UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MATEUS SOUZA DE OLIVEIRA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA CONTEXTUALIZAÇÃO DO ENSINO DE FUNÇÃO AFIM POR PARTES: ADAPTAÇÃO DAS QUESTÕES DOS LIVROS DIDÁTICOS

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
2023

MATEUS SOUZA DE OLIVEIRA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA CONTEXTUALIZAÇÃO DO ENSINO DE FUNÇÃO AFIM POR PARTES: ADAPTAÇÃO DAS QUESTÕES DOS LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva

VITÓRIA DA CONQUISTA – BAHIA
2023

O48s Oliveira, Mateus Souza de.

Sequência didática para contextualização do ensino de função afim por partes: adaptação das questões dos livros didáticos. / Mateus Souza de Oliveira, 2023.

235f. il.

Orientador (a): Dr. Fernando dos Santos Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2023.

Inclui referências. 214- 220.

1. Matemática. 2.Ensino de funções. 3. BNCC. 4. Conceitos matemáticos. I. Silva, Fernando dos Santos. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - Ba. III. T.

CDD: 510

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção-CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

MATEUS SOUZA DE OLIVEIRA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA CONTEXTUALIZAÇÃO DO ENSINO DE FUNÇÃO AFIM POR PARTES: ADAPTAÇÃO DAS QUESTÕES DOS LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva - UESB

Prof. Dr. Adson Martins Meira - UESB Prof.

Dr. Adriano Pedreira Cattai - UNEB

Vitória da Conquista – BA

Aprovado em 30 de junho de 2023

AGRADECIMENTOS

Desenvolver e concluir esta dissertação de mestrado foi uma jornada desafiadora, mas que se tornou possível graças ao apoio e carinho que recebi ao longo do caminho. Gostaria de expressar minha gratidão em primeiro lugar a Deus, pois Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas. A Ele seja dada a glória eternamente (ROMANOS, 11:36).

Sou imensamente grato aos meus pais, que sempre me apoiaram incondicionalmente, encorajando-me a perseguir meus sonhos.

Gostaria de agradecer aos meus filhos, Clara Leal, Elise Ellen e Mateus Jr., por serem minha fonte constante de amor e inspiração. O apoio e a compreensão deles foram essenciais durante todo esse processo.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha amada namorada. Seu apoio foi e continuará sendo uma fonte de inspiração para mim. Obrigado por ser parte importante dessa conquista.

Um agradecimento especial ao meu orientador, prof. Fernando dos Santos Silva, pela orientação sábia, dedicação e apoio constante. Sua expertise e incentivo foram fundamentais para o sucesso deste trabalho.

Expresso minha gratidão à banca, composta pelos professores Adriano Cattai e Adson Meira, por dedicarem seu tempo e conhecimento para avaliar este trabalho e fornecer valiosas contribuições.

Também gostaria de agradecer a todos os meus amigos e colegas do Profmat, que compartilharam essa jornada comigo, enfrentando desafios e superando obstáculos juntos. Sua amizade e colaboração foram essenciais para minha trajetória acadêmica.

Por fim, quero estender meu agradecimento a todos os meus amigos e familiares, que sempre me motivaram e encorajaram ao longo dessa jornada. O apoio emocional e palavras de incentivo de cada um deles foram fundamentais para minha perseverança.

A todos vocês, meu mais sincero agradecimento. Sem o apoio e amor de cada um, essa conquista não seria possível.

RESUMO

As abordagens dos livros didáticos de Matemática para o Novo Ensino Médio constituem uma temática que suscita diversas discussões. Nesse contexto, o objetivo geral deste trabalho foi compreender as estratégias e os procedimentos matemáticos relacionados ao ensino de Funções definidas por mais de uma sentença, presentes nos livros didáticos disponibilizados pelo PNLD 2021 – Objeto 2, com ênfase nas possíveis situações reais. Para alcançar esse objetivo, foram delineados três apontamentos teóricos que sustentam esta pesquisa e os demais objetivos. O primeiro enfatiza a contextualização do saber matemático; o segundo aborda o ensino de Funções com a exploração dos fatos históricos, aspectos pedagógicos e abstratos, além do objeto matemático em questão; o terceiro explora o livro didático com foco na sua relevância e aquisição, bem como nas orientações da BNCC. Dada a complexidade desse fenômeno, optou-se pelo desenvolvimento de uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa. O estudo envolveu a análise de seis volumes, cada um pertencente a uma das seis coleções selecionadas através de critérios de escolha e exclusão previamente planejados. Para a análise dos dados, utilizou-se a técnica de análise de conteúdo difundida por Bardin. Essa análise foi essencial para a produção de uma sequência didática com foco no ensino de Função afim por partes de forma contextualizada, composta por questões selecionadas e adaptadas dos livros analisados. Os resultados revelam que o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença ainda não é considerado uma temática relevante para a maioria dos autores e editores responsáveis pela elaboração dos livros. As abordagens iniciais adotadas nos exemplares demonstram contribuir efetivamente para a apropriação de conceitos matemáticos sem a necessidade do rigor matemático de forma imediata. No entanto, os resultados também evidenciam que praticamente todos os volumes ainda priorizam atividades técnicas e repetitivas. Isso indica a necessidade de ampliar a abordagem do conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, incorporando uma maior contextualização e diversidade de estratégias para o ensino da Matemática.

Palavras-chave: Matemática. Ensino de Funções. BNCC. Conceitos Matemáticos.

ABSTRACT

The approaches of Mathematics textbooks for the New High School constitute a theme that raises several discussions. In this context, the general objective of this work was to understand the strategies and mathematical procedures related to the teaching of Functions defined by more than one sentence, present in the textbooks made available by PNLD 2021 – Object 2, with emphasis on possible real situations. To achieve this objective, three theoretical notes that support this research and the other objectives were outlined. The first emphasizes the contextualization of mathematical knowledge; the second addresses the teaching of Functions with the exploration of historical facts, pedagogical and abstract aspects, in addition to the mathematical object in question; the third explores the textbook focusing on its relevance and acquisition, as well as the BNCC guidelines. Given the complexity of this phenomenon, we opted for the development of a bibliographical research with a qualitative approach. The study involved the analysis of six volumes, each belonging to one of the six collections selected through previously planned selection and exclusion criteria. For data analysis, the content analysis technique disseminated by Bardin was used. This analysis was essential for the production of a didactic sequence focused on teaching Affine Function by parts in a contextualized way, composed of questions selected and adapted from the analyzed books. The results reveal that the content of Functions defined by more than one sentence is still not considered a relevant topic for most authors and editors responsible for preparing the books. The initial approaches adopted in the examples demonstrate to effectively contribute to the appropriation of mathematical concepts without the need for immediate mathematical rigor. However, the results also show that practically all volumes still prioritize technical and repetitive activities. This indicates the need to broaden the approach to the content of Functions defined by more than one sentence, incorporating greater contextualization and diversity of strategies for teaching Mathematics.

Keywords: Mathematics. Teaching Functions. BNCC. Mathematical concepts.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

Anatel – Agência Nacional de Telecomunicações
BDTD – Banco Digital de Teses e Dissertações
BNCC – Base Nacional Curricular Comum
Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Cgpli – Coordenação-Geral dos Programas do Livro
Cofins – Contribuição para Financiamento da Seguridade Social
Colted – Comissão do Livro Técnico e Livro Didático
DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais
DCNEM – Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio
DOU – Diário Oficial da União
Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
ICMS – Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços
IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
INSS – Instituto Nacional do Seguro Social
IR – Imposto de Renda
IRPF – Imposto de Renda Pessoa Física
IRRF – Imposto sobre a Renda Retido na Fonte
IPTU – Imposto Predial e Territorial Urbano
LDBEN – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
LDM – Livro Didático de Matemática
MEC – Ministério da Educação
MMM – Movimento da Matemática Moderna
OCEM – Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PIS – Programa de Integração Social
PNLEM – Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
PNLD – Programa Nacional do Livro Didático
PNE – Plano Nacional de Educação
Profmat – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBM – Sociedade Brasileira de Matemática
UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
UAB – Universidade Aberta do Brasil

1 INTRODUÇÃO

A dinâmica social contemporânea é marcada por rápidas transformações impulsionadas pelos avanços tecnológicos, o que requer que os seres humanos sejam formados de acordo com essa realidade em constante evolução. Nesse contexto, o Ensino Médio passou por uma ampla revisão e reestruturação, visando proporcionar aos estudantes uma educação sólida que atenda às demandas do mercado de trabalho atual e promova a formação de cidadãos conscientes.

Para alcançar esse objetivo, foi preconizada a substituição do modelo de currículo único por um modelo de formação básica geral, que abranja habilidades e competências nas diferentes áreas de conhecimento estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Além disso, foi implementado um itinerário formativo com currículos diferenciados, de acordo com as realidades locais, a fim de oferecer uma educação mais personalizada e contextualizada (BRASIL, 2018).

O sistema educacional brasileiro tem passado por um processo de reformulação curricular, que inclui a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN, Lei 9399/96), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e a BNCC. Esse último documento é uma base normativa que estabelece as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE). Essa iniciativa visa garantir que todos os estudantes tenham acesso a uma educação de qualidade e adquiram as competências necessárias para sua formação integral como cidadãos.

A BNCC não é um currículo, mas há uma relação de complementaridade entre ambos (BRASIL, 2018). Nesse sentido, os currículos escolares precisam adequar as proposições dessa base à realidade local, considerando tanto a autonomia das instituições de ensino quanto o contexto e as características dos estudantes. Para isso, foram formuladas quatro áreas do conhecimento para o Novo Ensino Médio: Linguagens e suas Tecnologias (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa); Matemática e suas Tecnologias (Matemática); Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Biologia, Física e Química); e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia e Filosofia).

No Novo Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias tem o propósito de aprofundar e ampliar um conjunto de conceitos e procedimentos que favoreçam a compreensão da realidade, desde situações cotidianas até questões de outras áreas da Ciência (BRASIL, 2018). Dessa forma, é necessário que os conteúdos matemáticos para essa etapa de ensino contribuam para o desenvolvimento das capacidades de abstração, generalização e argumentação dos estudantes. Nesse nível, um aspecto importante a ser trabalhado é a contextualização, já que é fundamental que os objetos de conhecimento matemático sejam apreendidos em contextos significativos para o estudante.

Entretanto, os conhecimentos matemáticos explorados nas disciplinas de Matemática têm sido apresentados de forma excessivamente monótona e com pouca vinculação à vida do estudante (D'AMBRÓSIO, 2012). Isso pode ser reflexo dos materiais utilizados pelos professores. Antes da criação do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), alguns livros de Matemática direcionados para a Educação Básica apresentaram suas abordagens de forma abstrata, repletos de símbolos e linguagens próprias, com poucas ligações com as questões do cotidiano (ÁVILA, 1993).

É possível observar que alguns desses livros focam bastante nos exercícios de fixação, algo totalmente abstrato que induz o estudante ao processo de reprodução automática sem muita noção do motivo de cada passo realizado no processo resolutivo, bem como sua utilidade para a sociedade em geral. Brito (2005) enfatiza que quando é apresentado um conteúdo aos estudantes, é oportuno que seja feita uma relação do que será abordado com algum aspecto da sua vida, para que eles não vejam aquele conteúdo com absoluta desconexão com sua realidade. Como o ensino de Matemática, sobretudo o de funções, modela várias situações reais, é possível aproximar os conhecimentos escolares das vivências dos sujeitos envolvidos nos processos educacionais. Diante do exposto, foi traçada a seguinte pergunta norteadora para esta pesquisa: **como as estratégias e os procedimentos matemáticos relacionados ao ensino de Funções por mais de uma sentença vêm sendo adotados nos livros didáticos de Matemática?** Para tanto, limitou-se este estudo analisando somente as coleções disponibilizadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2021 – Objeto 2, para a disciplina de Matemática do 1º ano do Novo Ensino Médio.

1.1 Justificativa

Este trabalho é resultado da necessidade desse professor-pesquisador de produzir um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) no programa de pós-graduação *stricto sensu* em Matemática denominado Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat). O Profmat é um programa de oferta nacional na área de Matemática, na modalidade semipresencial, composto por uma rede de Instituições de Ensino Superior. Neste caso específico, o curso foi realizado na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Campus Vitória da Conquista, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (UAB/Capes), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

No primeiro semestre do curso do Profmat, todos os cursistas têm como disciplina obrigatória a chamada MA11 – Números e Funções Reais, que aborda os conteúdos relacionados à Teoria dos Conjuntos e dos Números Reais, bem como as Funções afins, quadráticas, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Durante essa etapa de aperfeiçoamento do conhecimento voltado para o 1º ano do Ensino Médio, foi possível observar que os conteúdos abordados estavam relacionados ao livro adotado para esta disciplina, “Números e Funções Reais”, de autoria de Elon Lages Lima, um renomado matemático que contribuiu bastante para a expansão da SBM e do IMPA.

A obra mencionada está dividida em 20 unidades, apresentando muitos conceitos, teoremas, propriedades e diferentes estratégias de resolução e métodos demonstrativos. Ao final de cada unidade, há uma lista de exercícios recomendados, que às vezes é acompanhada por outra lista de exercícios suplementares. Essas atividades estão divididas em dois tipos: aquelas que enfatizam o uso abstrato do rigor matemático e aquelas que evidenciam o uso dos objetos matemáticos de forma contextualizada em seu processo resolutivo.

Apesar de o rigor matemático ser fundamental para um bom domínio dos conceitos matemáticos, a possibilidade de relacionar esses conhecimentos específicos da Matemática com situações reais representa uma alternativa para enriquecer ainda mais as estratégias de ensino. Essas reflexões conduziram à construção de uma sequência didática que se fundamenta na BNCC (BRASIL, 2018), com o objetivo de desenvolver algumas competências e habilidades elencadas para essa área do conhecimento.

Dado que o tema de Funções ocupa uma posição de destaque nos currículos de Matemática da Educação Básica e oferece possibilidades de construção de tarefas e projetos interligando diferentes áreas do conhecimento científico, optou-se por selecionar o conteúdo de Funções por mais de uma sentença como objeto de estudo. Entendeu-se que essa abordagem modela diferentes situações reais e é um conteúdo matemático amplamente explorado no Ensino Superior, especialmente durante o estudo das disciplinas de Cálculo. Além disso, existem poucas pesquisas que discorrem sobre a relevância desse objeto.

Nessa perspectiva, voltamos nosso foco para o livro didático de Matemática disponibilizado pelo PNLD 2021 – Objeto 2, pois trata-se de um material acessível a quase todos os estudantes do Ensino Médio em escolas públicas e muitas vezes serve como um dos principais referenciais para o professor no momento de planejar suas aulas. Além disso, esse recurso didático faz parte do cotidiano da sala de aula, o que o torna uma fonte importante para a análise e desenvolvimento da sequência didática proposta.

De uma forma geral, o presente trabalho possui relevância educacional no que tange ao desenvolvimento de competências e habilidades da Matemática instruídas pela BNCC (BRASIL, 2018), para o Novo Ensino Médio. Nesse sentido, no âmbito da unidade temática de Números e Funções, foi apresentada uma sequência didática composta por tarefas matemáticas contextualizadas que exigem o senso investigativo. Assim, dentre as habilidades previstas na referida base e associadas ao objeto de estudo em questão, destacou-se apenas a EM13MAT404, uma vez que ela orienta:

> Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás, etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 544).

Isso demonstra que essa habilidade específica da Matemática, estabelecida no documento da BNCC (BRASIL, 2018) e relacionada aos estudos de Funções por mais de uma sentença, possui uma abrangência significativa. Essa habilidade orienta não apenas a exploração dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também destaca a importância das aplicações práticas dessas funções em contextos variados, que englobam fenômenos físicos, biológicos e sociais. Essa ampla aplicabilidade demonstra a relevância desse conteúdo no cotidiano dos estudantes e ressalta a sua conexão com diversas áreas do conhecimento.

Dessa forma, ao buscar promover a contextualização dos conhecimentos matemáticos explorados na escola, este trabalho também apresenta relevância específica para o ensino de Matemática, sendo um instrumento que visa abrir caminhos para que o estudante, inserido neste processo, possa relacionar o saber matemático com as vivências cotidianas.

Ao oferecer uma perspectiva sobre como utilizar o livro didático como recurso pedagógico eficiente no ensino de Funções definidas por mais de uma sentença, o estudo visa tornar as aulas mais atrativas, conectadas à realidade dos estudantes e estimular o desenvolvimento das habilidades matemáticas. Através da sequência didática produzida, outros professores podem se inspirar e desenvolver atividades contextualizadas em suas aulas, enriquecendo a prática pedagógica de forma dinâmica e envolvente.

Além disso, a pesquisa se destaca pela abordagem da utilização do livro didático de Matemática, focando especificamente no conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença. Isso possibilita uma compreensão mais profunda de como esses materiais podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, identificando possíveis lacunas ou abordagens menos exploradas que podem ser aprimoradas.

Convém ainda ressaltar que a relevância dessa pesquisa se estende não apenas ao contexto da Educação Básica, mas também para o Ensino Superior, pois muitos conceitos explorados por esse conteúdo têm relação com diversas áreas do conhecimento. Isso possibilita reflexões e discussões mais amplas que podem impulsionar novas investigações e abordagens em diferentes campos acadêmicos.

1.2 Estado da Arte

Neste momento, a presente pesquisa teve como finalidade realizar um estado da arte sobre o tema das Funções definidas por mais de uma sentença. Para isso, buscou-se investigar e compilar informações sobre estudos anteriores relacionados a esse conteúdo, a fim de compreender as descobertas já realizadas e analisar a evolução dos estudos sobre o tema ao longo do tempo.

Inicialmente, realizou-se uma busca no banco de Dissertações do Profmat[1] com o objetivo de encontrar trabalhos relacionados ao objeto matemático em estudo. Para isso, utilizou-se o filtro de busca no espaço renomeado de “Título da Dissertação” e digitou-se o termo “Funções definidas por mais de uma sentença”, bem como suas variações “Funções definidas por partes” e “Funções afins por partes”, além da especificidade “Várias sentenças”. No entanto, nenhum trabalho foi encontrado com os termos de busca escolhidos, o que evidencia uma limitação do banco de dados, que permite apenas a aplicação de três tipos de filtro, o já citado e os nomeados de “Nome do Aluno” e “Nome/Sigla da Instituição”.

A ausência de resultados na busca realizada no banco de Dissertações do Profmat indica uma limitação no repositório devido à restrição de filtros disponíveis. Essa limitação pode dificultar a obtenção de uma visão completa e detalhada sobre as pesquisas relacionadas ao tema das Funções definidas por mais de uma sentença. Como resultado, a análise do estado atual das pesquisas pode ficar incompleta ou limitada, visto que não foi possível acessar trabalhos que poderiam ser relevantes para o estudo em questão.

Dessa forma, foi necessário recorrer ao Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD), na opção busca avançada, onde se digitou a combinação de termos e operadores booleanos: “Funções definidas por mais de uma sentença” OR “Funções definidas por partes” OR “Funções afins por partes” OR “Várias Sentenças”. Ao clicar na opção “Buscar”, a plataforma disponibilizou nove trabalhos acadêmicos, sendo dois duplicados. Como as duas teses e uma dissertação não apresentavam em seus resumos nenhum dos termos de escolha, sobraram apenas quatro dissertações para

---
[1] Link de acesso: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/, acessado em 21 abr. 2023.

serem analisadas, que estão identificadas na Tabela 1 de forma decrescente em relação ao ano.

Tabela 1 – Banco Digital de Teses e Dissertações

Ano	Título	Autor(a)	Instituição Programa
2022	Introdução ao conceito de função no nono ano do Ensino Fundamental por meio de função definida por várias sentenças	Clederson Passos Alves	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC) Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
2020	Pontos periódicos de funções afins por partes e o Teorema de Li e Yorke: uma introdução no Ensino médio	Bianca dos Santos Paixão	Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) Mestrado Profissional em Matemática (Profmat)
2019	Livro Didático e Atividades de Modelagem Matemática: algumas articulações	Victor Hugo dos Santos Gois	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
2016	Um estudo da genêse instrumental para função de uma variável real com várias sentenças	Armênio Lannes Xavier Neto	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC) Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Fonte: Pesquisador (2023)

A pesquisa de Alves (2022), teve como objetivo geral analisar a construção e significados para o conceito de função em estudantes do nono ano do Ensino Fundamental por situações que tratam de Funções definidas por várias sentenças matemáticas. A pesquisa se baseou em teorias importantes da Educação Matemática, como a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, e utilizou a metodologia da Engenharia Didática. Os resultados obtidos indicaram a validação da sequência didática utilizada e a capacidade dos estudantes em construir significados para o conceituar a ideia de Função numérica.

O trabalho de Paixão (2020), apresentou um “Caderno de Atividades” que explora os conceitos de ponto fixo e ponto periódico em sistemas dinâmicos discretos unidimensionais, com ênfase em Funções afins e afim por partes. O objetivo geral foi fornecer um material didático destinado aos estudantes do Ensino Médio, que contemple as competências e habilidades propostas na BNCC (BRASIL, 2018), e auxiliar o professor a trabalhar de forma investigativa e participativa os conteúdos propostos nessa etapa escolar. A pesquisa contribuiu para a compreensão dos conceitos fundamentais da Análise Real aplicados em Funções afins por partes e desenvolveu habilidades e competências previstas na base relacionadas a sistemas dinâmicos e suas aplicações.

A pesquisa de Gois (2019), teve como objetivo geral investigar situações-problema presentes em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio que tratam de Funções definidas por mais de uma sentença e têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de Modelagem Matemática. A pesquisa mostrou que a seleção de situações-problema em livros didáticos deve ser feita a partir de temas que se aproximam do cotidiano dos estudantes e que o desenvolvimento dessas atividades de modelagem demanda que o professor conheça seus estudantes e estabeleça uma articulação com as experiências dos discentes. Dessa forma, a pesquisa contribuiu para aprimorar a prática docente no ensino de Funções definidas por mais de uma sentença, proporcionando uma metodologia inovadora e eficaz para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.

O objetivo geral do trabalho de Xavier Neto (2016), foi estudar a Gênese Instrumental da Função de uma variável real com várias sentenças em estudantes do Ensino Médio, utilizando as ferramentas da Teoria da Atividade e da Análise de Registros de Representação Semiótica. A pesquisa destacou a importância de se trabalhar com a ideia de Gênese Instrumental no ensino de Matemática, que envolve o processo de construção dos instrumentos de pensamento que os estudantes utilizam para solucionar problemas matemáticos. Os resultados apontaram que os estudantes construíram significados para o conceito de função e desenvolveram competências e habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018). A pesquisa também evidenciou a necessidade de se considerar as diferentes formas de representação das Funções definidas por mais de uma sentença e a importância de se explorar a relação entre essas representações para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes.

Devido à escassez de trabalhos encontrados, foi necessário expandir a busca para outra fonte. Dessa forma, optou-se por realizar a pesquisa no Portal de

Periódicos da Capes. Utilizando novamente a mesma combinação de termos mencionada anteriormente, na opção “Olá. O que você está procurando” e, ao clicar no ícone de pesquisa (lupa), a plataforma disponibilizou quatro artigos. No entanto, apenas três artigos foram analisados, pois, um deles não apresenta em seu resumo nenhum dos termos de escolha, já citado. Os resultados foram identificados na Tabela 2, seguindo o mesmo padrão da tabela anterior.

Tabela 2 – Periódicos da Capes

Ano	Título	Autores	Revista
2019	Análise da produção escrita de estudantes do ensino superior: uma abordagem semiótica	Victor Hugo dos Santos Gois Karina Alessandra Pessoa da Silva Jader Otavio Dalto	Alexandria
2018	Desenvolvendo abordagens de ensino para conceitos de cálculo diferencial e integral com GeoGebra	Sonia Barbosa Camargo Igliori Marcio Vieira de Almeida	Educação e Fronteiras
2016	A modelagem em uma aplicação da matemática no cálculo do preço pago nos estacionamentos rotativos de Caxias do Sul	Fernanda Marchioro Laurete Zanol Sauer	Scientia cum Industria

Fonte: Pesquisador (2023)

O objetivo geral da pesquisa de Gois, Silva e Dalto (2019), é analisar as produções escritas dos estudantes de Licenciatura em Química em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, em relação às atividades que tratam de Funções definidas por mais de uma sentença. A análise é feita por meio de referenciais teóricos que tratam de semiótica e reflexões sobre a Análise da Produção Escrita em Matemática, com enfoque em conhecimentos matemáticos e fragilidades na compreensão de Funções definidas por mais de uma sentença. A importância dessa pesquisa está em contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo, ao identificar as dificuldades dos estudantes em relação a esse tema específico, permitindo que os professores possam desenvolver abordagens mais adequadas para a promoção de uma aprendizagem mais significativa.

O objetivo geral da pesquisa de Igliori e Almeida (2018), é apresentar quatro abordagens de ensino para os conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade e equações diferenciais no ensino de Cálculo, com o intuito de fornecer materiais que ofereçam suporte à aprendizagem e favorecer a formação de conceitos matemáticos. Dentre as abordagens, destaca-se a exploração de Funções definidas por várias sentenças e uma Função definida por uma sentença cujo gráfico é uma curva não contínua, o uso da noção de local retidão para desenvolver uma conceituação formal de continuidade e diferenciabilidade, e a análise do campo de direções para buscar soluções da equação diferencial. A importância dessa pesquisa está em contribuir para a ampliação do conjunto de recursos para a sala de aula e na utilização de ferramentas, comandos e funções predefinidas do GeoGebra para o desenvolvimento de materiais didáticos significativos no ensino de conceitos abordados no ensino superior, especialmente o cálculo diferencial e integral.

O artigo de Marchioro e Sauer (2016), tem como objetivo abordar o conceito de função definida por parte de forma contextualizada, através de uma oficina para professores de Matemática do Ensino Médio, utilizando como exemplo os valores cobrados em estacionamentos de Caxias do Sul. A atividade proposta teve como resultado o envolvimento dos professores participantes e o entendimento, pela maioria deles, das situações-problema apresentadas associadas à definição de função. A pesquisa destaca a importância da modelagem Matemática como uma forma de tornar a aprendizagem de conceitos matemáticos mais significativa e relacionar conteúdos trabalhados em sala de aula com situações cotidianas.

Com base nesse estado da arte, torna-se evidente a carência de uma abordagem contextualizada para o ensino de Funções definidas por mais de uma sentença. É imprescindível, portanto, que sejam empregados recursos pedagógicos, como livros didáticos e sequências didáticas, que possibilitem aos estudantes compreender a aplicação desses conceitos em situações cotidianas. Nesse sentido, é essencial refletir sobre a maneira como a Matemática vem sendo ensinada e buscar alternativas para tornar o aprendizado mais próximo das experiências dos estudantes.

1.3 Objetivos

Neste tópico, é descrito o objetivo geral desta pesquisa, bem como, os objetivos específicos.

1.3.1 Objetivo Geral

- Compreender as estratégias e os procedimentos matemáticos relacionados ao ensino de Funções definidas por mais de uma sentença, presentes nos livros didáticos disponibilizados pelo PNLD 2021 – Objeto 2, com ênfase nas possíveis situações reais.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar quais são os livros das coleções didáticas de Matemática, disponibilizados pelo PNLD 2021 – Objeto 2, que abordam as Funções por mais de uma sentença como um dos principais conteúdos da obra;
- Investigar nos livros selecionados as abordagens (estratégias/procedimentos) matemáticas em relação aos conteúdos de Funções por mais de uma sentença, com ênfase na habilidade específica EM13MAT404 descrita pela BNCC (BRASIL, 2018);
- Desenvolver uma sequência didática com alguns problemas encontrados nos livros analisados para a contextualização do ensino de Função afim por partes.

2 APONTAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, exploraremos as reflexões teóricas fundamentais que fundamentam nossa pesquisa. Inicialmente, contextualizamos o conhecimento matemático e sua relevância na vida cotidiana e em outras disciplinas acadêmicas, ressaltando como a Matemática é uma ferramenta essencial para a resolução de problemas e o estímulo ao pensamento matemático.

Em seguida, nossa atenção se voltará para o ensino de Funções, começando pela formalização histórica do conceito de função e, posteriormente, abordando sua importância pedagógica na formação dos estudantes. Além disso, exploraremos a conexão entre a teoria e a prática desse conteúdo, com foco nos aspectos abstratos direcionados ao Ensino Médio. Complementaremos essa parte com uma exploração das Funções afim por partes, acompanhada de aplicações particulares.

Por fim, discutiremos a relevância crucial do livro didático como recurso fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Investigaremos quais competências e habilidades são orientadas pela BNCC (BRASIL, 2018) para o livro didático de Matemática, analisando outros pontos desse documento que contribuam para a produção do mencionado livro e para o ensino dessa disciplina.

Ao abordar esses aspectos teóricos, buscamos fornecer um embasamento sólido para a pesquisa, evidenciando a importância do ensino de Funções, assim como o papel essencial do livro didático como suporte para o processo educacional. Essas reflexões nos guiarão na análise dos livros didáticos de Matemática selecionados, permitindo identificar elementos que promovam uma aprendizagem contextualizada e estimulante dos conteúdos de Funções.

2.1 Contextualização do Saber Matemático

Muitas vezes, o termo “contexto” é usado para se referir a uma determinada situação real, pois essa palavra representa um “Conjunto de circunstâncias que cercam e esclarecem um fato” (XIMENES, 2000, p. 250). Conhecer o contexto significa ter condições para descrever os conhecimentos ou informações específicas sobre essa situação. Nessa descrição, ocorre o processo de relacionamento dos objetos, o que promove a contextualização.

Tufano (2002) expõe que o termo contextualização pode ser resumido como o ato de colocar algo no contexto, e vem do latim “*contextu*”, representando uma forma premeditada de tornar alguém ciente de algo, buscando situar o sujeito em algum lugar no tempo e no espaço planejado. É uma tentativa de transportar um indivíduo para o ambiente analisado, tornando-o um personagem ativo no problema que se busca resolver ou dialogar.

Como a palavra “contextualização” deriva de “contexto”, ela pode ser associada ao modo como diferentes e diversas partes de um todo organizado estão interligadas (KATO; KAWASAKI, 2011). Nessa lógica, contextualizar o ensino pode ser compreendido como um processo que busca conectar o que é explorado em sala de aula com as experiências que os estudantes trazem consigo.

De acordo com Tufano (2002, p. 41), “A contextualização é um ato muito particular e delicado. Cada autor, escritor, pesquisador ou professor contextualiza de acordo com suas origens, com suas raízes, com o seu modo de ver e enxergar as coisas, com muita prudência, sem exagerar”. Nesse sentido, o processo de contextualizar o ensino pode fornecer os pretextos para o aprendizado do estudante, conectando o que é ensinado à sua experiência social. Isso permite que os estudantes façam uma ponte entre teoria e prática, aproximando os assuntos relacionados ao conhecimento escolar do mundo real. Dessa forma, diversas estratégias de ensino podem considerar o encadeamento da aprendizagem de forma contextualizada.

Ricardo (2003) destaca que a contextualização tenta dar sentido ao que será ensinado ao estudante, ajuda na problematização do conhecimento e cria nele uma necessidade de adquirir novos conhecimentos. Nesse contexto, o papel do professor na prática pedagógica é fundamental, estimulando o estudante a pensar criticamente, levantar dúvidas e buscar a construção do conhecimento. A contextualização facilita o processo de aprendizagem, contribuindo para a formação de capacidades intelectuais superiores. Para tanto, é importante que seu desenvolvimento ocorra por meio de práticas dialógicas que considerem o conhecimento, a experiência e o potencial cognitivo de cada indivíduo.

O processo de contextualização no ensino requer a participação ativa dos estudantes, promovendo conexões entre os conhecimentos adquiridos e suas experiências de vida. Durante esse processo, os estudantes assumem um papel central como agentes capazes de resolver problemas e transformar a si mesmos e o mundo ao seu redor. Para isso, os professores devem criar situações que estejam relacionadas ao cotidiano dos participantes, permitindo que eles se envolvam de forma intelectual e emocional, trazendo suas vivências para dentro da sala de aula e estabelecendo uma conexão entre o conhecimento científico e suas experiências pessoais. Essa abordagem é possível, pois os estudantes têm uma ampla gama de experiências que podem ser utilizadas para dar vida e significado ao conhecimento escolar.

A LDBEN apresenta a contextualização como um princípio pedagógico, destacando a

> [...] dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de ilustrar o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 1996, p. 83).

Esse pressuposto revela como a contextualização é um recurso valioso no ensino de Matemática[2], desde que seja entendida em um sentido amplo e não de

[2] Na presente pesquisa, o termo "Matemática" será empregado para abranger diferentes conceitos, embora não seja o foco principal do estudo. Nesse sentido, dependendo do contexto em que é abordada, a Matemática pode ser considerada como uma Ciência, devido à sua busca por conhecimento e rigor em suas investigações; como uma área do conhecimento, devido à sua amplitude de temas e aplicações; ou como uma disciplina, devido à sua abordagem específica de ensino e aprendizagem. Essa abrangência do termo permite uma visão holística da Matemática, considerando sua natureza científica, seu vasto campo de estudo e suas implicações educacionais. Ao adotar essa perspectiva ampla, a pesquisa tenta oferecer uma compreensão mais completa dos elementos

forma artificial. Ela não se limita apenas à vida diária dos estudantes, mas também se estende aos conhecimentos globais. A contextualização dos conteúdos matemáticos é essencial para estimular a criatividade, a curiosidade e a investigação sobre os objetos abstratos desse conhecimento universal.

A necessidade de contextualizar os conteúdos escolares é fundamental para que os estudantes compreendam a relevância e a aplicabilidade da Matemática no mundo real. Essa área do conhecimento desempenha um papel decisivo na resolução de problemas cotidianos e possui inúmeras aplicações em diversas outras áreas, tanto em nível global como comunitário. Ao contextualizar o ensino de Matemática, os estudantes podem perceber como os conceitos abstratos têm conexões significativas com a vida real, tornando o aprendizado mais relevante e motivador. Além disso, essa abordagem permite que os estudantes desenvolvam habilidades e competências essenciais para a sua formação como cidadãos conscientes e participativos na sociedade atual.

Em um contexto global, podemos explorar situações como o estudo de dados estatísticos sobre a mudança climática e o aquecimento global. Dessa forma, os estudantes podem analisar gráficos e dados numéricos para compreender as tendências e os impactos desses fenômenos, permitindo-lhes tomar decisões informadas e conscientes sobre a preservação do meio ambiente.

Já em um contexto comunitário, os estudantes podem investigar questões locais, como o uso eficiente de recursos hídricos em sua cidade ou a análise de dados demográficos da região. Desse jeito, eles podem utilizar gráficos e modelos matemáticos para identificar padrões e propor soluções sustentáveis para o uso da água ou para o planejamento urbano, por exemplo.

Além disso, a Matemática desempenha um papel importante na interdisciplinaridade. Um exemplo disso é a abordagem gráfica e algébrica do movimento uniforme no ensino da cinemática. Assim, os estudantes podem utilizar conceitos matemáticos, como funções e gráficos, para analisar e descrever o

matemáticos envolvidos em suas análises e reflexões, permitindo uma abordagem multidimensional do assunto em questão.

movimento de objetos, relacionando o conhecimento matemático com da componente curricular Física de forma integrada.

A Matemática também é vista como uma ciência viva (BRASIL, 2018) que evoluiu ao longo da história da humanidade, tornando-se cada vez mais necessária não apenas para aplicações rigorosas, mas também de forma pedagógica, conectando o que é ensinado em sala de aula com as vivências dos estudantes durante a Educação Básica. É importante lembrar que os conteúdos matemáticos frequentemente são percebidos como de difícil compreensão, pois podem parecer distantes da realidade e abstratos. Essa percepção tem sido objeto de pesquisa no campo educacional, com o intuito de encontrar estratégias que aproximem a Matemática do contexto dos estudantes.

Ao longo do tempo, o ensino de Matemática passou por grandes mudanças visando melhorar esse processo e reduzir a aversão dos estudantes por essa componente curricular universal. Nesse sentido, a contextualização pode ser usada como um método para promover essas transições, uma vez que as argumentações aqui produzidas revelam que contextualizar os saberes matemáticos é um ato de mobilizar os estudantes para o mundo da Matemática, permitindo que eles relacionem suas atividades diárias com os diversos conteúdos escolares.

Os conhecimentos matemáticos, além de possuírem valores formativos que colaboram com a estrutura do raciocínio dedutivo, exercem uma funcionalidade instrumental diária. Isso se deve ao fato de que sua linguagem permeia as ciências, concebendo suas características essenciais como ferramentas que atendem a diversas tarefas específicas do cotidiano, estando presentes em quase todas as atividades humanas (LOPES, 2011). Essas palavras reforçam a importância de lecionar a disciplina de Matemática não apenas para dar suporte às atividades realizadas nas escolas, mas também para compreender e aplicar os fatos vivenciados. Para tornar esse processo mais prazeroso e consistente em sala de aula, é oportuno que o professor aborde situações pertinentes ao cotidiano dos estudantes na temática explorada.

D’Ambrósio (2012) afirma que a Matemática é frequentemente vista como uma Ciência afastada da realidade, de difícil compreensão e, consequentemente, causa uma alta porcentagem de reprovações. Essa percepção é resultado do fato de que muitos estudantes consideram a Matemática uma disciplina difícil e intimidadora, que exige um rigor em seu desenvolvimento em sala de aula, e por ser uma componente das Ciências Exatas, sua aplicação, muitas vezes, se resume ao uso excessivo de fórmulas e algoritmos. Além disso, alguns conteúdos matemáticos não são explorados para promover alguma relação com a realidade do que é ensinado e com as vivências dos sujeitos envolvidos.

Perrenoud (2000) realça que grande parte do conhecimento processado nas escolas se apresenta fora de qualquer contexto, sendo, portanto, fundamental que o conhecimento esteja constantemente relacionado à sua operacionalização em situações diversas. Essas palavras destacam a necessidade de desenvolver uma forma de aprendizagem sociointerativa[3], em que o conteúdo processado em sala de aula comece a ter significado para o indivíduo a partir de suas representações prévias.

Essa abordagem sociointerativa valoriza a construção do conhecimento a partir da interação entre os estudantes e com o mundo ao seu redor. Nesse contexto, o professor desempenha um papel de mediador, estimulando a troca de experiências e o diálogo entre os estudantes, de modo que o aprendizado seja significativo e contextualizado. Ao conectar o conteúdo com situações da vida real, os estudantes conseguem perceber a relevância do conhecimento, tornando o processo de aprendizagem mais motivador e envolvente.

> A escola não constrói a partir do zero, nem o aprendiz não é uma tábula rasa, uma mente vazia; ele sabe, ao contrário, “muitas coisas”, questionou-se e assimilou ou elaborou respostas que o satisfazem provisoriamente. Por causa disso, muitas vezes, o ensino choca-se de frente com as concepções dos aprendizes. (PERRENOUD, 2000, p. 24).

Nessa perspectiva, as situações de aprendizagem diferentes daquelas que deram origem ao conhecimento podem ser fomentadas como pontos de apoio. Assim, a partir das concepções dos estudantes, é preciso encontrar “[...] uma maneira de desestabilizá-los apenas o suficiente para levá-los a restabelecerem o equilíbrio, incorporando novos elementos às representações existentes, reorganizando-as se necessário” (PERRENOUD, 2000, p. 28).

---

[3] A proposta sociointeracionista foi criada pelo psicólogo bielo-russo Lev Semenovich Vygotsky (1896–1934) e enfatiza a importância da interação do sujeito com o meio em que vive. Nessa perspectiva, o indivíduo forma o conhecimento por meio da interação com outras pessoas, em um processo histórico, cultural e social pelo qual passa ao longo de sua vida.

Para Laudares e Lachini (2005), a Matemática é aprendida fora do contato com situações da realidade. Nesse contexto, não importa para que servem ou de onde vêm as fórmulas, aprende-se a manipular as fórmulas por estar observando certas regras, e o interesse reside em encontrar a resposta certa, independentemente do que essa resposta representa. Esse uso da Matemática leva estudantes e professores a um movimento circular caracterizado pela cópia e memorização das regras. Com esse método, alguns professores supõem que estão ensinando e os estudantes acreditam que aprenderam, alguns deles até alcançam um rendimento satisfatório para avaliação para a qual foram treinados. No entanto, no período seguinte, eles esquecem tudo, e aquelas pequenas regras que são tão importantes para obter as notas não servem mais (LAUDARES; LACHINI, 2005).

Esses autores ainda completam suas ideias, mostrando que um sistema diferenciado de trabalho implica na contextualização da Matemática, demonstrando que esta área do conhecimento faz parte dos outros ramos da Ciência aplicada, tendo um caráter interdisciplinar. Dessa forma, eles tentam deslocar o foco do ensino do conteúdo para a aprendizagem aplicável (LAUDARES; LACHINI, 2005).

Segundo D'Ambrósio (2012), o ensino de Matemática deve ser direcionado para resolver os problemas encontrados na vivência do estudante. Nessa perspectiva, os estudantes estarão mais aptos a utilizar o conhecimento matemático quando forem estimulados a pensar e raciocinar sobre o objeto de estudo, ou seja, quando participarem ativamente do processo de construção do conhecimento. Nesse sentido, é importante proporcionar situações envolventes, desafiadoras e significativas para os estudantes em sala de aula sempre que possível.

Ainda de acordo com D'Ambrósio (2005),

> Contextualizar a Matemática é fundamental para todos. Afinal, como podemos deixar de relacionar a adoção da numeração indo-arábica na Europa com o florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? Ou Os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? E não se pode entender Newton descontextualizado. [...]. Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana… e assim justificam sua importância nos currículos. (p. 6).

Nessa linha de pensamento, esse autor afirma que compreender os marcos históricos da Matemática de ontem pode, na melhor das hipóteses, guiar o aprendizado e o desenvolvimento dessa Ciência atualmente. No entanto, compreender as teorias e práticas criadas ontem para resolver os problemas de ontem não ajudará a resolver os problemas de hoje. Essa argumentação realça a importância da contextualização como um processo que precisa estar direcionado aos fatos atuais do estudante.

D'Ambrósio (2012) ainda nos alerta que, a partir de seu ponto de vista, é muito difícil motivar os fatos e situações do mundo contemporâneo em uma Ciência que se originou e desenvolveu em outros tempos e culturas, devido aos problemas da época que vivenciavam necessidades e urgências estranhas para nós. Em termos de motivação contextualizada, para ele, a Matemática ensinada nas escolas está morta. Desse jeito, enfatiza que

> O grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã. Pôr em prática significa levar pressupostos teóricos, isto é, um saber/fazer acumulado ao longo de tempos passados, ao presente. Os efeitos da prática de hoje vão se manifestar no futuro. Se a prática foi correta ou equivocada só será notada após o processo e servirá como subsídio para uma reflexão sobre os pressupostos teóricos que ajudarão a rever, reformular, aprimorar o saber/fazer que orienta nossa prática. (D’AMBRÓSIO, 2012, p. 80).

Entretanto, a vida diária de todas as pessoas em qualquer cultura está saturada de conhecimentos e práticas que envolvem o saber/fazer matemático. De fato, os indivíduos estão constantemente comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando e generalizando. Os avanços científicos e tecnológicos atuais fomentaram ainda mais a importância dos conhecimentos matemáticos como imprescindíveis para a evolução da sociedade atual.

O conhecimento matemático é, também, um elemento enriquecedor do pensamento na formação intelectual do estudante, no que diz respeito ao seu potencial em formar cidadãos críticos e conscientes de sua responsabilidade social. Convém destacar que a constituição do pensamento matemático se dá por meio da identificação e utilização de sistemas abstratos que organizam e conectam os fenômenos do espaço, movimento, formas e números, estejam eles ligados ou não aos fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são essenciais para compreender os fenômenos, construir representações significativas e apresentar argumentos consistentes em uma variedade de contextos. A constituição de diferentes modos de pensar em Matemática é o que promove o desenvolvimento de indivíduos com a capacidade de analisar situações sob diversos ângulos, realizar análises críticas e construir argumentações consistentes.

Em D’Ambrósio (1996), destaca-se a importância de relacionar os diversos assuntos, pois o objetivo da escola é que o estudante adquira os conhecimentos essenciais para uma cidadania plena, levando em conta os fatores envolvidos nesse processo. Souto (2010, p. 801) afirma que “[...] o ensino da matemática deve ser articulado com várias práticas e necessidades sociais, por meio de inter-relações com outras áreas do conhecimento”. Assim, os aspectos relacionados aos fenômenos físicos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e políticos podem ser abordados tanto de forma interdisciplinar como de modo problematizado.

Nesse sentido, a contextualização do conhecimento matemático precisa valorizar a participação efetiva dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem, buscando desenvolver as ligações entre os saberes e as relações que se estabelecem através das vivências. Essa abordagem permite uma aproximação do conhecimento científico com as experiências que os estudantes trazem consigo, tornando o conteúdo escolar mais interessante e prazeroso. Além disso, contextualizar o conteúdo que se quer ensinar significa, antes de tudo, reconhecer que todo conhecimento envolve uma relação sujeito-objeto. Isso se refere à possibilidade de os sujeitos aprenderem a utilizar determinadas habilidades para resolver problemas, de forma que possam adaptar esse engajamento à situação do mundo social.

Para Rodrigues e Amaral (1996), contextualizar o ensino significa trazer a própria realidade do estudante não apenas como ponto de partida para o processo de ensino e aprendizagem, mas como o próprio contexto educacional. Quando é possível incorporar os contextos de vivência dos sujeitos nos ambientes de aprendizagem, tem-se um fator de aprendizagem importante, pois esse processo dá sentido aos conhecimentos apreendidos (MOYSÉS, 2007).

Segundo D'Ambrósio (1996), é necessário substituir o processo de ensino que privilegia a exposição, pois ele não estimula a participação do estudante. Dessa forma, os indivíduos precisam deixar de ver a Matemática como um produto acabado cuja exploração do conteúdo é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas. Esse rótulo pode ser desfeito por meio de atividades que deem ao estudante a oportunidade de modificar e reformular seus conhecimentos prévios. Nesse sentido, uma possibilidade é refletir sobre os fatos vivenciados.

Braumann (2002) enfatiza a importância de colocar o estudante no centro da aprendizagem como agente ativo na construção do conhecimento, pois aprender o conhecimento matemático não é apenas compreender o que foi feito, mas ser capaz de realizar investigações. Para este autor, é uma forma de compreender realmente o que é a Matemática e sua funcionalidade na compreensão do mundo.

Lopes (2011) ressalta que o conhecimento matemático permite que as pessoas intervenham criticamente nas ações cotidianas e adquiram maior capacidade de argumentar seu raciocínio diante dos problemas da vida. Sob esse ponto de vista, ele ainda acrescenta que o professor precisa reavaliar a abordagem dos conceitos matemáticos, considerando que estes foram construídos sócio historicamente e essa trajetória não pode ser ocultada. É importante perceber a significância do estudo da Matemática quando os estudantes reconhecem as relações entre o conhecimento matemático produzido pela humanidade e o conhecimento produzido por outras áreas. Isso reflete a necessidade de entender a importância que essa Ciência tem para a evolução da sociedade.

Brousseau (1996) afirmou que a contextualizar refere-se ao ato de apresentar o conteúdo aos estudantes através de situações-problema da realidade para que seus respectivos elementos comecem a dar sentido ao conteúdo a ser ensinado. Assim, a contextualização pode ser desenvolvida por meio da resolução de problemas que dizem respeito ao cotidiano do estudante e suas possíveis futuras relações sociais e práticas.

De acordo com Meirieu (1998), situação-problema é:

> Uma situação didática na qual se propõe ao sujeito uma tarefa que ele não pode realizar sem efetuar uma aprendizagem precisa. E essa aprendizagem, que constitui o verdadeiro objetivo da situação-problema, se dá ao vencer obstáculos na realização da tarefa. (p. 192).

Esse autor enfatiza que a situação-problema coloca o estudante em ação, pelo fato de colocá-lo em uma interação entre a realidade e seus planejamentos pessoais, interação que desequilibra e reequilibra, cabendo ao professor introduzir mecanismos de mudança gradual, abrindo os caminhos para que esse indivíduo construa seu aprendizado nesse processo. Já para Macedo (2002), a situação-problema está diretamente relacionada às vivências, de forma dinâmica e aberta no universo fantástico e problemático do mundo, sendo assim, seu foco principal é a contextualização no sentido de representar um recorte da realidade.

De maneira resumida, podemos descrever essa abordagem como uma situação que apresenta um problema, no qual o conhecimento necessário para resolvê-lo é o que desejamos que o estudante adquira. Em outras palavras, ao resolver o problema, o indivíduo participante desse processo desenvolverá as habilidades educacionais planejadas para aquela tarefa de aprendizagem.

Segundo Meirieu (1998), uma situação-problema apresenta características fundamentais, nas quais os participantes são desafiados a realizar uma tarefa que só pode ser concluída ao superar um obstáculo. Essa superação representa um avanço no desenvolvimento cognitivo do indivíduo. O obstáculo, por sua vez, impõe restrições que exigem reflexão nas tomadas de decisão, evitando uma execução de uma ação de forma automática (técnica e repetitiva). Entretanto, é necessário fornecer recursos (materiais e instruções) aos participantes para auxiliá-los na superação do obstáculo.

Diante disso, torna-se evidente que o estudo da Matemática no Ensino Médio deve transcender a mera memorização de resultados e fórmulas. Assim, a elaboração de tarefas que enfatizam situações didáticas requer reflexões sobre o trabalho escolar, incluindo os desafios enfrentados em sala de aula, o estímulo do interesse dos estudantes por problemas matemáticos e o desenvolvimento da capacidade dos envolvidos em resolver situações-problema. Além disso, é essencial estabelecer conexões entre a aquisição de conceitos e procedimentos com contextos significativos para os indivíduos participantes, buscando relacionar a Matemática escolar à vida cotidiana e a outras áreas do conhecimento científico.

A BNCC orienta os caminhos formativos para o desenvolvimento de competências matemáticas que abrangem diferentes contextos, como a vida cotidiana, outras áreas do conhecimento e a própria Matemática (BRASIL, 2018). Nesse sentido, é fundamental utilizar múltiplas representações e linguagens específicas para construir um modelo matemático que ofereça suporte à resolução de situações-problema em diversas circunstâncias. Essa abordagem reconhece que a aprendizagem ocorre quando os indivíduos são capazes de abstrair contextos, compreender relações e significados, e aplicá-los em outras situações.

Para promover a citada aprendizagem, uma sequência didática pode ser elaborada e aplicada nas escolas, contemplando essas preocupações e outras possíveis questões. Nesse contexto, o processo de aquisição do conhecimento matemático compreende diversas etapas, com o objetivo final de buscar soluções. No entanto, é importante ressaltar que a evolução ao longo desse processo é tão relevante quanto o resultado alcançado.

Assim, a construção de diferentes modos de pensamento matemático se mostra essencial, capacitando os indivíduos a analisar situações sob diversos ângulos, promovendo um pensamento crítico e a habilidade de construir argumentações consistentes. Dessa forma, as sequências didáticas se tornam uma ferramenta poderosa para fomentar a formação de estudantes mais preparados para enfrentar desafios e lidar com a complexidade do mundo contemporâneo.

Vale ressaltar que o estudo dos conteúdos relacionados às funções no currículo de Matemática possui uma ampla utilidade em diversas situações de ensino e aprendizagem. Essa temática desempenha um papel integrador na disciplina e possui relevância em diversos campos de atividade humana. É importante destacar que as ideias teóricas e práticas relacionadas a esse conteúdo são aplicadas em cursos como Administração, Economia, Física, Química, Engenharia, Finanças e outras áreas do conhecimento. Diante disso, é fundamental trazer para a sala de aula atividades que envolvam problemas do cotidiano dos estudantes ou que sejam próximas a eles, de forma a demonstrar a importância do estudo desses conhecimentos durante o Ensino Médio. Dessa forma, a próxima seção terá o foco direcionado para o ensino de Funções.

2.2 Ensino de Funções

Esta seção tem como objetivo fornecer algumas reflexões sobre o ensino de Funções, abordando diferentes aspectos. Serão apresentadas quatro subseções distintas, cada uma explorando um aspecto específico relacionado ao tema.

A primeira subseção terá um olhar histórico sobre a formalização do conceito de função, desde sua origem nas experiências humanas até sua formulação abstrata. Isso permitirá compreender como o conhecimento matemático relacionados às funções evoluiu ao longo do tempo.

Na segunda subseção, serão abordados os aspectos pedagógicos do ensino de Funções na Educação Básica, com ênfase no Ensino Médio. Será enfatizada a importância de contextualizar o tema para torná-lo mais significativo e acessível aos estudantes.

A terceira subseção concentra-se nos aspectos mais abstratos do ensino de Funções, destacando os conceitos relevantes que são explorados nesse contexto. Serão apresentados os elementos matemáticos fundamentais para compreender e abordar esse conteúdo de forma mais aprofundada.

Por fim, a última subseção abordará as Funções definidas por mais de uma sentença, com ênfase nas Funções afins por partes. Serão exploradas suas características e possíveis aplicações, destacando a importância dessa forma de função na resolução de problemas práticos e teóricos.

Ao final desta seção, espera-se fornecer uma visão abrangente sobre o ensino de Funções, contemplando sua origem, aspectos pedagógicos, abstração e aplicações práticas.

2.2.1 Um Olhar Histórico Sobre a Formalização do Conceito de Função

Nesta subseção, buscar-se-á analisar como a formalização do conceito de função foi sendo construída e reconstruída ao longo da história. Vale ressaltar que “A história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas num contexto específico de sua época” (D’AMBRÓSIO, 2012, p. 27). Assim, de forma específica, será explorado como ao longo dos séculos alguns renomados personagens contribuíram para a compreensão e evolução da temática em questão. Será exposta, portanto, uma síntese histórica dessa evolução, evidenciando marcas de consensos e discordâncias entre eles que impulsionaram não somente o progresso desse tema, mas também de vários outros.

De acordo com alguns pesquisadores (ROQUE, 2012; EVES, 2011; GARBI, 2010), a noção de função surge com a ideia de dependência, que, por sua vez, iniciou-se por volta de 6000 anos atrás, na Idade da Pedra. No entanto, foi somente nos últimos três séculos que houve o avanço em torno do conceito formal de função, com estreita ligação a problemas relacionados ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, Física e Análise Matemática.

A citada relação de dependência surgiu da necessidade humana em controlar seus bens, levando-os à premência de fazer algum tipo de associação entre os objetos que estavam sob seu gerenciamento. Por exemplo, na antiguidade, os pastores de ovelhas associavam as ovelhas às pedras e para cada ovelha eles adicionavam uma pedra para realizar a contagem de seus animais ao fim do dia. Nesse período, para realizar tal contagem, eles não utilizavam apenas pedras, mas também ossos e pedaços de madeira, fazendo uso, instintivamente, da ideia de dependência (EVES, 2011).

Outros fatos históricos, próximos aos anos 2000 a.C., revelam que na Babilônia foram produzidas tabelas de argila, em que para cada número na primeira coluna existia outro correspondente na segunda coluna. Esses povos abordavam os problemas cotidianos, utilizando-se de tabelas sexagesimais de multiplicação, de inversos multiplicativos, números quadrados e de raízes quadradas e cúbicas. Assim, a Idade Antiga é considerada uma etapa em que a noção de função aparece como dependência de valores, de forma bem intuitiva (GARBI, 2010).

Na Antiguidade, os babilônios e os gregos se destacam como precursores na utilização da dependência funcional. De acordo com Roque (2012), a Matemática praticada pelos babilônios consistia principalmente no registro de quantidades e operações. Com o passar do tempo, à medida que uma parte da sociedade se dedicava especificamente à Matemática, as práticas matemáticas passaram a incluir também procedimentos para a resolução de problemas numéricos, considerados "algébricos" pela historiografia tradicional. Essa autora ainda enfatiza que esses povos realizavam cálculos relacionados a grandezas, ou seja, efetuavam procedimentos de cálculo sobre coisas que podiam ser medidas.

Durante esse período, as abordagens do filósofo/matemático[4] Aristóteles (384–322 a.C.) influenciaram a evolução da Ciência. Entre elas, destacam-se os aspectos relacionados aos fenômenos naturais, principalmente do movimento do Universo, que, para ele, deveriam ser estudados por meio dos conhecimentos matemáticos e físicos. Ideias como essa fizeram com que os gregos afirmassem que a noção de função se manifestou naquele tempo mediante as descrições do movimento de forma qualitativa. Em outras palavras, por mensurações e padrões comparativos, onde as comparações realizadas deveriam considerar os padrões normais de um movimento.

Na Grécia antiga, é possível encontrar problemas relacionados com a definição e existência de relações funcionais, principalmente nos trabalhos pitagóricos que estudavam as leis que relacionam os tons dos sons emitidos pelas cordas a seus comprimentos. Entretanto, os registros encontrados até o presente momento apontam que eles somente conseguiram relacionar intervalos musicais com razões numéricas (PERRIN, 1999). Dessa forma, as ideias variáveis foram encontradas inicialmente sem noção do que realmente é uma quantidade variável.

