UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ CARLOS DE SÁ

ELABORAÇÃO DE UM CURSO ONLINE ABERTO E MASSIVO (MOOC) A RESPEITO DE CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA

JUAZEIRO DO NORTE
2023

JOSÉ CARLOS DE SÁ

ELABORAÇÃO DE UM CURSO ONLINE ABERTO E MASSIVO (MOOC) A RESPEITO DE CONCEITOS DE TRIGONOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Erica Boizan Batista
Coorientador: Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior

JUAZEIRO DO NORTE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

S111e Sá, José Carlos de.

Elaboracão de um curso online aberto e massivo (MOOC) a respeito de conceitos de trigonometria / José Carlos de Sá. – 2023.

xi, 119 f.: il. color. 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2023.

Orientação: Profa. Dra. Érica Boizan Batista.
Coorientação: Prof. Dr. Valdines Leite de Sousa Junior.

1. Trigonometria. 2. Tecnologia. 4. Minicurso. 5. MOOC. I. Título.

CDD 516.24

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Elaboração de um Curso Online Aberto e Massivo (MOOC) a Respeito de Conceitos de Trigonometria

JOSÉ CARLOS DE SÁ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 16 de junho de 2023.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br ERICA BOIZAN BATISTA
Data: 30/06/2023 16:07:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Érica Boizan Batista
Orientadora- UFCA

Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
Examinador interno – UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br VALDINES LEITE DE SOUSA JUNIOR
Data: 28/06/2023 12:18:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Valdines Leite de Sousa Junior
Coorientador- UFCA

Samara Costa Lima

Profa. Dra. Samara Costa Lima
Examinador externo - UFOB

Dedico este trabalho a Deus por conceder sabedoria, a minha família que sempre me apoia, a minha esposa que está ao meu lado em todos os momentos, aos meus filhos, Nathália e Enrique, por serem minha fonte de inspiração e a todos os amigos que estão sempre me ajudando.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e pela inspiração para conseguir mais esse feito.

Aos meus pais, José Roberto e Creuza, pelo carinho e apoio esse caminho cheio de obstáculos.

A minha filha, Nathalia Paloma, por está torcendo por mim em todo os momentos deste curso e proporcionar sempre energias positivas.

A minha esposa, Dôre, pela paciência nos momentos de dificuldades e pressões que ocorreram durante o curso.

Aos meus irmãos, Ailton e Lili, por estarem me inc entivando em todos os momentos.

Aos meus sobrinhos, Roberto e Arthur, por proporcionarem momentos de alegria quando estava preocupado com o curso.

A minhas sobrinhas, Vitória, Airla e Laura, pelo carinho de sempre. Ao meu filho, Enrique, por todo o amor e carinho que me proporciona para que possa concluir esse curso com êxito.

A todos os amigos e familiares que diretamente ou indiretamente contribuíram para que chegasse até o final.

Aos colegas de turma, Plácido, Brito, Kennedy, Ailton e Anízio, por cada momento de estudo compartilhado com vocês, amigos que a matemática me trouxe.

Aos professores, por todos os ensinamentos vividos e em particular aos meus orientadores, Erica Boizan e Valdinês Leite, pela ajuda na construção deste trabalho e pela paciência que tiveram comigo.

RESUMO

A Matemática, assim como todas as áreas do conhecimento, frequentemente se beneficia do uso de ferramentas tecnológicas, especialmente da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Com isso em mente, o objetivo principal deste trabalho foi criar um minicurso no formato MOOC (Curso Online Aberto e Massivo), focando em conceitos de Trigonometria. Este formato de curso oferece ao participante a oportunidade de estudar de forma interativa e com total liberdade para organizar sua rotina de estudo. Para apoiar o aluno, foram criadas apostilas, slides e videoaulas, permitindo que o aluno possa estudar em sua casa ou em qualquer lugar que desejar. O curso completo estará disponível no site https://poca.ufscar.br/. Acreditamos que este minicurso possa ser uma alternativa útil para estudantes que procuram uma forma de estudar, e que também possa servir como material de apoio para professores de Matemática em suas aulas.

Palavras-chave: Tecnologia. Minicurso. Trigonometria. MOOC.

ABSTRACT

Mathematics, like all areas of knowledge, often benefits from the use of technological tools, especially Information and Communication Technology (ICT). With that in mind, the main objective of this work was to create a short course in the MOOC format (Massive Open Online Course), focusing on concepts of Trigonometry. This course format offers participants the opportunity to study interactively and with complete freedom to organize their study routine. To support the student, handouts, slides and video lessons were created, allowing the student to study at home or anywhere they wish. The complete course will be available at https://poca.ufscar.br/. We believe that this short course can be a useful alternative for students looking for a way to study, and that it can also serve as support material for Mathematics teachers in their classes.

Keywords: Technology. Mini course. Trigonometry. MOOC.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Com o acesso a internet se tornando cada vez mais presente em todos os lugares, as possibilidades de Educação a Distância (EaD) estão ganhando espaço de forma diversificada. Com isso, a disseminação de novas ferramentas de Tecnologia da Informação e Comunicação (TICs) no cotidiano das pessoas está se tornando uma realidade na educação básica brasileira. As ferramentas digitais estão a cada dia sendo inovadas e possibilitam aos alunos oportunidades de se capacitarem melhor mesmo estando cursando o ensino médio, sendo uma maneira ágil para suprir as deficiências em conteúdos isolados em qualquer disciplina.

Devido a essa expansão, os cursos online estão ganhando credibilidade no âmbito nacional e mais recentemente os cursos de Educação Aberta (EA) também estão em ascensão, possibilitando que novas formas de aprendizagem sejam agregadas à sala de aula tradicional e com isso, a relação professor, aluno e conteúdo se torna mais atraente, minimizando um problema social de acesso à educação básica no Brasil.

A Educação Aberta é um movimento histórico que busca atualizar princípios da educação progressista na cultura digital. Promove a equidade, a inclusão e a qualidade através de práticas pedagógicas abertas apoiadas na liberdade de criar, usar, combinar, alterar e redistribuir recursos educacionais de forma colaborativa. Incorpora tecnologias e formatos abertos, priorizando o software livre. Nesse contexto, prioriza a proteção dos direitos digitais incluindo o acesso à informação, a liberdade de expressão e o direito à privacidade (FURTADO; AMIEL, 2019).

Seguindo na linha de possibilitar um acesso mais fácil para os alunos, propondo ambientes que possam reforçar seus conhecimentos com intuito de sanar dificuldades surgidas ao longo do ensino médio, o professor atua como mediador e incentivador ao uso de formas mais livres de estudo para seus alunos. Diante disso, Siemens (2013 apud Holanda, 2020), diz que: o professor atua na criação de contextos e ambientes adequados para que o aluno possa desenvolver suas habilidades sociais e cognitivas de modo criativo na interação com outrem, através da abordagem conectivista, dando surgimento aos Massive Open Online Courses (MOOC).

Massive Open Online Courses (MOOCs) são uma modalidade de curso on-line com capacidade para atender uma grande quantidade de estudantes. Cursos desta natureza utilizam plataformas de aprendizagem online e atraem diferentes perfis de alunos, ofertando oportunidades de qualificação aos participantes, inclusive àqueles que não frequentam uma instituição de ensino (RODRIGUES et al., 2016 apud SOUSA; PERRY, 2018). Esses cursos estão ganhando aceitação devido ao seu formato flexível, permitindo que os alunos estudem de qualquer lugar e organizem seu horário de acordo com suas rotinas. Com uma ampla variedade de opções de cursos disponíveis, essa flexibilidade é particularmente vantajosa para aqueles que enfrentam barreiras geográficas ou de tempo para frequentar um curso presencial.

Os cursos MOOCs oferecem uma vantagem significativa, permitindo que os alunos organizem seus estudos de acordo com sua própria conveniência. Essa flexibilidade proporciona benefícios valiosos para a vida estudantil, permitindo que os alunos troquem experiências e colaborem com outros alunos de qualquer lugar. Além disso, a interação com os professores de diversas regiões pode tornar o processo de aprendizagem, mas enriquecedor e agradável.

Foram levados em consideração vários aspectos para a decisão sobre o tema do curso MOOC, "Uma introdução à trigonometria". Um dos aspectos considerados foi a versatilidade com que os cursos MOOCs ofertam os materiais para que os alunos estudem, e dessa forma, os interessados terão toda interatividade e abertura para reverem o curso quantas vezes quiserem e melhorarem seus conhecimentos sobre a trigonometria. Como o conteúdo do curso exige uma análise de figuras para melhor visualização das propriedades mostradas em triângulos e circunferência, os recursos em slides e vídeos irão ajudar bastante no entendimento e assimilação por parte dos alunos.

A trigonometria é uma disciplina interdisciplinar que se relaciona com diversas áreas do conhecimento, como a Eletricidade, Música e Engenharia Civil, entre outras, permeando muitos aspectos de nosso cotidiano. Entretanto, a transmissão efetiva desse conhecimento pode ser comprometida por fatores como limitações de tempo durante o ano escolar, a ausência de conteúdo relevante no plano de curso e dificuldades na formação básica dos alunos, que podem resultar em obstáculos ao progresso na sala de aula.

Apresentamos neste trabalho um curso MOOC com o propósito de oferecer ao aluno acesso a conteúdos relevantes de trigonometria, que os auxiliarão durante a introdução do tema, bem como fornecerão material de apoio e revisão. O curso enfoca a trigonometria em três abordagens distintas. Inicialmente, é apresentada a trigonometria no triângulo retângulo, onde se exploram as primeiras noções sobre razões trigonométricas, fundamentais para a compreensão dessa disciplina no ensino médio.

Na segunda unidade do curso, abordamos a trigonometria na circunferência. Nesta unidade, trabalhamos com os pré-requisitos básicos para o estudo da trigonometria na circunferência, desta forma, iniciamos com uma abordagem sobre ângulos e arcos formados na circunferência. Em seguida, apresentamos a construção do Ciclo (ou Circunferência) trigonométrico e suas propriedades. Somente após essa etapa é que introduzimos as razões trigonométricas e suas propriedades, ilustrando-as em figuras para facilitar a compreensão dos alunos. Além disso, fornecemos uma abordagem detalhada para a compreensão de algumas relações fundamentais entre as razões trigonométricas.

Por fim, apresentamos as funções trigonométricas, destacando suas propriedades e representando-as em gráficos para que os alunos possam identificar cada uma com facilidade. Essa etapa é fundamental para consolidar o conhecimento adquirido sobre a trigonometria e preparar os estudantes para aplicações mais avançadas dessa área de conhecimento. Acredito que a abordagem didática utilizada no curso MOOC irá contribuir para o desenvolvimento dos alunos e para a difusão do conhecimento matemático.

O curso foi estruturado em diversos recursos didáticos para que o aluno possa estudar e aprimorar seu aprendizado sobre o tema proposto. Foram utilizados slides, vídeos aulas e uma apostila especialmente elaborada para aprofundar os conceitos apresentados durante as aulas. Além disso, foram propostos exercícios diversos para que os estudantes possam aplicar os conhecimentos teóricos adquiridos durante o curso, tornando o aprendizado mais efetivo e dinâmico.

Capítulo 2

O uso de tecnologias no ensino de Matemática

A Matemática, bem como todas as áreas de conhecimento, pode fazer uso frequentemente de alguma ferramenta tecnológica, especialmente da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Neste trabalho será mostrado como as TICs podem influenciar na motivação e no ensino de Matemática dos alunos.

As tecnologias podem ser usadas como um auxílio para o professor trabalhar os conteúdos de Matemática de forma interdisciplinar, fazendo uma ligação entre situações atuais que necessitam de um conhecimento matemático e o uso de ferramentas tecnológicas para serem solucionadas.

> A educação Matemática tem o objetivo de transformar o ensino em um saber lógico por meio do exercício do raciocínio. Portanto, precisa oferecer uma aprendizagem centrada nas evoluções tecnológicas e na interdisciplinaridade, formando seres capazes e preparados para viver e agir nesse mundo cada vez mais complexo, onde as coisas evoluem e modificam rapidamente (RIBEIRO; PAZ, 2012, p.13).

Segundo Perius (2012), os computadores e a internet oferecem oportunidades que facilitam o desenvolvimento e o entendimento de conceitos e procedimentos matemáticos. Entre outras possibilidades, o uso de figuras elaboradas em aplicativos (softwares) de geometria dinâmica, por exemplo, pode auxiliar o aluno a entender as figuras geométricas como classes, diferenciando-as do simples desenho de uma figura.

Mesmo que de forma simples, a apresentação de uma ferramenta digital sendo relacionada a algum conteúdo de matemática, já atrai um pouco a atenção do aluno, e esse é o principal objetivo de inserir as tecnologias no ensino de matemática.

Para Ribeiro e Paz (2012),

> (...) a disciplina de matemática sempre foi o bicho de sete cabeças para muitos alunos ao longo da sua formação. E essa perspectiva está atrelada à má formação por parte de alguns professores de matemática que atuam no ensino da matemática oferecendo as respostas prontas, não oportunizando que o aluno construa seus próprios conceitos (RIBEIRO; PAZ, 2012, p.17).

Os professores de matemática carregam consigo a dura missão de resgatar os alunos desinteressados, tentando mostrar que a matemática tem suas aplicações em nosso cotidiano e é de suma importância na vida de qualquer cidadão, deixando de lado aquele impacto que o aluno trás com ele desde os primeiros contatos que teve com Matemática lá no início de sua vida estudantil.

As tecnologias podem ser usadas como ferramentas importantes no auxílio aos professores na elaboração do planejamento e na regência de suas aulas. O professor pode fazer uso de diversas ferramentas tecnológicas em sua sala de aula, por exemplo, utilizar jogos, aplicativos, software, programas, links, sites, canais e muitos outros. Os jovens estão em contato diariamente com essas mídias digitais, simplesmente fazendo uso do celular, dessa forma podemos pensar que o equipamento não está muito distante de nós, basta utilizar de forma correta.

> As Novas Tecnologias no ensino da Matemática devem ser utilizadas como aliada na construção de verdadeiros conhecimentos, preparando o cidadão do futuro para uma vida social e profissional plena através de um ambiente de aprendizagem virtual, possibilitando ao aluno de hoje, viajar no mundo virtual mesmo habitando uma sala fria e restrita a poucos seres humanos, mas cheia de computadores capazes de nos levar a qualquer lugar ou simplesmente falar com uma pessoa do outro lado do mundo (RIBEIRO; PAZ, 2012, p.15).

É de muita valia a inserção de alguma tecnologia nas aulas de matemática, desde que tenha uma certa ligação com o que está sendo trabalhado, seguindo assim o plano de curso da escola. O currículo de matemática dispõe de vários conteúdos que podem ser trabalhados fazendo uso de uma simples calculadora, utilizando para determinar alguma expressão que não seria possível de forma manual, assim, já está sendo realizada uma prática com ferramentas tecnológicas.

A questão do computador para ser usado diretamente com algum conteúdo de matemática, pode ser feito o uso de vários aplicativos e/ou programas para mostrar aos alunos como funciona e como usar a ferramenta.

Perius (2012), ressalta que o computador é uma ferramenta poderosa em recursos, velocidade, programas e comunicação, permitindo pesquisar, simular situações, lugares, testar conhecimentos específicos, descobrir novos conceitos e criar, por exemplo, páginas na internet, como espaço virtual de encontro e divulgação de referência, um espaço de visibilização virtual.

Para a maioria dos professores da educação básica isso se torna inviável devido a precariedade dos laboratórios de informática disponível nas escolas, então, o professor procura uma forma mais prática e geralmente usa o seu computador particular e mostra superficialmente como utilizar a tecnologia, infelizmente é assim que funciona em muitas escolas públicas.

Devido ao cenário de pandemia que atingiu todo o mundo nos anos de 2020 e 2021, as escolas tiveram que buscar alternativas rápidas para que o ensino aprendizagem não fosse afetado por completo. Os professores passaram por capacitações durante esse período, para que pudessem aprimorar suas habilidades e manuseio com as diversas ferramentas tecnológicas que passaram a usar para ministrar as aulas de forma remota.

> Tornou-se imprescindível mencionar o quanto as Tecnologias de Informação e Comunicação foram importantes em meio á pandemia da COVID-19, não queremos aqui salientar que antes elas não eram profícuas, mas sim, ressaltar a importância delas neste período, e que sem elas, seria muito mais difícil ou até mesmo inviável dar continuidade aos nossos sistemas de ensino formal (SANTOS; GONÇALVES; CARDOSO, 2012, p. 112).

Após esse período de pandemia as aulas voltaram a ser de forma presencial, porém, o uso das tecnologias durante as aulas passaram a ser necessárias, visto que, várias atividades em sala de aula ou até mesmo em outras áreas da escola poderiam ser realizadas de forma virtual, dessa forma, a tecnologia veio para ficar no ambiente escolar.

> Muitas escolas públicas ou privadas foram obrigadas a transformar sua maneira de mediar o processo de ensino e de aprendizagem, tendo como principal ferramenta pedagógica as TIC, para cumprir o calendário letivo e promover a necessária interação entre as famílias e as escolas, bem como proporcionar aos alunos um guia para o seu aprendizado, visto que, o modo de aprender, deixou de ser majoritariamente, com aulas presenciais e trem ocorrido por meios digitais (SANTOS; GONÇALVES; CARDOSO, 2012, p. 112).

