UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ANA PAULA YOSHINAGA

Matemática Financeira No Ensino Médio – Uma Proposta Para Sala De Aula

Campinas
2023

Ana Paula Yoshinaga

Matemática Financeira No Ensino Médio - Uma Proposta Para Sala De Aula

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Roberto Andreani

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Ana Paula Yoshinaga e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Andreani.

Campinas
2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Y83m	Yoshinaga, Ana Paula, 1974- Matemática financeira no ensino médio - uma proposta para sala de aula / Ana Paula Yoshinaga. – Campinas, SP : [s.n.], 2023. Orientador: Roberto Andreani. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Matemática financeira - Estudo e ensino. 2. Matemática financeira - Métodos de ensino. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Financial mathematics in high school - a proposal for the classroom
Palavras-chave em inglês:
Financial mathematics - Study and teaching
Financial mathematics - Teaching methods
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Roberto Andreani [Orientador]
Laércio Luís Vendite
Jamielli Tomaz Pereira
Data de defesa: 08-03-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0002-1023-2342
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/9460544202004394

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 08 de março de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). LAÉRCIO LUÍS VENDITE

Prof(a). Dr(a). JAMIELLI TOMAZ PEREIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Agradeço infinitamente à Fabiana, minha querida irmã, e ao Mateus, meu grande amor. Sem eles eu jamais teria conseguido.

Dedico essa dissertação, com muito carinho, aos meus pais.

Resumo

Numa sociedade imersa em desigualdades sociais é nítida a falta de uma educação financeira sólida que permita que parte da população faça escolhas mais coerentes com as suas possibilidades e se conscientize da exclusão social e econômica que atinge grande parcela dos brasileiros. O conhecimento deste tema permite que o indivíduo entenda como a sua vida pode ser impactada pelos percalços econômicos do país e do mundo, e possa fazer um planejamento econômico familiar para atingir os seus objetivos. Neste sentido, o presente trabalho apresenta um plano de aula sobre Matemática Financeira, com exemplos contextualizados para ser aplicado em sala de aula com alunos do ensino médio, visando desenvolver a capacidade reflexiva dos alunos, e permitir que sejam capazes de resolver problemas cotidianos relacionados ao tema.

Palavras-chave: Juros; Matemática Financeira; Taxa de Juros

Abstract

In a society immersed in social inequalities, it is a clear lack of solid financial education that allows part of the population to make choices more consistent with their possibilities and become aware of the social and economic exclusion that affects a large portion of Brazilians. Knowledge of this topic allows individuals to understand how their lives can be impacted by the economic setbacks in the country and the world, and can carry out a family economic planning to achieve their goals. In this sense, this work presents a Financial Mathematics lesson plan with contextualized examples to be applied in the classroom for high school students, aiming to develop the students' reflective capacity, and allow them to be able to solve everyday problems related to the topic.

Key-words: Interests, Financial Math, Interest Rate

Sumário

Introdução... 10

Capítulo 1 – Um Pouco de História.. 14

1.1 Mundo Antigo – Moeda Mercadoria.. 14

1.2 Moeda de Metal.. 15

1.3 Cerca de Mila anos atrás – Papel Moeda... 17

1.4 Mundo Contemporâneo – Moeda Digital.. 19

Capítulo 2 – Fundamentação Teórica.. 23

2.1 Porcentagem.. 23

2.2 Regimes de Capitalização.. 25

2.2.1 Regime de Juros Simples.. 26

2.2.2 Regime de Juros Compostos... 29

2.2.3 Relação entre Juros Simples e Juros Compostos......................... 32

2.3 Taxas de Juros Equivalente e Proporcional... 33

2.4 Fluxo de Caixa... 35

2.5 Sistemas de Amortização... 40

2.5.1 Sistema de Amortização Constante (SAC).................................... 41

2.5.2 Sistema de Amortização Francês (SAF ou Price)........................... 42

2.6 Plano de Previdência... 45

Capítulo 3 – Plano de Aula.. 48

3.1 Tema.. 49

3.2 Ano... 49

3.3 Tempo de duração.. 49

3.4 Materiais Necessários.. 49

3.5 Objetivo.. 49

3.6 Conhecimento Anterior... 50

3.7 Conteúdos Trabalhados.. 50

3.8 Desenvolvimento.. 50

3.8.1 Aula 1.. 50
3.8.2 Aula 2.. 52
3.8.3 Aula 3.. 54
3.8.4 Aula 4.. 56
3.8.5 Aula 5.. 60
3.8.6 Aula 6.. 61
3.8.7 Aula 7.. 63
3.9 Avaliação.. 70
3.10 Discussão do Plano de Aula.. 70
Considerações Finais.. 72
Referências Bibliográficas.. 73
Apêndice a) Questões Extras.. 76
Apêndice b) Vocabulário.. 82

Introdução

No Brasil, as grandes desigualdades sociais e econômicas observadas são fruto da má distribuição de renda, somada com décadas de baixos investimentos sociais no país. Parte dessas desigualdades poderiam ser amenizadas com políticas públicas que visem condições básicas de alimentação, moradia, saúde, geração de emprego e educação de qualidade e sólida.

Segundo a Pesquisa Nacional de Endividamento e Inadimplência do Consumidor feita pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC), realizada em janeiro de 2021, o percentual de famílias brasileiras inadimplentes chegou a 24,8% (FECOMERCIORN, 2021), isso representa um aumento ao ser comparado aos 22,8% de dezembro de 2018, em pesquisa feita pela mesma entidade (AGÊNCIA BRASIL, 2020).

O empobrecimento da população está atrelado não somente à má organização financeira familiar, mas também à diminuição da renda ocasionada pelo reajuste do salário mínimo que mal se bastou em corrigir a inflação deste período. Em março de 2018 o salário mínimo era de R$ 954,00 e janeiro de 2021, R$ 1039,00, o que representa um aumento de 8,91%, enquanto a inflação acumulada no período (IPCA) foi de 9,02% (IBGE)

É certo, entretanto, que a falta de uma educação financeira sólida só agrava esse problema. De acordo com Bortolotto (2017), a grande maioria dos brasileiros não conhece o conceito de juros compostos e como ele é aplicado, gerando problemas não só para as pessoas, mas também para as empresas, já que os funcionários precisam muitas vezes fazer aquisições de insumos, maquinário e outros bens. E se as empresas perdem dinheiro, acabam gerando menos empregos, aumentando ainda mais a desigualdade no país.

Assim, o conhecimento de Matemática Financeira pode ser um grande aliado das famílias brasileiras, pois pode permitir que decisões simples como comprar um fogão, uma geladeira ou um celular possam ser tomadas utilizando esses conceitos. O ensino de Matemática Financeira com aulas direcionadas para esse contexto pode ajudar o aluno no planejamento familiar e assim permitir que ele encontre melhores oportunidades inclusive de investir o dinheiro que possui.

Apesar de ser um tema de grande interesse dos alunos e estar presente nos planejamentos de aula, o tema Matemática Financeira é frequentemente abordado de forma pouco direcionada, não permitindo que o aluno consiga aplicar os conceitos adquiridos no seu dia a dia. Isso porque a principal fonte de informações (e muitas vezes a única) para o professor é o livro didático, que muitas vezes aborda o tema de forma superficial ou com exemplos e exercícios desconectados da realidade.

Em geral, nos livros didáticos voltados para o Ensino Médio utilizados atualmente no Brasil, a Matemática Financeira é estudada como complemento ao estudo de funções e, em alguns materiais, também em sequências numéricas. No geral, os materiais disponíveis adotam uma sequência padronizada começando por cálculos de porcentagem, acréscimos e descontos percentuais, determinação de taxas, juros simples e juros compostos, as fórmulas são aplicadas através de exercícios desconectados da realidade.

Ainda que os alunos apresentem uma certa dificuldade em assimilar os conteúdos de matemática, principalmente os relacionados com porcentagem e logaritmos, a presença desse tema no cotidiano do aluno, seja dentro da sua própria casa, no seu trabalho ou nas mais diversas situações, faz com que este assunto tenha grande interesse. Assim, um ensino direcionado e robusto de Matemática Financeira é fundamental para que o aluno possa desenvolver um raciocínio reflexivo e possa compreender como a economia do país pode afetar o seu planejamento.

O uso de situações-problemas no ensino da Matemática Financeira é uma abordagem interessante, pois instiga o aluno a repensar as informações que lhe chegam por meio de noticiários, informes bancários e mídias sociais, estimulando-o a questionar o que lhe é apresentado, se a aplicação de determinado juros de dívida ou imposto é justo ou não, qual o propósito da criação de determinado investimento financeiro entre outros, não se limitando apenas ao cálculo mecânico do montante ou dos juros. Assim, a abordagem contextualizada da Matemática Financeira tem um papel sócio-político na formação crítica do aluno do Ensino Médio.

A escolha deste tema se deve à extrema importância que a educação financeira tem para que o indivíduo exerça sua cidadania, e vem ao encontro dos princípios e normas dos documentos oficiais. A Matemática Financeira é a ferramenta de cálculo da educação financeira. Com a sua aplicação é possível abordar temas da realidade, despertando o interesse do aluno.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional, LDB, (BRASIL, 1999), o Art. 2 especifica que a educação "(...) tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho do cidadão". Já no Art. 22, diz que "A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.".

Muito mais que um direito assegurado na legislação, a educação não deve se resumir à simples transmissão de informações ao aluno (MIRANDA e PHILIPPSEN, 2014). É necessário que o professor consiga atrair a atenção do aluno, inserindo os conteúdos de forma contextualizada, para que seja possível envolver o aluno para que ele se torne protagonista do próprio aprendizado.

Nesse sentido, o conceito de Matemática Financeira vai acompanhar o aluno nas mais diversas situações em sua vida, não faltam exemplos para serem trabalhados em sala de aula de forma contextualizada. Tendo como princípio e base que todas as atividades no processo de ensino-aprendizagem devem proporcionar o desenvolvimento de habilidades, é interessante priorizar a qualidade do processo e não a quantidade de conteúdos trabalhados. Esse ensino direcionado é essencial para que os alunos possam se tornar indivíduos com autonomia de escolhas, capazes de tomar decisões que permitam a busca por melhores oportunidades.

Assim, é fundamental que a educação financeira esteja presente na vida do aluno, não somente para que ele possa reconhecer dentre as possibilidades disponíveis no mercado, a que melhor se adequa a sua realidade; como também para que permita-se questionar que a realidade de cada brasileiro é diferente e muitos não têm acesso ao básico para uma vida digna.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de aula a ser trabalhada no ensino médio sobre o tema Matemática Financeira, que possibilite estimular a curiosidade e a participação dos alunos nas aulas de matemática pela introdução de temas relacionados ao seu cotidiano, além de permitir que o aluno compreenda a importância do tema juros compostos e saiba como utilizá-lo em suas decisões, de forma crítica. Para isso são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar fatos históricos relacionados ao surgimento da moeda e a sua relação com a matemática financeira ao longo dos anos, servindo de subsídio ao professor em suas aulas;
2. Apresentar os princípios teóricos do tema, essenciais ao desenvolvimento das aulas, e que deve ser de domínio de todo professor de matemática; e
3. Criar um plano de aula sobre Matemática Financeira direcionado para temas cotidianos que seja adequado ao Ensino Médio, que dê subsídio para o professor trabalhar o conteúdo de forma contextualizada e realista, proporcionando ao aluno o exercício pleno de cidadania. O conteúdo desse plano deve ser composto por diferentes formas de abordagem, utilizando diversas ferramentas de ensino-aprendizagem, permitindo maior interação dos alunos, para assim alcançar um aprendizado mais significativo e menos excludente.

Dessa maneira, a presente dissertação está dividida em três capítulos. O primeiro versa sobre história da Matemática Financeira, o segundo traz o embasamento teórico sobre Matemática Financeira e no terceiro é apresentado um plano de aula sobre o tema Matemática Financeira, relacionando-o com temas cotidianos, para estimular a participação do aluno e o interesse pela disciplina.

Capítulo 1 Um Pouco de História

Ao agregar elementos históricos, as aulas são enriquecidas e o aluno é transportado para outros tempos e descobre como o conhecimento foi evoluindo de acordo com as necessidades das relações humanas.

Estudar a história da matemática financeira é estudar a história da humanidade e de suas relações sociais e comerciais, que se iniciaram antes do surgimento do dinheiro.

Esse capítulo tem por finalidade fornecer um subsídio histórico ao professor, abordar a história da matemática financeira desde as transações de trocas, à criação do dinheiro até chegar no uso da matemática financeira para a resolução de problemas do mundo contemporâneo.

1.1 Mundo Antigo – moeda mercadoria

Pelo que se conhece hoje, os primeiros povos da humanidade tinham um comportamento errante, caçavam utilizando instrumentos de madeira e pedra, colhiam frutas e sementes, usavam cavernas para se proteger e dominavam o fogo. Não havia a linguagem escrita, assim como o conhecimento matemático científico. A Idade da Pedra durou até aproximadamente 3.000 a. C., de acordo com Eves (2011, p. 23), quando então começam a surgir as primeiras comunidades agrícolas surge também a necessidade e oportunidade de desenvolver a matemática e a ciência.

Dentre os povos antigos, alguns são chamados “berços da humanidade”, como os que habitavam o Egito, a Índia, Oriente Médio, Andes e China. Eles desenvolveram a escrita, agricultura, astronomia, tinham práticas comerciais e financeiras utilizadas também na arrecadação de impostos. Os sumérios antigos, apesar de não fazerem demonstrações matemáticas, eram habilidosos na emissão de contratos legais, emissão de faturas, notas promissórias, recibos, escrituras, cálculos de juros simples e compostos.

O início da agricultura acarretou a produção de alimentos além do necessário para a comunidade, gerando o acúmulo. O comércio era realizado através do intercâmbio dessas mercadorias excedentes, chamado escambo. Para que ocorresse o comércio por escambo era necessário que ambas as partes tivessem interesse no que era ofertado e sua quantidade. O conceito para se estipular o valor do produto estava relacionado com a raridade deste e o tempo empregado em sua produção.

Com a chegada da Idade do Ferro, nos séculos finais do segundo milênio a.C., houveram mudanças político e econômicas no mundo antigo. Civilizações como a egípcia e babilônica perderam sua importância dando espaço ao crescimento das civilizações gregas, assírias, fenícias e hebraicas. Surgiram armamentos de guerras mais resistentes, ferramentas agrícolas e o cunho de moedas, o que possibilitou o aumento na produção de mercadorias e o crescimento do comércio.

Com isso, houve a necessidade de uma medida comum para permutar os produtos. Criou-se então um sistema de equivalência com padrões fixos, a moeda-mercadoria, que era a mercadoria estabelecida para ser a unidade das transações comerciais.

Conchas e pérolas foram usadas em ilhas do Pacífico. Cacau, algodão, cerâmica e tecido, na América Central pré-colombiana. Na Grécia antiga, usou-se como moeda mercadoria o boi e o sal (deste se origina a palavra “salário” que era a remuneração em sal pelos serviços prestados). Segundo Grando e Shneider (2010, p. 45): “O boi, como padrão de equivalência, apresentava vantagens pela locomoção própria, pela reprodução e por seu uso na prestação de serviços.”

De maneira semelhante, na China, entre os séculos XVI e XI a.C., usavam-se chifres, cascos de tartaruga, conchas, pedras e metais que poderiam ser usados na fabricação de armas. No Egito, a moeda-mercadoria eram metais como cobre, bronze, prata e ouro, cujo valor era determinado por seu peso.

1.2 Moeda de metal

Dentre os objetos utilizados em trocas, os metais gozavam de maior aceitação no comércio, ouro, prata, cobre assumiram aos poucos a função de moeda-mercadoria. Assim, passaram e ser fundidos em pequenas peças ou lingotes, todos de mesmo peso e levavam uma marca, selo, de uma autoridade pública atestando sua qualidade. Os primeiros registros de moedas cunhadas datam do século VII a.C., na região da Grécia asiática e da Lídia.

Esse sistema monetário prosperou, se espalhando pelos fenícios, cartaginenses, persas e pelas cidades-estados gregas. No Império Romano cunhavam-se moedas de ouro, chamadas solidus, com as quais eram pagos os salários de mercenários à serviço do Império, daí vem a palavra “soldo”. De Roma, o uso de moedas de metal se espalhou por toda a Europa e Oriente.

Com o avanço nas negociações comerciais, existiam em circulação moedas de diversos países que, de início, eram trocadas de acordo com a quantidade de ouro ou prata de cada uma, mas após um tempo definiu-se o “padrão-ouro” de cada país, que era a quantidade de ouro que cada país possuía, o que passou a servir de taxa de câmbio para trocas.

Figura 1. Moeda romana “solidus”, criada pelo imperador Constantino e utilizada entre os séculos IV e X (WIKIPEDIA, 2022).

Aproveitando-se dessa oportunidade, alguns comerciantes acumulavam moedas de vários países em grandes quantidades e se especializaram em seu comércio, é o surgimento do cambista. Além da troca das moedas, eles também as guardavam e as emprestavam, recebendo um dinheiro adicional pelas transações. Essas seriam as primeiras transações de crédito (dinheiro que gera dinheiro), é o surgimento dos bancos. Segundo Grando e Shneider (2010, p. 47), “Quando o comércio começava a atingir o auge, com a figura do mercador, iniciou-se uma atividade nova: o comércio do próprio dinheiro, na época, o ouro e a prata.”

Com o surgimento desse tipo de negociação desenvolveram-se também as leis e a matemática necessárias para lidar com os empréstimos, dívidas etc. Segundo Eves (2011), foram encontradas tábulas, na região da Mesopotâmia, contendo problemas de juros compostos, com as quais é possível resolver equações exponenciais do tipo $a^x = b$. Em uma delas, datada de cerca de 1700 a. C. contém o seguinte problema: “Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?”.