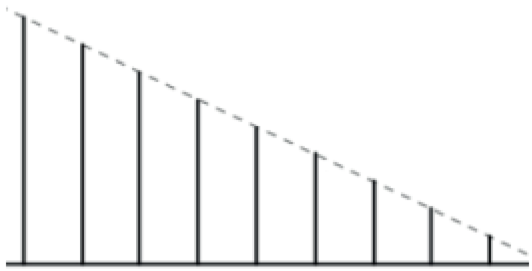
[4] Embora esse personagem e outros mencionados nesta seção não se autodenominassem como "filósofos" ou "matemáticos" ou "cientista" em suas épocas, eles desempenharam um papel fundamental na exploração do conhecimento, na formulação de teorias e na realização de descobertas que tiveram um impacto duradouro no desenvolvimento dessas áreas. Nesta pesquisa, reconhecemos suas contribuições significativas e sua importância histórica para o avanço do conhecimento, independentemente de terem sido reconhecidos com tais títulos em seus tempos. Vale ressaltar que o objetivo desta pesquisa não é atribuir títulos retrospectivamente, mas sim destacar suas realizações e sua influência nas respectivas áreas do conhecimento científico.

Os alexandrinos utilizaram essa informação para montar as primeiras tabelas de cordas (PERRIN, 1999). Entre elas, a que sobreviveu até os dias atuais é a do cientista/matemático grego Cláudio Ptolomeu (90–160), que viveu em Alexandria durante o período romano. Esse instrumento apresentava um sistema geométrico-numérico baseado nas ideias de Aristóteles e algumas características das tabelas de observações produzidas pelos babilônicos ao descreverem os movimentos celestiais.

Após o Século X, quando diferentes povos europeus entraram em contato com os orientais por meio de viagens comerciais e das Cruzadas, as obras de alguns dos principais pensadores da Grécia foram gradativamente traduzidas, disseminando o conhecimento grego na Europa. Nesse sentido, o pensamento aristotélico foi logo adotado nas universidades, influenciando e inquietando diferentes personagens daquele período. Nesse contexto, a obra de Aristóteles sobre a teoria dos movimentos levou alguns estudiosos da Universidade de Oxford, assim como da Universidade de Paris, a refletirem acerca dos conhecimentos da Cinemática.

O filósofo/matemático francês Nicolau de Oresme (1323–1382), que também era bispo, foi um dos principais críticos dos princípios aristotélicos. Contudo, ao estudar o movimento uniformemente entre outros, ele representou em um gráfico (ver abaixo a Figura 1) a velocidade variando com o tempo da seguinte maneira: marcou os instantes de tempo ao longo de uma linha horizontal (denominada de longitudes) e representou as velocidades em cada tempo por linhas verticais, perpendiculares às longitudes (chamadas de latitudes).

Figura 1 – Representação utilizada por Oresme conforme Corsini (2020)



Fonte: (CORSINI, 2020, p. 193)

Dessa forma, Oresme apresentou graficamente leis que confrontavam a variável dependente (latitude) com a independente (longitude), à medida que permitia pequenos acréscimos nesta última. Segundo Ponte (1990), esse francês desenvolveu a teoria geométrica das latitudes, representando graus de intensidade e extensão. De certa forma, Oresme esboçou os aspectos visuais do conceito de função, realçando a ideia de dependência, mesmo sem possuir os conhecimentos matemáticos necessários para uma formulação teórica completa.

Os escolásticos deixaram para o século XV as explicações acerca dos fenômenos naturais baseadas na doutrina cristã e no movimento de forma qualitativa de Aristóteles. Neste início do período Renascentista, surgiram na Europa novas traduções em latim de outras obras gregas. Foi nessa época que os europeus entraram em contato com o pensamento do filósofo e matemático Platão.

As leis quantitativas da natureza tornaram-se cada vez mais poderosas nas descrições dos seguidores de Aristóteles, sobretudo, ao tentar determinar as relações funcionais entre valores numéricos de grandezas físicas. A Mecânica ganhou destaque entre os conhecimentos científicos, juntamente com a Astronomia, surgindo os novos ramos denominados “Dinâmica” e “Mecânica Celeste”. Dessa forma, o estudo das relações entre o movimento curvilíneo e as forças que o afetam tornou-se um desafio para o astrônomo/matemático polonês Nicolau Copérnico (1473–1543) e seus contemporâneos. Assim, a noção de função, que emergiu da necessidade de comparar objetos, passou a estar direcionada à observação dos fenômenos naturais.

Esses contemporâneos absorveram a filosofia de Platão e combinaram essas ideias com as da Igreja Católica Apostólica Romana. Essa nova concepção filosófica influenciou grandes personagens, como o astrônomo/matemático alemão Johannes Kepler (1571–1630), que adotou a teoria heliocêntrica de Copérnico para formular as leis matemáticas que descrevem o movimento dos planetas.

Convém ressaltar que a terceira lei de Kepler afirma que, em um referencial fixo no Sol, o quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse que representa a órbita do planeta. Essa lei descreve quantitativamente um fenômeno físico e estabelece uma relação matemática entre as duas grandezas envolvidas, introduzindo implicitamente a noção de função em seu enunciado de forma verbal. De forma geral, as leis de Kepler também apresentam aspectos qualitativos do movimento.

No século XVI, o astrônomo/físico italiano Galileu di Vincenzo Bonaulti de Galilei (1564–1642), mais conhecido como Galileu Galilei, interessou-se em analisar os fenômenos naturais e passou a observá-los visando descrevê-los. Um exemplo clássico é o experimento da queda dos corpos, no qual Galileu relacionou a variação da distância percorrida pelo objeto e a variação do tempo decorrido até que este atingisse o solo. Esse estudo deu origem a um conceito mais aproximado de funcionalidade ou de relação entre variáveis, embora, naquele momento, não tenha utilizado explicitamente o termo “dependência” entre variáveis.

Para Oliveira e Justo (2015, p. 3), as noções sobre funções buscavam “[...] compreender a realidade e encontrar métodos que permitissem estudar e descrever os fenômenos naturais, estudo que trata das variações de quantidades em que partes dependem umas das outras”. Nesse momento da revolução astronômica, cada situação de dependência entre quantidades, quando não era por meio de tabelas, era descrita verbalmente ou graficamente.

Alguns matemáticos e físicos da Idade Moderna buscaram colaborar para o desenvolvimento da Matemática, introduzindo questões conceituais e simbólicas para essa Ciência. Durante esse período, a formalização do conceito de função, devido aos problemas concretos do mundo físico que estavam surgindo associados à ideia de regularidade, tornou-se uma necessidade científica. Entretanto, outros elementos eram essenciais para a formalização desse conceito, como a inclusão de uma notação algébrica, introduzida de certa forma pelo francês François Viète (1540–1603). A esse respeito, sabe-se que

Alguns matemáticos e físicos da Idade Moderna buscaram colaborar para o desenvolvimento da Matemática introduzindo questões conceituais e simbólicas para essa Ciência. Durante esse período, a formalização do conceito de função devido aos problemas concretos do mundo físico que estavam surgindo associados à ideia de regularidade tornou-se uma necessidade científica. Entretanto, outros elementos eram essenciais para a formalização desse conceito, como a inclusão de uma notação algébrica, introduzida de certa forma pelo francês François Viète (1540–1603). A esse respeito sabe-se que

> Na segunda metade do século XVI, Viète (1540–1603), introduziu uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Pela primeira vez na álgebra houve uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida. (BOYER, 1996, p. 208).

Viète também é o responsável por fomentar e introduzir a ideia do estudo de tipos gerais de equações e expressões, colaborando para a análise da estrutura que modela matematicamente uma situação-problema. A partir desse ponto, o desenvolvimento da noção de função passa a estar mais direcionado aos problemas práticos e teóricos criados pelo homem.

Nesse contexto, o matemático/astrônomo escocês John Napier of Merchiston (1550–1617) publicou um trabalho intitulado "*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*" em 1614, sobre logaritmos, partindo da comparação de dois movimentos retilíneos contínuos. Contudo, foi o matemático suíço Joost (Jost) Bürgi (1552–1632) quem inventou, nesse mesmo ano, um algoritmo para aproximar o produto usando fórmulas trigonométricas. Ele criou uma tabela de logaritmos, publicada em 1620, com base na relação conhecida por Arquimedes entre a Progressão Geométrica de potências de uma quantidade e a Progressão Aritmética de expoentes, e usou um processo de interpolação que o levou intuitivamente à conclusão de que essa relação deve ser contínua. As contribuições desses dois personagens permitiram grande progresso, especialmente no que diz respeito à Função logarítmica, fornecendo soluções rápidas e eficientes para a multiplicação e aproximações precisas para a exponenciação.

Outros elementos que colaboraram para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos foram os estudos da relação entre as variáveis por meio de equações e a construção de uma representação visual, que proporciona uma base intuitiva fundamental, produzida pelo filósofo/matemático francês René Descartes (1596–1650). Na obra intitulada "*La Géompetrie*", produzida por Descartes em 1637, é possível sustentar "[...] a ideia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas, correspondendo aos valores dados da outra" (OLIVEIRA, 1997, p. 18). Nela, ele também explica como ligar uma curva plana a uma equação por meio das coordenadas de seus pontos, considerando as coordenadas como segmentos de reta, afirmando que:

> Tomando-se sucessivamente infinitas grandezas diversas para a linha y, encontram-se dessa maneira infinitas grandezas diversas para a linha x; portanto, tem-se uma infinidade de pontos tais que aquele que é marcado C, por meio do qual se descreve a linha curva requerida. (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 25).

Nessas palavras, sustenta-se a ideia de que a equação em x e y é um meio de introduzir uma dependência entre as quantidades variáveis, de tal forma que os valores de uma delas possam ser calculados de acordo com os valores dados pela outra.

Paralelamente, por volta de 1629, o matemático francês Pierre de Fermat (1601–1665) descreveu suas ideias em um trabalho intitulado "*Ad Locos Planos et Sólidos Isagoge*". Embora esse material não tenha sido publicado, circulou na forma de manuscrito. Nele, encontram-se contribuições para as representações de uma função, sobretudo pelo fato de ter introduzido a ideia de eixos perpendiculares e evidenciado as descobertas de equações gerais da reta e circunferência, bem como equações mais simples para as curvas de lugares geométricos (parábolas, elipses e hipérboles). Fermat utilizou um sistema de coordenadas de variáveis dependentes em uma equação, atualmente denominada expressão algébrica de uma função.

Apesar de Descartes e Fermat (1601–1665) terem desenvolvido separadamente as bases teóricas da Geometria Analítica e apresentado métodos analíticos para a representação de uma função, eles foram personagens de diferentes atritos entre si, que contribuíram para a evolução dos conhecimentos matemáticos e de outras áreas das Ciências Exatas. Suas concepções abriram uma ponte entre a Geometria e a Álgebra e impulsionaram a ideia de funções (correspondências de curvas) como um objeto mais apropriado para representar modelos reais e problemas físicos.

Posteriormente, o físico/matemático inglês Isaac Newton (1642–1727) apresentou contribuições relevantes para o estudo das Funções, sendo o primeiro a mostrar que uma função poderia ser descrita como uma série de potências (EVES, 2011). Convém ressaltar que, nesse momento, as séries de potências eram um objeto matemático que os estudiosos da área de exatas buscavam desenvolver.

Em meio a esse contexto, Newton mostrou que a área sob uma curva poderia ser determinada pelo processo inverso do cálculo da taxa de variação. Essa generalização é fruto das observações realizadas sobre o Método dos Fluxos que foi aplicado às variáveis (fluentes) para o cálculo da taxa de variação (fluxos), descrito em 1736, no trabalho intitulado "*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum*". Desse modo, Newton introduziu as noções básicas de função por meio da Cinemática, porém o que chamamos de expressão algébrica de uma função era, para ele, a relação entre os fluentes.

Segundo Roque (2012), o filósofo/matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) foi o primeiro a introduzir a palavra "função" para designar a relação da reta (tangente) com uma curva, na obra intitulada "*Methodus tangentium inversa*, *seu de fonctionibus*", publicada em 1673. Assim, para indicar as quantidades que variam ao longo de uma curva, ele declarou: "Eu chamo funções todas as porções de linhas retas, que fazemos ao traçar retas indefinidas, que passam por um ponto fixo, e pelos pontos da curva" (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 53). Embora Leibniz não tenha proposto uma formalização desse objeto matemático, suas contribuições serviram para admitir que os elementos desse conceito (quantidades) pudessem estar relacionados.

De acordo com Roque (2012), antes da formalização do conceito de função, Leibniz[5] pressupõe a ideia de quantidade independente e dependente. Ele também foi responsável por introduzir o uso dos termos constante, variável, coordenadas e parâmetros para designar segmentos constantes ou quantidades arbitrárias. Além disso, estabeleceu diferentes símbolos que representam algebricamente alguns objetos do Cálculo Diferencial e Integral.

As contribuições de Newton e Leibniz foram fundamentais para a evolução dos conhecimentos científicos, especialmente na área do Cálculo Diferencial e Integral. A disseminação de suas respectivas descobertas levou a diferentes atritos entre eles, ao ponto dos membros da *Royal Society* (instituição inglesa destinada à promoção do conhecimento científico) acusarem Leibniz de plagiar as ideias de Newton a partir de 1699. No entanto, para Rachidi, Freitas e Mongelli (2020, p. 53), "Diferentes estudos

[5] As características algébricas propostas por Leibniz para o seu conceito de função incluem a representação por equações, a manipulação algébrica, a análise das propriedades e comportamentos gráficos desses objetos.

mostram que a inspiração de Newton é mais cinemática e geométrica. Para Leibniz, essa inspiração é mais formal e algébrica. Por outro lado, a invenção das notações está mais presente em Leibniz do que em Newton".

O conceito de função começa a ser introduzido para o aprimoramento das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, sendo desenvolvido por diferentes matemáticos, físicos e apreciadores das Ciências Exatas. Nesse contexto, o matemático suíço Johann Bernoulli (1667–1748), discípulo de Leibniz, empregava o uso da palavra "função", relacionando-a indiretamente às quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes. Esse fato foi registrado em um artigo publicado em "*Memoires del'Academie des Sciencesem*" de 1718, quando Bernoulli descreveu que "Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes" (ROQUE, 2012, p. 299).

Roque (2012) acrescenta que esse matemático experimentou várias notações como X, ξ e φx para representar uma função de x. Contudo, "[...] não diz mais nada sobre o modo de constituir funções a partir da variável independente, mas o que ele tem em mente são as expressões analíticas de curvas" (p. 299). Nesse sentido, cada objeto matemático desse poderia ser representado por uma única expressão analítica, observando-se que o conceito dessa temática envolve a combinação de símbolos algébricos e operações matemáticas.

É importante ressaltar que a expressão analítica de uma função é uma expressão (aritmética ou algébrica) que traduz a regra que associa os objetos e suas respectivas imagens. Por exemplo, consideremos o comprimento de uma circunferência em relação ao seu raio. Essa aplicação pode ser expressa por $C(r) = 2\pi r$ ou simplesmente $C = 2\pi r$. Nesse exemplo, a função está expressa analiticamente por uma única fórmula. Além disso, é denominada de fórmula a igualdade entre duas expressões analíticas.

Uma aplicação numérica cuja expressão analítica é conhecida pode ser representada graficamente no plano de coordenadas xOy. Assim, a representação gráfica da lei de uma função, expressada por uma expressão analítica, passou a ser transformada em uma curva. No entanto, esses dois objetos matemáticos são diferentes representações do mesmo fenômeno, sendo uma o reflexo da outra.

> [...] o ponto se transforma em número, a curva se chama equação, relações algébricas traduzem particulares posições de retas e de planos, e a variação de um termo da equação tem o poder de fazer mudar a forma de uma superfície, transformando-a sob nossos olhos. O número grande e o pequeno são vistos como segmentos de comprimentos distintos, o máximo e o mínimo de uma sucessão contínua de números não são mais do que pontos de maior ou menor altura, unidos no seu percurso por uma certa curva. (CASTELNUOVO, 1975, p. 163).

Para Ponte (1990, p. 3), "[...] o desenvolvimento do estudo de curvas, por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo para representar quantidades dependentes de alguma variável por meio duma expressão analítica". Esse procedimento de relacionar curvas a fórmulas fortaleceu as múltiplas representações dos objetos matemáticos.

Segundo Kleiner (1989), esse interesse em curvas fez com que os matemáticos voltassem sua atenção para os símbolos presentes nas expressões algébricas e fórmulas, independentemente das curvas originais que essas expressões representavam. Nesse momento, as funções começaram a ser representadas por meio de expressões algébricas. Essa nova maneira de representá-las está evidenciada, inicialmente, nas correspondências trocadas por Leibniz e Bernoulli (PONTE, 1990). Vale lembrar que as contribuições de Leibniz relacionadas à noção de função aparentemente são apoiadas nos aspectos gráficos da curva que representa esse objeto matemático.

Desde que começou a ser compreendido dessa forma, por volta do século XVIII, o conceito de função tem sido considerado sob diferentes aspectos. Assim, durante a Idade Moderna, as expressões analíticas dessas aplicações começaram a prevalecer. Isso fez com que as Funções analíticas se tornassem as mais usadas naquele período, ou seja, as classes analíticas dessa temática, expressadas por somas de séries infinitas, tornaram-se as mais usuais.

Segundo as observações de Roque (2012), durante o século XVII, o estudo das curvas estava predominantemente relacionado às quantidades geométricas. No entanto, a partir do século XVIII, ocorreu uma modificação notável na abordagem matemática, em que muitos matemáticos passaram a considerar a função como o principal objeto de investigação. Essa alteração significou uma mudança de foco na área da matemática, que deixou de se limitar aos números e passou a se concentrar na compreensão da lei de variação expressa por meio das funções. Essa transição trouxe consigo o enriquecimento dessa área do conhecimento por meio da introdução de novos métodos e, ao mesmo tempo, transformou sua essência, redefinindo seu objeto de estudo.

O matemático/físico suíço Leonhard Euler (1707–1783), ex-aluno de Johann Bernoulli, além de ser o primeiro a introduzir o símbolo $f(x)$ como notação que designa uma função que depende da variável x entre parênteses no artigo "*De Summis Serierum Reciprocarum*" publicado no *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* em 1734, foi o autor de outras simbologias matemáticas adotadas universalmente até o presente momento.

Contudo, suas ideias limitadas e incoerentes relacionadas à noção de função geraram algumas controvérsias que motivaram discussões a respeito desse tema, fazendo dessa temática o centro das discussões na área das ciências exatas. Esse fato inicia em 1748, quando Euler reformulou a definição do seu mestre e descreveu na obra "*Introductio in analysin infinitorum*" a seguinte definição:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{aa - zz}$; etc.; são funções de z. Uma função de variável é então, também, uma quantidade variável. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 53).

Essa noção atende à relação de quantidades variáveis em sua definição e evidencia as expressões analíticas. Entretanto, segundo Boyer (1996), Euler não definiu o que seria uma expressão analítica em seus trabalhos, apenas existem menções relacionadas às Funções algébricas (representadas por expressões algébricas de um determinado grau) e Funções transcendentes elementares (representadas por expressões exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras).

Na citada obra, Euler também descreve que "Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, que ainda conserva o mesmo valor... Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou seja, uma quantidade universal que inclui todos os valores determinados" (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 19). E ainda acrescenta que esses valores podem ser números positivos, negativos, inteiros e fracionários, irracionais, zero e até imaginários, expondo a relevância de cada objeto envolvido nessa temática.

A observação de fenômenos naturais levou a comunidade acadêmica a ampliar a compreensão dos objetos dessa ciência e definir seus conceitos com maior precisão. Esse fato foi provocado pelos problemas práticos e teóricos dos séculos XVIII e XIX, que desafiaram os matemáticos e físicos daquela época. Esses personagens evidenciaram as limitações e controvérsias na noção de função utilizada naquele tempo, circunstância que implicaria em sucessivas ampliações do mesmo, alterando profundamente sua natureza e seu significado. Dessa forma, esse conceito, que estava direcionado a analisar os fenômenos naturais, descrevendo suas regularidades ao interpretar suas interdependências de variáveis, passou a ser generalizado em leis quantitativas que se expressam analiticamente.

Assim, entre os problemas informados, os que mais se destacaram na exigência de um significado coeso sobre a noção de função foram o problema da corda vibrante e o problema da condução do calor, ambos pertencentes ao ramo da Mecânica. Esse fato movimentou os físicos e matemáticos daquele período, ao ponto de gerar um debate que perdurou por alguns anos. Esse momento foi frutífero para a expansão do conhecimento funcional. Vale lembrar que “[...] não só o conceito corrente de função era restrito e impreciso, como não existia uma fundamentação adequada das noções de limite, derivada e integral, ou uma teoria de convergência de séries” (ÁVILA, 1985, p. 19).

Euler e o filósofo/matemático francês Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) foram os protagonistas da discussão sobre o problema da corda vibrante, que consistia em analisar as vibrações infinitamente pequenas de uma corda elástica presa com extremidades em 0 e ℓ, que, após uma certa deformação, começa a vibrar. Nesse contexto, era necessário determinar a função que descreve a forma da corda no tempo t.

D'Alembert resolveu o problema da corda vibrante em 1747, mostrando que o movimento da corda é governado por equações diferenciais parciais e concluiu que sua solução poderia ser expressa por uma soma de duas funções arbitrárias que dependem das variáveis x e t. Ele apontou que, mesmo que as cordas tenham condições iniciais muito diferentes, elas sempre devem ser expressas analiticamente, ou seja, por uma equação algébrica ou uma série de potências.

Um ano depois, Euler relatou concordar com a solução de D'Alembert, mas não com sua interpretação. Ele argumentou que a referida solução não era mais geral, pois a forma inicial da corda poderia ser dada por várias expressões analíticas em diferentes subintervalos de $(0, \ell)$. Dessa forma, apresentou, como exemplo, tanto os arcos circulares de diferentes raios em diferentes partes de $(0, \ell)$ como uma curva desenhada à mão livre (ROQUE, 2012). Nesse contexto, observa-se que D'Alembert valorizava muito o rigor matemático e queria limitar o escopo de suas próprias descobertas matemáticas, enquanto Euler acreditava que a Matemática deveria ser exposta de uma forma total, abrangendo todas as situações da Física.

Já o matemático suíço Daniel Bernoulli (1700–1782), filho de Johann Bernoulli, acreditava que a forma inicial da corda deveria ser arbitrária, defendendo que o som musical produzido pela vibração das cordas consiste em frequência fundamental e harmônicos. Dessa forma, ele concluiu que essas vibrações podem ser expressas como somas periódicas de Funções trigonométricas. A partir dessa relação, Bernoulli afirmou que a posição inicial de uma corda vibrante pode ser expressa por uma série infinita de termos trigonométricos, que são tão gerais quanto as séries de potências.

Contudo, nem Euler e nem D'Alembert concordaram com a solução de Bernoulli, argumentando que quando a série seno converge, ela deve convergir em todos os lugares, mas para uma função arbitrária seria um absurdo. Por sua vez, Daniel Bernoulli rebateu, criticando as soluções desses personagens, afirmando que não tinham nada a ver com cordas vibrantes. Essa discussão continuou por vários anos, com a participação de outros matemáticos (ROQUE, 2012).

Nesse contexto, D'Alembert entendeu esse caso em um contexto matemático-algébrico e, na tentativa de resolvê-lo, limitou-se às condições iniciais da corda, obtendo o que seria uma função contínua na concepção de Euler. Por outro lado, Bernoulli entendeu essa situação em uma abordagem física e propôs que as formas iniciais, assim como as posteriores, poderiam ser representadas por somas infinitas. Já Euler, por sua vez, via o problema de um ponto de vista geométrico, deixando a diversidade de valores iniciais expandir a noção de função.

Em consequência disso, a noção de função foi ampliada, de modo a abranger as seguintes propriedades gerais: a) funções definidas por expressões analíticas em intervalos diferentes; b) funções desenhadas à mão livre. Em outras palavras, a ampliação desse conceito inclui tanto aquelas desenhadas à mão livre, que provavelmente não possuíam uma expressão algébrica, quanto aquelas que poderiam ser realizadas por partes (por mais de uma sentença), utilizando expressões analíticas que podem ser representadas em diferentes intervalos, como, por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

A partir dessas ideias, em 1755, Euler, no prefácio de sua obra “*Institutiones calculi differentialis*”, reformula sua definição de função, descrevendo que “Se, por consequência, x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x de alguma maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x” (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 53). É importante frisar que, nesse momento, esse personagem já tinha realizado uma reflexão sobre suas ideias devido às críticas sofridas por argumentações anteriores incoerentes e incompletas. Porém, seu atual pensamento ainda apresenta algumas lacunas sobre essa temática, dando continuidade às opiniões distintas.

O filósofo/matemático francês Marie Jean Antoine Nicolas de Carita (1743–1794), mais conhecido como Marquês de Condorcet, que além de ser um personagem marcante da Revolução Francesa, focalizou seus estudos também nos objetos das Ciências Exatas que estavam em desenvolvimento. Assim, em 1765, publicou seu primeiro trabalho, um ensaio matemático intitulado “*Essai sur le calcul integral*”. Devido à discussão sobre função, sua ideia sobre o mesmo conduz a formalizar a seguinte definição para esse tema:

> Suponho que tenho um certo número de quantidades $x, y, z, \ldots, F$; e que, para cada valor determinado de $x, y, z, \ldots$, etc, F tem um ou vários valores determinados: digo que F é uma função de $x, y, z, \ldots$. Enfim, eu sei que quando x, y, z serão determinados, F o será também, quando mesmo eu não sabendo nem a maneira de expressar F por meio de x, y, z, nem a forma da equação entre F e x, y, z; eu saberei que F é função de x, y, z. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 54).

Essa contribuição contempla a relação de quantidades variáveis com a utilização de diferentes expressões analíticas para consolidar o conceito de função.

Anos mais tarde, na obra intitulada "*Methodus tangentium inversa*, *seu de functionibus"* de 1797, o matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), também interessado no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, formulou o conceito de função apresentado por Euler no começo do trabalho, da seguinte forma:

> Chamamos função de um ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entram de uma maneira qualquer, imbricadas ou não com outras quantidades que olhamos como tendo valores dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da Função podem receber todos os valores possíveis. Assim nas Funções consideramos apenas as quantidades que supomos variáveis, sem nenhuma subordinação às constantes que podem estar aí imbricadas. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 54).

Nesse recorte, sua noção apresenta contribuições que contemplam a relação de quantidade variável. Como o conceito de função era o ponto de partida para toda a sua teoria, ele reforça seu pensamento ainda nessa obra, reformulando a citada definição com a utilização das expressões analíticas. Nesse sentido, descreve que:

> Para denominar uma função de uma só variável com x, nós faremos simplesmente preceder desta variável a letra ou característica $f,$ ou F; mas quando quisermos designar a função já composta desta variável, como x^2 ou $a+bx$ ou etc., fecharemos esta quantidade entre dois parênteses. Assim fx designara uma função de $x, f(x^2), f(a+bx)$, etc. designarão funções de x^2, de $a+bx$, etc. Para denomar uma função de duas variáveis independentes como $x, y,$ nós escreveremos $f(x, y)$, e também outras. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 54).

Lagrange, agora, enfatiza a linguagem simbólica, revelando uma certa preocupação em organizar as bases do Cálculo Diferencial e Integral a partir de regras algébricas. Dessa forma, utiliza esses recursos para evidenciar que seria possível expandir qualquer função a partir de uma série de potências.

É possível observar, nessas últimas definições, a presença marcante da ideia de função como uma relação entre quantidades variáveis. Isso também está presente na obra do matemático francês Sylvestre François Lacroix (1764–1848) intitulada de "*Traité du calcul différentiel et du calcul integral*", de 1797, que ao compreender o trabalho do Marquês de Condorcet, escreveu: "Toda quantidade cujo valor depende de uma ou de várias outras quantidades, é dita função dessas últimas, quer saibamos ou ignoremos por quais operações é preciso passar para retornar destas à primeira" (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 54).

Em meio a esse contexto, à medida que esses trabalhos estavam se expandindo no continente europeu, controvérsias iriam surgindo. Por exemplo, Euler sofreu duras críticas por informar que era possível determinar a natureza algébrica ou transcendente de uma função tendo apenas sua expressão analítica. Esse personagem chamou funções contínuas, todas aquelas que são definidas por uma única expressão analítica e funções mistas aquelas que requerem diferentes expressões analíticas (PERRIN, 1999).

Esse último fato foi criticado, principalmente, pelo matemático/físico francês Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), exibindo um contraexemplo de uma função mista e contínua. Nesse contexto, Cauchy questionou, por exemplo, a noção de que todas as funções contínuas poderiam ser representadas por uma única expressão analítica, contradizendo a concepção de Euler de funções contínuas definidas por uma única fórmula. Nesse sentido, ele mostrou, em 1844, que a função mista $f(x) = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se < 0 \end{cases}$ pode ser representada por uma única expressão analítica, $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Antes desse momento, na obra intitulada “*Cours D’Analyse*” de 1821, Cauchy faz uma reformulação do conceito de função, afirmando que

> Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entre si que, os valores de algumas sendo dados, podemos determinar os valores de todas aquelas outras, imaginamos essas diversas quantidades expressas por meio de algumas dentre elas, as quais recebem então o nome de variáveis independentes; e as quantidades restantes, expressas por meio das variáveis independentes, são o que chamamos de funções dessas variáveis. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 55).

Apesar dessa contribuição também contemplar a relação entre quantidades variáveis e apresentar algumas lacunas, essa formalização foi fundamental para esclarecer o conceito rigoroso de alguns objetos do Cálculo Diferencial e Integral.

Cauchy não é apenas o responsável pelo desenvolvimento da teoria de funções complexas, mas também pela definição dos conceitos de função contínua, diferenciável e integrável, partindo da noção que tinha sobre função de valores reais. Além disso, ele introduziu as ideias de funções simples e compostas, assim como funções explícitas e implícitas. Suas ideias foram bem aceitas pela comunidade Matemática da época, principalmente devido ao rigor matemático que ele começou a difundir em suas obras.

Outra situação que recebeu foco de discussão no início do século XIX, foi o problema da propagação de calor, que ampliou a noção de funções ao promover um debate sobre a sua solução. Nessa época, os matemáticos exploraram amplamente o uso de Séries trigonométricas, devido à sua periodicidade, para abordar fenômenos astronômicos e outras situações relacionadas à propagação de calor.

Em 1822, o matemático/físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) apresentou a solução para o mencionado problema em um trabalho exposto na Academia de Ciências da França, que tratava da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. Ele chegou ao seu principal resultado, afirmando que toda função pode ser expressa como uma Função trigonométrica, mais especificamente como uma Série trigonométrica.

No entanto, para provar a convergência da série, era necessário estender a definição de função, pois uma das propriedades gerais desse conceito afirma que ela deve ser dada por uma ou mais expressões analíticas. Nesse âmbito, Fourier, após um aprofundamento teórico sobre essa abordagem, descreve na obra intitulada "*Théorie analytique de la chaleur*" o seguinte conceito:

> Em geral, a função $f(x)$ representa uma sequência de valores ou de ordenadas das quais cada uma é arbitrária. A abscissa x podendo receber uma infinidade de valores, haverá um mesmo número de ordenadas $f(x)$. Todas têm valores numéricos reais, ou positivos, ou negativos, ou zero. Não supomos que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem de uma maneira qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade. (ROQUE, 2012, p. 320).

Essa definição de Fourier contribuiu para a noção de função ao introduzir a ideia de somas infinitas. No entanto, Roque (2012) observa que não houve muita diferença entre a formalização desse conceito apresentada por Fourier e a de Cauchy. Ambos consideraram que as quantidades variáveis se relacionam de forma que ao variar uma (independente), obtém-se a outra (dependente). No entanto, essa noção foi fundamental para o estudo das séries de funções, que posteriormente foram denominadas Séries de Fourier.

Esse conceito revelou que qualquer função em um intervalo dado pode ser decomposta pela soma de senos e cossenos, transformando funções com alto grau de complexidade em outras de natureza mais simples, que podem ser resolvidas em intervalos apropriados. Isso teve grande importância na resolução de problemas matemáticos e físicos, possibilitando a análise de fenômenos complexos por meio da utilização de séries trigonométricas.

O resultado de Fourier revelou que uma ampla variedade de funções poderia ser representada por uma expressão analítica em um determinado intervalo. Enquanto Daniel Bernoulli estava limitado a pensar em funções descritas por uma única expressão analítica, Fourier já considerava Funções definidas por partes, com várias fórmulas diferentes. Ao fazer isso, ele evitou a ideia de que as ordenadas devem obedecer a uma única lei matemática, e passou a se referir a uma função como qualquer sequência de valores.

Com essa abordagem, o conceito de função, até então entendido apenas como uma expressão analítica, também passou a ser discutido e ampliado para abranger uma diversidade de representações, incluindo Funções definidas por diferentes fórmulas em intervalos distintos. Isso foi um avanço significativo no estudo desse objeto matemático e abriu novas possibilidades para a compreensão e representação de fenômenos matemáticos e físicos.

No entanto, como os resultados de Fourier não estavam totalmente coerentes, isso também acabou promovendo algumas controvérsias que inquietaram os matemáticos daquela época. A primeira evidência relacionada a esse fato está no trabalho desenvolvido pelo matemático russo Nicolas Ivanovich Lobachevskiy (1793–1856), que em 1834, durante sua explanação sobre as Séries trigonométricas, escreveu:

> A concepção geral exige que uma função de x seja considerada como um número que é dado para cada x e que muda gradualmente ao mesmo tempo que x. O valor da função pode ser dado seja por uma expressão analítica, seja por uma condição que fornece um meio para testar todos os números e selecionar um dentre eles, ou, finalmente, a dependência pode existir mas permanece desconhecida. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 55).

Essa descrição apresenta uma colaboração importante para esse tema, pois está relacionada à relação de dependência de y por x, e reporta à utilização de uma expressão analítica para representar uma função.

Em 1847, o matemático/físico irlandês George Gabriel Stokes (1819–1903), além de expor problemas de campos vetoriais, como o fluxo magnético em superfícies planas, contribuiu para a presente temática, informando que:

> Quantidade cujo valor depende de qualquer maneira do valor da variável, ou dos valores das variáveis, ou dos valores das diversas variáveis de que é composta. Assim, as funções consideradas não precisam ser expressas por quaisquer combinações de símbolos algébricos, mesmo entre limites das variáveis, embora muito próximos (RÜTHING, 1984, p. 74).

Para Stokes, era necessário entender o conceito matemático além da ideia de expressão analítica. Os trabalhos iniciais sobre as Séries de Fourier propuseram uma nova definição, mas ele não conseguiu convencer os demais matemáticos de que sua afirmação sobre a função arbitrária definida em um intervalo poderia sempre ser representada pelo desenvolvimento de séries contendo senos, cossenos e coeficientes dados por integrais envolvendo a função no intervalo dado.

Esses coeficientes representam as áreas delimitadas pelo gráfico de uma Função trigonométrica multiplicada por outra função. Em outras palavras, trata-se do estudo da área limitada pelo gráfico desse objeto matemático. Para esse propósito, era necessário calcular a integral, ou seja, a área em um intervalo específico.

Anos mais tarde, o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) empenhou-se para entender em quais casos as integrais que definem os coeficientes de uma Série de Fourier existiam, ou seja, tentou dar consistência aos trabalhos de Fourier, demonstrando que as séries citadas convergiam. Em 1829, Dirichlet apresentou um exemplo de uma Função descontínua em todos os pontos, não sendo derivável nem integrável, nem tampouco podendo ser desenhada à mão livre ou representada por uma expressão analítica, pelo menos naquele período.

Essa aplicação afirmava que $f(x) = 1$, se x fosse um valor racional, e $f(x) = 0$, se x fosse um valor irracional. Para compreender esta função era necessário estender a noção dessa temática como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas. Vale ressaltar que a mencionada aplicação foi denominada posteriormente de Função de Dirichlet.

Nesse trabalho, Dirichlet também revelou que a necessidade inicial para resolver o problema da convergência das Séries de Fourier estava centralizada em analisar em qual intervalo a função seria integrável. Com isso, expõe a primeira demonstração rigorosa de que a Série de Fourier de uma função f é convergente, em cada ponto X, para a média aritmética dos limites laterais de f nesse ponto.

Assim, após aprofundar as ideias de Cauchy em relação à definição de uma integração, Dirichlet reformulou a definição de função em termos de uma correspondência arbitrária entre as variáveis que representam conjuntos numéricos. Dessa forma, fez a seguinte formalização desse conceito:

> Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se para cada x corresponde um único y, de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, $y = f(x)$ varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas através de operações matemáticas. (BOTELHO; REZENDE, 2011, p. 71).

Essa definição fez com que a noção de função fosse compreendida como uma relação entre dois conjuntos, em que a cada valor da variável independente era possível associar um único valor da variável dependente. Dessa forma, essa formalização é que mais se aproxima da visão que foca em uma correspondência biunívoca. No entanto, é importante notar que, nessa época, os conceitos de conjuntos e de números reais ainda não estavam totalmente estabelecidos (BOYER, 1996).

Dirichlet é considerado o matemático ao qual se atribui a definição formal de função, pois foi o primeiro a estabelecer esse conceito como uma relação arbitrária entre variáveis, independente de fórmulas algébricas (BOTELHO; REZENDE, 2011). Ele separou a definição de função de sua representação analítica, estendendo a formalização desse objeto matemático sem a necessidade de usar uma fórmula para representá-lo, exibindo somente uma associação entre variáveis. Dessa forma, utilizou o termo “Funções arbitrárias” para designar a necessidade de ir além da ideia de expressar esse conceito uma ou mais sentenças analíticas.

O matemático inglês George Boole (1815–1864) também contribuiu para a formalização do conceito de função, apresentando o processo de transformação numérica, onde cada elemento x é transformado no elemento $f(x)$. Assim, ele descreveu que:

> Qualquer expressão algébrica envolvendo o símbolo x é chamada uma função de x e pode ser representada sob a forma geral abreviada $f(x)$ ... Nestes mesmos princípios de notação, se em alguma função transformarmos x em 1, o resultado será expresso pela forma $f(1)$; se

> na mesma função transformarmos x em 0, o resultado será expresso pela forma $f(0)$. (BOTELHO; REZENDE, 2011, p. 73).

O matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), além de apresentar contribuições fundamentais para a Análise Matemática e a Geometria Diferencial, expõe a reformulação do conceito de função, explorando a infinidade dos números reais. Assim, em 1851, descreve:

> Seja z uma quantidade variável, que toma pouco a pouco, todos os valores reais possíveis, então chamamos w uma Função de z, se a cada um desses valores corresponde um único valor da quantidade indefinida w, e se z percorre continuamente todos os valores que se encontram entre dois valores constantes, w muda também continuamente, então chamamos esta Função de contínua. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 55).

Essa formalização contribui para os aspectos que contemplam a relação de quantidades variáveis e utiliza expressões analíticas. Os fatos relatados até aqui revelam que a necessidade de utilizar a noção de função para modelar fatos reais e problemas físicos aos poucos vai abrindo o caminho para uma Matemática abstrata, rigorosa e menos generalista.

Riemann e Dedekind se dedicaram mais diretamente à compreensão das teorias matemáticas sem recurso a representações externas. Para eles, os novos objetos matemáticos devem ser definidos por suas características internas e admitidos como princípios da teoria. Essa ausência de referência externa pode ser vista como o ponto de partida de uma nova fase da abstração, que transformará definitivamente os conhecimentos matemáticos em uma Matemática pura.

O matemático alemão Hermann Hankel (1839–1873), após analisar a noção de função formalizada por Dirichlet e compará-la com a de Euler, apresenta uma nova definição desse tema em 1870, muito próxima da noção moderna de correspondência entre dois conjuntos de números:

> Uma função se diz y de x se a cada valor da magnitude variável x que se move dentro de um certo intervalo, corresponde-lhe um determinado valor de y; não importa se y depende de x em todo o intervalo segundo a mesma lei ou não; se a dependência pode ser expressa por meio de operações matemáticas ou não. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 55).

Essa colaboração contempla a relação de quantidades variáveis e fornece a noção de domínio e aspectos de função contínua. Esse conceito foi incluído nos cursos de análise Matemática no final do século XIX e início do século XX. Vale a pena ressaltar que a definição dada por Hankel não faz qualquer menção à unicidade de y para cada valor de x, pois essa questão da unicidade distingue as funções unívocas e plurívocas. As funções algébricas racionais são unívocas, pois para cada x existe um único y correspondente, já as irracionais de índice par são todas plurívocas, uma vez que os radicais são ambíguos e dão valores aos pares.

O matemático alemão Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) também se inspirou no estudo das Séries de Fourier, e seu objetivo era entender em que condições as supracitadas séries convergem para suas funções associadas. Ao longo do processo de aprendizagem, percebeu que para obter uma resposta precisa a esta questão, tinha de estar atento não só ao conceito de função, mas também ao conceito de número, que precisava ser formalizado. Este novo problema o levou a estudar subconjuntos de linhas, consequentemente, aos estudos preliminares relacionados à Teoria dos Conjuntos.

Roque (2012) afirma que a partir de 1870, Cantor, tendo como base o problema das Séries de Fourier e vendo que quando a Série Trigonométrica representa uma função, ela é única, mostrou que isso acontece quando a série é convergente para todos os valores de x. Concluiu que a unicidade também pode ser verificada quando a Série Trigonométrica deixa de ser convergente, ou seja, a função deixa de ser representada somente em um número finito de pontos e passa a ser representada por um número infinito de pontos, desde que estivessem distribuídos sobre a reta de um modo específico. Os trabalhos de Cantor sobre conjuntos pontuais e o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos fizeram com que o conceito de função fosse definido em termos de pares ordenados de elementos, não necessariamente em valores numéricos (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013).

O alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) utilizou a ideia de aplicação para definir o conceito de função em 1877, fato publicado na obra intitulada "*Was sind und was sollen die Zahlen*" de 1888. Assim, descreveu que:

> Em uma aplicação de um sistema S uma lei é entendida, de acordo com a qual cada elemento s de S está associado a um determinado objeto que é chamado a imagem de s e denotada por $\varphi(s)$; dizemos também que $\varphi(s)$ corresponde ao elemento s, que $\varphi(s)$ é originada ou gerada pela aplicação φ, que s é transformado em $\varphi(s)$ pela aplicação φ. (RÜTHING, 1984, p. 75).

Nessas palavras, nota-se um afastamento das concepções anteriores, ligando o conceito de funções a uma linguagem rigorosa. É possível observar que a temática em questão passa a ter um viés mais rigoroso, atendendo, principalmente, às demandas da Análise Matemática.

Já o matemático e filósofo alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925), influenciado pelo logicismo, em 1879, define função da seguinte forma:

> Quando em uma expressão, sobre cujo conteúdo não seja necessariamente possível atribuir julgamento, um sinal simples ou composto tem uma ou mais ocorrências e se considerarmos esse sinal como substituível em todas ou algumas dessas ocorrências por outra coisa (mas em todas as ocorrências pela mesma coisa) então nós chamamos de função a parte que permanece invariante na expressão, e de argumento da função a parte substituível. (RÜTHING, 1984, p. 75)

O matemático francês Henri Léon Lebesgue (1875–1941) argumentou em 1902 que, embora após as ideias de Dirichlet e Riemann, geralmente haja concordância de que existe uma função quando existe uma correspondência entre um número y e números $x_1, x_2, \ldots$ sem a preocupação com o procedimento que ajuda a estabelecer essa correspondência, alguns matemáticos parecem tratar apenas aquelas funções introduzidas por correspondências analíticas como aplicações verdadeiras. Pode-se pensar em introduzir uma restrição um tanto arbitrária; no entanto, é certo que isso não limita realmente o campo de aplicação, uma vez que apenas funções representáveis analiticamente foram usadas efetivamente até agora (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020).

Já o matemático francês Jules Tannery (1948–1910), define função como uma correspondência entre conjuntos, em 1904, sinalizando que:

> Uma função é definida neste conjunto se uma correspondência está definida. O conjunto (Y) dos valores distintos assumidos por y é determinado pela mesma correspondência: diz-se que b é um elemento de (Y), mais uma vez isto significa que um elemento a de (X) corresponde a um número b. Cada elemento de (X) corresponde a um elemento de (Y) e vice-versa. (RÜTHING, 1984, p. 76).

Tannery menciona que cada x pertencente a um conjunto X corresponde a um único valor de y, o que caracteriza y como uma função de x. É importante ressaltar que pode ocorrer que vários elementos diferentes de (X) correspondam ao mesmo elemento de (Y). Nesse sentido, o processo de definição não implica que a correspondência entre (X) e (Y) seja um processo perfeito.

Roque (2012) apresenta a definição formalizada pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932) como um caso especial de relação. Em 1911, Peano afirma que uma “Função é uma relação especial, que a qualquer valor da variável faz corresponder um só valor [...]” (COSTA, 2008). Além disso, Peano é creditado por introduzir alguns símbolos utilizados na Teoria dos Conjuntos. Essas contribuições levaram a Matemática a adquirir um caráter cada vez mais abstrato. Embora essa tentativa torne o tratamento matemático mais prático, ela também distancia a Ciência Matemática da realidade, tornando a relação entre os conceitos mais obscura e resultando em um distanciamento entre os saberes matemáticos e os fenômenos naturais e sociais.

Em 1927, o matemático alemão Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955) afirmou: “Ninguém jamais soube explicar o que é uma função. Mas uma função f está definida se por um meio qualquer pudermos associar a um número a, um número b... Dizemos então que b é o valor da função f para o valor a do argumento” (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 56). Assim, ele enfatiza a natureza abstrata e versátil desse objeto matemático, mostrando que, mesmo sem uma definição precisa, sua compreensão e aplicação é algo simples.

Quanto à definição desse conceito apresentada pelo matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877–1947), três características foram enumeradas, que devem ser satisfeitas por uma função determinada pela relação entre duas quantidades variáveis x e y.

> [1º.] y é sempre determinado por um valor de x; [2º.] para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y; [3º.] a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x. (CORSINI, 2020, p. 196).

Finalmente, o conceito de função atingiu seu caráter mais geral e formal, conforme definido por um grupo de matemáticos franceses que passou a ser conhecido como Nicolas Bourbaki. Esse grupo entendeu que muitas definições da Matemática moderna deveriam ser reconsideradas. Para tanto, escreveram uma série de livros, publicados a partir de 1935, apresentando ao mundo a “Matemática Moderna” baseada em novos termos e conceitos para essa área (FONSECA, SANTOS, NUNES, 2013).

A definição de Bourbaki ainda influencia o ensino de funções até hoje e é importante para ampliar as possibilidades do conceito. A definição dada por esse grupo, em 1939, está no primeiro livro da coleção "*Théorie des Ensembles*" (*fascicule de résultats*), com a seguinte descrição:

> Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para qualquer $x \in E$ existe um único $y \in F$, e apenas um, que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; dizemos que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. (RACHIDI, FREITAS, MONGELLI, 2020, p. 56).

Podemos observar que a definição de Bourbaki apresenta a noção de função como um subconjunto do produto cartesiano $E \times F$. Com essa definição mais abrangente, o conceito é ampliado para incluir todas as correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, não se restringindo apenas aos conjuntos numéricos. Segundo Alvarenga Barbosa e Ferreira. (2014, p. 175), esse novo aspecto foi fundamental "[...] para a disseminação do conceito de função por diversas áreas do conhecimento, podendo, assim, ser utilizada em distintos modelos de correspondência entre variáveis, não sendo restrita apenas ao conjunto dos números reais".

Diante do exposto, é notável que ao longo da história, desde a antiguidade até o movimento estruturalista na Matemática dos grupos Bourbaki, diversas concepções sobre o que é uma função emergiram. Convém destacar que além dos matemáticos citados, muitos outros também foram responsáveis por aprimorar esse conceito. Essas perspectivas variadas não apenas abordam diferentes maneiras de interpretar esse objeto matemático, mas também enfatizam e utilizam seus aspectos de formas distintas. Assim, todas essas contribuições, embasadas no pensamento científico e filosófico de suas respectivas épocas, culminaram nas definições e concepções utilizadas atualmente nos livros de Matemática, especialmente nos didáticos.

Considerando que objeto matemático implica em diferentes tendências de ensino, busca-se a seguir analisar os aspectos pedagógicos relacionados ao ensino de Funções na Educação Básica.

2.2.2 Aspectos Pedagógicos a Respeito do Ensino de Funções

Para tratar da discussão relativa ao ensino de Funções numéricas, é importante partir do princípio de que “O ensino caracteriza-se pela tarefa de intermediar o conhecimento produzido, as suas formas de produção e o conhecimento em construção do aluno” (BICUDO, 1999, p. 6). Com o objetivo de alcançar essa triangulação, buscamos tecer algumas considerações a respeito de alguns aspectos pedagógicos da temática em questão.

Em Matemática, o termo “função” possui um significado relevante para o desenvolvimento da Ciência. Os principais conceitos desse tema são considerados alguns dos conteúdos mais importantes a serem assimilados na Educação Básica, ao ponto de comporem um tópico essencial tanto para estudantes que estão concluindo o Ensino Fundamental, como também para os que estão iniciando o Ensino Médio.

> O conceito função é um dos mais genéricos e mais unificadores de toda a Matemática contemporânea, fazendo-se presente em efetivamente todos os seus campos, incluindo Álgebra, Geometria, Análise, Combinatória, Probabilidade, etc. Diversas noções importantes – desde as mais elementares até as mais sofisticadas – admitem formulações em linguagem de funções, que contribuem para a clareza da exposição e impulsionam o desenvolvimento de ideias. (LIMA, 2012, p. 13).

De uma forma geral, é possível observar que os aspectos mais simples da temática de funções são encontrados nas apreciações mais básicas de diferentes ramos da Ciência. Essa evidência indica que os conceitos desse tema, além de conectarem internamente vários tópicos matemáticos, também descrevem o comportamento de certos fenômenos tanto das vivências pessoais como dos acontecimentos naturais. Esses fatos são objetos de pesquisa de diferentes áreas do conhecimento.

As relações de dependência que podem ser expressas pelas funções estão presentes em quase todas as componentes curriculares, incluindo aquelas que pertencem ao grupo das Ciências Humanas. Suas ferramentas desempenham um papel importante na descrição dos fatos reais, potencializando o aprendizado da leitura, interpretação e construção de gráficos.

Uma relação é uma correspondência entre dois ou mais objetos ou um vínculo entre elementos. Já o termo "dependência" se refere ao que acontece quando um elemento está subordinado a outro e, por conseguinte, depende dele. Uma relação de dependência, por sua vez, é uma correspondência na qual um dos elementos depende do outro. Para Lima (1999), as correspondências representam "[...] uma regra, um critério, um algoritmo ou uma série de instruções" (p. 3). Esse autor ainda acrescenta que

> […] a definição de função como uma correspondência é muito mais simples, mais intuitiva e mais acessível ao entendimento do que a outra que usa uma série de conceitos preliminares, como produtos cartesianos, relação binária, etc. Por isso mesmo ela é utilizada, por todos, exceto os autores de livros didáticos brasileiros. (LIMA, 1999, p. 4)

Cabe enfatizar que a Matemática é uma Ciência de linguagem própria e foi desenvolvida não apenas para explicar os fenômenos da natureza, mas também para resolver diferentes tipos de problemas práticos e teóricos, os quais nem sempre são tangíveis, pois se originam na mente humana e muitos deles de maneira totalmente abstrata. As abordagens relacionadas aos conteúdos de funções estabelecem "[...] uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjunto de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade)" (CARAÇA, 2002, p. 130-131).

Diante disso, o estudante da Educação Básica, durante seu processo formativo, deve compreender que as funções estão presentes nas diversas áreas do conhecimento, sendo possível modelar matematicamente diferentes situações sociais, naturais e abstratas, bem como saber utilizar a resolução de problemas reais e imagináveis, numa perspectiva de poder auxiliar a evolução da sociedade atual.

A relevância dessa temática promoveu a inclusão do conceito de função no currículo de Matemática. Contudo, os antigos currículos da educação brasileira padronizaram os assuntos desse tema em uma linearidade desconexa. Em outras palavras, esses tópicos foram geralmente tratados de forma independente, sem qualquer conexão entre eles. Além disso, há muito pouca menção à proposta de aplicação da Matemática com outras áreas do conhecimento científico.

Esses fatos são consequências do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, que impregnou o ensino do conceito de função, ignorando as razões que determinaram o surgimento dele, “[...] como a necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar” (TINOCO *et al.*, 1996, p. 1).

Nessa visão, o ensino de Funções começa a ser tratado de modo explícito nos anos finais do Ensino Fundamental, especificamente no nono ano, que antes era denominado de oitava série do Ensino Fundamental II.

> A ideia de relações funcionais, inicialmente deve ser, intuitivamente desenvolvida na pré-escola e nas séries iniciais do ensino fundamental, através da observação de regularidades em eventos, formas, composições e conjuntos numéricos. Nas sequências, os alunos, além de descrever, entender, analisar, criar e relacionar uma variedade de padrões, devem representá-los analiticamente, através de letras, em expressões algébricas e equações. As representações gráficas em tabelas, em diferentes tipos de gráficos e diagramas, devem acompanhar todo o percurso da construção do conceito. (SANTOS *et al*., 2004, p. 6).

Nessa linha de pensamento, ao finalizar os anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que o estudante tenha desenvolvido a compreensão da ideia de relações funcionais de forma intuitiva, por meio da observação de regularidades em eventos, formas, composições e conjuntos numéricos. No entanto, para alcançar essas finalidades, é fundamental minimizar as dúvidas que ainda possam surgir durante a transição da Aritmética para a Álgebra e, posteriormente, para a Geometria.

Dessa forma, antes de concluir os anos finais do Ensino Fundamental, é importante que o estudante compreenda a estreita relação entre as funções e a Álgebra, permitindo que ele possa encontrar soluções para problemas que envolvem números desconhecidos. Nesse sentido, a BNCC, especificamente na unidade temática Álgebra, destaca que para o desenvolvimento do pensamento algébrico, é necessário que os estudantes possam.

> [...] criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados [...], os alunos, precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em linguagem materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa. (BRASIL, 2018, p. 270).

Entretanto, a formação que os estudantes recebem nessa etapa de ensino busca capacitá-los a ler e interpretar as informações abstratas da Matemática de forma desconexa com a realidade. De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira

(1999), as tendências mais recentes no contexto da Educação Matemática indicam a necessidade de começar a ensinar funções de forma intuitiva e informal, especialmente nessa etapa de ensino, adiando o tratamento formal desse conceito para o Ensino Médio.

O ensino da Matemática tem a responsabilidade de garantir que os estudantes adquiram flexibilidade ao lidar com o conceito de funções e sua aplicação em diferentes situações. No entanto, o processo de ensino e aprendizagem dessa componente curricular tem sido desenvolvido com pouca ênfase em aplicações e variedades de situações-problema em Matemática, bem como em outras áreas da Ciência.

Normalmente, o ensino de Funções tem como pré-requisito, no Ensino Médio, o estudo dos conjuntos dos números reais e as relações entre conjuntos. A esse respeito, Chaves e Carvalho (2004) afirmam que, tradicionalmente, a noção de função é introduzida como um caso especial de um conjunto de pares ordenados e suas relações, antes de passar para outros tipos de representação. Nessa ocasião, imediatamente, são apresentadas as definições e generalizações que lhes trazem um alto nível de abstração, resultando em uma profunda interação entre análise e síntese, que muitas vezes os estudantes não conseguem assimilar.

Dessa forma, as abordagens dos conteúdos de Funções, dentro da etapa do Ensino Médio, precisam ser estendidas para uma contextualização, capacitando os estudantes a abstrair informações, identificar regularidades, construir generalizações e utilizar a linguagem Matemática de forma adequada para descrever e explicar fenômenos relevantes tanto para a Matemática quanto para outras áreas do conhecimento.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) orientam que o ensino dessa temática seja iniciado através da exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações, utilizando exemplos como idade e altura; tempo e distância percorrida; área e raio do círculo; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outros. O documento também sugere que os estudantes sejam estimulados a apresentar outras possíveis relações funcionais, criando esboços qualitativos dos diagramas e gráficos que representam essas relações (BRASIL, 2006).

Essa abordagem enfatiza a importância de os estudantes serem capazes de contextualizar os conhecimentos matemáticos com as experiências observadas em seus cotidianos. De acordo com os PCN,

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. (BRASIL, 1997, p. 19).

Essa diversidade de possibilidades no ensino de Funções possibilita que a Matemática seja apresentada aos estudantes de forma mais vívida, com o uso de recursos didáticos adequados e exemplos retirados do cotidiano e dos meios de comunicação. Os parâmetros curriculares recomendam que as aplicações práticas não sejam deixadas para o final do estudo, mas sim que sejam utilizadas como motivação para que os estudantes compreendam a ideia de função e saibam aplicar suas ferramentas para descrever e entender fenômenos sociais, naturais e abstratos.