A comunidade escolar está passando por avanços a todo momento no campo tecnológico, o cenário educacional durante o período de pandemia, mostrou que é possível o professor ministrar sua aula sem que o aluno esteja presente, podendo trocar ideias sobre o que está sendo transmitido durante a aula virtual.

Aquela aula tradicional que o professor apenas joga o conteúdo pronto e acabado não pode mais prevalecer no ensino de hoje, onde a aprendizagem é construída mediante a troca de ideias do professor com o aluno e em muitos casos de forma virtual. Para quebrar esses paradigmas tradicionais e inserir uma educação inclusiva e tecnológica, o ensino aprendizagem precisa passar por inovações, com o intuito de tornar os alunos, futuros cidadãos participativos na sociedade em que vivem.

Segundo (Timboíba, et al., 2011) diante de tanta tecnologia e de tanta informação é preciso pensar em uma educação que trabalhe com os conhecimentos de forma contextualizada, ou seja, com conhecimentos que contribuam com a formação de cidadãos capazes de dar respostas às necessidades de uma sociedade em constante transformação.

Dessa forma a inserção das tecnologias se torna uma prática necessária para a educação de hoje e nas aulas de matemática pode servir como um atrativo a mais para aqueles alunos que estão desmotivados. Muitos desses alunos apresentam bastante dificuldades para assimilar os conteúdos básicos, o uso de aplicativos, jogos, games que envolvam as operações básicas, pode ser o início de um resgate da aprendizagem desse aluno, sendo uma das grandes virtudes de inserir as tecnologias nas aulas de matemática.

> Deve-se possibilitar que o professor vivencie situações em que a informática seja usada como recurso educacional, afim de poder entender o que significa o aprendizado por meio das tecnologias, qual é o seu papel como educador nessa situação e qual é a metodologia mais adequada para a efetivação da construção do conhecimento (PERIUS, 2012, p.25).

Os professores de matemática da educação básica carregam nas costas uma árdua missão de tentar fazer com que os alunos tenham um certo apresso por matemática. Na era dos avanços tecnológicos os professores precisam buscar novas metodologias, para despertar o interesse do aluno.

> A relação entre o professor, aluno e os conteúdos se transforma em objeto de estudo e proposição de novas dinâmicas de ensino e aprendizagem, observando sempre as necessidades para cada nível de ensino e os diversos ambientes em que eles estão inseridos, indicando uma nova postura do professor mediante o processo de aprendizagem dos seus alunos (HOLANA; FREITAS; RODRIGUES, 2020, p. 57).

Os professores das séries iniciais precisam passam por formações e capacitações para que melhorem suas práticas de ensino e assim trabalhar de forma mais dinâmica e prazerosa a introdução da matemática na vida dos alunos. Esse primeiro contato do aluno com a matemática deve ser trabalhado de forma responsável e delicada para que essa aprendizagem seja levada para a vida toda.

Segundo Ribeiro e Paz (2012, p. 16), é importante compreender que para uma proposta pedagógica no ensino da matemática utilizando os recursos tecnológicos como ferramentas de auxílio à aprendizagem, não são necessários somente condições favoráveis, equipamentos e materiais, mas principalmente, o querer do profissional da matemática em oferecer um ensino voltado à realidade social atual.

O ensino de matemática hoje está refém de uma cultura muito ruim para o desenvolvimento intelectual dos alunos, eles querem que a mídia digital, por exemplo, o celular realize as operações sem que ele pense um pouco como resolvê-las. Eles se recusam a resolver uma simples operação matemática fundamental, isso dificulta a dinâmica da aula e torna ainda mais difícil a inserção de uma ferramenta tecnológica no planejamento da aula.

Para Andrade, Colares e Costa (2018), o nível de dificuldade dos alunos da educação básica na matemática varia bastante, perpassando por aspectos lógicos, operacionais, perceptivos e interpretativos. Porém, as dificuldades mais comuns estão na área da aritmética, principalmente nas operações em que envolve o jogo dos sinais e na interpretação de problemas.

Diante dessa situação o professor não se sente confortável em deixar o aluno realizar os cálculos da atividade usando uma máquina. O celular, a calculadora, o tablet e o computador seriam ótimas ferramentas para serem usadas em sala de aula, se fossem utilizadas para fins de aprendizagem ou pesquisa, como: demonstrar operações, resolver um cálculo com uma notação muito grande, para agilizar algum cálculo sugerido pelo professor, para mostrar graficamente algumas curiosidades interessantes que aparecem na matemática, não para fazer o procedimento pelo aluno.

> O computador pode ser uma ferramenta educacional, através da utilização de softwares pedagógicos que realizam inúmeras demonstrações e construções de diversos conteúdos matemáticos, tanto algebricamente quanto graficamente. Logo, a utilização da informática no ensino da Matemática, além de despertar e trazer incentivo, criatividade a descoberta e construção dos conceitos, mostra que ela não é apenas um meio de lazer e sim uma ótima opção como ferramenta de ensino (LUDUIG, SCHEIN).

Nas formações de professores da rede estadual do Ceará, por meio da Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação – CREDE 20, que estão sendo realizadas no período pós pandemia, é muito trabalhado a inserção da internet e das tecnologias na escola e na sala de aula. A internet é um meio que todos estão inseridos, porém, não quer dizer que todos fazem um bom uso, utilizando para fins de aprendizagem e de interação com o mundo virtual.

O professor muitas vezes indica um certo ambiente onde o aluno poderá acessar e lá tentar sanar alguma dúvida que poderia ter sido sanada nas séries anteriores e por algum motivo não aconteceu. Não basta simplesmente ter uma boa internet na escola, esse fato não quer dizer que foi introduzido a cibercultura de forma correta e que foi útil para aprendizagem dos alunos. Os ambientes virtuais são sugeridos pelo professor, mas só alcançará o objetivo se for utilizado da forma correta e para fins de buscar conhecimentos por aqueles que querem aprender por meios digitais.

De acordo com Silva,

> Estar on-line não significa estar incluído na cibercultura. Internet na escola não é garantia da inserção crítica das novas gerações e dos professores na cibercultura. O professor convida o aprendiz a um site, mas a aula continua sendo uma palestra para a absorção linear, passiva e individual, enquanto o professor permanece como o responsável pela produção e pela transmissão dos "conhecimentos". Professor e aprendizes experimentam a exploração navegando na Internet, mas o ambiente de aprendizagem não estimula fazer do hipertexto e da interatividade próprios da mídia on-line uma valiosa atitude de inclusão cidadã na cibercultura. Assim, mesmo com a Internet na escola, a educação pode continuar a ser o que ela sempre foi: distribuição de conteúdos empacotados para assimilação e repetição (SILVA, p.67).

Uma estratégia pedagógica que o professor de matemática pode utilizar para inserir alguma TIC nas aulas de matemática, seria a realização de minicursos com conteúdos mais básicos para os alunos irem adquirindo apresso pela matemática.

A inserção de aplicativo, mídias, programas e outras ferramentas são de fundamental importância para as aulas de matemática. Devido a esse novo cenário que estamos vivendo, após esse período de pandemia, é uma iniciativa que pode deixar as aulas de matemática muito mais alegres e com uma nova roupagem, para isso o professor precisa começar aos poucos a utilizar os recursos digitais como ferramenta pedagógica em suas aulas.

Assim, diante dessa realidade, é possível afirmar que o professor de matemática precisa estar sempre se atualizando e buscando inserir metodologias inovadoras e interativas em suas aulas. Em particular, as TICs oferecem as ferramentas que podem contribuir significativamente para o êxito no ensino aprendizagem de matemática.

Capítulo 3

Referencial Teórico

A fundamentação teórica deste trabalho foi construída com base na revisão literária de artigos, livros e outras publicações a respeito das características de Recursos Educacionais Abertos (REA) e cursos na modalidade MOOCs.

3.1 Recursos Educacionais Abertos na Educação Básica

Atualmente, a maioria dos estudantes da educação básica está constantemente conectada a diversos recursos tecnológicos, seja em redes sociais ou ambientes de estudo. Como resultado, as escolas já não são o único local de pesquisa e estudo para os alunos. Consequentemente, os professores não detêm mais o monopólio do conhecimento, uma vez que os alunos têm acesso a diferentes fontes de conteúdo e podem compartilhar experiências com seus colegas e professores na sala de aula. (JÚNIOR; OLIVEIRA; BARBOSA, 2020).

Essa é uma tendência mundial, que a educação busque diversos meios tecnológicos para atender a demanda de alunos que não conseguem permanecer presencialmente no âmbito escolar. Como educador, é fundamental que se compreenda a importância de incentivar e apoiar a autonomia dos alunos em sua jornada educacional. Ao encorajá-los a pesquisar e gerenciar sua própria rotina de estudos, os estudantes se tornam mais responsáveis e ativos em seu próprio processo de aprendizagem, desenvolvendo habilidades valiosas para a vida adulta. Além disso, essa prática permite que os alunos explorem uma variedade de recursos digitais, o que pode enriquecer seu aprendizado e torná-lo mais envolvente e interativo. No entanto, é importante lembrar que é papel do educador fornecer orientação e suporte adequados para que os alunos possam utilizar esses recursos de forma efetiva e segura.

> A Educação Aberta é considerada um dos movimentos educativos mais importantes do século XXI. Tendo como base a convergência, evolução e aprimoramento dos recursos educacionais abertos, do software livre, do livre acesso por meio de licenças específicas, dos MOOCs (Curso Online Aberto e Massivo), da ciência aberta e de uma série de mudanças sociais. O cerne desse movimento ultrapassa apenas o simples acesso a conteúdos e recursos e associa-se a uma filosofia educacional, a novos valores baseados na abertura de diversos materiais, na ética da participação e na colaboração (AIRES, 2016, apud JÚNIOR; OLIVEIRA; BARBOSA, 2020, p. 3).

A promoção da educação de forma livre e aberta está em ascensão, já que os alunos têm acesso a uma ampla variedade de conteúdos e podem escolher aqueles que mais se adequam ao seu programa de estudo. Esse processo aumenta gradualmente a aprendizagem.

De acordo com VAGULA (2015), os recursos educacionais abertos apresentam uma série de vantagens para os professores, que estão cada vez mais capacitados e aprimorando suas metodologias de ensino. Embora a inserção de ferramentas digitais nas aulas possa ser desafiadora para alguns, as possibilidades oferecidas por esses recursos são vastas e podem transformar a forma como os alunos aprendem.

Sobre os Recursos Educacionais Abertos, podemos afirmar que;

> O termo Recursos Educacionais Abertos (REA) foi definido formalmente pela primeira vez em um Fórum da UNESCO em 2002 designando materiais de ensino, aprendizado e pesquisa disponibilizados em qualquer suporte ou mídia, sob domínio público ou licenciados de maneira aberta, permitindo, assim, utilização ou adaptação por terceiros. Os REA podem ser livros, capítulos de livros, planos de aula, softwares, jogos, resenhas, trabalhos escolares, artigos, dissertações, teses, manuais, vídeos, áudios e imagens, dentre outros tipos, (FURTADO; AMIEL, 2019).

Os Recursos Educacionais Abertos são acessíveis a um grande número de pessoas simultaneamente, e permitem que seus usuários possam modificá-los de forma a gerar novas produções, atualizadas e melhoradas, com conteúdo em constante evolução. Essa possibilidade de aprimoramento constante é um dos principais benefícios dos recursos educacionais abertos, permitindo que o material produzido possa ser adaptado às necessidades e demandas dos usuários, tornando-o mais relevante e efetivo em seu propósito educacional. Além disso, essa dinâmica de colaboração e atualização constante pode estimular a criatividade e a inovação no processo de produção e uso desses recursos, tornando o aprendizado mais envolvente e estimulante para alunos e professores.

Segundo VAGULA (2015), o REA possibilita novas oportunidades para os alunos estudarem e para os professores melhorarem sua didática em sala de aula, focando na interdisciplinaridade para abordar seus conteúdos, isso devido ao livre acesso que todos podem ter a materiais de diversos autores e os envolvidos ainda terão a possibilidade de criar e adaptar os materiais.

O próprio professor pode desenvolver este processo, em consonância com seus alunos ou até mesmo com colegas professores de mesma área. Caso o material seja adaptado, será compartilhado na rede, auxiliando e colaborando com o trabalho que outros professores realizaram, dando possibilidades para que o aluno pesquise. Com isso, o professor terá ferramentas para construir um plano de aula mais dinâmico e rico de estratégias, deixando de lado o tradicionalismo. De acordo com Ferreira e Carvalho "Os REAs seriam materiais de ensino e aprendizagem disponibilizados na web sob licenças abertas, bem como registros de práticas pedagógicas e métodos de pesquisa". Sendo assim, através dos cursos MOOC os educadores podem compartilhar suas experiências e técnicas para ajudar outros professores a aprimorar suas habilidades de ensino.

Ao disponibilizar esses recursos de forma aberta e gratuita na internet, é possível ampliar o alcance do ensino para além das barreiras físicas das escolas e universidades, permitindo que qualquer pessoa possa aprender e se desenvolver de forma autônoma. Além disso, a inclusão de registros de práticas pedagógicas e métodos de pesquisa nos REAs pode contribuir para a disseminação de boas práticas de ensino e para a construção de uma cultura de colaboração e compartilhamento na área educacional.

Dessa forma, os REAs representam uma importante ferramenta para promover a democratização do conhecimento e para aprimorar a qualidade da educação em todo o mundo.

3.2 Cursos MOOC

De acordo com MCAULEY (2010, apud SANTANA; ROSSINI; PRETTO, 2012) um MOOC (Cursos Online Abertos e Massivos) é um curso online com a opção de inscrição aberta e livre, um currículo compartilhado publicamente, e que geram resultados com finais imprevisíveis. Os MOOCs integram rede social, recursos online acessíveis e são facilitados por profissionais especialistas na área de estudo. Mais significativamente, os MOOCs são construídos por meio do engajamento dos aprendizes, que auto-organizam sua participação de acordo com seus objetivos de aprendizado, conhecimento prévio e interesses comuns.

> Os MOOC, normalmente, são apresentados em plataformas estruturadas para possibilitar grande quantidade de acessos simultâneos. Além disso estas plataformas padronizam a forma de realização de atividades de verificação do aprendizado, fóruns e apresentação de conteúdo. (SOUZA; CYPRIANO (2016, p. 69).

Como afirma SANTANA; ROSSINI; PRETTO (2012, p.198), "as primeiras experiências práticas com MOOCs foram realizadas por George Siemens e Stephen Downes (2008). De forma massiva e aberta, o curso atraiu mais de 1220 pessoas".

Sobre as plataformas de cursos MOOCs:

> As plataformas de MOOCs oferecem possibilidade de certificação em diferentes áreas: ciências humanas, ciências sociais aplicadas, ciências da saúde, ciências naturais, ciências exatas, etc. O estabelecimento de plataformas para o oferecimento desses cursos criou um segmento educacional e, além disso, um segmento de mercado. Dentre as plataformas mais conhecidas, destacamos: Coursera, edX e Udacity, dos Estados Unidos, Future Learn, do Reino Unido, e a europeia OpenupEd. (FORNO; KNOLL, p. 183, 2013).

As características dessas plataformas incentivam os alunos a buscar versatilidade na escolha de sua rotina de estudos, bem como a adquirir conhecimentos em diversos segmentos do mercado, a fim de idealizar a sequência de estudos em uma área promissora no futuro.

No Brasil, temos algumas plataformas que foram as pioneiras nesse formato de oferecer cursos MOOCs, são elas: Khan Academy (http://pt.khanacademy.org) e Veduca (http://www.veduca.com.br), e mais recentemente a plataforma TIMTec (http://mooc.timtec.com.br) desenvolvida pelo Instituto TIM para uso na Rede e-Tec, em especial, para os Institutos Federais, segundo RIBEIRO; CATAPAN (2018).

Como exemplo de aplicação de cursos MOOC podemos citar o estudo de SIQUEIRA et al. (2022) que descreve a criação de um curso de informática básica, com foco no uso cotidiano da tecnologia, destinado a professores e alunos do ensino básico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP). O objetivo central do curso era ensinar aos alunos a criação de planilhas, slides, arquivos de texto, entre outros recursos, visando manter a continuidade das aulas durante o período de pandemia do COVID-19, que exigiu o ensino remoto como alternativa segura e viável. O curso teve 164 inscritos e cerca de 48 completaram, levando em consideração que não houve cobrança a respeito de eficiência dos participantes, foram disponibilizados e teve quase duas mil visualizações, isso quer dizer que os participantes tiveram a oportunidade de assistir aos vídeos por várias vezes, sendo esse uma das grandes vantagens dos cursos MOOCs.

Neste estudo de caso, constatamos que o fato do estudante ter a possibilidade de acessar o curso inúmeras vezes é um fator positivo para a aprendizagem. Lembrando que o critério de sucesso não se baseou na quantidade de alunos que concluíram o curso, mas sim na frequência de acesso aos vídeos das aulas, o que demonstrou que aqueles que estavam interessados em aprender participaram ativamente do processo.

Outra vantagem dos MOOCs é que eles podem ser acessados em diferentes horários e locais, possibilitando a flexibilidade na rotina de estudos. Além disso, muitos cursos oferecem certificados e diplomas que podem ser utilizados para fins de qualificação profissional.

