbolo que representasse o zero, apesar de terem ciência de sua existência e usarem um espaço vazio como forma de representá-lo no meio de um número. Para a composição destes 59 números eles utilizavam a base 10, através de 2 símbolos diferentes (hieróglifos), como é possível observar na imagem a seguir:

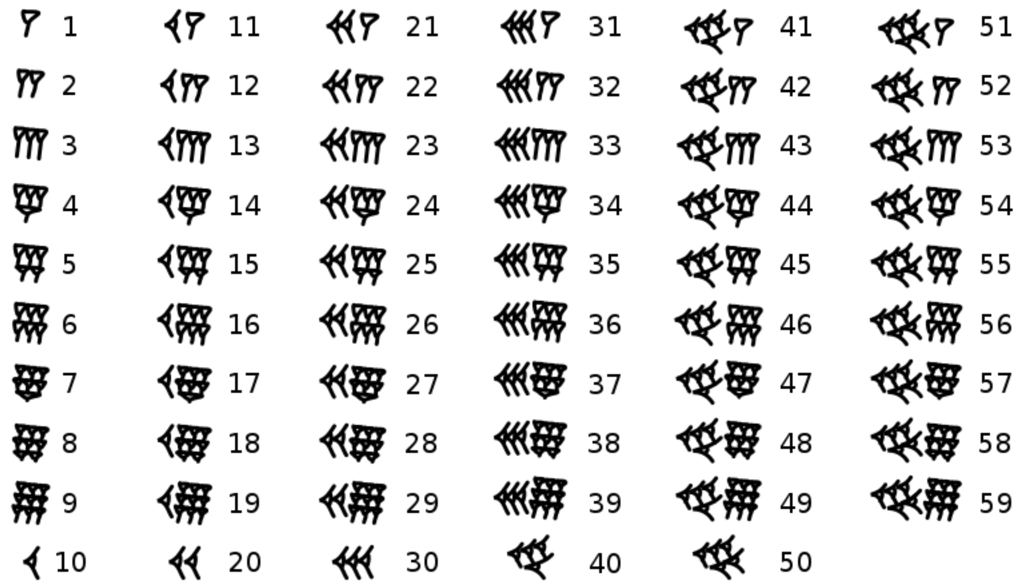


Figura 2.1 – Números de 1 a 59 em escrita cuneiforme.

Quando os babilônios representavam o número 60, o símbolo utilizado era o mesmo que representava o número 1, para ser mais exato, para cada k temos que todo número da forma $k \cdot 60^n$, em que $n \in N$, seria representado da mesma maneira.

Exemplo 2.0.1. Observe a representação de um número na base 60 e na escrita cuneiforme (Figura 2.2).

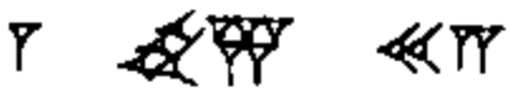


Figura 2.2 – Número 6322 em escrita cuneiforme.

Apenas observando esta representação dada, a primeira forma que interpretaríamos este número no sistema decimal seria como o descrito abaixo:

$$1 \cdot 60^2 + 45 \cdot 60 + 22 = 3600 + 2700 + 22 = 6322,$$

mas, se considerássemos um pouco mais a representação, perceberíamos que a forma de representação cuneiforme dos números $6322, 6322 \cdot 60, 6322 \cdot 60^2, ..., 6322 \cdot 60^n$ são as mesmas.

Isso acontecia porque eles não usavam um símbolo que correspondesse ao zero no final de um número (se pensarmos isso traduzindo para o sistema decimal, seria o mesmo que identificar 1 e 10, sem que existisse um zero após o 10). Identificar a grandeza ou magnitude do número escrito era uma tarefa que cabia ao leitor, e se dava através da interpretação baseando-se no contexto apresentado no texto em questão. Como fala Aaboe (1998, p. 12), “Esta não é uma falha tão grande do sistema numérico quanto parece à primeira vista; em geral, não há dúvidas sobre o valor correto.”.

Agora que já entendemos como funciona o sistema sexagesimal, qual será o motivo da preferência por este sistema numérico? Os babilônios eram grandes estudiosos em diversas áreas, como agricultura, astronomia, arquitetura, matemática, etc, e dentro da área de cálculos, podemos dizer que eles possuíam o princípio de prezar por uma enorme precisão destes. Para que os babilônios pudessem expandir e comandar seu império, eles se tornaram cidadãos capazes de manipular números muito bem. Eles gostavam de resolver problemas práticos de medida e peso, e eles relatavam essas resoluções escrevendo o passo a passo utilizado, como um algoritmo matemático. Considerando o fator “precisão”, e considerando também que naquela época não existiam instrumentos mecânicos ou algum outro tipo de recurso que facilitassem seus cálculos, a escolha de um sistema que permitisse isso de uma forma mais otimizada foi um dos principais motivos pelo qual o sistema na base 60 seria mais ideal que um sistema decimal, por exemplo. Como podemos perceber, ao fatorarmos o número 60 em função de seus fatores primos temos que $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. A partir disso podemos obter todos os 12 divisores de 60: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$ (Figura 2.3). Possuir um número maior de divisores é uma vantagem (no quesito precisão de cálculos realizados à mão), pois permite que mais frações possam ser escritas como frações sexagesimais finitas (não dízimas), se comparado, por exemplo, ao sistema decimal, em que $10 = 2 \cdot 5$ e assim sendo, possui apenas $1, 2, 5, 10$ como divisores. Por efeito de curiosidade, o número 60 é o menor número que possui os números de 1 a 6 como divisores.

Além desta razão apresentada, a civilização suméria havia chegado à aproximação de que o sol levava 360 dias para realizar seu movimento de translação, ou seja, um ano tinha uma duração próxima de 360 dias, de forma que o sistema sexagesimal também facilitaria muito os cálculos dentro da astronomia. Por este motivo veio a ser considerado que um círculo seria dividido em 360 graus, e então 1 grau em 60 minutos e 1 minuto em 60 segundos, como conhecemos atualmente. Esse sistema pode não ser tão familiar agora, mas ainda se faz presente em nosso sistema de contagem do tempo.

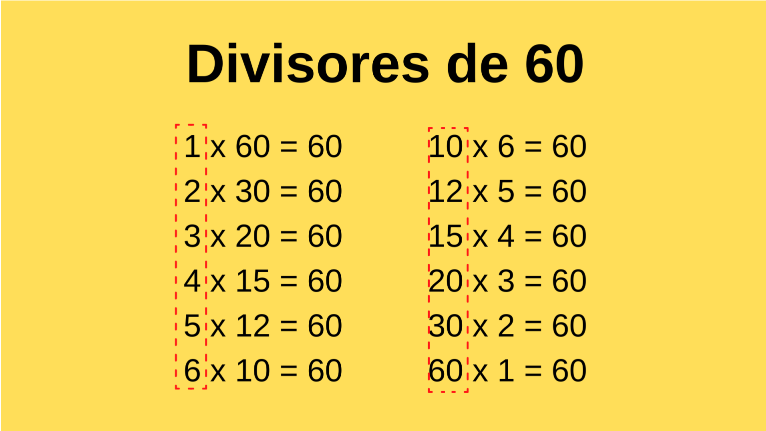


Figura 2.3 – Dividores de 60.

Lidar com números em uma base diferente pode parecer trivial se pensarmos levianamente no assunto, mas ao olharmos de forma prática é algo que exige diversas adaptações na forma em que estamos habituados a pensar matematicamente. Podemos observar o que está sendo dito no nosso sistema de contagem de horas, minutos e segundos, que manteve o sistema sexagesimal até hoje, e como não é simples quando o aprendemos ou quando o ensinamos a alguém sobre isto, sempre havendo um certo choque interno que requere de nós um tempo de raciocínio até que nos familiarizemos com ele.

Para não precisarmos lidar com mais uma forma de adaptação com relação aos hieroglífos utilizados e com os números em uma base diferente, no decorrer deste trabalho utilizaremos a seguinte forma de representação deles:

1. Serão utilizados os algarismos do sistema de numeração Indo-Arábico: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2. Os algarismos serão separados por ponto, indicando a grandeza destes dentro do número.
3. Quando lidarmos com números sexagesimais fracionários, utilizaremos um ponto e vírgula para separar a parte inteira da parte fracionária.

Exemplo 2.0.2. Exemplos de como as representações serão feitas:

$$3.54.41 = 3 \cdot 60^2 + 54 \cdot 60 + 41.$$

$$2.40; 55.32 = 2 \cdot 60 + 40 + 55 \cdot \frac{1}{60} + 32 \cdot \frac{1}{60^2}.$$

$$1.00.09.00 = 1 \cdot 60^3 + 9 \cdot 60.$$

A melhor maneira, para compreendermos, é relacionar nosso sistema de contagem de tempo, pois se fará importante nossa familiarização com o sistema de numeração babilônico, uma vez que ele se faz presente nas análises dos materiais do tabletes babilônicos.

2.1 Recíprocos Padrão

Começaremos com o tablete de recíprocos padrão pois ele era a base para a realização de cálculos dentro da matemática babilônica, juntamente com as inúmeras tábuas de multiplicação. Vimos na Introdução que era comum os escribas e estudantes possuírem uma cópia de um tablete de recíprocos padrão para o auxílio desses cálculos realizados. Era chamado de padrão porque continham em sua maioria as mesmas entradas nas colunas, como podemos ver na Tabela 2.1.

Coluna I	*Coluna II*	*Coluna I*	*Coluna II*
2	30	27	2.13.20
3	20	30	2
4	15	32	1.52.30
5	12	36	1.40
6	10	40	1.30
8	7.30	45	1.20
9	6.40	48	1.15
10	6	50	1.12
12	5	54	1.6.40
15	4	1	1
16	3.45	1.4	56.15
18	3.20	1.12	50
20	3	1.15	48
24	2.30	1.20	45
25	2.24	1.21	44.26.40

Tabela 2.1 – Tabela de pares de recíprocos.

Veremos na Definição 2.1.1. o que se classifica como um par de recíprocos e então discutiremos com relação às necessidades desse tipo de tablete.

Definição 2.1.1. Um par de números quaisquer, $(x, \overline{x})$, é definido como um par de recíprocos se $x \cdot \overline{x} = 60^n$.

Por conveniência, nos referiremos a um par de recíprocos por $(x, \overline{x})$, de forma que sempre que for apresentando um número da forma $\overline{x}$ estaremos nos referindo ao recíproco de x.

É válido observar que na matemática babilônica o resultado obtido do produto entre os pares de recíprocos escritos no sistema de numeração sexagesimal representavam 60 ou potências de 60, mas que também eram números representados neste sistema igualmente por 1, e que portanto necessitavam de contexto para que se compreendesse sua real grandeza. Se trouxermos para o nosso contexto, o recíproco se assemelha ao que chamamos de inverso de um número.

Os tabletes de recíprocos padrão possuíam números que satisfaziam a Definição 2.1.1., mas estes números não eram considerados números quaisquer, eram definidos como regulares.

Definição 2.1.2. Um número é chamado regular, dentro da matemática babilônica, se sua fatoração é dada como $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, em que $a, b, c \in N$.

Uma vez considerada a Definição 2.1.2, podemos dizer que a primeira coluna do tablete de pares de recíprocos pode ser compreendida como sendo todos os inteiros menores que 60 que são números regulares. É ainda possível observar que a fatoração em primos de 60 é dada por $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, que é justamente um número regular.

Ainda podemos observar que quando fatoramos uma potência qualquer de 60 obtemos $60^n = 2^{2n} \cdot 3^n \cdot 5^n$, logo, podemos afirmar que se um certo número inteiro possui algum fator primo diferente de 2, 3 e 5, ele não divide uma potência de 60. Consequentemente, se um número for regular, podemos afirmar que existe uma potência de 60 que este número será capaz de dividir.

A segunda coluna, portanto, contém o que chamamos de recíprocos da primeira coluna, gerando os pares de recíprocos constituintes dessa Tabela de Recíprocos Padrão.

Exemplo 2.1.1. Consideremos o número $45 = 3^2 \cdot 5$, vamos apresentar uma forma de obter o seu recíproco.

Precisamos igualar $3^2 \cdot 5$ a forma de $2^{2n} \cdot 3^n \cdot 5^n$, que corresponde a uma potência de base 60. Para isso, basta multiplicarmos $3^2 \cdot 5$ por $2^4 \cdot 5$, considerando, então, que $n = 2$. Logo, encontramos que o recíproco de 45 seria o 80.

Na Tabela 3.1 é possível conferir que o recíproco de 45 é justamente o número 80 (ou 1.20 no sistema sexagesimal).

Como o sistema de numeração da Babilônia era o sexagesimal, possuir um tablete de recíprocos padrão permitia que a realização de cálculos, principalmente as divisões, fossem realizados com uma maior facilidade e destreza e ainda assim garantindo uma precisão nos resultados (KATZ, 2009). Começamos a notar uma consciência complexa na matemática babilônica, algo que ficará ainda mais evidente ao vermos mais conceitos conhecidos por eles há milhares de anos atrás.

2.2 A Regra da Diagonal

Iniciamos a série de tabletes e algoritmos conhecidos pelos babilônicos focando no polígono com o menor número de lados e um tipo específico deste, os triângulos retângulos.

Um triângulo retângulo é capaz de nos remeter a diversas relações trigonométricas que aprendemos no decorrer de nossa vida escolar. Dificilmente alguém nunca terá ouvido pelo menos o nome de um dos teoremas mais famosos, o Teorema de Pitágoras, em que, considerando um triângulo retângulo de lados b, d, l, temos que $b^2 + l^2 = d^2$, sendo d o maior lado do triângulo, chamado de hipotenusa (ou diagonal, como os babilônios chamavam), e b e l os menores lados, chamados catetos. Pitágoras viveu de 570 a 490 AEC e portanto, o teorema que é creditado a ele deve ter sido descoberto e provado dentro deste período de tempo.

Entretanto, muitos documentos históricos, datados antes desta época, mostram que civilizações antigas também tinham ciência desta relação, a partir de aplicações em contextos específicos, porém, demonstrações como a de Pitágoras não foram encontradas até o momento.

Os babilônios, 1.000 anos antes de Pitágoras, tinham conhecimento desta relação e é possível ver isso em alguns tabletes feitos de argila que foram encontrados por historiadores arqueólogos.

Figura 2.4 – Tablete BM 34568 contendo problema para encontrar a largura de um retângulo. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2023].

No tablete BM 34568 (Figura 2.4), que se encontra no Museu Britânico, em seu primeiro problema, é possível observar o seguinte texto escrito:

> *"4 é o comprimento e 5 a diagonal. Qual a largura? Seu tamanho não é conhecido. 4 vezes 4 é 16. E 5 vezes 5 é 25. Se você tirar 16 de 25, sobrará 9. Que número vezes ele mesmo é 9? 3 vezes 3 é 9. 3 é a largura."*

Além desse tablete, o YBC 7289 também apresenta alguns valores que nos permite concluir que de fato os babilônios estavam cientes da "Regra da Diagonal", ou como chamamos "Teorema de Pitágoras". Ele traz 3 valores dispostos no registro, e podemos ver que o número que acompanha o lado esquerdo superior está marcado com o que corresponde a $3 \cdot 10 = 30$. O número imediatamente abaixo da diagonal horizontal é $1; 24.51.10$.

Este número no sistema decimal ficaria:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296.$$

Percebemos que este valor corresponde à uma aproximação da raiz quadrada de 2. E por fim o último número encontrado é

$$42; 25.35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42 + \frac{5}{12} + \frac{7}{720} = 42,4263889,$$

uma aproximação para $3 \cdot \sqrt{2}$.

Com este e muitos outros tabletes de argila que foram encontrados por historiadores pode-se concluir que os babilônios não tinham apenas noção de cálculos de raiz quadrada muito precisos, mas que estavam familiarizados com o Teorema de Pitágoras, pelo menos neste caso específico. A raiz quadrada de 2 era provavelmente um valor tabulado em um outro tablete auxiliar, um valor que conhecemos como constante de Pitágoras, e neste tablete foi utilizada para determinar o valor da diagonal de um quadrado 30 por 30.

3 A Raiz Quadrada na Antiga Mesopotâmia

Quando falamos sobre o conhecimento dos babilônios sobre a Regra da Diagonal (Teorema de Pitágoras), isso pode despertar o questionamento a cerca da capacidade de realização dos cálculos de raízes, e provavelmente, não seria mais surpresa dizer que eles também possuíam tabletes, assim como os dos pares de recíprocos padrão, de raízes quadradas padrão, de forma que neles tinham contidas todas as raízes cujos resultados iam de 1 a 59 ($\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, ...$\sqrt{54.09}$, $\sqrt{56.04}$, $\sqrt{58.01}$). Já tabletes expandidos e que possuíssem raízes quadradas de números maiores, se diferenciando assim dos tabletes padrão, eram muito mais raros.

No decorrer deste capítulo veremos alguns métodos que os babilônios utilizavam para encontrar raízes quadradas de números maiores, extensos que não estivessem contidos em alguma tabela prévia.