É importante destacar que a formação do cidadão deve incluir a capacidade de analisar e interpretar criticamente tabelas e gráficos presentes em jornais, revistas e outros meios de comunicação. Os indivíduos devem ser alfabetizados matematicamente para não serem enganados por propagandas e informações falsas, sendo capazes de ler e compreender dados apresentados em televisão, internet e outros meios. Para isso, é essencial desenvolver habilidades que os auxiliem na seleção e análise de informações para tomada de decisões informadas.

O estudo das Funções também ganha relevância na interpretação da linguagem gráfica, permitindo aos estudantes compreenderem o significado das variações das grandezas envolvidas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), o ensino de Matemática nessa etapa deve:

,

> […] garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 44).

Uma expectativa comum ao final do Ensino Médio é que os estudantes tenham compreendido o conceito de função e estejam familiarizados com diferentes tipos desse conteúdo, como as Funções afins, quadráticas, modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras, apresentadas em diversas representações. No entanto, na prática, são poucos cidadãos, mesmo com um nível completo da educação básica, que têm essa compreensão desse tema.

Em vista disso, Denbel (2015) ressalta que, embora o termo Função numérica seja frequentemente definido em seu sentido moderno nos livros didáticos, os estudantes geralmente possuem uma visão muito limitada do que realmente é uma função. Sua compreensão se assemelha à situação no século XVIII, quando esse conceito era visto apenas como uma variável dependente ou uma expressão analítica.

Nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, é comum apresentar o termo função como uma ideia de transformação numérica. Nessa abordagem, "É útil considerar uma função como uma máquina" (STEWART, 2014, p. 10). Essa metáfora gerou a ideia de "Máquina de Função" para o ensino de Funções numéricas.

De um modo geral, a fórmula matemática da função pode ser visualizada como um "aparato interno" ou uma "máquina" que possui uma entrada e uma saída. Essa máquina recebe um elemento como entrada, realiza um processo interno específico de acordo com a regra estabelecida pela lei de formação e, como resultado, gera um único valor de saída correspondente. Esses elementos envolvidos, tanto na entrada quanto na saída, são representados por números, permitindo a manipulação/transformação numérica.

Essa abordagem busca induzir que a função é uma regra Matemática específica e fixa que relaciona elementos de dois conjuntos. Por exemplo, seja A o conjunto de entrada e B o conjunto de saída, então cada elemento do conjunto A corresponde a um elemento específico do conjunto B. Assim, ao colocar um número qualquer nessa máquina, espera-se um resultado específico. Essas metáforas também são usadas para introduzir o método analítico de definição de função.

Importante destacar que a maioria das funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio é definida em subconjuntos dos números reais. Esses objetos matemáticos são definidos por diferentes expressões analíticas em diferentes subconjuntos do domínio. Nesse sentido, Trindade e Moretti (2000) afirmam que:

> [..] o estudo analítico de funções continua, naturalmente, a ser importante, mas ele deve surgir com base em atividades, sistematicamente feitas a partir das representações numéricas e gráficas. Dessa forma, a expressão algébrica adquire significado próprio. Trata-se de primeiro desenvolver o conceito intuitivo para depois formalizá-lo. (TRINDADE; MORETTI, 2000, p. 44).

A citação acima destaca a importância de abordar o estudo de Funções de uma forma mais concreta e intuitiva antes de introduzir a formalização analítica. Em outras palavras, é fundamental que os estudantes compreendam o conceito de função por meio de atividades que envolvam representações numéricas e gráficas antes de serem apresentados às expressões algébricas.

Para Stewart (2014), é possível representar uma função de quatro maneiras: a) verbalmente, descrevendo-a com palavras; b) numericamente, por meio de tabelas de valores; c) visualmente, através de gráficos; d) algebricamente, utilizando-se uma fórmula explícita. E acrescenta que “Se uma função puder ser representada das quatros maneiras, em geral é útil ir de uma representação para outra, a fim de obter um entendimento adicional sobre a função” (p. 12). Essas formas são denominadas de múltiplas representações desse mesmo objeto matemático.

> No ensino atual de funções e nos livros didáticos em geral, funções são identificadas com expressões analíticas, o que se constitui num obstáculo à aprendizagem desse conceito. A apresentação do conceito de função é feita através da sua forma analítica, a partir dela é construída a tabela correspondente e com os dados da tabela é feita a representação gráfica no plano cartesiano. Essa é a ordem usual de apresentação das diversas formas de representar uma função. (TRINDADE; MORETTI, 2000, p. 44).

O problema com essa ordem usual de apresentação é que os estudantes podem não compreender a natureza abstrata e fundamental das funções, associando-as apenas a fórmulas matemáticas isoladas, sem perceber sua utilidade e aplicabilidade em diferentes contextos. Dessa forma, Trindade e Moretti (2000) tentam sugerir que a abordagem do conceito de função deveria ser mais abrangente, explorando outras formas de representação além da analítica, como a visualização gráfica, a interpretação de problemas do mundo real, a análise de comportamentos e transformações, entre outras.

Para isso, os estudantes precisam ser capacitados a trabalhar com as múltiplas representações de uma função, construindo tabelas, calculando valores, desenvolvendo o senso quantitativo e adquirindo uma sensibilidade para identificar as possíveis aproximações aceitáveis e inaceitáveis. Essa abordagem mais abrangente e integrada contribuirá para uma compreensão mais sólida e completa do estudo de Funções, permitindo que os estudantes transitem com mais facilidade entre as diferentes representações matemáticas.

> Eles também se utilizam de representações tanto para interpretar o problema como para comunicar sua estratégia de resolução. Essas representações evoluem de formas pictóricas (desenhos com detalhes nem sempre relevantes para a situação) para representações simbólicas, aproximando-se cada vez mais das representações matemáticas. Essa evolução depende de um trabalho do professor no sentido de chamar a atenção para as representações, mostrar suas diferenças, as vantagens de algumas, etc. (BRASIL, 1997, p. 45).

Para um melhor entendimento do significado das características relevantes em casos específicos, é crucial ter a oportunidade de utilizar números presentes em situações reais do cotidiano. O ensino deve proporcionar demonstrações do conteúdo aprendido, permitindo aos estudantes um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. No entanto, pesquisas mostram que muitos estudantes enfrentam dificuldades em compreender o conceito de variáveis, lidar com expressões algébricas e até mesmo expressar relações generalizadas, pois nem sempre percebem a necessidade de generalização.

Diante dessas dificuldades, Ponte (1990) sugere que o estudo de Funções deve começar com representações numéricas, gráficas e contextualizadas, pois são mais intuitivas e visualmente atraentes. Para esse autor, os métodos algébricos e os aspectos formais devem ser abordados em etapas posteriores do ensino, uma vez que, ao compreender os conceitos de forma mais concreta e aplicada, os estudantes podem desenvolver uma base sólida antes de avançar para abstrações mais complexas.

> A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. Além disso, situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Os alunos podem, por exemplo, estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado, em função da medida

> de seu lado; determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação. (BRASIL, 1998, p. 118).

Essa postulação busca difundir a compreensão do conceito de variável por meio de situações contextualizadas, descritas tanto algebricamente quanto graficamente. Nesse contexto, é importante abordar fenômenos em que as variáveis ocorrem com certa regularidade, permitindo que os estudantes observem esses fatos e, posteriormente, descrevam as relações quantitativas entre elas, ou seja, criem modelos matemáticos que enfatizem as expressões algébricas.

Para Caraça (2002), a "[...] regularidade é um comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas" (p. 119). Esse autor também destaca que "[...] a existência de regularidades é extremamente importante porque permite a repetição e previsão, desde que se criem as condições iniciais convenientes; ora, repetir e prever são fundamentais para o homem na sua tarefa de dominar a natureza" (CARAÇA, 2002, p. 119).

Por exemplo, quando é possível compreender que as variáveis possuem um fenômeno que ocorre com certa regularidade, pode-se descrevê-las por meio da relação quantitativa entre elas, ou seja, descrever mediante um modelo matemático. Assim, ao validar a compreensão dos conceitos funcionais, pode-se observar que algumas mudanças simples de foco, perspectiva e abordagem foram assimiladas. Nesse âmbito, o processo investigativo e a resolução de problemas, além de possibilitar a capacidade de se mover através de múltiplas representações, o que caracteriza a habilidade de relacionar conceitos matemáticos a outros domínios e contextos, também viabiliza a compreensão do conceito de variáveis.

Tinoco *et al.* (1996) declarou que reconhecer regularidades em situações reais, sequências de números ou padrões geométricos é uma habilidade básica para formalizar o conceito de função. Para esses autores, a origem desse conceito "[...] está intimamente ligada à necessidade do homem de registrar regularidades observadas em fenômenos e generalizar leis ou padrões" (TINOCO *et al*., 1996, p. 32).

Ponte (1990) enfatiza que os estudantes, por vezes, não sentem a necessidade de generalizar, mas, por outro lado, saber generalizar é crucial para compreender os saberes matemáticos de forma contextualizada. Ainda para este autor, a grande ênfase em termos abstratos e técnicas nos planos de aula para o ensino de Matemática ao redor do mundo não constitui uma ferramenta prática para lidar com situações interessantes dentro ou fora dos conteúdos dessa componente curricular universal, apenas constitui um vocabulário sem memória.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), destacam que:

> [...] formular e comunicar generalizações, assim como reconhecer e representar relações entre variáveis, são processos essenciais do pensamento matemático e da sua utilização para interpretar situações e resolver problemas de diversas disciplinas e da vida corrente. A compreensão de fórmulas, a construção de tabelas de valores a partir de uma dada relação ou a leitura de gráficos são aspectos integrantes desse processo. (p. 97).

O conceito de generalização surge da constatação de que existem fenômenos que ocorrem com regularidade e podem ser estendidos a outras situações similares. É nesse contexto que Tinoco *et al.* (1996) enfatiza a importância da capacidade de generalizar para realizar abstrações matemáticas. Nessa perspectiva, é comum que os estudantes, ao perceberem regularidades em determinadas situações, extrapolam essas observações e concluem que uma lei específica se aplica a todos os fenômenos semelhantes.

No entanto, é essencial que eles desenvolvam a habilidade de apresentar argumentos de forma coerente, utilizando uma linguagem clara e concisa, a fim de demonstrar a validade da lei que foi formulada a partir de suas observações. A generalização matemática requer uma análise cuidadosa, a busca por padrões consistentes e a capacidade de justificar suas conclusões com base em evidências sólidas. Dessa forma, os estudantes podem utilizar a generalização como uma ferramenta poderosa para entender e resolver uma ampla gama de problemas matemáticos e aplicá-la de maneira significativa em diversas situações da vida real.

> O estudo das funções pode revelar-se particularmente rico em oportunidades para se estabelecerem conexões entre diversos domínios da matemática. Com efeito, tabelas de valores, gráficos e expressões analíticas, que o estudo das funções leva a relacionar naturalmente, têm a ver com padrões numéricos, representações geométricas e métodos algébricos. (ABRANTES, SERRAZINA, OLIVEIRA, 1999, p. 98).

Com base no que foi apresentado, fica claro que o estudo das Funções é essencial para adquirir uma linguagem matemática como uma linguagem científica, que permite expressar diversas situações-problema. Esse conceito está presente em inúmeras situações cotidianas, tornando-o relevante e útil no dia a dia.

Para capacitar os estudantes, é importante prepará-los para o saber-fazer, estimulando a criatividade, reflexão e argumentação. Ao desenvolver essas habilidades, eles se tornam capazes de investigar, interpretar informações, resolver problemas, utilizar diferentes formas de representação e construir modelos matemáticos.

Embora a compreensão do conceito de função possa apresentar desafios, algumas mudanças de abordagem podem ajudar a superar essas dificuldades. É fundamental encorajar os estudantes a aplicar seus conhecimentos em situações reais, estabelecendo explicações matemáticas em modelos práticos.

Com base nesse contexto, torna-se relevante o desenvolvimento de habilidades de investigação, construção de modelos matemáticos e resolução de problemas, visando expandir o pensamento matemático e permitir que os estudantes compreendam e apliquem o conceito de função de maneira significativa em suas vidas. Essa abordagem contribui para uma formação mais completa e prepara os alunos para enfrentar desafios matemáticos e de outros domínios do conhecimento de forma mais eficiente. (BRASIL, 2018).

Na próxima subseção, exploraremos os aspectos abstratos do ensino de Funções. Essa exploração é fundamental para uma compreensão mais profunda de como abordar as definições relacionadas à função.

2.2.3 Aspectos Abstratos do Ensino de Funções

Nesta subseção, abordaremos o conceito de função de forma abstrata, explorando as ideias fundamentais relacionadas ao seu ensino na Educação Básica. Enfatizamos alguns pré-requisitos que servem como uma base sólida para o entendimento desse conteúdo.

Denominamos de proposição ou sentença toda oração declarativa que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. É importante observar que toda proposição possui três características obrigatórias: 1ª) é uma oração com sujeito e predicado; 2ª) é declarativa, não sendo exclamativa ou interrogativa; 3ª) possui um, e somente um, valor lógico, podendo ser verdadeira (V) ou falsa (F). Por exemplo, tanto "$1 + 1 = 2$" quanto "$1 < 2$" são verdades absolutas no sistema decimal.

No entanto, existem expressões de igualdade e desigualdade que não podem ter seu valor lógico (verdadeiro ou falso) determinado sem informações adicionais. Por exemplo, "$x + 5 = 1$" é verdadeira se considerarmos que $x = 4$, mas é falsa para qualquer outro valor atribuído a x. Nesse sentido, o valor lógico depende do valor atribuído à variável.

Quando as expressões são representadas com pelo menos uma variável, são denominadas de funções proposicionais ou sentenças abertas (LIMA, 2014). No entanto, quando atribuímos valores à variável, a sentença se torna definida. Dessa forma, os quantificadores universais e os conjuntos numéricos têm relevância para definir o valor lógico da sentença. Por exemplo, "$x + 1 > 0$" para todo $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ é uma verdade, mas é falsa para todo $x \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$.

É importante ressaltar que ao longo da Educação Básica, frequentemente exploramos as ideias intuitivas de conjuntos e elementos, onde o primeiro é representado por letras maiúsculas e o segundo por minúsculas. Nesse contexto, estudamos a relação de pertinência (de elemento para conjunto) e a relação de inclusão (de subconjunto para conjunto e vice-versa). Além disso, qualquer conjunto pode ser representado por descrição por chaves, listagem de elementos ou por uma propriedade, ou até mesmo por figuras conhecidas como diagramas de Euler-Venn.

O principal conjunto abordado na Educação Básica é o conjunto dos números reais, representado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Esse conjunto é formado por alguns subconjuntos importantes, como os números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Dessa forma, dependendo da natureza do número, ele pode pertencer a um ou mais subconjuntos específicos. Para expressar uma certa propriedade, alguns elementos numéricos são generalizados utilizando letras e outros símbolos.

Nesse contexto, o valor absoluto de um número real "a" é representado por $|a| = \begin{cases} a, se\ a \geq 0 \\ -a, se\ a < 0 \end{cases}$. Isso é também denominado de módulo de um número real e é utilizado para representar a distância do número "a" até o zero. Por exemplo, $|1| = 1$; $|-2| = 2$; $\left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$; $|0| = 0$.

Outro exemplo que convém destacar é o uso de $[\![a]\!], [a]$, ou $\lfloor a \rfloor$ quando "a" é um número racional. Esses símbolos são utilizados para representar o maior inteiro que é menor ou igual a "a" (LEITHOLD, 1993), ou seja, $\lfloor a \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq a\}$. Dessa forma, pela própria definição, se $n \leq a < (n+1)$, então $\lfloor a \rfloor = n$. Por exemplo, $\lfloor 5{,}8 \rfloor = 5$; $\lfloor 2 \rfloor = 2$; $\left\lfloor -\frac{1}{4} \right\rfloor = -1$; e $\lfloor \pi \rfloor = 3$. É importante enfatizar que $\{a\}$ representa um conjunto unitário formado pelo elemento "a", e $[a]$ é visto como um número inteiro menor ou igual a "a".

Por outro lado, dado um número real "b" é denotado por $\lceil b \rceil$ o menor inteiro que é maior ou igual a "b", ou seja, $\lceil b \rceil = \min\{n \in Z \mid n \geq b\}$. Novamente da própria definição tem, se $(n-1) < b \leq n$, então $\lceil b \rceil = n$. Por exemplo, $\lceil 5{,}8 \rceil = 6$; $\lceil 2 \rceil = 2$; $\left\lceil -\frac{1}{4} \right\rceil = 0$; e $\lceil \pi \rceil = 4$.

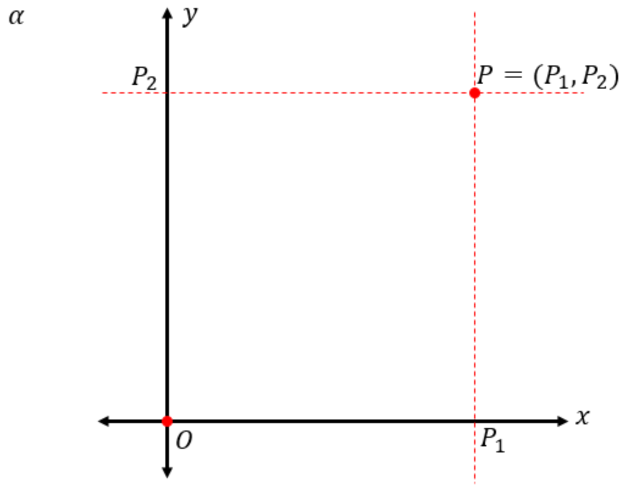
Vale lembrar que a representação $[a,b]$, com $a \neq b$, indica um intervalo fechado da reta real, cuja partição P de $[a,b]$ é uma escolha de $n+1$ pontos, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, satisfazendo: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$. Uma partição determina n sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, cada um dos quais possui comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. As partições podem ser realizadas não somente como intervalos fechados reais, mas também com todos os tipos de conjuntos e intervalos informados, exceto o intervalo degenerado, aqueles em que $a = b$.

Na notação de intervalos abertos, é comum utilizar tanto os símbolos dos colchetes invertidos "$]a,b[$" quanto os parênteses "(a,b)". No entanto, no ensino de

Funções, essa última representação pode gerar confusão quando "a" e "b" são valores reais, pois pode ser confundida com a representação de um par ordenado.

A noção de par ordenado é explorada como um conceito primitivo. Assim, para cada elemento "a" e cada elemento "b", é admitido a existência de um terceiro elemento "(a, b)", denominado par ordenado, de modo que se tenha $(a, b) = (c, d)$, se e somente se $a = b$ e $c = d$. Nesse sentido, a ideia de par ordenado colabora para localização de um referencial no plano cartesiano. Fato que é explorado na Figura 2.

Figura 2 – Localização de um ponto no plano cartesiano



Fonte: Pesquisador (2023)

Existe um teorema de correspondência entre pontos e pares ordenados que afirma que, no conjunto dos pontos P do plano cartesiano e no conjunto dos pares ordenados (x_P, y_P) de números reais, existe uma correspondência biunívoca.

A ideia de par ordenado é relevante para o conceito de produto cartesiano. É importante ressaltar que, se A e B são dois conjuntos não vazios, o produto cartesiano de A por B é o conjunto $A \times B$, cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. Desse modo, $A \times B = \{(x, y);\ x \in A\ e\ y \in B\}$. Essa notação lê-se como "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B". Por exemplo, sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

Se, eventualmente, os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de $A \times A$ é chamado relação binária em A. De acordo com Lima (2021, p. 75), "$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

é o exemplo mais importante de produto cartesiano, pois, afinal de contas, trata-se do caso particular que deu origem à ideia geral". Desse jeito, qualquer figura no plano α é uma relação em $\mathbb{R}$. Convém realçar que o gráfico de uma relação entre os conjuntos A e B é o subconjunto $G_{\mathcal{R}}$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares (x, y) tais que $x\mathcal{R}y$. Assim, $G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times B;\ x\mathcal{R}y\}$. Vale realçar que $G_{\mathcal{R}} = G(\mathcal{R})$.

Convém destacar que, intuitivamente, uma função é uma relação especial entre dois conjuntos. Desse modo, duas condições devem ser satisfeitas para que uma relação seja uma função: F1 – todos os elementos x do conjunto A devem pertencer a algum par ordenado; F2 – cada elemento x do conjunto A só pode pertencer a um único par ordenado.

Assim, por definição, sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma função de A em B é uma relação f que a cada elemento de A associa um único elemento de B. Noutras palavras, pode-se dizer que uma função f de A em B é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $f(x) = y \in B$. Isso é representado algebricamente por:

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto y \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

Nas notações "$A \xrightarrow{f} B$" ou "$f: A \to B$", lê-se f é uma função de A em B ou função f de A em B ou que f leva A para B. Frequentemente, as funções são representadas por letras como $f, g, h, F, P,$ entre outras. Para Lima (2014), não se pode confundir f com $f(x)$ – lê-se: "f de x" ou "f em x – pois f é a função, enquanto $f(x)$ é o valor que ela assume num ponto x do domínio. Em outras palavras, $f(x)$ é a imagem de x por f.

"A rigor, $f(x)$ é o valor da função no ponto x ou imagem de x, sendo mais correto dizer "seja a função f" em vez de "seja a função $f(x)$", embora, freqüentemente, se prefira essa última maneira de falar" (ÁVILA, 2014, p. 28). Vale ressaltar que o objeto "x" é o argumento da aplicação f. Além disso, podemos substituir o termo "função" pelos sinônimos "aplicação" ou "transformação".

Dada a função $f: A \to B$, é comum usar a letra "x" para designar um elemento genérico de A e a letra "y" para designar o valor correspondente a $f(x)$ que pertence a B. Nesse caso, "x" é a variável independente, pois seus valores podem variar livremente dentro do conjunto A, enquanto "$f(x)$" ou "y" é a variável dependente, pois seus valores dependem dos valores escolhidos para "x". Para ilustrar essa relação, é comum utilizar a representação numérica por meio de tabelas de valores. Desse modo, a Tabela 3, a seguir, exemplifica esse procedimento:

Tabela 3 – Representação de dependência

Variável Dependente	$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Variável Independente	$\boldsymbol{f(x)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Fonte: Pesquisador (2023)

De acordo com Lima (2014, p. 13), "Usa-se a notação $x \mapsto y$ para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$". Dessa forma, $y = f(x)$. Por exemplo, se $1 \mapsto 3$, isso significa que $f(1) = 3$. Lima (2014) evidencia que a natureza da regra que determina como obter o valor $f(x)$ a partir de um $x \in A$ é totalmente arbitrária, mas deve obedecer a duas condições. "1ª Não deve haver exceções: a fim de que tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in A$; 2ª Não deve haver ambiguidade: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B" (p. 13). A segunda parte dessa condição enfatiza que se $a_1 = a_2$ em A, então, $f(a_1) = f(a_2)$ em B. Diante disso, duas funções $f: A \to B$ e $g: T \to V$ são iguais se e somente se, seus domínios e contradomínios são iguais ($A = T$ e $B = V$) e suas regras de correspondência são equivalentes, ou seja, elas associam os mesmos elementos do domínio aos mesmos elementos do contradomínio.

Em síntese, o conjunto A é o domínio de f, indicado por $D(f)$ ou D_f (lê-se: "domínio de f"), representando o conjunto dos valores de x para os quais a função é possível, já o conjunto B é o contradomínio de f, denotado por $CD(f)$ ou CD_f (lê-se: "contradomínio de f"), expressando o conjunto dos valores possíveis de y. Os elementos de B que são imagens dos elementos de A pela aplicação f constituem o conjunto imagem de f, denotado por $Im(f)$ ou Im_f (lê-se: "imagem de f").

O conjunto imagem de uma função está contido em seu contradomínio. Isso fica evidente ao analisar a definição de imagem da função. Dada uma aplicação f de

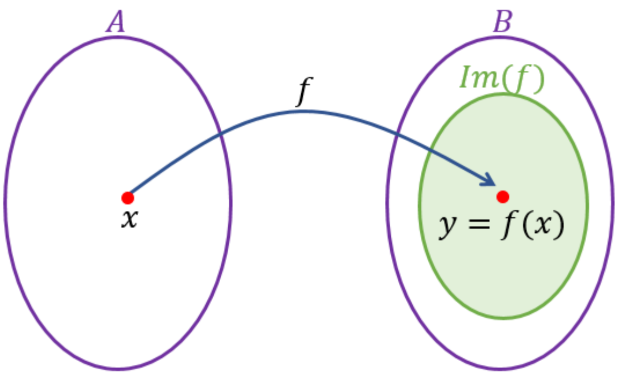
A em B e uma parte $A' \subset A$, chama-se imagem de P pela aplicação f ao conjunto $f(P)$ formado pelos valores $f(x)$ que f assume nos pontos $x \in P$. Assim, $f(P) = \{f(x);\ x \in A'\} = \{y \in B;\ y = f(x), x \in A'\}$.

Cabe destacar que imagem inversa de f pode ser obtida considerando um conjunto $B' \subset B$. Desse jeito, a imagem inversa de B' pela função f é o conjunto $f^{-1}\ (B')$, formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) \in B'$. Em outras palavras, $f^{-1}\ (B') = \{x \in A;\ f(x) \in B'\}$.

Funções inversas têm uma notação especial. O inverso de uma aplicação f é escrito como f^{-1}, mas isso não significa "f elevado à primeira potência negativa". Lê-se simplesmente "inverso de f". Essa notação pode ser um pouco confusa, pois um expoente negativo normalmente indica uma fração invertida.

Na Figura 3 há um diagrama que ilustra f transformando $x \in A$ em $y \in B$ gerando o conjunto imagem de f. Nesse contexto, o conjunto A é chamado de "conjunto de partida" e o conjunto B de "conjunto de chegada". Dessa forma, o domínio deve sempre coincidir com o "conjunto de partida", ou seja, todo elemento de A é ponto de partida da flecha. Se houver um elemento de A do qual não parta flecha, a relação não é função. Além disso, de cada elemento de A deve partir uma única flecha.

Figura 3 – Ilustração de uma função por diagrama



Fonte: Pesquisador (2023)

Se de um elemento de A parte mais de uma flecha, a relação não é função. Assim, o diagrama de flechas pode ser utilizado para identificar se uma relação é ou não uma aplicação, uma vez que nem toda relação entre x e y constitui uma função.

Com base no conceito de função apresentado anteriormente, para definir formalmente uma aplicação f de A em B, é necessário especificar o domínio $D(f) = A$, o contradomínio $CD(f) = B$ e a lei de formação de f, que estabelece a relação de correspondência entre os conjuntos A e B. É importante destacar que, ao considerar a variável no denominador ou dentro de uma raiz de índice par na lei de formação de uma função qualquer, é necessário levar em conta as condições para que essa função resulte em um número real em todo o seu domínio.

Existem restrições específicas a serem consideradas para garantir a existência de soluções reais nessas situações. Dessa forma, é fundamental estar atento a essas condições para evitar possíveis resultados imaginários ou indefinidos, o que poderia comprometer a interpretação e a aplicação desse objeto matemático em questão. Assim, a análise cuidadosa das restrições é crucial para assegurar a validade e a utilidade da função.

Uma maneira comum e simples de apresentar uma função é por meio de uma fórmula algébrica, onde expressamos a relação entre a variável independente x e a variável dependente y. Por exemplo, na expressão $y = 2x + 1$, a notação "$f(x)$" foi substituída por "y", mas ambas representam o mesmo objeto matemático. De acordo a Lima (2014, p. 13), "Muitas vezes se diz a "função f" em vez de "a função $f: A \to B$". Nesse caso, fica subentendido o conjunto A, domínio de f, e o conjunto B, contradomínio de f".

Quando não há uma especificação explícita do domínio e contradomínio de uma função, é comum considerar que ambos são conjuntos de números reais, a menos que haja alguma restrição ou condição que limite o domínio. Nesse contexto, chamamos de "Funções reais de variável real" aquelas cujo domínio é um subconjunto dos números reais e cujo contradomínio também é o conjunto dos números reais. Podemos representar essa relação matemática como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (lê-se "f de R em R"), o que significa que a aplicação recebe um valor real como entrada e produz um valor real como saída.

Quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, o gráfico dessa função é o conjunto dos pontos $\left(x,\ f(x)\right)$ de um plano cartesiano, no qual o eixo das abscissas Ox representa os valores de x, com $x \in A$, e no eixo das ordenadas Oy, os valores de $y = f(x)$, com $y \in B$. Algebricamente, tem-se $G_f = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} = \{(x, f(x); x \in A\}$.

“Segue da definição de igualdade entre funções que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico” (LIMA, 2014, p. 14).

Para que um subconjunto $G_f \subset A \times B$ seja o gráfico de alguma função $f\colon A \to B$ é necessário e suficiente que G_f cumpra as seguintes condições: G1 – Para todo $x \in A$ existe um par ordenado $(x, y) \in G_f$ cuja primeira coordenada é x. G2 – Se $p = (x, y)$ e $p' = (x, y')$ são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x então $y = y'$, ou seja, $p = p'$ (LIMA, 2021). Em um plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $\left(x, f(x)\right)$ quando x percorre o domínio de f.

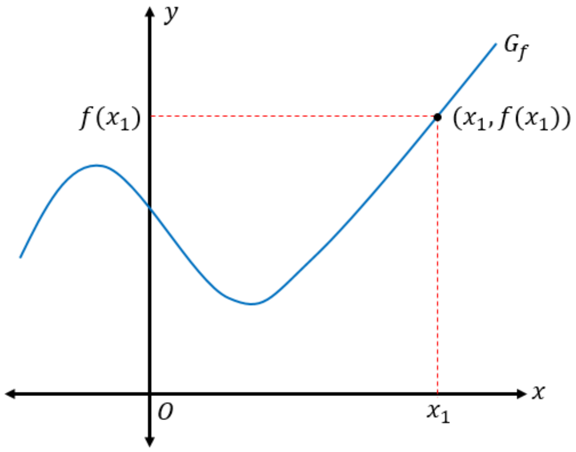
Convém destacar que o lugar geométrico de uma propriedade p é o conjunto de todos os pontos que possuem essa propriedade. Segundo Wagner (2015, p. 16) isso, “[...] nada mais é que um conjunto de pontos e, para definir tal conjunto, devemos enunciar uma propriedade que esses pontos devem ter. Se essa propriedade é p, o conjunto dos pontos que possuem p é o lugar geométrico da propriedade p”. Dessa forma, esse conceito tem a responsabilidade de concretizar ou determinar o objeto criado em um sistema de coordenadas, a partir de uma equação específica. Em outras palavras, cada equação matemática tem uma representação gráfica única, podendo ser uma reta, uma curva, uma cônica ou qualquer outra figura, dependendo das características da equação.

Os gráficos desempenham uma importância fundamental no estudo de funções, pois através deles é possível obter diversas informações sobre o comportamento da aplicação, como o domínio, contradomínio, crescimento, decrescimento, estabilidade, concavidade, taxas de variação, entre outras propriedades. Conforme Stewart (2014, p. 11), “O gráfico de uma função f nos fornece uma imagem útil do comportamento ou “histórico” da função”. Essas representações visuais fornecem uma compreensão mais clara e intuitiva das características desse objeto matemático, auxiliando na análise e interpretação dos resultados.

Para determinar o gráfico de uma função, orienta-se encontrar uma série de pontos, criando uma tabela que mostra as coordenadas independentes e dependentes. No entanto, é importante notar que, na construção da maioria dos gráficos, é impossível determinar e marcar todos os pontos. Desse jeito, só é possível obter um esboço do gráfico plotando apenas alguns pontos significativos para, em seguida, traçar uma reta ou curva suave que passe por eles.

Na Figura 4, é possível visualizar o gráfico de uma função f. Nesse esboço, o valor destacado como x_1 no eixo da abscissa representa um valor arbitrário da variável x. O ponto $(x_1, f(x_1))$, localizado no gráfico de f, possui a abscissa x_1 e a ordenada $f(x_1)$. O valor de $f(x_1)$ é a imagem de x_1. Em outras palavras, $f(x_1)$ representa o valor da aplicação f para o valor específico de x representado pelo número x_1 no eixo das abscissas.

Figura 4 – Gráfico de uma função f



Fonte: Pesquisador (2023)

Vale ressaltar que os parâmetros de uma função f são valores que modificam a forma e posição de seu gráfico no plano cartesiano. Eles possibilitam translações horizontais e verticais, dilatações e contrações, além de rotações desse objeto geométrico. Como cada parâmetro pode assumir diversos valores, isso gera as famílias de funções, que sempre compartilham certas propriedades em comum.

Os gráficos de muitas funções são caracterizados por mudanças de comportamento, alternando entre crescimento e decrescimento, resultando em pontos altos e baixos. Assim, os valores extremos de uma função, também conhecidos como extremos locais, podem ser classificados como máximos locais ou mínimos locais.

Um máximo local de uma função f ocorre quando existe um valor $f(c)$ que é maior ou igual a todos os valores da imagem de f em algum intervalo aberto que contém a coordenada c. Em outras palavras, se $f(c)$ é maior ou igual a todos os valores da imagem de f nesse intervalo, então $f(c)$ é considerado o valor máximo local (ou máximo relativo) de f.

Por outro lado, um mínimo local de uma função f ocorre quando existe um valor $f(c)$ que é menor ou igual a todos os valores da imagem de f em algum intervalo aberto que contém a coordenada c. Em resumo, se $f(c)$ é menor ou igual a todos os valores da imagem de f nesse intervalo, então $f(c)$ é considerado o valor mínimo local (ou mínimo relativo) de f.

Vale ressaltar que, além dos extremos locais, também podem existir extremos relativos, que são pontos no gráfico onde a função apresenta valores máximos ou mínimos em relação a um conjunto restrito de valores. Esses extremos são considerados relativos, pois podem não ser os valores máximos ou mínimos absolutos da aplicação em todo o seu domínio.

Para verificar se um determinado gráfico representa ou não uma função, podemos recorrer ao Teste da Reta Vertical, enunciado na sequência: uma curva no plano cartesiano "[...] é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez" (STEWART, 2014, p. 14). Dessa forma, ao esboçar uma reta vertical e ela tocar a linha gráfica duas ou mais vezes, então esse objeto esboçado não representa uma aplicação.

A ideia de continuidade de uma função é uma das mais importantes propriedades da maioria desse objeto matemático que modelam o comportamento de ocorrências no mundo real, por serem contínuas. Intuitivamente, uma função contínua é aquela cujo gráfico pode ser desenhado sem levantar o lápis do papel.

Geometricamente falando, uma função é contínua em um ponto se o gráfico não apresenta falhas, como "buracos", "saltos" ou "separações" naquele ponto. Caso isso aconteça, elas são denominadas descontínuas. "Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica" (STEWART, 2014, p. 109). É importante ressaltar que estamos apresentando essa ideia de continuidade sem o rigor matemático do conceito de limite.

Nesse momento, é relevante compreender o conceito de função limitada. Uma aplicação f é considerada limitada inferiormente quando há um número "a" que seja menor ou igual a todos os valores obtidos pela imagem de f. Esse valor de "a" é chamado de limite inferior de f.

Por outro lado, uma aplicação f é limitada superiormente se existe um número "b" que seja maior ou igual a todos os valores da imagem de f. Esse valor "b" é denominado limite superior de f. Em vista disso, uma função f é considerada limitada quando possui limites inferiores e superiores definidos.

Em uma função $f: A \rightarrow B$, dada por $y = f(x)$, é possível dizer que x' é o zero ou raiz de f se $f(x') = 0$. Assim, para encontrar os zeros de f é preciso resolver a equação $f(x) = 0$, ou seja, encontrar o valor de x que anula a expressão analítica. Geometricamente, os zeros de uma função de variável real representam os valores de x do domínio cuja imagem é nula, sendo assim, correspondem aos pontos onde o gráfico intercepta o eixo da abscissa. Vale ressaltar que uma função pode ter um ou mais zeros, bem como nenhum zero.

Estudar o sinal de uma função f consiste em determinar os valores da variável $x \in D(f)$ para os quais as imagens correspondentes aos valores de $f(x)$ sejam positivas, negativas ou neutras. O conhecimento sobre essa abordagem é bastante útil para obter informações úteis na resolução de inequações ou no estudo de desigualdades.

As funções são classificadas em relação ao seu desenvolvimento expansivo. Desse modo, por um lado, uma aplicação $f: A \rightarrow B$ é crescente ou crescente estritamente se, para todo x_1 e $x_2 \in A$, tem-se que $x_1 < x_2$, o que implica em $f(x_1) < f(x_2)$. De forma prática, f é crescente se os valores de $f(x)$ aumentam quando x aumenta. Assim, o gráfico de uma função crescente, sobe quando nos movemos da esquerda para a direita. No entanto, se a implicação for em $f(x_1) \leq f(x_2)$, então f é denominada como função crescente não estritamente ou não-decrescente.

Por outro lado, se a implicação for $f(x_1) > f(x_2)$, a aplicação f é considerada decrescente ou decrescente estritamente. De forma prática, f é decrescente se os valores de $f(x)$ diminuem quando x aumenta. Assim, o gráfico de uma função decrescente, desce quando nos movemos da esquerda para a direita. Além disso, se a implicação for $f(x_1) \geq f(x_2)$, a função f é decrescente não estritamente ou não-crescente.

Em todos esses quatro casos, a aplicação f é chamada de função monótona ou monotônica. Essas análises também podem ser realizadas para examinar as partes gráficas desse objeto matemático. Ou seja, ao analisar alguns intervalos do domínio, é possível classificar os trechos gráficos de f sob essa perspectiva.

Seja uma função unívoca $y = f(x)$, definida em todos os pontos de um intervalo $[a, b]$; seja x_1 um valor da variável independente e x outro valor não especificado. A diferença $x - x_1$ (que pode ser positiva ou negativa) chama-se acréscimo da variável independente e é representado algebricamente por $\Delta x = x - x_1$, o que equivale a, $x = x_1 + \Delta x$.

Já a diferença de valores correspondente da função nos pontos x e x_1, ou seja, $f(x) - f(x_1)$, é denominada acréscimo ou incremento da aplicação no ponto x_1 relativo ao acréscimo $x - x_1$ da variável independente. Essa diferença é representada algebricamente por $\Delta y = f(x) - f(x_1)$ que equivale a $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x)$. Nesse caso, quando não é especificado o ponto x_1, tem-se para um ponto qualquer x, ou seja, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Existem funções que não são crescentes nem decrescentes. Dessa forma, para qualquer aplicação $f: A \rightarrow B$, onde x e $(x + h) \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$ (ou seja, o acréscimo da variável independente), é possível encontrar a taxa de variação de f pelo valor da razão $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Geometricamente, nesse intervalo, se esse valor for nulo, o gráfico será uma reta ou um segmento de reta, ambas paralelas ao eixo x; se for positivo, o gráfico tende a ser crescente; caso seja negativo, o gráfico tende a ser decrescente. Convém afirmar que o número $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se taxa de variação da função f no intervalo de extremos x e $x + h$.

Algumas funções também são classificadas como injetoras, sobrejetoras e bijetoras se satisfizerem a certas definições, a saber: Uma aplicação $f: A \rightarrow B$ é injetora (ou injetiva) quando, para quaisquer elementos x_1 e x_2 de $A, f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Em outras palavras, quando $x_1 \neq x_2$, em A, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Nesse caso, dizemos f é injetora se domínios diferentes possuem imagens diferentes. Pelo Teste da Reta Horizontal é possível saber, geometricamente, se uma função é injetora ou não, pois o mesmo realça que “Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto” (STEWART, 2014, p. 56).

Por outro lado, uma aplicação $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora quando, para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, f é sobrejetora quando $Im(f) = CD(f)$. Dessa forma, f é sobrejetora se todos os elementos de A têm imagem em todos os elementos de B, mediante f. Este fato de A sobrepor B, justifica o nome “sobrejetora ou sobrejetiva”.

Quando uma função é injetora e sobrejetora simultaneamente, ela é denominada bijetora (ou bijetiva). Mais precisamente, a aplicação $f: A \rightarrow B$ é dita bijetora quando, para todo $y' \in B$, existe somente um $x \in A$ tal que $b = f(x)$. Vale ressaltar que existem funções que não são classificadas de acordo com esses conceitos, pois nem são injetoras e nem são sobrejetoras. Essas funções possuem ainda a propriedade de que cada elemento do contradomínio está associado a um único elemento do domínio, ou seja, é a imagem de um único elemento do domínio. Esses objetos matemáticos têm um papel muito importante nas Ciências Exatas e são denominadas funções inversíveis.

Diz-se que uma aplicação $f: A \rightarrow B$ é inversível se a cada elemento y do contradomínio B estiver associado um único elemento x do domínio A, tal que $y = f(x)$. E se outra aplicação $g: B \rightarrow A$, que a cada y em A associe o único elemento x em B que é o associado a y por f, ou seja: $x = g(y)$, equivale a $y = f(x)$. A função g é chamada de função inversa de f. Por um lado, g desfaz a ação de f sobre x. Por outro lado, f desfaz a ação de g, já que f é a inversa de g. Assim, pode-se concluir que se f é uma função inversível, com domínio A e contradomínio B, e se g é a sua inversa, então $g\big(f(x)\big) = x,$ para todo $x \in A$, e $f\big(g(y)\big) = y,$ para todo $y \in B$.

Convém destacar que toda aplicação bijetora é inversível. Dessa forma, seja f uma função bijetora com domínio A e imagem B. A inversa de f, denotada por $f^{-1}: B \rightarrow A$, é a função $f^{-1}\,(y) = x$, se e somente, se $f(x) = y$. Desse jeito, a função inversa é o conjunto de pares ordenados em que a ordem dos membros foi invertida. Além disso, a expressão analítica da função inversa obtém-se resolvendo a equação $y = f(x)$ com relação a x, o que dá à forma explícita da função $x = g(y)$. Às vezes, para garantir a univocidade da função inversa, torna-se necessário limitar o seu campo de definição, ou seja, o seu domínio.

Uma aplicação f é chamada de função par se e somente se, $f(-x) = f(x)$, para todo x em seu domínio (STEWART, 2014). Do ponto de vista geométrico, uma função par é aquela cujo gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Isso significa que para construir o gráfico da aplicação para $x \geq 0$, basta refletir a parte do gráfico já existente em relação ao eixo y. Dessa forma, a simetria em relação ao eixo y é representada por: $(f(x), x) \in G_f$, se e somente se, $(-f(x), -x) \in G_f$ para todo $x \geq 0$.

Uma aplicação f é dita função ímpar se e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para todo x em seu domínio (STEWART, 2014). Por outro lado, as funções ímpares têm gráficos simétricos em relação à origem do sistema cartesiano ortogonal. Isso significa que para construir o gráfico da aplicação para $x \geq 0$, é necessário fazer um giro de 180° na parte do gráfico já existente em relação à origem. Dessa forma, a simetria em relação à origem é representada por: $(f(x), x) \in G_f$, se e somente se, $(-f(x), -x) \in G_f$ para todo $x \in$ domínio de f.

Uma função g é uma extensão de uma função f, ou seja, f é uma restrição de g, se o domínio de f está contido no domínio de g e as duas funções coincidem no domínio de f.Isso é representado da seguinte forma: Seja $f: A \to B$ e $g: C \to D$ aplicações, onde $A \subseteq C$. Dizemos que g é uma extensão de f (ou f é uma restrição de g) se: i) $C \supseteq A$ (o domínio de f está contido no domínio de g); ii) Para todo $x \in A$, temos $g(x) = f(x)$ (as duas funções coincidem no domínio de f).

As operações sobre funções, como adição, multiplicação, divisão, etc., são definidas de maneira simples, em termos das mesmas operações sobre números. No entanto, é importante observar que as aplicações envolvidas nessas operações devem ter o mesmo domínio. Se isso não for o caso, é necessário restringir os domínios ao conjunto formado pela interseção dos domínios das funções envolvidas. Para realizar as operações sobre as funções f e g, é preciso definir uma nova aplicação h com domínio sendo a interseção dos domínios de f e g:

Assim, seja $f: A \to B$ e $g: C \to D$ funções, e seja E o conjunto formado pela interseção dos domínios de f e g. Então, para realizar as operações (adição, multiplicação, etc.) sobre f e g, é necessário definir a nova função $h: E \to F$, onde F é o conjunto dos valores que a operação produz sobre os elementos comuns a A e C.

Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são aplicações, onde o domínio da g é igual ao contradomínio de f, então a composição $g \circ f$ da g pela f, é representada por $g \circ f: A \to C$, onde $(g \circ f)(x) = g(f(x)$. Desse modo, dadas $f: A \to B$ e $g: B \to C,$ a composição de funções é uma aplicação que toma os elementos de A e leva diretamente para os elementos de C.

A compreensão desses conceitos é de extrema importância, uma vez que diferentes tipos de funções (afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, entre outras) são utilizadas para representar modelos matemáticos. Esses procedimentos têm como finalidade compreender fenômenos e fazer previsões sobre seu comportamento futuro. Diante desse amplo contexto, nossa exploração se concentrará especificamente nas Funções afins.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais, é chamada de Função afim. Nessa aplicação, "a" é denominada de taxa de variação ou taxa de crescimento, e "b" é chamado de coeficiente linear (LIMA *et al.*, 2012). Através desses elementos, podemos explorar alguns conceitos e propriedades. O domínio de f são todos os números reais. A imagem também são os números reais, com exceção para o caso em que $f(x) = b$ (em que $a = 0$) em que o conjunto imagem é apenas o valor de b. Vale ressaltar que uma função polinomial $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é da forma $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes reais denominadas coeficientes e $n \in \mathbb{N}$ é o grau do polinômio $P(x)$, se $a_0 \neq 0$.

A taxa de variação de uma Função afim, num intervalo $[\,x\,,\ x + h\,] \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0,$ é sempre um valor único, pois é dada pela razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, com $\Delta y = f(x + h) - f(x)$ e $\Delta x = (x + h) - x = h$. Logo, tem-se $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a$. Dessa forma, podemos reconhecer se uma Função é afim analisando uma tabela de valores, observando se as diferenças nos valores de $f(x)$ são constantes para as diferenças iguais nos valores de x.

Em relação aos coeficientes, é possível observar que "Uma função afim é crescente quando sua taxa de crescimento (o coeficiente a) é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando $a = 0$" (LIMA *et al.*, 2012, p. 88). Já o coeficiente linear, está direcionada na representação da interseção entre o gráfico e o eixo das ordenadas, ou seja, é o ponto em que a reta da aplicação corta o eixo y. Esse ponto é sempre formado pelo par ordenado $(0, b)$.

Desse modo, seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma Função afim dada por $f(x) = ax + b$, tem-se: i) se $a > 0$, então f é crescente; ii) se $a < 0$, então f é decrescente. Demonstração: Seja $x_1, x_2,\ a$ e $b \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Para o caso i), ou seja, $a > 0$ tem-se que, $x_1 < x_2$ implica que $a \cdot x_1 < a \cdot x_2$ segue-se $ax_1 + b < ax_2 + b$ constata-se $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, concluímos que f é crescente. Para o caso ii), ou seja, $a < 0$ tem-se que, $x_1 < x_2$ implica que $a \cdot x_1 > a \cdot x_2$ segue-se $ax_1 + b > ax_2 + b$ constata-se $f(x_1) > f(x_2)$. Assim, concluímos que f é decrescente. Como queríamos demonstrar.

Um método para determinar os valores dos coeficientes é obter b como o valor que a função assume quando $x = 0$. Esse número, $b = f(0)$, às vezes é chamado de valor inicial da aplicação f. Quanto ao coeficiente a, podemos determiná-lo a partir dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2. Assim, temos $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, obtendo $f(x_2) - f(x_1\ ) = a(x_2 - x_1)$, portanto, $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (LIMA, 2021).

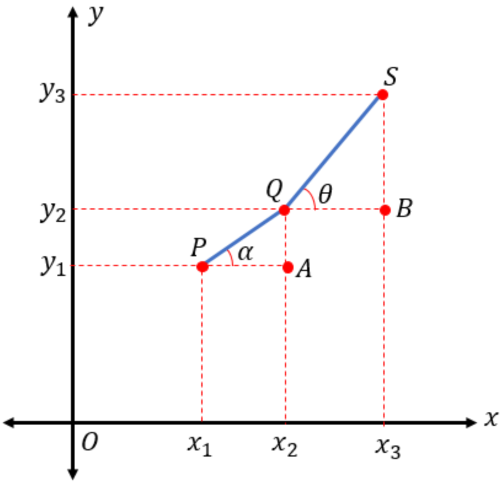
Dessa forma, para verificar se uma situação corresponde a um modelo matemático de Função afim, basta conhecer $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$ e $y_3 = f(x_2)$ para valores diferentes de x_1, x_2 e x_3, e aplicar a segunda parte do método citado acima para determinar os coeficientes a e b. Se as taxas de variação diferem, a aplicação não é uma Função afim.

De acordo com Lima (2021, p. 82), “Toda reta não-vertical r é o gráfico de uma função afim”. Dessa forma, é preciso apenas de dois pontos distintos para produzir o esboço gráfico dessa função. Agora será demonstrado que o lugar geométrico do gráfico de uma Função afim é uma linha reta. Demonstração: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com a e b constantes reais. No caso em que $a = 0$, temos $G_f = \{(x, f\ (x)): x \in \mathbb{R}\} = \{(x, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\}$. Esse conjunto é facilmente identificado como uma reta paralela ao eixo x que passa no ponto $(0, b)$.

Para o caso em que $a \neq 0$ temos $G_f = \{(x, f\ (x)): x \in \mathbb{R}\} = \{(x,\ ax + b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\}$. O conjunto G_f é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ com uma propriedade bem determinada. Sejam $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$ e $S = (x_3, y_3)$ pontos distintos de

G_f, eles existem, pois f é bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Assim, pela propriedade do conjunto G_f, pode-se escrever $y = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b$ e $y_3 = ax_3 + b$. No sistema cartesiano ortogonal, esses pontos são identificados conforme a ilustração abaixo.

Figura 5 – Construção gráfica



Fonte: Pesquisador (2023)

Na Figura 5, os triângulos PAQ e QBS são triângulos retângulos. As tangentes dos ângulos α e θ são dadas pelas razões $\frac{AQ}{AP}$ e $\frac{BS}{BQ}$, respectivamente. Dessa forma, temos: $\frac{AQ}{AP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Analogamente, temos que $\frac{BS}{BQ} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = a$. Sendo assim, $\frac{AQ}{AP} = \frac{BS}{BQ} = a$.

E como os ângulos em A e B são retos, segue que os triângulos PAQ e QBS são semelhantes e assim os ângulos α e θ e são iguais. Conclui-se daí que os pontos P, Q e S estão alinhados. Como P, Q e S são pontos quaisquer do gráfico, fica provado que o gráfico da Função afim é uma reta. Como queríamos demonstrar.

Assim, a Função afim é ilimitada em direção ao infinito nos dois sentidos, já que a reta continua indefinidamente em ambas as direções. No entanto, mesmo que essa função não tenha extremos locais (como máximos ou mínimos), ela pode ser limitada se tiver um domínio restrito ou se existirem restrições nas variáveis x ou y.

As fórmulas do tipo $f(x) = ax + b$, nas quais "a" e "b" podem assumir diversos valores, representam uma família de Funções afins. A propriedade comum dessa família é a representação gráfica por meio de linhas retas. Essa alternância nos valores de "a" e "b" permite que eles sejam vistos como parâmetros, capazes de promover rotações com a variação de "a" e translações com a variação de "b" na posição da reta no plano cartesiano.

Existem duas classificações da Função afim: a) constante; b) polinomial do 1° grau. Como já frisado, uma Função afim é considerada constante quando a taxa de variação é igual a zero, sendo assim, o gráfico é uma reta paralela ao eixo da abscissa, cortando o y no ponto $(0, b)$. Assim, o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \{ b \}$. Quando a constante $b \neq 0$, a aplicação tem grau zero, porém quando o $b = 0$, a aplicação recebe o nome de Função nula ou Função zero e seu grau é indefinido. Todas as Funções constantes são funções pares. Por outro lado, quando o coeficiente "a" da Função afim difere de zero, a aplicação recebe o nome de Função polinomial do 1° grau, pois a relação entre a variável dependente e a variável independente é expressa por um polinômio do 1° grau.

Uma Função polinomial do 1° grau se enquadra como identidade quando $f(x) = x$, ou seja, quando a taxa de crescimento é igual a 1 e o coeficiente linear igual a zero ($a = 1$; $b = 0$). Nessas situações a reta passa pela origem $(0, 0)$ e sua inclinação é de $45°$. Assim, em um quadrante tem-se uma semirreta que separa o ângulo reto em dois ângulos de mesmo tamanho, por esse motivo essa semirreta é uma bissetriz. Esse gráfico também é identificado como reta dos quadrantes ímpares (1° e 3°), ela é uma função ímpar. A Função identidade pode ser representada também da seguinte forma $id: A \rightarrow A$ definida por $id(x) = x$, para todo $x \in A$.

Com exceção das Funções constantes, toda Função afim é inversível. Isto acontece porque as Funções afins, com $a \neq 0$, são bijetoras. Vamos provar isso, mostrando inicialmente que a Função afim $f\,(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, é injetora. Demonstração: Para todos x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, temos $f(x_1) = f(x_2)$, se e somente se, $ax_1 + b = ax_2 + b$, ou seja, $ax_1 = ax_2$, o que equivale a, ax_1 – $ax_2 b = 0$, se e somente se, $a(x_1 - x_2) = 0$. Como $a.(x_1 - x_2) = 0$, com $a \neq 0$, então $(x_1 - x_2) = 0$. Logo, $x_1 = x_2$.

Agora vamos mostrar que a Função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é sobrejetora. Demonstração: De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, exibiremos $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$. Se $y \in \mathbb{R}$, então $x = \frac{b-y}{a}$ é um número real tal que $f(x) = a\left(\frac{b-y}{a}\right) + b =$

y. Como a Função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é injetora e sobrejetora em simultâneo, então ela é bijetora. Como queríamos demonstrar.

Isso mostra que essas funções são inversíveis. O processo de composição da Função identidade com ela mesma repetidamente não altera a função, pois em cada etapa obtemos ela de volta. Ou seja, se denotarmos a Função identidade como $Id(x) = x$, temos: $Id\big(Id(x)\big) = Id(x) = x$. Ela é a mais simples das funções bijetoras.

De acordo com Lima *et al.* (2012), às Funções lineares são consideradas casos particulares das Funções afins. Nesse contexto, a Função linear é definida pela lei de formação $f(x) = ax$, onde o coeficiente linear é igual a zero. Essa característica faz com que a reta representativa dessa aplicação sempre passe pela origem $(0,0)$. É importante observar que tanto a Função identidade quanto às Funções polinomiais de 1° grau, nas quais $b = 0$, também são consideradas Funções lineares.

No entanto, é importante ressaltar que o uso dos termos “afim” e “linear” pode variar entre autores e contextos culturais linguísticos, sendo essencial compreender a definição e o conceito específicos adotados em cada caso. Convém enfatizar que o termo “afim” tem sua origem etimológica relacionada à ideia de afinidade, vizinhança, semelhança ou proximidade (XIMENES, 2000). Essa palavra vem do latim “*affine*” (NASCENTES, 1955). Já a palavra "linear" é relativa a linha ou que se representa por linhas (XIMENES, 2000) do latim "*lineare*" (NASCENTES, 1955). Para Ávila (2014),

> Embora haja razão para distinguir “função afim” de “função linear”, os matemáticos profissionais costumam usar a designação “função linear” em ambos os casos; é, por assim dizer, um abuso de linguagem, justificado pelo fato de que, tanto num caso como no outro, o gráfico dessas funções é sempre uma reta; e é freqüente e cômodo falar em “aproximação linear” àquela que é dada por uma função afim que aproxima uma curva num certo ponto. Seguiremos esse costume já consagrado entre os matemáticos profissionais. (p. 31)

Os problemas que envolvem proporcionalidade, em geral, podem ser resolvidos por meio de uma Função linear, por isso, é afirmado que esse tipo de função é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade (LIMA *et al.*, 2012). Essa função, cuja lei de formação é dada por $y = ax$, com $a \neq 0$, quando $a > 0$, é possível dizer que as variáveis x e y representam grandezas diretamente proporcionais.

Suponhamos que uma grandeza y seja função da grandeza x, ou seja, $y = f(x)$. Dizemos que y é diretamente proporcional a x se as seguintes condições forem satisfeitas: y é uma aplicação crescente de x; se ao multiplicar x por um número natural “n”, o valor correspondente de y também ficará multiplicado por “n”, ou seja, $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo valor de x do domínio da função e todo $n \in \mathbb{N}^*$ (números naturais diferentes de zero). Nessas condições, as grandezas y e x podem ser relacionadas por uma Função linear f, tal que $y = f(x) = ax$, com “a” sendo um número real positivo. Nesse caso, “a” é chamado de coeficiente de proporcionalidade (DANTE; VIANA, 2020). O gráfico dessa aplicação no plano cartesiano é então uma semirreta com origem no ponto $(0, 0)$ e passa sempre pelo ponto $(1, a)$.