Apesar das diversas vantagens, é importante destacar que os MOOCs não são uma solução única para todos os problemas educacionais. A qualidade dos cursos pode variar, e é importante escolher cuidadosamente o curso adequado para cada objetivo de aprendizado. Além disso, o ensino a distância pode não ser a melhor opção para todos os estudantes, especialmente aqueles que têm dificuldades de organização e disciplina pessoal.

Em resumo, os cursos MOOCs são uma modalidade de ensino que vem ganhando espaço e relevância na educação. Com a possibilidade de acesso a conteúdos de alta qualidade, flexibilidade na rotina de estudos e certificações profissionais, os MOOCs podem ser uma alternativa valiosa para estudantes em todo o mundo.

Capítulo 4

Metodologia

O presente trabalho consiste na elaboração de um curso MOOC (Curso Online Aberto e Massivo) que tem como propósito transmitir aos estudantes diversos conceitos, definições e exemplos práticos relacionados à trigonometria. Devido à natureza virtual do curso, foram desenvolvidos materiais detalhados, com uma linguagem clara e acessível, a fim de facilitar a compreensão dos alunos. Essa modalidade de ensino a distância (EaD) permite que o estudante, com autonomia, tenha acesso a todo o material de apoio necessário para a realização do curso de forma livre e autônoma, sem interferir significativamente em sua rotina diária. Embora o curso não seja extenso, ele aborda as principais áreas consideradas essenciais para a compreensão do tema, acompanhado de exercícios autoexplicativos que possibilitam uma prática rápida e eficiente dos conceitos abordados.

O curso foi preparado com o objetivo de ser disponibilizado no Portal de Cursos Abertos (PoCA), que é uma plataforma de cursos a distância disponibilizados gratuitamente no Ambiente Virtual de Aprendizagem Moodle. Os cursos são oferecidos como parte do programa de extensão da Secretaria Geral de Educação a Distância da Universidade Federal de São Carlos (SEaD-UFSCar), registrado na Pró-Reitoria de Extensão da UFSCar.

A estrutura do curso foi planejada com o objetivo de oferecer uma síntese clara e objetiva do conteúdo abordado, visando tornar a rotina de estudo mais eficiente e produtiva. O método de ensino adotado, que permite ao aluno escolher livremente o conteúdo a ser estudado e aprofundado, apresenta uma grande vantagem, favorecendo a personalidade do aprendizado.

Além disso, nas apostilas procurou-se apresentar exercícios resolvidos de forma detalhada, proporcionando ao aluno uma compreensão mais aprofundada do tema e uma melhor capacidade de resolução dos exercícios propostos. Essa abordagem visa promover o desenvolvimento do pensamento lógico do aluno, estimulando-o a investigar e pesquisar a solução dos exercícios, o que contribui para um aprendizado mais significativo e duradouro.

O conteúdo foi organizado em 4 unidades e com uma carga horária mínima para o cursista de 8 horas de dedicação. Vejamos as unidades, a seguir:

Unidade 1 – Trigonometria no triângulo retângulo: Razões trigonométricas; relações fundamentais entre as razões; Razões trigonométricas especiais.

Unidade 2 – Trigonometria na Circunferência: Arcos e ângulos; Ciclo trigonométrico.

Unidade 3 - Trigonometria na Circunferência: Razões trigonométricas na circunferência.

Unidade 4 - Trigonometria na Circunferência: Funções trigonométricas.

O curso é ofertado de forma online e gratuita no Portal de Cursos Abertos (PoCA) pela Universidade Federal de São Carlos de forma contínua e sem acompanhamento de um tutor.

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de disponibilizar um material de suporte acessível a um amplo público de alunos e professores, com o objetivo de ser utilizado tanto em sala de aula quanto por alunos que optam por estudar de forma independente. Acreditamos que a estruturação do curso e seu conteúdo possam ser de grande utilidade para alunos e professores.

Capítulo 5

Análise e Discussão

O fato relatado neste trabalho, pode ser pensado como uma realidade que muitos jovens estão passando por todo o país, que é a falta de acesso ao ensino superior e a metodologia que foi sugerida, visa minimizar essa questão, e o ingresso de um número maior de pessoas ao ensino superior. As grandes universidades estão a cada dia procurando novas formas de incluir os alunos com a mais diversas dificuldades no ensino superior e tecnológico.

Dessa forma, almejamos que os conteúdos ligados a trigonometria sejam mencionados de forma criativa e em cursos como este no formato digital e com metodologias que irão propiciar ao estudante em geral novas oportunidades de estudarem em casa ou em qualquer lugar que estejam, sendo esse o objetivo principal do curso.

Para SANTOS e TURIBUS, a trigonometria surgiu em decorrência das necessidades humanas. Isso mostra que para acontecer uma aprendizagem significativa da trigonometria, é necessário ir além das fórmulas, e sobretudo seu ensino ser pautado em aplicações práticas as quais deixam o aprendizado mais prazeroso. Outro ponto percebido com esta pesquisa é que a trigonometria possibilitou inúmeros desenvolvimentos para a sociedade. Foi com esse pensamento sobre o tema que o curso foi desenvolvido, no intuito de contribuir de forma significativa na formação intelectual de todos os envolvidos.

Dessa forma podemos concluir que a trigonometria tem muito a enriquecer na vida estudantil e profissional do indivíduo que tiver interesse em estudá-la profundamente, e com o modelo de curso MOOC será ainda mais proveitoso para todos.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho buscamos apresentar algumas das diversas vantagens do curso MOOC com foco em Trigonometria para estudantes. Esse formato oferece condições ideais para aqueles que não podem frequentar uma sala de aula tradicional, bem como para aqueles que estão concluindo ou em vias de concluir o ensino médio. Os alunos têm a oportunidade de estudar no seu próprio ritmo e escolher quais partes do conteúdo desejam abordar de forma isolada.

Em vista disso, elaboramos um curso abrangente que proporciona suporte aos alunos, dispensando a necessidade de um professor tutor para auxiliá-los na compreensão e resolução dos exercícios propostos. Buscamos produzir um material didático detalhado com o objetivo de auxiliar o aluno em sua jornada de conhecimento. Além disso, o aluno pode revisar os vídeos, slides e apostilas quantas vezes desejar, o que é uma excelente vantagem do formato MOOC para consolidar o entendimento do conteúdo.

Reconhecemos que a Trigonometria é uma área vasta da matemática, e incentivamos os alunos a buscar conhecimentos além deste curso. Existem muitos conteúdos de fundamental importância para a vida acadêmica, e neste curso abordamos apenas uma parte do necessário para os alunos que estão concluindo o ensino médio e têm interesse em prosseguir os estudos para ingressar no ensino superior ou técnico.

Desejamos que este curso seja uma ferramenta útil para os professores de Matemática, que possam utilizá-lo como material de apoio em suas aulas, indicando-o como complemento aos alunos. Além disso, esperamos que seja uma fonte de inspiração para pesquisas, despertando a curiosidade de todos aqueles interessados no tema.

Referências Bibliográficas

[1] Alberto, L. *Ângulo ao centro e ângulo correspondente*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/tqnxkfcx¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[2] Bezerra, M. J., Carvalho, J. S. *Matemática para o ensino médio - Série Parâmetro*. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

[3] Chaves, J. R. A.*Triângulos Retângulos*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/kxeaqmpk¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[4] Cunha, M. *Radianos - definição*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/JSB4f3MY¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[5] Dantas, F. A.*Razões trigonométricas - circunferência*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/ca7jftnh¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[6] Ferreira, G. M. S., Carvalho, J. S. *Recursos Educacionais Abertos como tecnologias educacionais: considerações críticas*. Debates e polêmicas, p. 738-755, 2018.

[7] Forno, J. P. D., Knoll, G. F. *Os MOOCs no mundo: um levantamento de cursos online Abertos Massivos*, p. 178-194, 2013.

[8] Furtado, D., Amiel, T. *Guia de Bolso da Educação Aberta*. Brasília - DF, 2019.

[9] Holanda, A. C. A. *Dissertação: MOOCOLAB: um Framework de colaboração personalizado em Massive Open Online Courses*, 2020.

[10] Holanda, M. D. M., Freitas, I. B., Rodrigues, A. C. S. *Matemática no Ensino Médio: dificuldades encontradas nos conteúdos das quatro operações básicas*. Revista de iniciação a docência, p. 56-69, 2020.

[11] Iatagan.*Ciclo trigonométrico com secante e cossecante*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/gcnxqh8e¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[12] Iezzi, G.*Fundamentos de Matemática elementar: Trigonometria*. Volume 3. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

[13] Iezzi, G., Dolce, O., Desenszajn, D., Almeida, R.*Matemática: Ciência e Aplicações*. Volume 2 PNLD 2018, 2019, 2020, 2021. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[14] João, A.*Circunferência trigonométrica*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/bxvwe78y¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[15] Júnior, F. S. C., Oliveira, C. D., Barbosa, E. F. *TCC: O uso de Recursos Educacionais Abertos (REAs) e dispositivos móveis nas aulas de Matemática*, 2020.

[16] Lima, E. L.*Números e Funções Reais*. SBM 1ª ed. Rio de Janeiro, 2013.

[17] Madeira, R. O. C.*Função tangente*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/NReJCURn¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[18] Madeira, R. O. C.*Função cotangente*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/FhSRNJQW¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[19] Magalhães, B. M. M.*Razões trigonométricas de um ângulo agudo*.Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/gncrva68¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[20] Matika.*Trigonometria Ciclo trigonométrico*. Página inicial. Disponível em ¡https://matika.com.br/trigonometria-no-ciclo-trigonometrico/angulos-negativos ¿. Acesso em: 07 de mar. 2023.

[21] Neto, A. C. M. *Geometria*. SBM 1ª ed. Rio de Janeiro, 2013.

[22] Perius, A. A. B. *TCC: A tecnologia aliada ao ensino de Matemática*, 2012.

[23] Rosa, C. E. G. *Rebate de ângulos na Circunferência trigonométrica*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/VvQYVxcK¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[24] Ribeiro, F. M., Paz, M. G. *O ensino da Matemática por meio de novas tecnologias*. Revista Modelos - FACOS/CNEC Osório, p. 12-21, 2012.

[25] Ribeiro, L. O. M., Catapan, A. H. *Plataformas MOOC e redes de cooperação na EAD*. Em REDE: Revista de Educação a Distância, p. 46-62, 2018.

[26] Salgado, M. *Razões trigonométricas do triângulo Retângulo*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/GtNezwru¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[27] Santana, B., Rossini, C., Pretto, N. L. *Recursos Educacionais Abertos: práticas colaborativas e políticas públicas*.1ª ed.São Pulo. EDUFBA, 2012, p. 193-217.

[28] Santos, H. *Circunferência trigonométrica*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/jz77nwsw¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[29] Santos, J. G., Gonçalves, L. R. S., Cardoso, V. C. *O uso das TICs durante a pandemia de COVID-19 no ensino de Matemática*. Revista Kiri-Kerê: Pesquisa em ensino, p. 108-125, 2021.

[30] Silva, F. C.*Função secante*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/b3qfz66a¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[31] Silva, F. C.*Função cossecante*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/zrqr5yf4¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[32] Siqueira, D. K., Carvalho, G. V., Cândido, P. H. V., Santos, C. H. S. *Experiências na elaboração de cursos MOOC para alunos e professores: informática do cotidiano e pensamento computacional*. Revista brasileira de iniciação científica (RBIC), 2022.

[33] Souza, N. S., Perry, G. T. *Aprendizagem em MOOCs: Barreiras de desafios da atualidade*. Congresso Internacional de Educação e Tecnologia, p.2, 2018.

[34] Souza, R., Cypriano, E. F. *MOOC: uma alternativa contemporânea para o Ensino de Astronomia*, p. 65-80, 2016.

[35] Timboíba, C. A. N., Ribon, I. S., Pain, I. P. O., Monteiro, S. R., Monteiro, S. A., Guirardi, M. M. M. *A inserção das TICs no ensino fundamental: limites e possibilidades*. Revista científica de educação à distância, 2011.

[36] Tomson, P. *Funções trigonométricas (seno e cosseno)*. Página inicial. Disponível em ¡https://www.geogebra.org/m/yrhmcbjs¿. Acesso em: 14 de mar. 2023.

[37] Vagula, E. *O uso dos Recursos Educacionais Abertos na Educação Básica*. XII Congresso Nacional de Educação: EDUCERE, p. 31396-31411, 2015.

Apêndice A

Materiais elaborados

A partir da próxima página estão anexados os materiais preparados para o curso MOOC sobre trigonometria, que será disponibilizado no Portal de Cursos Abertos (PoCA), incluindo slides, apostilas e videoaulas. O curso abrange as áreas essenciais da trigonometria e está organizado em quatro unidades:

1. Trigonometria no triângulo retângulo: Razões trigonométricas e relações fundamentais.

2. Trigonometria na Circunferência: Arcos, ângulos e ciclo trigonométrico.

3. Trigonometria na Circunferência: Razões trigonométricas.

4. Trigonometria na Circunferência: Funções trigonométricas.

O curso na íntegra pode ser acessado no site https://poca.ufscar.br/.

Uma introdução à Trigonometria

Unidade 1. Trigonometria do triângulo Retângulo

Professores: José Carlos de Sá
Érica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

PoCA Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar 1970 - 2020 50 ANOS TRANSFORMANDO VIDAS

Uma introdução à Trigonometria[1] [2] [3]

Introdução

Esse conteúdo é de fundamental importância para os alunos que estão no ensino médio, pois várias áreas da matemática trabalham com a trigonometria do triângulo retângulo e necessitam que sejam aplicadas algumas de suas propriedades e razões que aqui serão estudadas.

Em nosso cotidiano estamos sempre nos deparamos com várias situações que precisamos aplicar algo que foi estudado no triângulo retângulo. Os pedreiros, por exemplo, muitas vezes usam propriedades da trigonometria e não sabem que ali está um conteúdo muito importante de matemática.

Na construção civil, por exemplo, as aplicações da trigonometria do triângulo retângulo são mais frequentes, como na construção de rampas de acesso que precisam seguir as medidas previstas na lei; de mão francesa que possui forma triangular e serve para apoiar as bases e vigas; de tesoura de telhado que possui um formato triangular para sustentar o telhado; de escadas residenciais para que sejam garantidas as medidas ideais para uma escada dentro do que diz a engenharia. Como o triângulo é uma figura rígida, faz esse papel plenamente. No cálculo de medidas inacessíveis, por exemplo, para mediar a largura de um rio e a altura de um prédio, utiliza-se aparelhos de alta precisão como o teodolito que usa as leituras de ângulos como base para o cálculo.

A trigonometria também é fundamental em áreas como a física e a matemática aplicada. Na física, a trigonometria é usada para descrever as propriedades dos movimentos oscilatórios e periódicos, como ondas sonoras e eletromagnéticas. Na matemática, a trigonometria é aplicada em diversos ramos, como na teoria dos números, geometria, análise e estatística.

[1] José Carlos de Sá...... [Mestrando em Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/SEDUC]
[2] Érica Boizan Batista .... [Doutora em Matemática]
[3] Valdinês Leite de Sousa Júnior ... [Doutor em Matemática]

É importante destacar que a trigonometria é uma ferramenta poderosa para resolver problemas práticos e teóricos em diversas áreas do conhecimento, e seu estudo é essencial para quem deseja se aprofundar em ciências exatas e engenharia.

1. Revisão: seno, cosseno, tangente e cotangente de um ângulo

Seja β a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, temos:

- Seno de β é razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa;

- Cosseno de β é a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa;

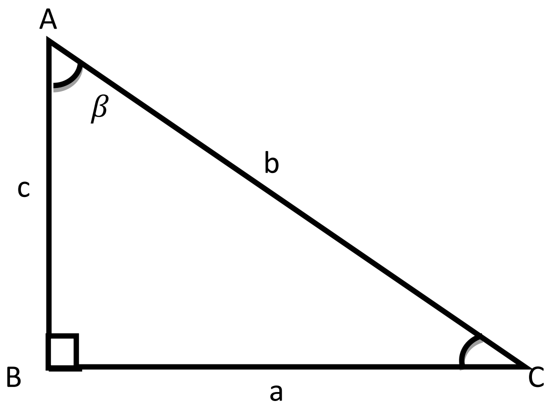
- Tangente de β é a razão entre o cateto aposto a esse ângulo e o cateto adjacente a ele;

- Cotangente de β é a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e o cateto oposto a ele.

OBS: A cotangente é o inverso da tangente.

Observe a figura:

Figura 1: triângulo retângulo



Fonte: autoria própria

Iremos mostrar as razões trigonométricas do triângulo acima referente ao ângulo agudo β.

- $sen\,\beta = \frac{a}{b}$

- $cos\ \beta = \frac{c}{b}$
- $tg\ \beta = \frac{a}{c}$
- $cotg\ \beta = \frac{c}{a}$

Veja também: **Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e seus valores**

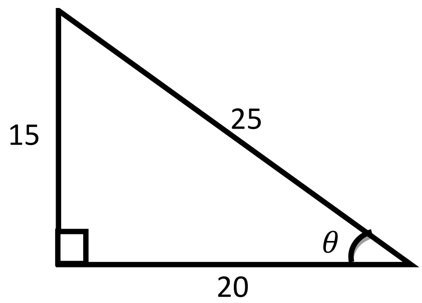
https://www.geogebra.org/m/kxeaqmpk

Esse applet apresenta um vasto resumo sobre a trigonometria no triângulo retângulo. O aluno poderá interagir com a ferramenta, modificando em tempo real o valor do ângulo referido e observando o comportamento das razões seno, cosseno e tangente no triângulo, analisar as medidas dos catetos e da hipotenusa do mesmo e os respectivos valores das razões dos ângulos notáveis.