Dentro dessa coleção extensa de tabletes existentes é possível ver que os babilônios também atribuíram aproximações pertinentes de raízes quadradas de números que não eram quadrados perfeitos. Um tablete que apresenta uma aproximação é o tablete YBC 7289 datado entre 1800 - 1600 AEC, que está atualmente na coleção de tabletes babilônicos da Universidade de Yale. Ele apresenta a construção de um quadrado e suas diagonais, e três números escritos em diferentes lugares do tablete (Figura 3.1): 30, 1;24.51.10 e 42;25.35.

Figura 3.1 – YBC 7289. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2023].

O 30 corresponde ao lado do quadrado, e no seu interior estão os outros dois números, de forma que estes três números estão ligados entre si pela operação $30 \times 1; 24.51.10 = 42; 25.35$. Primeiramente fica perceptível que este cálculo representa a diagonal do quadrado de lado 30 em questão, e em seguida percebemos que a relação $d = l \cdot \sqrt{2}$ era conhecida pelos babilônios.

Se $l = 30$, e $d = 42;25.35$, logo $1;24.51.10$ deve corresponder à $\sqrt{2}$ da equação, ou mais precisamente falando, à uma aproximação de $\sqrt{2}$, já que $1;24.51.10 = 1 + (24/60) + (51/60^2) + (10/60^3) \approx 1,414212963$ no sistema decimal. Considerar que há 4.000 anos atrás, sem auxílio de instrumentos facilitadores, os babilônios foram capazes de obter uma precisão de 5 casas decimais ($\sqrt{2} \approx 1,41421356$) mostra como seu sistema de numeração de fato permitia melhores aproximações fracionárias e que isso fazia parte da construção matemática de seus cálculos e estudos. A conclusão definitiva de como tal aproximação foi obtida não se dá de forma unânime. E até o presente momento não é conhecido se eles possuíam uma forma de representar os números irracionais.

Algumas explicações e interpretações de como essa obtenção de raízes quadradas poderiam ter sido obtidas surgiram no decorrer dos anos, de maneira que veremos a seguir.

3.1 Interpretação geométrica pelo algoritmo mesopotâmico

A seguinte explicação para o processo que os Mesopotâmios poderiam ter seguido afim de determinar valores para raízes quadradas, considera o que o historiador Victor Katz propôs como sendo uma explicação aceitável e possível, uma explicação *"para o qual existe alguma evidência"* (KATZ, 2009, p. 18).

Consideremos o problema de encontrar o lado de um quadrado a partir do conhecimento de sua área, que neste caso atribuímos o valor de k. Na Figura 3.2 vemos a construção deste quadrado, que tem por medida do lado, $\sqrt{k}$.

Se tomarmos um valor a, de forma que este seja um valor conhecido e que seja menor que $\sqrt{k}$ e considerarmos c como o tamanho do comprimento que será necessário adicionar a a de forma que se obtenha $\sqrt{k}$ é possível escrever, então, que

$$a + c = \sqrt{k}. \tag{3.1}$$

Agora, observemos a Figura 3.3, que representa a diferença dos quadrados, o quadrado de lado a subtraído do quadrado maior de lado $\sqrt{k}$. Representação que mais tarde veio a ser chamada de **gnómon** pelos gregos.

Os povos mesopotâmicos possuíam um instrumento de medição do tempo a partir da sombra formada sob um objeto em forma de L, e portanto, por essa região da Figura 3.3 se assemelhar a este L, foi chamada mais tarde pelos gregos de, **gnómon**, palavra que no grego quer dizer literalmente “um que conhece ou examina”, mas que passou a ser utilizada para se referir ao relógio solar (HUNGER; PINGREE, 1999).

A região representada pode ser decomposta em 3 partes, 2 retângulos de lados a e c e um quadrado de lado c. Mantenha em mente que c corresponde ao que os matemáticos da época denominavam *takiltum*, pois será algo muito abordado no decorrer deste trabalho.

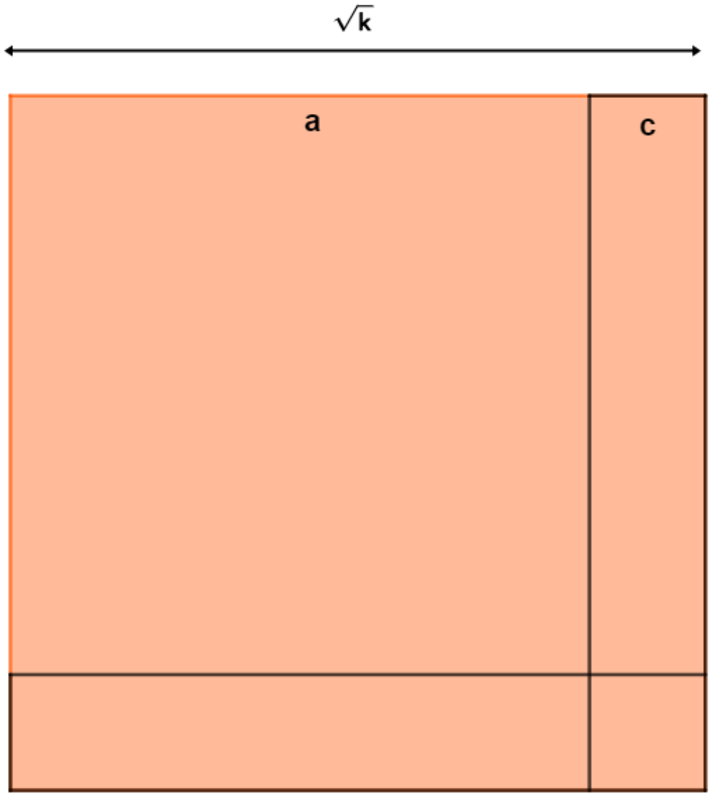


Figura 3.2 – Representação de um quadrado de área k.

Chamemos então γ a área do gnómon, e então conseguimos representá-la em função dos valores que atribuímos às partes. A primeira relação que podemos obter de γ é somando cada uma das três partes. Logo, $\gamma = 2ac + c^2$. A segunda é simplesmente representarmos algebricamente a diferença dos quadrados, $\gamma = \left(\sqrt{k}\right)^2 - a^2 = k - a^2$. A partir destes dois resultados podemos escrever a relação de igualdade

$$2ac + c^2 = k - a^2$$

$$(a + c)^2 = k.$$

Agora, consideremos um valor para a muito próximo de $\sqrt{k}$ de forma que c seja tão pequeno quanto queremos e que então c^2 possa ser um valor não significativo, gerando a aproximação

$$2ac \approx k - a^2,$$

e consequentemente,

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}. \tag{3.2}$$

Se substituirmos a aproximação (3.3) em (3.1), temos

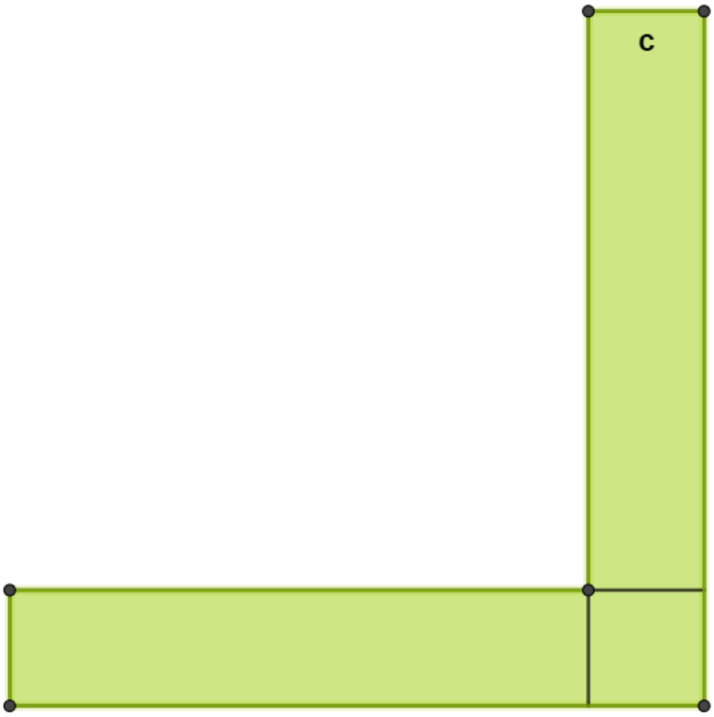


Figura 3.3 – Gnómon.

$$\boxed{\sqrt{k} \approx a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{a^2 + k}{2a}.}$$

Obtemos uma aproximação para $\sqrt{k}$, mas que sua precisão depende do valor inicial adotado para a.

Se por definição do problema inicial $a < \sqrt{k}$, é possível perceber que a aproximação final obtida será uma aproximação por excesso.

Se trouxermos essa aproximação de $\sqrt{k}$ para o nosso contexto, podemos compará-la ao Método Newton-Rapson utilizado em Análise Numérica para aproximação de valores das raízes de uma equação algébrica, mas que também pode ser adaptada para encontrar aproximações de raízes quadradas. O método traz o seguinte:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, i \in N.$$

Se considerássemos $x = \sqrt{k}$, e portanto, $x^2 = k$, poderíamos definir $f(x) = x^2 - k$ e por consequência $f'(x) = 2x$, que ao substituirmos obteríamos:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - k}{2x_i},$$

em que x_i é a aproximação inicial.

A aproximação de $\sqrt{2}$, que se apresentou no início deste tópico a partir do tablete YBC 7289 mostra que tomando $k = 2$ e então $a = 1,4$, já que a deve ser um valor conhecido e menor que $\sqrt{k}$, substituindo esses valores na relação encontrada, temos

$$\sqrt{k} \approx \frac{a^2 + k}{2a} = \frac{1,4^2 + 2}{2 \cdot 1,4} = \frac{3,96}{2,8} \approx 1,414285714286.$$

O valor de $\sqrt{2}$ trazido no tablete é a aproximação 1,414212963, que é ainda mais precisa.

Utilizando o $\gamma = k - a^2$, que é a diferença dos quadrados, e a aproximação de k, podemos reescrevê-la de maneira que chegamos a um resultado que foi encontrado regularmente ao longo dos tempos,

$$\sqrt{a^2 + \gamma} \approx a + \frac{\gamma}{2a}.$$

3.2 Método do lado quadrado (Método de Heron)

Como vimos na introdução deste capítulo, tabletes contendo a presença de raízes quadradas de números mais extensos não era algo comum e frequente, mas ainda assim alguns foram encontrados de forma que se tenha registro de como certos métodos aconteciam. Registros históricos como os tabletes IM 54472 e Si.428 apresentam o método do lado quadrado, ou como conhecemos, método de Heron.

Esse método, para encontrar uma determinada $\sqrt{k}$, para os babilônios, consistia basicamente em escolher um número regular x tal que $x^2 \simeq k$ e então, por x ser um número regular eles teriam acesso ao seu recíproco, de maneira que ao calcularem $\sqrt{k} \simeq [(k/x)+x]/2$ obteriam a aproximação desejada.

Consideremos, então, um valor k, tal que $k \in Q_+$, de forma que para encontrarmos a $\sqrt{k}$ precisamos determinar o valor de um x, tal que $x^2 = k$. Para isso, definiam-se dois valores, x_0 e x_1, com o objetivo de se chegar que $x_0 \cdot x_1 = k$.

A escolha de x_0 deveria ser a mais próxima possível de x, de modo que o escriba tivesse conhecimento deste número regular e de seu recíproco. Uma vez escolhido, existiria um segundo valor, x_1, tal que $x_0 \cdot x_1 = k$. Reescrevendo este valor em função de x_0 e k obtería-se $x_1 = k/x_0$, e então seria possível concluir que x_1 seria o recíproco de x_0 multiplicado por k. Logo, o par (x_0, x_1) é um par de recíprocos.

Como o procedimento descrito seria justamente a resolução de uma média geométrica, cujos termos seriam x_0 e x_1 e a média em si seria o valor de k, obviamente a resolução da média geométrica seria o ideal, mas este seria justamente o problema, e então como forma de encontrar um valor aproximado, resolver a média aritmética parecia uma aproximação satisfatória.

Para concluir, aplicariam a média aritmética nos dois termos (x_0, x_1), e esta se resumiria a $\sqrt{k} \simeq (x_0 + x_1)/2 = (1/2) \cdot [x_0 + (k/x_0)]$, que é exatamente o que foi apresentado inicialmente. Lembrando que k é conhecido e o par de recíprocos poderia ser definido a partir dos tabletes de recíprocos que eles possuíam.

Sabemos que conforme iterações fossem sendo feitas dentro deste processo, o valor de x possuiria uma precisão maior em relação à aproximação inicial que havia sido escolhida. Entretanto, a realização de iterações sucessivas talvez não fosse tão executável no contexto dos babilônios por causa da utilização de recíprocos que eram números regulares e tabulados, como já vimos. Os babilônios poderiam não ser capazes de realizar todo e qualquer cálculo de raiz quadrada, mas antes mesmo que Heron pudesse formalizar esse método para aproximação de raízes quadradas, eles já o utilizavam mesmo com suas limitações (PAULANTI, 2014).

Vamos observar um exemplo que temos da aplicação deste método, em um dos tabletes citados na introdução.

Exemplo 3.2.1. (IM 54 472)

Sendo $k = 26.00.15.00$ ($= 5616900$) e $x_0 = 40.00$ a aproximação feita para se encontrar a raiz, uma vez que $x_0^2 = (40.00)^2 = 26.40.00.00 \simeq 26.00.15.00$.

Substituindo os valores temos:

$$\sqrt{k} \simeq \frac{\dfrac{k}{x_0} + x_0}{2} = \frac{\dfrac{26.00.15.00}{40.00} + 40.00}{2}.$$

Uma vez que $x_0 = 40.00$, é possível encontrar no tablete de recíprocos padrão que seu recíproco seria $\overline{x_0} = 0; 00.01.30$, e também que o recíproco de 2 é 0;30. Substituindo os recíprocos temos:

$$\frac{\dfrac{k}{x_0} + x_0}{2} = \frac{\dfrac{26.00.15.00}{40.00} + 40.00}{2} = \frac{26.00.15.00 \times 0; 00.01.30 + 40.00}{2} = 39.30; 11.15.$$

Como $39.30; 11.15 \simeq 39.30$, podemos chegar a conclusão de que a aproximação obtida é exatamente a solução procurada, pois

$$\sqrt{26.00.15.00} = 39.30.$$

O exemplo a seguir traz uma série de 3 problemas que mostram como o cálculo de raiz quadrada não era algo trivial para os babilônios, muito provavelmente porque os números obtidos não faziam parte dos chamados números regulares, e que eles possuíam em suas tabelas padrões de cálculo.

Exemplo 3.2.2. (BM 96957 + VAT 6598)

Problema 1. Aproxime a diagonal d no retângulo em que os lados $b = 10$ e $l = 40$ são conhecidos.

Resolução: Para resolver este problema, o método do lado quadrado é utilizado, uma vez que considera que a aproximação inicial pode ser o próprio 40, já que o retângulo é mais comprido, bem achatado e 40 é um número regular.

$$d = \sqrt{b^2 + l^2} = \sqrt{10^2 + 40^2},$$

sendo assim, sabendo a aproximação inicial para d e também o recíproco $\overline{d}$ desta aproximação tem-se que,

$$\begin{aligned}\sqrt{10^2 + 40^2} &\simeq \frac{((10^2 + 40^2)\,\overline{40} + 40)}{2} \\ &= \frac{((1.40 + 26.40) \cdot 0;01.30 + 40)}{2} \\ &= \frac{(28.20 \cdot 0;01.30 + 40)}{2},\end{aligned}$$

e realizando esses cálculos, ele chega que o valor para d é

$$d = 41;15.$$

Problema 2. Encontre o lado menor do retângulo com comprimento 40 e diagonal 41;15.

Resolução: Para resolver este problema, ele prefere fazer o caminho inverso do problema anterior a utilizar o método do lado quadrado.

Problema 3. Encontre o lado mais longo do retângulo com lado menor 10 e diagonal 41;15.

Resolução: O método do lado quadrado poderia ter sido aplicada, mas quem está resolvendo diz não haver solução.

3.3 Algoritmo de fatoração babilônica

Temos observado como a matemática babilônica possuía um grau de complexidade muito significativo. Quão mais a fundo nos deixamos investigar, mais conseguimos apreciar a profundidade dessa civilização antiga.

Então, descendo mais um degrau desse mundo babilônico podemos encontrar métodos de fatoração babilônica para algumas motivações diferentes.

3.3.1 Algoritmo da Raiz Quadrada

Quando os números dos quais era necessário extrair a raiz quadrada eram muito extensos e os escribas não possuíam aproximação para esses números em suas tabelas de recíprocos, e portanto não utilizavam o método do lado quadrado, a solução para esta situação era realizar a fatoração desses números por fatores regulares quadrados, de forma que esses números fossem reduzidos a números menores, para os quais eles teriam uma aproximação. Os babilônios identificavam os fatores quadrados e então encontravam o recíproco que utilizariam para a fatoração.

Exemplo 3.3.1. Fatoração pelo algoritmo da raiz quadrada.

Algoritmo Raiz Quadrada		
Número	Fator Quadrado Regular	Operação (× Recíproco)
1.07.44.03.45	3.45	×16
18.03.45	3.45	×16
4.49	4.49	fim

Tabela 3.1 – Algoritmo da raiz quadrada para 1.07.44.03.45.