1.3 Cerca de mil anos atrás - Papel moeda

As moedas cunhadas em metal nobre e seladas pelo governo do país foram, por muito tempo, de grande vantagem, elas podiam ser trocadas por qualquer outra mercadoria e serviam de objeto para o pagamento de serviços prestados. Para o comércio de grandes valores, porém, havia-se a dificuldade no transporte das moedas, devido ao seu peso.

Na China, entre os anos 618 e 907 (dinastia Tan) surgiu a emissão do primeiro papel moeda, o pao-tsao, que equivalia à dez mil moedas de cobre que circulavam no país naquela época, iuam-pao. Ambos circulavam dentro do país, mas somente as moedas de metal tinham valor no comércio internacional

Contudo, a troca do metal pelo papel moeda durou pouco, pois para custear guerras contra árabes e tibetanos durante anos, o governo chinês aumentou os impostos e começou a emitir mais papel moeda do que possuía de reserva em cobre ou em mercadorias.

Com a derrota da China nas guerras, os mercadores ficaram inseguros e começaram a trocar o dinheiro de papel pelas moedas de metal, mas o governo não possuía quantia suficiente para arcar com as trocas, assim nem todos conseguiram reaver as moedas de metal e perderam tudo. Após esse incidente, a China aboliu o papel moeda do país por várias centenas de anos.

Provavelmente o problema no uso do papel como moeda ocorreu na sua emissão descontrolada sem a reserva em metais como garantia.

Segundo Ulrich (2014, p. 37), “Inflação é o aumento na quantidade de uma moeda em uma economia, e a eventual elevação dos preços é a consequência inevitável.”

Na França, por volta do ano 1.700, foi fundado o “Banque Géneral”, este possuía a concessão para a emissão do papel moeda que podia ser trocado por moedas de ouro. Esse papel moeda circulava apenas dentro do país.

A intenção do governo era retirar de circulação as moedas de ouro da população, trocando-as por papel, assim deteria em seu poder mais ouro para usar em transações comerciais internacionais.

Como a população tinha confiança no papel moeda, o governo francês percebeu que não era necessário ter em caixa todo o ouro que circulava na forma de papel pelo país, já que as pessoas não iriam todas ao mesmo tempo fazer a troca do papel pelo ouro.

A França possuía uma enorme dívida externa e a fim de pagá-la, o governo lançou um decreto no qual anunciou uma nova moeda e obrigou a troca da antiga. A nova moeda foi cunhada com o ouro das moedas antigas, porém com dois terços da quantidade. Com o um terço de ouro que rendeu da troca, o governo francês amortizou a dívida externa. Para a população, aparentemente, não houve perdas. Inclusive, inicialmente, a confiança na moeda de papel aumentou.

Porém, a aristocracia da época não acreditou nas medidas propostas e passou a fazer a troca do dinheiro de papel pelas moedas de metal. Ocorreu então a desvalorização do papel moeda francês. Para tentar pagar as trocas, as moedas de metal foram novamente desvalorizadas ao ser usado menos ouro ainda em sua composição, o que fez com que se retomasse a troca pelo dinheiro de papel.

Em 1664, os franceses fundaram a Companhia Francesa das Índias Orientais, e para arcar com os custos das navegações, a emissão de papel moeda ficou desenfreada, o ouro saía do país para o pagamento de dívidas.

O governo promoveu mais uma vez a desvalorização do dinheiro nacional. O aumento da moeda circulante fez os preços das mercadorias aumentarem, estas mantiveram os preços do mercado internacional, ocasionando inflação descontrolada. Novamente houve uma nova corrida aos bancos para se trocar o dinheiro de papel por moedas de ouro, até que o papel moeda parou de ser usado na França.

O sistema econômico mundial foi aperfeiçoado, atrelando a emissão de papel-moeda às reservas de ouro do país, no século XVIII a maioria dos países europeus usavam dinheiro de papel e entre os séculos XIX e XX o mundo inteiro fazia uso.

É oportuno aqui fazer um parênteses para um fato interessante. Nesse milênio, no século XVII, tem-se o primeiro cálculo do número de Euler justamente na resolução de um problema de juros composto. Segundo Maor (2008, p. 9), há tempos sabia-se que ao aplicar um capital numa taxa de juros compostos, o montante gerado aumentava ao se diminuir o intervalo entre as capitalizações, a questão era: quanto é possível aumentar o montante, existiria um valor máximo ou o crescimento é infinito?

Supondo a aplicação de cum capital C, no regime de juros compostos, numa taxa de juros de 100% ao ano, capitalizada anualmente, o montante gerado após um ano será $M_1 = C \cdot (1+1)^1 = 2C$. Supondo agora, esse mesmo capital, aplicado à mesma taxa de juros compostos de 100% ao ano, capitalizado semestralmente, ou seja, 50% ao semestre, após um ano, o montante gerado será $M_2 = C \cdot (1+0{,}5)^2 = 2{,}25C$. Se o mesmo capital for aplicado à taxa de 100% ao ano, capitalizada trimestralmente, em um ano, o montante obtido será $M_3 = C \cdot (1+0{,}25)^4 \cong 2{,}4414C$.

Diminuindo o intervalo entre as capitalizações, o montante aumenta $M_3 > M_2 > M_1$. Assim, se a capitalização for feita em n vezes no ano, em um ano, o montante será $M = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Jonh Napier, em 1618, encontrou uma solução experimental para essa questão, escrevendo tabelas ele encontrou para $n = 1.000.000$, $M = 2{,}71828C$ e, para $n = 10.000.000$, $M = 2{,}71828C$. Aparentemente, o valor máximo de montante que se poderia obter é $M = 2{,}71828C$.

Meio século depois, com a criação do cálculo diferencial, foi possível comprovar a descoberta de Napier com a resolução do $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Essa foi, provavelmente, a primeira referência ao número de Euler, $e \cong 2{,}718281$, que se relaciona com várias outras ocorrências intrigantes, como por exemplo, a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$.

1.4 Mundo contemporâneo – moeda digital

No mundo atual, os registros contábeis e diversas transações financeiras, em sua maioria, não ocorrem somente através de moeda física. Todos os dias, as pessoas utilizam cartões, computadores e aparelhos celulares para acessar suas contas bancárias e o dinheiro que possuem. Estaria havendo o desprendimento do palpável? Seria possível utilizar um dinheiro virtual em todas as negociações?

A primeira menção à uma moeda virtual foi feita em 1998 por Wei Dai (pseudônimo), que propôs uma teoria de criação de criptomoedas, suas características e funcionamento, que seriam viáveis com o desenvolvimento da internet. Mas a sua criação só ocorreu em 2008 após a grande crise econômica.

Com a experiência de séculos, descobriu-se que uma grande emissão de moedas resultava em inflação, isso porque a garantia do dinheiro estava atrelada ao padrão-ouro que cada país possuía.

Atualmente (desde a década de 70), nos países capitalistas, não é mais exigido o lastro para a emissão de dinheiro, basta apenas a garantia do governo, é o chamado papel-moeda fiduciário. A legislação de cada país obriga que seus cidadãos aceitem e utilizem o dinheiro emitido pelo estado como forma de pagamento, sendo que o banco central organiza a emissão das moedas e o sistema bancário.

No sistema bancário atual, os bancos são obrigados a guardarem apenas uma fração do que foi depositado, reservas fracionárias, podendo oferecer o excedente em empréstimos e créditos. Pode-se dizer então, que tal prática caracteriza uma forma de distorção do valor monetário, uma vez que consegue elevar o poder de compra, e consequentemente, é um gerador de inflação.

Tais operações são as causadoras dos ciclos econômicos. Quanto mais empréstimos são concedidos, mais empreendimentos são criados sem que haja recursos suficientes para cobri-los, acarretando em recessão financeira. Normalmente, esta é precedida pela redução na taxa de juros pelo banco central, ou seja, na expansão de crédito. Essa foi a causa da maior crise financeira deste milênio.

Em 2001, o Federal Reserve reduziu os juros americanos. Outros países, para estimular a economia, fizeram o mesmo. Essa tendência mundial, acarretou em um crescimento desenfreado de crédito imobiliário, aumento no consumo e elevação de preços.

Consumidores, iludidos pela baixa inflação, adquiriram grandes hipotecas e empréstimos bancários de alto risco acarretando no surgimento de instituições e empreendimentos problemáticos que não conseguiam quitar suas dívidas. Os bancos começaram então a retirar seus investimentos dessas empresas, quando em 2007, o setor financeiro congelou, os preços despencaram levando ao colapso do sistema – culminando na falência do Lehman Brothers, em setembro de 2008.

Para controlar a crise, os bancos centrais atuaram de maneira arbitrária, zerando as taxas de juros, resgatando instituições financeiras e empresas, emitindo dinheiro com o objetivo de recuperar as perdas e a economia, gerando uma guerra cambial mundial. A população, de modo geral, se tornou refém das decisões tomadas, pelo mundo todo o poder de compra despencou.

Para Ulrich (2014, p. 40)

> "E é precisamente este ponto que ficou claro na atual crise: o cidadão não tem controle algum sobre seu dinheiro e está à mercê das arbitrariedades dos governos e de um sistema bancário cúmplice e conivente. Além do imenso poder na mão dos bancos centrais, a conduta destes – envolta por enormes mistérios, reuniões a portas fechadas, atas indecifráveis, critérios escusos, decisões intempestivas e autoritárias – causa ainda mais consternação e desconfiança, justamente o oposto do que buscam."

Em meio a esse cenário, de arbitrariedade e centralização monetária, foi criada a primeira criptomoeda, o Bitcoin. Em outubro de 2008, Satoshi Nakamoto publicou o artigo "Bitcoin: a Peer-to-Peer Eletronic Cash System", que é a ideia de uma moeda digital baseada em uma rede de computadores conectados e independente da necessidade de um órgão controlador central.

A criptomoeda é um meio de troca que funciona como dinheiro em alguns ambientes virtuais, utiliza-se de criptografia em uma rede computacional descentralizada interconectada ponto a ponto (peer-to-peer). Não é legalmente reconhecida como uma moeda real, mas pode ser convertida em dinheiro, funciona mais como um sistema eletrônico de pagamento, uma commodity.

Diferente do sistema bancário convencional, os registros das transações com moeda virtual são feitos numa cadeia de blocos, todos criptografados, que não necessitam de um órgão intermediador ou controlador, uma vez que todas as transações são registradas e armazenadas em um arquivo chamado blockchain, no qual todos os usuários do sistema possuem acesso e podem fazer a verificação da operação. A fiscalização das transações é feita por usuários chamados mineradores, que são remunerados com novas criptomoedas criadas pelo sistema. A arquitetura da plataforma peer-to-peer garante o anonimato dos usuários da rede.

Para verificar as transações, os mineradores solucionam enigmas criados pelo sistema. Para o Bitcoin, o nível de dificuldade dos enigmas é calibrado para que o sistema gere um novo bloco de bitcoin a cada dez minutos. Como a quantidade total de bitcoins é 21 milhões, estima-se que a última será coletada no ano de 2140.

Atualmente a mineração de moedas virtuais está concentrada em empresas, mining rings, que possuem tecnologia computacional adequada para solucionar os enigmas. Dessa forma, a falta de concorrência faz com que o mercado de criptomoedas esteja sujeito à manipulação dessas empresas.

A “vantagem” da moeda virtual é não precisar de um intermediário nas transações, o que diminui o custo das operações. Porém, isso possibilita a transferência de dinheiro entre as mais diversas localidades sem a aferição de um governo estatal.

A principal rejeição deste tipo de dinheiro são a sonegação fiscal e a evasão monetária do país. O anonimato também propicia o financiamento de atos terroristas, comércio de itens ilegais, como armas e pornografia infantil, e lavagem de dinheiro. No Brasil, o Banco Central desaconselha o uso de moeda virtual, mas não a proíbe: estas e seus lucros devem ser declarados e tributados como renda variável. Ao que parece, a moeda virtual ainda tem muito o que amadurecer até se estabelecer mundialmente.

Observa-se que no decorrer da história que, desde tempos remotos, as operações comerciais e financeiras interferem nas vidas das pessoas e estão presentes em seu cotidiano. O conhecimento de matemática financeira proporciona ao estudante uma ferramenta que lhe ajudará na tomada de decisões coesas com seus limites e objetivos.

Capítulo 2 Fundamentação Teórica

A matemática financeira está presente no cotidiano das pessoas, na forma como se ganha e se gasta o dinheiro. Fazer uso dessa ferramenta pode favorecer escolhas e decisões, contribuindo para o exercício pleno da cidadania.

Este capítulo tem por finalidade a apresentação dos conceitos fundamentais e teóricos desse tópico da Matemática, que pode ser visto como uma aplicação do conceito de Progressões ou de Funções. O professor pode optar também pelo método visual de setas. O uso de calculadoras, tabelas eletrônicas e aplicativos de celular é muito recomendado.

2.1 Porcentagem

O estudo de matemática financeira exige que se tenha domínio do conceito e do cálculo de porcentagens. Esse tópico tem o objetivo de revisar esses conceitos básicos comumente estudados no Ensino Fundamental.

As porcentagens são razões cujo denominador é igual à 100.

Definição 1. Chama-se de porcentagem toda razão $\frac{p}{q}$, com $p \in Z$ e $q = 100$.

As porcentagens podem ser representadas na forma decimal ou pelo numerador acrescido do símbolo %.

$$\frac{14}{100} = 0{,}14 = 14\%; \frac{121}{100} = 1{,}21 = 121\%.$$

Exemplo 2. Iza depositou R$ 500,00 na poupança. Após certo tempo ela verificou que possuía R$ 530,00. Qual foi o rendimento da poupança, em porcentagem?

Resolução: O rendimento foi (em reais): 530,00 – 500,00 = 30,00.

Para calcular a porcentagem basta fazer a razão entre o rendimento e o valor inicialmente depositado.

$$\frac{30}{500} = 0{,}06 = \frac{6}{100} = 6\%.$$

Assim, nesse período, a poupança rendeu 6%.

Exemplo 3. Márcio quer comprar um celular de R$ 3.000,00, para isso é necessário dar uma entrada de 12% desse valor. Quanto deve ser pago de entrada?

Resolução: Para calcular, escreve-se a taxa percentual na forma decimal ou em fração

$$12\% = 0{,}12 = \frac{12}{100}.$$

Agora, multiplica-se a taxa percentual pelo valor dado

$$\frac{12}{100} \cdot 3.000 = 12 \cdot 30 = 360.$$

Ou seja, 12% de R$ 3.000,00 é igual a R$ 360,00.

Definição 4. Chama-se de fator de variação percentual o número $1 + i$, no qual i (em decimal) é a taxa percentual. Se i for positivo, $1 + i$ pode ser chamado de fator de aumento e, se i for negativo, $1 + i$ será chamado de fator de desconto.

Exemplo 5. Um produto da loja de Leandro custava R$ 80,00, no mês seguinte Leandro aumentou seu valor em 15% e, ofereceu ao cliente, um desconto de 15%. Qual o valor final que o cliente irá pagar?

Resolução: Na primeira variação tem-se um fator de aumento: $1 + 0{,}15 = 1{,}15$

$$80 \cdot 1{,}15 = 92{,}00 \qquad (i)$$

Na segunda variação tem-se um fator de desconto: $1 - 0{,}15 = 0{,}85$

$$92 \cdot 0{,}85 = 78{,}20 \qquad (ii)$$

O valor final do produto será R$ 78,20.

Observa-se que apesar de receber um aumento de 15% e um desconto, também de 15%, o valor final não é igual ao valor inicial do produto. Percebe-se também que os cálculos de (ii) podem ser expressos por

$$80 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}85 = 78{,}20$$

pois, de (i) temos que $92 = 80 \cdot 1{,}15$.

Exemplo 6. Em um determinado ano a taxa de inflação foi de 7,5% e, no ano seguinte, de 12%, qual é a taxa de inflação acumulada nesses dois anos?

Resolução: No primeiro ano tem-se um fator de aumento: $1 + 0{,}075 = 1{,}075$.

No segundo ano, o fator de aumento é: $1 + 0{,}12 = 1{,}12$.

Assim, a inflação acumulada será: $1{,}075 \cdot 1{,}12 = 1{,}204$.

Então $1 + i = 1{,}204 \;\Rightarrow\; i = 0{,}204 = 20{,}4\%$.

A taxa de inflação acumulada nos dois anos é de 20,4%. Observa-se que a inflação acumulada não é dada pela soma das taxas nos dois anos.

Exemplo 7. Sílvia aplicou R$ 600,00, durante 2 anos, em um investimento com taxa de rendimento fixa de 0,75% ao mês, capitalizados mensalmente sobre a quantia acumulada (juros compostos). Qual será o total que Sílvia irá resgatar ao final dos dois anos?

Resolução: No primeiro mês, o acumulado será: $600 \cdot (1{,}0075)$.

No segundo mês, será: $600 \cdot (1{,}0075) \cdot (1{,}0075) = 600 \cdot (1{,}0075)^2$.

No terceiro mês, será: $600 \cdot (1{,}0075)^2 \cdot (1{,}0075) = 600 \cdot (1{,}0075)^3$.

Assim, o acumulado no 24º mês será:

$$600 \cdot (1{,}0075)^{24} \approx 717{,}85.$$

O total a ser resgatado ao fim de 2 anos é R$ 717,85. Esse exemplo com variações percentuais sucessivas será muito importante mais adiante, no estudo de juros compostos.

2.2 Regimes de Capitalização

A matemática financeira trata das operações ligadas aos empréstimos, seus pagamentos e investimentos. Analisa o valor do dinheiro ao longo do tempo.

Quando uma pessoa empresta certo valor monetário (que é chamado capital ou principal) para outra, num certo intervalo de tempo t, ela cobra pelo uso desse dinheiro.