Exercício resolvido - 1

Determine o seno, o cosseno, a tangente e a cotangente do ângulo θ (teta) no triângulo retângulo abaixo.

Figura 2: triângulo retângulo 1



Fonte: autoria própria

Resolução:

- $sen\ \theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

- $cos\ \theta = \dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$

- $tg\ \theta = \dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$

- $cotg\ \theta = \dfrac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto} = \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$

1.1. Razões trigonométricas especiais

No triângulo retângulo destacamos os valores das razões trigonométricas mencionadas, para os ângulos notáveis, (de 30°, 45° e 60°).

Usaremos uma tabela para melhor memorização dos valores:

Tabela 1: razões trigonométricas especiais (ângulos notáveis)

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte: autoria própria

Veja também: **As razões trigonométricas em ângulos agudos**

https://www.geogebra.org/m/gncrva68

O applet mostra as razões trigonométricas do triângulo retângulo de ângulo agudos, onde o aluno poderá sincronizar o ângulo desejado e observar o valor de cada razão em relação ao mesmo.

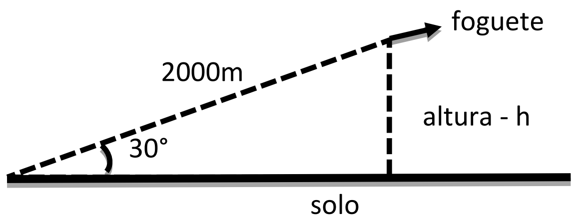
Observe algumas aplicações das razões trigonométricas desses ângulos notáveis.

Exercício resolvido – 2

Um foguete sobe em linha reta formando um ângulo de 30° com o solo. Após uma subida de 2000m, qual a altura em que o foguete se encontra?

Resolução: Primeiramente ilustramos essa situação em desenho para facilitar o entendimento.

Figura 3:foguete subindo



Fonte: autoria própria

Analisando a figura, percebemos que temos os valores do cateto aposto ao ângulo e da hipotenusa do triângulo. Dessa forma iremos aplicar a razão seno para encontrar o valor desejado.

$$seno = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$sen\ 30° = \frac{h}{2000} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{2000} \rightarrow 2h = 2000 \rightarrow h = \frac{2000}{2} = 1000m$$

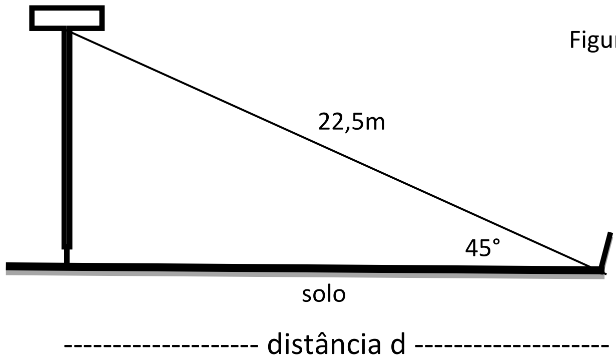
Portanto, o foguete está a 1000m de altura.

Exercício resolvido – 3

Um cabo de aço de 22,5m fincado ao chão e preso no alto de uma torre, forma um ângulo 45° com o solo, qual a distância do ponto de fixação do cabo no chão até a base da torre? Use $\sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{1,4}$

Ilustraremos a situação em desenho.

Figura 4: torre



Fonte: autoria própria

Como temos os valores do cateto adjacente ao ângulo dado e da hipotenusa, iremos aplicar a razão cosseno.

$$cosseno = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$COS\ 60° = \frac{d}{22,5} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{22,5} \rightarrow 2d = 22,5\sqrt{2} \rightarrow d = \frac{22,5\sqrt{2}}{2} = \frac{22,5\ x\ 1,4}{2}$$

$$d = \frac{31,5}{2} = \mathbf{15,75m}$$

Portanto, a distância do ponto de fixação do cabo até a base da torre é de 15,75m.

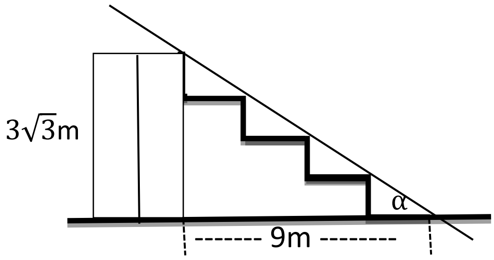
Exercício resolvido – 4

Um sobrado de 9m de altura possui uma escada externa para chegar até seu teto, a distância do pé da escada até a base do sobrado é de $3\sqrt{3}$m e o qual o ângulo de inclinação da escada?

Resolução:

A ilustração da situação fica da seguinte forma.

Figura 5: sobrado



Fonte: autoria própria

Analisando a figura, temos os valores apenas dos dois catetos, dessa forma iremos aplicar tangente, lembrando que poderemos utilizar outras razões para resolver esta questão.

$$tangente = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$tg\ \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{9} \rightarrow tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = 30°$$

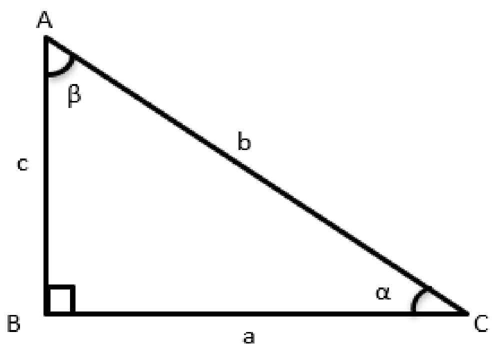
Portanto, o ângulo de inclinação da escada é de 30°.

1.2. Relações entre seno, cosseno, tangente e cotangente

Veremos agora, algumas relações entre as razões trigonométricas mostradas até aqui.

De acordo com o que foi estudado até agora sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, temos as seguintes relações, de acordo com o triângulo abaixo.

Figura 6: triângulo retângulo 2



Fonte: autoria própria

Fixando o ângulo agudo α, temos:

- ✓ $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
- ✓ $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$
- ✓ $cotg\ \alpha = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$

> Veja também: **As razões trigonométricas e a relação fundamental da trigonometria**
>
> https://www.geogebra.org/m/GtNezwru
>
> No link acima, o applet apresenta o comportamento das razões trigonométricas do triângulo retângulo e da relação fundamental da trigonometria, a partir da alteração do valor do ângulo que se refere.

Veremos algumas aplicações das relações entre as razões trigonométricas do triângulo retângulo.

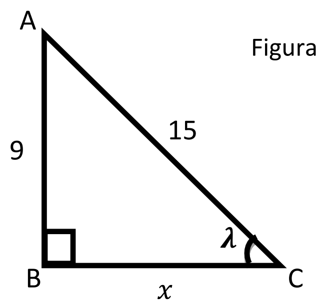
Exercício resolvido – 5

Determine o cosseno, a tangente e a cotangente do ângulo λ (lambda), quando: $\boldsymbol{sen\ \lambda = \frac{9}{15}}$.

Resolução:

Como o $sen\ \lambda = \dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$, temos no triângulo, que a medida do cateto oposto é igual a 9, e a medida da hipotenusa é igual a 15, veja na figura:

Figura 7: triângulo retângulo 3



Fonte: autoria própria

Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos o valor do cateto adjacente, veja:

$$(hipotenusa)^2 = (cateto\ oposto)^2 + (cateto\ adjacente)^2$$

$$\rightarrow 15^2 = 9^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 225 - 81 \rightarrow x^2 = 144 \rightarrow x = \sqrt{144} \rightarrow \boldsymbol{x = 12}.$$

Logo o cateto adjacente é igual a **12.**

Coma já temos os dois catetos e a hipotenusa do triângulo, podemos desenvolver as razões desejadas.

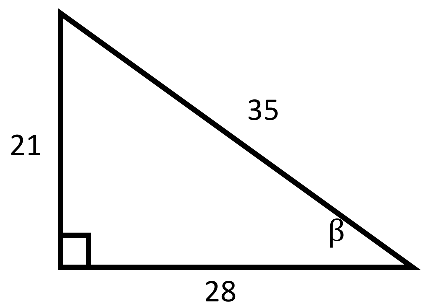
$$\cos\lambda = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\,\lambda = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\text{cotg}\,\lambda = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

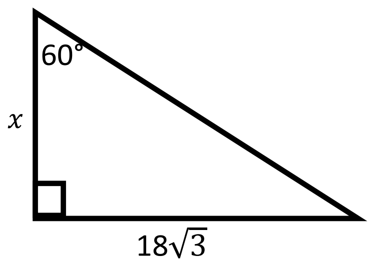
Exercícios propostos

1 – Obtenha o valor de seno, cosseno, tangente e cotangente do ângulo β (beta) no triângulo retângulo abaixo.

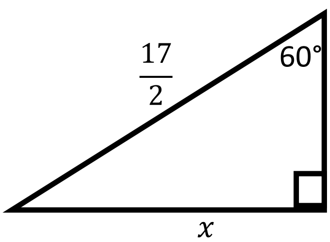


2 – Determine o valor de x em cada caso.

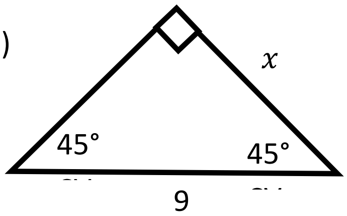
a)



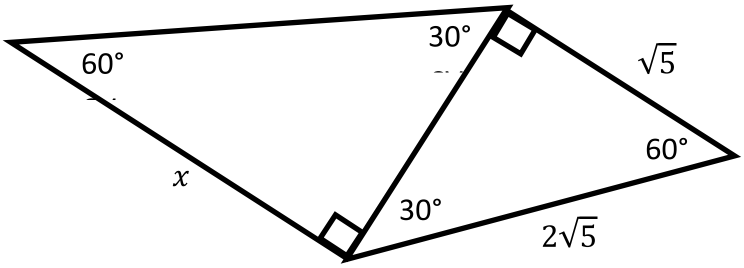
b)



c)



d)



3 – Uma escada de 9 m de comprimento está apoiada em uma parede e forma com o solo um ângulo de 60°. Qual é a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? Qual é a distância do pé da escada até a parede?

4 – Uma bola percorre 16 m ao ser solta sobre um plano inclinado que forma um ângulo de 30° com o solo. Determine a altura em relação ao solo, da qual a bola foi solta.

Resultados esperados:

1 - $\boldsymbol{sen\ \beta = \frac{21}{35};\ cos\ \beta = \frac{28}{35};\ tg\ \beta = \frac{3}{4};\ cotg\ \beta = \frac{4}{3}}$

2 – a) 18; **b)** $\boldsymbol{\frac{17\sqrt{3}}{4}}$**; c)** $\boldsymbol{4,5\sqrt{2}}$**; d)** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

3 – altura = 7,79 m; distância = 4,5 m

4 – 8 m

Referências

BEZERRA, M. J. Matemática para o Ensino Médio - Série Parâmetro. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

CHAVES, J. R. A. Triângulos Retângulos. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/kxeaqmpk>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar: Trigonometria, Volume 3. São Paulo: 9 ed. Atual Editora, 2013.

IEZZI, G; DOLCE, O; DESENSZAJN, D; ALMEIDA, R. Matemática: Ciência e Aplicações, volume 2 PNLD 2018,2019, 2020, 2021. São Paulo: 9 ed. Editora Saraiva, 2016.

MAGALHÃES, B. M. M. Razões trigonométricas de um ângulo agudo. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/gncrva68>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

NETO, A. C. M. Geometria. Rio de Janeiro: 1ª edição, SBM, 2013.

SALGADO, M. Razões trigonométrica do triângulo retângulo. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/GtNezwru>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

Uma introdução à Trigonometria

Unidade 2.

Trigonometria na Circunferência

Professores: José Carlos de Sá

Érica Boizan Batista

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Uma introdução à Trigonometria[1] [2] [3]

Introdução

Nessa unidade iremos estudar uma parte da trigonometria que está ligada a vários outros conteúdos de Matemática e de outras áreas de conhecimento. O estudo de trigonometria na circunferência está presente na área de medicina, geografia, nas telecomunicações, na física, na engenharia civil, na informática e em diversas outras áreas.

A trigonometria estudada na circunferência tem como objetivo aprimorar os conhecimentos dos alunos na construção de ângulos e arcos na circunferência e medir seus respectivos valores, enriquecer o que já foi estudado na parte referente a localização de pontos no plano cartesiano, conhecimento esse que é usado na geografia e astronomia.

Esse conhecimento de trigonometria era muito utilizado nas grandes navegações para poderem se localizar em suas viagens. Outra área que aplica constantemente o conhecimento trigonométrico é a topografia, pois trabalha com cálculos muito complexos envolvendo princípios da trigonometria.

Além disso, a trigonometria na circunferência é essencial para o estudo das funções trigonométricas, que relacionam os valores dos ângulos com os valores das razões trigonométricas, como seno, cosseno e tangente. Essas funções são amplamente utilizadas em diversas áreas da ciência e da tecnologia, como na engenharia, física, computação e na análise de dados.

Os conceitos de trigonometria associados à circunferência também são usados na resolução de problemas práticos, como na determinação de distâncias inacessíveis entre dois pontos, utilizando a trigonometria esférica. Esse conhecimento é fundamental na cartografia, que é a ciência que estuda a representação gráfica da superfície terrestre.

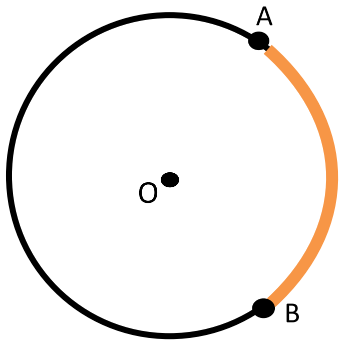
[1] José Carlos de Sá...... [Mestrando em Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/SEDUC]
[2] Érica Boizan Batista .... [Doutora em Matemática]
[3] Valdinês Leite de Sousa Júnior ... [Doutor em Matemática]

Em resumo, a trigonometria na circunferência é um conhecimento fundamental em diversas áreas do conhecimento, desde a geografia e a astronomia até a física e a engenharia. Seu estudo permite a resolução de problemas práticos e teóricos complexos, além de contribuir para o avanço do conhecimento científico e tecnológico.

2.1. Arcos e ângulos

Seja uma circunferência de centro O, na qual marcamos dois pontos distintos, **A** e **B**, com isso a dividimos em duas partes, que chamamos de arcos de circunferência. Veja na figura 1:

Figura 1: arco AB

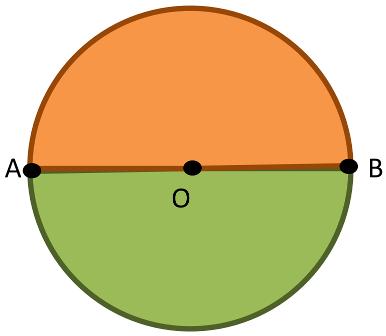


Temos o arco $\widehat{AB}$ e o arco $\widehat{BA}$

Fonte: autoria própria

Se os pontos A e B forem simétricos em relação ao centro da circunferência, o segmento $\overline{AB}$ será um diâmetro da circunferência, e cada um dos arcos gerados é uma **semicircunferência** ou um **arco de meia volta**, como mostra a figura 2:

Figura 2: arco de meia volta



Fonte: autoria própria

Se os pontos coincidirem serão gerados dois arcos, um **arco de uma volta** e o outro um **arco nulo.**

Figura 3: arco de uma volta

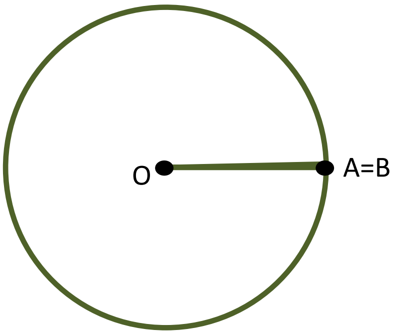
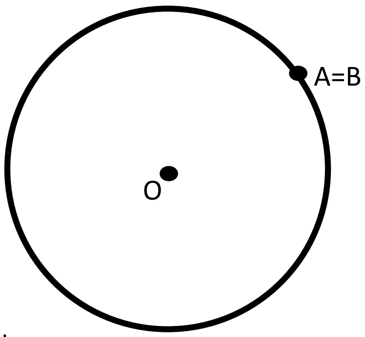


Figura 4: arco nulo

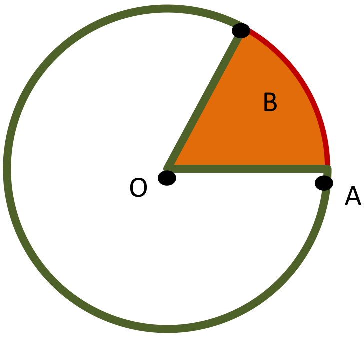


Fonte: autoria própria

Observando as figuras anteriores, percebemos que a todo arco $\widehat{AB}$ corresponde um ângulo central, ou seja, um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Figura 5: ângulo central

AÔB é o ângulo central correspondente ao arco $\widehat{AB}$, e ambos possuem a mesma medida.