Observando a Tabela 3.1 que mostra como o escriba realizaria o algoritmo de raiz quadrada, é possível entender que ele observou os dígitos menos significativos do número 1.07.44.03.45, que possui o fator quadrado regular 3.45 ($= 15^2$), e a partir desta observação ele realiza a multiplicação pelo recíproco deste número. O recíproco de 3.45 era dado como 16, mas ao realizar o algoritmo é considerada a grandeza $16 \cdot 60^{-2}$. Essa observação se faz possível assim como sabemos que um número pode ser dividido por 5, apenas olhando para o último algarismo do mesmo.

Abaixo podemos ver que o número 1.07.44.03.45 de fato é divisível por 3.45; o primeiro algarismo da direita, 45, é divisível por 15, uma vez que 45 é divisível por 3 e por 5. Se observamos a divisibilidade de um número $A.B.C.D.E$ por 3.45, é necessário que 15^2 divida $A \cdot 60^4 + B \cdot 60^3 + C \cdot 60^2 + D \cdot 60 + E$. Como 15^2 divide 60^2 logo dividirá 60^3 e 60^4, restando que 15^2 precisa dividir $D \cdot 60 + E$, o que acontece, uma vez que $D = 3$ e $E = 45$, pois $3 \cdot 60 + 45 = 225 = 15^2$.

Depois que o escriba retirasse o fator quadrado regular através da multiplicação pelo recíproco de 3.45, que é 0;00.16, restaria 18.03.45, que por observar os dígitos menos significativos, também seria divisível por 3.45, pelos mesmos motivos descritos anteriormente. Após realizá-la, o número 4.49 é obtido e então pode ser identificado facilmente através de uma tabela padrão de raízes quadradas, como sendo 17^2.

Por fim, a raiz quadrada final será o produto das raízes quadradas dos fatores quadrados encontrados: $15 \times 15 \times 17 = 1.03.45$.

O exemplo anterior mostra a efetividade do algoritmo, mas o que deve ser considerado é a característica de que estes problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras (regra da diagonal) são parte de uma construção cuidadosa, para que se assegurasse que raízes quadradas pudessem ser facilmente encontradas a partir deste método, mas isso nem sempre era possível.

Isso pode ficar mais claro se olharmos para o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.2. Observe o seguinte exemplo, com um número que é encontrado na primeira coluna do Plimpton 322:

Algoritmo Raiz Quadrada		
Número	Fator Quadrado Regular	Operação (× Recíproco)
1.53.10.29.32.52.16	16	×3.45
7.04.24.20.48.16	16	×3.45
26.31.31.18.01	26.31.31.18.01	fim

Tabela 3.2 – Raiz quadrada de 1.53.10.29.32.52.16.

Analisando o passo a passo descrito na Tabela 3.2, vemos que o início segue tranquilamente mas ao reduzirmos o número para 26.31.31.18.01 chegamos a um número que não possui mais fatores quadrados regulares, e que o único fator possível restante seria o número 5.09.01, que é um número primo.

Isso seria um grande empecilho para a resolução desta raiz quadrada, pois mesmo com o algoritmo a simplificação do número seria complicada devido a este fator quadrado que é um número extenso e primo.

Até o presente momento não temos evidências de que os estudiosos da época tenham tido a necessidade de realizarem cálculos dessa magnitude.

Esse algoritmo da raiz quadrada permitiu aos escribas estenderem o alcance da tabela de raiz quadrada, ou melhor falando, da regra do lado quadrado. Podemos perceber que este método é um algoritmo que se utiliza de iterações que sucessivamente vão identificando e removendo fatores quadrados, de forma que o número seja reduzido e então se possa aplicar a regra do lado quadrado. Mas ainda podemos ver limitações que os babilônios possuíam para realizá-lo.

3.3.2 Aplicação da Fatoração

Na matemática babilônica, a fatoração também era utilizada para identificar fatores comuns entre números, se fôssemos comparar com algo mais prático e presente no nosso contexto, seria uma espécie de algoritmo para calcular o Máximo Divisor Comum (MDC) entre números.

O algoritmo era utilizado para identificar fatores regulares comuns entre números. Basicamente, o escriba precisaria ter dois números inicialmente e então procederia para a etapa de identificação do fator regular comum observando, como no algoritmo da raiz quadrada, os dígitos menos significativos. A partir da identificação deste fator comum, ele localizaria o valor recíproco correspondente e então realizaria a multiplicação. Este processo se repetiria até que não houvesse mais fatores comuns identificáveis.

Vamos acompanhar um exemplo da aplicação deste algoritmo.

Exemplo 3.3.3. Veja o algoritmo sendo aplicando na Tabela 5.3 abaixo:

Algoritmo de fatoração				
Primeiro número	Segundo número	Fator regular	Resultado 1	Resultado 2
58.27.17.30	1.23.46.02.30	30	1.56.54.35	2.47.32.05
1.56.54.35	2.47.32.05	5	23.22.55	33.30.25
23.22.55	33.30.25	5	4.40.35	6.42.05
4.40.35	6.42.05	5	56.07	1.20.25
56.07	1.20.25	nenhum	-	-

Tabela 3.3 – Fatoração simultânea de 58.27.17.30 e 1.23.46.02.30

Observando os números da Tabela 3.3 ($n_1 = 58.27.17.30, n_2 = 1.23.46.02.30$), seria possível observar pelos escribas que ambos possuem o fator regular comum 30, em seu dígito menos significativo. A partir disso, realiza-se a multiplicação de n_1 e n_2 pelo recíproco e 30, reduzindo estes números.

No caso de 58.27.17.30 e 1.23.46.02.30, o fator comum é 30, então os babilônios realizariam a multiplicação pelo recíproco de 30, que é 2, obtendo os valores 1.56.54.35 e 2.47.32.05, a grandeza do recíproco seria 60^{-1}, já que queremos fatorar e uma vez que $30 \cdot 0;02 = 60^0 = 1$. Ainda seria possível continuar o algoritmo, uma vez que ainda possuem o 5 como fator comum. O recíproco de 5 seria 0;12, e ao realizarmos a operação, teríamos 23.22.55 e 33.30.25. Seguindo o mesmo procedimento, chegariam ao ponto em que não existiria mais fatores regulares comuns e então o algoritmo chegaria ao fim. É possível ver o algoritmo completo na Tabela 5.3.

O matemático Jöran Friberg introduziu o nome “trailing part algorithm” para representar o algoritmo descrito (HØYRUP, 2018). A tradução de “trailing part” seria “parte final”, que representa bem a forma que se realiza a técnica. Mais a frente veremos a aplicação desse algoritmo dentro do tablete P322.

4 Tablete Plimpton 322

Na introdução deste trabalho vimos informações gerais sobre este tablete babilônico, e algumas características já foram apresentadas.

Agora, nosso objetivo é desenvolver os aspectos importantes na construção deste documento matemático histórico, como ele foi construído e mais alguns detalhes relacionados ao seu próposito. Além disso, ao vermos as particularidades deste tablete ponto a ponto, poderemos, de forma mais agrupada, concluir o propósito de compreender a profundidade e grandeza do conhecimento matemático dessa civilização.

Sobre a composição de sua estrutura, a primeira coluna traz valores que são chamados de *takiltum*, nas segunda e terceira colunas, temos valores que representam ternos pitagóricos. O terno (b, l, d) é considerado um terno pitagórico, ou como chamaremos aqui, terno babilônico, em que se respeita a relação $d^2 = b^2 + l^2$. No caso do tablete P322, considerando os ternos babilônicos, a entrada da segunda e terceira colunas correspondem ao b e d descritos.

A Tabela 4.1 mostra os títulos e os valores completos e corrigidos que estão em cada uma das entradas do P322, na parte frontal do tablete, uma vez que parte do tablete estava quebrado. Já vimos o significado de *takiltum*, mas não o de *ib-si*, cuja tradução da palavra se refere a "algum tipo de operação".

Ainda, para entendermos melhor como se deu o processo de obtenção deste tablete, é necessário que alguns conceitos e informações sejam apresentadas, para que posteriormente possamos ligar cada um destes pontos.

4.1 O Takiltum

O *takiltum* é uma medida que se faz presente em alguns documentos matemáticos babilônicos, por isso é necessário entender o que ele significa. O próprio P322 traz uma definição do que este termo representa:

> *"O takiltum da diagonal que foi subtraído de tal forma que a largura surge..."*

Esta é uma tradução do texto cuneiforme original que se encontra no tablete, e algo interessante é que muitos estudiosos e pesquisadores divergem com relação à tradução exata desta frase.

Considerando certa divergência da interpretação, uma maneira de se obter uma melhor compreensão desse conceito é observar o contexto da aplicação dele. Então,

I': δ_n^2	*II'*: b_n	*III'*: d_n	*IV'*: n
O takiltum da diagonal da qual 1 é subtraído e que a largura surge	*ib-si da largura*	*ib-si da diagonal*	*posição*
1.59.00.15	1.59	2.49	*ki 1*
1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	1.20.25	*ki 2*
1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	*ki 3*
1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	*ki 4*
1.48.54.01.40	1.05	1.37	*ki 5*
1.47.06.41.40	5.19	8.01	*ki 6*
1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	*ki 7*
1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	*ki 8*
1.38.33.36.36	8.01	12.49	*ki 9*
1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	*ki 10*
1.33.45	45	1.15	*ki 11*
1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	*ki 12*
1.27.00.03.45	2.41	4.49	*ki 13*
1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	*ki 14*
1.23.13.46.40	28	53	*ki 15*

Tabela 4.1 – Tabela original do P322. Fonte: (MANSFIELD; WILDBERGER, 2017).

é importante que se observe outros documentos históricos contemporâneos em que este mesmo conceito se faz presente, e portanto, sua aplicação se torne um pouco mais concreta.

Se olharmos para o tablete YBC 6967, podemos ter acesso à uma aplicação deste termo. A partir deste tablete vemos um tipo de algoritmo para obtenção de pares de recíprocos, um problema designado *igi-igibi* pelos babilônios.

No YBC 6967 encontramos a inscrição

"Excede seu recíproco por 7. Qual é este recíproco?"

O que é entendido como: "[Um recíproco] excede seu recíproco por 7 ($x+7=\overline{x}$). Qual é este recíproco?"

Já foi visto a definição de recíproco, e que um par de recíprocos tem seu produto igual a 1 ou igual a alguma potência de 60. Pelo enunciado temos que a diferença entre os recíprocos é um número inteiro, no caso 7, e a situação sugere que pensemos nos dois valores recíprocos como inteiros também. Dessa forma podemos pensar neles como sendo lados desconhecidos de um certo retângulo que possui área 60.

Sigamos o procedimento realizado e apresentado no YBC 6967 para o encontro do par de recíproco dada a condição inicial:

1. **Quebra na metade o 7 que o recíproco excede seu recíproco, e 3;30 (aparecerá).**

   Sabemos que esse excesso é de 7, então ao dividirmos 7 por 2 ou multiplicarmos pelo recíproco de 2 (30) obtemos o valor de 3;30 ou 3,5 considerando o sistema decimal (Figura 4.1).

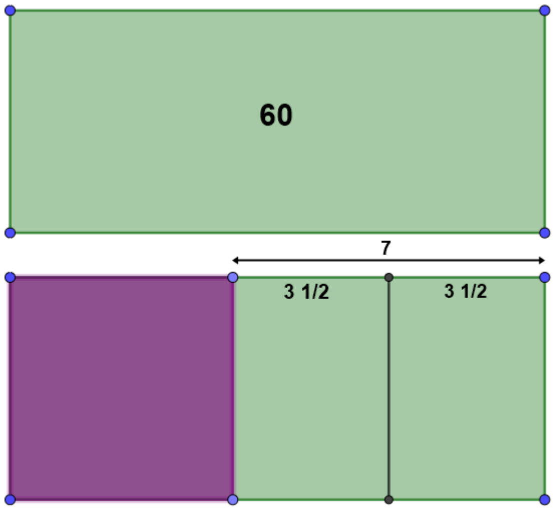


Figura 4.1 – Decomposição de $x \cdot \overline{x} = 60$ em um quadrado e dois retângulos.

   Considerando os dois novos retângulos congruentes de largura 3,5 e altura sendo a dimensão do quadrado obtido, vamos realocar o segundo retângulo de maneira que não tenhamos mais a forma de um retângulo, e sim de um L ao contrário, ou de um quadrado maior com uma "peça" faltante (quadrado imaginário de lado 3,5), como indica a Figura 4.2.

2. **Multiplique 3;30 por 3;30 e 12;15 (será o resultado).**

   Essa multiplicação se dá com objetivo de obter a área do quadrado em amarelo na Figura 4.2, que seria a peça faltante do quadrado maior que foi construído geometricamente pelo escriba. Como a medida dos retângulos, que definem esse quadrado, são 3;30, a área será dada por $3;30 \times 3;30$.

   Realizando a multiplicação de 3;30 por 3;30 obtém-se 12;15 como resultado.

3. **Adicione 1.00;00 ao 12;15 que resulta em 1.12;15.**

   Este 1.00;00 adicionado nesta etapa corresponde à área do retângulo inicial de área 60, mas que agora foi rearranjado e está em forma de L.

   O intuito é calcular a área do quadrado maior, presente no passo anterior e apresentado na Figura 4.3, logo $1.00;00 + 12;15 = 1.12;15$.

4. **Qual o lado desse quadrado formado?**

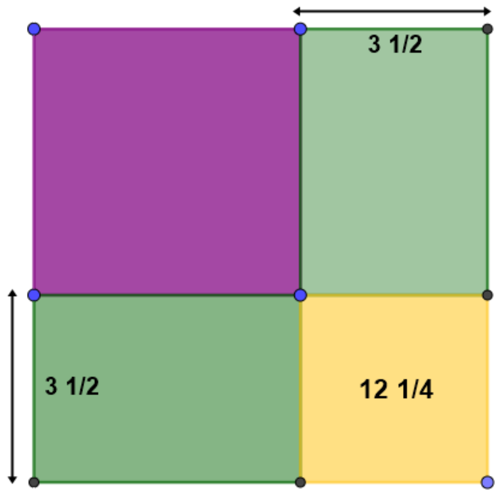


Figura 4.2 – Reorganização do retângulo $x \cdot \overline{x}$ em um quadrado decomposto.

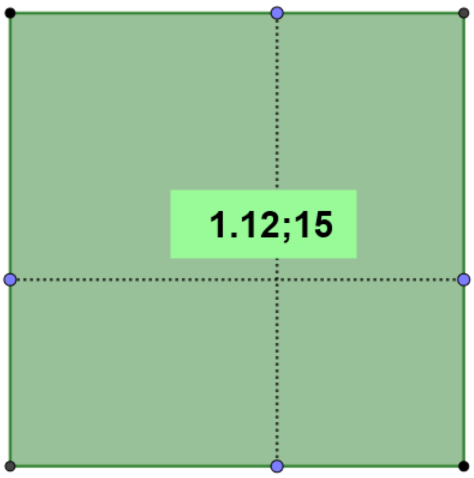


Figura 4.3 – Quadrado de área 1.12;15.

Seria calcular a raiz quadrada de 1.12;15, que é 8;30 (Figura 4.4).

Para realizar o cálculo desta raiz quadrada o escriba poderia utilizar algum dos procedimentos que já abordamos no Capítulo 2, como a regra do lado quadrado ou o algoritmo da raiz quadrada.

No caso do algoritmo da raiz quadrada, vamos considerar $1.12;15 = 1.12.15.00 \times 60^{-2}$ e então podemos identificar os fatores quadrados regulares.

Realizando o algoritmo é possível obter os fatores quadrados que nos dão a resposta exata da raiz quadrada de 1.12.15.00, que é composta por:

$$\sqrt{1.12.15.00 \times 60^{-2}} = 2 \times 5 \times 51 \times 60^{-1} = 8;30.$$

Algoritmo Raiz Quadrada		
Número	Fator Quadrado	Operação ($\times$ Recíproco)
1.12.15.00	5	$\times 12$
2.53.24	2	$\times 30$
43.21	51	fim

Tabela 4.2 – Algoritmo da raiz quadrada para 1.12.15.00

Outro método conhecido pelos estudiosos babilônios era o método do lado quadrado, em que o valor da aproximação inicial é importante. No caso da raiz aqui querendo ser encontrada, o escriba poderia ter definido com aproximação o valor de $x_0 = 8.00$ e cujo recíproco seria $\overline{x_0} = 7.30$

Substituindo os valores no algoritmo temos,

$$0;30 \cdot (8.00 + 1.12.15.00 \times 0;00.07.30) = 8;30.56.15 \simeq 8;30.$$

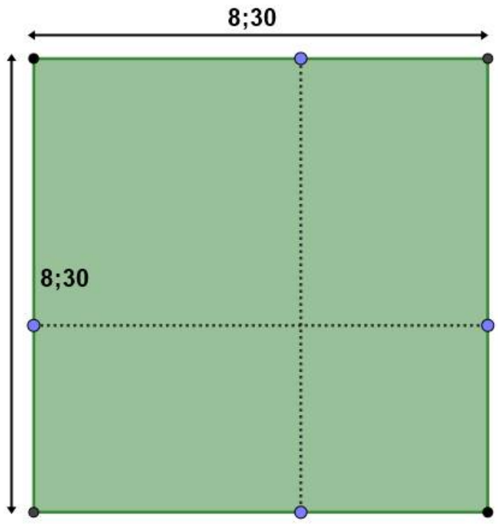


Figura 4.4 – Quadrado de lado 8;30.