O valor cobrado é chamado de juros (representado por J). Chama-se de taxa de juros (i), a porcentagem que os juros representam do capital num certo intervalo de tempo. A taxa de juros pode ser contabilizada ao mês (a.m.), ao ano (a.a.), ao trimestre (a.t.) etc.

O processo de ganhar dinheiro pelo empréstimo de um capital é chamado de regime de capitalização ou sistema de capitalização, que podem ser de dois tipos, juro simples e juro composto.

Definição 8. Capital é o valor aplicado no intervalo de tempo t. Representado pela letra C.

Definição 9. Juro é a remuneração, o valor acrescido ao capital num determinado tempo t. Representa o rendimento da aplicação financeira.

Definição 10. Montante é o valor resgatado ao final do período, e corresponde a soma entre Capital e Juros, ou seja:

$$M = C + J.$$

Pode-se interpretar a situação da seguinte forma, no ato do empréstimo o dinheiro tinha valor igual a C, no pagamento da dívida, esse mesmo dinheiro terá valor M. Dizemos que C é o valor presente do dinheiro e M é o valor futuro. Na matemática financeira o dinheiro tem valores diferentes no decorrer do tempo.

2.2.1 Regime de Juros Simples

No regime de juros simples, em cada período de tempo o juro é o mesmo e é calculado sobre o capital inicial e são pagos ao final da aplicação. O juro é diretamente proporcional ao capital e ao tempo da aplicação, sendo o fator de proporcionalidade igual à taxa de juros. O sistema de capitalização a juros simples é pouco utilizado, geralmente na antecipação de pagamentos em empréstimos e no cálculo de moras nas quais o período a ser calculado é menor que 1, por exemplo, no pagamento de um boleto com atraso de 8 dias com mora estipulada em 1% a.m., a mora será calculada com juros simples.

Definição 11. Juros simples é aquele pago unicamente sobre o capital inicial, é o produto entre o capital, a taxa de juros e o tempo decorrido no período.

Teorema 12. Os juros simples (J) gerado por um capital C aplicado à uma taxa de juros i (em decimais) num período de tempo t (inteiro e de mesma unidade de i) é dado por

$$J = C \cdot i \cdot t.$$

Demonstração: Queremos demonstrar que $P(t) = J_t = C \cdot i \cdot t$ (hipótese de indução) e faremos a demonstração usando o método de indução em t.

1) Vemos que é válida para $t = 0$, pois $P(0) = J_0 = C \cdot i \cdot 0 = 0$, ou seja, o juro gerado no instante inicial é igual a zero.
   É válida também para $t = 1$, pois $P(1) = C \cdot i \cdot 1 = C \cdot i$, ou seja, o juro gerado ao final do primeiro período é igual ao produto do capital pela taxa.
2) Supondo que $P(t) = J_t = C \cdot i \cdot t$, é válida para algum natural t, queremos demonstrar que $P(t+1) = J_{t+1} = C \cdot i \cdot (t+1)$ é válida.
   Temos que J_{t+1} é o juro gerado no período de tempo $t+1$, como no regime de juros simples o juro é sempre calculado sobre o capital inicial
   $$J_{t+1} = J_t + C \cdot 1$$
   Pela hipótese de indução, $J_t = C \cdot i \cdot t$, então
   $$J_{t+1} = C \cdot i \cdot t + C \cdot i \Leftrightarrow J_{t+1} = C \cdot i \cdot (t+1)$$

Logo, pelo princípio de indução, concluímos que os juros simples gerados no intervalo de tempo t, sobre um capital inicial C à uma taxa de juros i (na forma decimal) é

$$J = C \cdot i \cdot t.$$

□

Exemplo 13. Uma pessoa atrasou em 10 dias o pagamento do boleto abaixo. Qual o valor dos juros de mora que ela deverá pagar?

BANCO	0033-4	03399.69925 58700.022617 23182.701013 6 91060000093108				
Local para pagamento Pagável em qualquer banco						**Nosso número** 0226123182 7
Beneficiário final Condomínio da Matemática Rua Qualquer, nº100 – Campinas/SP cep 13.000-000			**Intermediado por** XX Banco AS 00.000.000./001-71			**Vencimento** **DD/MM/AAAA**
Data do documento 01/MM/AAAA	**Nº de documento** 09/2022	**Especie Doc.** RC	**Aceite** N	**Data processamento** 01/MM/AAAA		**(=) Valor do Documento** 150,00
Uso do banco	**Carteira** 101	**Moeda** R$	**Quantidade**		**(x) Valor**	**Multa/Juros Mora/Descontos**
Instruções (Todas as informações deste boleto são de exclusiva responsabilidade do beneficiário) Receber conforme instruções no próprio título. Não receber após 30 dias do vencimento. Após vencimento: Multa: R$ 3,00. Juros de Mora: 0,9% a.m (0,03% a.d.)						**(=) Valor**
Pagador **Xxxxxxx Xxxxx CPF: 000.000.000-00** Rua Qualquer, nº100 – Campinas/SP cep 13.000-000 **Sacador/Avalista**						
						Autenticação Mecânica/FICHA DE COMPENSAÇÃO

Figura 2. Boleto bancário para cálculo de pagamento com atraso.

Resolução:

Temos que $C = R\$\ 150{,}00$, $i = 0{,}03\%\ a.d. = 0{,}0003$ e $t = 10\ dias$, assim

$$J = C \cdot i \cdot t = 150 \cdot 0{,}0003 \cdot 10 \Rightarrow J = 0{,}45.$$

Logo, os juros de mora que deverão ser pagos são de R$ 0,45.

No regime de juros simples, o montante cresce (ou decresce) linearmente com o tempo.

Proposição 14. O montante M gerado por uma aplicação de um capital inicial C, a uma taxa de juros i (em decimais), no período de tempo t (na mesma unidade de i) no regime de capitalização de juros simples é dado por

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t).$$

Demonstração: Temos que $M = C + J$ e que $J = C \cdot i \cdot t$, assim

$$M = C + C \cdot i \cdot t \Leftrightarrow M = C \cdot (1 + i \cdot t).$$

□

Em matemática financeira, o período de capitalização t é um número natural, dessa forma o montante no regime de juros simples comporta-se como o termo geral de uma progressão aritmética, de primeiro termo igual ao capital inicial ($a_0 = C$), razão igual ao produto da taxa de juros pelo capital ($r = C \cdot i$), sendo o período de tempo da aplicação igual ao número total de termos ($n = t$). Assim, substituindo na fórmula do termo geral da P.A., $a_n = a_0 + n \cdot r$, o montante será $M = C + C \cdot i \cdot t$.

Exemplo 15. Marina pegou um empréstimo com sua tia no valor de R$ 2.200,00. O combinado foi ela pagar a dívida após 3 anos, numa taxa de 5,5% a.a. no sistema de juros simples. Qual será o valor a ser pago?

Resolução:

Tem-se que $C = R\$2.200{,}00$; $i = 5{,}5\%\ a.a. = 0{,}055$ e $t = 3\ anos$, logo

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$M = 2200 \cdot (1 + 0{,}055 \cdot 3) = 2200 \cdot 1{,}165$$

$$M = 2563{,}00.$$

Resolvendo esse exemplo usando progressão aritmética, tem-se

$a_0 = R\$\ 2.200{,}00$; $r = 0{,}055 \cdot 2.200 = 121$; $n = 3\ anos$ e $a_3 = M$

$$a_n = a_0 + n \cdot r$$

$$a_3 = a_0 + 3r$$

$$M = 2200 + 3 \cdot 121$$

$$M = 2563{,}00.$$

Portanto, o valor será de R$ 2.563,00.

2.2.2 Regime de Juros Compostos

O regime de capitalização é o mais comumente utilizado no sistema financeiro brasileiro, tanto para investimento quanto para empréstimos.

Nesse sistema os juros são variáveis a cada período e calculados pelo produto entre a taxa de juros (na forma decimal) e o montante imediatamente anterior ao momento da capitalização. O montante comporta-se exponencialmente com o tempo e comumente é chamado de juros sobre juros.

Amorim (2016) sugere que o estudo de juros compostos pode ser feito como uma continuação no cálculo de variações percentuais sucessivas, antes mesmo do estudo de juros simples.

Definição 16. Juro composto é o regime de capitalização no qual, a cada período, os juros gerados são acrescidos ao capital formando o novo capital que será utilizado para o cálculo de juros do próximo período de tempo.

Proposição 17. O montante M gerado por uma aplicação de um capital inicial C, a uma taxa de juros i (em decimais), no período de tempo t (na mesma unidade de i) no regime de capitalização de juros compostos é dado por

$$M = C \cdot (1 + i)^t.$$

Demonstração: Queremos demonstrar que $P(t) = M_t = C \cdot (1 + i)^t$ (hipótese de indução) e faremos a demonstração usando o método de indução em t.

1) Vemos que é válida para $t = 0$, pois $P(0) = M_0 = C \cdot (1 + i)^0 = C \cdot 1 = C$, ou seja, em $t = 0$, o montante é igual ao próprio capital investido.

É válida também para $t = 1$, pois $P(1) = M_1 = C \cdot (1 + i)^1 = C + C \cdot i$, ou seja, o montante ao final do primeiro período é igual ao capital somado ao produto do capital pela taxa (juro de um período).

2) Supondo que $P(t) = M_t = C \cdot (1 + i)^t$, é válida para algum natural t, queremos demonstrar que $P(t + 1) = M_{t+1} = C \cdot (1 + i)^{t+1}$ também é válida. Temos que

$$M_{t+1} = M_t + M_t \cdot i$$

Pela hipótese de indução, $M_t = C \cdot (1 + i)^t$, então

$$M_{t+1} = C \cdot (1 + i)^t + C \cdot (1 + i)^t \cdot i$$

$$M_{t+1} = C \cdot (1 + i)^t \cdot (1 + i)$$

$$M_{t+1} = C \cdot (1 + i)^{t+1}.$$

Logo, pelo princípio de indução, concluímos que o montante gerado pelo sistema de juros compostos, no intervalo de tempo t, sobre um capital inicial C à uma taxa de juros i (na forma decimal) é

$$M = C \cdot (1 + i)^t.$$

□

Observa-se que no regime de juros compostos, o montante comporta-se como o termo geral de uma progressão geométrica ($a_n = M$), cujo primeiro termo é igual ao capital inicial ($a_0 = C$), razão igual à taxa de juros acrescida de 100% ($q = 100\% + i = 1 + i$) e o período de tempo da aplicação igual ao número total de termos ($n = t$). Substituindo na fórmula do termo geral da P.G., $a_n = a_0 \cdot q^t$, o montante será $M = C \cdot (1 + i)^t$.

Exemplo 18. Diego pegou um empréstimo de R$ 5.000,00, no regime de juros compostos, à uma taxa de 2% a.m. no prazo de 3 meses. Qual será o valor total que Diego irá pagar pelo empréstimo?

Resolução: Tem-se que $C = R\$ \, 5.000{,}00$; $i = 0{,}02 \; a.m.$ e $t = 3 \; meses$. Assim:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M = 5.000 \cdot (1 + 0{,}02)^3$$

$$M = 5.306{,}04.$$

Resolvendo o exemplo usando o conceito de progressão geométrica:

$a_0 = R\$\ 5.000$; $q = 100\% + 2\% = 102\% = 1{,}02$; $n = 3\ meses$ e $a_3 = M$

$$a_n = a_0 \cdot q^t$$

$$a_3 = a_0 \cdot q^3$$

$$M = 5.000 \cdot (1{,}02)^3$$

$$M = 5.306{,}04.$$

O valor total a ser pago pelo empréstimo é de R$ 5.306,04.

Exemplo 19: Qual o tempo necessário para que um capital dobre de valor, ao ser aplicado no regime de juros compostos numa taxa de 10% ao ano?

Resolução: Tem-se que o capital inicial é C, $i = 0{,}1\ a.a.$ e $M = 2C$, assim:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$2C = C \cdot (1 + 0{,}1)^t$$

$$2 = (1{,}1)^t$$

$$log\ (2) = log(1{,}1)^t$$

$$log\ (2) = t \cdot log\ (1{,}1)$$

$$t = \frac{log\ (2)}{log\ (1{,}1)}$$

$$t \approx 7{,}27\ anos.$$

Resolvendo o exemplo usando P.G, tem-se:

$a_0 = C$; $a_n = M = 2C$; $n = t$; $q = 100\% + 10\% = 110\% = 1{,}1$

$$a_n = a_0 \cdot q^t$$

$$2C = C \cdot (1{,}1)^t$$

$$2 = (1{,}1)^t$$

$$log\ (2) = log(1{,}1)^t$$

$$log\ (2) = t \cdot log\ (1{,}1)$$

$$\mathrm{t} = \frac{\log\ (2)}{\log\ (1{,}1)}$$

$$t \approx 7{,}27\ anos.$$

Logo, o capital dobrará de valor em 7 anos 3 meses e 7 dias, aproximadamente.

Exemplo 20: Maria está estudando formas para investir suas economias.

A primeira delas é investir, no regime de juros compostos, R$ 12.000,00 numa taxa mensal de 0,8% durante 2 anos.

A segunda é ela investir, nas mesmas condições anteriores, o dobro do valor.
A terceira é, investir R$ 12.000,00 no regime de juros compostos por 2 anos, mas com a taxa de 1,6% ao mês.
E a última é ela investir R$ 12.000,00, no regime de juros compostos, à taxa de 0,8% ao mês durante 4 anos.
Em qual delas ela obterá o maior montante?
Resolução: Os dados são $C = R\$\ 12.000{,}00$, $i = 0{,}008\ a.m.$ e $t = 24\ meses$, assim:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M = 12.000 \cdot (1{,}008)^{24}$$

$$M \approx 14.528{,}94.$$

Analisando as situações:

1) Dobrando o capital: $M = 24.000 \cdot (1{,}008)^{24} \;\Rightarrow\; M \approx 29.057{,}88.$
2) Dobrando a taxa: $M = 12.000 \cdot (1{,}016)^{24} \;\Rightarrow\; M \approx 17.564{,}28.$
3) Dobrando o prazo: $M = 12.000 \cdot (1{,}008)^{48} \;\Rightarrow\; M \approx 17.590{,}85.$

Assim, em dois anos o montante será de R$ 14.528,94, aproximadamente. Pela análise das situações, o investidor obterá o maior montante ao dobrar o capital inicialmente investido.

É interessante observar que nem sempre se obtém o maior montante ao dobrar o capital, é possível obter uma conclusão diferente dependendo dos dados inicialmente propostos. Uma análise usando o Geogebra pode ajudar na visualização do comportamento do investimento.

2.2.3 Relação entre Juros Simples e Juros Compostos

De acordo com as definições apresentadas, apesar de não terem sido deduzidas no conjunto dos reais, é possível associar os montantes com funções. Assim, dado um capital C, aplicado a uma taxa de juros i, pelo período de tempo t, nos dois regimes de capitalização, formam montantes M. No sistema de juros simples, esse montante representa uma função afim $M(t) = C \cdot (1 + i \cdot t)$, na variável t. Enquanto no sistema de juros compostos, o montante representa uma função exponencial em t, $M(t) = C \cdot (1 + i)^t$.

Fazendo uma comparação gráfica entre as duas funções, percebemos que, para mesmos valores de capital e taxa de juros, os montantes gerados no sistema de juros simples são maiores para o período de tempo menor que uma unidade, enquanto o montante gerado no regime de juros compostos é maior em períodos de tempo maiores que uma unidade. Para o período de tempo igual a um, os montantes são iguais.

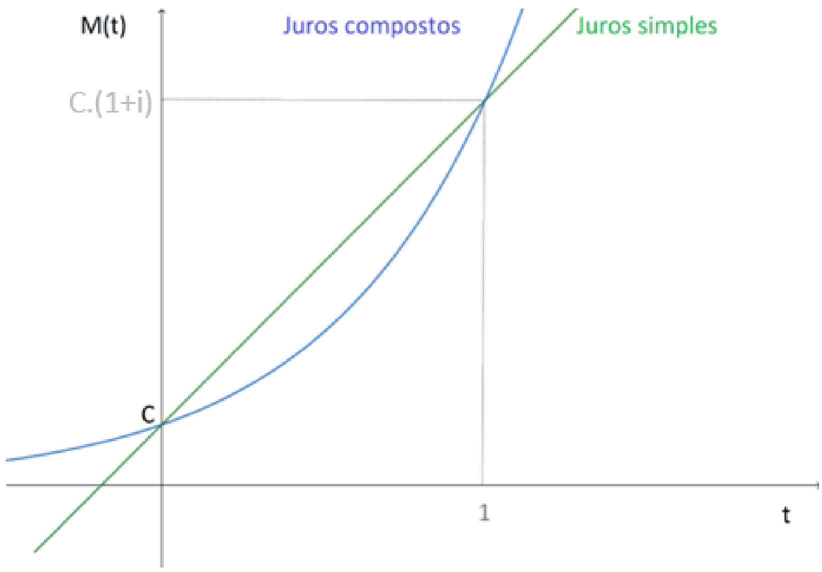

Figura 3. Comparação do montante em função do tempo nos regimes de juros simples e compostos.

Em geral, no Brasil, o regime de juros compostos é o mais utilizado nas transações tradicionais, o regime de juros simples costuma ser utilizado em cálculos de moras quando o período considerado é menor que 1, por exemplo, a fatura foi paga com atraso de 70 dias e a mora de 5% a.m., o cálculo da mora será feito com juros compostos nos primeiros 60 dias (2 meses) e com juros simples nos 10 dias seguintes.