Fonte: autoria própria

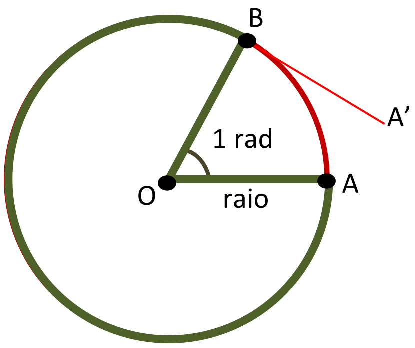
OBS: O ângulo AÔB mede 60°, podemos dizer que o arco $\widehat{AB}$ também mede 60°, pois a medida angular de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente.

Veja também: **Ângulo central e arco correspondente** https://www.geogebra.org/m/tqnxkfcx A animação mostra que um ângulo central tem mesma medida que seu arco correspondente, na circunferência.

Em se tratando de medida de um arco, adotamos o grau (°) ou radianos (rad) como sendo as unidades de medidas aplicadas. Dessa forma, temos:

- 1 grau é equivalente a medida um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência dada;
- 1 radiano é equivalente à medida de um arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência dada.

Figura 6: medida linear do arco



$\overline{A'B}$ é a medida do comprimento do arco $\widehat{AB}$ e igual a medida do raio da circunferência, por isso o ângulo central e o arco correspondente medem 1 rad.

Fonte: autoria própria

Diante dessa definição de radianos podemos determinar a medida de um arco em radianos, com a seguinte expressão:

$$\text{medida do arco em rad } (\alpha) = \frac{\text{comprimento do arco } (\ell)}{\text{medida do raio da circunferência (r)}}$$

Veja também: **Surgimento da unidade radianos**

https://www.geogebra.org/m/JSB4f3MY

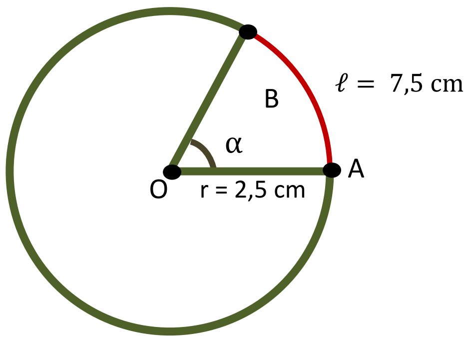
O applet mostra a relação que gerou a unidade de medida em radianos.

Veja no exemplo a seguir a aplicação dessa expressão:

Exercício resolvido - 1

Dada uma circunferência de raio 2,5 cm, tomando-se um arco $\widehat{AB}$ de comprimento igual a 7,5 cm. Qual a medida desse arco em radianos?

Figura 7: circunferência 1



Fonte: autoria própria

Resolução:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \rightarrow \alpha = \frac{7{,}5}{2{,}5} = \mathbf{3\ rad}$$

Portanto, a medida desse arco em radianos é 3 rad.

Em se tratando de medidas de arcos em graus e radianos, em alguns casos precisamos fazer a conversão de uma unidade para outra, para isso precisamos aplicar a expressão $\boldsymbol{C = 2\pi r}$**,** que nos dá o comprimento **C** da circunferência em função do de seu raio **r**, e **π** que é um número irracional com valor de, aproximadamente, 3,14159265...

Com base na definição de radianos iremos determinar a medida do arco de uma volta em radianos, ou seja, o comprimento de uma circunferência em radianos. Desta forma, iremos dividir o comprimento da circunferência pela medida de seu raio, obtendo:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\, rad$$

Com isso concluímos que um arco de uma volta (360°) equivale a $2\pi\, rad$, de imediato percebemos que um arco de meia volta (180°) equivale a π rad, assim a expressão: ***180° ----------*** $\boldsymbol{\pi\, rad}$ será aplicada para a conversão de unidades de medidas de arcos. Veja os exemplos abaixo:

Exercício resolvido – 2

Um arco mede 45°. Quanto mede esse arco em radianos?

Resolução:

Aplicaremos a expressão ***180° ----------*** $\boldsymbol{\pi\, rad}$ e estabelecemos a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi\, rad \;-------------\; 180° \\ x \;---------------\; 45° \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pi\, rad\, .\, 45°}{180°} \rightarrow x = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}\, rad}$$

Portanto, 45° equivale a $\frac{\pi}{4}\, rad$.

Exercício resolvido – 3

Dada uma circunferência, seu ângulo central mede $\frac{3\pi}{5}\, rad$. Qual a medida desse ângulo em graus?

Resolução:

Aplicaremos a expressão ***180° ----------*** $\boldsymbol{\pi\, rad}$ e estabelecemos a regra de três simples:

$$\begin{cases} \pi\, rad \;----\; 180° \\ \frac{3\pi}{5}\, rad \;----\; x \end{cases} \rightarrow x = \frac{\frac{3\pi}{5}\, rad\, .\, 180°}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{3\pi\, rad\, .\, 36°}{\pi\, rad} \rightarrow x = \mathbf{108°}$$

Portanto, $\frac{3\pi}{5}$ rad equivale a 108°.

Exercício resolvido – 4

Um arco mede 2 radianos. Quanto mede esse arco em graus?

Resolução:

Primeiramente, observamos que a medida do arco é um número real, dessa forma, temos por definição que $\pi\, rad = 3{,}14\, rad$, aproximadamente, sendo assim: ***3,14 rad ---- 180°.***

Agora iremos aplicar a regra de três simples:

$$\begin{cases} 3{,}14\, rad \;-----\; 180° \\ 2\, rad \;-------\; x \end{cases} \rightarrow x = \frac{2\, rad\, .\, 180°}{3{,}14\, rad} \rightarrow x = \frac{2\, .\, 180°}{3{,}14} \rightarrow x = \mathbf{114{,}6°}$$

Portanto, 2 rad equivale a 114, 6°.

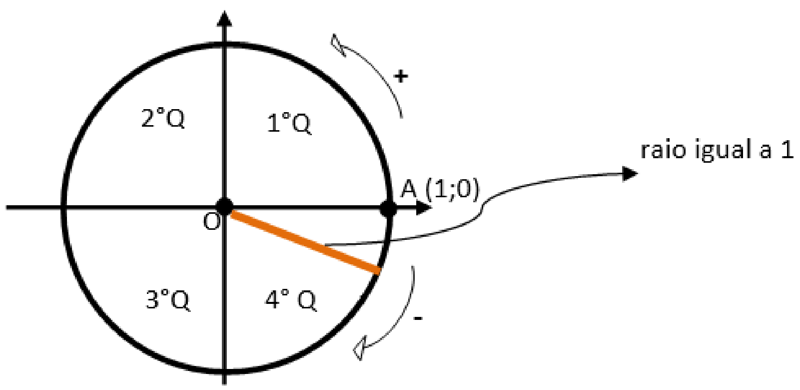
2.1. Ciclo ou circunferência trigonométrica

Definiremos o **ciclo ou circunferência trigonométrica** da seguinte forma. Consideramos dois eixos cartesianos orientados, (horizontal para a direita) e (vertical para cima), perpendiculares no ponto O, seu sentido positivo é o anti-horário e o sentido negativo é o horário.

Na circunferência trigonométrica definida, consideramos o centro O com coordenadas (0;0), origem dos arcos no ponto A(1;0) e seu raio unitário, ou seja, com medida igual a 1.

O ciclo foi dividido em quatro partes iguais que chamamos de **quadrantes**, como mostra a figura 8:

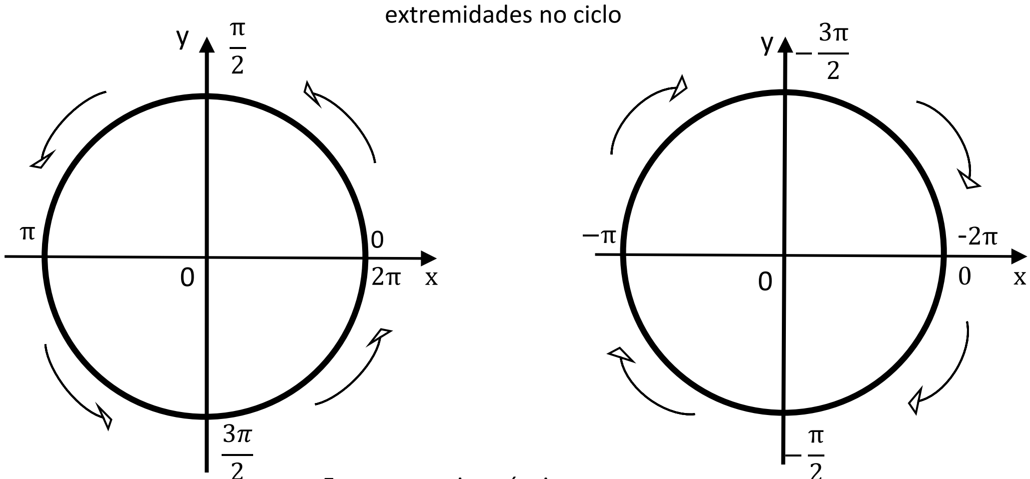
Figura 8: quadrantes



Fonte: autoria própria

Os quadrantes possuem extremidades: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, como mostra a figura 9.

Figura 9:
extremidades no ciclo



Fonte: autoria própria

Veja também: **Circunferência trigonométrica**

https://www.geogebra.org/m/bxvwe78y

A animação apresenta o ciclo trigonométrico e a localização e dos arcos notáveis e seus correspondentes, como também o valor de arco em graus e radianos.

Vejamos alguns exemplos:

Exercício resolvido – 5

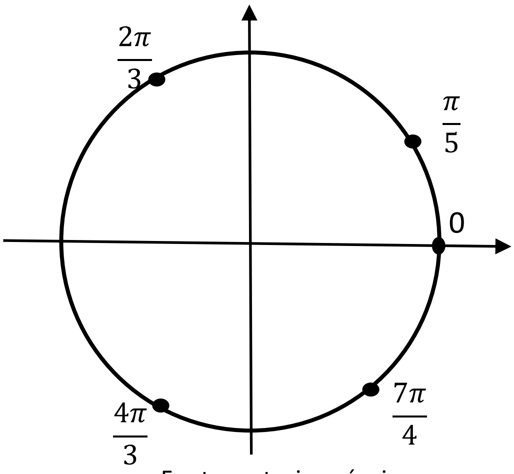
Marque os pontos correspondentes aos números reais 0, $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{4}$ na circunferência trigonométrica.

Resolução:

De início iremos construir o ciclo trigonométrico.

- 0 tem seu lugar na origem dos arcos;
- Os valores em radianos iremos converter para graus, a fim de facilitar sua localização no ciclo trigonométrico. Use a expressão: $\mathbf{180° - - - - - \pi\, rad}$.

Figura 10: circunferência 1



Fonte: autoria própria

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - - - - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{5}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180° \,.\, \frac{\pi}{5}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{36° \,.\, \pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{36°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180° \,.\, \frac{2\pi}{3}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{60° \,.\, 2\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{120°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180° \,.\, \frac{4\pi}{3}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{60° \,.\, 4\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{240°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - - \dfrac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{4}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,\frac{7\pi}{4}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{45°\,.\,7\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{315°}$$

Exercício resolvido – 6

Dados os pontos correspondentes aos números reais: $1,\ \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4},\ \sqrt{3},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{5\pi}{3}, \frac{7}{3}, \frac{14\pi}{15}, -\frac{11\pi}{6}, \frac{23\pi}{12},\ \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{4}$, agrupe-os por quadrante.

Resolução:

Para resolver esse exemplo, temos que nos nortear pelas extremidades do ciclo trigonométrico, em radianos temos os valores $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ e 2π, se os números não estão em radianos, temos por base que $\pi \cong 3{,}14\ e\ 2\pi \cong 6{,}28$, ($\cong$ quer dizer, aproximadamente).

OBS: Os valores em radianos iremos converter para graus, a fim de facilitar sua localização no ciclo trigonométrico. Use a expressão: $\mathbf{180° - - - - - \pi\, rad}$.

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - - - - - - - 3{,}14\, rad \\ x - - - - - - - - - - - - - - - \mathbf{1}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,1\, rad}{3{,}14 rad} \rightarrow x = \frac{180°}{3{,}14} = \mathbf{57{,}3°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - - - - - - - - \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,\frac{\pi}{3}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{60°\,.\,\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{60°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - - - \dfrac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{4}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,\frac{3\pi}{4}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{45°\,.\,3\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{135°}$$

$$\sqrt{3} \cong \mathbf{1{,}73}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - 3{,}14\, rad \\ x - - - - - - - - \mathbf{1{,}73}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,1{,}73\, rad}{3{,}14 rad} \rightarrow x = \frac{311{,}4°}{3{,}14} = \mathbf{99{,}17°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - - - \dfrac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{6}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,\frac{7\pi}{6}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{30°\,.\,7\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{210°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - - \dfrac{\boldsymbol{5\pi}}{\mathbf{3}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,\frac{5\pi}{3}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{60°\,.\,5\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{300°}$$

$$\frac{7}{3} = \mathbf{2{,}333...}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - 3{,}14\, rad \\ x - - - - - - - - \mathbf{2{,}33}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,2{,}33\, rad}{3{,}14 rad} \rightarrow x = \frac{419{,}4°}{3{,}14} = \mathbf{133{,}57°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - \dfrac{\boldsymbol{14\pi}}{\mathbf{15}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,\frac{14\pi}{15}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{12°\,.\,14\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{168°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - \pi\, rad \\ x - - \left(-\dfrac{\boldsymbol{11\pi}}{\mathbf{6}}\right) rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\left(-\frac{11\pi}{6}\right) rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{30°\,.\,(-11)\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{-330°}$$

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - \dfrac{\boldsymbol{23\pi}}{\mathbf{12}}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180°\,.\,\frac{23\pi}{12}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{15°\,.\,23\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{345°}$$

Esses outros já foram feitos na questão anterior, assim:

$\frac{\pi}{5} = \mathbf{36°}$; $\frac{2\pi}{3} = \mathbf{120°}$; $\frac{4\pi}{3} = \mathbf{240°}$; $\frac{7\pi}{4} = \mathbf{315°}$

Agora, iremos agrupar por quadrante:

$1^{\underline{o}}\, Q = \frac{\pi}{5};\ 1;\ \frac{\pi}{3};\ \left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

$2^{\underline{o}}\, Q = \sqrt{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{7}{3};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{14\pi}{15}$

$3^{\underline{o}}\, Q = \frac{7\pi}{6};\ \frac{4\pi}{3}$

$4^{\underline{o}}\, Q = \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{4};\ \frac{23\pi}{12}$

OBS: temos no **exemplo resolvido 6,** um valor negativo $\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$, para localizarmos esse número na circunferência, precisamos identificar o ângulo positivo correspondente ao valor que temos, procedemos da seguinte forma:

Se o valor em graus for maior que - 360°, que é o caso de -330°, subtraímos esse valor de 360° obtendo: 360° - 330°= 30°, logo 30° é o ângulo positivo correspondente a -330°.

Portanto, $\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ está no 1º quadrante.

Se o valor for menor que - 360°, dividimos por 360° e o resto somamos a 360°, veja:

$\left(-\frac{16\pi}{5}\right) = \left(-\frac{16\,.180°}{5}\right) = -576° \div 360° = 1$ e resto 216°, então fazemos

$$\rightarrow -216° + 360° = \mathbf{144°}$$

Logo, $\left(-\frac{16\pi}{5}\right)$ está no 2º quadrante.

Veja também: **Localização de arcos por quadrantes**

https://www.geogebra.org/m/VvQYVxcK

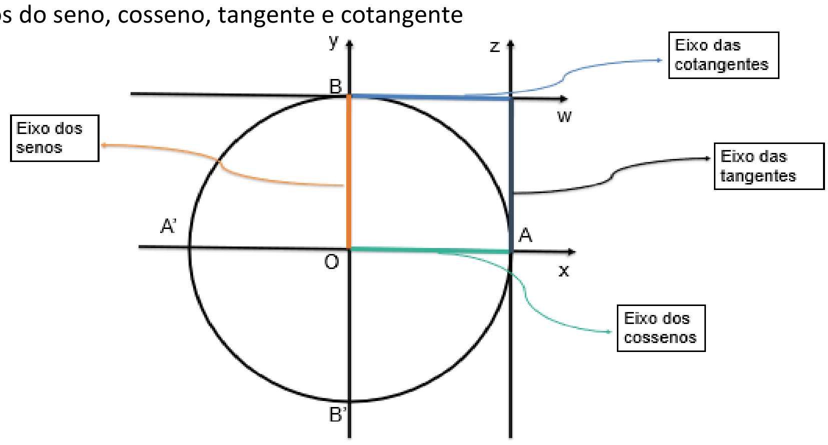
O applet mostra a localização dos arcos em cada quadrante, respectivamente, e o valor de cada ângulo a seu correspondente no 1° quadrante.

2.2. Razões trigonométricas na circunferência

Nesta unidade iremos estender o conceito das razões trigonométricas já vistas (seno, cosseno e tangente) para um número real β, $0 \le \beta \le 2\pi$, visto que iremos trabalhar na circunferência e ainda acrescentaremos as razões cotangente, secante e cossecante.