5. **Subtraia de 8;30 o valor de 3;30, que corresponde a metade do 7 excedente de x, obtendo a largura do retângulo inicial. Da mesma forma somamos 3;30 a 8;30 e obtemos o comprimento do retângulo inicial.** O valor somado e subtraído de 8;30 é o que os babilônios identificavam como *takiltum.*

$$8;30 - 3;30 = 5$$

e

$$8;30 + 3;30 = 12.$$

Com isso, é obtido os dois valores recíprocos satisfazendo a condição inicial de que $x + 7 = \overline{x}$, $(x, \overline{x}) = (5, 12)$.

Agora que vimos o que os babilônios definiam como *takiltum*, através do passo a passo descrito inicialmente, podemos definir uma forma generalizada desse valor, de modo que substituamos o 7 por um valor a, tal que $a \in N$. Inicialmente temos a relação a seguir:

$$x + a = \overline{x}.$$

Com a Figura 4.1 em mente, podemos escrever que o lado do quadrado composto mediria $x + (a/2)$, e substituindo $a = \overline{x} - x$, obtemos o lado apenas em função do par de recíprocos.

$$x + \frac{a}{2} = x + \frac{\overline{x} - x}{2} = \frac{2x + \overline{x} - x}{2} = \frac{\overline{x} + x}{2}.$$

Considerando a composição da área do quadrado composto, temos dois retângulos congruentes de lados x e $\overline{x} - x$, um quadrado menor de lado $(\overline{x} - x)/2$ e um quadrado maior de lado x. Com isso, podemos chegar à seguinte relação, que representará a área do quadrado composto.

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot x \cdot a + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= x^2 + x \cdot (\overline{x} - x) + \left(\frac{\overline{x} - x}{2}\right)^2 \\ &= x^2 + x \cdot \overline{x} - x^2 + \frac{(\overline{x})^2 - 2 \cdot \overline{x} \cdot x + x^2}{4} \\ &= \left(\frac{\overline{x} + x}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Além desta maneira, temos uma segunda forma para a representação da área deste mesmo quadrado composto, baseando no fato de que a área inicial do retângulo é dada pela multiplicação de um par de recíprocos, e restaria o quadrado "imaginário" para acrescentarmos a esta parte inicial.

A área também pode ser descrita como:

$$x \cdot \overline{x} + \left(\frac{\overline{x} - x}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\overline{x} - x}{2}\right)^2 \tag{4.2}$$

Igualando as relações (4.1) e (4.2), que representam a mesma área, temos:

$$\left(\frac{\overline{x} - x}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\overline{x} + x}{2}\right)^2$$

No decorrer do passo a passo apresentado no tablete YBC 6967 verificamos que o *takiltum* é dado por 3;30, e depois que de forma geral é expresso por $(\overline{x} - x)/2$, representando não apenas o lado do quadrado imaginágio, mas também parte de um terno

Pitagórico específico $((\overline{x} - x)/2, 1, (\overline{x} + x)/2)$. No P322, o valor descrito com esta mesma nomenclatura representa um valor um pouco diferente, mas que ainda se relaciona. Se chamarmos o *takiltum* do YBC 6967 de $\beta = (\overline{x} - x)/2$, então o *takiltum* no tablete P322 seria dado por $\beta^2 + 1^2$, e definido como δ^2.

Apesar da diferença de valores e do que representam, isso não se torna um grande problema porque a palavra utilizada no original não sugere um significado extremamente fixo e restrito ao termo, pois é uma palavra de difícil tradução, e que poderia simplesmente significar **quadrado**. Tendo levado isso em consideração temos que ambos os valores estão relacionados ao mesmo contexto, e isso é suficiente para o que veremos.

Além disso, é possível observarmos que o algoritmo apresentado no tablete YBC 6967 equivale ao algoritmo para obtenção de raízes de uma função quadrática, ou como é popularmente conhecida, fórmula de Bhaskara.

4.2 Ternos Babilônicos

Dentro da Matemática a palavra terno tem um sentido mais específico do que simplesmente ser um conjunto de três elementos de algo. Geralmente essa palavra, inclusive, é seguida pelo complemento **Pitagórico**.

O terno Pitagórico está relacionado ao Teorema de Pitágoras, uma vez que é o conjunto de números inteiros que satisfaz a este teorema. Considerando um triângulo retângulo, o teorema implica em:

Teorema 1. O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Então, o terno Pitagórico se relaciona ao Teorema 1 a partir da seguinte definição:

Definição 4.2.1. Um terno (a, b, c) é dito terno Pitagórico se a, b e c são números inteiros positivos, de forma que o Teorema de Pitágoras seja válido: $a^2 + b^2 = c^2$.

Existem infinitos ternos Pitagóricos, e alguns diferentes padrões que nos permitem observar tal afirmação.

Teorema 2. Considere (a, b, c) um terno Pitagórico e também k um número natural. Então (ka, kb, kc) também é um terno Pitagórico.

Definição 4.2.2. Dizemos que um terno Pitagórico é um terno Pitagórico primitivo, se o $mdc(a, b, c) = 1$, ou seja, se os números são primos entre si.

Sabemos já que os ternos Pitágoricos receberam esse nome por causa de Pitágoras e foram assim nomeados por causa do teorema que também recebe seu nome.

Entretanto, na Antiga Mesopotâmia, ternos já eram utilizados muitos anos antes de Pitágoras, de forma que podemos atribuir o nome de **ternos babilônicos** aos ternos que os babilônios calculavam e utilizavam (RATNER, 2009). No tablete P322, que estamos interpretando e estudando, poderemos ver como os ternos babilônicos eram utilizados de maneira ainda mais específica se compararmos aos Pitagóricos.

Euclides em seus escritos e estudos chegou a uma fórmula que descreve que os ternos (a, b, c) são um terno pitagórico, se satisfazem as seguintes condições: $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$, em que $m, n \in Z$, de tal forma que teríamos

$$\left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2. \tag{4.3}$$

Já na Antiga Mesopotâmia, a forma específica com que eles configuravam seus ternos, era dada da seguinte maneira: m e n eram números regulares, ou seja, da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, e com a regularidade de por construção terem um dos catetos unitário:

$$\left(\frac{m\overline{n} - n\overline{m}}{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{m\overline{n} + n\overline{m}}{2}\right)^2. \tag{4.4}$$

Como vimos na Seção 4.1, para que pudessem solucionar problemas do tipo, “igi-igibi” e descobrissem pares de recíprocos específicos, eles tinham todo um procedimento a ser seguido, que permitia encontrar a relação acima, um pouco modificada, mas que viriam das seguintes associações: $x = n/m$ então $\overline{x} = m/n$. Se denominarmos $\beta = (m\overline{n} - n\overline{m})/2$ e $\delta = (m\overline{n} + n\overline{m})/2$, logo, $\delta = (\overline{x} + x)/2$ e $\beta = (\overline{x} - x)/2$, e então $\beta^2 + 1^2 = \delta^2$. Essa relação expressa um triângulo retângulo com a seguinte peculiaridade: delta sendo a medida da hipotenusa, 1 a medida do cateto maior e beta a medida do cateto menor (Figura 4.5).

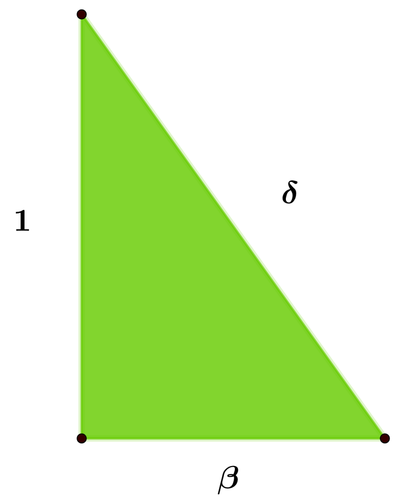


Figura 4.5 – Terno Babilônico ($\beta^2 + 1^2 = \delta^2$).

4.3 Construção das linhas

Para sabermos como o tablete em si foi construído, vamos inicialmente olhar para a linha $k = 1$ deste.

O tablete contém 4 colunas visíveis que se mantiveram através do tempo, como a tabela mostra:

δ^2	b	d	linha

Nesta seção iremos construir as duas primeiras linhas de P322, e para isso é importante levar em consideração os valores de m, n, β e δ descritos anteriormente. Vimos que os ternos babilônios eram descritos como na Equação 4.4, e com a informação de que na primeira linha o primeiro par de parâmetros utilizado em P322 foi $(n, m) = (5, 12)$, é possível calcularmos os valores de β e δ. Tem-se também que os recíprocos são $(\overline{n}, \overline{m}) = (12, 5)$. Logo,

$$\beta = \frac{m\overline{n} - n\overline{m}}{2} = \frac{12 \times 12 - 5 \times 5}{2} = \frac{2.24 - 25}{2} = 59.30,$$

$$\delta = \frac{m\overline{n} + n\overline{m}}{2} = \frac{12 \times 12 + 5 \times 5}{2} = \frac{2.24 + 25}{2} = 1.24.30, \text{ e}$$

$$\delta^2 = (1.24.30)^2 = 1.59.00.15.$$

Valores que correspondem ao triângulo retângulo da Figura 4.6.

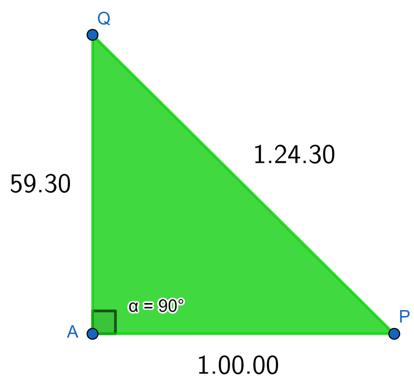


Figura 4.6 – Triângulo Retângulo (59.30, 1.00.00, 1.24.30).

Sabemos que o terno babilônico $(\beta, 1, \delta)$ representa um triângulo retângulo, e esses valores nos permitirão encontrar b e d, que também são valores que pertencem a um outro terno. Para encontrarmos os valores de b e d, realizaremos o algoritmo "trailing part" visto na Seção 3.3 (Tabela 4.3).

β	δ	Fator regular	Operação ($\times$ Recíproco)
59.30	1.24.30	30	$\times 2$
1.59	2.49	nenhum	fim

Tabela 4.3 – Divisor comum entre β e δ.

Logo, encontramos que o lado mais longo do triângulo retângulo é $b = 1.59$, que a diagonal é $d = 2.49$, e que o terceiro lado é o escalar $l = 2$ (ação tomada no algoritmo) formando um triângulo retângulo de medidas $(1.59, 2.00, 2.49)$ como podemos observar na Figura 4.7.

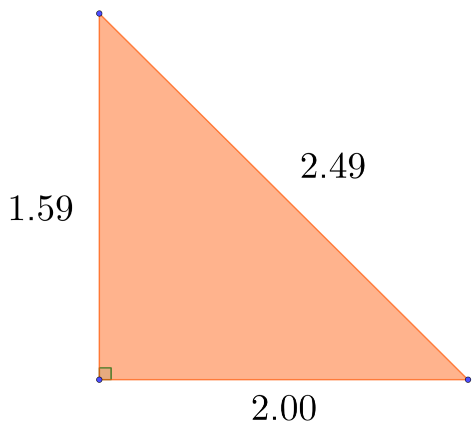


Figura 4.7 – Triângulo Retângulo (1.59, 2.00, 2.49).

A partir dos resultados obtidos, somos capazes de escrever a primeira linha do tablete Plimpton 322 (Tabela 4.4). Para a obtenção das entradas da segunda linha, seria necessário repetir o procedimento utilizando o par $(m, n) = (1.04; 27)$.

m	n	β	δ	δ^2	b	d	linha
12	5	59.30	1.24.30	1.59.00.15	1.59	2.49	1
1.04	27	58.27.17.30	1.23.46.02.30	1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	1.20.25	2

Tabela 4.4 – Duas primeiras linhas do P322.

4.4 Colunas e linhas faltantes

Ainda observando a Tabela 4.4 com $m, n, \beta, \delta, \delta^2, b, d$ e linhas, ainda fica uma certa dúvida em relação à ordem seguida nas linhas do P322. Por que o primeiro par de recíprocos utilizado para obter os valores de P322 é $(5, 12)$? Por que logo após vem

Figura 4.8 – Parte de trás do P322.

$(27, 1.04)$? O que poderiam ser as colunas que visivelmente continuam no verso do tablete (Figura 4.8) mas não estão preenchidas?

A sugestão de que deveriam ser os conteúdos das duas colunas faltantes foi feita primeiramente por Friberg (1981), foi também apoiada por Britton, Proust e Snider (2011) e por fim por Mansfield e Wildberger (2017), que além de estarem de acordo com esta interpretação, também concordavam com o argumento de que P322 deveria ter sido preenchido, originalmente, por mais 23 linhas, que teriam sido obtidas como sugeriu Price (1964), um argumento que provavelmente responderia a última pergunta do parágafo anterior.

Ao estudar o conteúdo do tablete P322, Price (1964) foi capaz de observar que os parâmetros (m, n) teriam sido posicionados e organizados de forma ordenada, mesmo que aparentemente os valores absolutos estivessem fora de ordem. Além disso, percebeu que se ele os restringisse, tal que, $1 < n < 60$ e $1 < m \cdot \overline{n} < 2.24 \approx 1 + \sqrt{2}$, então 38 ternos satisfariam a condição. A organização seria perceptível ao olharmos para as razões de m/n, que decresce de maneira constante. A coluna δ^2 decresce uniformemente devido às propriedades dos números regulares.

Se os parâmetros m e n consideram todos os valores inteiros em um determinado intervalo, e são primos entre si, ambos não ímpares, com $m > n > 0$, então a Equação 4.3 gerará todos os ternos Pitagóricos reduzidos. Aqui também, é preciso levar em consideração a propriedade dos números regulares, m, n, uma vez que já vimos que pares de recíprocos foram utilizados para gerar a coluna δ^2.

E por fim, a seguir temos que o algoritmo apresentado seria o utilizado pelo escriba, a partir dos valores de n e m para criar o tablete Plimpton 322.

1. Selecione o valor de n, seguindo a tabela de recíprocos padrão.
2. Observe as condições determinadas por de Solla Price e encontre os valores de m que as satisfaçam e depois encontre seu recíproco $\overline{m}$.
3. Encontre o par $(m\overline{n}, \overline{m}n)$.
4. Remova os valores que forem duplicados de $(m\overline{n}, \overline{m}n)$.
5. Calcule os valores de β e δ.
6. Organize os valores obtidos de (β, δ) em ordem decrescente e você obterá os 38 termos que supostamente deveria estar no tablete P322.

Podemos ver a aplicação no exemplo abaixo:

Exemplo 4.4.1. $(n, \overline{n}) = (2, 30)$.

Se $(n, \overline{n}) = (2, 30)$, então observando as condições determinadas por de Solla Price encontramos os valores que as satisfazem, sendo o primeiro $(m, \overline{m}) = (3, 20)$ e o segundo $(m, \overline{m}) = (4, 15)$.

Como encontramos os valores para $(m, \overline{m})$ e já tínhamos $(n, \overline{n})$, podemos definir o pares $(m\overline{n}, \overline{m}n)$. Para $(m, \overline{m}) = (3, 20)$, $(m\overline{n}, \overline{m}n) = (1.30, 40)$, e para $(m, \overline{m}) = (4, 15)$, $(m\overline{n}, \overline{m}n) = (2.00, 30)$.

Agora precisamos calcular os valores de β e δ. E para isso, sabemos que para o primeiro caso

$$\beta = \frac{m\overline{n} - n\overline{m}}{2} = \frac{1.30 - 40}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ e}$$

$$\delta = \frac{m\overline{n} + n\overline{m}}{2} = \frac{1.30 + 40}{2} = \frac{2.10}{2} = 1.05.$$

E que para o segundo caso,

$$\beta = \frac{m\overline{n} - n\overline{m}}{2} = \frac{2.00 - 30}{2} = \frac{1.30}{2} = 45 \text{ e}$$

$$\delta = \frac{m\overline{n} + n\overline{m}}{2} = \frac{2.00 + 30}{2} = \frac{2.30}{2} = 1.15.$$

Logo, chegamos a dois pares de (β, δ) presentes no P322 (Tabela 4.5), o primeiro caso gerando a linha 11, em que $(\beta, \delta) = (25, 1.05)$ e o segundo caso gerando a linha 22, em que $(\beta, \delta) = (45, 1.15)$.

Observando os 38 pares de parâmetros que estão dentro das limitações desenvolvidas por de Solla Price, e sabendo que de fato as 15 primeiras correspondem exatamente às 15 primeiras entradas da coluna δ^2 do tablete P322, é realmente plausível e aceitável que fiquemos inclinados a concluir que Plimpton 322 é um tablete que estaria incompleto e, portanto, poderia ter sido preenchido com mais linhas na sua parte posterior.