2.3 Taxas de Juros Equivalente e Proporcional

A taxa de juros refere-se a um determinado período de tempo, quando a unidade de tempo não é a mesma da unidade de tempo da aplicação financeira é necessário fazer a conversão para a mesma unidade. No regime de juros compostos, uma confusão que normalmente acontece é acreditar que a taxa de 1% ao mês equivale a uma taxa de 12% ao ano, ou seja, taxas proporcionais não são taxas equivalentes. Relacionar taxas de juros de unidades diferentes é de extrema relevância no mercado financeiro.

Definição 21. Seja i, uma taxa de juros relativa a um período de tempo, no prazo de t períodos

(i) i e I são ditas taxas equivalentes, se $1 + I = (1 + i)^t$.

(ii) i e $t \cdot i$ são ditas taxas proporcionais.

Exemplo 22. Um investimento bancário rende 144% ao ano, qual a taxa mensal equivalente desse investimento?

Um outro investimento paga a taxa de 12% ao mês, qual é a taxa anual equivalente desse investimento?

Resolução: Para a primeira parte tem-se que $I = 1{,}44\ a.a.$ e $t = 12\ meses$, assim

$$1 + I = (1 + i)^t$$

$$1 + 1{,}44 = (1 + i)^{12}$$

$$1 + i = \sqrt[12]{2{,}44}$$

$$i \approx 0{,}077\ a.m.$$

Logo, a taxa de juros de 144% ao ano é equivalente a uma taxa de 7,7% ao mês, aproximadamente.

Na segunda parte tem-se que $i = 0{,}12\ a.m.$ e $t = 12\ meses$, assim

$$1 + I = (1 + i)^t$$

$$1 + I = (1 + 0{,}12)^{12}$$

$$I = (1{,}12)^{12} - 1$$

$$I \cong 2{,}89\ a.a.$$

Logo, a taxa de 12% ao mês é equivalente a uma taxa de 289% ao ano, aproximadamente.

Exemplo 23. Certo banco oferece um título de capitalização que rende uma taxa de 3% ao mês, qual é a taxa de juros anual equivalente? Qual a taxa de juros anual proporcional?

Resolução: Tem-se que $i = 0{,}03\ a.m.$ e $t = 12\ meses$, assim a taxa de juros equivalente será

$$1 + I = (1 + i)^t$$

$$1 + I = (1{,}03)^{12}$$

$$I \approx 0{,}4258\ a.a. = 42{,}58\%\ a.a.$$

A taxa de juros proporcional será

$$12 \cdot 3\% = 36\%\ a.a.$$

Logo, a taxa de juros equivalente é de 42,58% ao ano, aproximadamente. A taxa de juros proporcional é de 36% ao ano.

Exemplo 24. O boleto da prestação da compra de um refrigerador, tem valor de R$ 440,00 e, em caso de atraso, cobra-se juros de mora de 1% ao mês. Qual será o valor total a ser cobrado por 6 dias de atraso no pagamento?

Resolução: Tem-se que $i \cdot t = 0{,}01\ a.m.$ e $t = 30\ dias$, a taxa de juros proporcional será

$$i \cdot 30 = 0{,}01 \ \Rightarrow\ i = \frac{1}{3.000}\ a.d.$$

Os juros cobrados serão dados por juros simples

$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$M = 440 \cdot \left(1 + \frac{1}{3.000} \cdot 6\right)$$

$$M = R\$\ 440{,}88.$$

O valor cobrado será R$ 440,88 pelo atraso de 6 dias.

2.4 Fluxo de Caixa

Durante toda a vida as pessoas tomam decisões quanto à melhor forma de se fazer um pagamento ou do recebimento nas mais diversas transações monetárias. Analisar o comportamento do dinheiro ao longo do tempo ajuda na decisão da melhor opção financeira que se dispõe.

A matemática financeira considera que o valor do dinheiro varia em função do tempo, tanto decorrente da inflação do período, de um possível aumento de capital resultante de um investimento, do custo de oportunidade. Dessa forma é possível concluir que valores distintos de capital, se comparados num mesmo momento, podem se igualar, são capitais equivalentes.

Definição 25. O valor atual de um capital C é chamado de valor presente. Chamamos de valor futuro o seu equivalente após t períodos de capitalização, $C \cdot (1+i)^t$, num regime de juros compostos à uma taxa de juros i.

Definição 26. Dois capitais são chamados de equivalente quando, num mesmo momento, produzem mesmos valores presentes numa determinada taxa de juros estipulada.

Assim, podemos dizer que, se após t períodos o valor futuro de um capital for igual a C, o valor presente será $C \cdot (1+i)^{-t}$.

Uma ferramenta muito útil para fazer a análise de cada situação é o diagrama de fluxo de caixa, no qual é possível representar entradas e saídas de capital em diversos momentos. Este é formado por um eixo horizontal orientado representando uma linha do tempo. Flexas verticais são colocadas indicando entradas (para cima) e saídas (para baixo) de dinheiro no respectivo período de tempo.

Definição 27. Chama-se fluxo de caixa a série de valores a receber ou a pagar num determinado intervalo de tempo.

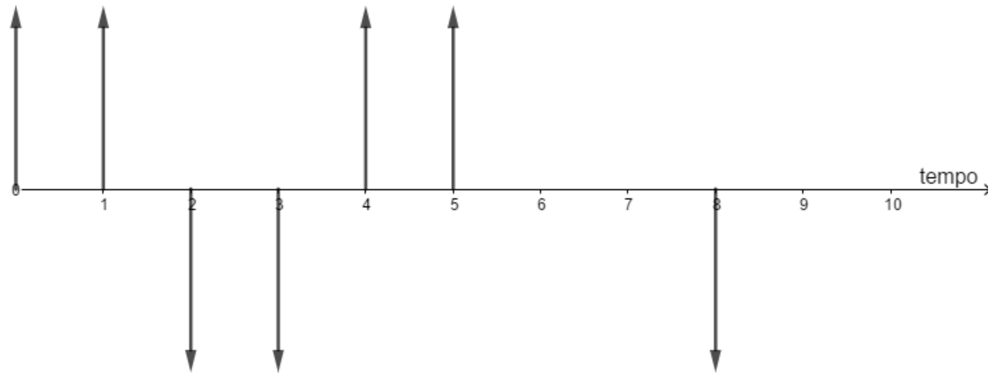

Figura 4. Representação do diagrama fluxo de caixa

Para comparar os capitais, escolhe-se um período ao qual será feita a análise do problema, chamado data focal. Então, desloca-se para a data focal os capitais envolvidos, multiplicando por $(1+i)^t$ para obter o valor futuro e, por $(1+i)^{-t}$ para obtenção do valor presente. Em seguida, monta-se a equação de equivalência de capitais e encontra-se o valor procurado. A escolha da data focal não altera o resultado da equação.

Exemplo 28. Luciane não planejou bem seus gastos de fim de ano e precisou usar R$ 1.000,00 do cheque especial de sua conta corrente. Depois de um mês, ela depositou R$ 500,00 e, no mês seguinte, mais R$ 400,00. Sabe-se que os juros do cheque especial de sua conta são de 12% ao mês, qual será o valor necessário para que Luciane quite a dívida ao final do terceiro mês?

Resolução: Nesse exemplo, tomando $t = 0$ como data focal tem-se a equação de equivalência de capitais:

$$1.000 = 500 \cdot (1{,}12)^{-1} + 400 \cdot (1{,}12)^{-2} + P \cdot (1{,}12)^{-3}$$

$$P \approx 329{,}73.$$

Caso fosse escolhido o período $t = 3$ como data focal, seria:

$$1000 \cdot (1{,}12)^3 = 500 \cdot (1{,}12)^2 + 400 \cdot 1{,}12 + P$$

$$P \approx R\$\, 329{,}73.$$

Assim, para quitar a dívida será necessário um depósito de R$ 329,73.

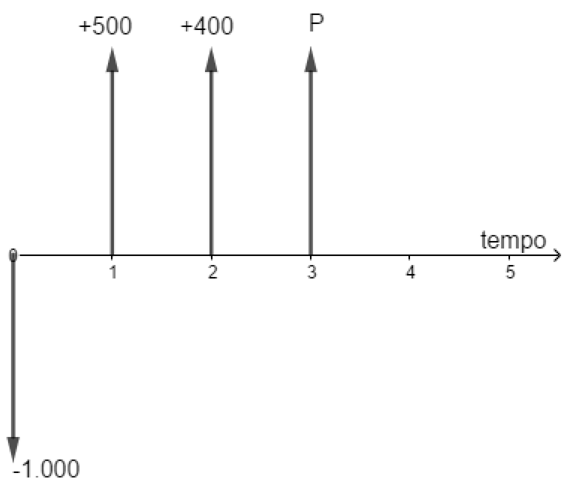

Figura 5. Representação do Exemplo 27 no diagrama de fluxo de caixa.

Exemplo 29. Fabiana fez um empréstimo bancário no valor de R$ 20.000,00 para comprar um carro, a taxa de juros do banco é de 7% ao mês, e será pago em 6 parcelas mensais iguais, sendo a primeira um mês após a contratação do empréstimo. Qual o valor de cada parcela que Fabiana irá pagar?

Resolução: Representando graficamente, tem-se:

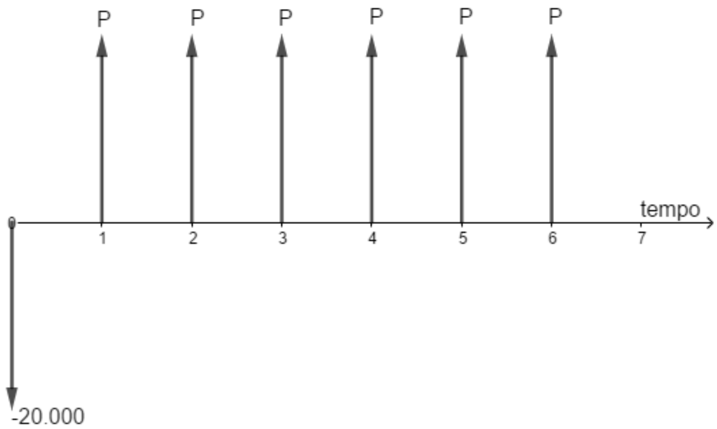

Figura 6. Diagrama de fluxo de caixa referente ao exemplo 28.

Montando a equação de equivalência, tomando $t = 0$ como distância focal:

$$20.000 = P \cdot 1{,}07^{-1} + P \cdot 1{,}07^{-2} + P \cdot 1{,}07^{-3} + P \cdot 1{,}07^{-4} + P \cdot 1{,}07^{-5} + P \cdot 1{,}07^{-6}$$

$$20.000 = P \cdot (1{,}07^{-1} + 1{,}07^{-2} + 1{,}07^{-3} + 1{,}07^{-4} + 1{,}07^{-5} + 1{,}07^{-6})$$

$$P \cdot \left(1{,}07^{-1} \cdot \frac{1{,}07^{-6} - 1}{1{,}07^{-1} - 1}\right) = 20.000$$

$$P \approx R\$\, 4.195{,}92.$$

Assim, o valor de cada parcela é R$ 4.195,92.

Observação: a soma $(1{,}07^{-1} + 1{,}07^{-2} + 1{,}07^{-3} + 1{,}07^{-4} + 1{,}07^{-5} + 1{,}07^{-6})$ representa a soma de uma progressão geométrica de seis termos, cujo primeiro termo é $1{,}07^{-1}$ e de razão $1{,}07^{-1}$.

Exemplo 30. Mateus quer trocar seu celular, a loja que ele foi oferece duas opções de compra: em três parcelas mensais de R$ 1.500,00 ou então em seis parcelas mensais de R$ 760,00. Se o dinheiro que Mateus possui pode render à taxa de 1,2% ao mês, qual é a opção mais vantajosa para ele?

Resolução: Analisando graficamente a primeira opção, tomando o período $(t = 0)$ como data focal, tem-se a seguinte equação de equivalência de capitais:

$$M_1 = 1.500 + 1.500 \cdot 1{,}012^{-1} + 1.500 \cdot 1{,}012^{-2}$$

$$M_1 \approx R\$\, 4.446{,}85.$$

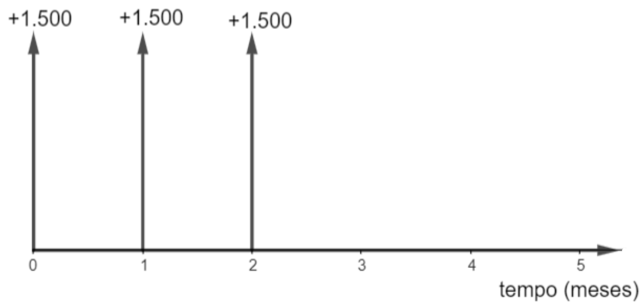

Figura 7. Diagrama de fluxo de caixa da primeira opção do Exemplo 29.

A equação da segunda opção tomando a mesma data focal ($t = 0$) será:

$$M_2 = 760 + 760 \cdot 1{,}012^{-1} + 760 \cdot 1{,}012^{-2} + 760 \cdot 1{,}012^{-3} + 760 \cdot 1{,}012^{-4} + 760 \cdot 1{,}012^{-5}$$

$$M_2 \approx R\$\ 4.426{,}94.$$

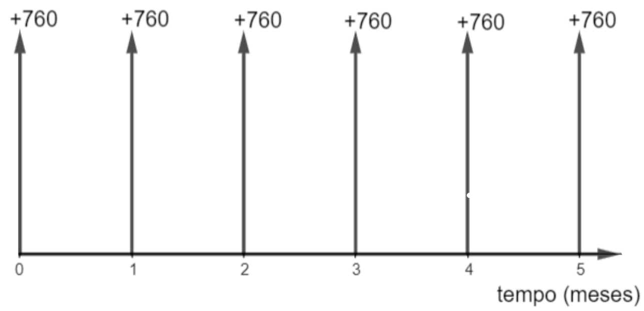

Figura 8. Diagrama de fluxo de caixa referente à opção 2 do Exemplo 29.

Conclui-se que a opção 2 é a mais vantajosa.

Exemplo 31. Roberto irá comprar um computador novo e consegue três opções para pagamento:

a) À vista com 5% de desconto;

b) Em duas vezes, sem desconto, com a 1ª parcela a ser paga após um mês;

c) Em três vezes, sem desconto, com a 1ª parcela a ser paga na entrada e as demais em 30 e 60 dias.

Sabendo que Roberto tem acesso à uma aplicação que rende 1% ao mês, qual a opção é a mais vantajosa para ele?

Resolução: Tomando $t = 0$, como data focal. A primeira opção será:

$$M_1 = 0{,}95 \cdot C.$$

A segunda opção será, em $t = 0$:

$$M_2 = P + P = 2 \cdot P.$$

Cada parcela equivale à:

$$0{,}95 \cdot C = P \cdot 1{,}01^{-1} + P \cdot 1{,}01^{-2}$$
$$(1{,}01^{-1} + 1{,}01^{-2}) \cdot P = 0{,}95 \cdot C$$
$$P \approx 0{,}4821 \cdot C.$$

Assim, $M_2 \approx 0{,}9642 \cdot C$.

A terceira opção, para $t = 0$:

$$M_3 = p + p + p = 3 \cdot p.$$

Cada parcela será:

$$0{,}95 \cdot C = p + p \cdot 1{,}01^{-1} + p \cdot 1{,}01^{-2}$$
$$(1 + 1{,}01^{-1} + 1{,}01^{-2}) \cdot p = 0{,}95 \cdot C$$
$$p \approx 0{,}3198 \cdot C.$$

Logo, $M_3 \approx 0{,}9594 \cdot C$.

Portanto, comparando as opções, conclui-se que a primeira opção é a mais vantajosa, caso ele possua todo o dinheiro para fazer o pagamento à vista.

2.5 Sistemas de Amortização

Ao longo da vida, por diversas vezes, uma pessoa pode ter a necessidade de pegar um empréstimo para financiar a compra de um imóvel, um carro ou para pagar a faculdade. Geralmente são dívidas de longo prazo, nas quais se paga (ou não) um valor de entrada e o valor restante é pago ao banco em prestações mensais. As parcelas mensais amortizam parte da dívida contraída e pagam os juros referentes ao período anterior. A forma que se dá a amortização é que difere nos sistemas que serão estudados.

Definição 32. Chama-se sistema de amortização o método que envolve desembolsos periódicos de capital e de encargos financeiros para pagamento de empréstimos ou financiamentos de longo prazo.

Nas operações de financiamento, os juros sempre são calculados sobre o saldo devedor do período anterior. As variáveis envolvidas são: valor da dívida contraída ou valor financiado (S_0); taxa efetiva de juros mensal (i); número de prestações contratadas (n); valor amortizado do período (A_t); saldo devedor do período (S_t); juros do período (taxa aplicada ao saldo devedor do período anterior) ($J_t = i.S_{t-1}$); valor da parcela a ser paga mensalmente que equivale à soma entre o valor amortizado e os juros do período ($P_t = A_t + J_t$).

Neste trabalho serão abordados dois dos sistemas de amortização mais utilizados no Brasil: o sistema de amortização constante (SAC), que é usado somente no financiamento imobiliário e o sistema de amortização francês (sistema PRICE), usado em empréstimos em geral. O objetivo principal é que o aluno compreenda a construção de uma tabela de amortização em ambos os sistemas, possibilitando que se faça a comparação entre elas.

2.5.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

O sistema SAC é comumente utilizado no financiamento de imóveis, e, como o próprio nome sugere, a amortização da dívida é constante e as parcelas pagas possuem valores diferentes em todos os períodos, sendo assim, o saldo devedor decresce linearmente, similar à uma progressão aritmética.

Como a amortização mensal é fixa ela equivale ao valor financiado dividido pelo total de parcelas contratadas:

$$A = \frac{S_0}{n}.$$

A prestação mensal será $P_t = A + J_t$. Já o saldo devedor de cada período pode ser calculado por $S_t = S_0 - t \cdot A$, que é o valor financiado menos o total amortizado até o momento.