Veja na figura abaixo os eixos das razões seno, cosseno, tangente e cotangente e suas respectivas medidas na circunferência trigonométrica.

Figura 11. eixos do seno, cosseno, tangente e cotangente



Fonte: autoria própria

Seno – seja β a medida de um arco na circunferência trigonométrica, de extremidade P. Definimos o seno de β como sendo a ordenada do ponto P.

$sen\ \beta =$ ordenada de P.

Cosseno – seja β a medida de um arco na circunferência trigonométrica, de extremidade P. Definimos o cosseno de β como sendo a abscissa do ponto P.

$cos\ \beta =$ abscissa de P.

Vejamos na figura a seguir o seno e o cosseno na circunferência trigonométrica:

Figura 12: seno e cosseno

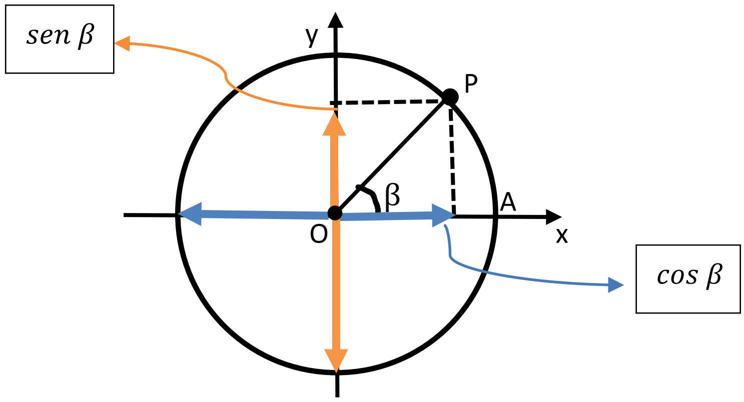


Figura 13: sinais do seno

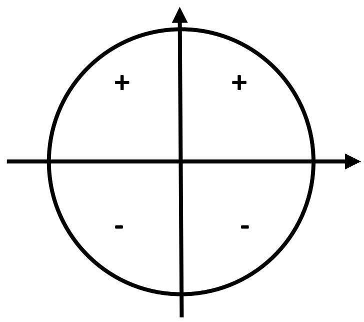
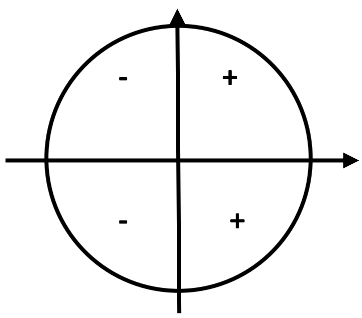


Figura 14: sinais do cosseno



Fonte: autoria própria

Em se tratando de trigonometria, chamamos o eixo y (ordenadas) de eixo dos **senos** e o eixo x (abscissas) de eixo dos **cossenos.**

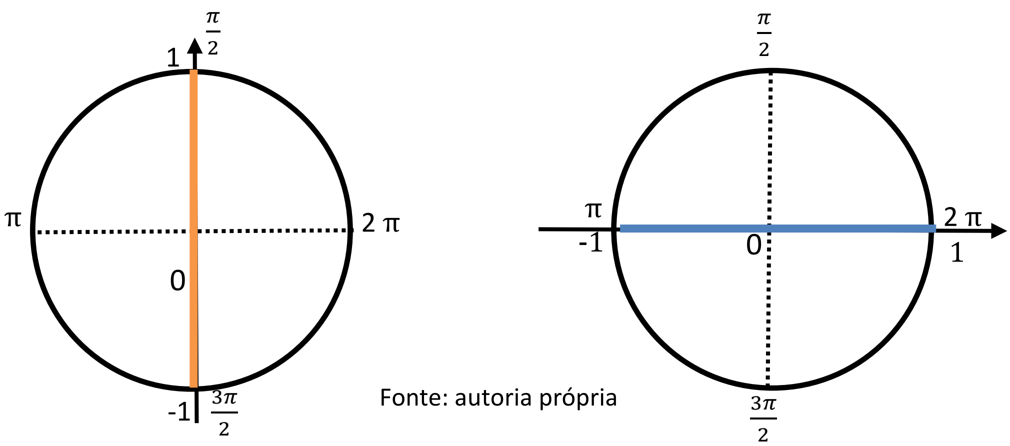
Exercício resolvido - 7

Determine os valores de seno e cosseno das extremidades dos quadrantes $(0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\ \frac{3\pi}{2}\ e\ 2\pi)$, da circunferência trigonométrica.

Resolução:

Figura 15: seno

Figura 16: cosseno



Fonte: autoria própria

Iremos resumir os valores de seno e cosseno numa tabela, veja:

Tabela 1: seno e cosseno dos arcos notáveis

Arcos	**0**	$\frac{\pi}{2}$	**π**	$\frac{3\pi}{2}$	**2π**
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1

Fonte: autoria própria

OBS: Analisando os valores de seno e cosseno percebemos que variam no intervalo $[-1;\ 1]$, pois vale lembrar que o raio da circunferência trigonométrica é igual a 1, logo:

$$\mathbf{-1 \le sen \le 1}\ e\ \mathbf{-1 \le cos \le 1}$$

Seno e cosseno de arcos côngruos ou correspondentes aos ângulos notáveis

Seja P a extremidade de um arco β do primeiro quadrante, temos:

- P_1 a extremidade do simétrico de P em relação ao eixo Oy;

- P_2 a extremidade do simétrico de P em relação ao centro O;

- P_3 a extremidade do simétrico de P em relação ao eixo Ox;

Para reduzirmos os arcos côngruos ao primeiro quadrante, aplicamos as seguintes expressões:

- Se o arco estiver no 2°Q usamos a expressão: $\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\beta}$;

- Se o arco estiver no 3°Q usamos a expressão: $\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\beta}$;

- Se o arco estiver no 4°Q usamos a expressão: $\boldsymbol{2\pi} - \boldsymbol{\beta}$;

Exercício resolvido – 8

Obtenha o seno e o cosseno do arco $\frac{2\pi}{3}$.

Resolução:

Inicialmente iremos analisar a localização da extremidade do arco, para isso iremos converter para graus.

$$\begin{cases} 180° - - - - - - - - - \pi\, rad \\ x - - - - - - - - - - \frac{2\pi}{3}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180° \,.\, \frac{2\pi}{3}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{60° \,.\, 2\,\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{120°}$$

Usaremos a expressão $\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\beta}$.

Assim a extremidade do arco encontra-se no 2°Q, faltando 60°ou $\frac{\pi}{3}$, para atingir π, ou seja, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, logo:

$$sen\frac{2\pi}{3} = sen\frac{\pi}{3} = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ o\ cos\frac{2\pi}{3} = cos\frac{\pi}{3} = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}$$

OBS: O cosseno no 2° Q é negativo.

Exercício resolvido – 9

Obtenha o seno e o cosseno do arco $\frac{5\pi}{4}$.

Resolução:

Inicialmente iremos analisar a localização da extremidade do arco, para isso iremos converter para graus.

$$\begin{cases} 180° \text{ --------- } \pi\, rad \\ x \text{ ---------- } \dfrac{5\pi}{4}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180° \,.\, \frac{5\pi}{4}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{45° \,.\, 5\,\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{225°}$$

Usaremos a expressão $\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\beta}$.

Assim a extremidade do arco encontra-se no 3°Q, passando 45°ou $\frac{\pi}{4}$, de π, ou seja, $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$, logo:

$$sen\frac{5\pi}{4} = sen\frac{\pi}{4} = -sen45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ o\ cos\frac{5\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4} = -cos45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

OBS: O seno e o cosseno no 3° Q são negativos.

Exercício resolvido – 10

Obtenha o seno e o cosseno do arco $\frac{11\pi}{6}$.

Resolução:

Inicialmente iremos analisar a localização da extremidade do arco, para isso iremos converter para graus.

$$\begin{cases} 180° \text{ -------- } \pi\, rad \\ x \text{ --------- } \dfrac{11\pi}{6}\, rad \end{cases} \rightarrow x = \frac{180° \,.\, \frac{11\pi}{6}\, rad}{\pi\, rad} \rightarrow x = \frac{30° \,.\, 11\,\pi\, rad}{\pi\, rad} = \mathbf{330°}$$

Usaremos a expressão $2\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\beta}$.

Assim a extremidade do arco encontra-se no 4°Q, faltando 30°ou $\frac{\pi}{6}$, para atingir de 2π, ou seja, $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, logo:

$$sen\frac{11\pi}{6} = sen\frac{\pi}{6} = -sen30° = -\frac{1}{2}\ e\ o\ cos\frac{11\pi}{6} = cos\frac{\pi}{6} = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

OBS: O seno no 4° Q é negativo.

Tangente – seja β a medida de um arco na circunferência trigonométrica, de extremidade P e seja T o ponto em que a reta que passa pelo centro O, por P e intercepta o eixo Z (eixo das tangentes), tangente à circunferência em A.

Definimos a tangente de β como sendo a medida do segmento $\overline{AT}$.

Denotamos por: *tg β* = $\overline{AT}$.

Cotangente – seja β a medida de um arco na circunferência trigonométrica, de extremidade P e seja D o ponto em que a reta que passa pelo centro O, por P e intercepta o eixo W (eixo das cotangentes) tangente à circunferência em B.

Definimos a cotangente de β como sendo a medida do segmento $\overline{BD}$.

Denotamos por: *cotg β* = $\overline{BD}$.

Vejamos na figura a seguir a tangente e a cotangente na circunferência trigonométrica:

Figura 17: tangente e cotangente

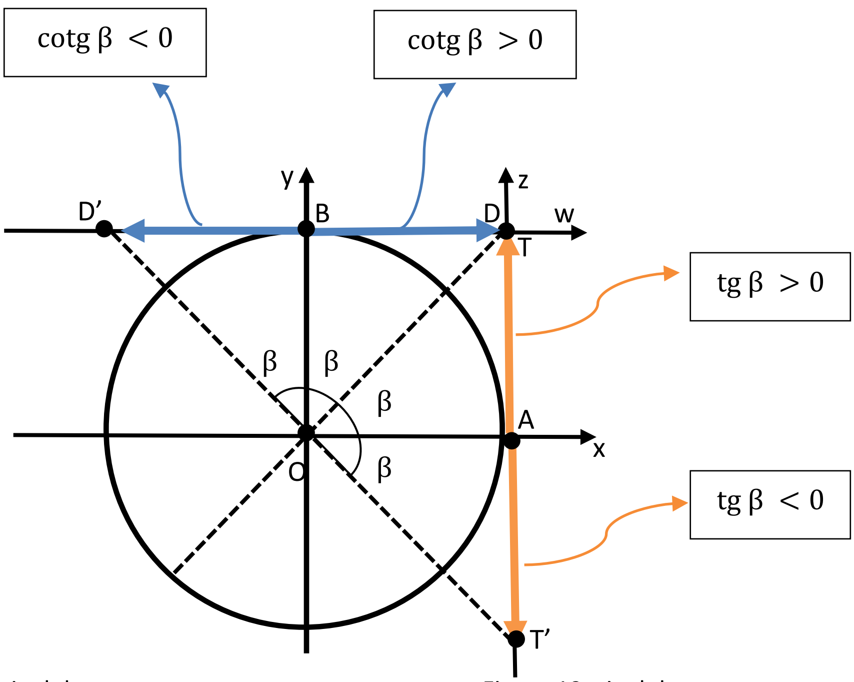


Figura 18: sinal da tangente

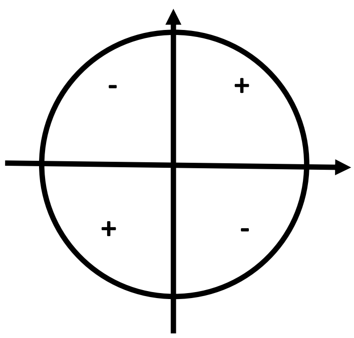
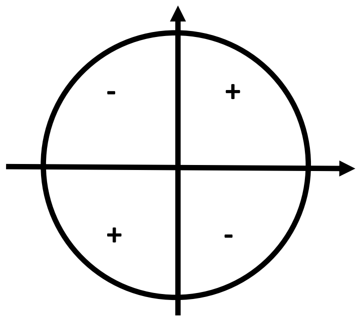


Figura 19: sinal da cotangente



Fonte: autoria própria

Veja também: **As razões seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica**

https://www.geogebra.org/m/jz77nwsw

A animação mostra o comportamento do seno, do cosseno e da tangente na circunferência trigonométrica ao mesmo tempo e em cada quadrante em relação ao ângulo escolhido.

Exercício resolvido – 11

Determine os valores da tangente e cotangente das extremidades dos quadrantes (0; $\frac{\pi}{2}$; π $\frac{3\pi}{2}$ e 2π), da circunferência trigonométrica.

Resolução:

Figura 20: tangente

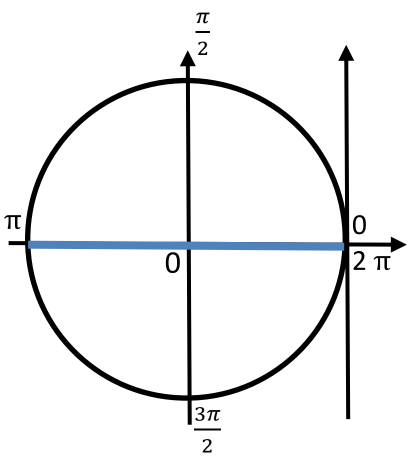
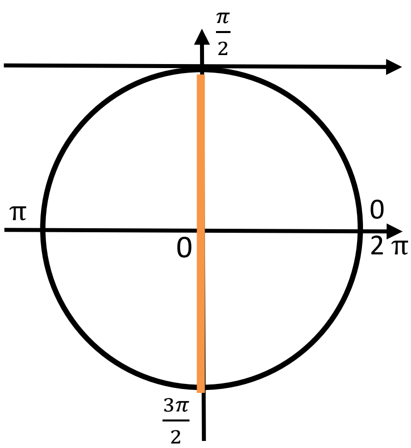


Figura 21: cotangente



Fonte: autoria própria

Iremos resumir os valores da tangente e cotangente numa tabela, veja:

Tabela 2: tangente e cotangente dos arcos notáveis

arcos	**0**	$\frac{\pi}{2}$	**π**	$\frac{3\pi}{2}$	**2π**
Tg	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0
cotg	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

Fonte: autoria própria

Exercício resolvido - 12

Sendo x = 45°, obtenha o valor da expressão:

$$y = \frac{tg(x) - cos(3x) + sen(2x) + cotg(2x)}{cotg(x) - tg(3x) + cos(x)}$$

Resolução:

Inicialmente iremos substituir os respectivos valores de $\boldsymbol{x}$.

$$y = \frac{tg45° - cos135° + sen90° + cotg90°}{cotg45° - tg135° + cos45°}$$

Agora, calculamos separadamente cada valor:

$tg\ 45° = 1\ ;$

$cos\ 135° = -\,cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$sen\ 90° = 1;$

$cotg\ 90° = 0$

$cotg\ 45° = \frac{1}{tg\ 45°} = 1\ ;$

$tg\ 135° = -\,tg\ 45° = -1;$

$cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y = \frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 + 0}{1 - (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow y = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \boldsymbol{y = 1}$$

Secante – Seja uma reta r tangente a circunferência em P, tomamos o ponto V sua interseção com o eixo dos cossenos.

Definimos a secante de β como sendo a medida do segmento $\overline{OV}$.

Denotado por: *sec β* = $\overline{OV}$.

Cossecante – Seja uma reta t tangente a circunferência em P, tomamos o ponto U sua interseção com o eixo dos senos.

Definimos a cotangente de β como sendo a medida do segmento $\overline{OU}$.

Denotado por: *cotg β* = $\overline{OU}$.

Veja também: **As seis razões trigonométricas estudadas na circunferência**

https://www.geogebra.org/m/ca7jftnh

https://www.geogebra.org/m/gcnxqh8e

Temos dois applets que mostram de forma interativa as razões seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cotangente na circunferência com suas particularidades.