4.5 Próposito/Utilidade de P322

Depois de adentrarmos um pouco mais a complexidade da matemática babilônica, quando olhamos para o tablete Plimpton 322, fica difícil não nos questionarmos sobre seu propósito e objetivo, afinal de contas, foi necessário que alguns conceitos se unissem para que se chegasse a um material denso e com tantas informações como o analisado.

Não é sem motivo que muitos argumentos em relação à funcionalidade e ao propósito do tablete Plimpton 322 foram levantados ao longo dos anos desde que este foi descoberto. Diversos pesquisadores e historiadores matemáticos buscaram compreender o significado desse tipo de material, mas sua compreensão vai muito além do que apenas a leitura dos números escritos nele. É necessário que se entenda o contexto histórico e cultural, além da estrutura de sociedade da época e muitos outros fatores que influenciavam em como os povos da antiga Mesopotâmia pensavam em Matemática.

Friberg (1981) defendeu inicialmente a ideia de que P322 seria uma tabela de classificação de triângulos retângulos normalizados considerando certas condições. Entretanto, alguns anos depois Buck (1980), Robson (2002) e Friberg (2007), apresentaram que P322 teria servido como uma tabela auxiliar para que os professores da época pudessem conferir problemas do tipo “igi-igibi” (como aquele apresentado na Seção 6.1).

Friberg (2007) apresentou que P322 é uma tabulação de parâmetros com a finalidade de se calcular raízes quadradas, seguindo o algoritmo da raiz quadrada.

Britton, Proust e Snider (2011) propuseram que as colunas com b e d poderiam ser soluções para algum problema mais desafiador envolvendo triângulos retângulos normalizados com diagonal δ e largura β, e um retângulo simplificado com diagonal d e largura b.

Já alguns outros autores levantam a possibilidade de que P322 foi uma tabela trigonométrica, apesar de a matemática babilônica não apresentar um panorama conceitual para a medida de ângulo (ROBSON, 2002).

Mas, segundo a visão de Mansfield e Wildberger (2017, p. 410), a possibilidade de que P322 seja uma tabela trigonométrica sexagesimal exata, sem assumir a medição baseada no círculo e no sistema baseado em ângulos, é algo que deveria ser levado em consideração: “Não há evidência histórica conhecida que confirme como P322 foi realmente usado. Esta é uma questão que deve ser respondida pela arqueologia, ou por futuras descobertas em tabletes existentes. Mas podemos abrir a possibilidade para uma interpretação trigonométrica."

Ao defender esse pensamento e então pensar de forma prática, considerando as colunas "teoricamente" faltantes de P322, os parâmetros β, δ e também δ^2 como ponto inicial, qualquer uma das colunas e linhas pode ser determinada de alguma forma pelas razões geradas pelos lados do triângulo retângulo.

A Tabela 4.5 é o P322 caso ele realmente tivesse as 38 linhas como vimos na Seção Colunas/linhas faltantes, e a usaremos para observar algumas possiblidades de aplicação.

Como já vimos, os valores de (β,δ) e (b,d) representam a diagonal e um dos lados de um triângulo retângulo. Sendo (β,δ) um triângulo retângulo de lados (β, 1, δ) e (b, d) um triângulo retângulo de lados (b, l, d).

Vimos anteriormente que a partir dos valores de (β,δ), aplicando o algoritmo "trailing part" chegamos aos valores de (b,d) após removermos fatores regulares comuns (l). Logo, o l é um escalar entre os triângulos retângulos (β, 1, δ) e (b, l, d).

Exemplo 4.5.1. (BM 96957 + VAT 6598)

Tome, por exemplo, $\beta = b/l$ e então, apliquemos isso novamente aos mesmos problemas apresentados no capítulo que apresenta o método do lado quadrado.

Problema 1. Qual a diagonal d do triângulo retângulo que possui $b = 10$ e $l = 40$?

Solução: Calculamos $\beta = b/l = 10/40 = 0;15$ e então pesquisamos no tablete pelo triângulo normalizado que possui o β_n mais próximo. Neste caso encontramos a linha do $k = 30$ que apresenta os seguintes valores

$$(\beta_{30}, 1, \delta_{30}) = (14.57.45, 1.00.00.00, 1.01.50.15).$$

Como o valor de β encontrado foi de $0;15$, ajustamos a grandeza dos valores da linha 30 do tablete multiplicando pelo escalar 60^{-3}, obtendo $(0;14.57.45, 1, 1;01.50.15)$. Redefinindo a escala deste retângulo normalizado pelo escalar $l = 40$, conseguimos definir um valor aproximado para d.

$$(b, l, d) = (\beta_{30}, 1, \delta_{30}) \times l = (0;14.57.45, 1, 1;01.50.15) \times 40 =$$

$$= (9;58.30, 40, 41;13.30),$$

logo, $d = 41;13.30$.

β	δ	δ^2	b	d	linha
59.30	1.24.30	1.59.00.15	1.59	2.49	1
58.27.17.30	1.23.46.02.30	1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	1.20.25	2
57.30.45	1.23.06.45	1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	3
56.29.04	1.22.24.16	1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	4
54.10	1.20.50	1.48.54.01.40	1.05	1.37	5
53.10	1.20.10	1.47.06.41.40	5.19	8.01	6
50.54.40	1.18.41.20	1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	7
49.56.15	1.18.03.45	1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	8
48.06	1.16.54	1.38.33.36.36	8.01	12.49	9
45.56.06.40	1.15.33.53.20	1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	10
45	1.15	1.33.45	45	1.15	11
41.58.30	1.13.13.30	1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	12
40.15	1.12.15	1.27.00.03.45	2.41	4.49	13
39.21.20	1.11.15.20	1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	14
37.20	1.10.40	1.23.13.46.40	28	53	15
36.27.30	1.10.12.30	1.22.09.12.36.15	2.55	5.37	16
32.50.50	1.08.24.10	1.17.58.56.24.01.40	7.53	16.25	17
32	1.08	1.17.04	8	17	18
30.04.53.20	1.07.07.06.40	1.15.04.53.43.54.04.26.40	1.07.41	2.31.01	19
29.15	1.06.45	1.14.15.33.45	39	1.29	20
27.40.30	1.06.04.30	1.12.45.54.20.15	6.09	14.41	21
25	1.05	1.10.25	5	13	22
24.11.40	1.04.41.40	1.09.45.22.16.06.40	14.31	38.49	23
22.22	1.04.02	1.08.20.16.04	11.11	32.01	24
21.34.22.30	1.03.45.37.30	1.07.45.23.26.38.26.15	34.31	1.42.01	25
20.51.15	1.03.31.15	1.07.14.53.46.33.45	16.41	50.49	26
20.04	1.03.16	1.06.42.40.16	5.01	15.49	27
18.16.40	1.02.43.20	1.05.34.04.37.46.40	5.29	18.49	28
17.30	1.02.30	1.05.06.15	7	25	29
14.57.45	1.01.50.15	1.03.43.52.35.03.45	6.39	27.29	30
13.30	1.01.30	1.03.02.15	9	41	31
11	1.01	1.02.01	11	1.01	32
10.14.35	1.00.52.05	1.01.44.55.12.40.25	4.55	29.13	33
7.05	1.00.25	1.00.50.10.25	17	2.25	34
6.20	1.00.20	1.00.40.06.40	19	3.01	35
4.37.20	1.00.10.40	1.00.21.21.53.46.40	52	11.17	36
3.52.30	1.00.07.30	1.00.15.00.56.15	31	8.01	37
2.27	1.00.03	1.00.06.00.09	49	20.01	38

Tabela 4.5 – As 38 linhas de P322.

Problema 2. Supondo $d = 41.15$ e $l = 40$. Então qual o lado b do triângulo?

Solução: Primeiro calculamos a razão $\delta = d/l = 41.15/40 = 1;01.52.30$, então pesquisamos pelo triângulo normalizado que possua o valor mais próximo de δ_n. Este é novamente $(\beta_{30}, 1, \delta_{30})$. Redefinimos a escala deste retângulo normalizado pelo escalar $l = 40$, e obtemos, assim, a aproximação do lado curto do triângulo,

$$b \simeq l \times \beta_{30} = 9;58.30.$$

Problema 3. Suponha que $b = 10$ e $d = 41;15$. Qual o lado l do triângulo?

Solução: Primeiro encontramos a razão $d/b = 41;15/10 = 4;07.30$. A razão ao quadrado é $(d/b)^2 = 17;00.56.15$.

Se dividirmos a equação $d^2 = l^2 + b^2$ por b^2 teremos que $(d/b)^2 = (l/b)^2 + 1^2$. Com isso, temos, $(l/b)^2 = 17;00.56.15 - 1 = 16;00.56.15$. Podemos manipular um pouco mais a equação e rearanjá-la da seguinte maneira

$$\left(\frac{b}{l}\right)^2 \times 16;00.56.15 = 1.$$

Como $\beta = b/l$, então β^2 é recíproco de 16;00.56.15.

O valor de β^2 é aproximadamente $\beta^2 \simeq 0;3.45$, se considerarmos o recíproco de 16. Outra relação que temos é que $\beta^2 + 1^2 = \delta^2$ e como valores de δ^2 são fornecidos por P322, podemos encontrar δ^2 e então encontrar l.

$$\delta^2 \simeq 1 + \beta^2 = 1 + 0;3.45 = 1;03.45.$$

Consultando o tablete, encontramos que o valor mais aproximado, dado pela coluna δ^2, é $\delta_{30}^2 = 1;03.43.52$. Descobrindo que a linha com a melhor aproximação é a linha $k = 30$, é possível obter as aproximações para os valores de β e δ e consequentemente descobrir um valor aproximado para l.

Pela regra do lado quadrado $d^2 = l^2 + b^2$ podemos simplificar essa relação da seguinte maneira

$$l^2 = d^2 - b^2$$

e dividindo ambos os lados por l temos

$$l = \frac{d}{l} \times d - \frac{b}{l} \times b.$$

Como sabemos os valores de b e d pelo enunciado do problema, que $d/l = \delta$ e $b/l = \beta$ podemos rescrever l como sendo

$$l \simeq \delta_n \times d - \beta_n \times b = \delta_{30} \times d - \beta_{30} \times b =$$

$$= 1.01.50.15 \times 41;15 - 14.57.45 \times 10 = 40;01.10.18.45.$$

Observando a aplicação do tablete para a resolução dos três problemas anteriores, notamos que P322 permite a obtenção de resultados com uma precisão muito relevante.

Ao considerarmos a possibilidade deste tablete ter sido uma tabela trigonométrica, e se realizarmos uma comparação deste com a tabela de seno (Tabela 4.6) que foi criada por um matemático indiano, Madhava (1350), 3.000 anos depois de P322, fica um pouco mais evidente de como Plimpton 322 era um material com cálculos muito precisos e de muita relevância.

Ângulo (°)	Seno	Ângulo (°)	Seno
03,75	0,06540314	48,75	0,75183985
07,50	0,13052623	52,50	0,79335631
11,25	0,19509032	56,25	0,83146960
15,00	0,25881900	60,00	0,86602543
18,75	0,32143947	63,25	0,89687275
22,50	0,38268340	67,50	0,92387954
26,25	0,44228865	71,25	0,94693016
30,00	0,49999998	75,00	0,96592581
33,75	0,55557022	78,75	0,98078527
37,50	0,60876139	82,50	0,99144487
41,25	0,65934580	86,25	0,99785895
45,00	0,70710681	90,00	0,99999997

Tabela 4.6 – Tabela de seno de Madhava

Em duas aplicações, que levam em conta aspectos da arquitetura da Antiga Babilônia e do Antigo Egito, é possível comparar ambos os tabletes e verificar que a precisão de P322 é maior que a da tabela de senos do Madhava.

Exemplo 4.5.2. Na Antiga Babilônia, os zigurates eram templos que faziam parte da arquitetura da época. Sua construção era feita em vários andares, sendo que a área do andar inferior era sempre maior que a do andar superior. Consideremos que uma rampa levando até o topo de um muro de um zigurate mede 65 côvados, e a altura vertical desse muro é de 54 côvados (Figura 4.9). Qual a distância x que vai da base de fora da rampa até o ponto diretamente abaixo do topo do muro?

Solução: (Usando a tabela de Madhava)

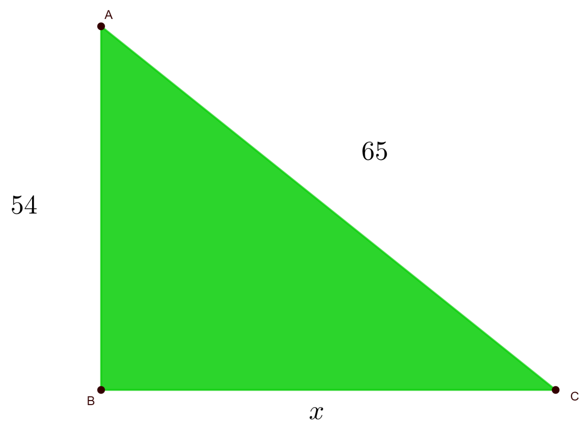


Figura 4.9 – Representação geométrica do exemplo 4.5.2.

Chamemos o ângulo $A\widehat{C}B = \theta$, logo temos através da tabela dos senos que sen$\theta = 54/65 \simeq 0,8308$. Observando a tabela, o valor mais próximo encontrado é o de $\text{sen}(56,25°) \simeq 0,83146960$, e portanto $\theta \simeq 56,25°$. É necessário que se encontre o ângulo complementar a $\theta \simeq 56,25°$, que seria $90 - \theta = 90 - 56,25° = 33,75°$. Consultando novamente a tabela, obtém-se que $\text{sen}(33,75°) \simeq 0,55557022$.

Se $\text{sen}(33,75°) = x/65 \simeq 0,5556$ então $x \simeq 65 \cdot 0,5556 = 36,1140$.

Solução: (Usando o tablete P322)

Chamemos $d = 65$, $l = 54$ e $b = x$. A partir disso podemos calcular $\delta = d/l = 65/54 = 1;12.13.20 \ \ (\simeq 1,2037)$. Consultando a coluna δ vemos que o valor mais próximo contido nela é o da linha 13, em que $\delta = 1;12.15 \ \ (\simeq 1,2041)$.

Para calcularmos o valor de b, sabemos que $\beta = b/l$, e como a linha 13 nos dá um valor de $\beta = 0;40.15$, o valor de b será dado por $b = 0;40.15 \times 54 = 36;13.30 \ \ (0,6708 \times 54 = 36,2232)$.

Solução: (Calculadora)

Sabemos que $x = \sqrt{65^2 - 54^2} \simeq 36,1801$.

Comparando os valores obtidos através da tabela de senos e do P322 a partir do erro relativo, vemos que o P322 (0,12%) permite um resultado de maior precisão que a tabela de Madhava (0,18%).

Exemplo 4.5.3. Consideremos agora a Pirâmide Quéops, ou mais conhecida como Pirâmide de Gizé, que possuía inicialmente uma altura de 140 m e largura da base 230 m (Figura 4.10). Qual o comprimento de a, uma aresta desta mesma pirâmide?

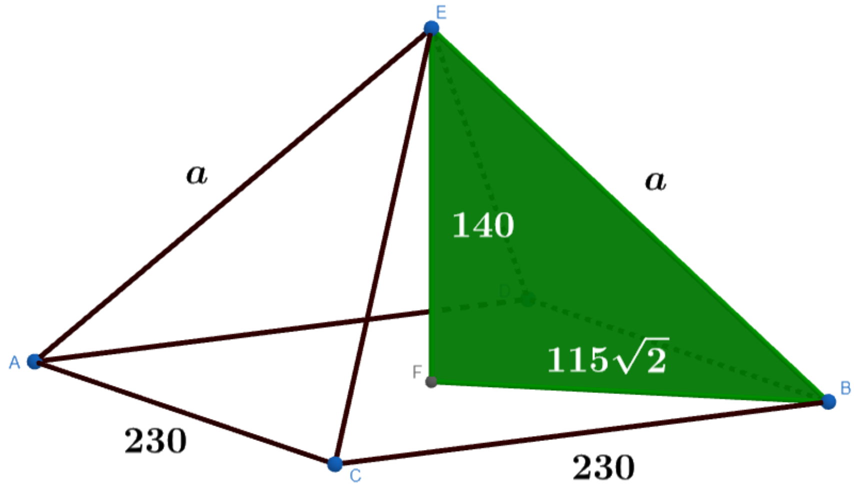


Figura 4.10 – Representação geométrica da pirâmide.

Solução: (Usando a tabela de Madhava)

Sabendo por construção geométrica que $\text{sen}(45°) = \sqrt{2}/2$, através da tabela de Madhava podemos aproximar um valor para $\sqrt{2}$. Segundo a tabela, $\text{sen}(45°) \simeq 0,70710681$, então $\sqrt{2} \simeq 2 \times 0,70710681 = 1,41421362$. Com isso, podemos resolver o problema apresentado, uma vez que a medida da diagonal da base quadrada envolve $\sqrt{2}$. Como os lados da base medem 230 m, a metade da diagonal será $115\sqrt{2}$, e se aplicarmos a aproximação obtida, teremos o seguinte valor: $115 \times \sqrt{2} \simeq 115 \times 1,41421362 = 162,634566$.