Será demonstrado que dada uma Função linear $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$, apresenta $f(kx) = k \cdot f(x)$, para $k \in \mathbb{Z}$. Demonstração: Seja k um número real e $f(x) = ax$, então $f(kx) = a \cdot k \cdot x = k \cdot a \cdot x = k \cdot (ax) = k \cdot f(x)$. Como queríamos demonstrar.

Agora será demonstrado o seguinte Teorema da Caracterização de Função afim: seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, e não de x, então f é uma Função afim. Demonstração: Pela hipótese feita sobre f, a função $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(h) = f(x + h) - f(x)$, está bem definida. Evidentemente, φ ou é crescente, ou é decrescente, pois que $\varphi(0) = f(x + 0) - f(x) = 0$. Supondo que φ seja crescente, então para todo $h \in \mathbb{R}$ vale $\varphi(2h) = f(x + 2h) - f(x) = [f(x + h) + h) - f(x + h)] + [f(x + h) - f(x)$ que é o mesmo que $\varphi(2h) = \varphi(h) + \varphi(h)$, ou seja, $\varphi(2h) = 2 \cdot \varphi(h)$.

Analogamente, nota-se que $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se ainda $\varphi(-h) = f(x - h) - f(x) = -[f(x) - f(x - h) = -\varphi(h)$, pois $x = (x - h) + h$. Segue-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h \in \mathbb{R}$ vale $\varphi\big((-n)h\big) = \varphi(-nh) = -\varphi(nh) = -[n \cdot \varphi(h) = (-n)\varphi(h)$. Dessa forma, $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, podemos concluir que $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para quaisquer n e $h \in \mathbb{R}^*$, portanto, φ é linear.

Note que $\varphi(1) = \varphi(kh) = k \cdot \varphi(h)$ implica que $1 = kh$, ou seja, $k = \frac{1}{h}$. Daí tem que $\varphi(1) = \frac{1}{h} \cdot \varphi(h)$. Assim, pondo $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}^*$. Como $\varphi(0) = 0$, então, para quaisquer x e $h \in \mathbb{R}$, vale $f(x + h) - f(x) = ah$. Trocando h por x, vem: $f(x + h) - f(h) = ax$. Fazendo $h = 0$ tem-se $f(x + 0) - f(0) = ax$ e escrevendo $b = f(0)$, obtemos $f(x) - b = ax$, donde $f(x) = ax + b$.

Assim, pondo $a = \varphi(1) = f(x+1) - f(x)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Então, para quaisquer x e $h \in \mathbb{R}$, vale $f(x+h) - f(x) = ah$. Trocando h por x, vem: $f(x+h) - f(x) = ah$. Fazendo $h = 0$ e escrevendo $b = f(0)$, obtemos $f(x) - b = ax$, donde $f(x) = ax + b$. Como queríamos demonstrar.

O zero da Função afim é o ponto em que a reta corta o eixo da abscissa, isto é, o ponto em que a coordenada $y = 0$. Sendo assim, basta substituir o y por 0. No caso em que $a \neq 0$, esse ponto é dado $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.Demonstração: seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma Função polinomial do 1º grau, dada por $y = ax + b$, então fazendo $y = 0$ tem-se: $0 = ax + b \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Logo o zero dessa aplicação é o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Como queríamos demonstrar. É importante destacar que as Funções polinomiais do 1° grau $(a \neq 0)$, possuem apenas uma raiz. Já na Função constante existem duas possibilidades: se $b = 0$, há infinitas raízes; agora se $b \neq 0$, não existe raiz.

Ao considerar uma Função polinomial do 1º grau, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é possível estudar o sinal dessa função resolvendo as inequações $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$. Nesse sentido, se $a > 0$, dois casos são observados: $f(x) > 0$ ocorre quando $ax + b > 0$, o que equivale a $ax > -b$, resultando em $x > -b/a$. Já para $f(x) < 0$, tem-se $ax + b < 0$, o que é equivalente a $ax < -b$, resultando em $x < -b/a$. Analogamente, quando $a < 0$, temos $f(x) > 0$ quando $ax + b > 0$, o que equivale a $ax > -b$, resultando em $x < -b/a$. Para $f(x) < 0$, ocorre quando $ax + b < 0$, o que é equivalente a $ax < -b$, resultando em $x > -b/a$.

Além disso, independentemente do valor de "a" (positivo ou negativo), temos que $f(x) = 0$ se e somente se $x = -b/a$, conforme mencionado anteriormente. Essa é a raiz da Função polinomial do 1º grau, ou seja, o ponto em que a reta cruza o eixo das abscissas. Vale ressaltar que o número que anula o polinômio é denominado de raiz do polinômio.

Existem algumas aplicações matemáticas que são de considerável interesse nas mais diversas áreas da Ciência. Algumas delas são expressas por meio de combinações de diferentes fórmulas algébricas, definidas em intervalos distintos de $\mathbb{R}$. Dessa forma, na próxima seção, abordaremos as Funções definidas por mais de uma sentença, com ênfase nas Funções afins por partes.

2.2.4 Funções Definidas por mais de uma Sentença

Uma função é definida por mais de uma sentença quando cada uma delas está associada a um subdomínio $D_1, D_2, D_3, \dots , D_n$ e a união destes n subconjuntos forma o domínio D da aplicação original, ou seja, cada domínio D_i, com $i \in \{1, 2, 3, \dots n\}$, é um subconjunto de D. Em funções desse tipo, a lei da formação depende do valor de x. Nessa linha de pensamento, a função $f: D \to \mathbb{R}$ pode ser representada, algebricamente, da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), se\ x \in D_1 \\ g_2(x), se\ x \in D_2 \\ g_3(x), se\ x \in D_3 \\ \vdots \\ g_n(x), se\ x \in D_n \end{cases}$$

Segundo Stewart (2014), essas fórmulas distintas em diferentes partes do domínio da função são o que caracteriza as Funções definidas por partes. Essa abordagem permite capturar, de forma mais precisa, a variação do fenômeno em estudo e adequar a aplicação às diferentes condições ou comportamentos presentes em cada intervalo específico.

Quando todas leis $(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)$ coincidem com as expressões das Funções afins $(ax + b)$, essa aplicação também é chamada Função afim por partes. Kime, Clark e Michael (2014, p. 14, grifo dos autores) afirmam que “Algumas funções não são lineares ao longo de todo o domínio, mas formadas por segmentos lineares. Elas são chamadas de *funções lineares por trechos*”.

Nessa perspectiva, as Funções lineares por trechos são as Funções afins por partes que consistem em diferentes segmentos de reta em um determinado intervalo de domínio. Cada segmento de reta possui uma inclinação constante e é definido em um subintervalo específico do domínio. Os segmentos de reta são conectados em pontos de transição, chamados pontos de quebra, onde a função muda de uma reta para outra. Esses pontos de quebra são geralmente determinados por condições específicas, como valores limites, restrições ou critérios pré-estabelecidos.

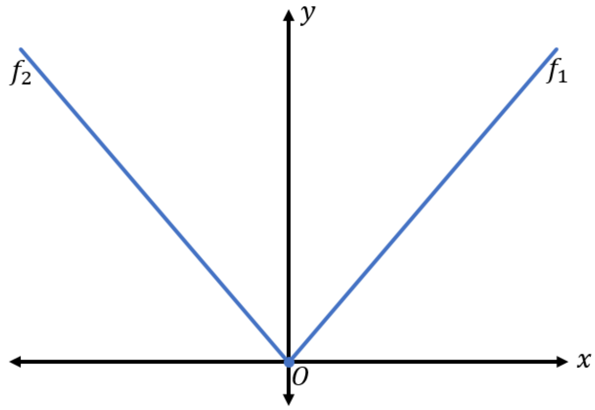
Kime, Clark e Michael (2014), ressaltam que é possível construir a Função de valor absoluto como uma Função linear por trechos. Dessa forma, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma Função de valor absoluto ou modular, então $f(x) = |x|$, ou seja:

$$f(x) = \begin{cases} x \ para \ 0 \geq 0 \\ -x \ para \ x < 0 \end{cases}$$

Nota-se que a Função de valor absoluto é formada pela combinação das Funções afins $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = -x$, para, respectivamente, $x \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathbb{R}_-^*$. Dessa forma, seu domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

A Figura 6 ilustra a representação gráfica da Função Modular de acordo com a lei de formação mencionada. Ela revela como essa aplicação pode ser representada como uma Função afim por partes, tornando mais claro e compreensível seu comportamento. Assim, é possível observar que ela possui extremo mínimo em $x = 0$, sendo decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, +\infty]$.

Figura 6 – Representação gráfica de uma Função Modular



Fonte: Pesquisador (2023)

Por outro lado, uma aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma Função poligonal quando existem $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ tais que para $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma Função afim f_i. Dessa forma, para evitar descontinuidades, exige-se que $f_{i(t_i)} = f_{i-1}(t_{i-1})$. “Equivalentemente, podemos dizer que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal. O protótipo de função poligonal é uma função poligonal é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$” (LIMA, 2021, p. 92).

Ainda de acordo a Lima (2021), expressões como $h(x) = |x - c|$, $p(x) = |\alpha x + \beta|$ e $g(x) = |x - \alpha| + |x - \beta|$ com $\alpha, \beta\ e\ c \in \mathbb{R}$, são exemplos que "[...] levam a conjeturar que toda função poligonal pode ser definida combinado valores absolutos de funções afins. Esta conjectura é verdadeira" (p. 92).

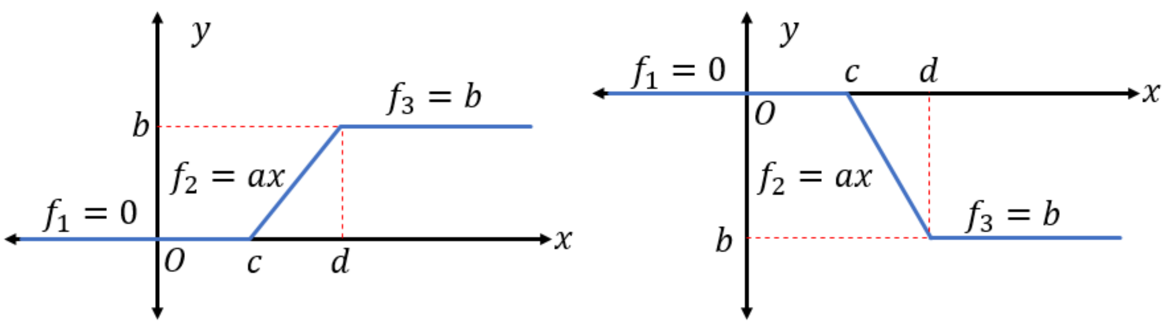
Lima (2021, p. 91) realça que "As funções poligonais surgem naturalmente, tanto na vida cotidiana (imposto de renda como função líquida, preço de mercadoria que oferece descontos crescentes quando aumenta a quantidade comprada) como em diversas áreas da Matemática". Dessa forma, a presença dessas funções em diferentes contextos torna-as essenciais no estudo da Matemática, permitindo uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos sociais.

Conforme Lima *et al.* (2012), uma Função rampa é uma Função poligonal, cujo gráfico é composto por duas semirretas horizontais (patamares) em $(-\infty, c]$ e $[d, +\infty)$, onde assume os valores 0 e b, respectivamente. Esses patamares são conectados por um segmento de reta oblíquo (rampa). Desse modo, uma aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < c \\ ax, & se\ c \leq\ x < d\,, \\ b, & se\ x \geq d \end{cases} \qquad com\ a\ \in\ \mathbb{R}.$$

É denominada de Função rampa. Sendo assim, o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = [c, d]$, com $c, d\ \in \mathbb{R}$. A Figura 7, a seguir, apresenta algumas possíveis representações dessa aplicação, permitindo visualizar claramente seus extremos (valores mínimos e máximos).

Figura 7 – Representações gráficas de duas Funções Rampa



Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em Lima *et al.* (2012)

A interpretação do gráfico dessa aplicação é bastante interessante: representa um fenômeno em que uma ação começa a partir de um estado inicial nulo e, em seguida, cresce ou decresce linearmente ao longo do tempo até atingir um ponto de estabilização. Desse modo, a Função rampa é uma função de uma variável real, cujo gráfico tem a forma de uma rampa ascendente ou descendente. O termo “rampa” pode ser utilizado para descrever outras funções obtidas, sobretudo, por meio de deslocamentos. Assim, ela pode ser definida por diferentes expressões analíticas, que são expressadas pelas leis de formação de uma Função afim.

As Funções rampa têm diversas aplicações em diferentes áreas, incluindo Engenharia e Educação Financeira. Na Engenharia, elas são utilizadas na teoria do processamento digital de sinais para simplificar aspectos dos sinais e sistemas. Na Educação Financeira, essas aplicações são empregadas na análise de retornos e lucros com a compra de um produto, onde o pagamento de uma opção de compra pode ser modelado como uma Função rampa. Além disso, as definições desses conceitos são relevantes para o desenvolvimento das Séries de Fourier e a Transformação de Laplace.

Existem Funções definidas por mais de uma sentença que geram gráficos com descontinuidades por saltos, onde as partes não se encontram de forma contínua, deixando espaços no gráfico. Algumas delas têm a característica de Função escada e podem ser definidas como uma aplicação $f: D \to \mathbb{R}$ em que o domínio D é a reunião de intervalos, como já citado, porém, f é composta por uma quantidade de Funções constantes, um para cada intervalo em D. Dessa forma, sua lei de formação tem aspectos de Funções afins por partes. Consequentemente, os gráficos dessas aplicações podem ser compostos tanto por segmentos horizontais como por pontos isolados.

Uma aplicação $f: [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ é dita Função escada se existe uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, c] \subset \mathbb{R}$ e números reais $b_1, b_2 \ldots, b_n, \ldots$ tais que $f(x) = b_i$, com $x_{i-1} < x < x_i$, onde $1 \leq i \leq n$. Assim, existe uma decomposição do domínio fazendo com que f assuma valores constantes em cada subintervalo aberto. Como essa função é composta de trechos constantes, ela pode ser definida, algebricamente, do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} b_1, se\ x_0 < x < x_1 \\ b_2, se\ x_1 < x < x_2 \\ \vdots \\ b_n, se\ x_{n-1} < x < x_n \end{cases}$$

Essas aplicações são Funções afins por partes, já que, pela definição acima, f tem valor constante em cada intervalo aberto determinado pela partição.

Para Weber (2001), a maioria das aplicações que modelam os fenômenos econômicos são de aspectos discretos e possuem descontinuidades finitas, do tipo Função escada. Por exemplo, as Funções preço e custo são discretas, devido à natureza da mercadoria, elas possuem descontinuidade a instabilidade do custo e preço decrescem e crescem instantaneamente. As Funções oferta e demanda também são comumente discretas e apresentam a características da descontinuidade.

Diante desse contexto, é importante saber que uma aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de Função maior inteiro quando associa a cada elemento de $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $\lfloor x \rfloor$, que é o maior inteiro que é menor do que ou igual a x (STEWART, 2014).

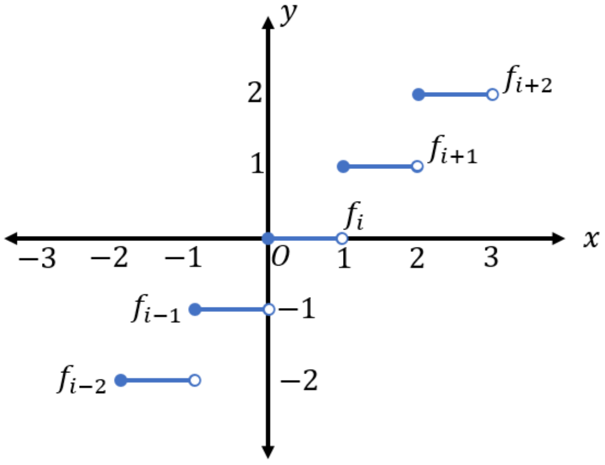
$$\begin{gathered} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{gathered}$$

Se x é um número real, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ tipicamente denota o maior inteiro que é menor ou igual a x. Isto define essa aplicação como o maior inteiro que satisfaz a condição. Devido ao fato de possuir um número infinito de regras, esta é uma Função definida por mais de uma sentença. Uma representação algébrica da Função maior inteiro assemelha-se a:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ 2, para\ 2 \leq x < 3 \\ 1, para\ 1 \leq x < 2 \\ 0, para\ 0 \leq x < 1 \\ -1, para\ -1 \leq x < 0 \\ -2, para\ -2 \leq x < -1 \\ \vdots \end{cases}$$

Nessa representação, é possível observar que em cada um dos intervalos dados, as funções algébricas são constantes, ou seja, f é um tipo de Função afim por partes. Dessa forma, o gráfico é formado por vários segmentos horizontais, como ilustra a Figura 8.

Figura 8 – Representação gráfica de uma Função Maior Inteiro



Fonte: Pesquisador (2023)

Por convenção, o domínio de uma função é o maior subconjunto dos números reais para o qual sua regra é válida. Assim, no caso acima, tem-se domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e "A imagem é o conjunto de todos os inteiros" (LEITHOLD, 1993, p. 43), ou seja $Im(f) = \mathbb{Z}$. Essa aplicação também é chamada como "Função piso" (STEWART, 2014, p. 96) ou "Função colchete". É possível observar que o gráfico dessa fica abaixo da reta $y = x$, proporcionando um "piso" inteiro para x.

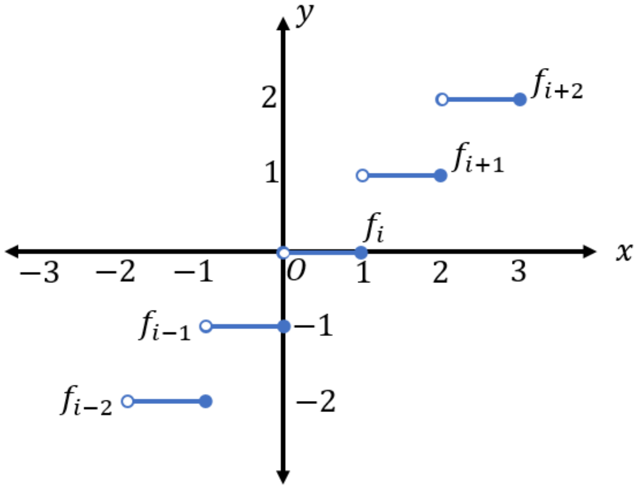
Por outro lado, a aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de Função menor inteiro ou Função teto quando associa a cada elemento de $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $\lceil x \rceil$, que é o menor inteiro que é maior do que ou igual a x.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lceil x \rceil$$

Na sequência, será exibida uma representação algébrica da Função menor inteiro, seguida pela Figura 9, que ilustra seu comportamento gráfico. Nessa representação, é possível visualizar que essa aplicação também possui domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \mathbb{Z}$ e que a função fica acima da reta $y = x$, proporcionando um "teto" inteiro para x.

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ 2, para\ 2 < x \leq 3 \\ 1, para\ 1 < x \leq 2 \\ 0, para\ 0 < x \leq 1 \\ -1, para\ -1 < x \leq 0 \\ -2, para\ -2 < x \leq -1 \\ \vdots \end{cases}$$

Figura 9 – Uma representação gráfica de uma Função Menor Inteiro



Fonte: Pesquisador (2023)

Tanto a Função maior inteiro como a Função menor inteiro têm descontinuidade em todos os números inteiros. Assim, é possível dizer que elas têm descontinuidades em “saltos”. Além disso, ambas crescem de forma discreta, com decrementos unitários. Isso significa que ambas "saltam" para o inteiro anterior à medida que x atravessa os valores inteiros. Essas aplicações são bastantes utilizadas em execuções computacionais, assim como, as modulares.

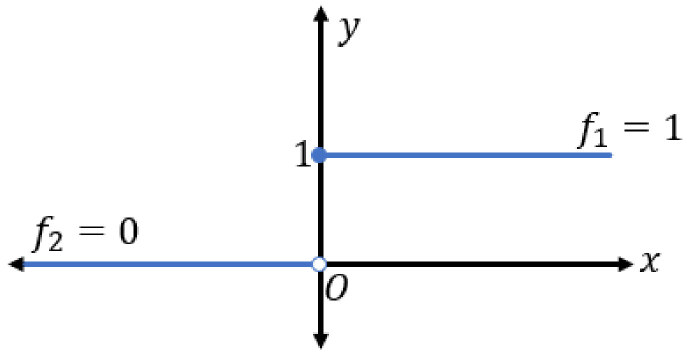
Kime, Clark e Michael (2014, p. 117, grifo dos autores) acrescentam que “Algumas funções lineares por trecho são chamadas de *funções degrau* porque seus gráficos se parecem com os degraus de uma escada. Cada “degrau” é parte de uma reta horizontal”.

A Função degrau unitário, conhecida também como Função Heaviside ou Função salto unitário, é simples de ser definida, pois é nula para argumento negativo e vale um para argumento positivo. Dessa forma, uma aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ 1, se\ x \geq 1 \end{cases}$$

É uma Função degrau unitário. Nesse sentido, o seu domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e imagem $Im(f) = \{\ 0, 1\ \}$. A Figura 10, a seguir, ilustra a representação gráfica desse tipo de Função afim por partes.

Figura 10 – Representação da Função Degrau Unitária



Fonte: Pesquisador (2023)

A Função de degrau com descontinuidade em $x = a$, é representado algebricamente por:

$$f(x-a) = \begin{cases} 0, se\ x < a \\ 1, se\ x \geq a \end{cases} \quad para\ a \in \mathbb{R}_+$$

Essas duas aplicações têm domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e imagem $Im(f) = \{\,0, 1\,\}$ e são frequentemente encontradas nos cursos de Engenharia, sobretudo, nos problemas que podem apresentar dualidade como “ligado” ou “desligado”. Além disso, são importantes nas soluções de equações diferenciais atreladas a modelagem de fenômenos descontínuos. Dessa forma, as Funções de degrau unitário são úteis para especificar uma função com diferentes descrições matemáticas em diferentes intervalos.

Por outro lado, a Função degrau corresponde a uma ação que modifica instantaneamente uma determinada condição, ou variável, de um sistema, como a posição, ou a velocidade, ou a carga elétrica num capacitor, ou a vazão em uma tubulação, a ativação elétrica de um circuito, ou ainda o início da ação de uma força, por exemplo. A aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ b, se\ x \geq b \end{cases} \quad com\ b\ \in\ \mathbb{R}_+^*$$

É denominada de Função degrau. Nesse caso, o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \{0, b\}$.

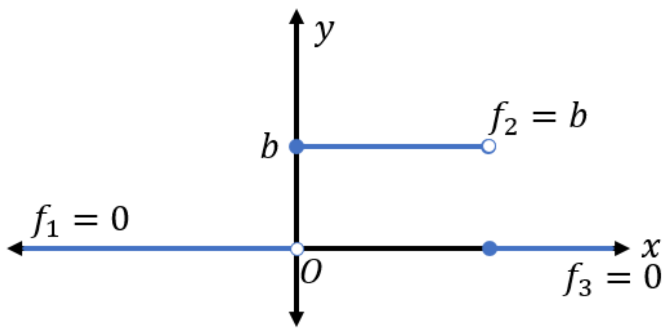
A Função pulso é também um tipo de Função afim por partes, já que a aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ x < 0 \\ b, se\ 0 \le x < x_1 \\ 0, se\ x \ge x_1 \end{cases} \quad com\ b\ \in\ \mathbb{R}_+^*$$

É uma Função pulso que tem o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \{\,0, b\}$. Quando $b = 1$ essa aplicação é denominada de Função pulso unitária.

Na Figura 11, a seguir, será ilustrada uma representação gráfica de uma Função pulso. Nessa representação, é possível visualizar que essa aplicação é constante em dois intervalos e não é contínua. Desse modo, é constante com o valor 0, nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $[x_1, +\infty)$, já com o valor b é constante no intervalo $[0, x_1)$.

Figura 11 – Representação gráfica de uma Função Pulso



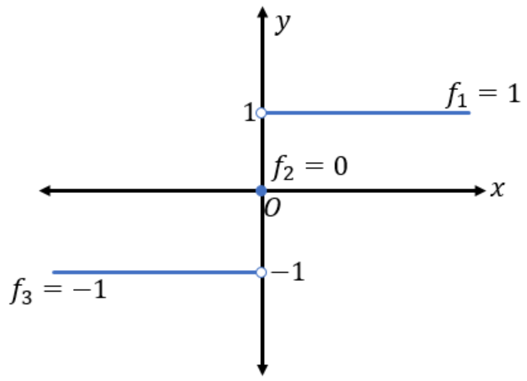
Fonte: Pesquisador (2023)

A Função sinal (Função *signum*), é correlata a Função degrau unitária. Para argumentos não nulos, o valor da Função sinal tem uma magnitude unitária e sinal igual ao sinal do seu argumento. Ele tem também uma representação própria, ou seja, $f(x) = sgn(x)$, já que a origem da palavra sinal vem do latim *"signum"* (LEITHOLD, 1993). Assim, toda aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, se\ x > 0 \\ 0, se\ x = 0 \\ -1, se\ x < 0 \end{cases}$$

É uma Função sinal, onde o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \{\,-1, 0, 1\,\}$. Em termos simples, podemos dizer que se o valor de x for negativo, o resultado de $sgn(x)$ será -1. Se o valor de x for zero, o resultado será 0. Contudo, se o valor de x for positivo, o resultado será 1. A Figura 12, ilustra sua representação gráfica. Assim, é possível visualizar que essa função é descontínua em todos os pontos de mudança de sinal, mas em cada intervalo entre esses pontos, ela é constante. Isso é devido à natureza discreta da função e aos diferentes valores que ela assume em cada intervalo.

Figura 12 – Representação gráfica da Função Sinal



Fonte: Pesquisador (2023)

Essa função desempenha um papel importante em diversas áreas da Ciência, sendo utilizada em análise de sinais, processamento de imagens, sistemas de controle, entre outros contextos. Vale ressaltar quando $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tem se $sgn(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$ que também é um tipo de Função afim por partes.

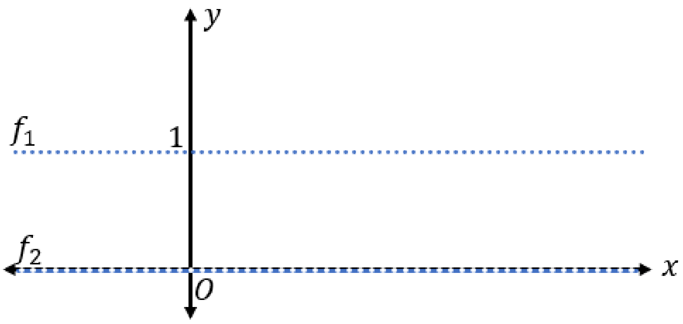
De acordo com a definição de Função afim por partes, cada parte dessa aplicação é representada por uma Função afim em intervalos disjuntos do domínio. Essas partes tem que ser descritas pela seguinte lei de formação $f(x) = ax + b$, onde a e b são valores reais. Ao analisar a Função de Dirichlet, que é definida como $f(x) = 1$ para valores de x pertencentes aos números racionais ($\mathbb{Q}$) e $f(x) = 0$ para valores de x pertencentes aos números irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$), podemos notar semelhanças com as características algébricas das Funções afins por partes.

Vale ressaltar que a aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, se\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

É denominada de Função de Dirichlet. A Figura 13, a seguir, busca apresentar uma suposta representação gráfica dessa aplicação sem o rigor matemático, pois é impossível traçar completamente o gráfico dessa função. Existem infinitos pontos racionais e infinitos pontos irracionais, impossibilitando representar todos eles no gráfico de forma contínua. Se tentássemos traçar segmentos de retas para conectar esses pontos, incluiremos conjuntamente os pontos racionais e irracionais, o que não seria possível no mesmo gráfico. Embora não seja possível traçar completamente o gráfico, podemos ter uma ideia geral de sua distribuição a partir dessa explicação.

Figura 13 – Uma suposta representação gráfica de uma Função Direchlet



Fonte: Pesquisador (2023)

Nessa função esboçada, tem-se $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = 0$. Assim, é possível visualizar que o domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f) = \{0, 1\}$. Além disso, que essa aplicação é descontínua em todos os pontos do domínio.

Observando ainda a Figura 13, percebe-se que a Função de Dirichlet não pode ser considerada uma Função linear por trechos. Como já frisado, as Funções lineares por trechos são definidas por segmentos em intervalos distintos, onde cada segmento representa uma parte da função em um intervalo específico (KIME, CLARK; MICHAEL, 2014). Já a Função de Dirichlet é definida por critérios diferentes em diferentes pontos, não necessariamente seguindo a linearidade de segmentos de reta, mas formando conjuntos de pontos colineares.

Diante do exposto, concluímos que o termo “Função afim por partes” é mais amplo do que o termo “Função linear por trecho”, pois engloba outras possibilidades de definição das partes da função que não se restringem à linearidade de um segmento de reta. Vale ressaltar que todas as funções exploradas nesta subseção têm contribuições relevantes tanto para as práticas sociais quanto para o desenvolvimento teórico da Matemática. Como o livro didático é um recurso importante para difusão desse conhecimento, a seguir haverá um mergulho em sua relevância educacional com ênfase no contexto do ensino de Matemática.

2.3 Livro Didático

Nesta seção, vamos falar sobre o livro didático na disciplina de Matemática. Vamos dividir em duas partes.

Na primeira parte, vamos falar sobre a importância do livro didático. Desse modo, abordaremos a relevância do livro didático físico no contexto educacional atual, mesmo diante da sociedade digital. Será destacado o papel do livro didático na transmissão de saberes e seu impacto na prática de ensino e aprendizagem, tanto para os professores quanto para os estudantes. O papel do PNLD será enfatizado como uma política pública que fornece recursos didáticos para estudantes e professores de escolas públicas, contribuindo para o processo educacional. Por fim, apresentaremos como os livros didáticos do PNLD são estruturados e distribuídos, bem como seu papel essencial no planejamento de aulas e no processo de aprendizagem dos estudantes.

Na segunda parte, vamos discutir a estruturação do livro de Matemática como um recurso valioso para apoiar os professores na condução das aulas, tornando o aprendizado claro e acessível. Destacamos como esse material se alinha com as competências da BNCC (BRASIL, 2018), contribuindo para uma formação completa dos estudantes. Por fim, será ressaltada a importância do livro de Matemática como um recurso valioso para o planejamento e prática docente, oferecendo suporte para estruturar aulas e desenvolver estratégias didático-pedagógicas eficientes.

2.3.1 Relevância e disponibilidade

Mesmo vivendo no período da sociedade digital, o livro didático físico ainda possui um relevante papel no âmbito educacional. Visto que nem todas as escolas públicas possuem laboratórios de informática com equipamentos adequados (computadores que estejam funcionando e *Internet* de qualidade) para o uso dos estudantes, nem muito menos disponibiliza aparelhos móveis (*smartphones* e *tablets*) com essas características. Vale ressaltar que o

> Livro didático [físico] é um artefato impresso em papel que veicula imagens e textos em forma linear e sequencial. É planejado, organizado e produzido especificamente para uso em situações didáticas, envolvendo, predominantemente, alunos e professores e tem a função de transmitir saberes circunscritos a uma disciplina escolar. (FREITAS, 2010, p. 268).

Esse tipo de material é visto também como um “[...] produto importante no cenário da educação brasileira pelo papel que desempenha na divulgação dos saberes socialmente legitimados das diferentes áreas do conhecimento” (BASSO, TERRAZAN, 2015, p. 258). Para Guimarães *et al*. (2007),

> O livro didático se constitui em um importante recurso utilizado por professores na condução e/ou elaboração das abordagens de ensino, em parte pela ausência de outros materiais que orientam os professores sobre o que e como ensinar, e em parte pela frequente dificuldade de acesso do aluno a outras fontes de estudo e pesquisa (p. 3).

Nesse sentido, o livro didático se configura como um dos principais recursos impressos utilizados por professores e estudantes do sistema público de ensino. Em outras palavras, “[...] é indispensável discutirmos sobre o papel do livro didático como recurso de leitura influenciador da prática de ensino na sala de aula, pelos professores, e da aprendizagem de conceitos, pelos alunos” (CARVALHO, 2009, p. 14).

Convém destacar que “[...] o livro didático assume essencialmente três grandes funções: de informação, de estruturação e organização da aprendizagem e, finalmente, a função de guia do aluno no processo de apreensão do mundo exterior” (SANTOS, CARNEIRO, 2013, p. 206).

De acordo com Choppin (2004), os livros didáticos assumiram e ainda exercem diversas funcionalidades, dentre as quais se destacam: a) Referencial, dado que tal recurso é utilizado como suporte privilegiado dos conteúdos e técnicas para reproduzir as aulas e os programas; b) Instrumental, pois esse material é utilizado para propor e realizar exercícios ou atividades; c) Ideológica e cultural, em razão de constituir um importante transmissor de valores culturais dominantes; d) Documental, já que é por meio da observação e confrontação que se pode desenvolver a consciência crítica dos estudantes.

De certa forma, Oliveira (2021, p. 224) complementa essas ideias, enfatizando que "[...] este instrumento educacional deve ser capaz de promover as reflexões sobre os múltiplos aspectos da realidade e estimular a capacidade investigativa" do público que utiliza esse recurso. Desse modo, além de contribuir na organização da atividade, é visto como fonte de ampliação do conhecimento. Para Lajolo (1996), esse material, embora não seja único, é uma ferramenta específica e de extrema importância que colabora para o processo de globalização do conhecimento científico.

É importante ressaltar que, mesmo com o avanço da tecnologia e a ampliação dos recursos pedagógicos disponíveis no processo de ensino e aprendizagem, o livro didático continua sendo um dos recursos mais acessíveis e utilizados nas escolas brasileiras. No entanto, Oliveira (2021) destaca que, diferentemente do cenário atual, o acesso a esse recurso era privilégio das classes mais privilegiadas antes da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (Colted). A educação era restrita a uma parcela da população, sendo um benefício concedido apenas a poucos.

As mudanças de paradigmas relacionadas aos livros didáticos só ocorreram de forma consolidada na década de 1990, período marcado por uma série de transformações, reformas educacionais e o surgimento de novos parâmetros educacionais, como os PCN (BRASIL, 1997, 1998, 2000). Esses marcos foram responsáveis por impulsionar mudanças significativas na concepção, conteúdo e abordagem dos livros didáticos, tornando-os mais inclusivos, diversificados e alinhados com as necessidades educacionais da sociedade.

Atualmente, o livro didático é disponibilizado pelo PNLD, uma política pública executada pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e pelo Ministério da Educação (MEC). O PNLD tem como objetivo fornecer de maneira sistemática, regular e gratuita obras didáticas, pedagógicas e literárias destinadas aos estudantes e professores das escolas públicas participantes do programa, sendo proibida sua comercialização.

De forma abrangente, o PNLD é um programa essencial que apoia o processo de ensino e aprendizagem nas escolas beneficiadas. Até 2004, os livros didáticos eram distribuídos apenas para o Ensino Fundamental da Educação Básica pública. No entanto, a partir desse ano, surgiu o PNLEM, o que significou um marco importante nesse cenário.

O PNLEM possibilitou a universalização dos livros didáticos para estudantes do Ensino Médio no Brasil. Inicialmente, foram distribuídos livros didáticos para as disciplinas de Português e Matemática. Posteriormente, de forma gradual, foram incluídos livros didáticos de Língua Estrangeira, Física, Biologia, Química, Sociologia, entre outros.

Convém realçar que o PNLD está sempre em processo de aperfeiçoamento, o que resulta em uma grande democratização da produção, avaliação e distribuição de livros didáticos em todas as componentes curriculares atendidas pelo supracitado programa. Nesse sentido, algumas mudanças são geradas no movimento de aquisição do livro didático. No Ensino Médio, por exemplo, há a proposta da reutilização desses materiais impressos por um período de três anos após a distribuição, o que levou à produção desses materiais com melhorias técnicas destinadas a aumentar a durabilidade.

Os livros didáticos são escolhidos pelos professores que lecionam a componente curricular correspondente a esses materiais impressos, promovendo assim a democratização da escolha desse material. Para auxiliar na seleção desses materiais didáticos, o PNLD produz e disponibiliza o Guia Nacional do Livro Didático. Esse guia apresenta um rol de resenhas e informações de cada coleção, com uma análise avaliativa referente ao contexto teórico-metodológico e à estruturação de cada obra disponibilizada. Nesse momento, cabe ao professor, a partir da análise crítica do guia e possível exploração da obra, fazer a sua escolha de forma coletiva, juntamente com os demais colegas da área, para posteriormente indicar duas coleções de exemplares para o gestor da respectiva escola pública de atuação, que fará a solicitação.

No contexto das escolas públicas da rede de ensino municipal, estadual, federal ou do Distrito Federal, é possível realizar a adesão ao PNLD, cuja validade perdura por tempo indeterminado, a menos que uma solicitação de exclusão seja feita. Durante o processo de adesão, os gestores responsáveis pelas instituições de ensino têm a tarefa de selecionar o período letivo desejado e indicar o tipo de material didático que desejam receber, levando em consideração as escolhas feitas pelos professores.

Conforme estabelecido pela BNCC (BRASIL, 2018), é necessário escolher duas opções de material didático de diferentes editoras para cada área do conhecimento. Após especificar a primeira opção, o gestor da unidade escolar deve indicar também qual coleção de exemplares aceitará como segunda opção. Essas informações devem ser preenchidas no Termo de Adesão disponível no site do programa. Se a equipe responsável pelo PNLD não conseguir fechar contrato com a editora da primeira opção selecionada, a coleção indicada como segunda opção deverá ser distribuída. Por isso, é essencial escolher a segunda opção com o mesmo cuidado e atenção dedicados à primeira escolha.

É importante ressaltar que a seleção de uma coleção de volumes da mesma área por uma editora não impede a escolha de outras editoras para as diferentes áreas do conhecimento. Por exemplo, um gestor pode optar pela Editora “A” para a área de Matemática e suas Tecnologias, e pela Editora “B” para a área de Linguagem e suas Tecnologias.

As obras do PNLD são estruturadas em três tipos de materiais, conforme a área de conhecimento: a) Livro do estudante impresso: consiste em uma coleção de seis volumes por área de conhecimento, com um máximo de 160 páginas em cada volume; b) Manual do professor impresso: compreende uma coleção de seis volumes por área de conhecimento, contendo até 288 páginas em cada volume; c) Material digital do professor: engloba um conjunto de seis videotutoriais, um por volume, com duração facultativa de 5 a 10 minutos.

Além disso, na área de Linguagens e suas Tecnologias, o material digital do professor inclui uma coletânea de áudios para Linguagens (arte), com 15 a 25 faixas, com duração variando de 20 segundos a 5 minutos. Os manuais dos professores também possuem versões digitais que podem ser facilmente acessadas pela Internet.

Na distribuição do material para as escolas que aderem ao programa, cada estudante recebe dois volumes de cada área de conhecimento da BNCC (BRASIL, 2018), correspondendo a um volume para cada semestre do ano. Além disso, cada estudante também recebe mais três volumes referentes a obras específicas. Os professores recebem os manuais correspondentes aos anos em que estão lecionando.

Diante do exposto, o PNLD desempenha um papel essencial ao fornecer uma variedade de recursos didáticos para estudantes e professores da rede pública de ensino. Por meio desse programa, cada estudante tem acesso a livros e materiais específicos que são projetados para auxiliar em seu processo de aprendizagem. Da mesma forma, os professores recebem manuais, materiais físicos e digitais, que os apoiam no planejamento e na condução das aulas.

Seguindo essa linha de abordagem, na próxima seção, nosso foco será explorar como esses recursos didáticos são elaborados para o processo de ensino e aprendizagem da área de Matemática, alinhados com as orientações da BNCC (BRASIL, 2018).

2.3.2 Orientações da BNCC: livros didáticos de matemática

O Livro Didático de Matemática (LDM), integrante do PNLD, tem sido reconhecido por pesquisadores como um recurso valioso para a formação tanto de estudantes como de professores. Sua ampla utilização no ambiente escolar o torna parte essencial do planejamento e prática docente, contribuindo significativamente para o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina (DANTE, 1996; CARVALHO, LIMA, 2010).

Dante (1996, p. 83) destaca a importância do LDM ao ressaltar que “[...] a Matemática é essencialmente sequencial, um assunto depende do outro, e o livro didático fornece uma ajuda útil para essa abordagem”. Nesse sentido, o livro didático desempenha um papel útil ao fornecer uma abordagem que segue essa sequência, auxiliando os professores de Matemática na construção de estratégias didático-pedagógicas para o ensino.

Nesse sentido, o uso do LDM tem o potencial de trazer inúmeros benefícios tanto para os estudantes como para os professores dessa disciplina. Ele pode ser empregado de diversas maneiras, especialmente ao promover um ensino voltado para uma aprendizagem que se relacione com o cotidiano dos estudantes.

Desse modo, o LDM é

> [...] para o professor algo mais que um simples material para auxiliar no ensino-aprendizagem. Ele é um objeto de apoio didático que os professores, em sua grande maioria, o utilizam para estruturar e ministrar as suas aulas, apoiando-se nas considerações feitas por toda sua estrutura do texto do saber, em seus exemplos com analogias e seus exercícios os mais variados, vindo a confirmar a necessidade de toda a discussão em torno do livro didático em função de sua qualidade e uso, bem como de sua adoção. (SILVA JUNIOR, 2005, p. 13)

A citação de Silva Junior (2005, p. 13), destaca que o LDM vai além de um mero recurso auxiliar para os professores. Ele se transforma em um importante objeto de apoio didático utilizado pela maioria dos docentes para estruturar e ministrar suas aulas. Através de sua organização textual, exemplos com analogias e exercícios variados, esse recurso oferece um suporte fundamental para a transmissão dos conhecimentos matemáticos de forma clara e acessível.

De acordo com Santos e Silva (2018), o LDM deve ser um recurso versátil, capaz de se adaptar às diferentes práticas e situações em sala de aula. Eles abordam as críticas que frequentemente cercam os livros matemáticos, apontando que algumas vezes podem ser considerados de difícil interpretação. No entanto, esses autores enfatizam que é essencial reconfigurar e compreender esses materiais para que possam se adequar às diversas abordagens pedagógicas utilizadas pelos professores. Isso implica tornar o livro didático uma ferramenta mais eficaz, que se alinhe às particularidades e diversidades das práticas educacionais.

Valente (2000) destaca que, até o final do século XX, os livros didáticos de Matemática eram caracterizados por uma abordagem positivista, sendo robustos e rígidos, o que dificultava o processo de ensino e aprendizagem. No entanto, as atuais tendências em educação, incluindo a Educação Matemática, bem como os documentos curriculares, são contrários a essa abordagem, levando à necessidade de flexibilização desses materiais a cada novo período.

Segundo Valente (2008), os LDM têm evoluído para responder e incorporar implicações teóricas, preenchendo lacunas e atendendo às necessidades percebidas pelos professores em suas práticas. Essas lacunas dizem respeito à forma como os conteúdos são apresentados, às linguagens utilizadas, à organização e estruturação do material.

Essa evolução é resultado do alinhamento dos novos livros didáticos às orientações educacionais. Dessa forma, atualmente, o LDM para Educação Básica deve estar em consonância com as competências e habilidades específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, conforme proposto pela BNCC (BRASIL, 2018). Isso significa que esses novos livros didáticos necessitam abordar um conjunto fundamental de aprendizagens que todos os estudantes precisam desenvolver ao longo do Novo Ensino Médio. Nesse contexto, é importante entender que

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 7)

Com o intuito de atingir esse conjunto fundamental de aprendizagem, a BNCC estabeleceu dez competências gerais que englobam toda a Educação Básica (BRASIL, 2018). A seguir, serão elencadas essas competências no Quadro 1.

Quadro 1 – As dez competências gerais da BNCC

COMPETÊNCIAS GERAIS	
1. Conhecimento	**6. Autogestão**
Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre os mundos físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade. Continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
2. Pensamento científico, crítico e criativo	**7. Argumentação**
Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável nos âmbitos local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
3. Senso estético e repertório cultural	**8. Autoconhecimento e autocuidado**
Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
4. Comunicação	**9. Empatia e cooperação**
Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
5. Cultura digital	**10. Autonomia**
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

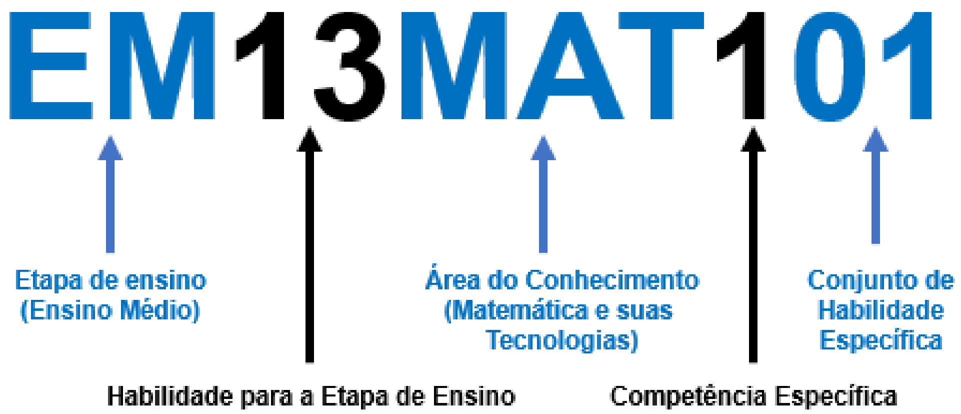
Fonte: Pesquisador (2023) reproduzindo o que está na BNCC (BRASIL, 2018)

Essas competências visam desenvolver habilidades e conhecimentos essenciais para o pleno desenvolvimento dos estudantes, preparando-os para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo e para se tornarem cidadãos ativos e conscientes em sua comunidade e no mundo em geral. Ao seguir as diretrizes da BNCC (BRASIL, 2018) e incorporar suas competências gerais, as instituições de ensino têm a oportunidade de fornecer uma educação de qualidade e relevante, adaptada às necessidades e realidades locais, garantindo assim uma formação mais completa e abrangente para os estudantes.

A BNCC também estabeleceu as competências específicas que concretizam as gerais em cada área do conhecimento (BRASIL, 2018). Cada competência específica está inclusa nos livros didáticos para o Novo Ensino Médio. Além disso, elas são combinadas com as competências específicas da etapa do Ensino Fundamental, com os ajustes necessários para atender às particularidades da formação do estudante de forma progressiva. Para garantir o desenvolvimento delas, relacionam cada uma ao um conjunto de conhecimentos que representam a aprendizagem essencial que deve ser garantida a todos.

Para mostrar que esses conhecimentos estão interligados, foram criadas as habilidades específicas. Cada uma é identificada por um código alfanumérico, que consiste em identificar a etapa de ensino, habilidade para a etapa de ensino, área do conhecimento, competência específica e conjunto de habilidades específicas. A Figura 14, a seguir, ilustra esse fato.

Figura 14 – Código alfanumérico da BNCC para o Ensino Médio



Fonte: Pesquisador (2023)

Na Figura 14, o primeiro par de letras representa a etapa de ensino, nesse caso o EM representa o Ensino Médio; já o primeiro par de números indica as habilidades descritas que podem ser desenvolvidas em qualquer ano do Ensino Médio conforme a definição dos currículos, de forma específica, esses números se referem ao período que vai do primeiro ao terceiro ano da citada etapa de ensino; a seguir tem uma sequência de letras triplas que representa a área do conhecimento ou componente curricular, nesse caso é a Matemática e suas Tecnologias; o antepenúltimo número se refere a competência específica e o último par de número final indica o conjunto habilidade específica relacionado com a competência específica.

A BNCC (BRASIL, 2018), enquanto referência nacional, contribui para a articulação e coordenação de políticas e ações educacionais desenvolvidas em âmbito federal, estadual, municipal e do Distrito Federal, especialmente em relação à definição de recursos didáticos. Dessa forma, as editoras que produzem os livros didáticos para concorrer aos processos seletivos do PNLD tiveram que alinhar suas obras de acordo a esse documento, enfatizando essas competências gerais como também as específicas de cada área.

De acordo com Santos e Silva (2018), os LDM são cuidadosamente elaborados, passando por um rigoroso processo de reconstrução para atender à demanda comercial do PNLD. Nesse contexto, esses novos recursos visam apresentar os elementos matemáticos de forma científica, ao mesmo tempo, em que utilizam uma abordagem didática para tornar o conteúdo mais acessível aos estudantes. Dentro desse propósito, a roupagem didática aplicada aos conceitos explorados deve estar alinhada, sobretudo com as competências específicas da disciplina de Matemática, elencadas pela BNCC (BRASIL, 2018).

É importante enfatizar que, no Ensino Médio, a BNCC enfoca a relevância de abordar os conteúdos de Matemática de maneira diversificada, utilizando diferentes abordagens e métodos de ensino (BRASIL, 2018). Isso inclui a aplicação das competências e habilidades específicas da matemática, permitindo aos estudantes uma compreensão mais ampla e enriquecedora no aprendizado matemático.

A seguir, no Quadro 2, serão apresentadas as cinco competências específicas estabelecidas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, juntamente com os códigos correspondentes a suas respectivas habilidades (BRASIL, 2018).

Quadro 2 – As competências específicas com seus códigos de habilidades

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA MATEMÁTICA	CONJUNTO DE HABILIDADES ESPECÍFICAS DA MATEMÁTICA
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação científica geral.	• EM13MAT101 • EM13MAT102 • EM13MAT103 • EM13MAT104 • EM13MAT105 • EM13MAT106
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	• EM13MAT201 • EM13MAT202 • EM13MAT203
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	• EM13MAT301 • EM13MAT302 • EM13MAT303 • EM13MAT304 • EM13MAT305 • EM13MAT306 • EM13MAT307 • EM13MAT308 • EM13MAT309 • EM13MAT310 • EM13MAT311 • EM13MAT312 • EM13MAT313 • EM13MAT314 • EM13MAT315 • EM13MAT316
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	• EM13MAT401 • EM13MAT402 • EM13MAT403 • EM13MAT404 • EM13MAT405 • EM13MAT406 • EM13MAT407
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	• EM13MAT501 • EM13MAT502 • EM13MAT503 • EM13MAT504 • EM13MAT505 • EM13MAT506 • EM13MAT507 • EM13MAT508 • EM13MAT509 • EM13MAT510 • EM13MAT511

Fonte: Pesquisador (2023) reproduzindo o que está na BNCC (BRASIL, 2018)

É possível observar nesse quadro que as três primeiras competências evidenciam a interligação da área com problemas cotidianos, sobretudo, a necessidade de sua contextualização. As outras duas apresentam essa finalidade em algumas de suas habilidades que podem ser conferidas no Apêndice B. Dessa forma, espera assegurar a efetiva aquisição das competências gerais, competências específicas e habilidades relacionadas à área de Matemática e suas Tecnologias. Nessa linha de pensamento, é possível notar que as competências específicas de Matemática para o Novo Ensino Médio formam um todo conectado. É importante ressaltar que algumas habilidades podem estar associadas a mais de uma competência, mas a BNCC (BRASIL, 2018) as classificou naquela com a qual têm maior afinidade.

Nessa lógica, é importante frisar que as habilidades são oriundas de cinco unidades de conhecimento da área em questão, a saber: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade; e Estatística. Entretanto, pensando na necessidade de organizar essas unidades, considerando a preservação da articulação entre os vários campos da Matemática escolar, juntamente com a construção de uma visão integrada da citada área aplicada à realidade, a BNCC providenciou a criação de três agrupamentos: Números e Álgebra; Geometria e Medidas; Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018).

De forma geral, essa articulação está pautada na integração entre os temas de anos anteriores, bem como do mesmo ano de escolaridade, mobilizando os conhecimentos já construídos. Essa organização curricular é assumida na proposta para o Novo Ensino Médio e, consequentemente, deve estar presente nos atuais livros didáticos do PNLD 2021 – Objeto 2.

Aqui cabe ressaltar que as ideias da BNCC (BRASIL, 2018) convergem para a construção de um currículo apoiado na integração das experiências e na formação do estudante não só no seu mundo individual, mas também na sua vida cívica. Assim, fomentar uma educação integral que se dá a partir do desenvolvimento e consolidação de conceitos e procedimentos, habilidades, atitudes e valores que contribuem para a capacidade do aprendiz de resolver problemas complexos do cotidiano, com foco na plenitude da cidadania e do mundo do trabalho.

É importante destacar os cinco primeiros parágrafos do art. 7.º das Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM),

> § 1º Atendidos os direitos e objetivos de aprendizagem instituídos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as instituições e redes de ensino podem adotar formas de organização e propostas de progressão que julgarem pertinentes ao seu contexto, no exercício de sua autonomia, na construção de suas propostas curriculares e de suas identidades. § 2º O currículo deve contemplar tratamento metodológico que evidencie a contextualização, a diversificação e a transdisciplinaridade ou outras formas de interação e articulação entre diferentes campos de saberes específicos, contemplando vivências práticas e vinculando a educação escolar ao mundo do trabalho e à prática social e possibilitando o aproveitamento de estudos e o reconhecimento de saberes adquiridos nas experiências pessoais, sociais e do trabalho. § 3º As aprendizagens essenciais são as que desenvolvem competências e habilidades entendidas como conhecimentos em ação, com significado para a vida, expressas em práticas cognitivas, profissionais e socioemocionais, atitudes e valores continuamente mobilizados, articulados e integrados, para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do exercício da cidadania e da atuação no mundo do trabalho. § 4º Cada unidade escolar, em consonância com o sistema de ensino, deve estabelecer critérios próprios para que a organização curricular ofertada possibilite o desenvolvimento das respectivas competências e habilidades. § 5º A organização curricular deve possibilitar contínuo e articulado aproveitamento de estudos e de experiências pessoais, sociais e do trabalho. (BRASIL, 2018ª, p. 4).

Nesse caminho, as decisões do professor de Matemática para a organização de seu trabalho em sala de aula devem estar orientadas para a possibilidade de desenvolver nos estudantes a reflexão da mobilização de conhecimentos adquiridos anteriormente, com conexões entre as possíveis vivências e novas aprendizagens. Além disso, é preciso buscar estratégias cada vez mais elaboradas com o reconhecimento das imbricações entre diferentes temas, tanto da própria Matemática como de outras áreas do conhecimento.

Diante disso, o LDM, sobretudo na versão do manual do professor, tem que ser elaborado com reflexões baseadas nas orientações para o Novo Ensino Médio. Sendo assim, é necessário ter em vista as mudanças preconizadas pelos documentos educacionais, visando atender às necessidades e aos interesses dos estudantes que ingressam nessa etapa da Educação Básica. Cabe a este tipo de recurso auxiliar o planejamento anual do professor de forma articulada com os citados documentos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo está dividido em três seções, cada uma abordando aspectos distintos do estudo, com o objetivo de proporcionar uma compreensão clara sobre a condução da pesquisa e suas principais finalidades.

Na primeira seção, apresentamos a abordagem de pesquisa adotada, com ênfase nos objetivos e procedimentos investigativos. Descrevemos detalhadamente a metodologia utilizada para analisar as estratégias e procedimentos relacionados aos objetos de pesquisa. Explicamos como essa abordagem nos permite aprofundar a análise e esclarecer conceitos e ideias sobre o tema pesquisado.

A segunda seção trata da estratégia de análise de dados adotada para obter informações relevantes para a pesquisa. Explicamos minuciosamente a técnica de análise de dados utilizada, descrevendo as etapas da análise, como a pré-análise, a exploração do material selecionado e o tratamento dos resultados. Assim, relatamos como essa análise nos permite fazer inferências e identificar variáveis relacionadas aos objetos de pesquisa.

Na terceira seção, explicamos o processo seletivo das coleções dos livros didáticos analisados. Destacamos que foram examinadas dez coleções da área da Matemática e suas Tecnologias destinadas ao primeiro ano do Novo Ensino Médio, aprovadas no âmbito do PNLD 2021. Descrevemos como a pré-análise dessas coleções possibilitou identificar os LDM que abordam o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença como tema relevante. Além disso, sinalizamos como acontece seu processo de identificação nessa pesquisa.