Exemplo 33. Mercedes conseguiu realizar o sonho de ter uma casa própria, para isso recorreu a um empréstimo no valor de R$ 200.000,00 que deve ser pago em 20 meses. Seu banco oferece a taxa de juros efetiva de 6,5% ao mês. Construa uma tabela de amortização no sistema SAC desse financiamento de Mercedes.

Resolução: Pelos dados tem-se

$$S_0 = R\$\ 200.000{,}00;\ i = 0{,}065\ a.m.;\ n = 20\ meses;$$

$$A = \frac{S_0}{n} = \frac{200.000}{20} = 10.000.$$

Para essa tabela deve-se ter o período (t), a amortização (A), os juros (J_t), a prestação (P_t) e o saldo devedor (S_t).

PERÍODO (MESES)	AMORTIZAÇÃO (R$)	JUROS (R$)	PRESTAÇÃO (R$)	SALDO DEVEDOR (R$)
0	-	-	-	200.000
1	10.000	13.000	23.000	190.000
2	10.000	12.350	22.350	180.000
3	10.000	11.700	21.700	170.000
4	10.000	11.050	21.050	160.000
5	10.000	10.400	20.400	150.000
6	10.000	9.750	19.750	140.000
7	10.000	9.100	19.100	130.000
8	10.000	8.450	18.450	120.000
9	10.000	7.800	17.800	110.000
10	10.000	7.150	17.150	100.000
11	10.000	6.500	16.500	90.000
12	10.000	5.850	15.850	80.000
13	10.000	5.200	15.200	70.000
14	10.000	4.550	14.550	60.000
15	10.000	3.900	13.900	50.000
16	10.000	3.250	13.250	40.000
17	10.000	2.600	12.600	30.000
18	10.000	1.950	11.950	20.000
19	10.000	1.300	11.300	10.000
20	10.000	650	10.650	0
TOTAL	200.000	136.500	336.500	-

Tabela 9. Resolução do Exemplo 33.

2.5.2 Sistema de Amortização Francês (SAF ou PRICE)

O sistema PRICE, desenvolvido por Richard Price, é geralmente utilizado em empréstimos pessoais, para financiamento de automóveis e eletrodomésticos. Nele, as prestações mensais são constantes e o valor amortizado mensalmente varia a cada período. Conhecendo o valor de cada parcela, é possível encontrar o valor amortizado e os juros em cada período.

Teorema 34. A prestação P, no sistema PRICE, referente à um financiamento de um valor S_0, numa taxa de juros i pelo prazo de n períodos, com pagamento postergado será

$$P = S_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Demonstração: Tomando $t = 0$ como data focal, a equação de equivalência de capitais será

$$S_0 = P \cdot (1+i)^{-1} + P \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + P \cdot (1+i)^{-n}$$

$$S_0 = P \cdot [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}].$$

Observa-se que $[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n}]$ é a soma de uma progressão geométrica de razão $q = (1+i)^{-1}$, primeiro termo $a_1 = (1+i)^{-1}$ com n termos. Substituindo os valores na fórmula $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, tem-se

$$S_0 = P \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

$$S_0 = P \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$S_0 = P \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{1-1-i}{1+i}}$$

$$S_0 = P \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{1+i}{(-i)}$$

$$P = S_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

□

A amortização do período t será $A_t = P - J_t$, que é a diferença entre o valor da prestação e os juros do período. O saldo devedor pode ser calculado como a diferença entre o saldo devedor do período anterior e a amortização do período $S_t = S_{t-1} - A_t$.

Exemplo 35. Supondo a mesma situação apresentada no exemplo 33, construa uma tabela de amortização no sistema PRICE.

Resolução: Pelos dados tem-se

$$S_0 = R\$\ 200.000; \qquad i = 0{,}065\ a.m\ ; \qquad t = 20\ meses$$

Substituindo em $P = S_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$, tem-se

$$P = 200.000 \frac{0{,}065 \cdot (1{,}065)^{20}}{(1{,}065)^{20} - 1} \quad \Rightarrow \quad P \approx R\$\ 18.151{,}28.$$

PERÍODO (MESES)	PRESTAÇÃO (R$)	JUROS (R$)	AMORTIZAÇÃO (R$)	SALDO DEVEDOR (R$)
0	-	-	-	200.000,00
1	18.151,28	13.000,00	5.151,28	194.848,72
2	18.151,28	12.665,17	5.486,11	189.362,61
3	18.151,28	12.308,57	5.842,71	183.519,90
4	18.151,28	11.928,79	6.222,49	177.297,41
5	18.151,28	11.524,33	6.626,95	170.670,46
6	18.151,28	11.093,58	7.057,70	163.612,76
7	18.151,28	10.634,83	7.516,45	156.096,31
8	18.151,28	10.146,26	8.005,02	148.091,29
9	18.151,28	9.625,93	8.525,35	139.565,94
10	18.151,28	9.071,79	9.079,49	130.486,45
11	18.151,28	8.481,62	9.669,66	120.816,79
12	18.151,28	7.853,09	10.298,19	110.518,60
13	18.151,28	7.183,71	10.967,57	99.551,03
14	18.151,28	6.470,82	11.680,46	87.870,57
15	18.151,28	5.711,59	12.439,69	75.430,88
16	18.151,28	4.903,01	13.248,27	62.182,61
17	18.151,28	4.041,87	14.109,41	48.073,20
18	18.151,28	3.124,76	15.026,52	33.046,68
19	18.151,28	2.148,03	16.003,25	17.043,43
20	18.151,28	1.107,82	17.043,46	-0,03
TOTAL	363.025,60	163.025,57	200.000,03	-

Tabela 10. Resolução do exemplo 35.

Comparando as tabelas 9 e 10 percebe-se que no SAC as parcelas iniciais possuem valores maiores que no sistema PRICE.

Algumas observações:

- em geral, os financiamentos imobiliários são feitos em prazo de tempo bem maiores que 20 meses.

- de acordo com a legislação brasileira, Lei nº 8.692 de 28 de julho de 1993, o valor da parcela de financiamento imobiliário deve comprometer, no máximo, 30% da renda bruta familiar.

- os contratos de financiamento possuem incidência de IOF (Imposto sobre Operações Financeiras) e cláusulas relativas aos reajustes de inflação.

2.6 Plano de Previdência

Para o jovem, que inicia no mercado de trabalho e começa a ganhar seus primeiros salários, pensar em guardar parte desse dinheiro para se aposentar pode parecer desnecessário, porém o quanto antes começar um plano de previdência mais fácil será para garantir a tranquilidade financeira no futuro. A pessoa tem a opção de investir em planos programados pelo banco ou de fazer um investimento por conta própria, escolhendo as taxas que mais lhe são convenientes desde que mantenha a disciplina de seus depósitos.

Fazer um plano de aposentadoria é reservar anualmente uma quantia (P), durante t anos, numa taxa de juros anual (i), no regime de juros compostos. Pode-se representar o fluxo de caixa do plano de previdência

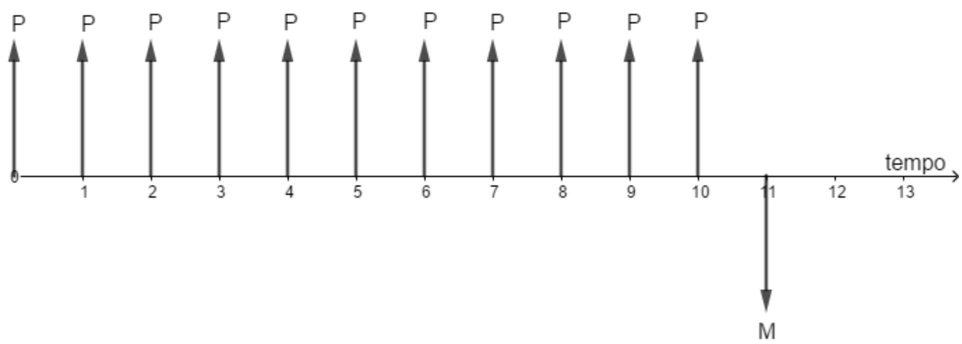

Figura 11. Diagrama de fluxo de caixa representando um plano de previdência com recolhimento de 11 períodos

Teorema 36. O montante a ser resgatado no momento da aposentadoria, com recolhimento anual de uma parcela P, durante t anos, numa taxa de juros efetiva anual i, no sistema de juros compostos será

$$M = \frac{P}{i} \cdot [(1+i)^t - (1+i)].$$

Demonstração: Tomando a data focal t como o início da aposentadoria, lembrando que no início da aposentadoria não há recolhimento de valores, a equação de equivalência de capitais será

$$M = P \cdot (1+i)^t + P \cdot (1+i)^{t-1} + \cdots + P \cdot (1+i)$$

$$M = P \cdot [(1+i)^t + (1+i)^{t-1} + \cdots + (1+i)].$$

Como $(1+i)^t + (1+i)^{t-1} + \cdots + (1+i)$ representa uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 1+i$, razão $q = 1+i$ e total de termos $n = t$, então

$(1+i)^t + (1+i)^{t-1} + \cdots + (1+i) = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{1+i-1}$, logo

$$M = P \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

$$M = \frac{P}{i} \cdot [(1+i)^t - (1+i)].$$

□

Exemplo 37. Vera, aos 30 anos, começa a fazer economias planejando se aposentar aos 60 anos. Ela pretende depositar R$ 1.000,00 por ano, num investimento que paga uma taxa de juros anual de 7,5%, no sistema de juros compostos. Qual será o valor final a ser resgatado na aposentadoria?

Resolução: Tem-se que $P = R\$\ 1.000{,}00$; $i = 0{,}075\ a.a.$ e $t = 30\ anos$

$$M = \frac{P}{i} \cdot [(1+i)^t - (1+i)]$$

$$M = \frac{1.000}{0{,}075} \cdot [(1{,}075)^{30} - 1{,}075]$$

$$M \approx R\$\ 102.399{,}40.$$

Assim, Vera irá resgatar R$ 102.399,40 aos 60 anos.

Exemplo 38. Helena, irmã gêmea de Vera, resolveu seguir os passos da irmã e, um ano depois, aos 31 anos, começou a aplicar a mesma quantia, no mesmo investimento de Vera. Considerando que as taxas bancárias são as mesmas e que ambas pretendem se aposentar na mesma idade, qual será o valor que Helena resgatará?

Resolução: Tem-se que $P = R\$\ 1.000{,}00$; $i = 0{,}075\ a.a.$ e $t = 29\ anos$

$$M = \frac{P}{i} \cdot [(1+i)^t - (1+i)]$$

$$M' = \frac{1.000}{0{,}075} \cdot [(1{,}075)^{29} - 1{,}075]$$

$$M' \approx R\$\ 94.255{,}26.$$

Assim, Helena irá resgatar R$ 94.255,26 aos 60 anos.

Capítulo 3 Plano de Aula

A estruturação do plano de aula teórico e prático, aliado aos conceitos econômicos fundamentais (relações de confiança, valor do capital vinculado ao tempo e custo de oportunidade) constitui um elemento muito poderoso de ensino, ao tornar concreto um conceito tão importante e aplicável a todos os aspectos da vida do aluno.

A Matemática Financeira destaca-se por suas múltiplas aplicações práticas, porém, é preciso que sejam corretamente fundamentados alguns conceitos básicos, segundo os quais todas as teorias se baseiam:

- A Economia se baseia em relações de confiança entre indivíduos e entidades, razão pela qual existem meios de pagamento, sua utilização como meio de troca e mecanismos de empréstimos/pagamentos, e relações entre credores e devedores;

- Com base nas relações acima designadas, o capital possui seu valor vinculado ao tempo. Ou seja, arbitrariamente, uma quantia de R$ 100,00 no dia presente não terá o mesmo valor daqui a 30 dias ou 01 ano, baseado no contexto financeiro em que nos inserimos. O entendimento de que o valor muda de valor com o tempo, baseado em taxas de juros, é o paradigma mais importante para postular-se, e base fundamental de todos os conceitos aqui abordados;

- Por fim, considerando-se os dois tópicos anteriores, as decisões financeiras, tanto de cunho cotidiano como as mais críticas, são fundamentadas no conceito de custo de oportunidade. O custo de oportunidade corresponde a um conceito bastante amplo - porém, aplicado ao contexto aqui exposto, trata-se da taxa de juros com a qual define-se um corte de viabilidade em se optar entre modais financeiros de empréstimo/pagamento, ou mesmo em decisões de compras simples do dia-a-dia. Idealmente, todas as pessoas deveriam conhecer bem seu custo de oportunidade, de forma a rapidamente identificar a viabilidade ou tomar as melhores decisões financeiras, todos os dias.

Uma vez entendido os três conceitos acima, pode-se construir a base prática da Matemática Financeira, que possui como pano de fundo tais aspectos. Ao se contextualizar e educar o estudante de forma a ter conhecimento e autonomia para tomar decisões financeiras, ampliam-se as opções das pessoas, perante a um oceano de ofertas que todos os mercados oferecem hoje em dia. Desde parcelamentos de compras no varejo, a tomada de empréstimo imobiliário, todos os dias as pessoas precisam tomar decisões financeiras, que precisam ser baseadas em como o capital muda de valor com o tempo, vinculado a seu custo de oportunidade.

3.1. Tema

Essa sequência didática pretende introduzir os estudos sobre o tema Matemática Financeira, apresentando situações problemas contextualizadas. É importante que além de resolver os exercícios, o professor enriqueça suas aulas, promovendo discussões críticas junto dos alunos.

3.2. Ano

Esta proposta didática é indicada para a 2º ano do Ensino Médio.

3.3. Tempo de duração

Para a realização dessa sequência didática, previu-se a utilização de sete a oito horas-aula de 50 minutos cada.

3.4. Materiais Necessários

Lousa, giz ou caneta para lousa, multimídia (televisão, projetor ou celular), calculadora científica ou celular, papel cartão, tesoura, cola, dado de seis faces, peões. Acesso à rede de internet.

3.5. Objetivo

Após concluir essa sequência didática é esperado do aluno:

- Identificar, diferenciar e calcular capital inicial, juros, taxa de juros e montante.
- Calcular valor presente e valor futuro.
- Resolver problemas nos diferentes regimes de capitalização.
- Comparar opções de investimento e de compra de bens e produtos.
- Construir tabelas de amortização, a fim de resolver situações de diferentes sistemas de amortização.
- Planejar um plano de aposentadoria.

- Formar um aluno crítico e capaz de analisar opções financeiras e comerciais.

3.6. Conhecimento Anterior

Para a realização dessa atividade é esperado que o aluno tenha conhecimento sobre Porcentagem, Progressões Geométricas e/ou Funções Exponenciais e Logaritmos.

3.7. Conteúdos Trabalhados

Os conteúdos a serem trabalhados são matemática financeira, regimes de capitalização e sistemas de amortização. Além dos cálculos utilizando fórmulas e calculadoras, é importante que sejam feitas discussões e análises dos casos apresentados.

3.8. Desenvolvimento

Esta sequência didática é composta de 8 horas-aula de 50 minutos cada, com atividades propostas a cada aula. De preferência uma aula por semana, para que haja tempo de os alunos fazerem e do professor corrigir os trabalhos.

O aluno de Ensino Médio não está familiarizado com os termos específicos dessa área, assim é aconselhável que o professor explique o vocabulário bancário sempre que este surgir.

Recomenda-se o uso de calculadora, se necessário, o professor deve expor uma breve instrução de uso.

3.8.1. Aula 1

Com o objetivo de estimular a curiosidade do aluno ao tema, recomenda-se iniciar a aula abordando aspectos históricos de matemática financeira. Para isso, com os alunos dispostos de frente para a lousa/quadro de projeção, o professor inicia com o vídeo Nerdologia, “História das Moedas” (até 8:20 min), disponível no YouTube https://www.youtube.com/watch?v=Popa7dOjOMU. Ao fim da projeção, o professor conduzirá uma discussão sobre o vídeo com os alunos, evidenciando a importância do estudo do tema e complementando se necessário. Caso a escola não possua rede de internet, essa projeção deve ser pulada e o professor pode fazer uma apresentação expositiva de tópicos históricos do Capítulo 1.

Em seguida, na lousa, o professor deve fazer uma breve revisão de cálculos de porcentagem e taxas percentuais. Caso necessário, o professor pode também propor exercícios do banco de questões em anexo. Essa parte da aula deve levar em torno de 25 minutos.

Estas são algumas sugestões de questões que devem ser abordadas nesse momento:

a) Calcule 30% de R$ 155,00.

b) Qual a porcentagem que R$ 35,00 representa de R$ 250,00.

c) Uma pessoa depositou R$ 600,00 na poupança. Um tempo depois verificou que possuía a quantia de R$ 675,00. Qual foi o rendimento da poupança, em porcentagem?

d) Para comprar um telefone celular de R$ 2.500,00 é necessário dar uma entrada de 20% desse valor. Quanto deve ser pago de entrada?

e) Qual o valor final de um produto cujo valor de R$ 300,00 sofreu um aumento de 8% e, em seguida, um desconto de 8%?

Por fim, nos 15 minutos finais, o professor deverá propor uma pesquisa para os alunos, podendo ser realizada individualmente, em dupla ou grupo, projetando no quadro ou entregando folhas impressas. Caso o professor decida que o trabalho seja em dupla ou em grupo, a divisão dos alunos deve ser feita após a apresentação.

Os resultados obtidos devem ser recolhidos e corrigidos pelo professor, observando os erros mais frequentes.

Atividade 1 - Pesquisa em casa: Investigação de preços

O Decreto-Lei 399 de 30 de abril de 1938 estipula os produtos que compõem a cesta básica e suas quantidades. As quantidades dos produtos variam em 3 regiões do país (Sudeste, Sul-Centro Oeste e Norte-Nordeste), para esta pesquisa usaremos as quantidades da cesta básica nacional. O Dieese (Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos) utiliza a cesta básica como base de referência para o cálculo do poder de compra do salário mínimo.