A razão entre a altura da pirâmide e a metade da diagonal da base corresponde ao valor da tangente do ângulo formado pela base e a aresta lateral da pirâmide.

Chamando este ângulo θ, temos

$$\text{tg}\theta \simeq \frac{140}{162,634566} \simeq 0,860826.$$

Sabemos que $\text{tg}\theta = \text{sen}\theta/\cos\theta = \text{sen}\theta/\text{sen}(90-\theta)$, e observando a Tabela 4.6, o valor de θ que se permitiria ter um resultado mais próximo de $0,9000$ seria quando $\theta = 41,25°$, já que $\text{tg}(41,25°) = \text{sen}(41,25°)/\text{sen}(48,75°) = 0,8770$.

Tomando então, $\theta = 41,25°$, temos que o comprimento da aresta é:

$$a \simeq \frac{140}{\text{sen}(41,25°)} \simeq \frac{140}{0,6593} \simeq 212,3464.$$

Solução: (Usando o tablete P322)

Considerando o triângulo formado pelo canto, pelo centro da base e o topo da pirâmide, temos que os lados correspondentes com P322 são: $b = 140$, $l = 115\sqrt{2}$ e $d = a$.

A partir disso podemos realizar os cálculos necessários.

Primeiro, calculemos $l^2 = 115^2 \times 2 = 7.20.50$ $(= 26450)$, $b^2 = 140^2 = 5.26.40$ $(= 19600)$.

Temos que $\beta = b/l$, logo, $\beta^2 = (b/l)^2$, e temos ainda que $\beta^2 + 1^2 = \delta^2$.

Calculando $\beta^2 = 5.26.40/7.20.50 \simeq 0;44.27.40.29$, podemos definir $\delta^2 = 1;44.27.40.29$.

Consultando a tabela de P322, encontramos o valor mais aproximado na linha 5, nos permitindo encontrar os valores de $\beta = 50.54.40, \delta = 1.18.41.20, b = 38.11$ e $d = 59.01$.

Comparando as razões, temos

$$\frac{a}{2.20} \simeq \frac{d}{b} = \frac{59.01}{38.11}$$

e então $a \simeq 3.36;23.09.05.20 \simeq 216,385858$ metros.

Solução: (Calculadora)

Uma resposta com precisão de 6 casas decimais é 214,592637 metros, então, a partir da comparação do erro relativo entre o valor real e os valores obtidos é possível ver que a precisão de P322 (0,8%) é um pouco melhor que a da tabela de senos de Madhava (1,0%).

Novamente é possível notar que o Tablete P322 possui uma aproximação mais precisa que a tabela de Madhava, e isso pode se dar a algumas razões, como por exemplo o fato de P322 possuir, se considerarmos sua forma integral, 38 linhas em contraste com as 24 da tabela de senos. Outro motivo que talvez reduza a precisão é que essa tabela apresenta valores de seno, o que é muito propício, mas ainda assim limitados, de forma que quando precisamos calcular a tangente de um ângulo específico haveria acúmulo de erros, já que traz aproximações apenas de senos, amplificando esse aspecto, enquanto o P322 contém a característica de seus cálculos serem voltados para a precisão.

5 Propostas para a Aplicação no Ensino da Matemática Contemporâneo

5.1 Proposta de Plano de Aula 1

5.1.1 Objetivo

Compreender os conceitos de diferentes bases numéricas, focando principalmente no sistema de numeração sexagesimal e decimal. Além disso, realizar cálculos utilizando a base 60 aplicados a situações relacionadas a nossa contagem de tempo (horas, minutos e segundos).

5.1.2 Metodologia

Será dada uma aula sobre bases numéricas e valor posicional, juntamente a isso será proposto que os alunos façam uma atividade de pesquisa e modelagem matemática. A partir desta atividade, os alunos serão capazes de compreender como acontece a representação de um mesmo número em bases diferentes. É sugerido que se aplique esta atividade para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, com duração de duas aulas de 50 minutos cada. Os recursos necessários para a aplicação da atividade são: ábaco adaptado para as bases necessárias, papel e lápis.

5.1.3 Pré-requisitos

Ser capaz de realizar operações básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) no Conjunto dos Reais. Compreender que nosso sistema de contagem de tempo é medido em horas, minutos e segundos.

5.1.4 Fundamentação Teórica

Esta proposta de atividade baseia-se na dissertação de mestrado da aluna Ana Cláudia Piau Candido, que aborda aspectos da matemática da antiga Mesopotâmia, que possuía como sistema de numeração mais utilizado o sistema sexagesimal.

Esse sistema ainda é utilizado quando lidamos com nosso sistema de contagem de tempo. Os babilônios construíram um relógio de sol, que ao longo do dia gerava sombras de comprimentos diferentes, conforme a movimentação do sol, e então, durante a parte clara do dia, se utilizavam deste conhecimento, e para a parte noturna, se utilizavam de um conjunto de estrelas. A partir da observação das sombras, resolveram dividir em 12 partes (a parte clara do dia) e em 12 partes (a parte escura do dia), um número muito propício para a precisão dos cálculos que precisariam realizar, uma vez que utilizavam os sistemas duodecimal e sexagesimal. Com o sistema sexagesimal, dividiram cada hora em 60 minutos e então cada minuto em 60 segundos.

Faz parte do cotidiano de todas as pessoas, afinal, todos estão submetidos ao sistema de contagem de tempo a todos os instantes. A atividade propõe exatamente isso: entender como mesmos números são escritos de forma diferente em bases diferentes. Operar com horas no sistema sexagesimal e aprender a realizar conversões de uma base para outra, podendo observar as equivalências entre os dois sistemas de numeração (decimal e sexagesimal).

5.1.5 Material teórico

Sistemas de numeração

O conceito de base numérica sempre é importante quando estamos lidando com diferentes civilizações. O nosso sistema de numeração é o decimal, e o aprendemos desde o início de nossas vidas, de forma que fiquemos habituados a ele e não tenhamos problemas para realizar operações ou para contarmos. Mas quando olhamos para outras civilizações vemos que estas possuíam diferentes formas de expressarem suas contagens, os maias utilizavam um sistema de numeração vigesimal e os sumérios/babilônios um sistema sexagesimal.

Um sistema numérico recebe seu nome baseado na quantidade de algarismos que aquele sistema possui, logo, o decimal, ou base 10, é assim chamado por possuir 10 algarismos distintos, e o sexagesimal, ou base 60, por possuir 60 algarismos. Estes 10 e 60 algarismos diferentes são responsáveis por expressarem todos os números do seu sistema de numeração (Figura 5.1).

Valor Posicional

Os Babilônios possuíam um sistema de numeração posicional (provavelmente o primeiro sistema posicional criado), o que implica que eles tinham estabelecido o conceito de ordem, uma vez que o valor de um algarismo é definido pela posição que este ocupa dentro de um número, e a partir deste conceito estabelecido eles eram capazes de representar qualquer número dentro do contexto deles.

Base

Uma base numérica representa e indica quantos algarismos um determinado sistema de numeração terá para representar todos seus números.

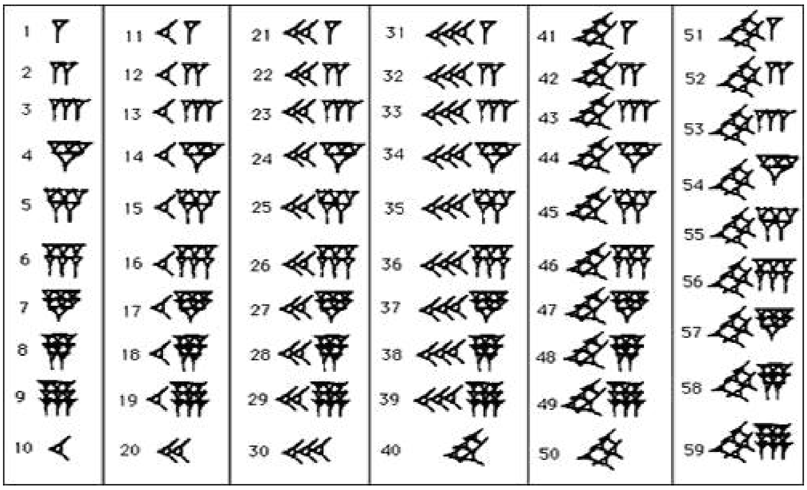


Figura 5.1 – Algarismos do sistema sexagesimal babilônico

De maneira mais formal, um sistema numérico é tido por base *N*, se ele possuir *N* algarismos distintos que são capazes de representar qualquer número com a combinação destes algarismos.

Sistema Decimal (base 10)

O sistema decimal, que utilizamos, é composto por dez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), que combinados resultam em todos os números. Os números são escritos considerando potências de 10.

Os números podem ser sempre decompostos da seguinte forma, considerando o valor posicional de cada algarismo:

$$15 = \mathbf{1} \times 10^1 + \mathbf{5} \times 10^0.$$

$$249 = \mathbf{2} \times 10^2 + \mathbf{4} \times 10^1 + \mathbf{9} \times 10^0.$$

$$672 = \mathbf{6} \times 10^2 + \mathbf{7} \times 10^1 + \mathbf{2} \times 10^0.$$

$$9823 = \mathbf{9} \times 10^3 + \mathbf{8} \times 10^2 + \mathbf{2} \times 10^1 + \mathbf{3} \times 10^0.$$

Os algarismos que acompanham a potência $10^0 = 1$, são as chamadas **unidades (U)** de um número, já os que acompanham o $10^1 = 10$, são chamados de **dezenas (D)**, os que seguem $10^2 = 100$, são as **centenas (C)**. Estas três ordens compõem uma classe inicial, mas que avança para classes posteriores sempre mantendo a questão da ordem: unidade, dezena e centena. Na Figura 5.2. é possível ver a representação de algumas classes e suas respectivas ordens, e na Tabela 5.1 a legenda da figura.

Por ser um sistema de base 10, temos as relações apresentadas na Tabela 5.2.

A Figura 5.3 mostra a representação do número 249 em um ábaco. Cada setor dele é responsável por uma ordem, começando pela unidade, na mesma sequência que se escrevem os números nos sistema decimal.

Quadro de Ordens e Classes - Sistema Decimal											
Classe dos Bilhões			Classe dos Milhões			Classe dos Milhares			Classe das unidades simples		
12ª ordem	11ª ordem	10ª ordem	9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
CB	DB	UB	CMi	DMi	UMi	CM	DM	UM	C	D	U

Figura 5.2 – Quadro de ordens e classes.

Legenda	
U	Unidade
D	Dezena
C	Centena
UM	Unidade de Milhar
UD	Dezena de Milhar
UC	Centena de Milhar
UMi	Unidade de Milhão
DMi	Dezena de Milhão
CMi	Centena de Milhão
UB	Unidade de Bilhão
DB	Dezena de Bilhão
CB	Centena de Bilhão

Tabela 5.1 – Legenda do Quadro de Ordens e Classes.

1 dezena	10 unidades
1 centena	100 unidades
1 centena	10 dezenas
1 unidade de milhar	1000 unidades

Tabela 5.2 – Relações entre as ordens.

Sistema Binário (base 2)

O sistema binário por ser um sistema de base 2 possui um conjunto de 2 símbolos $(0, 1)$, que combinados resultam em todos os números. Os números são escritos considerando potências de 2.

O número 249 (base 10) é escrito como 11111001 (base 2), para isso precisamos simplesmente lembrar que agora o número não é mais escrito em potências de 10 e sim em potências de 2

$249 = (2^7 \times \mathbf{1}) + (2^6 \times \mathbf{1}) + (2^5 \times \mathbf{1}) + (2^4 \times \mathbf{1}) + (2^3 \times \mathbf{1}) + (2^2 \times \mathbf{0}) + (2^1 \times \mathbf{0}) + (2^0 \times \mathbf{1}) = \mathbf{(11111001)_2}$.

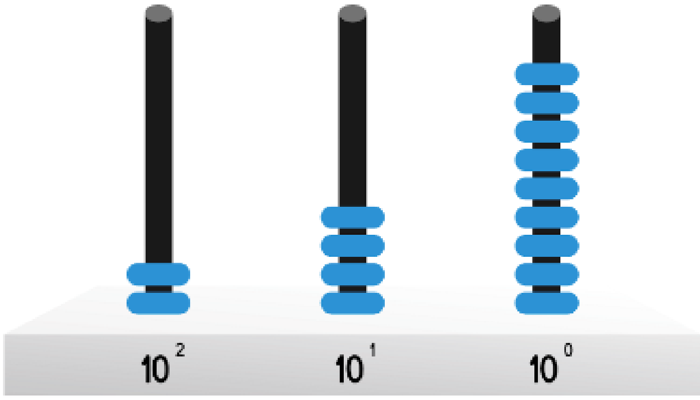


Figura 5.3 – Representação do número 249 no ábaco decimal.

Na Figura 5.4 vemos a representação do número 249 no sistema binário.

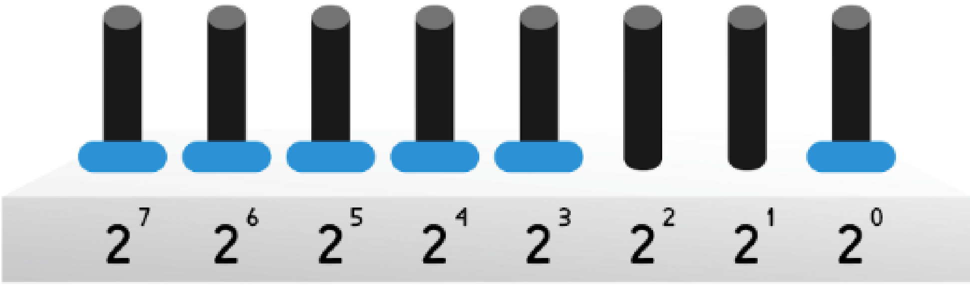


Figura 5.4 – Representação do número 249 no ábaco binário.

Sistema Sexagesimal (base 60)

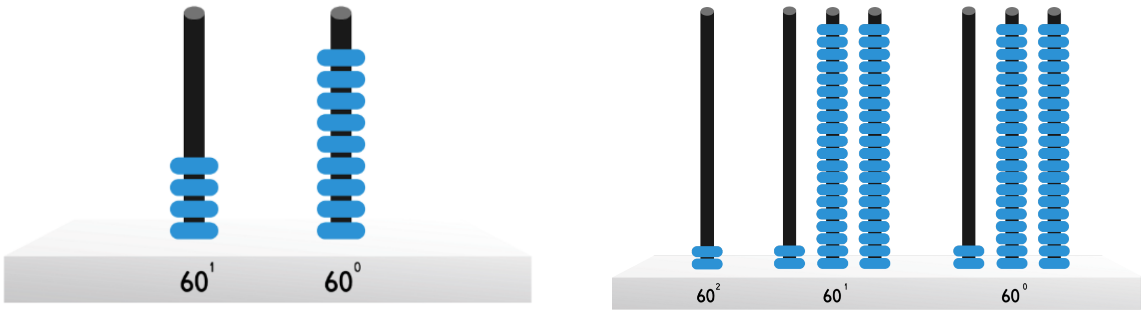
O sistema decimal, que utilizamos, é composto por sessenta símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . . , 55, 56, 57, 58, 59), que combinados resultam em todos os números. Os números são escritos considerando potências de 60.

O número 249 (base 10) é escrito como 4.9 (base 60), para isso precisamos simplesmente lembrar que agora o número não é mais escrito em potências de 10 e sim em potências de 60.

$249 = \mathbf{4} \times 60^1 + \mathbf{9} \times 60^0 = 4.09.$

$9823 = \mathbf{2} \times 60^2 + \mathbf{43} \times 60^1 + \mathbf{43} \times 60^0 = 2.43.43.$

Na Figura 5.5 temos a representação dos números 249 e 9823 (decimal) na base sexagesimal.



(a) 249 (decimal) - 4.09 (sexagesimal). (b) 9823 (decimal) - 1.43.43 (sexagesimal).

Figura 5.5 – Representações de números decimais na base sexagesimal.

Contagem de tempo (hora, minutos, segundos)

O relógio que utilizamos no nosso dia a dia apresenta o tempo no sistema sexagesimal de numeração. A maior unidade de tempo que temos (considerando um relógio comum), é a hora. Em seguida temos os minutos, e por fim os segundos. Estas unidades estão relacionadas de forma que 1 hora é composta por 60 minutos e 1 minuto composto por 60 segundos.

Apesar de o sistema decimal ser o mais utilizado na sociedade atual, ainda existe a aplicação do sistema sexagesimal quando se fala de tempo, horas, minutos e segundos. O contato com este sistema de numeração acontece a partir do momento em que se começa a conviver socialmente e interagir com o meio em que se está inserido.

Sendo assim, é possível que se pense que lidar com esse sistema seria algo completamente natural, assim como se lida com o decimal. Para falar as horas, e compreendê-las quando ditas, na maioria das vezes não existe problema algum, mas se é preciso operar com os números é muito provável que alguma confusão aconteça.

Pense no exemplo de quando se representa "uma hora e meia"; a representação disso no sistema decimal seria 1,5 horas, já no sistema sexagesimal 1 hora e 30 minutos (1;30). Se, antes de assistir um filme, alguém nota que a duração do mesmo é de 200 minutos e ele quer simplificar para horas e minutos, a tarefa já não é tão simples como se esperaria.