Figura 22: secante positiva

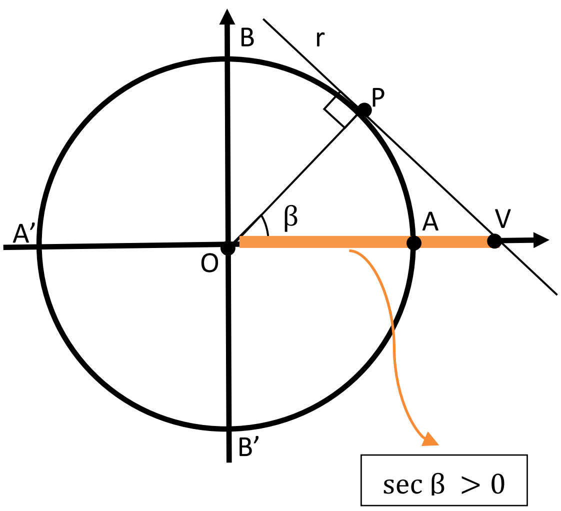
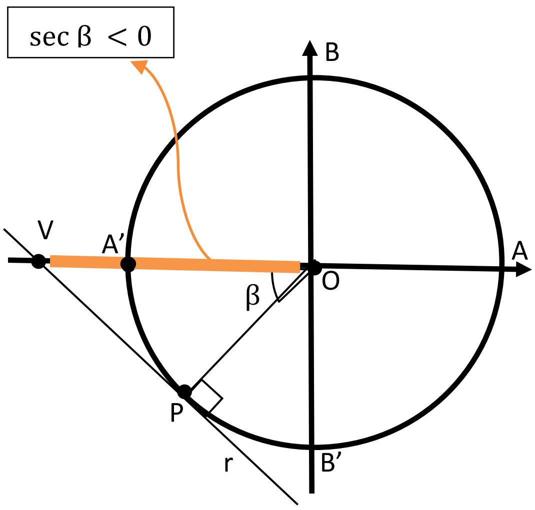


Figura 23: secante positiva



Fonte: autoria própria

Figura 24: cossecante positiva

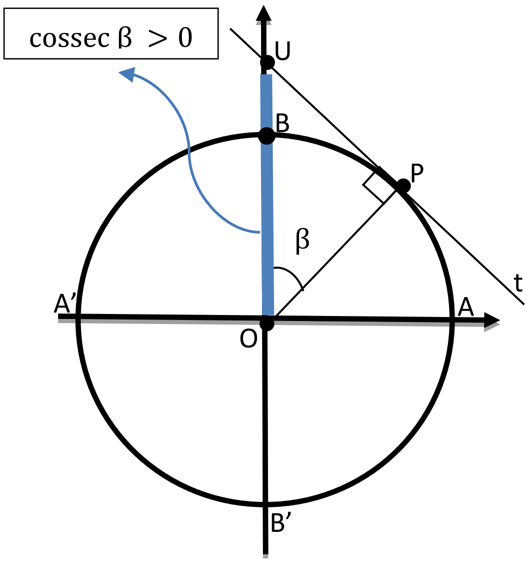


Figura 25: cossecante positiva

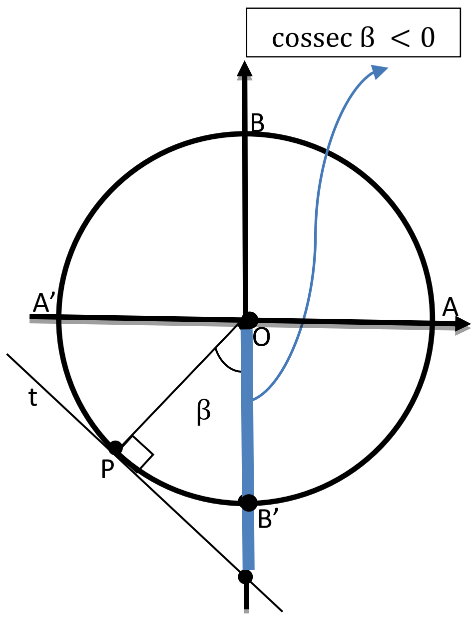


Figura 26: sinal da secante

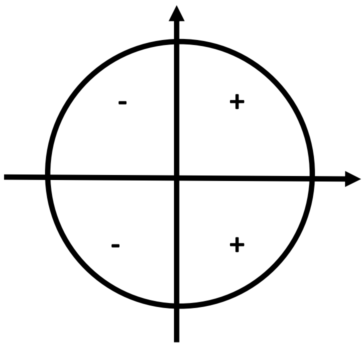
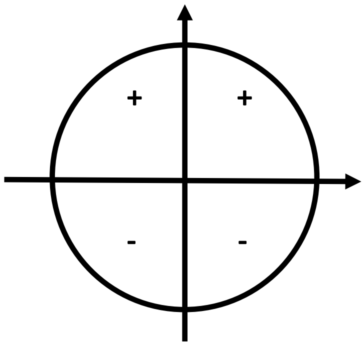


Figura 27: sinal da cossecante



Fonte: autoria própria

2.3. Relações fundamentais

Definimos a razões trigonométricas na circunferência trigonométrica no intervalo $[0, 2\pi]$, agora, iremos mostrar algumas relações fundamentais que existem entre elas.

I. $\boldsymbol{sen^2\beta + cos^2 \beta = 1}, para\ todo\ \beta\ real, \beta \in [0, 2\pi].$

II. $\boldsymbol{tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta}}, para\ todo\ \beta\ real, \beta \in [0, 2\pi]\ e\ \beta \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$

III. $\boldsymbol{cotg\ \beta = \frac{cos\ \beta}{sen\ \beta}}, para\ todo\ \beta\ real, \beta \in [0, 2\pi]\ e\ \beta \notin [0, \pi, 2\pi\ ].$

IV. $\boldsymbol{sec\ \beta = \frac{1}{cos\ \beta}}, para\ todo\ \beta\ real, \beta \in [0, 2\pi]\ e\ \beta \notin \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$

V. $\boldsymbol{cossec\ \beta = \frac{1}{sen\ \beta}}, para\ todo\ \beta\ real, \beta \in [0, 2\pi]\ e\ \beta \notin [0, \pi, 2\pi\ ].$

VI. $\text{Para todo } \beta \text{ real}, \beta \in [0, 2\pi]\ e\ \beta \notin \left[0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, temos as seguintes relações:

a. $\boldsymbol{cotg\ \beta = \frac{1}{tg\ \beta}}$

b. $\boldsymbol{tg^2\beta + 1 = sec^2\beta}$

c. $\boldsymbol{1 + cotg^2\ \beta = cossec^2\beta}$

d. $\boldsymbol{cos^2\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{tg^2\beta}}$

e. $\boldsymbol{sen^2\beta} = \frac{\boldsymbol{tg^2\beta}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{tg^2\beta}}$

Exercício resolvido – 13

Aplicando as relações fundamentais da trigonometria, simplifique a expressão:

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{sen\,x} \cdot \boldsymbol{cos\,x} \cdot \boldsymbol{tg\,x}$$

Resolução:

De imediato podemos substituir $\boldsymbol{tg\,x}$ por $\frac{\boldsymbol{sen\,x}}{\boldsymbol{cos\,x}}$, assim:

$$1 - sen\,x \cdot cos\,x \cdot tg\,x =$$

$$1 - sen\,x \cdot cos\,x \cdot \frac{sen\,x}{cos\,x} =$$

$$1 - sen\,x \cdot sen\,x =$$

$$1 - sen^2\,x$$

Aplicando a relação fundamental: $\boldsymbol{sen^2\,x} + \boldsymbol{cos^2\,x} = \mathbf{1}$, temos que:

$$1 - sen^2 x = cos^2\,x$$

Exercícios propostos

1 – Expresse os valores abaixo em graus:

a) $\frac{\pi}{9} rad$ b) $\frac{5\pi}{2} rad$ c) $1{,}5\, rad$ d) $\frac{15\pi}{12}$ rad

2 – Expresse os valores abaixo em radianos:

a) 25° b) 90° c) 330° d) 75°

3 – Construa a circunferência trigonométrica e marque os pontos correspondentes aos números reais: $\frac{5\pi}{8}$; $\frac{\pi}{10}$; $\frac{11\pi}{9}$; $\frac{35\pi}{18}$.

4 – De acordo com as limitações de cada quadrante na circunferência trigonométrica, agrupe os pontos correspondentes aos números reais: $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{9\pi}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\frac{14\pi}{9}$; $\frac{21}{4}$; $\frac{7\pi}{8}$; $\frac{21\pi}{16}$.

5 – Expresse o valor de cada expressão abaixo:

a) $3 \cdot sen\ \frac{\pi}{2} - 2 \cdot sen \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot sen\ \pi$

b) $-\frac{2}{3} \cdot cos\ \frac{3\pi}{2} + \frac{3}{5} \cdot cos\ \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7} \cdot cos\ \frac{7\pi}{6}$

c) $tg\ \frac{5\pi}{3} - tg\ \frac{7\pi}{6} - cos\ \frac{3\pi}{2}$

d) $tg\ \frac{7\pi}{6} + cotg\ \frac{\pi}{3}$

6 – Qual é o valor de $\left(cossec\ \frac{\pi}{6} + sen\ \frac{\pi}{6}\right)\left(sen\ \frac{\pi}{4} - sec\ \frac{\pi}{3}\right)$?

Resultados esperados:

1 – a) 20°; b) 450°; c) 86°; d) 225°

2 – a) $\frac{5\pi}{36}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{11\pi}{6}$; d) $\frac{5\pi}{12}$

3 - $\frac{5\pi}{8}$ II quadrante; $\frac{\pi}{10}$ I quadrante; $\frac{11\pi}{9}$ III quadrante; $\frac{35\pi}{18}$ IV quadrante

4 – I Q: $\frac{3\pi}{10}$; $\sqrt{2}$ II Q: $\sqrt{5}$; $\frac{7\pi}{8}$ III Q: $\frac{21\pi}{16}$ IV Q: $\frac{9\pi}{5}$; $\frac{14\pi}{9}$; $\frac{21}{4}$;

5 – a) $3 + \sqrt{2}$; b) $\frac{3(7+10\sqrt{3}}{70}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}$; d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6 - $\frac{\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 4}{4}$

Referências

ALBERTO, L. Ângulo ao centro e ângulo correspondente. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/tqnxkfcx>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

BEZERRA, M. J. Matemática para o Ensino Médio - Série Parâmetro. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

CUNHA, M. Radianos - definição. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/JSB4f3MY>. Acesso em: 14 de mar. 2023.]

DANTAS, F. A. Razões trigonométricas circunferência. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/ca7jftnh>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

SANTOS, H. Circunferência trigonométrica. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/jz77nwsw>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar: Trigonometria, Volume 3. São Paulo: 9 ed. Atual Editora, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, Osvaldo; DESENSZAJN, David; ALMEIDA, Roberto. Matemática: Ciência e Aplicações, volume 2 PNLD 2018,2019, 2020, 2021. São Paulo: 9 ed. Editora Saraiva, 2016.

JOÃO, A. Circunferência trigonométrica. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/bxvwe78y>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

LIMA, E. L. Números e Funções reais. Rio de Janeiro: 1ª edição SBM, 2013.

MATIKA. Trigonometria no ciclo trigonométrico. Página inicial. Disponível em < https://matika.com.br/trigonometria-no-ciclo-trigonometrico/angulos-negativos >. Acesso em: 07 de mar. 2023.

NETO, A. C. M. Geometria. Rio de Janeiro: 1ª edição, SBM, 2013.

ROSA, E. G. Rebate de ângulos na Circunferência trigonométrica. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/VvQYVxcK>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

Uma introdução à Trigonometria

Unidade 3.

Funções Trigonométricas

Professores: José Carlos de Sá
Érica Boizan Batista
Valdinês Leite de Sousa Júnior

PoCA Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar 1970 - 2020 50 anos Transformando vidas

Uma introdução à Trigonometria[1] [2] [3]

Funções trigonométricas

Função seno

Chama-se **função seno** a função definida $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real $\boldsymbol{x}$.

o seu seno, isto é, $\boldsymbol{f(x) = sen\, x.}$

Propriedades da função seno:

a. O sinal da função seno é positivo se $\boldsymbol{x}$ pertencer ao 1° ou ao 2° quadrantes;

b. O sinal da função seno é negativo se $\boldsymbol{x}$ pertencer ao 3° ou ao 4° quadrantes;

c. A função seno é crescente no 1° Q, pois, à medida que $\boldsymbol{x}$ aumenta, os valores de sen x também aumenta, no intervalo $[0,1]$;

d. A função seno é decrescente no 2°Q e no 3°Q, pois, à medida que $\boldsymbol{x}$ aumenta, os valores de sen x diminuem, no intervalo de $[1, -1]$;

e. A função seno é crescente no 4°Q, pois, à medida que $\boldsymbol{x}$ aumenta, os valores de $sen\, x$ também aumentam, no intervalo $[-1, 0]$;

f. A função seno é periódica de período $\boldsymbol{2\pi}$, ou seja, a função se repete periodicamente de 2π em 2π;

g. O domínio da função seno é $\mathbb{R}$;

h. A imagem da função seno é $Im(x) = [-1, 1]$;

i. A função seno é **ímpar,** pois para todo $x \in \mathbb{R}$, $sen(-x) = -sen\, x$.

[1] José Carlos de Sá...... [Mestrando em Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT/SEDUC]
[2] Érica Boizan Batista .... [Doutora em Matemática]
[3] Valdinês Leite de Sousa Júnior ... [Doutor em Matemática]

Gráfico da função seno

Para construir o gráfico da função seno, $\boldsymbol{f(x) = sen\,x}$ que chamamos de **senoide**, associamos cada valor de $\boldsymbol{x}$ a seu respectivo valor $\boldsymbol{sen\,x}$, vejamos na tabela a seguir: Para os valores de $\boldsymbol{f(x) = sen\,x}$, atribuímos os valores dos extremos dos quadrantes.

Tabela 1: pares ordenados da função y = sen x

X	y = sen x
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
Π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

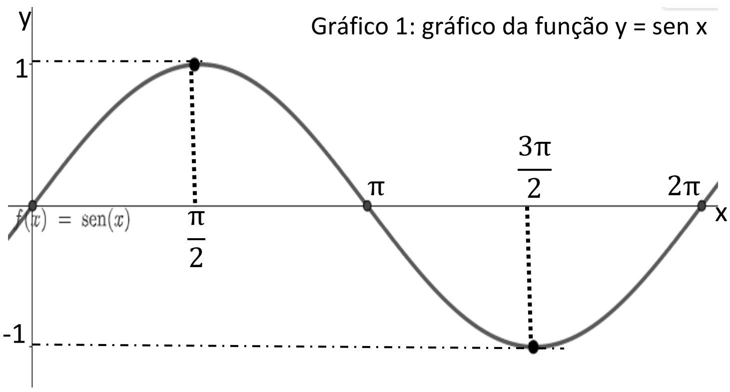


Gráfico 1: gráfico da função y = sen x

Fonte: autoria própria

Exercício resolvido – 1

Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f(x) = 3\,sen\,x}$.

Resolução:

Para construir o gráfico de uma função com esta, podemos fazer uma tabela em três passos:

1 – Atribuir valores convenientes para $\boldsymbol{x}$, sendo eles as extremidades dos quadrantes;

2 – Associamos a $\boldsymbol{x}$ os correspondentes valores de $\boldsymbol{sen\,x}$;

3 – Fazemos o produto $\boldsymbol{sen\,x}$ por 3 a fim de obter a imagem correspondente a cada $\boldsymbol{x}$.

Tabela 2: pares ordenados da função y = 3. Sen x

X	sen x
0	
$\frac{\pi}{2}$	
Π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	

→

x	sen x	Y = 3. sen x
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

→

x	sen x	Y = 3. sen x
0	0	3 . 0 = **0**
$\frac{\pi}{2}$	1	3 . 1 = **3**
π	0	3 . 0 = **0**
$\frac{3\pi}{2}$	-1	3 . (-1) = **- 3**
2π	0	3 . 0 = **0**

Fonte: autoria própria

OBS: Perceba que a imagem da função foi multiplicada por 3, passando a se tornar $[-3, 3]$;

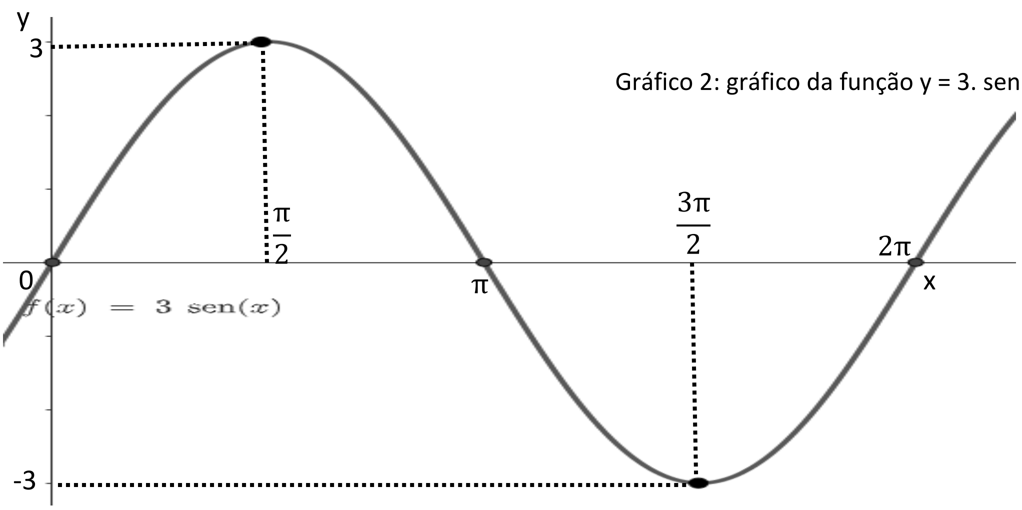


Gráfico 2: gráfico da função y = 3. sen x

Fonte: autoria própria

Função cosseno

Chama-se **função cosseno** a função definida $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real $\boldsymbol{x}$ o seu cosseno, isto é, $\boldsymbol{f(x) = cos\ x}$.