3.1 Abordagem, Objetivo e Procedimento de Pesquisa

A pesquisa em questão tem como objetivo geral compreender as estratégias e os procedimentos matemáticos relacionados ao ensino de Funções definidas por mais de uma sentença, presentes nos livros didáticos disponibilizados pelo PNLD 2021 – Objeto 2, com ênfase nas possíveis situações reais. Nesse sentido, o estudo se caracteriza como uma investigação de abordagem qualitativa e possui como objetivo a pesquisa exploratória e o procedimento bibliográfico. Diante disso, é importante compreender que:

> A investigação qualitativa emprega diferentes alegações de conhecimento, estratégias de investigação e métodos de coleta e análise de dados. [...] os procedimentos qualitativos se baseiam em dados de texto e imagem, têm passos únicos na análise de dados e usam estratégias diversas de investigação. (CRESWELL, 2010, p. 184).

Seguindo essa perspectiva, o autor menciona que a pesquisa qualitativa é, essencialmente, explicativa, ou seja, os pesquisadores interpretam os dados. Isso envolve o desenvolvimento de descrições de pessoas ou ambientes, a investigação de dados primários ou secundários para identificar temas ou categorias e, por fim, a construção de uma interpretação pessoal e teórica do significado dos dados ou a formulação de conclusões, citando lições aprendidas e levantando novas questões (CRESWELL, 2010).

A investigação de abordagem qualitativa auxilia o pesquisador a ir além de suas concepções iniciais, gerando ou revisando estruturas teóricas. Nesse contexto, o presente estudo enfatiza a pesquisa exploratória como um dos objetivos de pesquisa atendidos por essa abordagem. Segundo Gil (2019), o propósito desse tipo de pesquisa é desenvolver, esclarecer e revisar conceitos e ideias, visando levantar questões mais precisas ou hipóteses pesquisáveis para investigações futuras. As pesquisas exploratórias são planejadas com menos rigor, pois seu objetivo é fornecer uma visão geral aproximada de um determinado fato.

É notável que a pesquisa exploratória, além de empregar uma abordagem qualitativa, busca uma proximidade da realidade do objeto estudado por meio de seus métodos e critérios. Suas finalidades são fornecer informações mais detalhadas sobre um assunto, facilitando a delimitação de uma temática de estudo e o aprimoramento de ideias consolidadas, bem como concretizar descobertas intuitivas do pesquisador.

Nesse sentido, foi utilizada a pesquisa exploratória para investigar aspectos interessantes sobre o ensino de Funções por mais de uma sentença, com ênfase no desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018). Com o objetivo de proporcionar uma maior compreensão da pergunta norteadora, foi adotado o procedimento de pesquisa bibliográfica para esta investigação.

A pesquisa bibliográfica consiste no levantamento de material teórico relacionado ao tema de interesse. Segundo Lakatos e Marconi (2017), abrange todas as fontes bibliográficas disponíveis sobre o assunto, como publicações individuais, boletins, jornais, revistas, livros, estudos, monografias, teses, materiais impressos, virtuais e audiovisuais. Dessa forma, permite o acesso direto ao que foi escrito, gravado ou fotografado sobre um tema específico.

Essa abordagem possibilita pesquisas de relevância, pois esclarece questões com base em informações e dados obtidos de materiais já elaborados, ou seja, arquivos secundários. Conforme Gil (2019), esse procedimento amplia a gama de fenômenos que o pesquisador pode abordar em comparação à pesquisa direta.

No presente estudo, realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre as produções do PNLD 2021 – Objeto 2, voltado para o Novo Ensino Médio, destacando as abordagens do conteúdo de Funções por mais de uma sentença, com foco em situações reais. A pesquisa foi restrita aos volumes das coleções didáticas de Matemática que apresentam esse conteúdo em seus respectivos sumários.

O processo de investigação ocorreu em três etapas: primeiro, identificaram-se os volumes das coleções didáticas de Matemática do PNLD 2021 – Objeto 2, que abordam Funções por mais de uma sentença; em seguida, investigou-se a contextualização das questões de Matemática relacionadas a esse conteúdo nos livros didáticos do PNLD 2021; por fim, selecionou-se e desenvolveu uma sequência didática com os problemas encontrados na etapa anterior. Essa última etapa resultou na produção de um produto educacional que poderá ser aplicado por outros professores em seus ambientes de trabalho.

3.2 Estratégia para Análise dos Dados

As abordagens qualitativas permitem a idealização de explicações e discussões de fenômenos, sendo essencial analisar o fenômeno e obter respostas para as questões colocadas na pesquisa. Nesse sentido, recorremos à técnica da análise de conteúdo, que consiste em um conjunto de técnicas de análise da comunicação destinadas a obter indicadores quantitativos ou não quantitativos, através de procedimentos sistemáticos e descrições objetivas do conteúdo da mensagem. Essas análises permitem inferências e identificação de variáveis de produção/recepção (BARDIN, 2016).

Dessa forma, os dados foram analisados por meio de

> Um conjunto de técnicas parciais mais complementares, consistam na explicitação e sistematização do conteúdo das mensagens, com o contributo de índices passíveis ou não de quantificação, a partir de um conjunto de técnicas, que embora parciais, são complementares. Esta abordagem, tem por finalidade efetuar deduções lógicas e justificadas, referentes a origem da mensagem tomada em consideração (o emissor e seu contexto, ou eventualmente, o efeito dessas mensagens). (BARDIN, 2016, p. 48).

Para isso, a análise dos dados foi conduzida em três fases distintas: a primeira, denominada pré-análise, teve como finalidade operacionalizar e sistematizar a ideia original do estudo, selecionando os volumes relevantes para a pesquisa. Na segunda fase, ocorreu a exploração do material selecionado, aplicando operações de codificação, decomposição e enumeração para identificar e categorizar as características previamente estabelecidas. Essas operações possibilitaram uma análise aprofundada dos dados contidos nas obras selecionadas. Por fim, a terceira fase consistiu no tratamento dos resultados obtidos. Nessa etapa, uma tabela de resultados foi elaborada com base nas informações coletadas e passou por um processo de validação para garantir a consistência e confiabilidade dos dados. Em seguida, os resultados foram interpretados e inferências foram realizadas de acordo com os objetivos desta pesquisa.

Ao seguir esses passos, foi possível alcançar os objetivos propostos para esta pesquisa, principalmente a produção da sequência didática planejada.

3.3 Processo Seletivo das Coleções Analisadas

As abordagens qualitativas permitem a idealização de explicações e discussões de fenômenos, sendo essencial analisar o fenômeno e obter respostas para as questões colocadas na pesquisa. Nesse sentido, recorremos à técnica da análise de conteúdo, que consiste em um conjunto de técnicas de análise da comunicação destinadas a obter indicadores quantitativos ou não quantitativos, através de procedimentos sistemáticos e descrições objetivas do conteúdo da mensagem. Essas análises permitem inferências e identificação de variáveis de produção/recepção (BARDIN, 2016).

A nossa fonte de dados está limitada aos livros didáticos de Matemática destinados ao primeiro ano do Novo Ensino Médio. Essas coleções foram aprovadas no âmbito do PNLD 2021 para o Novo Ensino Médio, conforme o Edital de Convocação da Coordenação-Geral dos Programas do Livro (Cgpli) 03/2019, que regulamentou o processo de aquisição e acesso a obras didáticas, literárias e recursos digitais para escolas públicas de Ensino Médio e Educação Básica.

As dez coleções de Matemática selecionadas estão listadas na Portaria nº 68, de 2 de junho de 2021, publicada no Diário Oficial da União (DOU), edição nº 10, de 7 de junho de 2021, com o resultado final da avaliação pedagógica das obras didáticas inscritas e validadas.

Para encontrar informações relevantes sobre cada livro produzido e suas versões digitais gratuitas do manual do professor, foi utilizado o código de acesso de cada coleção, disponibilizado no DOU, e buscado nos sites das editoras. Além disso, o Guia do PNLD 2021, contendo resenhas das obras didáticas por área do conhecimento e obras didáticas específicas, também foi utilizado.

Com base nesses dados, o objetivo foi identificar quais dos livros didáticos de Matemática do Novo Ensino Médio atendem ao objeto de pesquisa. Para isso, foram estabelecidos critérios de escolha e exclusão. Os critérios de escolha buscaram selecionar os livros que enfatizam em seus sumários a expressão “Função definida por mais de uma sentença”, “Funções definidas por partes”, “Funções por partes” e/ou “Funções afins por partes”. Já os critérios de exclusão visaram eliminar os volumes das coleções que não atendem ao currículo do primeiro ano dessa etapa de ensino, ou seja, aqueles em que os manuais dos professores não orientam sua utilização no referido ano.

Convém destacar que todas essas coleções de livros didáticos foram elaboradas com base nas reflexões sobre as orientações para o Novo Ensino Médio, levando em consideração as mudanças propostas pelas DCNEM (BRASIL, 2018a) e pela BNCC (BRASIL, 2018). O objetivo é atender às necessidades e interesses dos estudantes que ingressam nessa etapa da Educação Básica.

Essas obras estão organizadas em seis volumes, cada um destinado a um semestre letivo. Elas abrangem não apenas as competências gerais, competências específicas e conjunto de habilidades elencadas na BNCC (BRASIL, 2018), mas também abordam temas contemporâneos transversais.

Para apresentar as dez coleções, serão fornecidas informações técnicas sobre cada uma delas, seguindo uma ordem alfabética em relação aos títulos das coleções. Em seguida, será apresentada uma breve descrição das estruturas dos respectivos livros. Essas obras didáticas serão identificadas com codificações específicas neste estudo de pesquisa.

O primeiro conjunto de livros analisado pertence à coleção “Conexões”, da editora Moderna, e é composto pelos seguintes volumes na área de Matemática e suas Tecnologias: Volume 1 - Grandezas, Álgebra e Algoritmos; Volume 2 – Funções e Aplicações; Volume 3 – Estatística e Probabilidade; Volume 4 – Trigonometria; Volume 5 – Geometria Plana e Espacial; Volume 6 – Matrizes e Geometria Analítica.

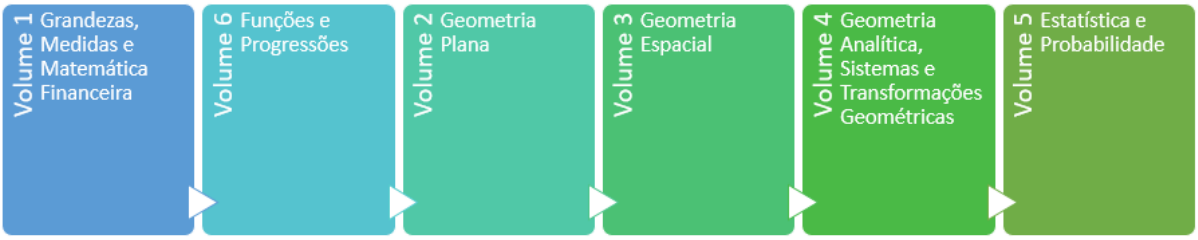
Essa coleção, ao invés de ter autores individuais, é coordenada por um único editor responsável por sua produção. Cada obra possui capítulos, que incluem tópicos, subtópicos e seções específicas, como: a) Abertura do Capítulo; b) Apresentação dos Conteúdos; c) Pensamento Computacional; d) Exercícios Complementares; e) Autoavaliação. Alguns capítulos também apresentam a seção extra: f) Compreensão de Texto. Além disso, no final do livro, há outras seções gerais, como: g) Educação Financeira; h) Pesquisa e Ação; i) Ampliando os Conhecimentos; j) Respostas; k) Referências Bibliográficas.

O manual do professor possui a mesma estrutura da obra, acrescida, no início, por um Guia para o Professor, dividido em duas partes: geral e específica. Ambas visam apresentar particularidades da estrutura da obra e oferecer orientações didáticas. Além disso, ao final dessa parte, existe uma seção que descreve o processo resolutivo para cada questão apresentada no livro adotado.

Na pré-análise, foi identificado que apenas a obra “Conexões - Matemática e suas tecnologias, volume 1 - Grandezas, Álgebra e Algoritmos” atende aos critérios específicos de escolha e, portanto, foi codificada como LDM1.

O próximo conjunto de livros também é da editora Moderna e faz parte da coleção “Diálogo”. Essa coleção é composta pelos seguintes volumes na área de Matemática e suas Tecnologias: Volume 1 - Grandezas, Medidas e Matemática Financeira; Volume 2 - Geometria Plana; Volume 3 - Geometria Espacial; Volume 4 - Geometria Analítica, Sistemas e Transformações Geométricas; Volume 5 - Estatística e Probabilidade; Volume 6 - Funções e Progressões. A Figura 18 ilustra o esquema dessa organização.

Figura 15 – Esquema da organização da coleção LDM2



Fonte: Pesquisador (2023)

Observando a Figura 18, percebe-se que a ordem dos volumes da coleção “Diálogo” difere da organização sugerida no Manual do Professor, onde o Volume 6 é indicado para o segundo semestre do primeiro ano do Ensino Médio. Além disso, todos os exemplares estão sob a responsabilidade de uma editora, ao invés de autoras/es.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por temas, que, por sua vez, apresentam tópicos, subtópicos e as seguintes seções específicas: a) Abertura; b) Exercícios e Problemas Resolvidos; c) Resolvendo por Etapas; d)

Exercícios e problemas. Alguns temas ainda incluem seções extras: e) Acessando Tecnologias e; f) Ser Consciente. Ao final do livro, encontram-se as seções gerais: g) Ampliando seus Conhecimentos; h) Respostas; i) Referências Bibliográficas; j) Lista de Siglas.

O manual do professor possui a mesma estrutura mencionada, acrescida, no início, de um Suplemento para o Professor, que busca oferecer suporte teórico e metodológico para auxiliá-los em sua prática docente em sala de aula, bem como em outras atividades relacionadas. Essa parte também apresenta uma seção com o processo resolutivo para cada questão apresentada no livro adotado.

Na pré-análise, constatou-se que nenhum volume dessa coleção atende aos critérios de escolha planejados. No entanto, isso não implica que a coleção não aborde o conteúdo em questão, buscando desenvolver a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018) em seus exemplares.

Em seguida, foram analisados os livros que fazem parte da coleção “Interação” da editora do Brasil S.A. Essa coleção é composta pelos seguintes volumes na área da Matemática e suas Tecnologias: Vol. 1 – O Tratamento da Informação e a Resolução de Problemas por meio da Função do 1º Grau; Vol. 2 – As Unidades de Medida e a Resolução de Problemas por meio da Função do 2º Grau; Vol. 3 – A Matemática Financeira e a Resolução de Problemas por meio das Funções Exponencial e Logarítmica; Vol. 4 – A Estatística e a Resolução de Problemas por meio de Análise Combinatória e Probabilidade; Vol. 5 – A Resolução de Problemas por meio da Geometria Plana e da Trigonometria; Vol. 6 – A Resolução de Problemas por meio da Geometria Espacial.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por unidade, que, por sua vez, são estruturadas em capítulos, tópicos e subtópicos, apresentando as seguintes seções específicas: a) Abertura; b) Para Explorar; c) Para Pensar e Discutir; d) Atividades; e) Análise e Contexto. Alguns capítulos também incluem as seguintes seções especiais: f) Aproveitando a oportunidade; g) Atividades Finais. Ao final do livro, encontram-se as seções gerais: h) Conexões e Projetos; i) Caixa de Ferramentas; j) Gabarito; k) Competências gerais da BNCC; l) Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC; m) Referências; n) Referências complementares.

O manual do professor é composto por essa estrutura mencionada, acrescida, no início, de uma parte denominada “Manual do Professor”, dividida em duas partes: geral e específica. A primeira aborda os aspectos gerais da coleção de acordo com as orientações da BNCC (BRASIL, 2018). A outra foca na parte específica de cada livro, revelando os objetivos, justificativa, conexões com outras áreas de conhecimento, temas transversais abordados e o cronograma. Além disso, apresenta soluções para cada problema e exercício exposto no livro adotado.

Na pré-análise, constatou-se que a única obra que atende aos critérios de escolha estipulados é denominada “Interação Matemática, volume 1 – O Tratamento da Informação e a Resolução de Problemas por meio da Função do 1º grau”. Esse exemplar, por fazer parte da terceira coleção analisada, foi codificado como LDM3.

Prosseguindo, o próximo conjunto de livros analisado faz parte da coleção “Matemática em Contexto” da editora Ática, específica para a área da Matemática e suas Tecnologias. Essa coleção é composta pelos seguintes volumes: Vol. 1 – Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequências; Vol. 2 – Função Afim e Função Quadrática; Vol. 3 – Geometria Plana e Geometria Espacial; Vol. 4 – Trigonometria e Sistemas Lineares; Vol. 5 – Análise Combinatória, Probabilidade e Computação; Vol. 6 – Estatística e Matemática Financeira.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por temas, que, por sua vez, são estruturados pelas seguintes seções específicas: a) Abertura; b) Conheça o Capítulo; c) Situações; d) Explore para Descobrir; e) Atividade Resolvida; f) Atividades. Alguns capítulos ainda contêm as seguintes seções extras: g) Tecnologias Digitais; h) Conexões; i) Leitura e Compreensão; j) Vestibulares e Enem; k) Além da Sala de Aula. Ao final do livro, encontram-se as seções gerais: l) Respostas; m) Lista de Siglas das Atividades; n) Questões Extraídas de Provas Oficiais; o) A Base Nacional Comum Curricular (BNCC); p) Referências bibliográficas comentadas.

O manual do professor é composto por essa estrutura mencionada, acrescida, no final do exemplar, por um “Manual do Professor”, dividido em três partes: orientações gerais, que visa introduzir um aspecto geral da BNCC (BRASIL, 2018) e do Novo Ensino Médio no contexto do ensino de Matemática; orientações específicas, objetiva apresentar as particularidades da obra adotada, expondo, ao final, uma seção para descrever um processo resolutivo para cada questão introduzida no volume adotado; e, por fim, as referências bibliográficas comentadas, com a expectativa de criar e impulsionar algumas matérias interessantes que colaboram para o processo de ensino e aprendizagem.

Na pré-análise, a única obra que atende aos critérios de escolha estabelecidos é a denominada “Matemática em Contexto, volume 2 – Função Afim e Função Quadrática”. Esse exemplar, por fazer parte da quarta coleção analisada, foi codificado como LDM4.

Continuando, foi analisado o conjunto de livros que faz parte da coleção “Matemática Interligada” da editora Scipione, também específica para a área da Matemática e suas Tecnologias, composta pelos seguintes volumes: Vol. 1 – Função Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica; Vol. 2 – Trigonometria, Fenômenos Periódicos e Programação; Vol. 3 – Grandezas, Sequências e Matemática Financeira; Vol. 4 – Matrizes, Sistemas Lineares e Geometria Analítica; Vol. 5 – Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade; Vol. 6 – Geometria Espacial e Plana.

Conforme a organização da obra, esses volumes são autocontidos e não sequenciais, ou seja, cada exemplar apresenta todos os conteúdos imprescindíveis para a compreensão dos estudantes, de modo que não seja necessário retomar conteúdos abordados em outros volumes.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por capítulos que, por sua vez, além de conter tópicos e subtópicos, são estruturados pelas seguintes seções específicas: a) Abertura do Capítulo; b) Conversando; c) Problemas e Exercícios Resolvidos; d) Explorando Problemas; e) Problemas e Exercícios Propostos; f) Finalizando a Conversa. Alguns capítulos ainda têm as seguintes seções extras: g) Acesso Digital; h) Saiba Mais; i) Conectando Ideias. Ao final do livro, encontram-se as seções gerais: j) Respostas; k) Sugestões de Leitura para o Aluno; l) Bibliografia; m) Siglas.

O manual do professor é composto por essa estrutura mencionada, acrescida, no final de cada volume, de uma Assessoria Pedagógica que aborda o Ensino Médio e essa coleção, sugestões de cronograma, painel do volume, sugestões de aprofundamento, orientações sobre os capítulos e páginas para reprodução e resolução de problemas e exercícios propostos.

Na pré-análise, a única obra que atende aos critérios de escolha estabelecidos é a denominada “Matemática Interligada, volume 1 – Função Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica”. Esse exemplar, por fazer parte da quinta coleção analisada, foi codificado como LDM5.

Após a coleção “Matemática Interligada”, foi analisado o conjunto de livros que faz parte da coleção “Matemática nos dias de hoje”. Essa coleção também é específica para a área da Matemática e suas Tecnologias, composta pelos seguintes volumes: Vol. 1 – Funções; Vol. 2 – Matemática Financeira e Álgebra; Vol. 3 – Geometria e Álgebra; Vol. 4 – Medidas e Geometria; Vol. 5 – Probabilidade e Estatística; Vol. 6 – Algoritmo e Álgebra.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por capítulos que, por sua vez, além de conter tópicos e subtópicos, são estruturados pelas seguintes seções específicas: a) Trajetórias (rumos, arredores e contatos); b) Espelhos; c) Exercícios; d) No Entorno; h) Híbridos; i) Travessias; Estratégias; Nuvens. Alguns capítulos ainda têm as seguintes seções extras: i) Retornos; Autoavaliação. No final do livro, ainda tem as seções gerais: j) Banco de Questões; Referências Bibliográficas; Referências Complementares.

O manual do professor é composto por essa estrutura mencionada, acrescida, no início, de um Manual do Professor dividido em três partes, cada uma com suas peculiaridades. A primeira trata dos aspectos estruturais da coleção, adequações e pertinências às ações do professor. A próxima, apresenta objetivos, justificativas, competências e habilidades de cada exemplar. E, por fim, contém comentários e soluções detalhadas dos problemas, atividades e exercícios, além de sugestões de avaliações.

Novamente, na pré-análise, nenhum volume atende aos critérios de escolha estabelecidos. Isso não quer dizer que a coleção não aborda o conteúdo em questão numa tentativa de desenvolver a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018).

Após a coleção “Matemática nos dias de hoje”, foi analisado o conjunto de livros que faz parte da coleção “Multiversos” da editora FTD. Essa coleção é composta pelos seguintes volumes na área da Matemática e suas Tecnologias: Vol. 1 – Conjuntos e Função Afim; Vol. 2 – Funções e suas Aplicações; Vol. 3 – Sequências e

Trigonometria; Vol. 4 – Matemática Financeira, Gráficos e Sistemas; Vol. 5 – Geometria; Vol. 6 – Estatística e Probabilidade.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por unidades que, por sua vez, além de estarem estruturados por tópicos e subtópicos, apresentam as seguintes seções específicas: a) Abertura de Unidade; b) BNCC; c) Atividades Resolvidas; d) Atividades; e) Integrando; f) Você Conectado; g) O que Estudei. No final do livro, ainda tem as seções gerais: h) + Atividades; i) Respostas das atividades; j) Base Nacional Comum Curricular; k) Bibliografia comentada; m) Siglas de vestibulares.

O manual do professor é composto por essa estrutura mencionada, acrescida, no final, de uma parte denominada Orientações para o Professor, na qual estão incluídos elementos para a utilização do exemplar, textos sobre as novas tendências educacionais e propostas avaliativas para o ensino de Matemática. Além disso, apresenta também uma seção com um processo resolutivo para cada questão enunciada no exemplar adotado.

Contudo, na pré-análise, nenhuma das seis obras atende aos critérios de escolha estabelecidos. Novamente frisa-se que tal fato não quer dizer que a coleção não aborda o conteúdo em questão numa tentativa de desenvolver a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018)

Após a coleção “Multiversos”, foi analisado o conjunto de livros que faz parte da coleção “Prisma” da editora FTD. Essa coleção é composta pelos seguintes volumes na área da Matemática e suas Tecnologias: Vol. 1 – Conjuntos e Funções; Vol. 2 – Funções e Progressões; Vol. 3 – Geometria e Trigonometria; Vol. 4 – Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas; Vol. 5 – Geometria; Vol. 6 – Estatística, Combinatória e Probabilidade.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por capítulos que, por sua vez, além de conterem tópicos e subtópicos dos conceitos matemáticos, são estruturados também pelas seguintes seções específicas: a) Abertura de Capítulo; b) Atividades Resolvidas; c) Atividades; d) Fórum. Alguns capítulos ainda têm as seguintes seções extras: e) História da Matemática; f) Explorando as Tecnologias; g) Conexões; h) Atividades Complementares; i) Para Refletir. No final do livro, ainda tem as seguintes seções gerais: j) Respostas das Atividades; k) Base Nacional Comum Curricular; l) Bibliografia Comentada; m) Siglas de Vestibulares.

O manual do professor é composto por essa citada estrutura, acrescida também no final por uma parte denominada de Orientações para o Professor, na qual são apresentadas discussões sobre o conteúdo e método de ensino para a sala de aula, além de leituras complementares para o desenvolvimento da formação docente. Além disso, expõe também uma seção com um processo resolutivo para cada questão enunciada no exemplar adotado.

Na pré-análise, a única obra que atende aos critérios de escolha estabelecidos é a denominada “Prisma – Matemática, volume 2 – Funções e Progressões”. Esse exemplar por fazer parte da oitava coleção analisada foi codificado aqui como LDM8.

Após a coleção “Prisma”, foi analisado o conjunto de livros da editora SM que faz parte da coleção “Quadrante”. Essa coleção é composta pelos seguintes volumes na área da Matemática e suas Tecnologias: Vol. 1 – Funções; Vol. 2 – Trigonometria e Sequências; Vol. 3 – Estatística, Probabilidade e Matemática Financeira; Vol. 4 – Geometria Plana e Espacial; Vol. 5 – Sistemas Lineares e Geometria Analítica; Vol. 6 – Grandezas, Medidas e Programação.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por capítulos que, por sua vez, além de conterem tópicos e subtópicos dos conceitos matemáticos, estão estruturados também pelas seguintes seções específicas: a) Abertura de Capítulo; b) Tarefas Resolvidas; c) Tarefas; d) Verificando a Rota. Alguns capítulos ainda têm as seguintes seções especiais: e) Passo a Passo; f) Valores em Ação; g) Matemática a+; h) Ampliando Fronteiras. No final do livro, ainda tem as seguintes seções gerais: i) Ferramentas; j) Leitura e Pesquisa; k) Gabarito; l) Siglas; m) Referências Bibliográficas.

O manual do professor é composto por essa citada estrutura, acrescida também no final por uma parte denominada de Orientações para o Professor, na qual é apresentado um panorama a respeito da organização e das seções dessa coleção, além de textos e sugestões de bibliografia para a formação continuada. Também são exibidos alguns comentários e sugestões numa perspectiva de fomentar as ideias de como enriquecer os tópicos de conteúdo, de tarefas e das demais seções do livro do estudante. O manual disponibiliza também algumas demonstrações adicionais à teoria, as resoluções referentes a todas as tarefas do livro do estudante e às constantes nas tarefas complementares, além de páginas para reprodução.

Entretanto, na pré-análise, nenhuma das seis obras atende aos critérios de escolha planejados. Novamente, frisa-se que tal fato não quer dizer que a coleção não aborda o conteúdo em questão numa tentativa de desenvolver a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018).

Após a coleção “Quadrante”, foi analisado outro conjunto de livros da editora SM que faz parte da coleção “Ser Protagonista”. Essa coleção é composta pelos seguintes volumes na área da Matemática e suas Tecnologias: Vol. 1 – Números e Álgebra; Vol. 2 – Álgebra e Educação Financeira; Vol. 3 – Grandezas e Medidas e Trigonometria; Vol. 4 – Geometria Plana e Espacial; Vol. 5 – Estatística e Probabilidade; Vol. 6 – Pensamento Computacional e Fluxogramas.

Os conteúdos de cada volume dessa coleção estão organizados por unidades que, por sua vez, além de terem capítulos, tópicos e subtópicos dos conceitos matemáticos, estão estruturados também pelas seguintes seções específicas: a) Abertura; b) Desenvolvimento do Conteúdo; c) Problemas e Exercícios Resolvidos; d) Problemas e Exercícios Propostos; e) Tecnologias; f) Cálculo Rápido. Alguns capítulos ainda têm as seguintes seções especiais: g) Matemática e ...; h) Por dentro do Enem e dos Vestibulares. No final do livro, ainda tem as seguintes seções gerais: i) Lista de Siglas; j) Bibliografia Comentada.

O manual do professor é composto por essa citada estrutura, acrescida também no final por uma parte denominada Manual do Professor, que está dividido em três partes, além de uma bibliografia comentada. A primeira parte trata das orientações gerais da coleção. A segunda está relacionada à organização das unidades abordadas. E, por fim, a terceira e última parte expõe as resoluções comentadas das atividades do exemplar adotado.

Na pré-análise, a única obra que atende aos critérios das escolhas planejadas é a denominada Ser Protagonista – Matemática e suas tecnologias, volume 1 – Números e Álgebra. Esse exemplar por fazer parte da décima coleção analisada foi codificado aqui de LDM10.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A análise e discussão dos dados apresentados neste capítulo estão direcionados a seis obras aprovadas no PNLD 2021 – Objeto 2, que atenderam aos critérios de escolha desta pesquisa. Assim, foi investigado um exemplar de cada coleção. Nessa linha de pensamento, foram elencadas algumas características observadas em cada volume, tanto do ponto de vista da abordagem do conteúdo matemático quanto dos métodos de ensino e aprendizagem adotados nas questões que exploram o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018).

De forma geral, buscou-se descrever uma análise das opções pedagógicas predominantes em cada exemplar, de acordo com as ideias de D'Ambrósio (1996, 2005 e 2012), em relação ao processo de contextualização do ensino de Matemática. Além disso, buscou-se investigar os seguintes aspectos: apresentação e desenvolvimento dos procedimentos explicativos; conduta esperada do estudante nesse processo; desenvolvimento das competências gerais; desenvolvimento das competências específicas da área da Matemática e suas Tecnologias; sinalização de conhecimentos prévios; entrelaçamentos de características pedagógicas ou abstratas da habilidade supracitada. Pretendeu-se, também, descrever o uso de recursos didáticos, principalmente os relacionados às novas tecnologias digitais.

Conforme D'Ambrósio (2012, p. 109) enfatiza, "[...] o grande desafio que se encontra na educação é justamente sermos capazes de interpretar as capacidades e a própria ação cognitiva não da forma linear, estável e contínua que caracteriza as práticas educacionais mais correntes". Nesse sentido, além das informações do parágrafo anterior, foram analisados e avaliados como os conteúdos matemáticos são significados por meio de conexões com a prática social contemporânea e outras áreas do conhecimento, conforme elencados pela referida base. Também foi investigado em que medida o volume sugere temas e atividades que promovem atitudes e valores importantes para o exercício da cidadania, relacionados ao objeto de pesquisa em questão.

Diante desse contexto, foi possível encontrar em nossa investigação dois aspectos distintos nas tarefas dos LDM: o aspecto técnico e repetitivo, e o aspecto reflexivo. Cada um desses traz características diferentes para a abordagem das atividades.

No aspecto técnico e repetitivo, as atividades envolvem a aplicação direta de conhecimentos e procedimentos já estabelecidos. Elas são executadas de forma sistemática e repetitiva, seguindo um conjunto de passos pré-determinados. Nesse caso, o foco principal está na prática e na aquisição de habilidades específicas. As tarefas desse perfil têm uma natureza mais estruturada e padronizada, visando principalmente a repetição e o aprimoramento de técnicas.

Por outro lado, no aspecto reflexivo, as atividades exigem uma reflexão mais profunda e uma abordagem crítica. Elas estimulam a análise, a interpretação e a tomada de decisões com base em critérios específicos. Esse aspecto se aproxima das características de uma situação-problema defendida por Meirieu (1998), pois demanda que o indivíduo enfrente desafios, busque soluções inovadoras e reflita sobre as possibilidades existentes. Além disso, as atividades reflexivas estimulam a criatividade, o pensamento crítico e a resolução de problemas complexos.

É importante ressaltar que, no que se refere ao objeto de estudo desta pesquisa, os livros didáticos analisados demonstram convergência com as ideias apresentadas por Santos e Carneiro (2013). Ou seja, eles desempenham as utilidades de informação, estruturação e organização da aprendizagem, além de atuarem como guias do estudante no processo de apreensão do mundo exterior.

Esses exemplares estão compostos de informações relevantes, explicações claras e contextualizadas, oferecendo uma estrutura que auxilia os estudantes na compreensão do conteúdo, com possibilidades reflexivas sobre os múltiplos aspectos da realidade, estimulando a capacidade investigativa e contribuindo para a ampliação do conhecimento. Esses aspectos estão alinhados com a perspectiva de Oliveira (2021).

Para uma melhor compreensão dessa análise, decidimos dividir este capítulo nesta parte introdutória e mais seis seções. Essas seções apresentam detalhadamente os resultados obtidos a partir da investigação de cada LDM selecionado neste estudo, fornecendo uma análise explicativa e fundamentada sobre como esses materiais abordam o tema das Funções definidas por mais de uma sentença.

4.1 LDM1

Será realizada uma análise e discussão do LDM1, sendo que suas principais características de identificação estão apresentadas no Quadro 3, logo abaixo. Os conteúdos deste volume são apresentados em quatro capítulos que, por sua vez, combinam seções, imagens, exemplos, tarefas, ícones e caixas de informações sobre diversos temas.

Quadro 3 – Identificação do LDM1

Código da Coleção	**Ilustração da Capa do Livro**
0193P21202	
Código do Volume	
0193P21202133IL	
Título	
Conexões – matemática e suas tecnologias	
Subtítulo	
Grandezas, álgebra e algoritmos	
Editor Responsável	
Fabio Martins de Leonardo	
Outras Informações	
1. ed. – São Paulo: Moderna, 2020	

Fonte: Pesquisador (2023)

Durante a análise desta seção do LDM1, observou-se que são apresentadas situações contextualizadas e interdisciplinares que possibilitam a conexão entre conceitos matemáticos e dados do cotidiano, bem como de outras áreas do conhecimento. Além disso, são abordados métodos do pensamento computacional para a resolução das tarefas propostas. Assim, é evidente que os procedimentos explicativos utilizados neste exemplar buscam estimular nos estudantes o desenvolvimento investigativo dos conceitos relacionados às Funções definidas por mais de uma sentença, com foco na interpretação da realidade e em possíveis aplicações na vida cotidiana. Essa abordagem oportuniza a aplicação de técnicas e estratégias para lidar com situações reais, vivenciadas pelos estudantes.

Nesta análise, foi possível constatar que as abordagens adotadas visam desenvolver as competências gerais 2, 3 e 5, bem como as competências específicas 3, 4 e 5, conforme estabelecido pela BNCC (BRASIL, 2018). Convém realçar que, nessa parte analisada, são apresentadas atividades interligadas à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, proporcionando o desenvolvimento das competências específicas elencadas pela referida base para essa área do conhecimento.

Já no Capítulo 3 – Funções, foram encontrados diferentes aspectos que desenvolveram a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), sobretudo no Tópico 5 – Funções definidas por mais de uma sentença. Diante disso, no Quadro 4 foram elencados os principais conceitos matemáticos abordados e as habilidades específicas da área da Matemática e suas Tecnologias, explorada nessa parte do livro.

Ao analisar o Manual do Professor do LDM1, constatou-se que, em relação ao objetivo de pesquisa, o Capítulo 2 – Conjuntos, informa que irá desenvolver a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018). No entanto, não foram encontrados aspectos pedagógicos e abstratos que abordam explicitamente essa possibilidade nessa parte do livro. Por outro lado, no Capítulo 3 – Funções, foram identificados diferentes aspectos que contribuem para o desenvolvimento da mencionada habilidade, especialmente no Tópico 5 – Funções definidas por mais de uma sentença.

Nesse sentido, o Quadro 4 apresenta os principais conceitos matemáticos abordados e as habilidades específicas da área da Matemática e suas Tecnologias exploradas nessa parte do livro.

Quadro 4 – Conteúdo programático do LDM1

Capítulo	Tópicos	Subtópicos	Habilidades
3. Funções	1. Conceito de função	1.1. A ideia de função no cotidiano 1.2. Definição de função; 1.3. Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função; 1.4. Zero de uma função.	• EM13MAT101 • EM13MAT302 • EM13MAT401 • EM13MAT402 • EM13MAT404 • EM13MAT501
	2. Gráfico de uma função	2.1. Plano cartesiano; 2.2. Construção do gráfico de uma função.	
	3. Análise gráficos de funções	3.1. Intervalos de crescimento e de decrescimento; 3.2. Valor máximo e valor mínimo de uma função; 3.3. Estudo do sinal de uma função; 3.4. Translação do gráfico de uma função.	
	4. Função polinomial	----------------------------	
	5. Funções definidas por mais de uma sentença	----------------------------	
	6. Função Inversa	----------------------------	

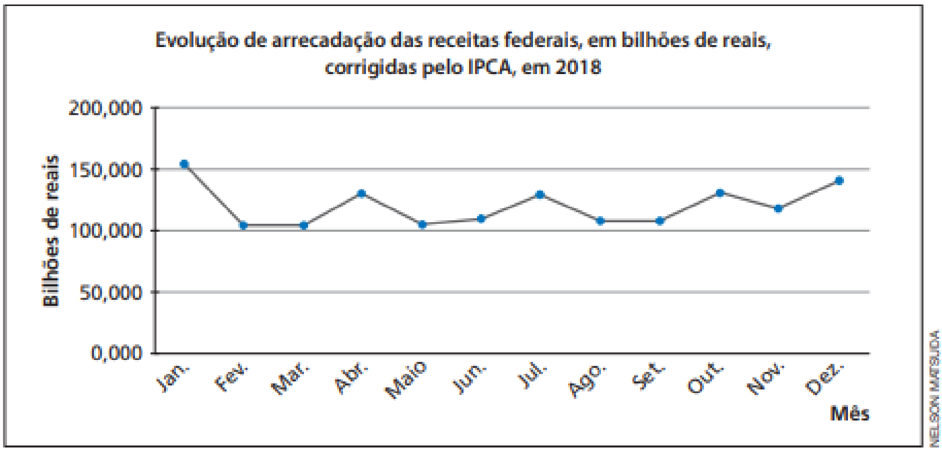
Fonte: Pesquisador (2023)

A primeira abordagem que evidencia o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença está no Tópico 2 – Gráfico de uma função. Assim, por meio da exploração gráfica revela o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) em exemplo e os focos de incêndio nas florestas em outro. Desse jeito, tem se a representação gráfica sendo usada para contextualizar o ensino de Matemática de forma intuitiva por modelos de situações reais. O Quadro 5, a seguir, ilustra a situação do IPCA.

A primeira abordagem que evidencia o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença ocorre no Tópico 2 – Gráfico de uma função. Por meio da exploração gráfica, são apresentados exemplos do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) e dos focos de incêndio nas florestas. Dessa forma, a representação gráfica é utilizada para contextualizar o ensino de Matemática de forma intuitiva, por meio de modelos de situações reais. O Quadro 5, a seguir, ilustra a situação do IPCA.

Quadro 5 – Apresentação do exemplo do IPCA

<table>
<tr><td>Informação</td><td>No exemplo a seguir, tem-se um tipo de gráfico que é constituído apenas pelos pontos destacados em azul. Traçamos a linha de segmentos que unem esses pontos para facilitar a leitura da variação dos valores da função.</td></tr>
<tr><td>Representação Gráfica</td><td>



Dados obtidos em: http://receita.economia.gov.br/dados/receitadata/arrecadacao/relatorios-doresultado-da-arrecadacao/arrecadacao-2018/dezembro2018/apresentacao-arrecadacao-dez-2018.pdf. Acesso em: 15 jul. 2020.</td></tr>
<tr><td>Abstração</td><td>Observando o gráfico, podemos concluir que a arrecadação cresceu de fevereiro a abril, de maio a julho, de agosto a outubro e de novembro a dezembro.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM1 (2020, p. 65)

Essa forma de abordagem, apresentada no Quadro 5, possibilita o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018). Essa proposta também está presente nesse tópico, na seção “Exercício proposto”, na questão 18, ao ilustrar uma situação gráfica da evolução da quantidade de voos no período de 2008 a 2017. Além disso, no Subtópico 2.2 – Construção do gráfico de uma função, é exibido o gráfico de uma Função modular (Gráfico 3), explorando a visualização gráfica dos intervalos e estabelecendo a correspondência entre os intervalos e os elementos do domínio e imagem da função.

No Tópico 3 – Análise de gráficos de funções, mais especificamente no Subtópico 3.1 – Intervalos de crescimento e de decrescimento, são apresentados dois gráficos no mesmo plano, que representam Funções definidas por mais de uma sentença, para analisar a situação do abandono escolar no Ensino Médio nas regiões Centro-Oeste e Sudeste. Novamente, a representação gráfica é utilizada para contextualizar o ensino de Matemática de forma intuitiva, por meio de modelos de situações reais.

Ainda nesse tópico, na seção “Exercícios resolvidos”, na questão R8, temos uma atividade que utiliza o gráfico de uma Função definida por mais de uma sentença para explorar a visualização gráfica dos intervalos no processo de crescimento, decrescimento e constantes da função. Já na seção “Apresentação do conteúdo” do Subtópico 3.2 – Valor máximo e valor mínimo de uma função, temos outro gráfico desse tipo de aplicação para abordar os pontos extremos também por meio da visualização gráfica dos pontos. Esses tipos de explorações também estão presentes nas questões 26, 28, 29 e 32 nas seções dos “Exercícios Propostos”.

A questão 34 da seção “Exercício proposto” apresenta um gráfico que modela uma situação envolvendo o nome de uma pessoa do sexo masculino nascido no período de 1930 a 2000. Dessa forma, temos a contextualização do comportamento gráfico (crescimento, decrescimento, estabilidade e extremos). É importante frisar que até aqui as Funções definidas por mais de uma sentença são utilizadas graficamente sem a sua formalização.

No Tópico 5 – Funções definidas por mais de uma sentença, é apresentada a temática em questão de forma intuitiva, acompanhada, logo em seguida, por uma contextualização. Nesse sentido, é exibida uma tabela sobre a incidência mensal do Imposto de Renda Pessoa Física (IRPF) para descrever um modelo matemático sobre essa situação. Essa abordagem evidencia que as práticas sociais são exploradas inicialmente para contextualizar os conteúdos matemáticos, utilizando tabelas que, posteriormente, são convertidas em expressões algébricas.

O Quadro 6, a seguir, ilustra a exemplificação mencionada com a inclusão da formalização da Função definida por mais de uma sentença no LDM1. Assim, observa-se que esse livro utiliza a tabela do IRPF como base, fornecendo informações relevantes sobre as faixas de renda e as alíquotas de imposto correspondentes. Essa análise permite aos estudantes compreender como a base de cálculo do imposto afeta a contribuição mensal, estabelecendo uma relação clara entre a variável independente (base de cálculo) e a variável dependente (contribuição mensal). A representação algébrica dessa função é apresentada, destacando que diferentes sentenças são utilizadas para diferentes intervalos de valores.

Quadro 6 – Formalização do conceito segundo LDM1

<table>
<tr><td>Informação</td><td>Para saber qual é o imposto de renda (y) de uma pessoa física, aplicamos à renda mensal (x) os cálculos definidos pela tabela estabelecida pelo governo. Veja a tabela para o exercício do ano de 2019.</td></tr>
<tr><td>Tabela</td><td>
<table>
<tr><th colspan="3">Incidência mensal de Imposto de Renda de Pessoa Física</th></tr>
<tr><th>Base de cálculo (em reais)</th><th>Alíquota (em %)</th><th>Parcela a deduzir do imposto (em reais)</th></tr>
<tr><td>Até 1.903,98</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>De 1.903,99 até 2.826,65</td><td>7,5</td><td>142,80</td></tr>
<tr><td>De 2.826,66 até 3.751,05</td><td>15,0</td><td>354,80</td></tr>
<tr><td>De 3.751,06 até 4.664,68</td><td>22,5</td><td>636,13</td></tr>
<tr><td>Acima de 4.664,68</td><td>27,5</td><td>869,36</td></tr>
</table>
Fonte: Ministério da Economia. Disponível em: http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica. Acesso em: 15 jul. 2020.
</td></tr>
<tr><td>Abstrações e Processo Resolutivo</td><td>Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual a $R\$ \ 1.500,00$, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual, por exemplo, a $R\$ \ 3.000,00$, o imposto y a pagar é: $y = 3.000,00 \cdot 0,15 - 354,80 = 450,00 - 354,80 = 95,20$. Logo, o imposto mensal a pagar é $R\$ \ 95,20$.</td></tr>
<tr><td>Formalização</td><td>Podemos escrever matematicamente essa situação por uma função, com domínio em um subconjunto dos números reais não negativos, dada por mais de uma sentença. Veja.</td></tr>
<tr><td>Representação Algébrica</td><td>$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ 0 < x \leq 1.903,98 \\ 0,075 \cdot x - 142,80, se\ 1.903,98 < x \leq 2.826,65 \\ 0,15 \cdot x - 354,80, se\ 2.8226,65 < x \leq 3.751,05 \\ 0,225 \cdot x - 636,13, se\ 3.751,05 < x \leq 4.664,68 \\ 0,275 \cdot x - 869,36, se\ x > 4.664,68 \end{cases}$$</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM1 (2020, p. 82-83)

Nota-se que, para que essa abordagem seja mais completa e esteja ainda mais alinhada com a ideia de generalização proposta por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), o LDM1 deveria fornecer uma explicação mais detalhada sobre como as diferentes leis de formação das funções estão relacionadas aos diferentes trechos do domínio. Desse jeito, seria enriquecedor estabelecer uma conexão mais explícita entre os dados apresentados nas tabelas e a formulação das expressões algébricas.

Além disso, para que essa abordagem proporcione aos estudantes uma compreensão mais clara da transição da contextualização para a formalização matemática, seria interessante que o LDM1 aprimorasse a sequência de apresentação, dando uma maior ênfase na relação entre as práticas sociais e as expressões algébricas. Isso poderia ser realizado por meio de uma análise mais detalhada dos padrões observados nos dados e da identificação dos elementos comuns nas diferentes partes da função.

É importante notar que a formalização das Funções definidas por mais de uma sentença no LDM1 contempla alguns dos aspectos mencionados na habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018). Embora a abordagem não se preocupe com o rigor matemático, ela se concentra na explanação das informações e dados da tabela, fornecendo exemplos e abstrações para destacar um modelo matemático algébrico que descreve a situação analisada.

Embora essa parte do exemplar não se preocupe em seguir um rigor matemático, a abordagem prioriza a explanação das informações e dados da tabela, utilizando exemplos e abstrações para destacar um modelo matemático algébrico que descreve a situação analisada. Diante disso, é perceptível que a formalização das Funções definidas por mais de uma sentença no LDM1 aborda parcialmente os aspectos mencionados na habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018).

Dando continuidade à análise do LDM1, em relação à temática desta pesquisa nesse tópico, observamos que esse volume apresenta outro exemplo que aborda a lei de formação e a visualização gráfica de uma Função definida por duas sentenças algébricas para explorar intervalos e pontos. Além disso, a questão da seção “Exercício resolvido”, questão R11, apresenta uma lei de formação definida com duas sentenças para investigar o processo de transformação numérica.

Na seção “Exercícios propostos”, a questão 37 utiliza a lei de formação e a visualização gráfica para estudar alguns intervalos e pontos. Já a questão 38 aborda uma situação problema relacionada às vendas de uma fábrica de bicicletas, contextualizando o ensino de Matemática e explorando a lei de formação que modela o problema, contribuindo para o processo de transformação numérica. Por outro lado, a questão 39 utiliza apenas a representação algébrica definida com duas sentenças para abordar o mencionado processo.

Nota-se que na seção “Exercícios complementares”, as questões 3 e 4 abordam a visualização gráfica de uma função que pode ser representada algebricamente por uma Função definida por mais de uma sentença. Já a questão 6 utiliza uma lei de formação de uma aplicação definida por três sentenças para explorar aspectos como sinal, crescimento, decrescimento, estabilidade e zeros da função. Por outro lado, as questões 5 e 7 contextualizam o ensino de Matemática com situações-problema do cotidiano, utilizando também a representação gráfica. A questão 7 apresenta o gráfico de uma função por saltos, possibilitando a abordagem da ideia de descontinuidade da aplicação com o estudante.

Na questão 1 da seção “Autoavaliação”, é apresentada uma situação-problema relacionada ao consumo de água na casa de um homem. Nesse momento, o ensino é contextualizado com o uso de tabelas, possibilitando que o estudante compreenda que o conteúdo escolar está presente em suas ações práticas. Já a questão 5 dessa mesma seção aborda uma função definida por três sentenças, investigando sua representação gráfica por meio da sua lei de formação.

Observa-se que na seção “Compreensão de texto”, é apresentado um relato descritivo sobre o abastecimento hídrico, acompanhado de um gráfico sobre o índice armazenado no Sistema Cantareira, que pode ser utilizado para analisar o ensino de Funções definidas por mais de uma sentença de forma contextualizada.

Por fim, é importante destacar que na parte do Guia para o professor, mais precisamente nos tópicos de Avaliação 1 e 2, existem duas questões, sendo a Q1 e Q4, que utilizam os gráficos das Funções definidas por mais de uma sentença para explorar a abstração dos dados. Essas questões são provenientes do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e são apresentadas na forma de situações-problema.

De forma geral, na parte analisada desse volume, foi possível observar uma abordagem explicativa direcionada para uma performance social de contextos comunitários, com ênfase na investigação e colaboração para o uso de estratégias resolutivas em situações do cotidiano. Essa parte investigada contribui para o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), possibilitando aos estudantes a aplicação de técnicas e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos. Além disso, permite a compreensão e utilização de diferentes representações matemáticas para explorar o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, mantendo-se atenta aos aspectos pedagógicos e abstratos do conteúdo de Função. Ademais, essa abordagem contempla as competências gerais e específicas, tanto da área de Matemática e suas Tecnologias como de outras áreas do conhecimento da referida base.

Embora a parte investigada evidencie a contextualização do ensino de Funções definidas por mais de uma sentença, com a presença de abordagens que favorecem temáticas da área de Educação Financeira e Educação Ambiental, o volume contém uma quantidade significativa de tarefas que tem um aspecto técnico e repetitivo. Além disso, não apresenta a introdução de tecnologia digital na exploração do conteúdo supracitado.

Nessa análise, foi possível constatar que os/as autores/as desse exemplar buscam um ritmo de aprendizagem com a inclusão de ideias e recursos metodológicos atuais. Assim, os objetos matemáticos analisados apresentam uma abordagem pedagógica que se aproxima de uma formação inovadora, conectada com a educação moderna, onde "[...] a matemática é parte integrante desse conhecimento e um conhecimento que dia a dia se renova e se enriquece pela experiência vivida por todos os indivíduos deste planeta" (D'AMBRÓSIO, 2002, p. 50).

4.2 LDM3

Será apresentada uma análise e discussão do LDM3, abordando suas principais características de identificação, as quais estão apresentadas no Quadro 7, logo abaixo. Os conteúdos desse volume são organizados em três unidades, com um acréscimo de uma parte que aborda algumas temáticas trabalhadas em forma de projetos. Cada unidade é subdividida em seções que são acompanhadas de imagens, boxes e infográficos contendo informações sobre diversos temas.

Quadro 7 – Identificação do LDM3

Código da Coleção	**Ilustração da Capa do Livro**
0149P21202	
Código do Volume	
0149P21202133IL	
Título	
Interação Matemática	
Subtítulo	
O tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau	
Autores	
Adilson Longen Rodrigo Morozetti Blanco	
Outras Informações	
1. ed. – São Paulo: Editora do Brasil, 2020	

Fonte: Pesquisador (2022)

Durante a análise desta parte do exemplar, é possível notar a exploração cuidadosa dos procedimentos resolutivos. O livro adota um percurso investigativo com sucessivas problematizações que permitem aos indivíduos tirar conclusões e desenvolver novos conceitos. Os procedimentos explicativos buscam contribuir para a formação dos estudantes, proporcionando reflexões sobre a utilização dos conceitos relacionados ao conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, especialmente durante a resolução de problemas que enfatizam situações reais próximas a suas vivências.

Nessa parte analisada, foi possível detectar que as abordagens buscam desenvolver as competências gerais 2, 4, 5 e 9 e as competências específicas 1, 3, 4 e 5 elencadas pela BNCC (BRASIL, 2018). Não foram encontradas menções explícitas a outras áreas do conhecimento. No entanto, o livro explora a linguagem e a representação dos objetos matemáticos, apresentando a sistematização de algumas técnicas para garantir que os estudantes dominem recursos que lhes permitam reconhecer o tipo de modelo necessário para resolver determinado problema e saber usar as técnicas adequadas para resolvê-lo. Quanto à temática desta pesquisa, ela é apresentada como um subtópico “Funções definidas por mais de uma sentença”, no Tópico 4 – Função afim, pertencente à Unidade III – Função Afim. Diante disso, no Quadro 8, são elencados os principais conceitos matemáticos abordados e as habilidades específicas da área da Matemática e suas Tecnologias exploradas nessa parte do livro.

Quadro 8 – Conteúdo programático do LDM3

<table>
<tr><th>Unidade</th><th>Tópicos</th><th>Subtópicos</th><th>Habilidades</th></tr>
<tr><td rowspan="4">3. Função Afim</td><td>1. Grandezas diretamente proporcionais</td><td>---------------------------</td><td rowspan="4">• EM13MAT101
• EM13MAT302
• EM13MAT401
• EM13MAT404
• EM13MAT501
• EM13MAT510</td></tr>
<tr><td>2. Função linear</td><td>• Características da função linear;
• Gráfico da função linear;
• Taxa de variação da função linear.</td></tr>
<tr><td>3. Função polinomial do 1º grau</td><td>• Termo independente na função do 1° grau;</td></tr>
<tr><td>4. Função afim</td><td>• Classificação de uma função afim;
• Funções definidas por mais de uma sentença.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023)

Esse Quadro 8 revela também que o conteúdo de “Funções definidas por mais de uma sentença” exige, no mínimo, o domínio dos pré-requisitos das abordagens da “Função Afim” para sua explanação. Em outras palavras, é preciso dominar os aspectos abstratos das Funções afins antes de abordar as Funções definidas por mais de uma sentença. No entanto, isso não significa que esse tipo de aplicação está limitado apenas às representações de pedaços de segmentos de retas ou semirretas.

Para adentrar na temática da pesquisa, o exemplar informa que existem diversos contextos nos quais uma função modela uma situação através da demanda de mais de uma lei de formação, de acordo com trechos do domínio. Assim, com base na leitura de um texto e na tabela do Imposto de Renda (IR), o livro apresenta as funções que definem cada faixa de imposto e, em seguida, associa-as intuitivamente a uma Função definida por mais de uma sentença, acompanhada com a representação algébrica. O Quadro 9, a seguir, ilustra a situação.

Quadro 9 – Formalização do conceito segundo LDM3

<table>
<tr><td>Informação</td><td>Como calcular o Imposto de Renda?
As bases para o cálculo do IR são muitas, de acordo com o modo pelo qual a pessoa está cadastrada no sistema da Receita Federal. A forma mais comum de cálculo do Imposto de Renda é a do trabalhador assalariado, chamada de Imposto de Renda Retido na Fonte (IRRF). Esse cálculo é feito pelo empregador, que recolhe parte do salário do funcionário e envia diretamente para a receita. Para determinar quanto do salário será retido na fonte, o cálculo é feito com base na seguinte tabela:</td></tr>
<tr><td>Tabela</td><td>
<table>
<tr><th>Base de cálculo mensal (em R$)</th><th>Alíquota</th><th>Parcela a deduzir do IR (em R$)</th></tr>
<tr><td>Até 1.903,98</td><td>isento</td><td>isento</td></tr>
<tr><td>De 1.903,99 até 2.826,65</td><td>7,50%</td><td>142,8</td></tr>
<tr><td>De 2.826,66 até 3.751,05</td><td>15%</td><td>354,8</td></tr>
<tr><td>De 3.751,06 até 4.664,68</td><td>22,50%</td><td>636,1</td></tr>
<tr><td>Acima de 4.664,68</td><td>27,50%</td><td>869,4</td></tr>
</table>
Fonte: IRRF – Imposto de Renda Retido na Fonte. Dicionário Financeiro. Disponível em: https://www.dicionariofinanceiro.com/irrf-imposto-de-renda-retido-na-fonte/. Acesso em: 23 maio 2020</td></tr>
</table>

Informações Adicionais	• A base de cálculo mensal é dada pelo valor do salário registrado, descontando-se outros impostos e taxas (por exemplo, o INSS). • A alíquota é a porcentagem do salário que formará o IR. • A parcela a deduzir é um valor a ser subtraído da alíquota.
Abstração e Processo Resolutivo	Utilizar a tabela é simples 1. Observe quanto sobra do salário após o desconto dos impostos como INSS: por exemplo, R$ 2.000,00. 2. Veja em que faixa está esse valor: R$ 2.000,00 está na segunda linha. 3. Calcule uma porcentagem desse valor de acordo com a taxa indicada na linha da tabela: olhando a segunda linha, a porcentagem é 7,5%; calculando 7,5% de R$ 2.000,00, temos R$ 150,00. 4. Subtraia do resultado o valor da parcela a deduzir observando mais uma vez a linha da tabela: olhando a segunda linha, a dedução é de R$ 142,80; fazendo 150 - 142,8 = 7,2, conclui-se que alguém que recebe R$ 2.000,00 como salário-base terá R$ 7,20 retidos na fonte no momento do recebimento do salário.
Formalização	Veja como podemos representar a função Imposto de Renda com a simbologia própria das funções definidas por mais de uma sentença. Note que as leis de formação dessa função pertencem a classificações diferentes. Enquanto as expressões que determinam o valor da função para x > R$ 1.903,98 são funções do 1º grau, a expressão que determina os valores da função para o primeiro trecho do domínio é uma função constante.
Representação Algébrica	$f(x) = \begin{cases} 0, para\ 0 < x < 1903{,}99 \\ \frac{7{,}5}{100}x - 142{,}8, para\ 1903{,}99 \leq x < 2826{,}66 \\ \frac{15}{100}x - 354{,}8, para\ 2826{,}66 \leq x < 3751{,}05 \\ \frac{22}{100}x - 631{,}1, para\ 3751{,}05 \leq x < 4664{,}68 \\ \frac{27{,}5}{100}x - 869{,}4, para\ 4664{,}68 \leq x \end{cases}$

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM3 (2020, p. 33-34)

Nesse Quadro 9, o LDM3 apresenta a abordagem das Funções definidas por mais de uma sentença, utilizando o exemplo do cálculo do Imposto de Renda. O livro explora as diferentes faixas de imposto e suas alíquotas, relacionando-as com a base de cálculo do imposto. A representação algébrica dessa função também é mostrada, evidenciando a variação das leis de formação de acordo com o valor da base de cálculo.