Se utilizássemos novamente o exemplo do ábaco sexagesimal para representarmos um período com horas, minutos e segundos, veríamos que as horas seriam a parte inteira, já os minutos e segundos frações dessa hora.

5.1.6 Proposta de Aula

A aula consistirá de duas partes: na primeira, o(a) professor(a) abordará o conteúdo envolvendo base numérica, valor posicional e contagem de tempo, apresentado

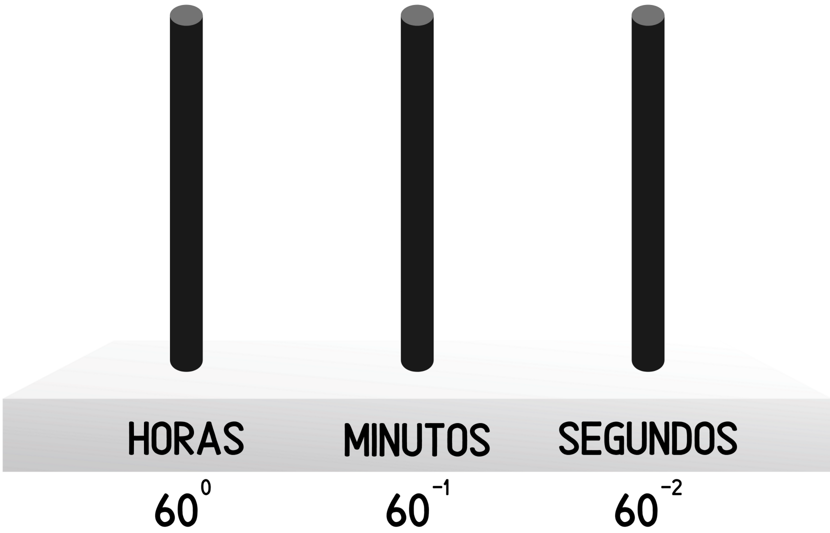


Figura 5.6 – Ábaco representando relação entre horas, minutos e segundos

na fundamentação teórica; na segunda parte o professor apresentará uma proposta de atividade para os alunos. A atividade de aplicação inicialmente será manipulando um ábaco, para que os alunos tenham uma melhor visualização do processo de mudança de base (base 2 para base 10, base 10 para base 60 e vice-versa). Utilizarão o ábaco para representar o tempo, assim como resolverão situações-problema envolvendo horas, minutos e segundos. Para a parte prática, um material de apoio será fornecido.

Conteúdo

Transformando horas no sistema sexagesimal para horas no sistema decimal

Para transformarmos período de tempo que é dado em hora, minutos e segundos (sistema sexagesimal) para o sistema decimal, é necessário que alguns cálculos sejam feitos.

Considere o tempo: x h, y min e z s. Sabendo que h correponde às horas, min corresponde aos minutos e s aos segundos.

Agora, considere que a soma de $x + y + z$ corresponde a hora no sistema decimal, entretanto a unidade de medida de cada variável não é a mesma. Logo, precisa-se transformar minutos e segundos para hora.

A relação entre horas e minutos é dada na Tabela 5.3.

Então, pode-se concluir que para transformar minutos em horas, $k = \dfrac{y}{60}$.

A relação entre horas e segundos é dada na Tabela 5.4.

Horas	Minutos
1	60
k	y

Tabela 5.3 – Relação entre horas e minutos.

Horas	Segundos
1	3600
n	z

Tabela 5.4 – Relação entre horas e minutos.

Então, pode-se concluir que para transformar segundos em horas, precisa-se dividir z por $3600 = 60^{-2}$, de forma que $n = \dfrac{z}{3600}$.

Para termos as horas no sistema decimal, basta somarmos x h + y min + z s = x h + $\dfrac{y}{60}$ h + $\dfrac{z}{60^2}$ h = $\dfrac{60^2 \cdot x + 60 \cdot y + z}{60^2}$ horas.

Aplicação

A aplicação consistirá de duas partes, na primeira o aluno iniciará a atividade com o ábaco (o ábaco não precisa ser exatamente como o representado na figura do material teórico). No ábaco será realizada a representação dos números em diferentes bases, partindo da base 10, seguindo para a base 2 e por fim a base 60.

1. **Divisão dos alunos e materiais necessários**

   Inicialmente, sugere-se que o professor divida os alunos em grupos de 2 ou 3 alunos e então distribua o ábaco para os alunos, com as respectivas peças (talvez seja mais interessante se tiver peças de diferentes cores, para diferentes ordens) . O professor também pode fornecer folhas para o registro dos alunos.

2. **Instrução inicial**

   O professor indicará alguns números na base decimal para que os alunos, intuitivamente, sem uma explicação prévia, representem no material fornecido. Nesse momento, os alunos terão a liberdade de discutirem entre si para realizarem a representação que mais faça sentido para eles.

3. **Devolutiva dos grupos**

   Os grupos compartilharão com os demais grupos e com o professor uma explicação da maneira que eles utilizaram o ábaco para representar os números na base 10.

4. **Ação do professor**

   Dificilmente todos os grupos resolveriam da mesma maneira, então caberia ao professor direcioná-los para que houvesse a percepção de que cada posição dentro do ábaco representa uma potência de base 10, ligando isso ao conceito de ordem e classe dos números no sistema decimal indo-arábico. A partir disso, ele mostraria aos alunos como acontece a representação escrita daquilo que foi representado no material (para realizar isso, o professor poderia utilizar o material de apoio em anexo).

5. **Introdução ao conceito de diferentes bases**

   Uma vez assimilado o conceito de base 10, então, o professor, introduziria o conceito de base numérica, começando pela base 60, podendo-se usar o exemplo da contagem do tempo, para que exista um ponto de referência inicial para os alunos.

6. **Aplicação da base 60 no ábaco**

   Os alunos representariam números em sua forma sexagesimal de sua escolha no ábaco, e os números representados seriam transcritos em função das potência de base 60, conforme a grandeza do número apresentado no ábaco.

7. **Transformação de base**

   A partir da representação escrita em função das potências de base 60 os alunos seriam capazes de transformá-los para base 10, apenas desenvolvendo a expressão obtida.

   Já da base 10 para a base 60 seria preciso haver uma explicação por parte do professor. Uma possibilidade seria distribuir para os alunos peças de duas cores diferentes, para o ábaco, sendo que uma cor corresponderia a 1 e a outra a 60, além de estipular espaços respectivos para as peças de uma determinada cor. A partir disso, os alunos pensariam em possibilidade de representar um número na forma decimal com o material fornecido.

Em seguida da realização da atividade com o ábaco, algumas questões de síntese da atividade podem ser propostas para que os alunos reflitam sobre a atividade realizada.

A seguir apresento algumas possibilidades de questões:

1. O que caracteriza um sistema de numeração posicional?

2. Qual o número máximo de peças que poderíamos ter em uma ordem de um ábaco decimal? E em um ábaco binário? E no sexagesimal?

Na segunda parte, após vermos como funciona a base 60 e como podemos transitar da base decimal para ela e vice-versa, o aluno deverá operar com números na forma sexagesimal, aplicando diretamente ao conceito de horas. O aluno realizará as operações básicas na base 60, além de converter minutos e segundos para horas.

Lista de exercícios

1. Quanto tempo você leva para se arrumar para ir à escola?

Atividade	Duração
Levantar da cama	
Trocar de roupa	
Escovar os dentes	
Outra atividade	

2. Quantos minutos têm uma hora? Quantos segundos têm uma hora?

3. Um jogo de futebol é dividido em dois tempos de 45 minutos cada, além de um intervalo de 15 minutos. Qual a duração total da partida em horas e minutos?

4. João resolveu maratonar as duas primeiras temporadas de Sherlock que possui 3 episódios na primeira e 3 episódios na segunda. Sabendo que a duração de cada episódio é de 90 minutos cada, quanto tempo ele precisou para poder terminar de assistir a todos os episódios?

5. Luana é uma aluna do 7° ano e se atrasou para a aula chegando à escola às 9h30min. Ela chegou atrasada para sua aula 1 hora e 45 minutos. A que horas começava a aula de Luana?

6. Luca, Raul e Manuela marcaram um encontro em um shopping para irem ao cinema. Manuela chegou 45min adiantada e Luca chegou às 18h10min. O filme era às 17h50min. Que horas Manuela chegou ao shopping? Quantos minutos Luca perdeu do filme?

7. Você fará uma prova que possui 30 questões e 3h30min de duração. Qual o tempo médio que você tem para resolver cada uma dessas questões?

8. 1h30min no sistema sexagesimal corresponde a 1,5h no sistema decimal. Quanto corresponde 3h 45min 36s no sistema decimal?

5.2 Proposta de Plano de Aula 2

5.2.1 Objetivo

Considerar a precisão dos cálculos realizados pelos babilônicos, através da utilização de seus tabletes. Comparar a tabela de seno de Madhava e o tablete Plimpton 322, uma tabela possivelmente trigonométrica, mas que não se baseava em ângulos, e a precisão que cada uma oferece. Realizar alguns exercícios de trigonometria e observar a precisão do P322 em comparação com instrumentos de cálculo atuais. A partir desta aula, os alunos serão capazes de compreender aspectos de precisão de cálculos e aproximações, além de parte do contexto histórico da matemática babilônica.

5.2.2 Metodologia

Será dada uma aula histórica sobre parte da Matemática na Antiga Mesopotâmia, principalmente na Babilônia, citando alguns tabletes famosos existentes, Tablete de Recíprocos Padrão, YBC 6967, YBC 9287 e Plimpton 322. A partir desta atividade, os alunos serão capazes de compreender como os babilônios presavam pela precisão em seus cálculos e como isso era possível mesmo há tantos anos atrás. É sugerido que se aplique esta atividade para alunos do 2º ano do Ensino Médio, com duração de duas aulas de 50 minutos cada.

5.2.3 Pré-requisitos

Ser capaz de realizar operações básicas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) no Conjunto dos Reais.

Ter noções básicas de Trigonometria no triângulo retângulo, como seno, cosseno, tangente, e também noções de Geometria Plana e Espacial. Saber aplicar o Teorema de Pitágoras.

5.2.4 Fundamentação Teórica

Esta proposta de atividade baseia-se na dissertação de mestrado da aluna Ana Cláudia Piau Candido, que aborda aspectos da matemática da antiga Mesopotâmia, principalmente o tablete Plimpton 322 e possíveis propósitos para sua construção.

5.2.5 Material teórico

Sistema de numeração

Os babilônios eram grandes estudiosos em diversas áreas, como agricultura, astronomia, arquitetura, matemática, etc, e dentro da área de cálculos, podemos dizer que eles possuíam o princípio de prezar por uma enorme precisão destes. Para que os babilônios pudessem expandir e comandar seu império, eles se tornaram cidadãos capazes de manipular números muito bem. Eles gostavam de resolver problemas práticos de medida e peso, e eles relatavam essas resoluções escrevendo o passo a passo utilizado, como um algoritmo matemático.

Considerando o fator "precisão", e considerando também que naquela época não existiam instrumentos mecânicos ou algum outro tipo de recurso que facilitassem seus cálculos, a escolha de um sistema que permitisse isso de uma forma mais otimizada foi um dos principais motivos pelo qual o sistema na base 60 seria mais ideal que um sistema decimal, por exemplo. Como podemos perceber, ao fatorarmos o número 60 em função de seus fatores primos temos que $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. A partir disso podemos obter todos os 12 divisores de 60: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$. Possuir um número maior de divisores é uma vantagem, pois permite que mais frações possam ser escritas como frações sexagesimais finitas (não dízimas), se comparado, por exemplo, ao sistema decimal, em que $10 = 2 \cdot 5$, possuindo apenas $1, 2, 5, 10$ como divisores. Por efeito de curiosidade, o número 60 é o menor número que possui os números de 1 a 6 como divisores.

Tabletes Babilônicos

O primeiro material que dentro da Matemática da antiga Mesopotâmia era possível encontrar são os tabletes padrões de recíprocos que trazem pares de números dispostos em colunas e linhas. Os números dispostos em uma mesma linha eram chamados de recíprocos, pois satifaziam a condição de que o produto entre eles resultava em 1 ou em alguma potência de 60. Essas tabelas eram muito utilizadas como um auxiliador de cálculos, então os escribas sempre possuíam uma cópia da tabela de recíprocos quando fossem realizar outras operações ou resolver problemas. Sendo assim, é possível encontrar em diferentes museus, semelhantes tabletes contendo estes pares numéricos.

O segundo tablete, o YBC 6967 (Figura 5.7), traz o passo a passo da resulução de um problema do tipo *igi-igibi*. Esse tipo de problema envolve descobrir pares de recíprocos específicos, uma vez que *igi* significa número regular e *igibi* o recíproco do número regular. O problema apresentado no tablete tem como propósito encontrar um par de recíprocos de forma que um número exceda seu recíproco em 7.

O terceiro, e um dos mais famosos e conhecidos tabletes babilônicos, YBC 7289, traz uma aproximação de $\sqrt{2}$, com precisão de 3 casas sexagesimais (o que equivale a 6 casas decimais). Atualmente faz parte da coleção que está na Universidade de Yale (Yale Babylonian Collection) (Figura 5.8). O tablete traz desenhado um quadrado e suas diagonais, informando a medida do lado, que corresponde a 30, e outros dois números.

O quarto é o tablete Plimpton 322, ou P322, e é considerado um dos artefatos

Figura 5.7 – YBC 6967. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2023].

Figura 5.8 – YBC 7289. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2023].

Figura 5.9 – Tablete de argila Plimpton 322. Fonte: [Cuneiform Digital Library Initiative - CDLI 2005].

científicos mais sofisticados do mundo antigo (Figura 5.9), e sua finalidade é motivo de estudo de muitos até hoje. O tablete possui medidas de 12,7 cm por 8,8 cm, e seu conteúdo está escrito no sistema sexagesimal, sendo possível observar que sua disposição está separada em 4 colunas e 15 linhas.

Sobre a composição de sua estrutura, a primeira coluna traz valores que são chamados de *takiltum*, nas segunda e terceira colunas, temos valores que são números que representam ternos pitagóricos. No caso de P322, pares recíprocos foram utilizados para que o cateto menor e a hipotenusa dos triângulos retângulos fossem encontrados.

No título da coluna que representa o *takiltum* há uma inscrição cuja tradução diz o seguinte: "O takiltum da diagonal que foi subtraído de tal forma que a largura surge...". Isso porque o *takiltum* no tablete, o termo se referia a δ^2, de forma que δ correspondia à hipotenusa de um triângulo retângulo, em que um dos catetos tinha medida igual a 1.

As Figuras 5.10 e 5.11 mostram a construção de um problema do tipo "igi-igibi", e como após a manipulação do retângulo inicial eles obtinham um par de recíprocos. O problema a ser resolvido implicava que esses recíprocos tivessem um excedente entre si (um valor excedente inteiro). E a partir da manipulação, é possível construir a Figura 5.11.

Observando a Figura 5.11, é tido que o *takiltum* corresponde ao lado do quadrado menor (construção que pode ser vista no tablete YBC 6967 e desenvolvida passo a passo na dissertação).

Além da coluna que representa o *takiltum*, o tablete P322 em sua forma original é composto por 15 linhas, apesar de alguns estudiosos da área concordarem com o argumento de que P322 deveria ter sido preenchido, originalmente, por mais 23 linhas, que teriam sido obtidas a partir de algumas considerações propostas por Derek de Solla Price (1922 -

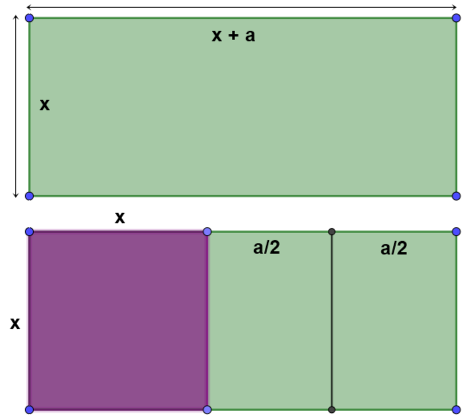


Figura 5.10 – Retângulo de lados x e $x + a$.

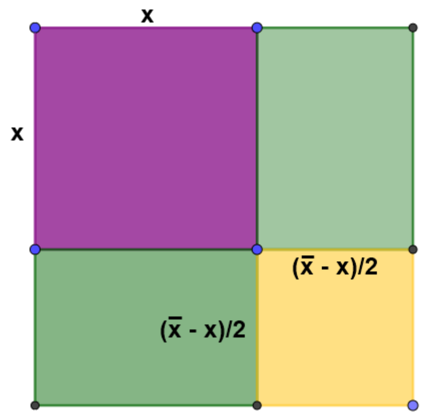


Figura 5.11 – Quadrado formado a partir do retângulo na Figura 5.10.

1983). Na Tabela 5.5 é possível observar como seria caso P322 tivesse de fato as 38 linhas, além da inserção de duas colunas auxiliares (β e δ).

Erro absoluto e relativo

O Plimpton 322 assim como outros tabletes babilônicos apresentavam resoluções de problemas bem precisas, de forma que se faz pertinente o levantamento dessas precisões, comparando inclusive com outras tabelas matemáticas.