Pela Constituição Federal de 1988, no capítulo dos Direitos Sociais Art. 7º, tem-se como direito de todos os trabalhadores urbanos e rurais, sem distinção de sexo, o “salário mínimo, fixado em lei, nacionalmente unificado, capaz de atender a suas necessidades vitais básicas e às de sua família com moradia, alimentação, educação, saúde, lazer, vestuário, higiene, transporte e previdência social, com reajustes periódicos que lhe preservem o poder aquisitivo, sendo vedada sua vinculação para qualquer fim; (...)”.

- Faça uma pesquisa de preços, no mercado local ou online, dos produtos que compõem a cesta básica.
- Preencha a tabela com os valores encontrados.
- Calcule o valor total da cesta básica.
- Determine o poder de compra do salário mínimo, calculando a taxa percentual do valor do salário mínimo vigente em relação à cesta básica.
- Em sua opinião, o valor do salário mínimo está de acordo com aquilo que é proposto em lei? Justifique sua resposta.
- Entregue na próxima aula a tabela preenchida e os cálculos solicitados.

Alimento	Quantidade	Custo Unitário	Custo total
Carne	6,0 kg		
Leite	15,0 L		
Feijão	4,5 kg		
Arroz	3,0 kg		
Farinha	1,5 kg		
Batata	6,0 kg		
Legumes (Tomate)	9,0 kg		
Pão Francês	6,0 kg		
Café em pó	600 g		
Frutas (Banana)	90 unidades		
Açúcar	3,0 kg		
Banha/Óleo	1,5 kg		
Manteiga	900 g		

Figura 12: Tabela Cesta Básica Nacional.

3.8.2. Aula 2

Com os alunos de frente para a lousa, o professor deve iniciar a aula fazendo as observações sobre os trabalhos entregues pelos alunos, se necessário, retomar algum conceito que não tenha ficado claro, o tempo necessário é de 5 minutos, aproximadamente.

Em seguida, o professor deve fazer a projeção (ou entregar impresso ao aluno) o seguinte problema.

Situação Problema 1

“Quanto devo pagar, caso atrase em 5 dias da data de vencimento deste boleto?”

BANCO | 0033-4 | 03399.69925 58700.022617 23182.701013 6 91060000093108

Local para pagamento
Pagável em qualquer banco

Nosso número
0226123182 7

Beneficiário final
Condomínio da Matemática
Rua Qualquer, nº100 – Campinas/SP cep 13.000-000

Intermediado por
XX Banco AS
00.000.000./001-71

Vencimento
DD/MM/AAAA

Data do documento	Nº de documento	Especie Doc.	Aceite	Data processamento	(=) Valor do Documento
01/MM/AAAA	09/2022	RC	N	01/MM/AAAA	931,08

Uso do banco	Carteira	Moeda	Quantidade	(x) Valor	Multa/Juros/Descontos
	101	R$			

Instruções (Todas as informações deste boleto são de exclusiva responsabilidade do beneficiário)
Receber conforme instruções no próprio título. Não receber após 30 dias do vencimento.
Após vencimento: Multa: R$ 18,62. Juros 0,2% a.d. = R$ 1,86/dia

(=) Valor

Pagador
Xxxxxxx Xxxxx CPF: 000.000.000-00
Rua Qualquer, nº100 – Campinas/SP cep 13.000-000

Sacador/Avalista

Autenticação Mecânica/FICHA DE COMPENSAÇÃO

Figura 13: Boleto para cálculo de pagamento com atraso.

A seguir, o professor deve fazer a leitura do documento, explicando o significado de cada campo e de palavras desconhecidas dos alunos. Na sequência, faz os cálculos (calculando dia a dia o valor do boleto).

Após abordar o cálculo do atraso no pagamento do boleto, o professor introduz o conceito e a teoria do regime de juros simples. Neste momento é interessante que seja discutido o conceito de taxas de juros proporcionais, que serão usadas para o cálculo de contas com atraso de períodos racionais.

Após a teoria, o professor deve propor problemas aos alunos, dando tempo para resolução e fazendo a correção em aula. O tempo estimado é de 40 minutos para a realização.

Algumas sugestões de problemas para abordar com os alunos:

a) Uma conta tem valor de R$ 240,00 e os juros de mora são de 1,5% ao mês. Determine o valor cobrado caso a conta seja paga com 10 dias de atraso.

b) Qual será o montante a ser pago por uma dívida de 7 dias no cheque especial de R$ 730,00, cuja taxa de juros é de 13% ao mês?

Nos 5 minutos finais, o professor deve explicar a atividade que os alunos farão em casa. A atividade é individual, deve ser entregue pelo aluno e corrigida pelo professor.

Atividade 2 - Exercício para casa: Boleto Bancário

- Procure em sua casa um boleto bancário (que já tenha sido pago, pois ele deve ser entregue ao professor junto de seus cálculos).
- Faça a leitura desse boleto e responda as questões 1 e 2 abaixo. Entregue ao professor seus cálculos junto do boleto utilizado.
- Questão 1: Identifique o valor do boleto e a taxa de juros cobrada.
- Questão 2: Qual o valor a ser pago no caso de um atraso de 10 dias?

3.8.3. Aula 3

Com os alunos de frente para a lousa, o professor deve iniciar a aula retomando o conceito de taxas de juros sucessivas, propondo a seguinte situação problema.

Situação problema 2

Qual será a quantia resgatada após 20 meses de um investimento de R$ 750,00 em um fundo de investimento, com taxa fixa de 0,9% ao mês, capitalizados mensalmente?

Após a leitura, o professor deve pedir que os alunos proponham uma solução. A correção deve ser feita na sequência, é interessante que nos primeiros 3 meses o cálculo seja feito mês a mês, para que o aluno perceba que o juro é sempre calculado sobre o montante imediatamente anterior e que o montante final é uma função exponencial. Ao fim da correção, o professor introduz o conceito e a teoria de regime de capitalização composto. Neste momento é interessante inserir o conceito de taxas de juros equivalentes, muito utilizados para o cálculo de inflação acumulada. Estima-se cerca de 20 minutos para esse processo.

Nos próximos 25 minutos, o professor deve trabalhar diversos problemas envolvendo juros compostos, sempre deixando tempo para que os alunos resolvam e corrigindo em seguida.

Estas são algumas sugestões de questões:

a) Uma pessoa pegou um empréstimo de R$ 2.000,00, no regime de capitalização de juros compostos, à uma taxa de 2% a.m. no prazo de 6 meses. Qual será o valor total a ser pago pelo empréstimo?

b) Qual o tempo necessário para que um capital de R$ 1.500,00 dobre de valor, se aplicado no regime de juros compostos à uma taxa de 12% ao ano?

c) Qual o montante obtido num investimento de R$ 10.000,00 numa taxa de 1,2% ao mês, no regime de juros compostos, durante 15 meses? Analise também três situações, caso o investidor dobre o capital, ou dobre a taxa ou dobre o prazo do investimento. Em qual delas ele obterá o maior montante?

Nos 5 minutos finais, o professor deve passar a atividade para que os alunos façam em casa. Essa pode ser realizada individualmente e entregue na aula seguinte. Os cálculos obtidos devem ser recolhidos e corrigidos pelo professor, os erros mais frequentes devem ser observados em sala de aula.

Atividade 3 - Pesquisa em casa: Rendimento da poupança

A Caderneta de Poupança é o investimento financeiro mais democrático do Brasil. Desde a sua criação em 1861 por D. Pedro II, sempre teve caráter popular e serviu como meio para que o brasileiro de classes mais pobres conseguisse formar uma reserva financeira. Também foi importante no contexto da abolição da escravidão no país, (pois era um meio permitido aos escravizados para guardar dinheiro, oficialmente desde 1874, e comprar sua alforria), e na emancipação feminina, (quando, no ano de 1934, às mulheres e aos menores de 16 anos foi concedido o direito de fazer depósitos sem a autorização de maridos ou pais). Nessa época, o dinheiro arrecadado com os depósitos feitos na poupança poderia ser usado para subsidiar a penhora de joias e operações imobiliárias.

Entre as vantagens de se investir em poupança estão: a facilidade de se abrir uma conta; ela possui liquidez imediata; é isenta de taxas administrativas, IOF e Imposto de Renda; tem a garantia do Fundo Garantidor de Crédito em caso da falência ou “quebra” do banco. Como desvantagens, podemos citar: como os juros são pagos apenas após um mês do depósito é preciso se programar para fazer o saque e não perder a remuneração; e a baixa rentabilidade, que em tempos de alta inflação pode não garantir sequer a correção monetária.

Atualmente, se a taxa Selic estiver acima de 8,5% ao ano, o rendimento da poupança será de 0,5% ao mês somado com a variação da TR (Taxa de Referência), se a taxa Selic estiver igual ou abaixo de 8,5% ao ano, a poupança irá render 70% da Selic mais a variação da TR. Essa regra é válida para depósitos feitos à partir de 04 de maio de 2012, para depósitos anteriores a essa data, os rendimentos correspondem à TR mais 0,5% ao mês.

- Faça uma pesquisa do valor da taxa de rendimento anual da caderneta de poupança e das regras para a abertura de uma aplicação.
- Use o valor encontrado para fazer os cálculos pedidos nas questões abaixo.
- Questão 1: Se eu depositar R$ 2.000,00 na caderneta de poupança, quanto terei daqui 10 anos?
- Questão 2: Possuo R$ 6.000,00 e quero comprar uma moto de R$ 12.000,00. Por quanto tempo terei que investir meu dinheiro na poupança a fim de comprar a moto?
- Esta atividade deve ser entregue ao professor.

3.8.4. Aula 4

Com os alunos de frente para a lousa, o professor deve projetar no quadro ou entregar impresso a situação problema 3.

Situação Problema 3

“Quero comprar um smartphone Samsung Galaxy S21 ultra preto, tela de 6,8 polegadas, 5G, memória de 256 GB. Qual loja oferece a melhor opção para mim?”

Numa pesquisa online, as ofertas que mais chamaram atenção foram:

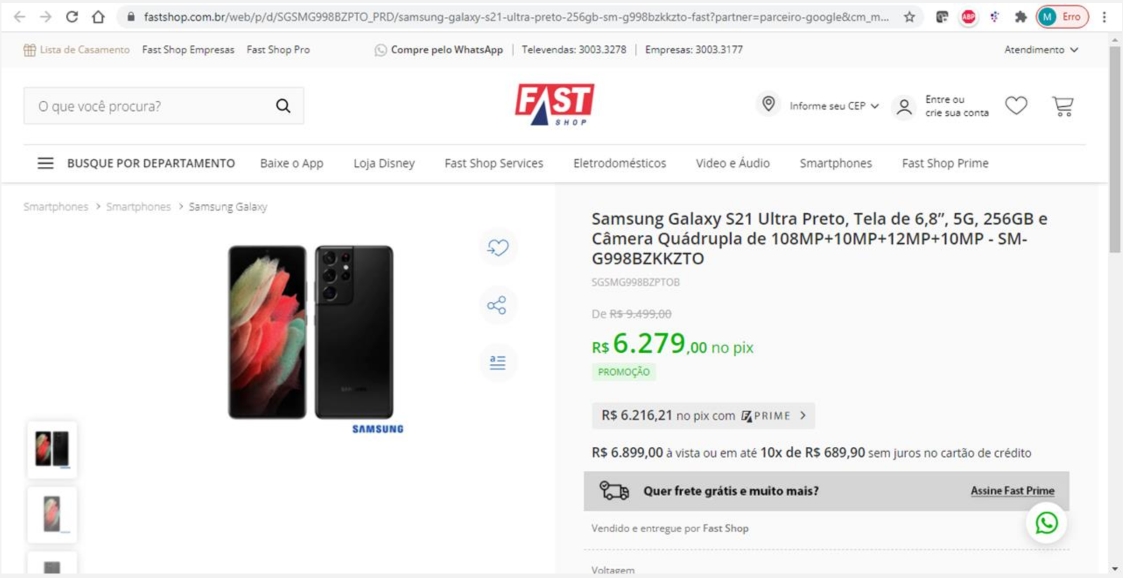

Figura 14: Anúncio de celular no site da Fast Shop. Pesquisa realizada em 30/10/2021.

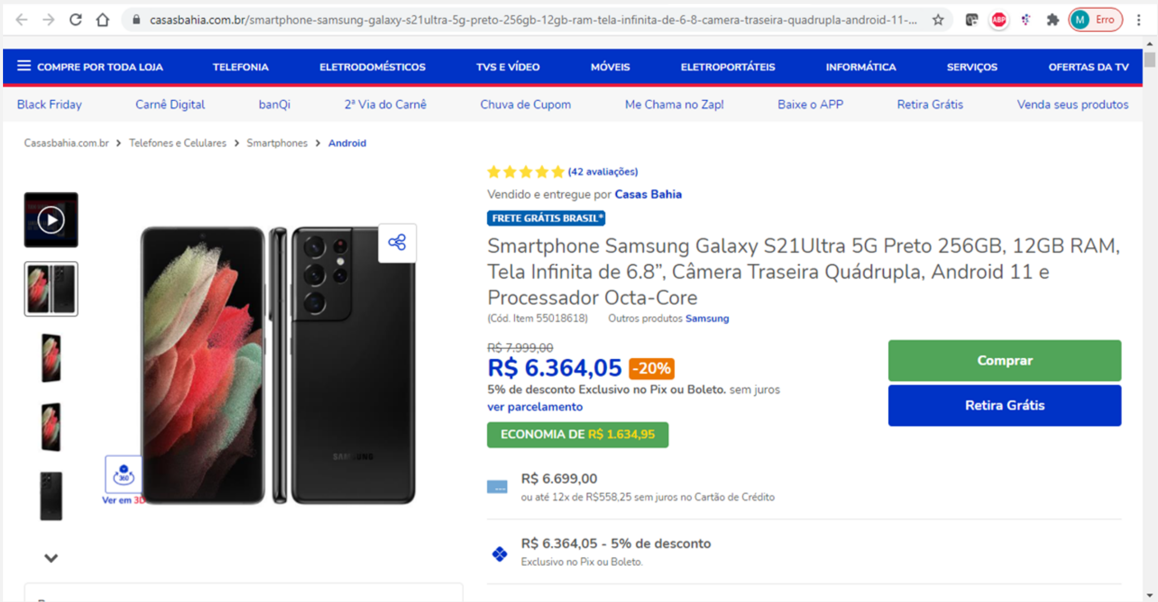

Figura 15: Anúncio de celular no site da Casas Bahia. Pesquisa realizada em 30/10/2021

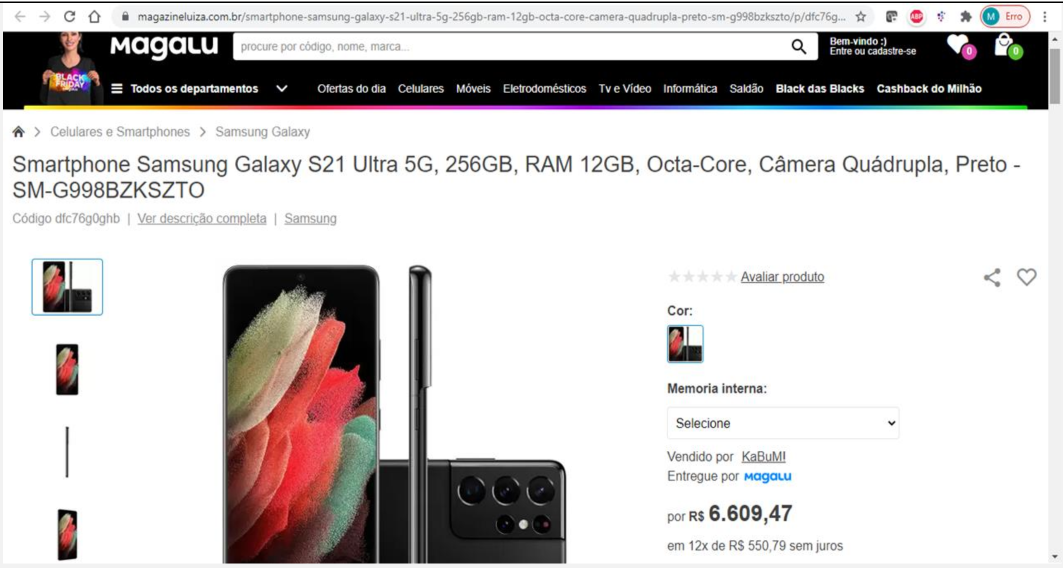

Figura 16: Anúncio de celular no site da Magazine Luiza. Pesquisa realizada em 30/10/2021

- Considerações:

a) todas as lojas selecionadas possuem o produto, com qualidade, prazo de entrega, confiabilidade etc, similares. As únicas variáveis a serem consideradas são as financeiras;

b) possuo todo o dinheiro para comprar o aparelho a vista, e tenho renda para comprar a prazo (mesada que ganho de familiares e pequena renda com trabalhos informais);

c) o dinheiro para compra à vista está aplicado em uma Caderneta de Poupança, a uma taxa de 0,5% ao mês.

Após a leitura da situação problema, o professor deve fazer a explicação do conceito e uso do fluxo de caixa, utilizando-se desse recurso, deve analisar as opções disponíveis e, junto dos alunos, escolher a melhor opção. É interessante que o professor use mais de uma data focal, para que o aluno perceba que esta escolha não influencia na análise do problema. Essa parte da aula deve durar em torno de 15 minutos.