A abordagem do LDM3, nessa parte, se assemelha às ideias de Tinoco *et al.* (1996), ao utilizar o exemplo do Imposto de Renda para ilustrar as Funções definidas por mais de uma sentença. Ao destacar as diferentes bases de cálculo e apresentar a tabela do Imposto de Renda, o livro estabelece uma conexão entre as práticas sociais e a formalização matemática dessas aplicações. No entanto, para uma melhor compreensão, seria importante fornecer uma explicação mais detalhada sobre a relação entre as diferentes leis de formação e os trechos do domínio.

Nesse sentido, seria enriquecedor se o LDM3 também fornecesse uma explicação mais detalhada sobre como as diferentes leis de formação estão relacionadas aos diferentes trechos do domínio, estabelecendo uma conexão mais explícita entre os dados apresentados na tabela do Imposto de Renda e a formulação das expressões algébricas.

Novamente, é possível observar que a formalização das Funções definidas por mais de uma sentença no LDM3 não se preocupa com o rigor matemático, mas busca explicar as informações e dados da tabela por meio de abstrações, questionamentos e exemplos adicionais. O objetivo é destacar um modelo matemático algébrico que descreve a situação analisada, enfatizando que as expressões correspondem a Funções constantes ou do 1º grau. Dessa forma, o LDM3 aborda parcialmente a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), ao tratar desse conteúdo na parte analisada.

Após análise do trecho acima, observa-se a presença de uma citação de Lima *et al.* (2012) que questiona a nomenclatura “função do primeiro grau” utilizada pelos autores do livro em questão. Cabe perguntar: “[...] o que é grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é polinômio. (Quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau” (LIMA *et al.*, 2012, p. 92). Dessa forma, seria interessante que os autores repensassem essa terminologia para evitar possíveis confusões conceituais.

Dando continuidade à análise do livro, em relação à temática de pesquisa, observamos que o exemplar, na seção “Para pensar e discutir”, explora um texto com o auxílio de uma tabela para a realização de três tarefas: a primeira trabalha a ideia da abstração para a construção da lei de formação de cada intervalo dado; a segunda aborda a representação gráfica; já a terceira utiliza um intervalo específico e solicita tanto a lei de formação como a representação gráfica. Além disso, as duas últimas questões dessa seção solicitam a classificação (1° grau, linear ou constante) da função esboçada.

A seção “Para explorar” também utiliza o texto citado para promover, sobretudo, a tomada de decisão dos estudantes de forma coletiva, evidenciando uma resposta pessoal. A seguir, tem um exemplo que apresenta uma questão contextualizada com sua representação gráfica e algébrica, revelando como os conhecimentos matemáticos estão presentes em uma ação prática, ao ter que pagar as horas de um estacionamento para os veículos.

Dessa forma, na seção “Para pensar e discutir”, é abordada inicialmente, na primeira questão, uma reflexão sobre a formação desse processo algébrico e gráfico. Já a segunda foca na mudança dos dados para solicitar uma nova representação gráfica. A terceira apresenta um gráfico de uma Função definida por quatro sentenças para explorar a sua lei de formação e criatividade do estudante em formular uma situação-problema. Vale ressaltar que essa questão, além de mostrar que nem toda Função numérica é contínua, possibilita que o estudante seja o protagonista do conhecimento ao conseguir idealizar que este gráfico represente uma situação prática de suas vivências.

Ao final da unidade, na seção “Aproveitando a oportunidade”, é abordado o módulo de uma Função afim. Assim, é explorado inicialmente o conceito de módulo de um número real para, em seguida, explanar a construção algébrica das Funções afins modulares por meio de duas sentenças. Nesse momento, há um aprofundamento do comportamento gráfico da Função modular, com a sugestão da utilização de software de representação gráfica, sem nomear um recurso digital específico.

Por fim, observa-se que o exemplar também exibe uma questão do Enem que apresenta uma contextualização do ensino de Matemática por meio da abstração dos dados informados pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), para explorar a representação gráfica da função que modela a situação-problema.

De uma forma geral, esse exemplar, na parte que foi examinada, apresenta uma abordagem explicativa norteada por uma performance social de contextos comunitários, com ênfase na investigação que colabora para a resolução de problemas. Assim, busca desenvolver o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença de forma reflexiva, com questionamentos e contextos diversos, incluindo os temas da Educação Financeira e Educação Fiscal. Além disso, evidencia de forma sutil os aspectos pedagógicos e abstratos desse conteúdo, porém foi displicente na possível utilização das tecnologias digitais nesse momento.

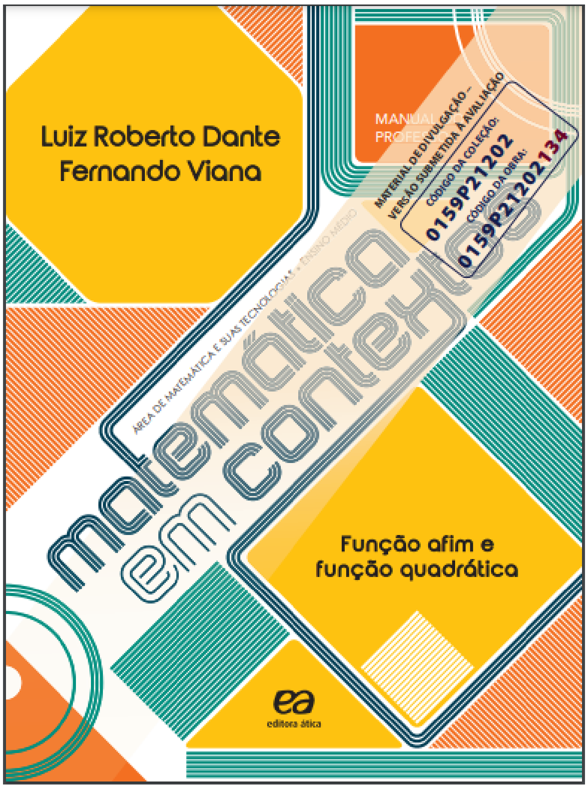
Apesar de apresentar poucas questões na parte investigada, esse volume colabora para o desenvolvimento da habilidade específica EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), ao abrir espaços para o processo de investigação Matemática que favorece a percepção e a criatividade dos estudantes. Dessa forma, o estudante constrói, reconstrói, avalia e reavalia a situação quantas vezes for necessário, utilizando diferentes estratégias para resolver a atividade, bem como seus conhecimentos prévios, o que evidencia um aspecto reflexivo. Além disso, contempla algumas competências gerais e específicas, tanto da área da Matemática e suas Tecnologias como de outras áreas do conhecimento.

Nesta análise, é possível observar que os autores Longen e Blanco (2020), colaboram para uma formação participativa e criativa. Diante disso, as abordagens pedagógicas dos objetos analisados evidenciam uma formação interativa, que se aproxima das ideias de D'Ambrósio (1996, p. 16), ao afirmar que o processo formativo do estudante "[...] se faz com estímulos de outra natureza. Podem inclusive ser estímulos matemáticos. Mas uma matemática interessante, exploratória, divertida e desafiadora. Não mera manipulação de técnicas, mas sim exercícios de criatividade".

4.3 LDM4

Será apresentada uma análise e discussão do LDM4, cujas principais características de identificação estão apresentadas no Quadro 10, logo abaixo. Os conteúdos desse volume são organizados em apenas dois capítulos que, por sua vez, mesclam seções, imagens, textos e boxe com informações sobre diversos temas.

Quadro 10 – Identificação do LDM4

Código da Coleção	**Ilustração da Capa do Livro**
0159P21202	
Código do Volume	
0159P21202134IL	
Título	
Matemática em Contextos	
Subtítulo	
Função afim e função quadrática	
Autores	
Luiz Roberto Dante Fernando Viana	
Outras Informações	
1. ed. – São Paulo: Editora Ática, 2020	

Fonte: Pesquisador (2022)

Na parte que foi investigada, observou-se que esse exemplar utiliza diferentes modelos matemáticos para abordar o ensino de Funções, permitindo o processo de contextualização de situações reais. Isso possibilita o entendimento dos fenômenos naturais e sociais, bem como reflexões sobre suas manifestações. Diante disso, nota-se que essa parte do livro explana a modelagem e análise de problemas relacionados a diferentes contextos por meio de uma abordagem teórico-metodológica. Assim, percebe-se que os procedimentos explicativos tentam aproximar o estudante dos conceitos relacionados ao conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, estabelecendo conexões com situações que são ou podem vir a ser parte do seu cotidiano.

No que se refere à temática desta pesquisa, ela é apresentada como um tópico específico, “Funções definidas por mais de uma sentença”, no Capítulo 1 – Função Afim. Diante disso, no Quadro 11, foram elencados os principais conceitos matemáticos abordados e as habilidades específicas da área da Matemática e suas Tecnologias exploradas nessa parte do livro.

Quadro 11– Conteúdo programático do LDM3

<table>
<tr><th>Capítulo</th><th>Tópicos</th><th>Subtópicos</th><th>Habilidades</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1. Função Afim</td><td>A ideia de função</td><td>• Explorando a ideia de função;
• Formalizando a ideia de função.</td><td rowspan="3">• EM13MAT101
• EM13MAT103
• EM13MAT104
• EM13MAT101
• EM13MAT302
• EM13MAT314
• EM13MAT315
• EM13MAT401
• EM13MAT404
• EM13MAT501
• EM13MAT506
• EM13MAT510</td></tr>
<tr><td>A função afim</td><td>• Um pouco da história das funções afins;
• Explorando a função afim;
• Formalizando a definição de função afim;
• Valor de uma função afim;
• Taxa de variação média da função afim;
• Gráfico de funções;
• Gráfico da função afim;
• Função linear e proporcionalidade;
• Zero da função afim;
• Estudo do sinal da função afim.</td></tr>
<tr><td>Funções definidas por mais de uma sentença</td><td>• Explorando as funções definidas por mais de uma sentença;
• Gráficos de funções definidas por mais de uma sentença;
• Função modular.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023)

Nessa parte analisada, é possível constatar que as abordagens buscam desenvolver as competências gerais 1 e 7, e as competências específicas 1, 3, 4 e 5 elencadas pela BNCC (BRASIL, 2018). Vale frisar que, nessa parte, são apresentadas atividades contextualizadas em diversas situações, como aquelas relacionadas a situações econômicas, sociais e, sobretudo, aos fatos interligados à área das Ciências Naturais e suas Tecnologias, o que possibilita o desenvolvimento de competências específicas elencadas pela supracitada base para essa área.

No tópico “Funções definidas por mais de uma sentença”, é realizado um estudo exploratório sobre esses tipos de transformações, aplicados em diversos casos relacionados aos contextos científicos e tecnológicos, com exploração de problemas que envolvem a determinação dos processos algébricos e geométricos. Além disso, as Funções modulares, que também são um tipo de Função definida por mais de uma sentença, são abordadas e formalizadas.

O livro aborda inicialmente o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença por meio de duas situações. Na situação 1, busca-se desenvolver com os estudantes um estudo sobre um problema contextualizado: o cálculo de imposto sobre a renda da pessoa física. O desenvolvimento da atividade proposta nessa situação abrange os temas da Educação Financeira e Educação Fiscal, ao envolver os estudantes em temáticas fundamentais para um processo de tomada de decisão consciente relacionada a finanças. O Quadro 12, a seguir, ilustra a situação 1.

Quadro 12 – Situação 1 (imposto de renda)

Informação	**Imposto de renda** Os impostos são valores cobrados das pessoas ou das empresas, pelo governo, para que as instituições públicas funcionem e garantam à população educação, saúde, segurança, iluminação, infraestrutura, entre outros serviços. Um dos impostos mais importantes no Brasil é o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), também chamado de imposto de renda, que é recolhido pela Receita Federal. A parcela do imposto que uma pessoa deve pagar por ano é calculada de acordo com os rendimentos dela. Quanto maior o rendimento, maior é a parcela. A porcentagem dos rendimentos a pagar ao governo é definida por faixas com alíquotas diferentes para cada uma delas. Por exemplo, quem tem rendimentos mensais de R$ 2.000,00 tem a alíquota igual a 7,5%. Mas quem tem rendimentos mensais iguais a R$ 3.000,00 tem a alíquota igual a 15%, e quem tem rendimentos mensais de R$ 5.000,00 tem a alíquota igual a 27,5% (alíquotas do ano de 2020).
Questionamento	a) A relação entre os rendimentos mensais de uma pessoa e a alíquota é uma função afim? Justifique. b) Você já tinha ouvido falar do IRPF? Pesquise a importância desse imposto.

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM4 (2020, p. 57)

Até o momento, o texto não abordou explicitamente a formalização do conceito de Funções definidas por mais de uma sentença. No entanto, o questionamento apresentado no item a) pode despertar a curiosidade do estudante, levando-o a refletir sobre a natureza da função em estudo e como representá-la tanto de forma algébrica quanto gráfica para justificar suas respostas. Essa abordagem, conforme destacado por Meirieu (1998), caracteriza-se como uma situação-problema que promove a aprendizagem dos estudantes ao incentivá-los a vencer obstáculos na resolução da tarefa proposta.

Na situação 2, ilustrada no Quadro 13, os estudantes são imersos em um contexto que envolve a tarifa de consumo de água residencial em Manaus. Essa atividade proporciona a oportunidade de compreenderem o cálculo da tarifa de água e como esse cálculo está relacionado com as diferentes faixas de consumo. Ao serem solicitados a descreverem duas aplicações que relacionem o consumo de água com a tarifa paga para faixas distintas, os estudantes são instigados a vivenciar a aplicação prática das Funções definidas por mais de uma sentença no contexto do cotidiano.

Essa abordagem da situação-problema alinha-se à concepção de Macedo (2002) sobre o uso de situações dinâmicas e abertas para promover a contextualização dos conteúdos. Ao vivenciarem a aplicação das Funções definidas por mais de uma sentença na tarifa de consumo de água, os estudantes são incentivados a relacionar conceitos matemáticos com situações reais, o que torna o aprendizado mais significativo e relevante.

Deste modo, essa prática de situações-problema não apenas permite aos estudantes exercitarem suas habilidades matemáticas, mas também os prepara para enfrentar desafios da vida cotidiana, como compreender e tomar decisões relacionadas ao consumo de recursos. A aplicação prática das Funções definidas por mais de uma sentença, como ocorre na situação 2, contribui para o desenvolvimento de uma visão mais ampla e aplicada da Matemática, preparando os estudantes para serem cidadãos mais críticos e conscientes em relação aos desafios do mundo real.

O Quadro 13, a seguir, ilustra a situação 2 de forma detalhada.

Quadro 13 – Situação 2 (conta de água)

<table>
<tr><td>Informação</td><td>Conta de água

No Brasil, a tarifa a pagar pela água residencial é definida de acordo com o gasto de água: quanto maior for o gasto, maior é a tarifa a pagar. Isso geralmente ocorre de acordo com faixas de consumo. Observe a tabela de faixa de consumo e tarifa de água residencial em Manaus (AM). O cálculo da tarifa é feito considerando o consumo nas diferentes faixas. Por exemplo, veja como é calculada a tarifa para o consumo de $32\ m^3$ de água.</td></tr>
<tr><td>Tabela</td><td>Tarifa de consumo de água residencial em Manus
<table>
<tr><th>Faixa de consumo (em m³)</th><th>Tarifa de água (em R$/m³)</th></tr>
<tr><td>0 a 10</td><td>3,9860</td></tr>
<tr><td>11 a 20</td><td>7,7260</td></tr>
<tr><td>21 a 30</td><td>11,7940</td></tr>
<tr><td>31 a 40</td><td>16,0660</td></tr>
<tr><td>41 a 60</td><td>18,5370</td></tr>
<tr><td>Acima de 60</td><td>21,1360</td></tr>
</table>
Fonte de consulta: ÁGUAS DE MANAUS. Legislação e tarifas. Disponível em: https://www.aguasdemanaus.com.br/legislacao-e-tarifas/. Acesso em: 29 maio 2020.</td></tr>
<tr><td>Abstração e Processo Resolutivo</td><td>• Primeiro, identifica-se que $32\ m^3 = 10\ m^3 + 10\ m^3 + 10\ m^3 + 2\ m^3$. Para cada um desses termos, paga-se uma tarifa diferente.

• Pelos primeiros $10\ m^3$, pagam-se $3{,}9860\ R\$/m^3$, o que resulta em R$ 39,86, pois $10 \cdot 3{,}9860 = 39{,}86$.

• Pelos próximos $10\ m^3$, pagam-se $7{,}7260\ R\$/m^3$, o que resulta em R$ 77,26, pois $10 \cdot 7{,}7260 = 77{,}26$.

• Pelos próximos $10\ m^3$, pagam-se $11{,}7940\ R\$/m^3$, o que resulta em R$ 117,94, pois $10 \cdot 11{,}7940 = 117{,}94$.

• Pelos últimos $2\ m^3$, pagam-se $16{,}0660\ R\$/m^3$, o que resulta em R$ 32,13, arredondados, pois $2 \cdot 16{,}0660 = 32{,}132$.

O total então é $R\$\ 39{,}86 + R\$\ 77{,}26 + R\$\ 117{,}94 + R\$\ 32{,}13 = R\$\ 267{,}19$</td></tr>
<tr><td>Questionamento</td><td>a) Qual é a tarifa que uma família paga se o gasto mensal for de $18\ m$?

b) Escreva no caderno as leis de 2 funções: a que fornece a tarifa, em reais, para um consumo de água entre 0 e $10\ m^3$, e a que fornece a tarifa, em reais, para um consumo de água entre 11 e 20 m³.</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM4 (2020, p. 57)

Embora ainda não tenha sido formalizada a definição de Função definida por mais de uma sentença no texto, os questionamentos apresentados nos itens estimulam a curiosidade e a modelagem da situação-problema. É relevante ressaltar que essa abordagem vai ao encontro da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), que visa analisar Funções definidas por uma ou mais sentenças, como é o caso das contas de água aqui abordadas. Além disso, essa temática pode ser expandida para a Educação Financeira, envolvendo os estudantes em questões de consumo responsável e consciente, e também para a Educação Ambiental, ao propor uma investigação sobre o consumo racional da água, incentivando uma mobilização dos estudantes em prol da escola e da comunidade. Essa abordagem interdisciplinar amplia o aprendizado dos estudantes e fortalece a conexão dos conceitos matemáticos com a realidade e as práticas sociais.

A seguir, no subtópico “Explorando as funções definidas por mais de uma sentença”, é informado que existem aplicações compostas por mais de uma sentença. A abordagem desse conteúdo é iniciada com o uso da linguagem Matemática na seção “Explore para descobrir”. Nessa etapa, o estudante é guiado a refletir sobre alguns questionamentos apresentados, relacionados às funções f, g e h, por meio da localização dos pontos no plano cartesiano. O Quadro 14 descreve essa abordagem.

Quadro 14 – Formalização do conceito segundo LDM4

Informações	No Explore para descobrir acima, foi trabalhada a função $f,$ que, como você concluiu nos itens **a** a **f**, não é uma função afim, mas pode ser expressa usando as leis de duas funções g e h. A lei dessa função f pode ser expressa da seguinte maneira:
Representação Algébrica	$f(x) = \begin{cases} g(x), se\ x \geq 2 \\ h(x), se\ x \leq 2 \end{cases}$
Formalização	Funções como essa são chamadas **funções definidas por mais de uma sentença**. Em funções desse tipo, a lei da função depende do valor de x, como ocorre no caso de f, em que $f(x)$ é dada por uma lei, se $x \geq 2$, e é dada por outra lei, se $x \leq 2$.

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM4 (2020, p. 58)

No Quadro 14, o LDM4 explora a função f e demonstra que ela não é uma Função afim, mas pode ser expressa utilizando as leis de duas aplicações, g e h. A representação algébrica de f é apresentada, onde $f(x)$ é igual a $g(x)$ se x for maior ou igual a 2, e igual a $h(x)$ se x for menor ou igual a 2. Essa abordagem ilustra que transformações desse tipo são denominadas Funções definidas por mais de uma sentença, nas quais a lei de formação de f varia dependendo do valor de x, sendo maior ou menor que 2.

Essa formalização realizada pelo LDM4 é importante, pois permite aos estudantes compreenderem como uma única função pode ser composta por diferentes leis em intervalos específicos de valores de x. Isso evidencia a versatilidade e a complexidade das Funções definidas por mais de uma sentença, e como elas são úteis para modelar fenômenos e situações da vida real que não podem ser descritos por uma única expressão algébrica.

É interessante notar que, apesar de o livro inicialmente contextualizar o ensino de Matemática por meio de abordagens anteriores para despertar a curiosidade dos estudantes em relação às características das aplicações que modelam fenômenos reais, os autores do LDM4 optam por utilizar a linguagem Matemática e procedimentos algébricos para formalizar o conceito de Funções definidas por mais de uma sentença. Isso evidencia uma preocupação com o rigor matemático na apresentação desses conceitos, buscando estabelecer uma abordagem precisa e matematicamente correta

Noutras palavras, os autores do LDM4 demonstram preocupação em utilizar a linguagem matemática e procedimentos algébricos para formalizar as aplicações, reconhecendo a importância de apresentar os conceitos de forma precisa e consistente. Diante disso, essa formalização do conceito de Funções definidas por mais de uma sentença se aproxima do rigor matemático apresentado por Lima (2020), Stewart (2014) e Lima *et al.* (2012).

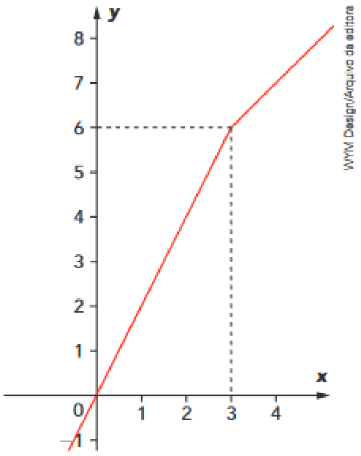
No entanto, além do rigor matemático, seria benéfico fornecer aos estudantes uma compreensão mais ampla sobre as aplicações das Funções definidas por mais de uma sentença. Nessa linha de pensamento, explorar exemplos práticos relacionados ao cotidiano dos estudantes poderia auxiliar na visualização e compreensão dessas transformações, tornando o aprendizado mais relevante.

Embora o LDM4 faça uma contextualização inicial do ensino de Matemática com abordagens anteriores, buscando despertar a curiosidade dos estudantes em descobrir as características das aplicações que modelam fatos reais, é importante ressaltar que, no contexto da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), o livro aborda parcialmente o conceito de Funções definidas por mais de uma sentença, nessa parte analisada.

Para reforçar o conceito abordado, os autores utilizam um exemplo com ilustração de um gráfico, mostrando a sua representação algébrica e pontuando que

“[...] cada um dos dois trechos da representação gráfica dessa função coincide com parte da representação gráfica de uma função afim, por isso, essa função também é chamada função afim por partes” (DANTE; VIANA, 2020, p. 58). O Quadro 15, a seguir, ilustra essas representações.

Quadro 15 – Representações de uma mesma função afim por partes

Representação Gráfica	Representação Algébrica
	$f(x) = \begin{cases} 2x, se\ x < 3 \\ x+3, se\ x \geq 3 \end{cases}$

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM4 (2021, p. 58)

Após esse momento, os autores afirmam que existem também Funções definidas por mais de uma sentença, cujas partes da representação gráfica não coincidem apenas com Funções afins. Para tanto, ilustram outra representação gráfica com sua representação algébrica que justifica esse fato. Em seguida, apresentam mais dois exemplos com a representação gráfica e algébrica de Funções afins por partes.

Na seção “Atividades resolvidas”, é apresentada uma situação-problema com o uso de uma tabela que relaciona o consumo de água em uma residência com o valor cobrado por esse consumo. A resposta exibida está descrita de forma detalhada, facilitando a vida do estudante na resolução das questões na seção “Atividades”, sobretudo na questão 63, ao abordar um problema similar. Vale ressaltar que na questão 61, explora-se a expressão algébrica para trabalhar o processo de transformação numérica, fazendo a correspondência entre domínio e imagem. Já a questão 62 aborda a visualização gráfica para formalizar as leis de formação de cada item.

O próximo subtópico “Gráficos de funções definidas por mais de uma sentença”, aborda a construção gráfica desses tipos de Funções com e sem o uso de tecnologias digitais. O exemplar descreve como utilizar o GeoGebra para esboçar os gráficos na seção “Tecnologias digitais” e enfatiza as possibilidades construtivas do comando “Se” desse recurso. Na seção “Além da sala de aula”, esse processo é espelhado em um fluxograma. Essas explorações são trabalhadas em duas questões ainda nessa parte.

Na seção “Atividades”, são apresentadas cinco questões consecutivas, da 64 à 68, com situações-problema em que o ensino de Matemática é contextualizado com os seguintes temas, respectivamente: o estado físico da matéria; a compra de ingressos para a Copa do Mundo; a temperatura de uma estufa; a intensidade sonora; e o imposto de renda mensal. Assim, os estudantes se deparam com problemas que envolvem Funções definidas por mais de uma sentença e seus gráficos, aplicados em diferentes contextos.

É importante frisar que as quatro primeiras questões contemplam problemas aplicados em um contexto da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Esses problemas envolvem o estudo de um gráfico no plano cartesiano que representa a medida de temperatura em relação ao intervalo de tempo, a análise da mudança de fase de uma substância, a construção de um gráfico que relaciona a medida de temperatura e o intervalo de tempo, e a interpretação de um gráfico que relaciona a medida de intensidade sonora em decibéis e o intervalo de tempo. Na questão 68, em especial, o assunto da situação 1, IRPF, é retomado e aprofundado. Nessa atividade, os estudantes são desafiados a construir o gráfico no plano cartesiano da aplicação que relaciona o salário de um contribuinte, em reais, ao valor pago ao IRPF por ele, também em reais. Além disso, eles são convidados a analisar características desse gráfico, como os intervalos em que a aplicação é crescente.

No próximo subtópico “Função modular”, é apresentado o conceito dessa função e sua construção gráfica. Nas questões 69 a 72, são abordados o processo de transformação numérica com a convenção da representação algébrica e gráfica, além da visualização gráfica do crescimento ou decrescimento, domínio e imagem. Dessa forma, os estudantes trabalham com problemas relacionados a esse tipo de aplicação, de maneira algébrica e geométrica no plano cartesiano. Já na questão 73, é apresentada uma situação-problema que modela a frequência das pessoas em um supermercado. Nesse sentido, o conteúdo matemático também passa a ser contextualizado.

Na seção “Vestibulares e Enem”, entre as 16 questões, cinco (1, 4, 9, 12 e 13) contemplam várias habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), pois abordam os conceitos de Funções definidas por mais de uma sentença com ênfase em suas múltiplas representações, possibilitando a identificação e transformação dos elementos matemáticos, tanto de natureza gráfica como algébrica. As questões 4 e 13 são do Enem e estão em forma de situações-problema, atendendo a uma perspectiva de contextualização do ensino de Matemática.

Esse exemplar, na parte investigada, expõe uma abordagem explicativa inclinada por uma performance social de contextos globais, com ênfase na produção de modelos matemáticos que colaboram para modelar situações presenciadas. Assim, o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença é contextualizado em um contexto com fatos reais universais. No tópico analisado, é evidenciada, também, a utilização do *software* GeoGebra, com tecnologia digital que favorece a construção e manipulação gráfica do referido conteúdo.

Nessa parte investigada, é possível observar o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), na exploração do conteúdo de Funções definidas por uma ou mais sentenças, por meio de aspectos pedagógicos e abstratos. Nesse âmbito, contempla, também, algumas competências gerais e específicas, tanto da área de Matemática e suas Tecnologias, como de outras áreas do conhecimento da referida base. Contudo, apesar de realçar a tentativa de relacionar situações que fazem parte do cotidiano do estudante ou outras situações pessoais em sua comunidade com os saberes escolares da Matemática, a maioria das tarefas tem aspectos técnicos e repetitivos.

Nesta análise, os autores Dante e Viana (2020), destacam os conhecimentos matemáticos que estão incluídos tanto em fatos simples como os de grande relevância. Dessa forma, as abordagens pedagógicas dos objetos analisados enfatizam uma formação em diferentes contextos, reconhecendo que “[...] a invenção matemática é acessível a todo indivíduo e a importância dessa invenção depende do contexto social, político, econômico e ideológico” (D’Ambrósio, 1996, p. 9).

4.4 LDM5

Será apresentada uma análise e discussão do LDM5. As principais características de identificação deste volume estão apresentadas no Quadro 16, logo abaixo. Os conteúdos desse volume são organizados em cinco capítulos, os quais estão subdivididos em seções, algumas envolvendo tarefas, enquanto outras contêm textos, gráficos e infográficos com informações sobre diversos temas.

Quadro 16 – Identificação do LDM5

<table>
<tr><th>Código da Coleção</th><th>Ilustração da Capa do Livro</th></tr>
<tr><td>0182P21202</td><td rowspan="11">
</td></tr>
<tr><td>Código do Volume</td></tr>
<tr><td>0182P21202133IL</td></tr>
<tr><td>Título</td></tr>
<tr><td>Matemática interligada</td></tr>
<tr><td>Subtítulo</td></tr>
<tr><td>Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica</td></tr>
<tr><td>Editora Responsável</td></tr>
<tr><td>Thais Marcelle de Andrade</td></tr>
<tr><td>Outras Informações</td></tr>
<tr><td>1. ed. – São Paulo: Scipione, 2020</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023)

Na parte que foi investigada deste exemplar, observou-se que o mesmo busca oferecer subsídios que possibilitem o desenvolvimento acadêmico e pessoal dos estudantes, apresentando conteúdos por meio de situações-problema baseadas na realidade. Dessa forma, o livro tenta promover a investigação do conceito tanto no contexto da Matemática quanto em suas possíveis aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Os procedimentos explicativos, além de buscarem valorizar os aspectos históricos e culturais, procuram colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem relacionado ao conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, numa perspectiva de promover seu protagonismo.

Nesse sentido, os conteúdos buscam colaborar para o exercício da curiosidade intelectual, da investigação científica, do trabalho coletivo e da utilização de diferentes tipos de linguagem (verbal, geométrica, algébrica, entre outras). Isso contempla as competências específicas 3 e 4 elencadas pela BNCC (BRASIL, 2018) para a área de Matemática e suas Tecnologias, buscando também integrar essa área com outras componentes curriculares. No entanto, não enfatiza nenhuma competência geral da referida base para essa parte analisada.

No que tange à temática desta pesquisa, ela é apresentada como um tópico no Capítulo 1 – Noções de Funções. Diante disso, no Quadro 17, serão elencados os principais conceitos matemáticos e habilidades específicas da área de Matemática e suas Tecnologias explorados nesta parte do livro.

Quadro 17 – Conteúdo programático do LDM5

Capítulo	Tópicos	Subtópicos	Habilidades
2. Noções de Funções	1. Introdução	• Definição de função;	• EM13MAT404 • EM13MAT506
	2. Estudo do domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função	---------------------------	
	3. Gráfico de uma função	• Construindo o gráfico de uma função; • Domínio e conjunto imagem de uma função a partir do gráfico; • Zero de uma função; • Como verificar se um gráfico representa uma função	
	4. Função definida por mais de uma sentença	• Função modular.	
	5. Funções crescente, decrescente e constante	---------------------------	

Fonte: Pesquisador (2023)

Antes de introduzir o conceito de Função afim, no Tópico 4 – Função definida por mais de uma sentença, do Capítulo 2 – Noções de Funções, é desenvolvida a formalização do conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença. Dessa forma, o exemplar explora inicialmente uma situação-problema para mostrar que tal fato não pode ser modelado por uma única expressão algébrica. O Quadro 18, a seguir, ilustra esse fato.

Quadro 18 – Formalização do conceito segundo LDM5

Situação-Problema	Observe a situação a seguir. Para produzir até 20 unidades de certa embalagem, uma indústria tem um custo inicial de R$ 240,00 mais um custo de R$ 5,00 por embalagem. Para produzir mais de 20 unidades, o fornecedor de matéria-prima oferece desconto para a indústria. Por isso, o custo por embalagem é R$ 4,50 mais o custo inicial de R$ 240,00. Qual é a função que representa o custo total C dessa indústria em função da quantidade x de embalagens produzidas?
Abstração	De acordo com o texto, podemos notar que o custo dessa indústria depende da quantidade de embalagens a serem produzidas. Podemos representar o custo para produzir até 20 unidades por meio da função C, cuja lei de formação é dada por:
Representação Algébrica	custo para produzir até 20 embalagens custo inicial para produzir até 20 embalagens $C(x) = 5x + 240, se\ 0 < x \leq 20$
Abstração	Porém, se a quantidade de embalagens for maior do que 20, podemos representar o custo por meio da função C, dada por: custo para produzir
Representação Algébrica	custo para produzir mais de 20 embalagens custo inicial para produzir mais de 20 embalagens $C(x) = 4{,}50x + 240, se\ x > 20$
Formalização	Note que essa situação não pode ser representada por uma única sentença. Por isso, escrevemos duas sentenças que dependem da quantidade de embalagens a serem produzidas. Essa situação descreve uma função definida por mais de uma sentença.
Representação Algébrica	$C(x) = \begin{cases} 5x + 240, se\ 0 < x \leq 20, com\ x \in \mathbb{N}^* & (I) \\ 4{,}50x + 240, se\ x > 20, com\ x \in \mathbb{N}^* & (II) \end{cases}$

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em LDM5 (2020, p. 43)

Nesse Quadro 18, é apresentada uma situação-problema que envolve o cálculo do custo total de uma indústria em relação à quantidade de embalagens produzidas. Desse jeito, LDM5 destaca que, para até 20 unidades, o custo é descrito por uma função, enquanto para mais de 20 unidades, o custo é representado por outra função. Essa abordagem ilustra a presença das Funções definidas por mais de uma sentença, nas quais a lei da formação varia de acordo com o valor de x.

Essa abordagem segue uma linha de pensamento semelhante à apresentada por Tinoco *et al.* (1996) e Caraça (2002), ao propor uma circunstância que permite aos estudantes reconhecer regularidades em uma situação real e generalizar as leis ou padrões observados. A ênfase na abstração dos dados da situação-problema e na explicação das Funções definidas por mais de uma sentença promove a reflexão sobre aspectos da realidade e amplia o conhecimento dos estudantes ao conectar o conteúdo matemático com situações práticas do cotidiano.

Entretanto, para uma compreensão mais aprofundada do conceito de Funções definidas por mais de uma sentença, seria interessante que o LDM5 fornecesse mais exemplos e situações reais relacionados ao cotidiano dos estudantes. Isso auxiliaria na conexão entre o conteúdo matemático e sua aplicação prática, tornando-o mais significativo e possibilitando uma melhor compreensão do tema.

No contexto da habilidade EM13MAT404, o LDM5 atende ao apresentar uma situação-problema envolvendo o custo total de uma indústria em aplicação da quantidade de embalagens produzidas, que é uma Função definida por mais de uma sentença. É possível notar que o quadro aborda a representação algébrica dessa aplicação, o domínio de validade e destaca a característica da função. No entanto, a análise não explora explicitamente a conversão entre as representações gráfica e algébrica, aspecto relevante para o desenvolvimento completo da habilidade.

Para reforçar o conceito apresentado, o livro traz uma nova situação-problema que aborda as comissões de ganhos dos funcionários de uma loja, relacionadas às vendas de sofás. Essa questão também trabalha com os números naturais positivos, o que caracteriza a função como discreta.

O Quadro 19 apresenta essa análise de forma mais detalhada.

Quadro 19 – Situação-problema para a formalização do conceito de LDM5

Situação-Problema	A fim de motivar as vendas de sofás de uma loja, o gerente propôs aos funcionários pagar comissões dependendo da quantidade de sofás que venderem. As comissões serão pagas da seguinte maneira: • 5% de comissão para o funcionário que vender 1 sofá no mês; • 7% de comissão para o funcionário que vender de 2 a 4 sofás no mês; • 10% de comissão para o funcionário que vender mais de 4 sofás no mês.
Abstração	Note que essa situação não pode ser representada por uma única sentença. Assim, escrevemos três sentenças em que o valor da comissão é dado em função da quantidade de sofás vendidos. Essa situação pode ser representada pela função V, dada por:
Representação Algébrica	$V(q) = \begin{cases} 0{,}05q, se\ 0 < q < 2, com\ q\ \in\ \mathbb{N}^* \\ 0{,}07q, se\ 2 \leq q \leq 4, com\ q\ \in\ \mathbb{N}^* \\ 0{,}1q, se\ q > 4, com\ q\ \in\ \mathbb{N}^* \end{cases}$
Abstração	em que $V(q)$ corresponde ao valor da comissão a ser paga em relação à quantidade q de sofás vendidos. Nesse caso, q representa a quantidade de sofás (número natural). E a menor quantidade de sofás vendidos para o funcionário receber a comissão é 1. Assim, o domínio da função V é obtido de maneira semelhante ao apresentado acima, e é dado por: $D(V) = \mathbb{N}^*$.

Fonte: Pesquisador (2023) inspirando em LDM5 (2020, p. 43)

No Quadro 19, temos uma situação-problema que é tratada como uma modelagem matemática para ajudar o estudante a compreender como as comissões variam de acordo com a quantidade de sofás vendidos. Nessa abordagem, a função por mais de uma sentença é utilizada para criar um modelo que representa as comissões dos funcionários de uma loja de sofás. Essa abordagem permite entender e organizar os dados das comissões com base nas vendas realizadas, proporcionando uma visão clara e precisa dessa situação.

Em ambas situações apresentadas no LDM5, o ensino de Matemática é contextualizado através de modelos algébricos, o que revela para o estudante que o conhecimento matemático escolar está presente nas atividades trabalhistas. Essa abordagem é destacada por Ricardo (2003), como um tipo de abordagem que “[...] auxilia na problematização dos saberes a ensinar, fazendo com que o aluno sinta a necessidade de adquirir um conhecimento que ainda não tem” (p. 11). Ao contextualizar as Funções definidas por mais de uma sentença em situações do mundo real, os estudantes são incentivados a refletir sobre a relevância desses conceitos no cotidiano e a perceber sua aplicabilidade prática, o que promove uma aprendizagem mais envolvente.

Prosseguindo à análise, temos o subtópico “Função modular”, que apresenta imediatamente a ideia de Função modular como um exemplo de Função definida por mais de uma sentença. Nesse momento, é abordado a definição do módulo de um número real para, consequentemente, formalizar o conceito de Função modular, juntamente com um exemplo que evidencia a construção gráfica.

Na seção “Problemas e exercícios resolvidos”, são exibidas duas questões que abordam Funções definidas por mais de uma sentença. A primeira é a questão R2, que explora uma Função definida por duas sentenças, sendo uma delas uma aplicação quadrática totalmente incompleta (caso que só tem o coeficiente “a”) e a outra uma Função polinomial do 1º grau. A segunda é a questão R3, que apresenta uma Função modular polinomial do 1° grau. Ambas as questões focam na construção do esboço gráfico com a utilização de tabelas e plano cartesiano, permitindo o processo de transformação numérica e convenção das representações.

Na seção “Problemas e exercícios propostos”, as questões 17 e 21 focam nos esboços gráficos de Funções definidas por mais de uma sentença para explorar a visualização dos intervalos que correspondem ao domínio e imagem das aplicações dadas. A questão 18 apresenta as expressões algébricas de algumas Funções modulares e seus gráficos, com o objetivo de o estudante associar corretamente qual é o esboço gráfico de cada aplicação dada. Já a questão 19 utiliza o esboço gráfico de uma Função definida por mais de uma sentença para investigar a visualização gráfica do conceito de função. As questões 20, 24, 25 e 26 enfatizam as expressões algébricas para a construção gráfica dessas funções. Por sua vez, a questão 23 trabalha o processo de transformação numérica, mas somente com a utilização da função na forma de expressão algébrica modular.

Por outro lado, a questão 22 apresenta uma situação-problema por meio de uma questão do vestibular que enfatiza a expressão algébrica de uma Função definida por quatro sentenças, com o objetivo de trabalhar o processo de transformação numérica. Esse problema possibilita a relação entre a Matemática e a Física, mais especificamente entre os conceitos de função e os conteúdos relacionados à temperatura e mudança de estado físico. Nesse caso, a evolução da temperatura da água ao longo do tempo, da fase sólida para a líquida, foi representada por uma Função definida por mais de uma sentença. Isso ocorre porque cada estado físico é definido por uma faixa de temperatura, e a mudança de um estado para outro ocorre em uma única temperatura que não muda durante a aplicação. Observa-se que o exemplar espera que o estudante integre seus conhecimentos matemáticos com os conhecimentos relativos aos estados físicos da matéria e às mudanças entre esses estados.

A seguir, temos a seção “Acesso digital”, onde é explorada a construção gráfica das Funções definidas por mais de uma sentença com a utilização do *software* GeoGebra, incluindo uma breve utilização das possibilidades construtivas do comando “Se”. Vale ressaltar que a interface desse recurso tecnológico é apresentada de forma simples, exibindo apenas algumas ferramentas para a realização de diferentes tipos de comandos relacionados ao objeto pesquisado. Nessa seção, mais especificamente no item b), o estudante é desafiado a esboçar um gráfico de uma questão definida por três sentenças.

No Tópico 5 – Funções crescente, decrescente e constante, na seção “Problemas e exercícios resolvidos”, é apresentado o esboço gráfico de uma Função definida por mais de uma sentença na questão R8. Essa questão tem como objetivo explorar visualmente os intervalos de crescimento, decrescimento e estabilidade da aplicação dada. Essa exploração também acontece nas questões 28 e 30 da seção “Problemas e exercícios propostos”, sendo que a última é uma questão do Enem que aborda uma situação-problema de um vazamento no reservatório de água.

Prosseguindo, na seção “Saiba mais”, é apresentado um texto intitulado “Descontos incidentes no salário”. Nesse diálogo, são abordados os acréscimos e decréscimos do salário bruto, analisando dois desses tributos: a contribuição previdenciária para o INSS (Instituto Nacional do Seguro Social) e o Imposto sobre o IRRF. É destacado que em ambos os descontos, o valor da alíquota varia conforme o salário bruto, que é dividido em intervalos chamados de faixas do salário. Sobre cada faixa, são aplicadas alíquotas diferentes, que aumentam conforme o salário aumenta.

No Capítulo 4 – Função Quadrática, encontram-se duas questões que exploram os conhecimentos de Funções definidas por mais de uma sentença. Uma delas está na questão R2 da seção “Problemas e exercícios resolvidos”, que apresenta uma situação problema para explorar os coeficientes de uma sentença quadrática e o gráfico da função dada. A outra questão encontra-se na seção “Problemas e exercícios propostos”, especificamente a questão 50, que aborda uma situação-problema com a representação gráfica das acelerações distintas de um automóvel em um determinado período e explora a representação gráfica desse automóvel no deslocamento no mesmo intervalo de tempo.

Este exemplar, na parte que foi investigada, apresenta uma abordagem explicativa direcionada por uma performance social de contextos comunitários com ênfase na aplicação dos conceitos matemáticos em situações do cotidiano. Além disso, destaca o uso do *software* GeoGebra como uma ferramenta digital que facilita a construção e manipulação de Funções definidas por mais de uma sentença.

A contextualização do conteúdo é bem estabelecida na introdução, permitindo uma conexão imediata entre os conceitos matemáticos e suas aplicações. Algumas atividades propostas ou resolvidas também abordam situações que podem ajudar os estudantes a ampliar seus conhecimentos sobre conceitos matemáticos e procedimentos na resolução de problemas do cotidiano, tanto sociais quanto naturais. Entretanto, é importante notar que a maioria das tarefas possui um aspecto técnico e repetitivo.

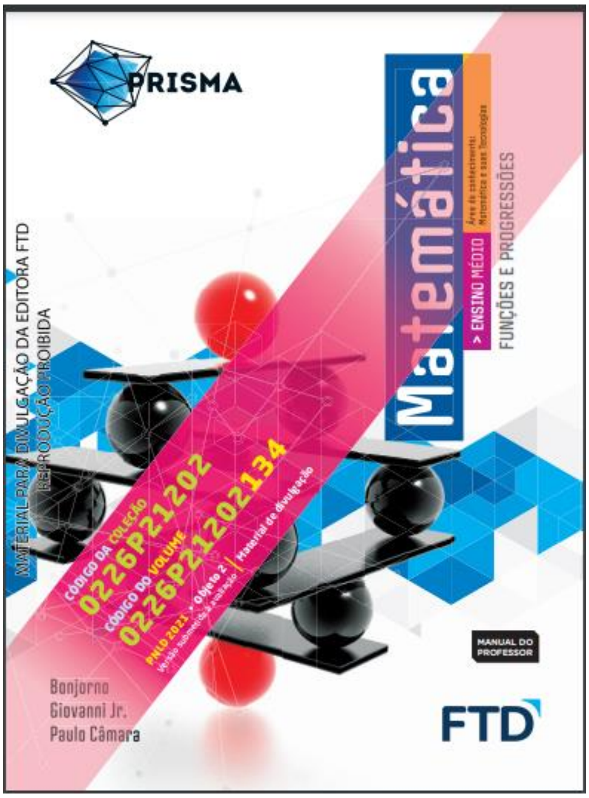
Em relação ao desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), é evidente a exploração do conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, considerando aspectos pedagógicos e abstratos. Além disso, o exemplar também explora outras competências específicas de outras áreas curriculares (Ciência da Natureza e suas Tecnologias), mostrando uma integração entre os diferentes ramos do conhecimento.

Na análise, os\as autores\as mostram uma conexão entre diferentes conhecimentos matemáticos e outras áreas científicas, proporcionando uma formação mais interligada. Essa abordagem reforça a ideia de que “[...] a matemática, as ciências, as artes e as humanidades devem ser todas integradas na busca de melhor entender, explicar e lidar com fatos e fenômenos naturais e produzidos” (D’AMBRÓSIO, 2012, p. 79).

4.5 LDM8

A seguir, será apresentada uma análise e discussão do LDM8. As principais características de identificação desse livro estão apresentadas no Quadro 20, logo abaixo. Os conteúdos desse volume são divididos em quatro capítulos, que, por sua vez, estão subdivididos em seções mescladas com ícones de atividades, textos, ilustrações e boxes contendo informações sobre diversos temas.

Quadro 20 – Identificação do LDM8

<table>
<tr><th>Código da Coleção</th><th>Ilustração da Capa do Livro</th></tr>
<tr><td>0226P21202</td><td rowspan="13">
</td></tr>
<tr><td>Código do Volume</td></tr>
<tr><td>0226P21202134IL</td></tr>
<tr><td>Título</td></tr>
<tr><td>Prisma – Matemática</td></tr>
<tr><td>Subtítulo</td></tr>
<tr><td>Funções e Progressões</td></tr>
<tr><td>Autores</td></tr>
<tr><td>José Roberto Bonjorno
José Ruy Giovanni Júnior
Paulo Roberto Câmara de Sousa</td></tr>
<tr><td>Outras Informações</td></tr>
<tr><td>1. ed. – São Paulo: FTD, 2020</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023)

Na análise da parte investigada deste volume, nota-se que os conteúdos desenvolvidos têm o propósito de estimular a curiosidade intelectual dos estudantes por meio da investigação de diversas situações-problema, tanto dentro do contexto da

Matemática quanto em outros contextos, incentivando a interpretação de dados para a resolução de problemas de forma reflexiva e crítica. Além disso, é perceptível que essa parte também aborda de forma superficial o uso do pensamento computacional em algumas atividades.

Assim, podemos inferir que os procedimentos explicativos têm como objetivo aprimorar a compreensão dos estudantes em relação aos conceitos relacionados ao conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, buscando desenvolver a autonomia deles na resolução de problemas.

Nessa análise, foi possível identificar que as abordagens visam o desenvolvimento das competências gerais 1, 2, 4, 7, 9 e 10, bem como das competências específicas 1, 3, 4 e 5 da área de Matemática e suas Tecnologias, conforme listado pela BNCC (BRASIL, 2018). Vale ressaltar que nesta parte também são apresentadas atividades que estão conectadas tanto com a área da Ciências Naturais e suas Tecnologias como também da Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, o que possibilita o desenvolvimento das competências específicas dessas áreas, conforme estabelecido pela referida base curricular.

Na temática desta pesquisa, a abordagem é apresentada como um tópico no Capítulo 1 - Funções definidas por mais de uma sentença. Nesse contexto, no Quadro 21, são listados os principais conceitos matemáticos e habilidades específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, explorados nessa parte do livro.

Observando o Quadro 21, é possível notar que o objeto matemático analisado é apresentado de forma relevante, uma vez que compreende um capítulo que atende aos tópicos e subtópicos elencados. O código final do manual, 134IL, indica que este é o segundo volume da coleção, sugerindo que o exemplar deva ser utilizado no segundo semestre do 1° ano do Novo Ensino Médio, após a utilização do primeiro volume. Dessa forma, o conteúdo sobre Funções definidas por mais de uma sentença tem como pré-requisitos os conteúdos abordados no volume anterior, preparando os estudantes para um aprendizado progressivo e consistente na área da Matemática.

Quadro 21 – Conteúdo programático do LDM8

<table>
<tr><th>Capítulo</th><th>Tópicos</th><th>Subtópicos</th><th>Habilidades</th></tr>
<tr><td rowspan="8">1 – Funções Definidas por Mais de uma Sentença</td><td>• Introdução</td><td>---------------------------</td><td rowspan="8">• EM13MAT101
• EM13MAT302
• EM13MAT314
• EM13MAT401
• EM13MAT404
• EM13MAT510</td></tr>
<tr><td>• Funções definidas por mais de uma sentença</td><td>• Domínio, contradomínio e conjunto imagem
• Gráfico</td></tr>
<tr><td>• Funções sobrejetora, injetora e bijetora</td><td>• Função sobrejetora;
• Função injetora;
• Função bijetora</td></tr>
<tr><td>• Função composta</td><td>---------------------------</td></tr>
<tr><td>• Função inversa</td><td>• Gráfico da função inversa</td></tr>
<tr><td>• Módulo de um número real</td><td>• Distância entre dois pontos na reta real</td></tr>
<tr><td>• Função modular</td><td>• Gráfico da função modular</td></tr>
<tr><td>• Equações modulares</td><td>---------------------------</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023)

Na seção de abertura do Capítulo 1 – Funções definidas por mais de uma sentença, é desenvolvida uma reflexão a respeito dos compromissos financeiros de uma família, mencionando o IRPF, seu objetivo e valores. Nesse momento, Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020, p. 10, grifo dos autores), afirmam que “Situações como essa vão nos auxiliar a compreender o estudo de **funções**, em particular as **funções definidas por mais de uma sentença**”. A seguir, são realizados alguns questionamentos pessoais sobre a relação do estudante com essa abordagem, fomentando uma conexão entre o cotidiano dos sujeitos e a temática em questão.

No tópico “Funções definidas por mais de uma sentença”, a ideia do texto da seção de abertura do capítulo é retomada para explorar um modelo matemático que descreve, por meio de tabelas e expressões algébricas, os tributos cobrados no imposto de renda. O Quadro 22 expõe esse fato de forma detalhada.

Quadro 22 – Formalização do conceito segundo LDM8

<table>
<tr><td>Informações</td><td>Vimos que o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF) é um imposto que incide sobre a renda adquirida de fontes no Brasil por contribuintes residentes no país ou no exterior. Esse tributo é cobrado de acordo com uma tabela progressiva, indicando a alíquota correspondente a cada base de cálculo, que depende da renda de cada contribuinte.

Observe a seguir a tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2020.</td></tr>
<tr><td>Tabela</td><td>> Tabela de incidência mensal vigente em 2020
<table>
<tr><th>Base de cálculo (R$)</th><th>Alíquota (%)</th><th>Parcela a deduzir do IRPF (R$)</th></tr>
<tr><td>Até 1.903,98</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>De 1.903,99 até 2.826,65</td><td>7,5</td><td>142,80</td></tr>
<tr><td>De 2.826,66 até 3.751,05</td><td>15</td><td>354,80</td></tr>
<tr><td>De 3.751,06 até 4.664,68</td><td>22,5</td><td>636,13</td></tr>
<tr><td>Acima de 4.664,68</td><td>27,5</td><td>869,36</td></tr>
</table>
Fonte: BRASIL. Ministério da Economia. Secretaria da Receita Federal do Brasil. IRPF (Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas). Brasília, DF, 2015. Disponível em: http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica. Acesso em: 11 jun. 2020.</td></tr>
<tr><td>Abstrações e Processo Resolutivo</td><td>Com base nessa tabela, podemos calcular, por exemplo, o imposto que incide sobre a renda de um trabalhador que teve como base de cálculo mensal o valor de $R\$ \, 3.350{,}00$. Nesse caso, devemos aplicar a alíquota de 15% sobre a base de cálculo e deduzir $R\$ \, 354{,}80$ desse valor. Observe:

$$R\$ \, 3.350{,}00 \cdot 15\% - R\$ \, 354{,}80 = R\$ \, 502{,}50 - R\$ \, 354{,}80 = R\$ \, 147{,}70$$
Logo, o imposto de renda que incide sobre uma base de cálculo de $R\$ \, 3.350{,}00$ mensais é de $R\$ \, 147{,}70$.

Dizemos que a contribuição mensal do imposto de renda, em reais, é uma função da base de cálculo, também expressa em reais, pois cada valor da base de cálculo corresponde a um único valor de contribuição mensal do imposto de renda. A base de cálculo é a variável independente e a contribuição mensal do imposto de renda é a variável dependente.

Leia a seguir a definição matemática de função.</td></tr>
<tr><td>Conceito</td><td>Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma relação que associa cada elemento x de A a um único elemento y de B.</td></tr>
<tr><td>Representação Algébrica</td><td>Para indicar uma função de A em B, podemos escrever $f: A \rightarrow B$ (lê-se: f de A em B).

A função f transforma x de A em y de B, o que pode ser escrito como $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x).</td></tr>
<tr><td>Abstração</td><td>Na situação que estamos estudando, os valores correspondentes à base de cálculo podem ser considerados elementos do conjunto A e os valores de contribuição mensal de imposto de renda, como elementos do conjunto B. Com base na tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2020, considerando x os valores correspondentes à base de cálculo e $f(x)$ a contribuição mensal do imposto de renda, podemos escrever uma lei de formação para representar essa função. Observe:</td></tr>
</table>

Representação Algébrica	$f(x) = \begin{cases} 0, se\ \ x \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075 - 142{,}80, se\ 1903{,}99 \leq x \leq 2826{,}65 \\ 0{,}15x - 354{,}80, se\ 2826{,}65 \leq x \leq 3751{,}05 \\ 0{,}225x - 636{,}13, se\ 3751{,}06 \leq x \leq 4664{,}68 \\ 0{,}275x - 869{,}36, se\ x > 4664{,}68 \end{cases}$
Formulação	Funções como a que modela a contribuição mensal do imposto de renda de acordo com a base de cálculo são denominadas funções definidas por mais de uma sentença.

Fonte: Pesquisador (2023) inspirando em LDM8 (2020, p. 13-14)

Nesse Quadro 22, nota-se que o LDM8 aborda a Função definida por mais de uma sentença por meio do exemplo da contribuição mensal do imposto de renda com base na tabela de incidência mensal do IRPF. Essa abordagem estabelece uma conexão entre os conceitos matemáticos e a aplicação prática do imposto de renda, permitindo aos estudantes compreender como calcular a contribuição mensal com base na faixa de renda em que se encontram.

Essa abordagem é consistente com as ideias de Trindade e Moretti (2000) e Stewart (2014), que reconhecem e reforçam a importância das múltiplas representações de uma função. Isso proporciona uma visão holística das Funções definidas por mais de uma sentença, estimulando o pensamento crítico e a aplicação do conhecimento matemático em diferentes situações.