Realizar a quantificação dos erros intrínsecos na computação da solução de um dado problema é uma questão fundamental. Para tanto, precisamos definir medidas de erros (ou de exatidão). As medidas de erro mais utilizadas são o erro absoluto e o erro relativo.

O erro absoluto é dado pelo módulo da diferença entre o valor aproximado e o valor real. Já o erro relativo, representa a razão do erro absoluto pelo valor real.

Seja, então, o valor real x e x', sua aproximação. O erro absoluto da aproximação é definido como

β	δ	δ^2	b	d	linha
59.30	1.24.30	1.59.00.15	1.59	2.49	1
58.27.17.30	1.23.46.02.30	1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	1.20.25	2
57.30.45	1.23.06.45	1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	3
56.29.04	1.22.24.16	1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	4
54.10	1.20.50	1.48.54.01.40	1.05	1.37	5
53.10	1.20.10	1.47.06.41.40	5.19	8.01	6
50.54.40	1.18.41.20	1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	7
49.56.15	1.18.03.45	1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	8
48.06	1.16.54	1.38.33.36.36	8.01	12.49	9
45.56.06.40	1.15.33.53.20	1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	10
45	1.15	1.33.45	45	1.15	11
41.58.30	1.13.13.30	1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	12
40.15	1.12.15	1.27.00.03.45	2.41	4.49	13
39.21.20	1.11.15.20	1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	14
37.20	1.10.40	1.23.13.46.40	28	53	15
36.27.30	1.10.12.30	1.22.09.12.36.15	2.55	5.37	16
32.50.50	1.08.24.10	1.17.58.56.24.01.40	7.53	16.25	17
32	1.08	1.17.04	8	17	18
30.04.53.20	1.07.07.06.40	1.15.04.53.43.54.04.26.40	1.07.41	2.31.01	19
29.15	1.06.45	1.14.15.33.45	39	1.29	20
27.40.30	1.06.04.30	1.12.45.54.20.15	6.09	14.41	21
25	1.05	1.10.25	5	13	22
24.11.40	1.04.41.40	1.09.45.22.16.06.40	14.31	38.49	23
22.22	1.04.02	1.08.20.16.04	11.11	32.01	24
21.34.22.30	1.03.45.37.30	1.07.45.23.26.38.26.15	34.31	1.42.01	25
20.51.15	1.03.31.15	1.07.14.53.46.33.45	16.41	50.49	26
20.04	1.03.16	1.06.42.40.16	5.01	15.49	27
18.16.40	1.02.43.20	1.05.34.04.37.46.40	5.29	18.49	28
17.30	1.02.30	1.05.06.15	7	25	29
14.57.45	1.01.50.15	1.03.43.52.35.03.45	6.39	27.29	30
13.30	1.01.30	1.03.02.15	9	41	31
11	1.01	1.02.01	11	1.01	32
10.14.35	1.00.52.05	1.01.44.55.12.40.25	4.55	29.13	33
7.05	1.00.25	1.00.50.10.25	17	2.25	34
6.20	1.00.20	1.00.40.06.40	19	3.01	35
4.37.20	1.00.10.40	1.00.21.21.53.46.40	52	11.17	36
3.52.30	1.00.07.30	1.00.15.00.56.15	31	8.01	37
2.27	1.00.03	1.00.06.00.09	49	20.01	38

Tabela 5.5 – As 38 linhas de P322.

$$|x' - x|.$$

O erro relativo da aproximação é definido como

$$\frac{|x' - x|}{|x|}, x \neq 0.$$

Observe que o erro relativo é adimensional e, muitas vezes, é expresso em porcentagens. Mais precisamente, o erro relativo em porcentagem da aproximação é dado por

$$\frac{|x' - x|}{|x|} \times 100\%.$$

5.2.6 Proposta de Aula

A aula consistirá de duas partes: na primeria, o professor pode escolher a melhor forma de dividir a turma em grupos, para que cada grupo fique responsável por pesquisar sobre um dos tabletes trazidos na introdução teórica, e que tentem relacionar os conteúdos de cada um com pelo menos algum conteúdo que já tenham aprendido. Na segunda parte, o professor traria o aspectos da precisão existente nos tabletes babilônios e introduziria os conceitos de erro relativo e absoluto, aplicado mais especificamente ao tablete Plimpton 322, de maneira que os alunos tenham essa percepção ao resolverem exercícios de trigonometria no triângulo retângulo.

Parte 1

Dividir os alunos em grupos, então distribuir os tabletes para cada grupo respectivamente. Uma vez que essas questões forem definidas, permiir que os alunos se reúnam e tenham acesso a algum material de pesquisa, para que efetuem a proposta de identificar o conteúdo trazido por cada um, e que então realizem alguma relação entre conteúdos que já tenham aprendido.

Parte 2

Aproveitar o que o grupo responsável pelo Plimpton 322 e complementar a informação trazida. Apresentar aos alunos a tabela do P322 completa, e explicar o que cada coluna representa geometricamente.

Mostrar que $(\beta, 1, \delta)$ é um terno Pitagórico (terno babilônico), expresso geometricamente por um triângulo retângulo com catetos β e 1, e hipotenusa igual a δ. Na Figura 5.12 (a), é possível ver um exemplo de triângulo seguindo as especificações acima.

Mostrar que (b, l, d) também é um terno pitagórico, mas que está relacionado com $(\beta, 1, \delta)$, através do escalar l. O exemplo da Figura 5.12 (b) mostra o triângulo (a) multiplicado por um escalar $l = 0;2$, gerando o terno (b, d, l).

Dessa forma podemos tirar as seguintes relações entre as variáveis: $\beta = \frac{b}{l}$, $\delta = \frac{d}{l}$ e $\delta^2 = \frac{d^2}{l^2}$.

Informar que 0;2 é o recíproco de 30 que é o fator comum dos lados com o qual se realiza o algoritmo "trailing part". E que a última coluna é a numeração das linhas.

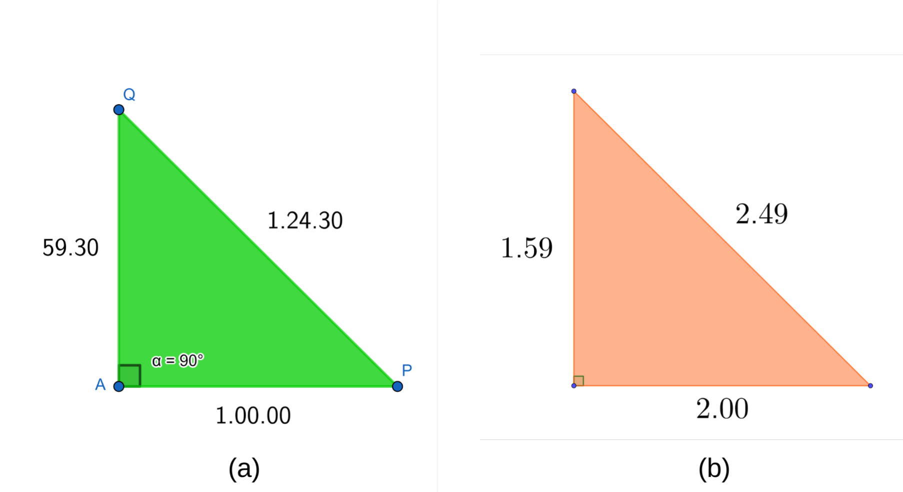


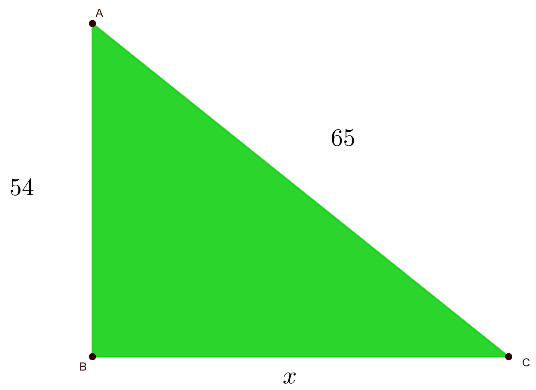
Figura 5.12 – Triângulos representando ternos babilônicos .

Mostrar como determinar o erro absoluto e relativo e realizar uma comparação com a tabela de senos de Madhava (Tabela 4.6).

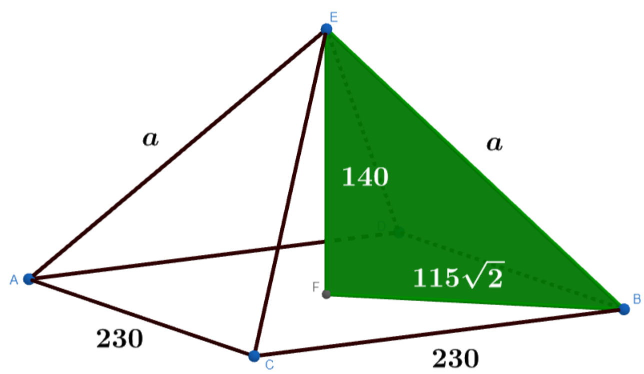
Nesta parte, poderiam ser disponibilizados os exemplos 4.5.2 e 4.5.3 apresentados na dissertação e alguns outros exercícios que envolvam triângulos retângulos de escolha do professor, para que os alunos possam utilizar o P322 nas resoluções e então comparar com as resoluções habituais que os alunos já estão acostumados, realizando por fim os cálculos de erro absoluto e relativo.

Exemplos de exercícios:

1. Na Antiga Babilônia, os zigurates eram templos que faziam parte da arquitetura da época. Sua construção era feita em vários andares, sendo que a área do andar inferior era sempre maior que a do andar superior. Consideremos que uma rampa levando até o topo de um muro de um zigurate mede 65 côvados, e a altura vertical desse muro é de 54 côvados. Qual a distância x que vai da base de fora da rampa até o ponto diretamente abaixo do topo do muro?



2. Consideremos agora a Pirâmide Quéops, ou mais conhecida como Pirâmide de Gizé, que possuía inicialmente uma altura de 140 m e largura da base 230 m. Qual o comprimento de a, uma aresta desta mesma pirâmide?



3. Encontre o que é pedido a seguir utilizando a Tabela 5.5 que trazem as entradas do tablete Plimpton 322, e então realize a comparação do valor obtido com o resultado adquirido a partir do Teorema de Pitágoras.

   a) Determine a medida da diagonal de um retângulo de base 12 cm e altura 8 cm.

   b) Qual a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede 12 cm?

6 Conclusão

Com base nesta viagem adentro da matemática babilônica é possível perceber que todos os tabletes padrões, os tabletes de resoluções de problemas, e principalmente o Plimpton 322, convergem para o ponto de que a civilização da Antiga Mesopotâmia era composta por grandes estudiosos matemáticos que se tornaram referência, não só há milhares de anos atrás mas também para o futuro. Esse passado tão distante ainda traz aspectos que se fazem presentes diariamente. Além disso, cada parte desenvolvida trouxe conceitos que podem ser abordados dentro de sala de aula, mesmo que não estejam contemplados nos planos de aulas desenvolvidos, como os métodos para resoluções de raízes quadradas e até mesmo de equações quadráticas.

Se hoje temos um sistema posicinal, se usamos um sistema sexagesimal para a contagem do tempo, é devido a esse início lá atrás nessa antiga civilização, e nosso povo pode não necessariamente ser descendente direto dela, mas vemos diariamente a influência deixada. E portanto, a escolha de trabalhar este assunto em um dos planos de aula, apesar de parecer algo simples e intrínseco a nós, nos surpreende quando observado no dia-a-dia, uma vez que transformações de base não são nada triviais.

Como parte do objetivo desta dissertação estava a conexão com a educação matemática a organização do trabalho se deu de forma a trazer esses elementos a cada conceito novo trazido. E além disso, foi possível entender propósitos e contextos históricos nos permitiram compreender de forma mais significativa este diferente cotidiano.

Diante dos fatos apresentados no decorrer deste trabalho, espera-se que essa dissertação possa servir como contribuição dentro da educação matemática, pelo fato de organizar muitos conceitos da matemática babilônica em um mesmo documento em português, e também como um estímulo aos estudantes do Ensino Fundamental e Médio e como um suporte pedagógico aos docentes de matemática, a fim de que estes dois grupos possam fazer essa viagem através do tempo e observar aspectos comuns à nossa realidade e outros incomuns que satisfaziam os contextos históricos e as necessidades babilônicas.

Referências

AABOE, A. *Episodes from the Early History of Mathematics*. 1. ed. [S.l.]: Mathematical Association of America, 1998. Citado na página 22.

BRITTON, J. P.; PROUST, C.; SNIDER, S. Plimpton 322: a review and a different perspective. *Archive for history of exact sciences*, v. 65, n. 3, p. 519–566, 2011. Citado na página 48.

BUCK, R. C. Sherlock holmes in babylon. *The American Mathematical Monthly*, v. 87, n. 5, p. 335–345, 1980. Citado na página 50.

CUNEIFORM DIGITAL LIBRARY INITIATIVE - CDLI. *MSCT 1, 076, MS 3874 artifact entry*. Oxford, 2004. Disponível em: <https://cdli.ucla.edu/P252955>. Acesso em: 16 fev. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 16.

CUNEIFORM DIGITAL LIBRARY INITIATIVE - CDLI. *MCT 038, Plimpton 322 artifact entry*. Oxford, 2005. Disponível em: <https://cdli.ucla.edu/P254790>. Acesso em: 16 fev. 2023. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 18 e 71.

CUNEIFORM DIGITAL LIBRARY INITIATIVE - CDLI. *MCT 129 artifact entry*. Oxford, 2023. Disponível em: <https://cdli.ucla.edu/P255041>. Acesso em: 16 fev. 2023. Citado 3 vezes nas páginas 8, 17 e 70.

CUNEIFORM DIGITAL LIBRARY INITIATIVE - CDLI. *MCT 129 artifact entryMCT 042 YBC 07289 artifact entry*. Oxford, 2023. Disponível em: <https://cdli.ucla.edu/P255048>. Acesso em: 16 fev. 2023. Citado 4 vezes nas páginas 8, 17, 28 e 70.

CUNEIFORM DIGITAL LIBRARY INITIATIVE - CDLI. *MKT 3, 014, TMB 057 artifact entry*. Oxford, 2023. Disponível em: <https://cdli.ucla.edu/P254414>. Acesso em: 16 fev. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 26.

FRIBERG, J. Methods and traditions of babylonian mathematics: Plimpton 322, pythagorean triples, and the babylonian triangle parameter equations. *Historia Mathematica*, v. 8, n. 3, p. 277–318, 1981. Citado na página 48.

FRIBERG, J. *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts: manuscripts in the Schøyen collection cuneiform texts I*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 50.

HØYRUP, J. Computational techniques and computational aids in ancient mesopotamia. In: ______. *Computations and Computing Devices in Mathematics Education Before the Advent of Electronic Calculators*. 3rd. ed. Cham: Springer, 2018. v. 11, p. 49–63. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73396-8_3>. Acesso em: 16 fev. 2023. Citado na página 37.

HUNGER, H.; PINGREE, D. *Astral sciences in Mesopotamia*. 1. ed. [S.l.]: Brill, 1999. Citado na página 29.

JÚNIOR, D. *Mesopotâmia: saiba tudo sobre esse berço da civilização humana*. [S.l.], 2021. Disponível em: <https://www.stoodi.com.br/blog/historia/mesopotamia/>. Acesso em: 16 fev. 2023. Citado na página 13.

KATZ, V. J. *A history of mathematics: an introduction*. 3. ed. [S.l.]: Addison-Wesley, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 29.

MANSFIELD, D. F.; WILDBERGER, N. Plimpton 322 is babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*, v. 44, n. 4, p. 395–419, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 10, 39 e 48.

MIEROOP, M. V. d. *King Hammurabi of Babylon: A Biography*. 1. ed. [S.l.]: Blackwell Publishing, 2005. Citado na página 14.

PAULANTI, C. M. *Área das Figuras Planas. Uso da Fórmula de Heron*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2014. Citado na página 33.

PRICE, D. J. S. The babylonian"pythagorean triangle"tablet. *Centaurus*, v. 10, n. 1, p. 219–231, 1964. Citado na página 48.

RATNER, B. Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discoveres it 1000 years before him. *Journal of Targeting, Measurement and Analysis for Marketing*, v. 17, n. 3, p. 229–242, 2009. Citado na página 45.

ROBSON, E. Words and pictures: New light on plimpton 322. *The Mathematical Association of America*, v. 109, n. 1, p. 105–120, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 15, 17 e 50.

ZASLAVSKY, C. *Africa counts: Number and pattern in African cultures*. 3. ed. [S.l.]: Chicago Review Press, 1999. Citado na página 13.

Anexos

MATERIAL DE APOIO

Nome: **Turma:** **Data:**

Preencha a folha com os resultados obtidos no passo a passo da atividade proposta.

Números	Quociente	Resto

Rascunho

Preencha a tabela abaixo com os algarismos pertencentes às respectivas potências.

Nº	___ 7	___ 6	___ 5	___ 4	___ 3	___ 2	___ 1	___ 0

Conforme a decomposição da tabela anterior, escreva o número no retângulo e em seguida a decomposição correspondente em função das potências de 10.

Figura .1 – Material de apoio para Atividade 1