Em seguida, o professor deve propor exercícios para que os alunos façam a aplicação do fluxo de caixa, levando em torno de 20 minutos. Alguns problemas sugeridos:

a) Uma pessoa usou R$ 600,00 do cheque especial de sua conta corrente. Após um mês, ela depositou R$ 150,00 e, no mês seguinte, mais R$ 100,00. Sabe-se que os juros do cheque especial da conta são de 11% ao mês, para quitar a dívida no final do terceiro, qual será o valor necessário?

b) Para comprar uma televisão uma loja oferece duas opções de parcelamento: em três parcelas mensais de R$ 800,00 ou então em seis parcelas mensais de R$ 420,00. Se o dinheiro desse cliente pode render à taxa de 2% ao mês, qual é a opção mais vantajosa?

Nos 15 minutos finais, o professor deve propor a atividade 5, que trata sobre o planejamento de aposentadoria e será recolhida. Após a leitura da atividade, o professor deve encaminhar a resolução, explicando, através do diagrama de fluxo de caixa, que num plano de previdência o resgate do montante é feito apenas ao fim do processo.

Atividade 4 em sala de aula - Aposentadoria

“Como envelhecer com segurança financeira?”

“Como posso planejar minha aposentadoria?”

“Quando precisarei começar a economizar para me aposentar?”

No Brasil, infelizmente, poucas pessoas conseguem sobreviver exclusivamente com o auxílio da previdência social, um bom planejamento pode ajudar a garantir tranquilidade financeira em idades mais avançadas.

O hábito de poupar deve ser desenvolvido desde a adolescência, quanto antes começar, mais fácil será atingir o objetivo.

Em uma folha, responda às questões e entregue ao professor.

Questão 1: Aos 25 anos, uma pessoa começa a economizar para se aposentar aos 60 anos. Ela depositará anualmente a quantia de R$ 1.500,00, numa taxa de juros anual de 6,5%, no sistema de juros compostos. Qual será o valor final a ser resgatado na aposentadoria?

Questão 2: Qual será o valor final, se a pessoa começar a guardar o dinheiro um ano depois, depositando os mesmos R$ 1.500,00 por ano, na mesma taxa de juros?

3.8.5. Aula 5

Nesta aula, com os alunos de frente para a lousa, o professor deve explicar o que é um sistema de amortização, as características e diferenças entre os oferecidos pelo mercado financeiro. Algumas palavras são desconhecidas aos alunos, assim, é interessante uma breve explicação sobre os termos utilizados. Essa parte da aula deve durar em torno de 15 minutos.

Após a explicação, o professor deve propor a seguinte atividade que será feita em dupla e entregue ao final da aula. Deve ficar claro ao aluno que no sistema SAC, a amortização é constante mês a mês. O professor pode iniciar a tabela, calculando o valor da amortização mensal, os juros e as prestações dos dois primeiros meses, deixando que as duplas terminem de completar a tabela. É interessante que o professor circule pela sala de aula tirando as eventuais dúvidas que surgirem.

Atividade 5 em sala de aula – Preenchimento de tabela SAC

O sonho da grande maioria dos brasileiros é ter uma casa própria. Infelizmente esse sonho é realizado apenas para uma pequena parcela da população. Poucos dispõem da quantia total para a compra do imóvel, na maioria das vezes é necessário recorrer à um financiamento imobiliário.

Pela Lei nº 8.692 de 28 de julho de 1993, no Art. nº 2, “Os contratos de financiamento habitacional celebrados em conformidade com o Plano de Comprometimento da Renda estabelecerão percentual de, no máximo, trinta por cento da renda bruta do mutuário destinado ao pagamento dos encargos mensais.”.

O comprador deve comprovar a renda mensal e não ter seu nome incluído em qualquer órgão de proteção de crédito.

A idade mínima para solicitar um financiamento é de 21 anos e a soma da idade do pretendente com o número de anos de financiamento deve ser de 75 anos, no máximo. Em geral, os empréstimos são feitos em longos prazos.

- Esta atividade é em dupla, entreguem ao professor no final da aula.
- Nesta atividade, serão calculados os valores de um financiamento de um imóvel de R$ 100.000,00 à ser quitado em 12 meses, numa taxa de juros efetiva de 7% ao mês.
- Completem a tabela de amortização no sistema SAC e respondam a questão.

Questão: Considerando a Lei nº 8.692, qual deve ser a renda bruta da pessoa que deseje requerer esse financiamento?

Período (meses)	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)	Saldo Devedor (R$)
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Total				

Figura 17: Tabela de amortização no sistema SAC.

3.8.6. Aula 6

O professor deve retomar o problema proposto na aula anterior, observando aos alunos que as parcelas variavam mês a mês, nessa aula será estudado o sistema Price, no qual o valor da parcela é fixo. A atividade deve ser realizada com a mesma dupla da aula anterior. O professor pode optar por fazer o cálculo da parcela e completar os dois primeiros meses da tabela. A atividade deve levar em torno de 30 minutos.

Atividade 6 em sala de aula – Preenchimento de tabela Price

- Esta atividade é em dupla e deve ser entregue ao professor no final da aula.
- Agora, serão calculados os valores de um financiamento de R$ 100.000,00 à ser quitado em 12 meses, numa taxa de juros efetiva de 7% ao mês.
- Completem a tabela de amortização no sistema Price, o valor da parcela é de R$ 12.590,20.

Período (meses)	Prestação (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Saldo Devedor (R$)
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Total				

Figura 18: Tabela de amortização no sistema Price.

Nos minutos finais de aula, o professor deve fazer uma discussão entre as atividades realizadas nas duas aulas sobre sistemas de amortização. É interessante comparar as vantagens e desvantagens de cada um deles. Também é interessante discutir com os alunos a renda mensal necessária para requerer algum desses financiamentos. Antes de finalizar, o professor deve solicitar que os alunos tragam materiais para a aula seguinte (dados e peões).

3.8.7. Aula 7

Esta é uma aula de encerramento na qual será feito um jogo de tabuleiro em grupo com os alunos. O professor deve levar preparado o material. Para a confecção, serão necessários papel cartão, um dado de 6 faces, 4 peões, tesoura, cola e caneta. Além do tabuleiro, o professor deve preparar as questões que serão feitas aos alunos e pequenos círculos de papel cartão. Alguns materiais podem ser solicitados anteriormente aos alunos pelo professor.

Já no início da aula, os alunos devem estar reunidos em grupos, que podem ser os mesmos grupos formados em aulas anteriores ou previamente definidos pelo professor.

A atividade é um jogo de tabuleiro inspirado no "Jogo da Vida". O tabuleiro é feito em papel cartão colorido, com um percurso quadriculado que liga os extremos do tabuleiro. Durante o percurso, existem paradas obrigatórias, nas quais os alunos devem responder às perguntas propostas. O formato do percurso pode ser feito da forma que o professor achar mais fácil, esta é apenas uma sugestão.

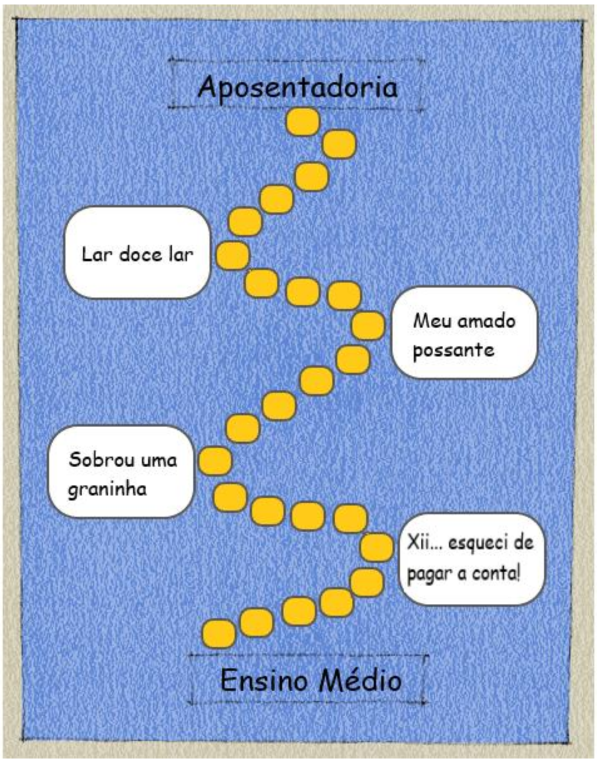

Figura 19. Projeto de tabuleiro do jogo.

Atividade 7 em sala de aula – Jogo de tabuleiro

Regras:

- Este jogo pode ser jogado de 2 até 4 pessoas, acima de 4 participantes formam-se duplas.
- Para iniciar a partida, todos os jogadores terão seus peões na parte inferior do tabuleiro, no retângulo “Ensino Médio”.
- Cada participante lança o dado, aquele que fizer a maior quantidade de pontos iniciará a partida, seguindo a ordem da maior pontuação para a menor. Em caso de empate, os jogadores empatados decidem pelo dado qual será a sua vez.
- Uma vez sorteada a ordem dos jogadores, esta se manterá até o fim.
- Os jogadores irão fazer o percurso pela trilha quadriculada, avançando os pontos obtidos no lançamento dos dados, até chegar às paradas: “Xii... esqueci de pagar a conta!”, “Sobrou uma graninha”, “Meu amado possante”, “Lar doce lar” e “Aposentadoria”.
- Ao chegar em cada parada, o aluno irá responder questões relacionadas com matemática financeira e receberá uma moeda, caso acerte.
- O aluno pode fazer consulta ao caderno e usar a calculadora.
- A resolução deve ser feita em uma folha e entregue ao professor para correção.
- O aluno que obtiver a maior quantidade de moedas será o vencedor. O jogo terminará quando todos os alunos chegarem ao canto superior “Aposentadoria”.
- Ao final todos entregam os exercícios resolvidos para serem corrigidos pelo professor.
- O objetivo é percorrer o tabuleiro, através da trilha quadriculada, passando por todos as paradas.
- As questões serão sobre juros simples, juros compostos, sistema SAC, sistema Price e previdência.

A ideia é que durante o percurso os alunos passem por diversas situações do cotidiano conforme elas naturalmente acontecem durante a vida. Cada parada terá a pergunta específica de um tema. Primeiro o cálculo do boleto vencido, depois, a caderneta de poupança, a compra financiada do primeiro veículo, da casa própria e por último, o resgate da previdência.

As questões devem ser entregues aos alunos, uma folha por grupo, um aluno fará a pergunta ao outro e corrigindo a resposta, fazendo o revezamento entre eles. Os problemas devem ser de resolução rápida e todas do mesmo nível. Seguem abaixo algumas sugestões.

Juros simples - Estas questões devem ser colocadas na primeira parada “Xii, esqueci de pagar a conta!”

a) Um boleto no valor de R$ 52,00 foi pago com 8 dias de atraso. Se o juro de mora é de 9% ao mês, qual o valor pago? Resposta: R$ 53,25.

b) Uma pessoa atrasou em 6 dias o pagamento da parcela de R$ 126,00 da prestação de sua geladeira. Qual o valor pago, se o juro de mora é de 5% ao mês? Resposta: R$ 127,26.

c) Qual o valor pago pelo atraso de 5 dias no pagamento de um boleto de R$ 374,00, cujo juro de mora é de 6% ao mês? Resposta: R$ 377,74.

d) Uma pessoa atrasou 9 dias o pagamento do carnê de prestações do carro, no valor de R$ 1570,00. A taxa de juro de mora é de 4% ao mês. Qual o valor pago? Resposta: R$ 1.588,84.

Juros compostos - Estas questões devem ser colocadas na segunda parada “Sobrou uma graninha”

a) Um capital de R$ 1.500,00 foi aplicado à uma taxa de juros de 2% ao mês, no regime de juros compostos. Qual o montante obtido após 3 anos? Resposta: R$ 3.059,83.

b) Investiu-se o valor de R$ 20.000,00 à uma taxa de 0,9% ao mês no regime de juros compostos. Qual o montante resgatado após 2 anos? Resposta: R$ 24.798,08.

c) A quantia de R$ 1.200,00 foi investida por 12 meses. Se a taxa de juros, no regime de juros compostos, era de 4% ao mês, qual o montante resgatado? Resposta: R$ 1.921,24.

d) Um capital de R$ 5.400,00 foi aplicado em 30 meses. Sabe-se que a taxa de juros compostos era de 1,2% ao mês, qual o valor pago resgato ao final desse período? Resposta: R$ 7.723,41.

Sistema Price – Estas questões devem ser colocadas na terceira parada “Meu amado possante”

a) Para comprar meu carro, dei uma entrada de R$ 12.000,00 e financiei os R$ 10.000,00 restantes. Complete a tabela de amortização no sistema Price para um financiamento de R$ 10.000,00 em 3 prestações mensais de R$ 3.810,52 à uma taxa de juros de 7% ao mês.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				R$ 10.000,00
1	R$ 3.810,52			
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 10.000,00
1	R$ 3.810,52	R$ 700	R$ 3.110,52	R$ 6.889,48
2	R$ 3.810,52	R$ 482,26	R$ 3.328,26	R$ 3.561,22
3	R$ 3.810,52	R$ 249,29	R$ 3.561,23	R$ 0
Total	R$11.431,56	R$1.431,55	R$10.000,01	

b) Para comprar um carro de R$ 22.000,00, usei minhas economias para dar uma entrada de R$ 10.000,00. O restante financiei. Complete a tabela de amortização no sistema Price para um financiamento de R$ 12.000,00 em 3 prestações mensais de R$ 4.489,32 à uma taxa de juros de 6% ao mês.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				R$ 12.000,00
1	R$ 4.489,32			
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 12.000,00
1	R$ 4.489,32	R$ 720,00	R$ 3.769,32	R$ 8.230,68
2	R$ 4.489,32	R$ 493,84	R$ 3.995,48	R$ 4.235,20
3	R$ 4.489,32	R$ 254,11	R$ 4.235,21	R$ 0
Total	R$ 13.467,96	R$ 1.467,95	R$ 12.000,01	

c) Para comprar minha primeira moto, dei uma entrada de R$ 1.500,00 e tive que financiar R$ 7.000,00. Complete a tabela de amortização no sistema Price para um financiamento de R$ 7.000,00 em três prestações mensais de R$ 2.864,49 à uma taxa de juros de 11% ao mês.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				R$ 7.000,00
1	R$ 2.864,49			
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 7.000,00
1	R$ 2.864,49	R$ 770,00	R$ 2.094,49	R$ 4.905,51
2	R$ 2.864,49	R$ 539,61	R$ 2.324,88	R$ 2.580,63
3	R$ 2.864,50	R$ 283,87	R$ 2.580,63	R$ 0
Total	R$ 8.593,48	R$1.593,48	R$ 7.000,00	

d) Para comprar minha primeira moto, não tinha nenhuma economia e financiei o valor total de R$ 8.500,00. Complete a tabela de amortização no sistema Price para um financiamento de R$ 8.500,00 em três prestações mensais de R$ 3.417,98 à uma taxa de juros de 10% ao mês.

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				R$ 8.500,00
1	R$ 3.417,98			
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 8.500,00
1	R$ 3.417,98	R$ 850,00	R$ 2.567,98	R$ 5.932,02
2	R$ 3.417,98	R$ 593,20	R$ 2.824,78	R$ 3.107,24
3	R$ 3.417,98	R$ 310,73	R$ 3.107,25	R$ 0
Total	R$ 10.253,94	R$1.753,93	R$ 8.500,01	

Sistema SAC – Estas questões devem ser colocadas na parada “Lar doce lar”

a) Na compra da minha casa própria, precisei financiar parte do valor. Complete a tabela de amortização no sistema SAC, para um financiamento de R$ 240.000,00 em 3 prestações anuais a uma taxa de juros de 8% ao ano.

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0				R$ 240.000,00
1				
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 240.000
1	R$ 80.000	R$ 19.200	R$ 99.200	R$ 160.000
2	R$ 80.000	R$ 12.800	R$ 92.800	R$ 80.000
3	R$ 80.000	R$ 6.400	R$ 86.400	R$ 0
Total	R$ 240.000	R$ 38.400	R$ 278.400	

b) Para a compra de minha casa, fiz um financiamento no banco. Complete a tabela de amortização no sistema SAC para um financiamento de R$ 300.000,00 em 3 prestações anuais a uma taxa de juros de 6,5% ao ano.

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0				R$ 300.000
1				
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 300.000,00
1	R$ 100.000	R$ 19.500	R$ 119.500	R$ 200.000
2	R$ 100.000	R$ 13.000	R$ 113.000	R$ 100.000
3	R$ 100.000	R$ 6.500	R$ 106.500	R$ 0
Total	R$ 300.000	R$ 39.000	R$ 339.000	

c) Para comprar meu apartamento, precisei fazer um financiamento. Complete a tabela de amortização no sistema SAC para um financiamento de R$ 120.000,00 em 3 prestações anuais a uma taxa de juros de 9% ao ano.

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0				R$ 120.000,00
1				
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 120.000,00
1	R$ 40.000	R$ 10.800	R$ 50.800	R$ 80.000
2	R$ 40.000	R$ 7.800	R$ 47.800	R$ 40.000
3	R$ 40.000	R$ 3.600	R$ 43.600	R$ 0
Total	R$ 120.000,00	R$ 21.600	R$ 141.600	

d) Para comprar meu apartamento, faltou uma parte que financiei no banco. Complete a tabela de amortização no sistema SAC para um financiamento de R$ 150.000,00 em 3 prestações anuais a uma taxa de juros de 7% ao ano.