No entanto, para aprimorar a compreensão do conceito de Funções definidas por mais de uma sentença, seria benéfico que o LDM8 fornecesse mais exemplos práticos e explorasse diferentes situações-problema relacionadas ao cotidiano dos estudantes. Esses exemplos adicionais ajudariam os estudantes a visualizar as diferentes formas de representação dessas aplicações e a compreender melhor sua utilidade e aplicação em diferentes contextos da vida real.

Quanto à habilidade EM13MAT404, o LDM8 atende ao abordar a Função definida por mais de uma sentença, fornecendo uma representação algébrica da função que permite aos estudantes observar as diferentes sentenças que compõem esse objeto matemático.

Na sequência, o exemplar apresenta dois exemplos de Funções definidas por mais de uma sentença de forma algébrica, sendo uma com duas sentenças e outra com três.

No subtópico “Domínio, contradomínio e conjunto imagem”, esses conceitos são definidos de forma verbal e simbólica, porém sem nenhuma representação gráfica ou ilustração de diagramas. Já no subtópico “Gráfico”, é fornecido um passo a passo para o esboço do gráfico de uma Função definida por mais de uma sentença, sem o uso de tecnologias digitais. Dessa forma, enfatiza-se a construção por etapas de uma aplicação definida por três sentenças, destacando a lei de formação que determina cada uma das partes da função e orientando para a inclusão coesa de bolinhas fechadas e abertas no gráfico. Nesse momento, são também evidenciados o domínio, contradomínio e imagem dessa aplicação.

Na seção “Atividades resolvidas”, são apresentadas duas questões definidas por mais de uma sentença de forma algébrica. Na primeira, é utilizado o processo de transformação numérica, enquanto na segunda, é enfatizada a construção gráfica.

Na seção “Atividades”, a questão 1 apresenta uma situação problema com o uso de tabelas, revelando como o ensino de Matemática escolar pode ser contextualizado na porcentagem das vendas de alarmes de carro, ou seja, em práticas sociais. Essa tarefa é uma aplicação dos conceitos matemáticos em uma situação real. Os vendedores precisam saber como calcular o valor da comissão, o que é feito por meio de uma modelagem matemática. Além disso, é preciso interpretar a matemática envolvida nesse tipo de contexto para acompanhar a evolução do recebimento de comissões e, ainda, construir argumentos plausíveis para negociar valores e percentuais. É importante destacar que o domínio da função, nesse contexto, é o conjunto dos números naturais, pois refere-se às unidades vendidas. Ao construir um gráfico representativo dessa situação, são obtidos pontos do plano cartesiano.

Já as questões 2 e 3 também utilizam a expressão algébrica para explorar o processo de transformação numérica. A questão 4 utiliza a expressão algébrica para desenvolver a construção gráfica. Por sua vez, a questão 5 usa o esboço gráfico para explicar a lei de formação. A questão 6 também é apresentada em forma de situação problema, contextualizando o ensino de Matemática escolar com a situação da tarifa do gás. Nessa tarefa proposta, para determinar a lei de uma função f, definida por mais de uma sentença, que modela os valores a serem pagos pelo consumo de gás, é preciso considerar o valor fixo correspondente ao total consumido, adicionado aos resultados dos produtos por faixa de consumo entre o volume consumido e o valor variável correspondente, como exemplificado na atividade. Dessa forma, a atividade explora o processo de abstração das informações.

Na seção “Conexão”, é apresentado um texto intitulado “Consumo consciente de água”, que explora a conscientização sobre esse recurso e como analisar um aviso de conta de água. A partir do tema consumo de água, são propostas atividades que possibilitam a compreensão e a utilização de diferentes registros de representação matemáticos para solucionar os problemas, desenvolvendo a competência específica 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, bem como os temas da “Educação Ambiental” e “Educação para o Consumo”. Após a apresentação de uma tabela de consumo, a seção explora a aplicação do ensino de Funções definidas por mais de uma sentença.

No tópico “Funções sobrejetora, injetora e bijetora”, a quarta questão da seção de “Atividades resolvidas” utiliza uma representação gráfica de uma função definida por duas sentenças para analisar a possibilidade da aplicação ser bijetora. Já a nona questão da seção “Atividades” exibe o gráfico de uma Função definida por mais de uma sentença para explorar não apenas a possibilidade da aplicação ser injetora, mas também os intervalos numéricos correspondentes ao domínio e à imagem.

Os tópicos “Função composta”, “Função inversa”, “Módulo de um número real” e “Equação modular” não abordam diretamente as Funções definidas por mais de uma sentença. No entanto, os dois últimos são considerados importantes para a temática e funcionam como pré-requisitos para as próximas abordagens.

No tópico “Função modular”, é apresentada inicialmente a definição dessa aplicação, ressaltando que ela é um caso particular da Função definida por mais de uma sentença. Em seguida, no subtópico “Gráfico da função modular”, é explorada a construção gráfica com ênfase no processo de translação. Para isso, considera-se uma aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x + a| + b$, e informa que o gráfico de f pode ser obtido por meio de translações do gráfico da função definida por $f(x) = |x|$. Essa abordagem busca estabelecer uma conexão entre a Função modular e a Função definida por mais de uma sentença, destacando a relação entre ambas e reforçando a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Isso mostra também que esse contexto se aproxima das ideias de Funções poligonais, conforme discutido por Lima (2021).

A questão 10 da seção “Atividade resolvida” aborda a lei de formação de Função modular quadrática, apresentando dois processos para construção do esboço gráfico, um deles é a reflexão em relação ao eixo x da parte negativa do gráfico. Além disso, identifica a imagem dessa aplicação.

Na seção “Atividades”, a questão 31 aborda a Função modular para processo de transformação numérica, enquanto a questão 32 explora a construção gráfica para desenvolver a lei de formação e identificar o conjunto imagem da aplicação. As questões 33 e 35 apresentam a Função modular de forma algébrica para aprimorar a construção dos esboços gráficos das funções sem o uso de tecnologias digitais. Por outro lado, as questões 34 e 37 apresentam situações-problema que tratam, respectivamente, sobre o preço de um produto agrícola e a distância entre objetos. Dessa forma, o conteúdo é contextualizado, aproximando conhecimentos matemáticos das possíveis vivências dos estudantes. Além disso, as questões 43 e 44 de vestibulares envolvem a construção gráfica para facilitar a visualização de pontos relevantes, sendo que a última também destaca a lei de formação.

Na seção “Explorando a tecnologia”, é utilizado o $software$ GeoGebra para construção e manipulação gráfica de Funções modulares e/ou Funções afins. Além disso, explana como a interseção de duas aplicações gera a solução de uma equação modular.

Já na seção “Atividades complementares”, a questão 1 apresenta a expressão algébrica de uma Função definida por três sentenças para abordar sua construção gráfica. A questão 6 apresenta uma situação-problema com o uso da expressão algébrica para discutir sobre um certo lucro, promovendo a contextualização do ensino de Matemática. Por fim, a questão 7 explora a construção gráfica para desenvolver a visualização dos pontos relevantes nesse esboço. Todas essas questões são retiradas de vestibulares.

Nessa obra, especialmente no primeiro capítulo, percebe-se uma abordagem explicativa que se concentra nas performances sociais de contextos globais, com ênfase na compreensão dos conceitos matemáticos para a resolução de problemas. O *software* GeoGebra é adotado como uma Tecnologia Digital que facilita a construção e manipulação de Funções modulares, bem como a visualização das soluções de equações modulares. A contextualização do conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença é promovida por meio de situações-problema que exploram o uso de diferentes representações. Desse modo, além de contextualizar o ensino de Matemática escolar, essa abordagem possibilita que o estudante seja capaz de utilizar a linguagem Matemática para se expressar e escolher a representação mais adequada (algébrica, gráfica, etc.) para modelar cada situação.

Embora as abordagens tentam contribuir para a formação de um cidadão capaz de ler, interpretar e comunicar informações em diversas áreas do conhecimento, é observado que a maioria das questões apresenta aspectos técnicos e repetitivos.

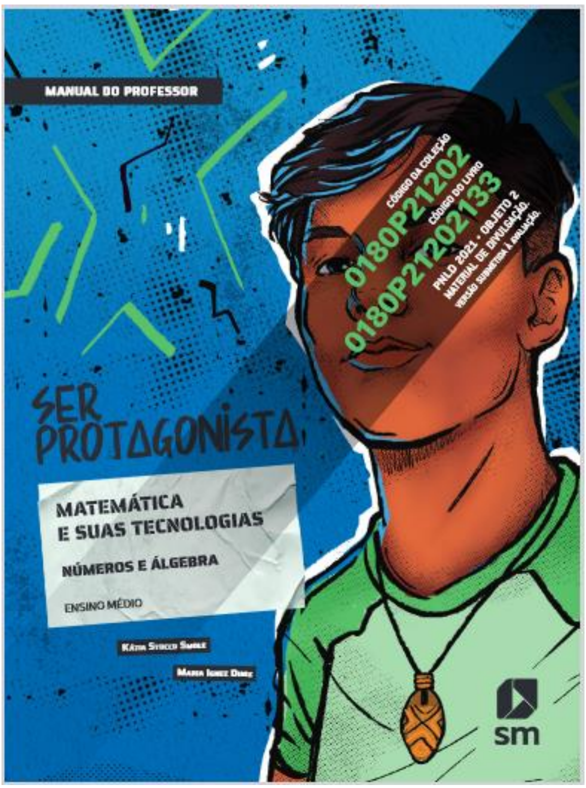
Nessa parte do livro, é possível constatar o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), na exploração do conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, enfatizando tanto os aspectos pedagógicos como os abstratos. É importante ressaltar que essas abordagens também atendem às competências gerais e específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, bem como de outras áreas da base curricular supracitada.

Nessa análise, foi possível observar que os autores, Bonjorno, Giovanni Jr. e Sousa (2020), utilizam uma abordagem atrativa, explorando fatos ligados à sociedade atual. Essa abordagem pedagógica reflete uma formação diferenciada com novas perspectivas de ensino, buscando preparar os estudantes para o mundo contemporâneo e futuro. Conforme mencionado por D'Ambrósio (2012), "O conhecimento está subordinado ao exercício pleno da cidadania e, consequentemente, deve ser contextualizado no momento atual, com projeções para o futuro" (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 79). Dessa forma, as abordagens buscam preparar os indivíduos para o mundo atual e para o que está por vir.

4.6 LDM10

A seguir, será apresentada uma análise e discussão do LDM10, e as principais características de identificação dele estão apresentadas no Quadro 23, logo abaixo. Os conteúdos desse volume são organizados em duas unidades, que por sua vez, estão divididos em cinco capítulos. Esses capítulos combinam textos, imagens, quadros e seções, com o objetivo de ampliar os conhecimentos matemáticos.

Quadro 23 – Identificação do LDM10

<table>
<tr><th>Código da Coleção</th><th>Ilustração da Capa do Livro</th></tr>
<tr><td>0180P21202</td><td rowspan="13">
</td></tr>
<tr><th>Código do Volume</th></tr>
<tr><td>0180P21202133IL</td></tr>
<tr><th>Título</th></tr>
<tr><td>Ser Protagonista – matemática e suas tecnologias</td></tr>
<tr><th>Subtítulo</th></tr>
<tr><td>Números e Álgebra</td></tr>
<tr><th>Autoras</th></tr>
<tr><td>Katia Stocco Smole
Maria Ignez Diniz</td></tr>
<tr><th>Outras Informações</th></tr>
<tr><td>1. ed. – São Paulo: Editora SM, 2020</td></tr>
</table>

Fonte: Pesquisador (2023)

Na parte investigada desse volume, é evidente que o mesmo enfatiza a análise de problemas matemáticos, com o objetivo de promover a capacidade de conectar ideias e conhecimentos para construir estratégias de resolução. Além disso, é notável a utilização de diferentes recursos para enfrentar situações-problema relacionadas a outras áreas, vivências dos estudantes e até mesmo suas relações pessoais. O livro também fornece recursos de aprendizagem para encorajar o estudante a se tornar mais persistente e confiante em seu modo de pensar. Nesse sentido, os procedimentos explicativos visam ampliar os horizontes em relação à compreensão dos conceitos relacionados ao conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, abrangendo diversas áreas e focando na resolução de problemas.

Nessa parte analisada, foi possível constatar que as abordagens têm como objetivo desenvolver as competências gerais 1, 2, 4, 7, 9 e 10, bem como as competências específicas 1 e 4 da área de Matemática e suas Tecnologias, conforme listadas pela BNCC (BRASIL, 2018). É importante ressaltar que nessa parte do livro são apresentadas atividades que também estão interligadas com a área de Linguagem e suas Tecnologias e com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

No que se refere à temática desta pesquisa, ela é abordada como um tópico no Capítulo 5, intitulado "Outras Funções" da Unidade 2 – Funções: afins, quadráticas e outras. A temática é denominada como "Funções definidas por partes". No Quadro 24, foram elencados os principais conceitos matemáticos e habilidades específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, exploradas nessa parte do livro.

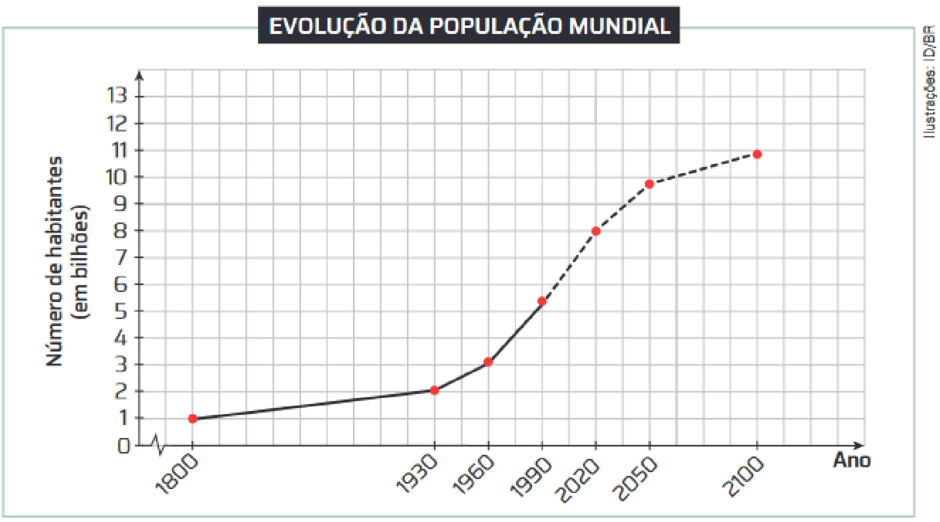
Quadro 24 – Conteúdo programático do LDM10

Unidade	Capítulo	Tópicos	Subtópicos	Habilidades
2 – FUNÇÕES: afins, quadráticas e outras	5. Outras Funções	• As quatro operações básicas entre números e novas funções	---------------------------	• EM13MAT101 • EM13MAT105 • EM13MAT302 • EM13MAT314 • EM13MAT315 • EM13MAT401 • EM13MAT402 • EM13MAT404 • EM13MAT50 • EM13MAT50 • EM13MAT510
		• Funções definidas por partes	---------------------------	
		• Módulo de um número real	• Propriedades do módulo de um número real	
		• Função modular	• Gráfico cartesiano da função modular.	

Fonte: Pesquisador (2023)

No tópico “Função” do Capítulo 2, intitulado “Relações entre Grandezas: funções”, da Unidade 1 – Números e Funções, é apresentado um gráfico que mostra a evolução da população mundial. Esse gráfico é construído por Funções definidas por mais de uma sentença. Nesse contexto, as autoras enfatizam, de forma contextualizada, a relação de correspondência entre as grandezas (variáveis x e y), extrapolando os dados que estão explícitos na representação gráfica. O Quadro 25, a seguir, apresenta essa explicação.

Quadro 25 – Explicação das grandezas

Informação	O gráfico abaixo, por exemplo, relaciona o número y de habitantes da população mundial (em bilhões) e o tempo x (em anos)
Representação Gráfica	 Fontes de pesquisa: Organização das Nações Unidas – Departamento de Dinâmica Populacional dos Assuntos Econômicos e Sociais. Disponível em: https://population.un.org/wpp2019/Graphs/Probabilistic/POP/TOT/900. Iwakura, M. Quantas pessoas já viveram no planeta Terra. Superinteressante, 31 out. 2016. Disponível em: https://super.abril.com.br/comportamento/quantas-pessoas-ja-viveram-no-planeta-terra/. Acessos em: 4 maio 2020.
Abstração	Perceba que os valores de x pertencem ao conjunto dos números naturais e variam no intervalo $[1\,800, 2\,100]$. Além disso, para $x = 1\,800$, o valor de y é aproximadamente 1 bilhão e, para $x = 1\,930$, y é aproximadamente 2 bilhões. Observe que esse gráfico permite visualizar o crescimento da população no período de 1800 a 1990 e a previsão desse crescimento de 1990 a 2100.

Fonte: Pesquisador (2023) inspirando em (2020, p. 50)

No capítulo mencionado, no tópico “Domínio, contradomínio e conjunto imagem”, é evidente o uso novamente da visualização gráfica de uma Função definida por mais de uma sentença para relacionar a expectativa de vida mundial e desenvolver a compreensão de domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função. O gráfico apresentado mostra que o domínio da aplicação é $[1800, 2100]$, o contradomínio é $[0, 90]$, e o conjunto imagem é $[29, 82]$. Nas seções “Problemas e exercícios resolvidos” e “Problemas e exercícios propostos”, as questões R3 e 19, respectivamente, exploram Funções definidas por duas sentenças de forma algébrica, abordando o processo de transformação numérica e a correspondência entre domínio e imagem.

Nessa parte do livro LDM10, podemos observar exemplos concretos de Funções lineares por trechos (KIME; CLARK; MICHAEL, 2014). As abordagens pedagógicas destacam o uso dessas aplicações para representar situações reais, mostrando como os gráficos são formados por segmentos lineares em diferentes intervalos de tempo. Essas atividades permitem aos estudantes compreenderem a natureza segmentada dessas funções e sua aplicação em problemas da vida real. As questões e exercícios propostos enfatizam a visualização gráfica, transformações e correspondências entre domínio e imagem, contribuindo para uma formação matemática mais completa.

No tópico “Gráfico de função”, é apresentada outra visualização gráfica para explorar intervalos de crescimento e decrescimento. Isso é demonstrado na questão R4 da seção “Problemas e exercícios resolvidos”. Já a questão R5 exibe gráficos para identificar visualmente quando uma representação geométrica corresponde a uma função. A questão 25 da seção “Problemas e exercícios propostos”, também trabalha esse tipo de tarefa. Além disso, na questão 36, um esboço gráfico é utilizado para desenvolver a correspondência entre o domínio e o conjunto imagem da aplicação dada. O item b) dessa questão busca aprimorar a linguagem Matemática, apresentando um gráfico e solicitando a elaboração de uma questão relacionada a ele.

Na citada seção, as questões 24, 29 e 30 apresentam situações-problema que contextualizam o ensino de Matemática, permitindo aos estudantes desenvolver as habilidades EM13MAT404 e contribuir com a aquisição da competência geral 9 (BRASIL, 2018). Esses momentos promovem a cultura de paz, exercitando a empatia e o respeito às diferentes opiniões.

Na seção “Por dentro do Enem e dos vestibulares”, uma questão aborda os esboços gráficos de Funções definidas por mais de uma sentença de forma contextualizada, com informações e dados que precisam ser abstraídos para identificar a solução correta. Esse tipo de situação é solicitado em duas questões subsequentes, mostrando que o ensino de Matemática é contextualizado com situações-problema.

No Capítulo 3 – Funções afins, da Unidade 2 – Funções: afins, quadráticas e outras, a questão 24 da seção “Problemas e exercícios propostos” exibe o gráfico de uma Função definida por mais de uma sentença, explorando procedimentos matemáticos a serem realizados nos intervalos solicitados.

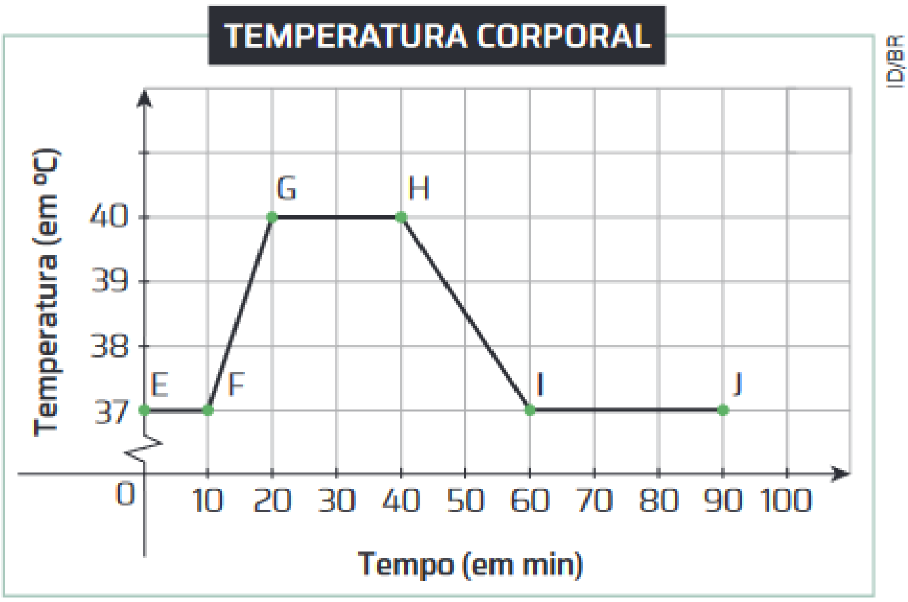
Na citada unidade, no Capítulo 5 – Outras funções, no tópico “Funções definidas por partes”, é apresentada uma situação-problema com a utilização do esboço gráfico da temperatura corporal e a representação algébrica da mesma para mostrar que esse tipo de função é definido por mais de uma sentença. O Quadro 26, a seguir, expõe esse fato.

Nesse citado quadro é possível notar que LDM10, apresenta uma situação-problema que descreve a variação da temperatura corporal de uma pessoa ao longo do tempo. Ao analisar o gráfico e a representação algébrica da Função definida por partes, os estudantes podem identificar padrões em um fenômeno real, conforme destacado por Tinoco *et al.* (1996). Essa abordagem mostra como as diferentes situações de temperatura se relacionam com o tempo.

Entretanto, é importante notar que a formalização do conceito de Funções definidas por partes é feita de maneira intuitiva, sem uma explicação matemática explícita. Nesse sentido, seria benéfico se o LDM10 oferecesse uma fundamentação matemática mais sólida para a definição e formalização dessas aplicações, através de definições formais e propriedades específicas. Isso auxiliaria os estudantes a compreenderem melhor esse tipo de função e suas características.

No que concerne à habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018), o LDM10 promove uma abordagem enfática da Função definida por partes, proporcionando aos estudantes a oportunidade de compreender e explorar a variação da temperatura corporal ao longo do tempo. Por meio dessa situação-problema, o livro permite aos estudantes desenvolver a capacidade de representar graficamente e algebricamente essa função, o que auxilia no entendimento de conceitos matemáticos aplicados a fenômenos reais.

Quadro 26 – Formalização do conceito segundo LDM10

Situação-Problema	O corpo humano apresenta uma temperatura normal entre 36 °C e 37,5 °C. Uma pessoa adoeceu e sua temperatura subiu para 40 °C, o que significa febre bem alta. Ela tomou um medicamento e após 20 minutos a febre baixou até voltar a 37 °C. O gráfico a seguir mostra a variação da temperatura corporal dessa pessoa ao longo do tempo.
Representação Gráfica	 Dados obtidos pelo paciente.
Abstração	Esse gráfico pode ser descrito por diferentes funções afins e funções constantes. Chamando de f a função que engloba todas elas e de x o tempo, temos:
Representação Algébrica	$f(x) = \begin{cases} 37, se \ \ 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{3}{10}x + 34, se \ 10 \leq x \leq 20 \\ 40, se \ 20 \leq x \leq 40 \\ -\frac{3}{20}x + 46, se \ 40 \leq x \leq 60 \\ 37, se \ x \geq 60 \end{cases}$
Formalização	Esse é um exemplo de uma função definida por parte

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado em (2020, p. 143)

A seguir, na questão R1 da seção “Problemas e exercícios resolvidos”, é apresentada uma situação-problema com o uso de uma tabela para explorar a formalização algébrica da função. Já a R2 é uma questão do Enem que aborda a composição do salário de um vendedor para identificar a representação gráfica dessa situação-problema. Em ambas as questões, o ensino de Matemática é contextualizado.

Essa proposta de abordagem está presente nas questões 4, 5 e 6 da seção “Problemas e exercícios propostos”. Nessa seção, a questão 7 usa a expressão algébrica de uma Função definida por três sentenças para explorar a construção do esboço gráfico, enquanto a questão 8 utiliza a visualização gráfica para desenvolver a criatividade e a linguagem Matemática.

No tópico “Função modular”, é abordada a definição de uma Função modular. Já no subtópico “Gráfico cartesiano da função modular”, são exibidas as construções gráficas das Funções modulares, com ênfase no eixo de simetria para o procedimento da reflexão.

Na sequência, temos a seção “Problemas e exercícios propostos”, onde é evidenciado o desenvolvimento na exploração gráfica da Função modular na questão 21, por meio de uma tabela, e nas questões 23, 24, 25 e 26, pela expressão algébrica modular da aplicação. Além disso, as questões 22 e 27 abordam a visualização gráfica para encontrar, respectivamente, a lei de formação e os pontos relevantes do gráfico.

Na seção “Matemática e cidadania”, é apresentado um texto denominado “impostos e tributos”, onde é enfatizado o imposto de renda e, consequentemente, trabalhada a utilização dos conhecimentos de Funções definidas por mais de uma sentença. Dessa forma, o ensino de Matemática é contextualizado. Na seção “Por dentro do Enem e do vestibular”, é apresentada uma questão do Enem em contexto que evidencia o valor pago pelas faixas de consumo de água. Dessa forma, é explorado um processo resolutivo da questão com a utilização de questionamentos que norteiam os passos dessa Função por partes.

Em relação a parte analisada deste livro, percebe-se uma abordagem explicativa direcionada uma performance social de contextos globais com ênfase na compreensão dos conceitos matemáticos e sua aplicação na resolução de problemas. Embora não introduza tecnologias digitais para explorar Funções definidas por mais de uma sentença, o livro enfatiza os procedimentos reflexivos para construir os gráficos das Funções modulares. A contextualização do conteúdo é promovida por meio de diferentes situações-problema, aproximando os conhecimentos matemáticos da vida cotidiana e futura dos estudantes. Dessa forma, as abordagens buscam desenvolver a capacidade dos estudantes em resolver problemas em diversas situações, tanto no ambiente escolar quanto fora dele. Isso contribui para o desenvolvimento não apenas das competências gerais e específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, mas também de outras áreas definidas pela BNCC (BRASIL, 2018).

Nesse contexto, a habilidade EM13MAT404 da BNCC (BRASIL, 2018) é contemplada nas duas unidades do livro, sendo abordada de maneira informal, mas com diversas aplicações práticas e teóricas. O exemplar busca motivar os estudantes ao apresentar temas diversos relacionados a consumo, saúde, impostos, taxas, entre outros. No entanto, apesar de estabelecer vínculos entre diferentes componentes curriculares e atender às demandas da sociedade contemporânea com uma abordagem contextualizada dos conhecimentos matemáticos escolares, muitas das questões ainda apresentam aspecto técnico e repetitivo.

Nesta análise, é observado que, apesar de explorar diferentes conceitos, as autoras, Smole e Diniz (2020), enfatizam a importância do saber-fazer. Assim, os objetos analisados possuem uma abordagem pedagógica que incentiva os estudantes a assumirem um papel ativo na construção do conhecimento. Conforme D’Ambrósio (2012, p. 73), “[...] toda teorização se dá em condições ideais, e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente”. Nesse sentido, o conhecimento teórico é apresentado para ser utilizado na prática, permitindo identificar problemas, levantar questionamentos e fazer importantes descobertas.

5 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A análise dos dados desta investigação desempenhou um papel fundamental na identificação de formas mais eficazes de utilizar os conteúdos de Função afim por partes, com foco na contextualização do ensino de Matemática. Com base nessa análise, foi possível desenvolver uma sequência didática que representa o produto educacional resultante desta pesquisa.

Dessa forma, neste capítulo, será apresentada uma sequência didática para o ensino de Função afim por partes, destinada à disciplina de Matemática do primeiro ano do Ensino Médio. Seguindo a definição de Zabala (2007, p. 18), sequência didática é "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, com um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos".

A sequência didática foi cuidadosamente elaborada levando em consideração os objetivos de ensino elencados pela BNCC (BRASIL, 2018). Sendo assim, para a construção das tarefas de ensino, foram selecionadas situações-problema dos livros didáticos analisados, as quais foram adaptadas e transformadas em contextos comunitários e globais. A finalidade dessas situações-problema é estimular os estudantes a desenvolver habilidades essenciais para enfrentar desafios reais e transferir conhecimentos para diferentes situações, tanto práticas como teóricas.

A expectativa é que os estudantes tenham uma experiência de aprendizagem enriquecedora, despertando maior interesse e compreensão em relação aos conteúdos abordados no ensino de Matemática. Contudo, o grande desafio dessa sequência didática está na possibilidade de estimular os professores e estudantes na direção das orientações para o Novo Ensino Médio, no sentido de ir além do conteúdo escolar.

5.1 BNCC

5.1.1 Principal competência específica da Matemática

- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5.1.2 Principal habilidade específica da Matemática

- (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás, etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 544).

5.2 Objetivos da Sequência Didática

5.2.1 Geral da sequência didática

- Promover a capacidade do estudante de aplicar o conceito de Funções definidas por mais de uma sentença para modelar matematicamente as situações reais, imediato ou futuras, de modo a interpretá-las criticamente para a tomada de decisões e formalização de argumentações consistentes.

5.2.2 Específicos da sequência didática

- Interpretar e resolver problemas que envolvam Funções definidas por mais de uma sentença, identificando suas características e propriedades de modo a relacionar suas representações algébricas e gráficas;
- Modelar uma situação contextualizada por meio de uma função, decidindo pela melhor representação: gráfica, algébrica ou textual;
- Analisar contextos que podem ser modelados por Funções definidas por mais de uma sentença;
- Converter representações algébricas de Funções definidas por mais de uma sentença em representações geométricas, e vice-versa;
- Construir gráficos de Funções definidas por mais de uma sentença utilizando tecnologias digitais.

5.3 Justificativa da Sequência Didática

O Novo Ensino Médio tem como objetivo aprofundar e expandir os conhecimentos adquiridos pelos estudantes no Ensino Fundamental. Nesse contexto, as Funções definidas por mais de uma sentença se apresentam como um tema motivador e relativamente simples, permitindo que os estudantes visualizem a Matemática como uma Ciência aplicada a situações sociais e naturais, estruturada em conceitos e propriedades.

É importante ressaltar que o trabalho com esse tipo de função possibilita abordar desde a análise de quantidades abstratas até situações reais que podem ser representadas de forma algébrica ou gráfica. Esse conteúdo contribui para a consolidação de habilidades que permitem a resolução de problemas em diferentes contextos.

Nesse sentido, é fundamental orientar os estudantes a perceberem que os fenômenos naturais e a realidade ao seu redor podem ser modelados matematicamente. Com essa compreensão, torna-se possível tomar decisões fundamentadas em fatos e agir de forma consciente. Para isso, é necessário dominar o uso de ferramentas algébricas e geométricas associadas às funções, reconhecer diferentes tipos de funções, analisar e construir gráficos de funções no plano cartesiano. Dessa forma, é preciso compreender os efeitos dos coeficientes que contribuem para representar graficamente o comportamento das funções.

Para Carvalho e Lima (2010, p. 22-23), “Compete aos colegas professores, que conhecem várias coleções, complementar alguns conteúdos ou modificar determinadas abordagens presentes naquela que foi adotada em sua escola”. Nessa perspectiva, foi elaborada uma sequência didática que seleciona e adapta detalhes de diferentes questões dos livros didáticos analisados. Conforme observa Lajolo (1996, p. 9), “Nenhum livro didático, por melhor que seja, pode ser utilizado sem adaptações”. Dessa forma, essa produção valoriza todas as coleções analisadas, reunindo em um único material aquilo que se considera o melhor para alcançar os objetivos de trabalho propostos.

Ao utilizar esta sequência didática, é essencial que os professores compreendam que as atividades podem ser adaptadas de acordo com as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Como enfatiza Meirieu (1998, p. 117), “[...] o que importa é transformar um objetivo programático em um dispositivo didático, e isso só é possível por meio da busca das condições que garantam seu êxito”. Dessa forma, a adaptação das atividades de acordo com o contexto e as necessidades dos estudantes é crucial para o sucesso da aplicação da sequência didática.

Espera-se que as abordagens dos conhecimentos relacionados às Funções afins por partes, exploradas nesta sequência didática, ampliem os horizontes dos estudantes, permitindo que eles reconheçam a aplicação desses conceitos matemáticos em diferentes contextos, tanto teoricamente quanto na prática. Sendo assim, esses participantes serão incentivados a relacionar esses conceitos com situações do seu cotidiano, tornando a aprendizagem mais relevante.

Ao mesmo tempo, os professores que adotarem essa proposta de ensino devem compreender a importância de replanejar as atividades, adaptando-as às necessidades e características dos seus estudantes. Essa flexibilidade é fundamental para garantir uma experiência de ensino e aprendizagem relevante, promovendo o engajamento dos participantes e maximizando seu progresso acadêmico.

5.4 Metodologia da Sequência Didática

Serão propostas cinco tarefas de aplicação que têm como objetivo aproximar os conteúdos matemáticos escolares das experiências vividas pelos estudantes. Essas tarefas devem ser realizadas após a exploração do ensino de Função afim. Recomenda-se que, nesse momento, seja introduzida a formalização da Função definida por mais de uma sentença, com ênfase nas Funções afins por partes. Cada uma das tarefas está programada para ser desenvolvida ao longo de duas aulas, com duração de 50 minutos cada.

A tarefa I foi planejada com o intuito de fortalecer os conhecimentos sobre funções e proporcionalidade em sala de aula. Para isso, foram feitas adaptações nas questões LDM1 e LDM4, de modo a criar atividades individuais que explorem, de forma contextualizada, a relação de dependência entre grandezas e o processo de transformação numérica e abstração dos dados para a formalização da lei de formação da Função afim por partes.

Nessa abordagem, é importante que o professor atue como mediador do conhecimento, observando especialmente a argumentação de cada estudante durante suas respectivas justificativas. Vale ressaltar que, como afirma D’Ambrósio (2009, p. 80), o professor possui um novo papel e este “[...] será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o estudante na produção e crítica de novos conhecimentos”.

A tarefa II segue a mesma abordagem da anterior, porém com ênfase nas representações algébricas e gráficas da Função afim por partes, realizada fora da sala de aula. Para isso, as atividades individuais foram adaptadas das questões LDM1 e LDM3, visando ampliar os conhecimentos dos estudantes de forma contextualizada, promovendo a reflexão sobre os conceitos matemáticos explorados e estimulando a criatividade.

Nesse contexto, o professor desempenha um papel importante ao avaliar o desenvolvimento de cada estudante por meio da análise das atividades recebidas. Essa avaliação permitirá ao professor determinar se é necessário reforçar os conhecimentos abordados ou se é possível dar continuidade à sequência de ensino.

A tarefa III aborda o tema dos impostos, e foi planejada para ser realizada de forma coletiva em sala de aula. O professor irá dividir a turma em grupos de quatro ou cinco estudantes, assumindo o papel de mediador do conhecimento. Será enfatizado que o valor do salário a ser considerado no orçamento deve ser o valor líquido, ou seja, já descontando os impostos, como o INSS, entre outros.

É importante abordar esse assunto interdisciplinarmente, relacionando-o com outras áreas do conhecimento, para que os estudantes compreendam de maneira mais abrangente como os impostos funcionam e para que eles servem, em particular o imposto de renda. Eles precisam desenvolver a ideia de que os impostos são uma forma do governo obter recursos para manter os serviços públicos, além de adquirir uma compreensão mais profunda do sistema econômico brasileiro.

Nessa abordagem, a discussão sobre faixas salariais pode levar a um debate sobre a tributação de grandes fortunas. Como esse é um assunto delicado, é importante apresentar os fundamentos históricos e sociais para ajudar os estudantes a compreender e argumentar de maneira coerente.

É relevante ressaltar que as atividades foram adaptadas a partir da combinação de textos e questões presentes em LDM5, LDM8 e LDM10. Para a realização dessas atividades, será necessário utilizar tecnologias digitais, como o GeoGebra, que possui versões em software, aplicativos e versões online. Sendo assim, será possível utilizar um laboratório de informática ou permitir o uso de smartphones durante a aula.

O planejamento da tarefa IV segue uma abordagem coletiva, mas fora da sala de aula. Isso significa que os grupos formados na tarefa anterior devem se reunir sem a mediação direta do professor para desenvolver as atividades relacionadas ao consumo de gás natural e às contas de água. O objetivo é que os estudantes adquiram autonomia e percebam que podem associar cada faixa de consumo a um tipo de função, além de modelar matematicamente situações reais utilizando diferentes registros de representação, com o intuito de resolver problemas. Essa atividade tem como propósito avaliar os conhecimentos abordados sobre funções.

Nesse contexto, é possível aproveitar a oportunidade para explorar a inclusão de outras pesquisas, como dados sobre água potável, saneamento, informações sobre a gestão dos recursos hídricos no Brasil e a escassez de água. Além disso, pode-se considerar a inclusão de uma pesquisa ou a indicação de um filme relevante, como “WATERWORLD: O Segredo das Águas”[6]. As atividades foram adaptadas a partir dos textos e questões presentes em LDM8. É possível ampliar essa atividade incluindo também o tema das contas de luz.

A tarefa V foi elaborada com o objetivo de familiarizar os estudantes com as questões do Enem, que atualmente desempenham um papel fundamental para o ingresso no Ensino Superior. É importante ressaltar que essas questões apresentam contextos que se aproximam da realidade dos estudantes e mobilizam diferentes conhecimentos estudados, os quais diferem um pouco daqueles encontrados nos livros didáticos utilizados ao longo do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Para essa tarefa, foram selecionadas dez questões para serem resolvidas individualmente em sala de aula, dentro de um período de 50 minutos, utilizando apenas canetas, lápis e folhas de rascunho, sem a utilização de recursos adicionais. É relevante destacar que a última questão aborda também conteúdos relacionados às Funções quadráticas, estimulando a abordagem que provavelmente será explorada posteriormente pelo professor. As questões foram retiradas dos exemplares investigados.

Com essa atividade, espera-se que os estudantes estejam preparados para compreender os enunciados e resolver problemas, estando mais bem preparados para os desafios apresentados pelo Enem.

[6] Esse filme americano da *Universal Pictures* de 1995, tem duração de 135 min e foi dirigido por Kevin Reynolds. Trata de um futuro em que não há terra sólida no planeta Terra em razão do derretimento das calotas polares. Diante disso, os personagens saem em busca de um suposto local com terra firme.

5.5 Avaliação da Sequência Didática

A avaliação diagnóstica do conteúdo abordado pode ser realizada nas duas primeiras tarefas, fornecendo ao professor a oportunidade de verificar se os estudantes compreendem as Funções definidas por mais de uma sentença, com ênfase na Função afim por partes. Com base nessa avaliação, o professor pode decidir continuar com a sequência ou intervir com reforço adicional da aprendizagem, se necessário.

Nas tarefas III e IV, além de analisar os conhecimentos matemáticos abordados, é possível avaliar a participação dos estudantes nas atividades práticas de forma coletiva, identificando o grau de compreensão das temáticas trabalhadas.

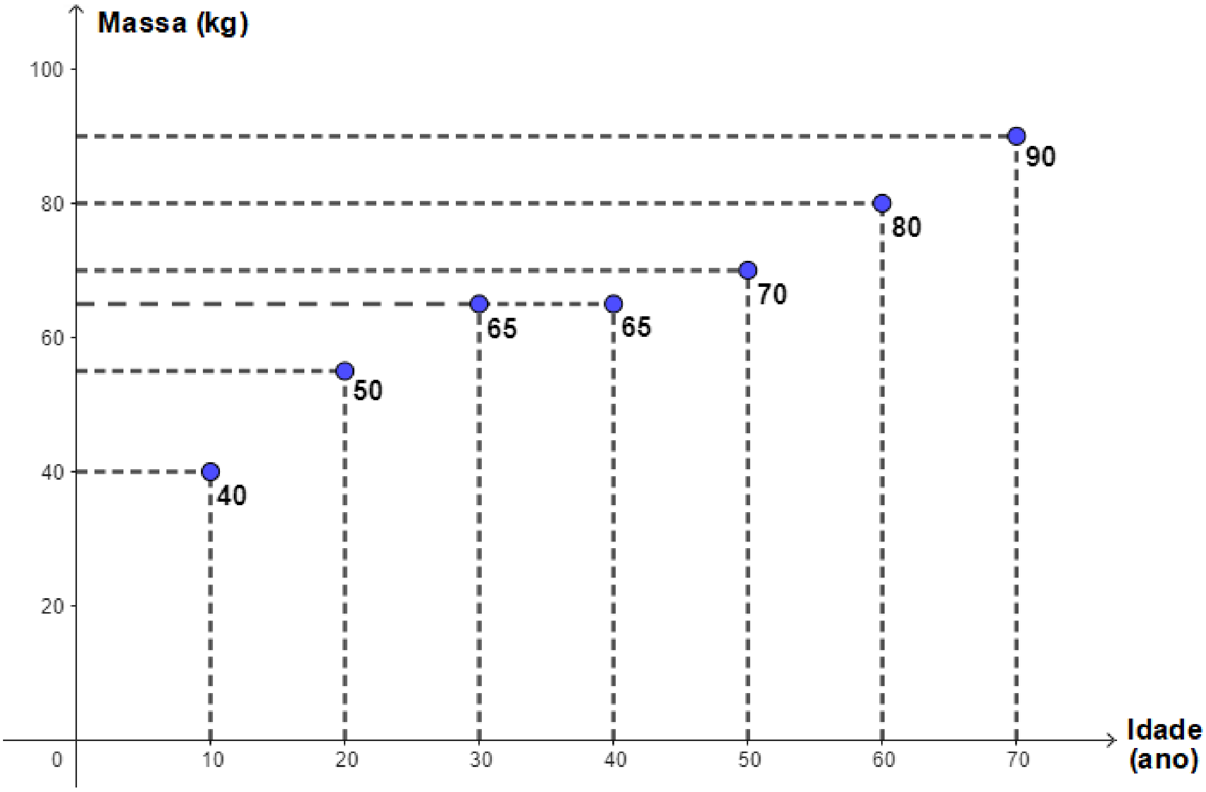
A última tarefa tem como objetivo fornecer uma avaliação quantitativa do desenvolvimento dos estudantes em relação às questões de acesso ao Ensino Superior. O gabarito das questões da tarefa V pode ser encontrado no Apêndice B.

No geral, os resultados obtidos nessas avaliações podem fornecer subsídios para analisar a necessidade de planejar intervenções e projetar novas práticas que preparem os estudantes para o aprendizado de novos conteúdos.

5.6 Tarefa I

1. Uma estudante encontrou um caderno de sua vovó que sempre se pesou e registrou os dados nele. Veja, no gráfico abaixo, como variou a massa da vovó a cada 10 anos de sua vida.

Figura 16 – Massa da Vovó



Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado em LDM1 – Questão 10 (2020, p. 90)

a) Pode-se concluir que a massa da vovó é diretamente proporcional à idade? Justifique.

b) Pode-se afirmar que, entre os 30 e os 40 anos, a massa da vovó não se alterou? Justifique.

c) É verdade que a massa da vovó aumentou mais rapidamente do nascimento até os 10 anos? Justifique.

2. Um estudante observou que o aquecedor de uma estufa é ligado quando a medida de temperatura chega a $0\ °C$. Sabendo que essa medida de temperatura em graus Celsius varia linearmente com a medida de intervalo de tempo em minutos, verificou-se que:

- transcorridos 5 minutos, a medida de temperatura era $10\ °C$;
- passados exatamente 5 minutos, um mecanismo foi acionado fazendo a variação da medida de temperatura em relação à medida de intervalo de tempo continuar linear, mas em uma proporção diferente;
- transcorridos 10 minutos, a medida de temperatura era $40\ °C$ e, a partir daí, o aquecedor foi regulado para que a medida de temperatura permanecesse constante;
- o aquecedor foi desligado 20 minutos depois de acionado.

a) Utilize régua milimetrada e construa um gráfico que representa essa variação das medidas de temperatura durante os 20 minutos em que o aquecedor esteva ligado.

b) Indique a lei da função que determina essa variação das medidas de temperatura obedecendo às condições indicadas.

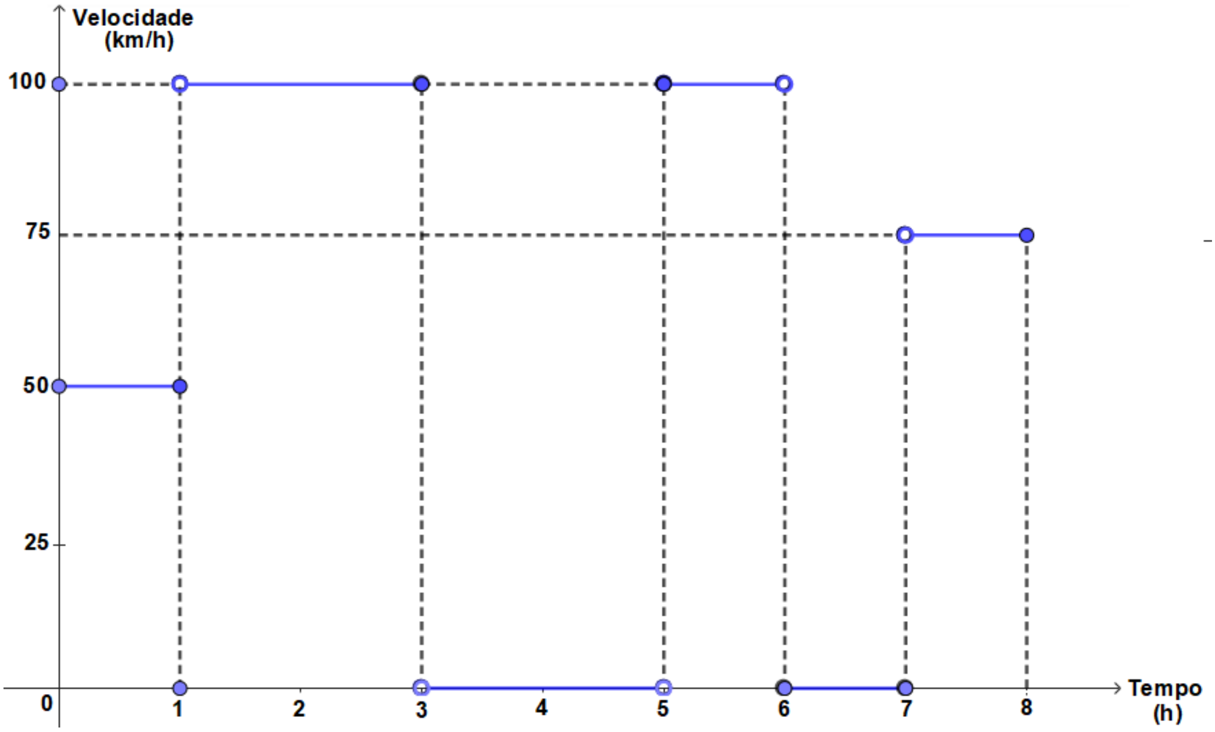
c) Determine a medida de temperatura aos 2 minutos, aos 8 minutos e aos 12 minutos.

d) Em qual intervalo de tempo a temperatura e o tempo decorrido são grandezas diretamente proporcionais? Justifique.

5.7 Tarefa II

1. Uma estudante fez uma viagem de ônibus que durou oito horas. A velocidade média do ônibus variou, em função do tempo, conforme mostra o gráfico abaixo.

Figura 17 – Velocidade



Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado no LDM1 – Questão 7 (2020, p. 89)

a) Escreva a lei da função representada pelo gráfico.

b) Quantos quilômetros o ônibus percorreu nas primeiras três horas de viagem?

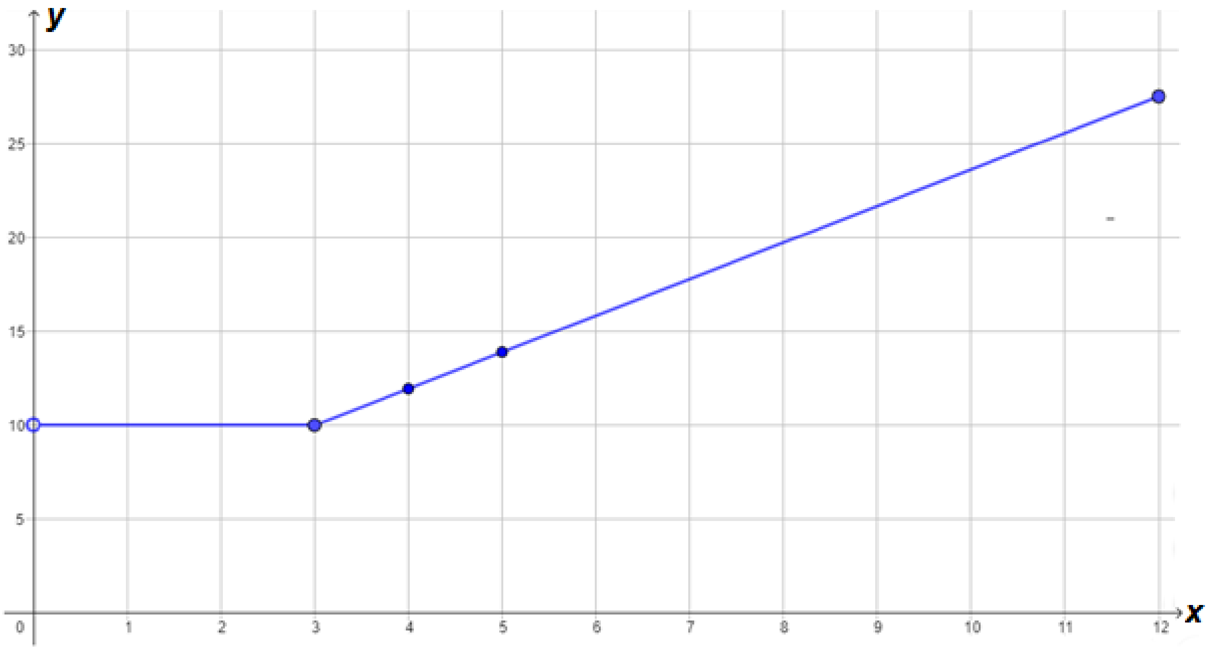
c) Quantas horas o ônibus permaneceu parado nessa viagem?

d) Para essa estudante chegar ao mesmo destino em sete horas, o que deveria mudar nessa situação?

Estacionamento Rotativo

Um estudante percebeu que existe uma cobrança fixa de $R\$\ 10{,}00$ para até 3 horas de estacionamento, e a partir desse período, é acrescentado $R\$\ 2{,}00$ por hora, considerando a contagem contínua (não apenas no momento em que se completa uma hora adicional). Considerando $f(x)$ como a função que determina o preço para x horas de estacionamento, o gráfico de $f(x)$ será:

Figura 18 – Estacionamento



Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado em LDM3 – Questão 1 (2020, p. 34)

Note que para $x \in [0,3]$ a função é constante, mas para $x > 3$ a função é polinomial do 1º grau. Veja como é possível escrever a lei de formação da função:

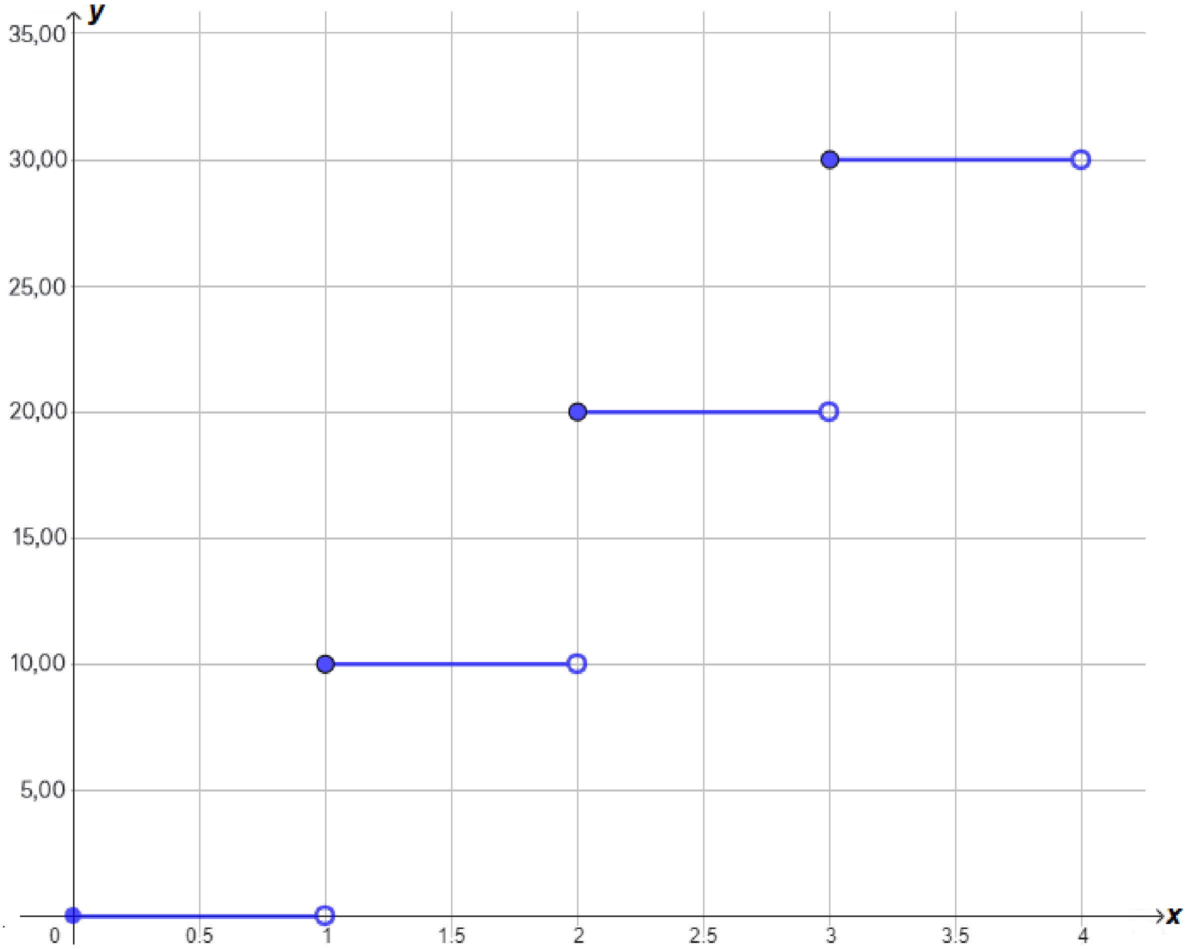
$$f(x) = \begin{cases} 10 \; para \; 0 < x \leq 3 \\ 10 + 2(x-3) para \; x > 3 \end{cases}$$

2. Por que nessa situação, ao descrever a segunda expressão de $f(x)$, multiplicou-se a taxa de variação 2 por $(x - 3)$?

3. O que aconteceria com o gráfico de $f(x)$ se a função estivesse representando o preço de um estacionamento que cobra, após as 3 primeiras horas, 2 reais por hora completa? Por exemplo, um carro estacionado por $3h30min$ ou por $3h59min$ pagaria os mesmos $R\$\ 12{,}00$, enquanto um carro estacionado por $4\ h$ pagaria $R\$\ 14{,}00$.

4. Observe o gráfico abaixo. Escreva a lei de formação dessa função definida por quatro sentenças e elabore um contexto que possa ser modelado por essa função.

Figura 19 – Criatividade



Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado em LDM3 – Questão 3 (2020, p. 35)

5.8 Tarefa III

Descontos incidentes no salário

No contexto do mundo do trabalho, é importante compreender que o valor do salário registrado no contrato de trabalho e na carteira de trabalho é conhecido como salário bruto. No entanto, é fundamental estar ciente de que o valor efetivamente recebido pelo trabalhador, denominado salário líquido, pode ser diferente devido aos descontos e acréscimos aplicados.

Ao receber o holerite, é possível observar a discriminação dos descontos e acréscimos, que podem ser de natureza fixa ou variar dependendo de certos fatores. Essas informações devem ser detalhadas no holerite, com os valores de referência utilizados para os cálculos.