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0				R$ 150.000,00
1				
2				
3				
Total				

Resolução:

Período	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	R$ 150.000
1	R$ 50.000	R$ 10.500	R$ 60.500	R$ 100.000
2	R$ 50.000	R$ 7.000	R$ 57.000	R$ 50.000
3	R$ 50.000	R$ 3.500	R$ 53.500	R$ 0
Total	R$ 150.000,00	R$ 21.000	R$ 171.000	

Previdência – Estas questões devem ser colocadas no fim do percurso, no canto superior direito “Aposentadoria”

a) Durante 30 anos, guardei R$ 1.200,00 por ano numa taxa anual de 7% no sistema de juros compostos. Quanto vou resgatar ao me aposentar? Resposta: R$ 112.152,94

b) Desde os 25 anos de idade, deposito anualmente R$ 800,00 numa aplicação que rende 8% ao ano no sistema de juros compostos. Qual valor irei resgatar aos 65 anos? Resposta: R$ 206.445,21

c) Comecei a poupar para minha aposentadoria aos 40 anos, uma quantia de R$ 1.000,00 aplicadas numa taxa anual de 7,5% no regime de juros compostos. Quanto irei resgatar ao me aposentar aos 65 anos? Resposta: R$ 66.977,86

d) Desde os 20 anos aplico anualmente R$ 1.000,00 a uma taxa de 7,5% ano no sistema de juros compostos. Quanto irei resgatar se me aposentar aos 60 anos? Resposta: R$ 226.256,52

Figura 20. Tabuleiro do jogo em papel cartão.

3.9. Avaliação

As avaliações serão feitas de forma contínua no decorrer das aulas, pelo relatório das atividades entregues.

3.10. Discussão do plano de aula

Em termos de aplicação prática, a conceitualização teórico-prática deve ser priorizada, com a introdução da base teórica, suas fórmulas e aplicações de crescente complexidade. Apenas após alguma fundamentação teórica, os conceitos econômicos devem ser inseridos, para que estejam mais acessíveis ao repertório de experiências disponível ao aluno. Muito provavelmente este conceito seja distinto da educação financeira para adultos, onde muitas vezes os conceitos econômicos são fundamentados antes da teoria-prática.

Após a introdução das fórmulas, conceitos e exercícios, é de fundamental importância ir trabalhando os conceitos de valor do capital no tempo e custo de oportunidade, à medida que os alunos tornam-se proficientes nos conceitos práticos. Apenas dessa forma será possível unir esses dois pilares, de forma que construa-se um legado para a vida do aluno e o exercício de sua cidadania.

Atividades e discussões em grupo de situações reais constituem uma excelente prática de aprendizado, pois torna real a utilização dos conceitos, proporciona o respeito à diversas formas de pensar e de tomar decisões. Na última aula, o uso da atividade lúdica tem o propósito envolver os alunos e de finalizar o estudo da matemática financeira.

Considerações Finais

O tema Matemática Financeira está presente em diversas situações do cotidiano, sendo essencial para um planejamento familiar eficiente, com menos endividamento, e de acordo com as suas possibilidades. Nesse sentido, o estudo deste tema é de suma importância para a inserção social do aluno do Ensino Médio.

Ter conhecimento desta área permite que o indivíduo consiga entender os impactos econômicos diariamente noticiados nas mídias e jornais, e como isso impacta no seu dia a dia, compare as opções de financiamento e investimento, consiga evitar o endividamento e possíveis explorações, bem como tenha condições de cobrar direitos e deveres.

A proposta de aula apresentada neste trabalho visa fornecer uma alternativa simples e contextualizada para ser desenvolvida em sala de aula, com vistas a garantir uma maior atenção, interação e participação dos alunos. Com isso, acredita-se que o aluno possa atuar de forma mais ativa na construção do seu conhecimento, e assim seja capaz de refletir sobre as situações do cotidiano e intervir de forma protagonista no meio em que está inserido.

Longe de ser a solução dos problemas de desigualdades no país, o ensino sólido e direcionado de Matemática Financeira no ensino médio pode ser um primeiro passo para que o aluno possa aproveitar melhor o dinheiro que possui, fazendo melhores escolhas e contribuindo para o planejamento familiar de forma positiva.

Referências Bibliográficas

AGÊNCIA BRASIL: Percentual de famílias com dívidas chega a 65,6% em dezembro, diz CNC. *Agência Brasil, 09 de janeiro de 2020*. Disponível em, <https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2020-01/percentual-de-familias-endividadas-chega-656-em-dezembro-diz-cnc>. Acesso em: 22 mar. 2023.

AMORIM, V. O Ensino de Matemática financeira: do livro didático ao mundo real. In: 2º SIMPÓSIO DE FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORDESTE. 2016. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016, p. 1. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_O-ensino-de-Matematica-Financeira.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2018.

BANCO DO BRASIL, Cartilha moeda digital versão atual, 2017. Disponível em: < https://www.mpf.mp.br/atuacao-tematica/ccr2/publicacoes/cartilhas/atuacao-interinstitucional-com-o-bb/cartilha-moeda-digital-versaoatual.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2022.

BARONI, A. K. C.; HARTMANN, A. L. B.; CARVALHO, C. C. S. Uma Abordagem Crítica da Educação Financeira na Formação do Professor de Matemática. Curitiba: Editora Appris Ltda, 2021.

BORTOLOTTO, A. P. 99.4% dos brasileiros não conhecem o conceito de juros compostos e isso é preocupante. Terraço Econômico. InfoMoney, 27 de março 2017. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/colunistas/terraco-economico/994-dos-brasileiros-nao-conhecem-o-conceito-de-juros-compostos-e-isso-e-preocupante/>. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL, [Constituição (1988)]. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.

BRASIL, Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional, Brasília: Ministério da Educação, 1999.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FECOMÉRCIORN. CNC: Mais famílias endividadas, porém inadimplência segue em queda. *Fecomércio RN, 08 de março 2021.* Disponível em: <https://fecomerciorn.com.br/noticias/cnc-mais-familias-endividadas-porem-inadimplencia- segue-em-queda/>. Acesso em: 15 abr. 2021.

GRANDO, N. I.; SCHNEIDER, I. J. *Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos*. Zetetike, Campinas, SP, v. 18, n. 1, 2010. DOI: 10.20396/zet.v18i33.8646693. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646693>. Acesso em: 3 nov. 2022.

IBGE: *IPCA – Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo. IBGE*. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidoramplo.html?edicao=20932&t=series-historicas> Acesso em: 22 mar. 2023.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 11 São Paulo, Atual 2004.

LEGISLAÇÃO CITADA. Decreto-Lei 399. Disponível em: <https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra;jsessionid=CC25A28D962A01F9955926BA34624169.proposicoesWebExterno2?codteor=227039&filename=LegislacaoCitada+-PL+3738/2004>. Acesso em: 05 abr. 2023.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2 Rio de Janeiro, SBM 1998.

MATIAS, R. F. Matemática Financeira no Ensino Médio: Educando para a vida. 2018. 91 p. Dissertação de Mestrado (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Federal de Goiânia. 2018. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/8318/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Roberto%20Fernandes%20Matias%20-%202018.pdf>. Acesso em: 18 out. 2021.

MAOR, E.e: A História de um Número. Rio de Janeiro, Editora Record, 5ª ed 2008.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO: MEC lança Programa Educação Financeira na Escola. MEC, 17 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/mec-lanca-programa-educacao-financeira-nas-escolas>. Acesso em: 18 out. 2021.

MIRANDA, L. A. N.; PHILIPPSEN, A. S. A importância da matemática financeira no cotidiano e na construção da cidadania. Os desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE. Artigos. 2014. Volume 1. Versão Online. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unespar-paranavai_mat_artigo_lourdes_aparecida_nocette.pdf>. Acesso em: 16 out. 2021.

MOREIRA, V. G.; FREITAS, B. G. de A matemática dos empréstimos & financiamentos no ensino médio (livro eletrônico). Rio de Janeiro, SBM 2021. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/11/A_Matematica_dos_Emprestimos_e_Financiamentos.pdf. Acesso em 3 nov. 2022.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. Progressões e Matemática Financeira. Rio de Janeiro, SBM 2015.

MUCCIACITO, R. *Logaritmos: história, aplicações e vídeos animados*. 2021. 127p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2021.

NOVAES, R. C. N. *Uma abordagem visual para o Ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio*. 2009. 206 p. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2018_Rosa%20Cordelia%20Novellino%20de%20Novaes.pdf>. Acesso em: 18 out. 2021.

PIRES, H. F. *Bitcoin: a moeda do ciberespaço.* Geousp – Espaço e Tempo (Online), v. 21, n. 2, p. 407-424, agosto. 2017. ISSN 2179-0892.

Disponível em: https://www.revistas.usp.br/geousp/article/view/134538. Acesso em: 3 nov. 2022.

ROBERT, J. A origem do dinheiro. Lisboa, Global Editora e Distribuidora LTDA, 2ª ed 1989.

ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. Matemática e Atualidade. Vol. 1 Rio de Janeiro, SBM 2015.

SANTOS, A. S. *Análise da Matemática financeira nos livros didáticos do ensino médio*. 2012. 64 p. Monografia (Graduação em Licenciatura Plena em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande. 2012. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/889/1/PDF%20-%20Aluska%20Souza%20Santos.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2018.

SANTOS, M. P. dos. *Bitcoin: funcionamento e características de uma criptomoeda*. 2016. 1 CD-ROM. Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Ciências Econômicas) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências e Letras (Campus de Araraquara), 2016. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/155450>. Acesso em: 3 nov. 2022.

SUSEP: Educação financeira nas escolas. Brasil, 2017. Disponível em: <https://www.meufuturoseguro.gov.br/acoes-educacionais/programas-transversais-da-enef/educacao-financeira-nas-escolas>. Acesso em: 18 out. 2021.

ULRICH, F. Bitcoin a moeda na era digital. São Paulo, Instituto Ludwig von Mises Brasil 2014. Disponível em: <https://produtos.infomoney.com.br/hubfs/ebook-bitcoin.pdf>. Acesso em: 3 nov. 2022.

WIKIPEDIA. Soldo (moeda). Disponível em: https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Soldo_(moeda) Acesso em: 30 ago. 2022

Apêndices

a) Questões Extras

Este é um banco de questões para auxiliar o professor. Envolvem juros simples e compostos, com exercícios de fixação e questões do ENEM.

1) Sérgio emprestou R$ 5.000,00 para seu primo a taxa de 0,5 % a.m., no regime de juros simples. Qual o valor que o primo de Sergio lhe pagará após 6 meses?
Resposta: R$ 5.150,00

2) Sr. Carlos fez um empréstimo de R$ 80.000,00 para ampliar sua padaria. Ao final de um ano, pagou R$ 104.000,00 ao banco. Qual foi a taxa de juros anual aplicada pelo banco?
Resposta: 30% a.a.

3) Uma marcenaria, devido ao bom faturamento de seus negócios, resolve antecipar em três meses, uma dívida bancária de R$ 15.000,00. A taxa de desconto oferecida pelo banco e de 3 % a.m., no regime de juros simples. Qual será o desconto recebido pela marcenaria?
Resposta: R$ 1.350,00

4) Sabrina aplicou sua economia de R$ 10.000,00 a uma taxa de 2 % a.t., no regime de juros compostos por três meses. Calcule quanto ela resgatará e qual foi o juro da aplicação.
Resposta: Resgatará R$ 10.200,00; o juro será de R$ 200,00

5) Denise possui R$ 6.000,00 que deseja colocar em uma aplicação, a juros compostos, a taxa de 0,8 % a.m.. Qual o montante que Denise resgatará após um ano?
Resposta: R$ 6.602,03

6) O sonho de Marcos é ter uma moto cujo modelo custa R$ 12.000,00, mas hoje ele tem apenas R$ 9.000,00. Marcos encontrou um investimento que rende 5 % a.m., no

regime de juros compostos. Quanto tempo Marcos deve deixar seu dinheiro nessa aplicação para conseguir comprar a moto?
Resposta: 6 meses aproximadamente

7) Dona Alice quer fazer uma viagem ao exterior assim que se aposentar, dentro de dois anos. A viagem custa R$ 20.000,00. Dona Alice decidiu investir parte de suas economias para pagar essa viagem com os juros da aplicação. Ela conseguiu, junto ao banco, um investimento que rende 6 % a.t., no regime de juros compostos. Qual o capital que Dona Alice deverá investir para conseguir o dinheiro dessa viagem?
Resposta: R$ 12.548,25

8) (ENEM 2000) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os pontos possíveis, é de R$ 21.000,00 e esse valor não será reajustado nos próximos meses.
Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2 % ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.
Para ter o carro, João deverá esperar:
a) dois meses, e terá a quantia exata.
b) três meses, e terá a quantia exata.
c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$225,00.
d) quatro meses, e terá a quantia exata.
e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$430,00.
Resposta: C

9) (ENEM 2009) João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25 % de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25 % sobre o total emprestado.
A opção que dará a João o menor gasto seria

a) renegociar suas dívidas com o banco.

b) pegar emprestado de José o dinheiro referente a quitação das duas dívidas.

c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.

d) pegar emprestado de José o dinheiro referente a quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

e) pegar emprestado de José o dinheiro referente a quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

Resposta: E

10) (ENEM 2012) Arthur deseja comprar um terreno de Cleber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

Opção 1: Pagar a vista, por R$ 55.000,00.

Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00, e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.

Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.

Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.

Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar a vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor a vista (ou até um valor menor), em um investimento, com rentabilidade de 10 % ao semestre, resgatando os valores a medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Resposta:D

11) (ENEM 2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180.000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1 % ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da

prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1 % sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento).

Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) 2.075,00 b) 2.093,00 c) 2.138,00 d) 2.255,00 e) 2.300,00

Resposta: D

12) (ENEM 2017) Um empréstimo foi feito a taxa mensal de i%, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

a) $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$ b) $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}\right]$ c) $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$

d) $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{3i}{100}\right)}\right]$ e) $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^3}\right]$

Resposta: A

13) (ENEM 2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P=\frac{5.000\times 1{,}013^n\times 0{,}013}{(1{,}013^n-1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log1,013; 2,602 como aproximação para log400 e 2,525 como aproximação para log335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12. b) 14. c) 15. d) 16. e) 17.

Resposta: D

14) (ENEM 2019) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

a) 398,02. b) 400,00. c) 401,94. d) 404,00. e) 406,02.

Resposta: B

15) (ENEM digital 2020) Um investidor deseja aplicar R$ 10.000,00 em um dos fundos de investimento de um banco. O agente de investimentos desse banco apresentou dois tipos de aplicações financeiras: a aplicação Básica e a aplicação Pessoal, cujas informações de rendimentos e descontos de taxas administrativas mensais são apresentadas no quadro:

Aplicação	Taxa de rendimento mensal	Taxa administrativa mensal
Básica	0,542 %	R$ 0,30
Pessoal	0,560 %	3,8 % do rendimento mensal

Consideradas as taxas de rendimento e administrativa, qual aplicação fornecerá maior valor de rendimento líquido a esse investidor e qual será esse valor?

a) Básica, com rendimento líquido de R$ 53,90.

b) Básica, com rendimento líquido de R$ 54,50.

c) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 56,00.

d) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 58,12.

e) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 59,80

Resposta: A

16) (ENEM 2021) Um professor tem uma despesa mensal de 10% de seu salário com transporte e 30% com alimentação. No próximo mês, os valores desses gastos sofrerão aumento de 10% e 20%, respectivamente, mas seu salário não terá reajuste.

Com esses aumentos, suas despesas com transportes e alimentação aumentarão R$ 252,00.

O salário mensal desse professor é de

a) R$ 840,00. b) R$ 1 680,00. c) R$ 2 100,00. d) R$ 3 600,00. e) R$ 5 200,00.

Resposta: D

17) (ENEM 2021) Um casal decidiu aplicar em um fundo de investimentos que tem uma taxa de rendimento de 0,8% ao mês, num regime de capitalização composta.

O valor final *F* a ser resgatado, depois de *n* meses, a uma taxa de rendimento mensal x, é dado pela expressão $F = C(1+x)^n$, em que *C* representa o capital inicial aplicado.

O casal planeja manter a aplicação pelo tempo necessário para que o capital inicial de R$ 100 000,00 duplique, sem outros depósitos ou retiradas.

Fazendo uso da tabela, o casal pode determinar esse número de meses.

Y	Log *Y*
1,008	0,003
1,08	0,03
1,8	0,20
2	0,30
3	0,47

Para atender ao seu planejamento, o número de meses determinado pelo casal é

a) 156 b) 125 c) 100 d) 10 e) 1,5

Resposta: C

b) Vocabulário

Este é um vocabulário básico com algumas palavras que podem aparecer em operações financeiras.

- AMORTIZAÇÃO – processo de redução de uma dívida por meio de pagamentos periódicos pré-definidos.
- CAPITAL – dinheiro disponível para aplicação
- CAPITALIZAÇÃO – acumulo de valores através de aplicação financeira
- CUSTO DE OPORTUNIDADE – é o rendimento atribuído à uma determinada opção de investimento
- DATA FOCAL – é a data tomada como referência para a construção do fluxo de caixa
- INFLAÇÃO – é o aumento de preços de mercadorias, bens e serviços.
- JUROS – rendimento recebido pelo empréstimo de dinheiro
- MONTANTE – soma entre o capital e os juros por ele produzido em uma aplicação financeira.
- MORA – valor variável, cobrado pela prorrogação do prazo de pagamento, proporcional ao atraso.
- MULTA – cobrança única feita como penalização financeira por quebra de contrato, como num pagamento em atraso.
- PAGAMENTO POSTECIPADO – é o pagamento feito ao fim do prazo estipulado
- PRINCIPAL – é o mesmo que capital
- TAXA DE JUROS EFETIVA – é a taxa em que a unidade de tempo de referência é a mesma da capitalização
- TAXA DE JUROS NOMINAL – é uma taxa de juros em que a unidade de tempo de referência é sempre anual e não coincide com a unidade de tempo da capitalização, que pode ser diário, mensal, trimestral ou semestral.
- VALOR FUTURO – é o mesmo que montante
- VALOR PRESENTE – é o mesmo que capital