Dentre os acréscimos ao salário bruto, podemos mencionar as horas extras, comissões, gratificações e benefícios adicionais. Por outro lado, os descontos podem incluir tributos, plano de saúde, descontos por faltas não justificadas, entre outros.

Dois descontos comuns são a contribuição previdenciária para o Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) e o Imposto sobre a Renda Retido na Fonte (IRRF). A contribuição previdenciária para o INSS é destinada a um seguro social público que oferece proteção contra riscos econômicos, como desemprego, acidentes e aposentadoria. Essa contribuição é calculada com base no salário bruto do trabalhador, sendo que a porcentagem da contribuição aumenta de acordo com o valor do salário, até um limite máximo estabelecido.

O valor da contribuição previdenciária é destinado ao INSS, que é responsável por pagar aposentadorias e outros benefícios aos segurados, de acordo com as contribuições realizadas. Os requisitos para a obtenção desses benefícios são definidos por lei.

Já o IRRF é um tributo utilizado para financiar serviços públicos em níveis federal, estadual e municipal. Ele incide sobre a renda e os proventos dos contribuintes que residem no país ou no exterior e recebem rendimentos provenientes de fontes no Brasil. O cálculo do IRRF é feito com base no salário bruto após a dedução da contribuição previdenciária e de outras deduções permitidas. Existem faixas de isenção para os trabalhadores que recebem até determinado valor, e as alíquotas do IRRF variam de acordo com a renda do contribuinte, de forma a garantir que aqueles com menor renda não sejam excessivamente impactados pela tributação.

O valor arrecadado por meio dos descontos de contribuição previdenciária para o INSS e do IRRF é destinado à Receita Federal, órgão responsável pela administração e cobrança dos tributos federais, bem como pelo combate à sonegação fiscal e outros crimes relacionados. Os recursos arrecadados são utilizados para atender diversas necessidades do país, como investimentos em saúde, educação, programas sociais, infraestrutura e outras áreas.

No caso desses tributos, as alíquotas são aplicadas de forma progressiva, ou seja, variam de acordo com faixas de salário. Cada faixa possui uma alíquota específica, e à medida que o salário aumenta e o trabalhador passa para uma faixa de renda superior, a alíquota correspondente também aumenta.

A partir de março de 2020, a contribuição ao INSS passou a ser calculada com base em alíquotas progressivas, ou seja, a alíquota é aplicada somente sobre a faixa correspondente do salário. Isso significa que o percentual descontado do salário total, conhecido como alíquota efetiva, pode variar dentro de uma mesma faixa salarial. O cálculo do IRRF também é realizado por meio de alíquotas progressivas, levando em consideração os salários recebidos ao longo do ano.

O valor é pago à Receita Federal, órgão que administra a cobrança dos tributos federais e atua no combate à sonegação e outros crimes. O dinheiro arrecadado é destinado a diversas necessidades do país, como saúde, educação, programas sociais, obras de desenvolvimento, entre outras. Em ambos os tributos apresentados, o valor da alíquota varia conforme o salário bruto, que é dividido em intervalos chamados de faixas do salário. Sobre cada faixa, são aplicadas alíquotas diferentes, que aumentam quanto maior a faixa.

Em março de 2020, a contribuição ao INSS passou a ser calculada por meio de alíquotas progressivas, ou seja, a alíquota é aplicada somente sobre uma faixa correspondente do salário. Assim, o percentual descontado sobre o salário total, chamado alíquota efetiva, pode variar em uma mesma faixa de salários. Os cálculos do IRRF sobre os salários referentes aos meses do ano também são calculados por meio de alíquotas progressivas.

Em relação ao cálculo IRPF mensal no ano de 2020, ele foi determinado com base na renda do contribuinte, seguindo a tabela a seguir:

Tabela 4 – Incidência mensal

Base de cálculo (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do IRPF (em R$)
Até 1.903,98	-	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,8
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,8
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado em LDM4 – Questão 68 (2020, p. 67)

Note que, conforme a tabela, contribuintes que ganham até R$ 1.903,98 mensais estão isentos do IRPF.

1. Com base nessas informações, faça o que se pede em cada item.

a) Considere um contribuinte que ganha x reais mensais. Como se refere aos valores monetários, na prática, x é um número racional com duas casas decimais (ou uma aproximação racional). Considerando que seria possível calcular o IRPF para qualquer valor de x pertencente a $\mathbb{R}_+^*$, construa no caderno o gráfico de uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, que fornece o IRPF pago mensalmente por esse contribuinte.

b) Em qual(is) intervalo(s) essa função é constante? Em qual(is) intervalo(s) essa função é crescente?

c) Por que as alíquotas são maiores para as faixas salariais maiores?

b) Para que serve o Imposto de Renda? Qual sua função na sociedade?

c) Você acha que essa quantidade de faixas salariais é suficiente? Por quê? Escrevam um parágrafo com suas conclusões.

Em relação contribuição ao INSS, considerando x o salário em reais, pode-se determinar a contribuição previdenciária, descontada no holerite por meio da função h, dada por:

$$h(x) = \begin{cases} 0{,}075 \cdot, se\ 0 < x \leq 1045 \\ 78{,}38 + 0{,}09 \cdot (x - 1045), se\ \ 1045 < x \leq 2089{,}6 \\ 172{,}39 + 0{,}12 \cdot (x - 2089{,}6), se\ 2089{,}6 < x \leq 3134{,}4 \\ 297{,}77 + 0{,}14 \cdot (x - 3134{,}4), se\ 3134{,}4 < x \leq 6101{,}06 \\ 713{,}10, se\ x > 6101{,}06 \end{cases}$$

Note que a função não é definida para valores de x menores ou iguais a zero, pois são referentes aos salários. Além disso, o valor passa a ser fixo para salários acima de R$ 6101,06, que corresponde ao teto salarial. Desse modo, mesmo que alguém receba um salário maior do que esse valor, sua contribuição e benefícios serão definidos com base no valor do teto vigente.

Em relação ao imposto de renda, considerando x o valor base do salário após o desconto da contribuição previdenciária e outras deduções em reais, pode-se determinar o valor do desconto do IRRF por meio da função g, dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 0, se\ 0 < x \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075 \cdot x - 142{,}8, se\ 1903{,}98 < x \leq 2826{,}65 \\ 0{,}15 \cdot x - 354{,}8, se\ 2826{,}65 < x \leq 3751{,}05 \\ 0{,}225 \cdot x - 636{,}13, se\ 3751{,}05 < x \leq 4664{,}68 \\ 0{,}275 \cdot x - 869{,}36, se\ x > 4664{,}68 \end{cases}$$

2. Com base nessas informações, faça o que se pede em cada item.

a) Calcule o desconto referente à contribuição previdenciária para salários próximos aos limites em cada uma das faixas. O que é possível observar sobre o aumento da contribuição para esses valores?

b) Calcule a alíquota efetiva do desconto efetuado em março de 2020 para uma pessoa cujo valor base para o cálculo do IRRF foi R$ 3 000,00.

c) Determine o domínio e o conjunto imagem das funções h e g.

d) Determine o intervalo em que a função g é crescente, decrescente ou constante.

e) Utilizando o GeoGebra, construa os gráficos das funções h e g.

Os recursos arrecadados por meio dos impostos são fundamentais para financiar serviços públicos essenciais, como saúde, educação, infraestrutura e segurança, além de promover a redistribuição da renda e a justiça social. Por essa razão, é crucial conscientizar os indivíduos sobre a importância da tributação na sociedade.

Essa conscientização permite que os cidadãos se envolvam ativamente no processo de arrecadação, aplicação e fiscalização dos recursos públicos. Assim, eles se tornam mais engajados e conscientes de seus direitos e responsabilidades fiscais, podendo acompanhar de perto como o dinheiro público é utilizado e exigir transparência e eficiência na administração desses recursos.

Nesse sentido, a Cidadania Fiscal desempenha um papel crucial na construção de uma sociedade mais consciente e participativa. Ao compreender a função social dos impostos, os cidadãos se tornam agentes ativos na busca por uma gestão pública responsável e comprometida com o bem-estar coletivo.

No Brasil, os cidadãos contribuem com o pagamento de impostos e tributos ao governo federal, estadual e municipal, com o propósito de financiar as atividades governamentais e a prestação de serviços públicos à população. Esses recursos são essenciais para manter o funcionamento dos órgãos governamentais e garantir a oferta de serviços essenciais supracitados.

Dentre os principais impostos pagos pelos cidadãos brasileiros, destacam-se o IRPF, que incide sobre os rendimentos obtidos pelas pessoas físicas, como já sinalizado; o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), que é aplicado sobre a circulação de mercadorias e a prestação de serviços; e o Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), que é devido pelos proprietários de imóveis urbanos.

A Tabela 5, a seguir, foi adotada a partir do exercício de 2017, referente ao ano-calendário de 2016. Ela fornece informações sobre as faixas de renda, alíquotas e parcelas a serem deduzidas do IRPF, auxiliando no cálculo do imposto devido com base na renda do contribuinte. É importante ressaltar que essa tabela pode sofrer alterações anualmente, por isso é essencial consultar as informações atualizadas disponibilizadas pela Receita Federal ou órgãos competentes.

Tabela 5 – Incidência anual

Base de cálculo (em R$)	**Alíquota (em %)**	**Parcela a deduzir do IRPF (em R$)**
Até 22.847,76	-	-
De 22.847,77 até 33.919,80	7,5	1.713,58
De 33.919,81 até 45.012,60	15	4.257,57
De 45.012,61 até 55.976,16	22,5	7.633,51
Acima de 55.976,16	27,5	10.432,32

Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado em LDM10 – Questão 1 (2020, p. 155)

3. Além dos tributos mencionados nos textos, vocês têm conhecimento de outros impostos aplicados no Brasil? Quais são eles e em quais bens e setores ocorrem suas incidências?

4. O ICMS é um imposto sobre a circulação de mercadorias cujas alíquotas variam entre os estados da federação. Realize uma pesquisa para descobrir qual é a alíquota do ICMS aplicada no estado em que você reside. Em seguida, responda às seguintes perguntas:

a) Como o estado utiliza a arrecadação do ICMS?

b) Considerando o custo da cesta básica no estado, calcule o valor do ICMS incidente sobre os produtos da cesta.

5. A tabela abaixo mostra o salário de cinco funcionários de uma empresa.

Tabela 6 – Salário dos funcionários de uma empresa

Funcionário	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Salário (em R$)	2.000,00	2550,00	3.200,00	4.700,00	5.200,00

Fonte: Pesquisadores (2023) inspirados em LDM10 – Questão 3 (2020, p. 156)

A política salarial da empresa prevê aumentos anuais percentuais de 7% para faixas salariais entre R$ 2.000,00 e R$ 3.800,00, e de 6% para faixas salariais entre R$ 3.801,00 e R$ 5.200,00. Com base nessas informações, responda os seguintes itens:

a) Verifique se haverá alteração na alíquota de cada funcionário após o primeiro aumento salarial.

b) Com base nos conceitos estudados até o momento, tente escrever a função que relaciona a parcela a ser deduzida do IRPF em função da base de cálculo anual, utilizando a tabela do IRPF. Construa o gráfico dessa função e, em seguida, responda novamente ao item a), dessa vez analisando apenas os dados do gráfico.

5.9 Tarefa IV

O Consumo do Gás Natural

Em algumas cidades do Brasil, as residências têm a opção de utilizar o gás natural canalizado fornecido por empresas de distribuição. Essa escolha traz vantagens como a disponibilidade contínua do combustível, que pode ser utilizado em fogões e aquecedores, desde que sejam respeitadas as especificações técnicas dos equipamentos.

A tarifa cobrada pela concessionária de gás é calculada com base em um valor fixo por faixa de consumo, além de um valor variável dependente da quantidade de gás consumida em metros cúbicos. A empresa estabelece diferentes faixas de consumo e seus respectivos preços. É importante destacar que os valores apresentados já incluem as taxas de PIS/Cofins, mas não incluem o ICMS.

Para ilustrar o cálculo do consumo de gás natural em uma residência, vamos considerar um exemplo em que o consumo foi de $6{,}5\ m^3$. Utilizaremos as informações da tabela abaixo para calcular a tarifa correspondente:

Tabela 7 – Tarifa de gás natural para consumo residencial

Consumo (em m³)	Valor Fixado (R$ por mês)	Valor Variável (R$ por m³)
0 a 1	7,75	1,25
1,01 a 3	10,13	6,38
3,01 a 7	10,13	2,85
7,01 a 14	11,40	5,39
14,02 a 34	12,67	6,59

Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado em LDM8 – Questão 6 (2020, p. 19)

Com base nesse consumo, a concessionária de gás irá cobrar da seguinte forma:

- o valor fixado por mês: $R\$\ 10{,}13$ (corresponde à terceira faixa de consumo);
- $1\ m^3$ tarifado na primeira faixa de consumo: $1 \cdot 1{,}25 = 1{,}25$, ou seja, $R\$\ 1{,}25$;

- $2\,m^3$ tarifados na segunda faixa de consumo: $2 \cdot 6{,}38 = 12{,}76$, ou seja, $R\$\ 12{,}76$;
- $3{,}5\,m^3$ tarifados na terceira faixa de consumo: $3{,}5 \cdot 2{,}85 = 9{,}975$, ou seja, $R\$\ 9{,}97$.

Somando esses valores, chegamos ao total de $R\$\ 34{,}11$, que é o valor a ser pago por 6,5 m³ de gás natural, considerando essa concessionária. É importante ressaltar que esse valor não inclui o ICMS.

Essa é apenas uma ilustração para exemplificar como a cobrança é feita com base nas faixas de consumo e seus respectivos preços. Cada concessionária pode ter suas próprias faixas e tarifas, sendo assim, é essencial consultar as informações atualizadas fornecidas pela empresa de distribuição de gás para obter os valores precisos e completos, incluindo possíveis impostos e taxas adicionais.

1. Com base nas informações apresentadas, responda os seguintes itens:

a) Você está familiarizado com o método de cálculo do consumo de gás natural em residências? Em caso positivo, explique como é feito.

b) Realize uma pesquisa para descobrir o significado das siglas PIS e Cofins, e compartilhe informações sobre esses tributos.

c) Com base na tabela fornecida e considerando x como o consumo de gás natural em metros cúbicos e $f(x)$ como o valor correspondente em reais, elabore uma fórmula que possa ser utilizada para modelar essa situação.

d) Se você recebe gás natural em sua residência, verifique o consumo do último mês em metros cúbicos e utilize a fórmula desenvolvida no item c) para calcular o valor a ser pago à concessionária, de acordo com a situação apresentada nesta atividade. Caso você não utilize esse combustível, faça uma estimativa de consumo e determine o valor correspondente.

Conta de Água e/ou Esgoto

A seguir, apresentamos uma conta de água e/ou esgoto para sua análise.

Quadro 27 – Conta de água e/ou esgoto da empresa Embasa

embasa

NOTA FISCAL / CONTA DE ÁGUA E/OU ESGOTO
Empresa Baiana de Águas e Saneamento S/A
CNPJ: 13.504.675/0001-10 Insc. Est.: 00665571
4ª Avenida, nº 420, Centro Administrativo da Bahia (CAB)
Salvador, Bahia, Brasil - CEP: 41.745-300

Nº DA MATRÍCULA	VALOR A PAGAR (R$)
	66,11

Inscrição	Município	Nº Contrato	Data Emissão	Mês/Ano	Vencimento
	JEQUIE		04/01/2023	02/2023	25/02/2023

Nome do Responsável	MATEUS SOUZA DE OLIVEIRA	CPF/CNPJ	
Endereço da Ligação			
Endereço para Entrega da Conta			

I. Dados do Cadastro (do cliente e da ligação)
A conta de água pode ser utilizada como comprovante de residência. Neste local da fatura é possível verificar esses dados, além de verificar o mês de referência

REGISTROS DO CONSUMO

Nº do Hidrômetro	Data Leitura Anterior	Data Leitura Atual	Cod. Leitura	Leitura Anterior	Leitura Atual	Consumo (m³)	Dias de Consumo	Próxima Leitura
	03/12/2022	04/01/2023		717	725	8	32	07/02/2023

II. Leitura e consumo
Aqui tem a indicação das datas em que as leituras são realizadas, a leitura obtida no hidrômetro e a quantidade consumida, em metro cúbico, naquele mês.

COMPOSIÇÃO DA CONTA

Categoria Tarifária	Unidades de Consumo	Valores (R$) Tarifa Mínima
Residencial Normal	01	32,64

OBS: Para demais faixas de consumo consultar tabela de tarifas no site da Embasa

Tarifa Esgoto (% do Valor Água)	80
Unidades de Consumo - UC	1
Consumo / Unidade (m³)	8
Consumo Apurado no mês (m³)	8
Rateio Medição Individualizada (m³)	
Consumo Faturado (m³)	8
Consumo Carro Pipa (m³)	0

Histórico de Consumo (m³) 06 Meses

02/2023	8
01/2023	6
12/2022	7
11/2022	8
10/2022	6
09/2022	5

III. Composição da conta
É explicitado de forma detalhada, por faixa de valor, o cálculo do consumo de água. Além disso, é possível observar um gráfico representando o consumo dos seis meses anteriores

DISCRIMINAÇÃO DOS LANÇAMENTOS NA CONTA (R$)

CONSUMO ÁGUA 8M3	35,22
ESGOTO	28,17
MULTA E JUROS	2,72
TOTAL	66,11

INFORMAÇÕES DE CONTRIBUIÇÃO

TRIBUTOS	ALÍQUOTA
PIS / COFINS (%)	5,88
Base Cálculo (R$)	65,87
Valor (R$)	3,87

IV. Discriminação do faturamento
São explicitados aqui os valores que estão sendo cobrados, bem como o total a pagar e informações de contribuição (impostos)

MENSAGENS

ESTE CREDITO FOI CEDIDO AO BNDES REF CONTRATO DE CESSAO FIDUCIARIA DE DIREITOS CREDITORIOS DE 28/06/2018

V. Avisos ao cliente
São apresentadas mensagens ao cliente e indicados os tributos cobrados na fatura.

66111550850-8 47596546022-7 33000100000-0

***** ATENÇÃO: O PAGAMENTO DESTA CONTA NÃO QUITA DÉBITOS ANTERIORES *****

Conta impressa em 29/01/2023

embasa

NOTA FISCAL / CONTA DE ÁGUA E/OU ESGOTO
Empresa Baiana de Águas e Saneamento S/A
CNPJ: 13.504.675/0001-10 Insc. Est.: 00665571
4ª Avenida, nº 420, Centro Administrativo da Bahia (CAB)
Salvador, Bahia, Brasil - CEP: 41.745-300

MATRÍCULA	Mês/Ano	Emissão	Vencimento	TOTAL A PAGAR (R$)
	02/2023	04/01/2023	25/02/2023	66,11

66111550850-8 47596546022-7 33000100000-0

Pague com pix

VI. Pagamento
Informa o total a pagar (com três opções de código para o pagamento) e a data de vencimento da fatura

Fonte: Pesquisador (2023)

A tabela abaixo apresenta os valores cobrados de acordo com o consumo de água e coleta de esgoto de uma determinada cidade brasileira.

Tabela 8 – Tarifa residencial (abastecimento de água e coleta de esgoto)

Classe de consumo (m^3 por mês)	Tarifa de água (em R$)	Tarifa de esgoto (em R$)
0 a 10	26,18 por mês	26,18 por mês
11 a 20	4,10 por m^3	4,10 por m^3
21 a 30	10,23 por m^3	10,23 por m^3
31 a 50	10,23 por m^3	10,23 por m^3
Acima de 50	11,27 por m^3	11,27 por m^3

Fonte: Pesquisadores (2023) inspirado em LDM8 – Questão 1 (2020, p. 23)

Abaixo, apresenta-se um exemplo de cálculo do valor pago considerando um consumo mensal de $22\,m^3$ de água em uma determinada cidade brasileira, levando em conta que cada resultado é multiplicado por dois devido à coleta de esgoto:

- Os primeiros $10\,m^3$ são tarifados na primeira classe: $26{,}18\ \cdot 2 = 52{,}36$
- Os próximos $10\,m^3$ são tarifados na segunda classe: $(4{,}10 \cdot 10\ ) \cdot 2 = 82{,}00$
- Os últimos $2\,m^3$ são tarifados na terceira classe: $(10{,}23 \cdot 2)\ \cdot 2 = 40{,}92$

Somando esses valores, chegamos ao total de $R\$\,175{,}28$ pagos para um consumo de $22\,m^3$ de água nessa situação. A seguir, serão apresentadas as instruções para as atividades propostas:

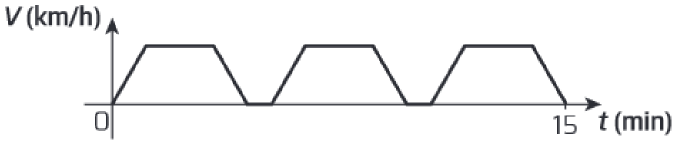
2. Considerando as informações apresentadas, reflitam sobre a importância da preservação da água e discutam sobre possíveis alternativas para reduzir o consumo desse recurso. Realizem pesquisas e elaborem um panfleto informativo para divulgar essas informações na escola, enfatizando a relevância da preservação da água e as medidas que podem ser adotadas para economizá-la no cotidiano.

3. Utilizando a tabela apresentada nesta página, considere x como o consumo de água em metros cúbicos e $f(x)$ como o valor a ser pago em reais pelo fornecimento de água e coleta de esgoto. A partir disso, escreva uma lei de formação que relacione esses valores.

4. Se houver cobrança mensal de água no município onde residem, investiguem as tarifas aplicadas e verifiquem se a coleta de esgoto também é tarifada, além de outros serviços públicos relacionados. Caso seja viável, ampliem a pesquisa para municípios vizinhos, com o intuito de realizar uma comparação entre as tarifas e os serviços prestados.

5.10 Tarefa V

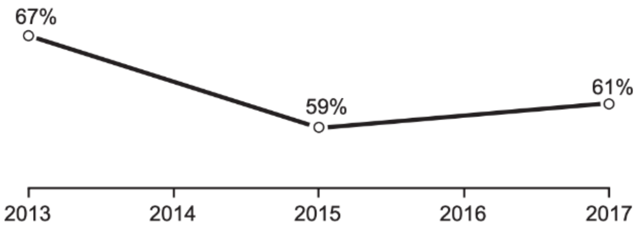
1. (Enem) Um semáforo é composto, geralmente, de três círculos de luzes coloridas (vermelho, amarelo e verde). A cor vermelha indica que o veículo deve estar parado e permanecer assim até que a cor verde volte a acender. O gráfico apresenta a variação de velocidade de um carro ao longo de um percurso de 15 minutos de duração, da residência de uma pessoa até seu local de trabalho. Durante esse percurso, o carro parou somente nos semáforos existentes ao longo de seu trajeto



Em quantos semáforos ele parou?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. (Enem) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.



Disponível em: http://pni.datasus.gov.br. Acesso em: 5 nov. 2017.

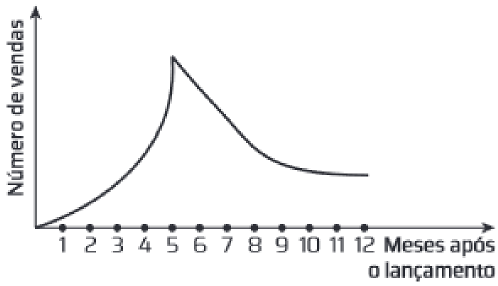
Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

A) 62,3% B) 63,0% C) 63,5% D) 64,0% E) 65,5%

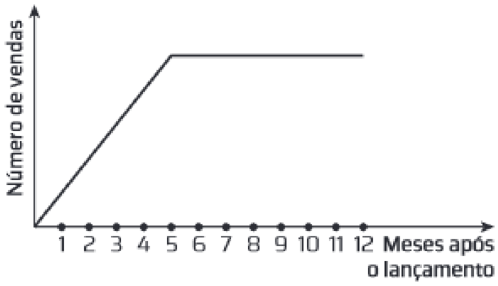
3. (Enem) Uma empresa analisou mensalmente as vendas de um de seus produtos ao longo de 12 meses após seu lançamento. Concluiu que, a partir do lançamento, a venda mensal do produto teve um crescimento linear até o quinto mês. A partir daí, houve uma redução nas vendas, também de forma linear, até que as vendas se estabilizaram nos dois últimos meses da análise.

O gráfico que representa a relação entre o número de vendas e os meses após o lançamento do produto é:

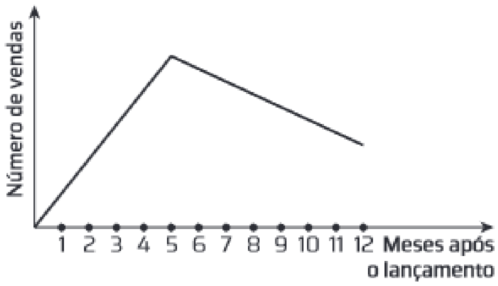
A)



B)

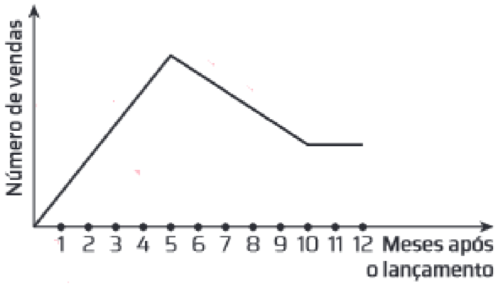


C)



D)

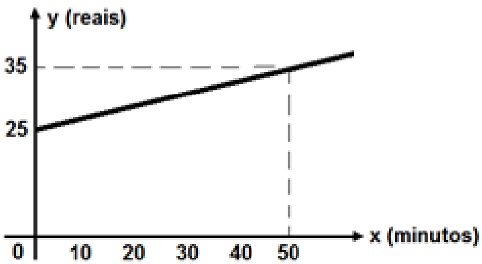
E)

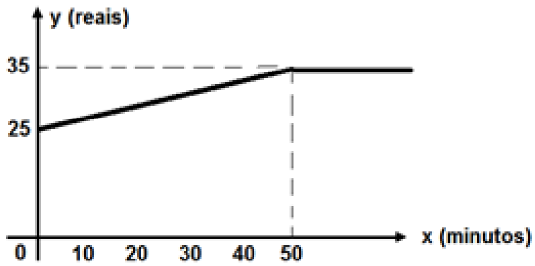


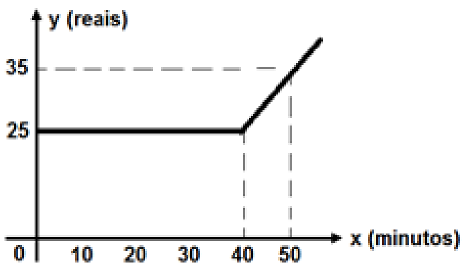
4. (Enem) De acordo com os números divulgados pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), já há no país 91 celulares em cada grupo de 100 pessoas. Entre as várias operadoras existentes, uma propõe o seguinte plano aos seus clientes: R$ 25,00 mensais para até 40 minutos de conversação mensal e R$ 1,00 por minuto que exceda o tempo estipulado.

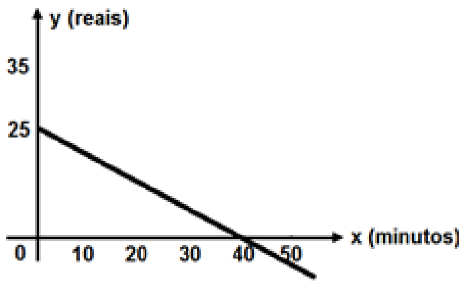
Disponível em: http://www.economia.ig.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

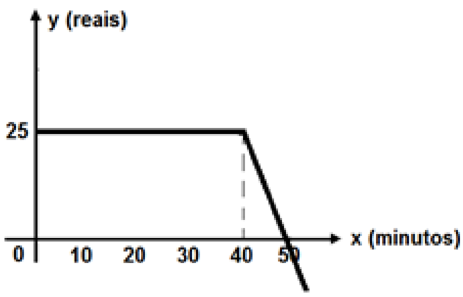
Qual dos gráficos a seguir corresponde aos possíveis gastos mensais (y), em reais, de um cliente dessa operadora de celular, em função do tempo (x) utilizado, em minutos?

A)


D)


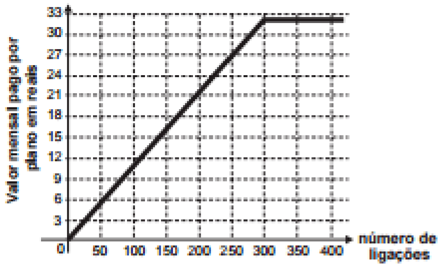
B)


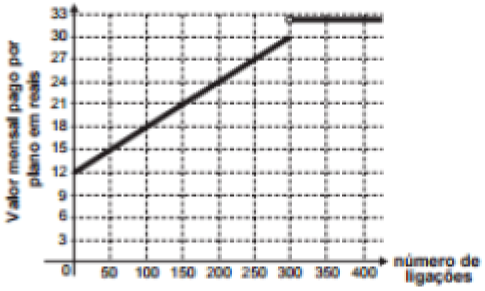
E)


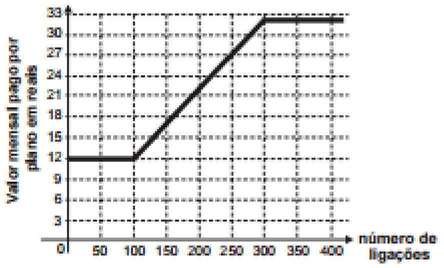
C)


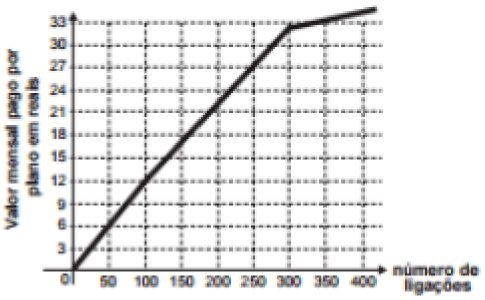
5. (Enem) Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

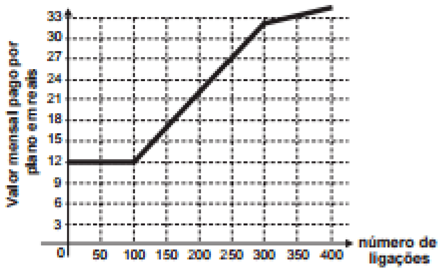
Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

A)


D)


B)


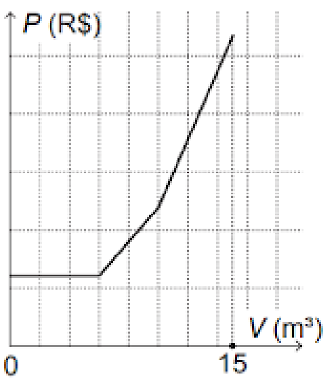
E)


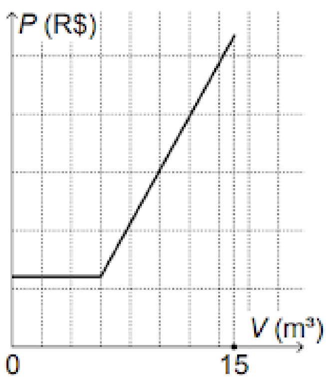
C)


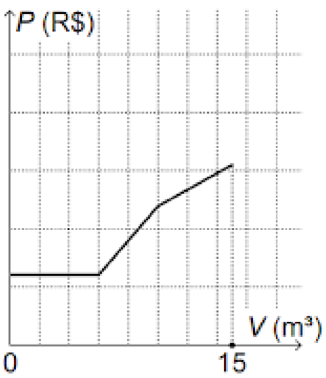
6. (Enem) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

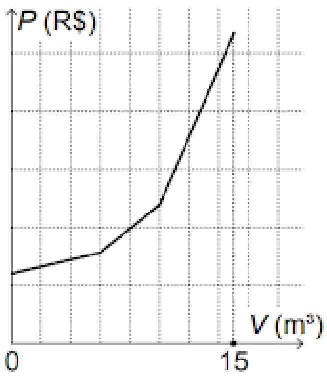
- Faixa 1: para consumo de até 6 m³, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m³ e até 10 m3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m³;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m3.

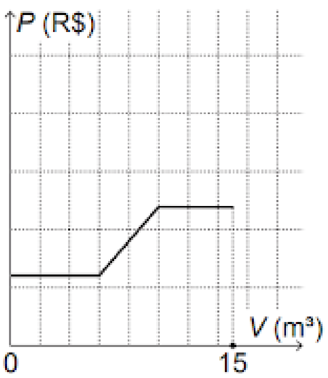
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m³ por mês. O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é:

A)


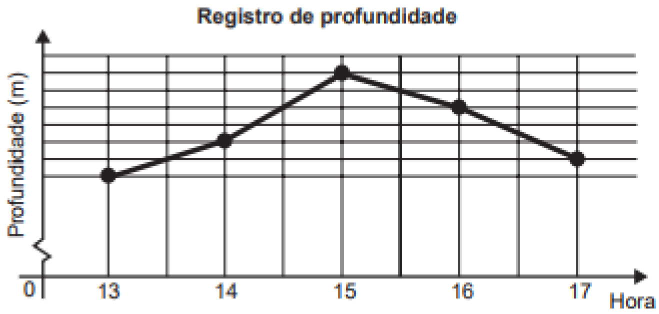
D)


B)


E)


C)


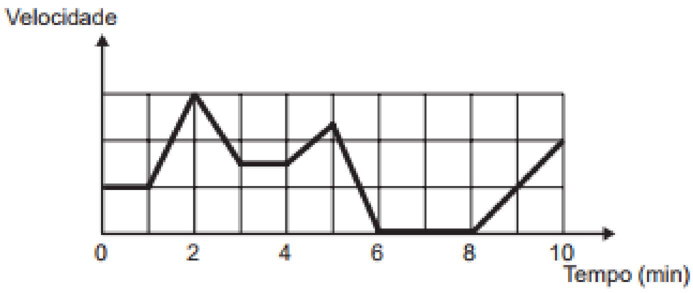
7. (Enem) Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 h. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.



Foi informado que, entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%. Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

A) 18 B) 20 C) 24 D) 36 E) 40

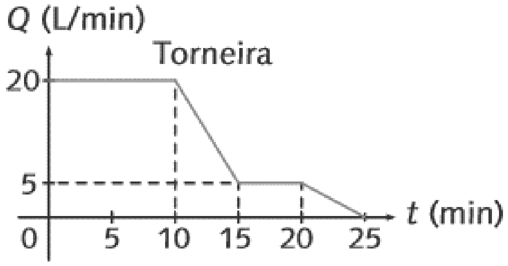
8. (Enem) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.

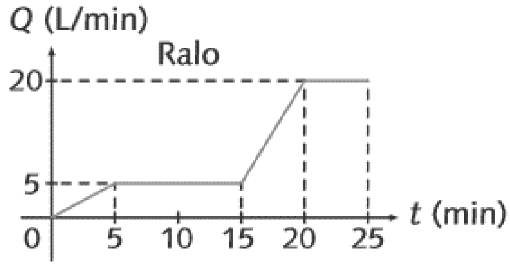


Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9. (Enem) Um reservatório é abastecido com água por uma torneira e um ralo faz a drenagem da água desse reservatório. Os gráficos representam as vazões Q, em litro por minuto, do volume de água que entra no reservatório pela torneira e do volume que sai pelo ralo, em função do tempo t, em minuto.





Em qual intervalo de tempo, em minuto, o reservatório tem uma vazão constante de enchimento?

A) De 0 a 10. B) De 5 a 10. C) De 5 a 15. D) De 15 a 25. E) De 0 a 25.

10. (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

A) muito baixa. B) baixa. C) média. D) alta. E) muito alta

6 CONSIDERAÇÕES

Durante todo o processo de investigação, foi observada a relevância de analisar o livro didático como recurso orientador para o professor e instrumento de exercitação da reflexão teórica e das tarefas práticas de ensino para o estudante. Diante disso, a questão motivadora deste trabalho buscou compreender como as estratégias e os procedimentos matemáticos relacionados ao ensino de Funções definidas por mais de uma sentença vêm sendo adotados nos livros didáticos de Matemática.

Com o objetivo de obter uma resposta para o problema evidenciado, inicialmente buscou-se identificar quais são os volumes dos livros didáticos de Matemática disponibilizados pelo PNLD 2021 – Objeto 2, que abordam as Funções definidas por mais de uma sentença como uma das principais temáticas da obra. Esse objetivo específico está relacionado à relevância e à aquisição do livro didático.

Diante disso, entre as dez coleções aprovadas pelo programa, somente seis coleções evidenciaram esse conteúdo no sumário de apenas um dos seus seis volumes. Assim, o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença é sinalizado em quatro exemplares como tópico, em um como subtópico e em um como capítulo. Isso demonstra que o tema das Funções definidas por mais de uma sentença ainda não se configura como uma temática de relevância para a maioria dos autores e editores responsáveis pela formação dos livros didáticos de Matemática para o Novo Ensino Médio.

Observa-se, também, que entre os seis exemplares analisados, um de cada coleção, cinco têm em seu código de volume a numeração final 133IL e outro 134IL. Isso realça uma suposta tendência desse conteúdo ser planejado para uma possível exploração ainda no primeiro semestre do primeiro ano do Ensino Médio. Convém destacar que o livro com o código final 134IL é o que apresenta o conteúdo de funções por mais de uma sentença como grande destaque, ao nomeá-lo como capítulo, sendo ainda o primeiro desse exemplar.

Contudo, ao comparar os quadros de conteúdos programados, é possível notar que cada exemplar enfatiza o conteúdo em questão em momentos diferentes. Dessa forma, os resultados revelam que as obras divergem quanto à linearidade programada para a exploração do ensino de Funções definidas por mais de uma sentença, o que coloca em questão os pré-requisitos para sua aplicação.

No segundo momento desta pesquisa, buscamos investigar nos volumes selecionados as abordagens matemáticas em relação aos conteúdos de Funções definidas por mais de uma sentença, com ênfase na habilidade específica EM13MAT404 descrita pela BNCC (BRASIL, 2018). Essa parte está entrelaçada com as orientações da citada base para a estruturação dos LDM com aspectos pedagógicos e abstratos do ensino de Funções definidas por mais de uma sentença. Contudo, esses exemplares, no que tange ao que foi pesquisado, necessitam ampliar suas abordagens para uma perspectiva que colabore para o desenvolvimento autônomo do estudante.

Evidencia-se a utilização da formalização intuitiva das Funções definidas por mais de uma sentença em todos os volumes analisados. Entretanto, somente uma obra busca apresentar, após a formalização intuitiva, uma ideia algébrica com a utilização da linguagem algébrica do que é uma aplicação dessa natureza, sendo ainda a única a enfatizar também os aspectos da Função afim definida por partes. De forma geral, os volumes analisados usam a contextualização para introduzir o conteúdo em questão, numa tentativa de possibilitar uma aproximação dos conhecimentos matemáticos escolares com as vivências do estudante. Nesse sentido, as abordagens iniciais adotadas nos exemplares demonstram contribuir efetivamente para a apropriação de conceitos matemáticos sem a necessidade do rigor matemático imediato.

Em relação ao conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença, foi possível categorizar os procedimentos explicativos dos LDM analisados em duas tendências: a) performance social de contextos comunitários, por evidenciar circunstâncias que valorizam práticas individuais e comunitárias; b) performance social de contextos globais, evidenciando circunstâncias direcionadas para a resolução de diferentes tipos de problemas.

Apesar dessa importante contribuição, em quase todos os exemplares analisados, no que tange ao conteúdo em questão, ficou evidenciado que eles ainda estão priorizando as atividades técnicas e repetitivas, ou seja, ainda apresentam sinais de um modelo tradicional de ensino. Entretanto, somente a metade dos exemplares investigados apresenta a utilização do software GeoGebra como recurso facilitador para as construções e manipulação gráfica das Funções definidas por mais de uma sentença. A outra metade não explora nenhuma tecnologia digital específica para esse procedimento.

Destaca-se a História da Matemática descrita neste trabalho ao tentar revelar como procedeu à formalização do conceito de função em diferentes regiões e épocas. Assim, foi possível observar como as ideias dessa temática surgiram intuitivamente com as práticas sociais do homem e observações celestes, já sua construção formal passou por todo um processo evolutivo, com marcas nas inquietações de grandes matemáticos e apreciadores da área. Desse jeito, fica notória como os fatos reais impulsionaram esse movimento que abrangia os desafios de outras Ciências até culminar em teorias abstratas da Matemática pura.

A preocupação com o ensino de Funções não é apenas com a acumulação de conhecimentos básicos para consolidação da aprendizagem, mas, também, com a compreensão e adoção de posturas críticas e reflexivas em situações reais. Diante disso, no terceiro momento desta pesquisa, buscou-se desenvolver uma sequência didática com alguns problemas encontrados nos volumes analisados para a contextualização do ensino de Função afim por partes.

Para tanto, foi produzida uma sequência didática com atividades que possam contribuir para o processo de ensino e aprendizagem das Funções afins por partes, com ênfase na contextualização. Esse recurso busca orientar de maneira mais qualificada o trabalho do professor no sentido de uma intervenção educacional que busca contextualizar o ensino de Matemática. Considera-se importante a necessidade do professor inovar suas práticas docentes por meio do conhecimento de novas técnicas, metodologias e recursos didáticos que possam auxiliar no ensino da citada disciplina.

Em meio a esse contexto, espera-se que os professores que lecionam a disciplina de Matemática conheçam e compreendam este trabalho como uma forma de explorar os conteúdos matemáticos além dos muros da abstração, ou seja, no sentido de promover uma formação que colabora para uma visão geral e adequada de como essa Ciência é construída e aplicada em nossas experiências diárias, tanto em atividades imediatas como futuras.

Agora é possível finalizar a resposta, afirmando, com base no que foi investigado, que o conteúdo de Funções definidas por mais de uma sentença é explorado como um caminho viável para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática escolar, numa tentativa de não somente ensinar os conhecimentos matemáticos específicos, mas também de relacioná-los com as vivências próprias e familiares do estudante. Dessa forma, a abordagem sobre o conteúdo supracitado tenta dar sentido à Matemática escolar a partir de situações-problema que envolvem tanto contextos reais como ideias abstratas que evidenciam o rigor matemático. Assim, o presente estudo realizado serviu para transformar em convicção o que, até então, era entendido como uma suposição.

Uma vez que esta investigação tem um viés de pesquisa bibliográfica, ela não abrangeu aspectos de análise da aplicação prática da sequência didática produzida. Diante disso, considera-se pertinente, para trabalhos futuros, investigar os desempenhos qualitativos e quantitativos dos estudantes com a utilização desse recurso de ensino que foi construído como produto educacional. Apesar de focar nas abordagens do primeiro ano do Novo Ensino Médio, a citada sequência didática pode ser aplicada também no Ensino Superior em disciplinas que abordem o conteúdo de funções.

Espera-se que este trabalho seja um recurso motivador para inserir a contextualização da Matemática ainda na formação escolar do estudante da Educação Básica; e que, ao menos, seja um instrumento de aprofundamento e aperfeiçoamento dos conhecimentos específicos do ensino de Função afim por partes. Por fim, deseja-se que esta pesquisa possa contribuir para as reflexões e discussões a respeito da aquisição do livro didático de Matemática, bem como sobre o ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento no Novo Ensino Médio, para muito além do que foi explorado por este professor pesquisador.

REFERÊNCIAS

.

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica.** Lisboa: ME, DEB. 1999.

ALVARENGA. K.; BARBOSA, C. V.; FERREIRA, G. M. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX. **REVEMAT**. v. 9, n. 1, p. 159-178, 2014.

ALVES, C. P. **Introdução ao conceito de função no nono ano do Ensino Fundamental por meio de função definida por várias sentenças.** 2022. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2022.

ANDRADE, T. M. de (ed.). **Matemática interligada:** funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. 1. ed. São Paulo, SP: Scipione, 2020. v. 1.

ÁVILA, G. Evolução do conceito de função e integral. **Revista Matemática Universitária**, n. 1, p. 14-46, 1985.

ÁVILA, G. **Introdução ao cálculo**. 1.reimpr. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. 1 ed. 3. reimp. São Paulo: Edições 70, 2016.

BASSO, L. D. P.; TERRAZZAN, E. A. Organização e realização do processo de escolha de livros didáticos em escolas de educação básica. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 9, n. 3, p. 256-272. 2015.

BICUDO, M. A. V. Ensino de Matemática e Educação Matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema**, v. 12, n. 13, p. 1-11, 1999.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., J. R.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma – matemática**: funções e progressões. 1. ed. São Paulo, SP: FTD, 2020. v. 2.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno Dá-Licença**. 2011. p. 64-75. Disponível em https://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf. Acesso em 14 de fev. 2023.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher. 1996.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Plano Nacional de Educação PNE 2014–2024**: linha de base. Brasília: Inep, 2015. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/plano_nacional_de_educacao/plano_nacional_de_educacao_pne_2014_2024_linha_de_base.pdf. Acesso em 14 de fev. 2023.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, 23 de dezembro de 1996. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf. Acesso em 14 de fev. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC):** educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 23 mar. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/CNE, 2018a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 23 mar. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf. Acesso em: 24 maio. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: **Orientações curriculares para o ensino médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Vol. 2. Brasília: MEC/SEB: 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 11 de fev. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 11 de fev. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 11 de fev. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio – PCNEM. Brasília: MEC: 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 14 de fev. 2023.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P. *et al.* **As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.** Lisboa: SEM-SPCE, 2002. p. 5-24.

BRITO, M. R. F. **Psicologia da educação matemática.** Florianópolis: Editora Insular, 2005.

BROUSSEAU, G. Fondement et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. In: BRUN, J. (Ed.). **Didactique des mathématiques**. Lausanne: Delachaux et Niestlé. 1996. p. 45-144.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 4. ed. Lisboa: Gradiva, 2002.

CARVALHO, A. M. P. **Ensino de ciências e matemática II:** temas sobre a formação de conceitos. São Paulo: Editora UNESP. 2009.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. Escolha e uso do livro didático. In: **Matemática:** ensino fundamental. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho/coord. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica, 2010. (Coleção Explorando o Ensino, v. 17, p. 15-30)

CASTELNUOVO, E. **Série de matemáticas:** didactica de la matemática moderna. México: Editorial Trillas, 1975.

CHAVES, M. I. A.; CARVALHO, H. C. Formalização do conceito de função no ensino médio: uma seqüência de ensino-aprendizagem. Apud. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. 2004.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais.** 2. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa – FEUSP**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.

CORSINI, R. Um olhar sobre a evolução histórica do conceito de função e ligação com o ensino atual do conceito de função. In: RACHIDI, M.; FREITAS, J. L. M. de; MONGELLI, M. C. J. G. **Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações.** Campo Grande: Editora UFMS, 2020.

COSTA. C. B. J. **O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função.** 2008. 117 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática – IM, 2008.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Magda Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

D’AMBRÓSIO, U. Armadilha da mesmice em educação matemática. **Bolema**. v. 18, n. 24, p. 95-109. set. 2005.

D’AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação e matemática. 2. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 1986.

D’AMBRÓSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

D’AMBRÓSIO, U. História da matemática e educação. In: **Cadernos CEDES 40**. Campinas: Papirus, 1996, p.7-17.

DANTE, L. R. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**. v. 16, n. 69, p. 83-97, jan./mar. 1996.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos:** função afim e função quadrática. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020. v. 1.

DENBEL, D. G. Functions in the secondary school mathematics curriculum. **Journal of Education and Practice**, v. 6, n. 1, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FONSECA, V. G. da; SANTOS, Â. R. dos; NUNES, W. V. Estudo Epistemológico do conceito de funções: uma retrospectiva. 2013. 14f. **Anais...** XI Encontro Nacional de Educação Matemática. 2013.

FREITAS, I. de. Livro didático de História: definições, representações e prescrições de uso. In: OLIVEIRA, M. M. D. de; OLIVEIRA, A. F. B. de (Org.). **Livros didáticos de História:** escolhas e utilizações. Natal: EDUFRN, 2009.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Ed. Livraria da Física. 2010.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 7. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

GOIS, V. H. dos S. **Livro didático e atividades de modelagem matemática:** algumas articulações. 2019. 150 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Mestrado de Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

GOIS, V. H. dos S.; SILVA, K. A. P. da; DALTO, J. O. Análise da produção escrita de estudantes do ensino superior: uma abordagem semiótica. **Alexandria**. v. 12. n. 1. 2019. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2019v12n1p255. Acesso em: 29 abr. 2023.

GRAMOWSKI, V. B., DELIZOICOV, N. C; MAESTRELLI, S. R. P. O PNLD e os guias dos livros didáticos de ciências (1999–2014): uma análise possível. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências**. v. 19, e2571. 2017.

GUIMARÃES, G. *et al.* Livros didáticos de matemática nos anos iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, **Anais...** Belo Horizonte, 2007.

IGLIORI, S. B. C.; ALMEIDA, M. V. de. Desenvolvendo abordagens de ensino para conceitos de cálculo diferencial e integral com GeoGebra. **Educação e Fronteiras**, Dourados, v. 8, n. 23, p. 164-175, 2018. DOI: 10.30612/eduf.v8i23.9450. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/educacao/article/view/9450. Acesso em: 29 abr. 2023.

KATO, D. S; KAWASAKI, C.S. As concepções de contextualização do ensino em documentos curriculares oficiais e de professores de ciências. **Ciência & Educação**, v. 17, n. 1, p. 35-50. 2011.

KIME, L. A.; CLARK, J.; MICHAEL, B. K. **Álgebra na universidade:** um curso pré-cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

KLEINER, I. Evolution of the function concept: a brief survey. **The College Mathematics Journal**, v. 20, n. 4, 1989, p. 282-300. 1989.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Revista em Aberto**. Brasília, v. 26, n. 69, p. 3-7, jan./mar., 1996.

LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. O uso da matemática em cursos de engenharia na perspectiva dos docentes de disciplinas técnicas. **Revista de Ensino de Engenharia**, Passo Fundo, v. 24, n. 1, jan./jun. 2005.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**: volume 1., 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LEONARDO, F. M. de (ed.). **Conexões – matemática e suas tecnologias:** grandezas, álgebra e algoritmos. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020. v. 1.

LIMA, E. L. **Análise real**; v. 1, 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da matemática. **Revista do Professor de Matemática**. v. 41. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio:** volume 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. **Números e funções reais.** 1. ed. 4. reimp. Rio de Janeiro: SBM, 2021.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Versão preliminar (utilizada nas aulas do Profmat/2012). Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LONGEN, A.; BLANCO, R. M. **Interação matemática:** o tratamento da informação e a resolução de problemas por meio da função do 1º grau. 1. ed. São Paulo, SP: Editora do Brasil, 2020. v. 1.

LOPES, C. E. Os desafios e as perspectivas para a educação matemática no ensino médio. In: 34ª. Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 34, 2011, Natal/RS. **Anais...** Natal: Centro de Convenções de Natal, 2011. p. 2-17.

MACEDO, L. Situação-problema: forma e recurso de avaliação, desenvolvimento de competências e aprendizagem escolar. In: PERRENOUD, P. *et al*. **As competências para ensinar no século XXI:** a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

MALHOTRA, N. **Pesquisa de marketing.** 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

MARCHIORO, F.; SAUER, L. Z. A modelagem em uma aplicação da matemática no cálculo do preço pago nos estacionamentos rotativos de Caxias do Sul. **Scientia cum Industria**, v. 4, p. 184-187, 2016.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

MEIRIEU, P. **Aprender... sim, mas como?** 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vigotsky à educação matemática.** 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007.

NASCENTES. A. **Dicionário etimológico de língua portuguesa.** 1. ed. 2. tiragem. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1955.

OLIVEIRA, D. S.; JUSTO, D. R. A. **GeoGebra:** facilitando o aprendizado da função afim e função quadrática. 2015. 30 f. Trabalhos de Conclusão de Curso. (Especialização) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre: Instituto de Matemática, 2015.

OLIVEIRA, M. S. de. Os entrelaçamentos na aquisição e uso do livro didático. **Revista Ensin@ UFMS**, v. 2, n. 6, p. 221-238, 6 dez. 2021.

OLIVEIRA, N. de. **Conceito de função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), São Paulo, 1997.

PAIXÃO, B. dos S. **Pontos periódicos de funções afins por partes e o Teorema de Li e Yorke: uma introdução no ensino médio**. 2020. 101 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – Profmat). Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Juiz de Fora, 2020.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar**. Tradução: Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PERRIN, P. **Evolution du concept de fonction:** texte d'une conférence de Patrick Perrin donnée en 1999 à la faculté des sciences de Reims. 1999. Disponível em: https://histoiremaths-champard.fr/docs/archives/fonction.pdf. Acesso em 14 fev. 2023.

PONTE, J. P. da. O conceito de função no currículo de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, APM, Portugal, n. 15, p. 3-9, 1990.

RACHIDI, M.; FREITAS, J. L. M. de; MONGELLI, M. C. J. G. **Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações.** Campo Grande: Editora UFMS, 2020.

RICARDO, E. C. Implementação dos PCN em sala de aula: dificuldades e possibilidades. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**. Florianópolis, v. 4, n. 1, 2003.

RODRIGUES, C. L.; AMARAL, M. B. Problematizando o óbvio: ensinar a partir da realidade do aluno. In: Congresso da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 19., Caxambu, 1996. **Anais**... Caxambu: Anped, 1996. p. 197.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar. 2012.

RÜTHING, D. Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. **The Mathematical Intelligencer**, v. 6, n. 4, p. 72-77, 1984.

SANTOS, E. M. dos. **As representações sociais do livro didático por professores de matemática.** Dissertação de Mestrado. 126 f. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco. 2013.

SANTOS, J. W. DOS; SILVA, M. A. DA. Relações de poder na idealização de livros didáticos de matemática. **Práxis Educativa**, v. 14, n. 1, p. 250-272, nov. 2018.

SANTOS, M. B dos. et al. A construção do conceito de função no ensino fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., Pernambuco, 2004. **Anais...** Pernambuco: SBM, 2004.

SANTOS, W. L. P; CARNEIRO, M. H. S. Livro didático de ciências: fonte de informação ou apostila de exercícios? **Contexto & Educação**, Ano 21, n. 76, p. 201-222. jul./dez., 2013.

SILVA JUNIOR, C. G. **Critérios de adoção e utilização do livro didático de Matemática no ensino fundamental, e a participação do professor na adoção:** o caso agreste pernambucano. 2005. 137f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) Instituto de Educação, Universidade Federal do Recife, Recife, PE, 2005.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ser protagonista - matemática e suas tecnologias:** números e álgebra. 1. ed. São Paulo: Editora SM, 2020. v. 2.

SOUTO, D. L. P. Resenhas: interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula, de Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela Martins Soares David. **BOLEMA**, v. 23, n. 36, p. 801-808, 2010.

STEWART, J. **Cálculo**: volume I. Tradução: EZ2 Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning Edições Ltda, 2014.

TINOCO, L. A. A. *et al.* **Construindo o conceito de função no 1º grau.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – UFRJ, 1996. (Projeto Fundão)

TRINDADE, J. O.; MORETTI, M. T. Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de funções: a mediação. **Zetetiké,** v. 8, n. 13/14, p. 7-28, Jan./Jun. 2000.

TUFANO, W. Contextualização. In: FAZENDA, I. C. A. (Org.). **Dicionário em construção:** interdisciplinaridade, São Paulo, Cortez, 2001.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**. v. 16, n. 30. jul./dez. 2008.

VALENTE, W. R. Positivismo e matemática escolar dos livros didáticos no advento da República. **Cadernos de Pesquisa** — Fundação Carlos Chagas, São Paulo, n.109, p.201-212, 2000.

WAGNER, E. **Uma introdução às construções geométricas.** Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

WEBER, J. E. **Matemática para economia e administração.** São Paulo: Harbra, 2001.

XAVIER NETO, A. L. **Um estudo da genêse instrumental para função de uma variável real com várias sentenças.** 2016. 161 f. Dissertação (Mestrado em educação: Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

XIMENES, S. **Minidicionário ediouro da língua portuguesa**. 2. ed. São Paulo: Ediouro, 2000.

YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIX e siècle. In: YOUSCHKEVITCH, A.P.; BELLEMIN, J.-M. **Fragments d´historie des Mathématiques.** Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p. 7- 67, 1981.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2007.

APÊNDICE A – Competência e Habilidades Específicas

Quadro 28 – Competências e habilidades e específicas da Matemática

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA MATEMÁTIVA	CONJUNTO DE HABILIDADES ESPECÍFICAS DA MATEMÁTICA
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação científica geral.	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. (EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e

	reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). (EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. (EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Pesquisador (2023) inspirado na BNCC (2018)

APÊNDICE B – Gabarito da Tarefa V

Gabarito da Tarefa V

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
A	B	E	B	B	A	A	C	B	D