Propriedades da função cosseno:

a. O sinal da função cosseno é positivo se $\boldsymbol{x}$ pertencer ao 1° ou ao 4° quadrantes;

b. O sinal da função cosseno é negativo se $\boldsymbol{x}$ pertencer ao 2° ou ao 3° quadrantes;

c. A função cosseno é decrescente no 1°Q e no 2°Q, pois, os valores de $cos\ x$ diminuem de 1 até -1 à medida que $\boldsymbol{x}$ aumenta;

d. A função cosseno é crescente no 3°Q e no 4°Q, pois, os valores de $cos\ x$ aumentam de -1 até 1 à medida que $\boldsymbol{x}$ aumenta;

e. A função cosseno é periódica de período $\boldsymbol{2\pi}$, ou seja, a função se repete periodicamente de 2π em 2π;

f. O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$;

g. A imagem da função cosseno é $Im(x) = [-1, 1]$;

h. A função cosseno é **par,** pois para todo $x \in \mathbb{R}$, $cos\,(-x) = cos\ x$.

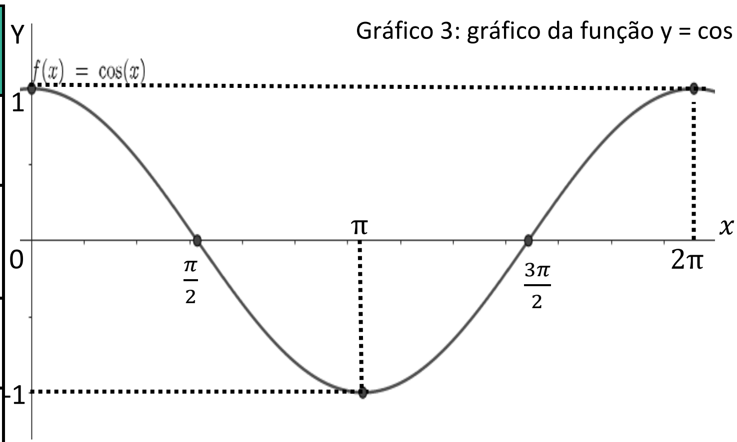
Gráfico da função cosseno

De acordo com as propriedades vistas, iremos construir o gráfico da função cosseno, $\boldsymbol{f(x) = cos\ x}$ seguindo os mesmos passos para a construção do gráfico da senoide.

Tabela 3: pares ordenados da função y = cos x

X	y = cos x
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
Π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Gráfico 3: gráfico da função y = cos x



Fonte: autoria própria

Exercício resolvido – 2

Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f(x) = 3\cos x + 1.}$

Resolução:

Para construir o gráfico desta função iremos seguir os mesmos passos usados no **exercício resolvido 2.**

Tabela 4: pares ordenados da função y = 3. cos x + 1

X	cos x
0	
$\frac{\pi}{2}$	
Π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	

→

x	cos x	Y = 3. cos x +1
0	1	
$\frac{\pi}{2}$	0	
π	-1	
$\frac{3\pi}{2}$	0	
2π	1	

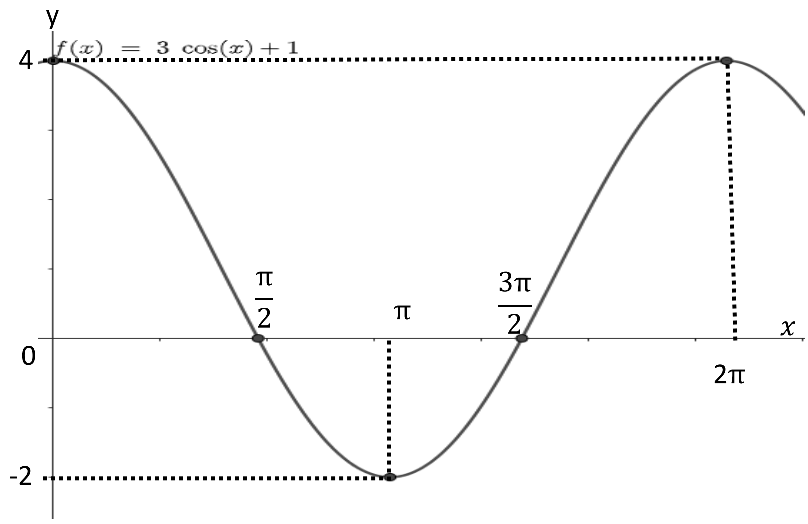
→

x	cos x	Y = 3. cos x + 1
0	1	3 . (1)+ 1 = **4**
$\frac{\pi}{2}$	0	3 . (0) + 1 = 1
π	-1	3 . (-1) + 1 = **-2**
$\frac{3\pi}{2}$	0	3 . (0) + 1 = **1**
2π	1	3 . (1)+ 1 = **4**

Fonte: autoria própria

OBS: Perceba que multiplicamos a imagem por 3 e somamos 1, passando a se tornar $[-2, 4]$;

Gráfico 4: gráfico da função y = 3. cos x + 1



Fonte: autoria própria

Veja também: **Função seno e cosseno com seus gráficos**

https://www.geogebra.org/m/yrhmcbjs

O applet apresenta o comportamento das funções seno e cosseno no círculo trigonométrico em consonância com a construção seus gráficos.

Função tangente

Chama-se **função tangente** a função definida $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a sua tangente, isto é, $\boldsymbol{f(x) = tg\ x}$.

Propriedades da função tangente:

a. O sinal da função tangente é positivo se $\boldsymbol{x}$ pertencer ao 1° ou ao 3° quadrantes;

b. O sinal da função tangente é negativo se $\boldsymbol{x}$ pertencer ao 2° ou ao 4° quadrantes;

c. A função tangente é periódica de período $\boldsymbol{\pi}$, ou seja, a função se repete periodicamente de π em π;

d. O domínio da função tangente é $\mathcal{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

e. A imagem da função tangente é $Im(x) = \mathbb{R}$.

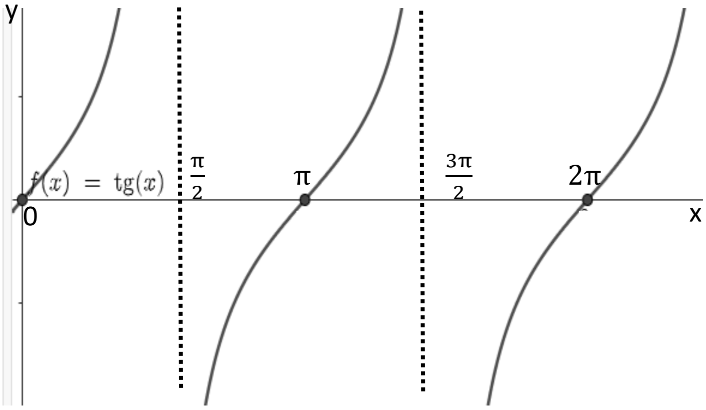
Gráfico da função tangente

De acordo com as propriedades vistas, iremos construir o gráfico da função tangente, $\boldsymbol{f(x) = tg\ x}$ seguindo os mesmos passos para a construção do gráfico das outras funções.

Tabela 5: pares ordenados da função y = tg x

Gráfico 5: gráfico da função y = tg x

X	y = tg x
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
Π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
2π	0



Fonte: autoria própria

Exercício resolvido – 3

Determine o domínio da função $\boldsymbol{f(x) = tg\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$.

Resolução:

De acordo com as propriedades da função tangente, o domínio de $f(x) = tg\ x$ é $\mathcal{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, assim:

D(f) = $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad 2x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{\frac{5\pi}{6}}{2} + \frac{k\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}}$

Logo o $\mathcal{D}(f) = \left\{X \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Veja também: **Função tangente e gráfico**

https://www.geogebra.org/m/NReJCURn

A animação apresenta o comportamento da função na circunferência e ao mesmo tempo a construção do seu gráfico, de forma bem interativa, onde podemos observar os ângulos.

Função cotangente

Chama-se **função cotangente** a função definida $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real $\boldsymbol{x}$, $x \neq k\pi$, a sua cotangente, isto é, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cotg}\ \boldsymbol{x}$.

Propriedades da função cotangente:

a. A função cotangente é sempre decrescente, exceto onde ela não está definida;

b. A função cotangente é periódica de período $\boldsymbol{\pi}$, ou seja, a função se repete periodicamente de π em π;

c. O domínio da função cotangente é $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

d. A imagem da função cotangente é $Im(x) = \mathbb{R}$;

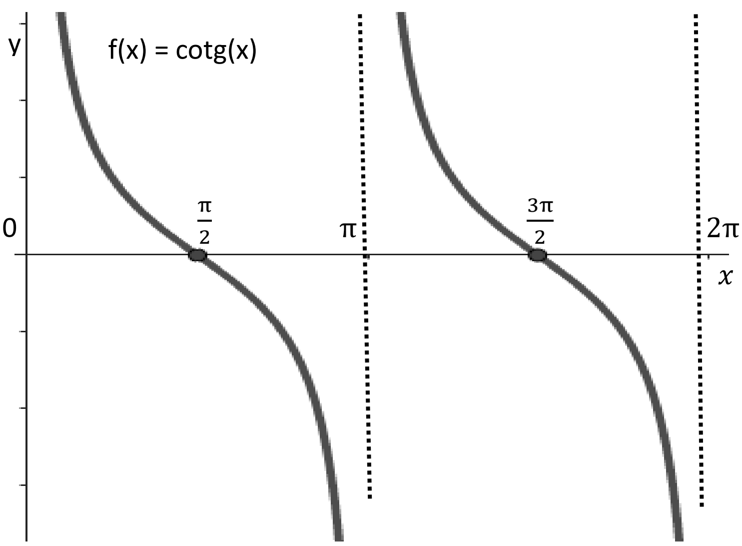
Gráfico da função cotangente

De acordo com as propriedades vistas, iremos construir o gráfico da função cotangente, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cotg}\ \boldsymbol{x}$ seguindo os mesmos passos para a construção do gráfico das outras funções.

Tabela 6: pares ordenados da função y = cotg x

X	y = cotg x
0	∄
$\frac{\pi}{2}$	0
Π	∄
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	∄

Gráfico 6: gráfico da função y = cotg x



Fonte: autoria própria

Exercício resolvido – 4

Determine o domínio da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{cotg\ 3x.}$

Resolução:

De acordo com as propriedades da função cotangente, o domínio de $f(x) = cotg\ x$ é $\mathcal{D} = \{\mathrm{X}\ \in \mathbb{R} |\ \mathrm{x}\ \neq\ \mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$, assim:

$\mathcal{D}(f) = 3x \neq\ k\pi\ \ \rightarrow\ x\ \neq\ \frac{k\pi}{3}$

Logo o $\mathcal{D}(f)\ =\ \left\{x\ \in \mathbb{R} |\ x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Veja também: **Função cotangente e gráfico**

https://www.geogebra.org/m/FhSRNJQW

O applet apresenta o comportamento da função cotangente na circunferência e como se dá a construção do seu gráfico.

Função secante

Chama-se **função secante** a função definida $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq\ \frac{\pi}{2} +\ k\pi,$ a sua secante, isto é, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sec\ x}.$

Propriedades da função secante:

a. A função secante é crescente no 1° e no 2° quadrantes e decrescente no 3° e no 4° quadrantes;

b. A função secante é periódica de período $\mathbf{2\pi}$, ou seja, a função se repete periodicamente de 2π em 2π;

c. O domínio da função secante é $\mathcal{D}\ =\ \left\{x \in\ \mathbb{R}\ |\ x\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

d. A imagem da função secante é $Im(x) = \{X \in\ \mathbb{R}\ |\ y \leq\ -1\ ou\ y\ \geq 1\}$.

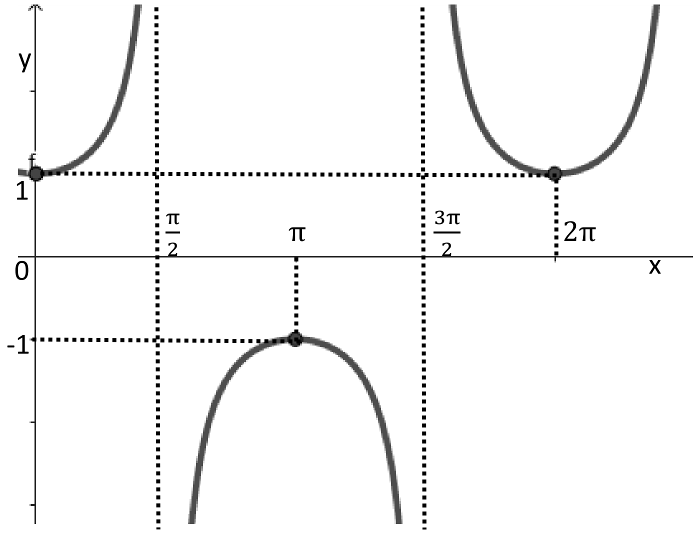
Gráfico da função secante

De acordo com as propriedades vistas, iremos construir o gráfico da função secante, $\boldsymbol{f(x) = sec\ x}$ seguindo os mesmos passos para a construção do gráfico das outras funções.

Tabela 7: pares ordenados da função y = sec x

X	y = sec x
0	1
$\frac{\pi}{2}$	∄
Π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	∄
2π	1

Gráfico 7: gráfico da função y = sec x



Fonte: autoria própria

Veja também: **Função secante e gráfico**

https://www.geogebra.org/m/b3qfz66a

O applet apresenta a construção do gráfico da função secante, evidenciando as restrições da função, ou seja, mostrando onde a função não está definida.

Função cossecante

Chama-se **função cossecante** a função definida $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real $\boldsymbol{x}$**,** $x \neq k\pi$, a sua cossecante, isto é, $\boldsymbol{f(x) = cossec\ x}$**.**

Propriedades da função cossecante:

a. A função cossecante é crescente no 2° e no 3° quadrantes e decrescente no 1° e no 4° quadrantes;

b. A função cossecante é periódica de período $\boldsymbol{2\pi}$, ou seja, a função se repete periodicamente de 2π em 2π;

c. O domínio da função cossecante é $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

d. A imagem da função cossecante é $Im(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid y \leq -1\ ou\ y \geq 1\}$.

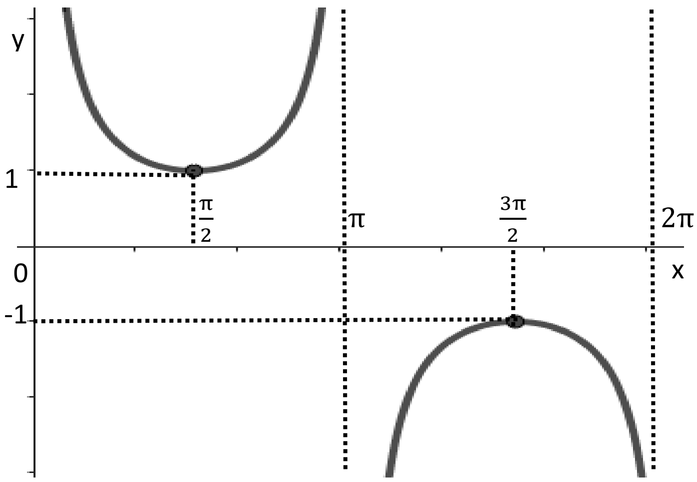
Gráfico da função secante

De acordo com as propriedades vistas, iremos construir o gráfico da função cossecante, $\boldsymbol{f(x) = cossec\ x}$ seguindo os mesmos passos para a construção do gráfico das outras funções.

Tabela 8: pares ordenados da função y = cossec x

X	y = cossec x
0	∄
$\frac{\pi}{2}$	1
Π	∄
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	∄

Gráfico 8: gráfico da função y = cossec x



Fonte: autoria própria

Veja também: **Função cossecante e seu gráfico**

https://www.geogebra.org/m/zrqr5yf4

O applet mostra o comportamento do gráfico da função cossecante, deixando bem claro onde ela não está definida, sendo bem explicitado na construção do gráfico.

Exercícios propostos

1 – Construa o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = 2 . sen\, x$

b) $g(x) = 4 . cos\, x$

2 – Determine o domínio de cada função abaixo:

a) $f(x) = tg \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

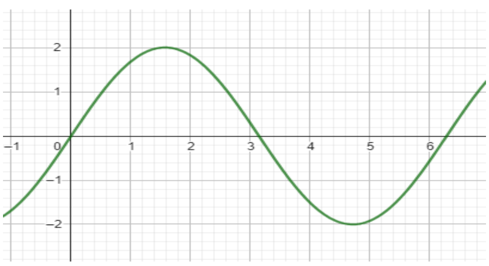
b) $g(x) = cotg \left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

c) $h(x) = sec\, 2x$

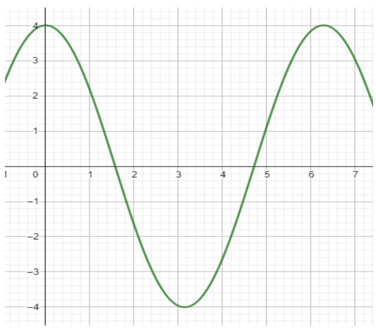
d) $i(x) = cossec \left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

Resultados esperados:

1 – a)



b)



2 –

a) $x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$; b) $x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$; c) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; d) $x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$

Referências

BEZERRA, M. J. Matemática para o Ensino Médio - Série Parâmetro. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

HELIEZER, S. Circunferência trigonométrica. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/jz77nwsw>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar: Trigonometria, Volume 3. São Paulo: 9 ed. Atual Editora, 2013.

IEZZI, G; DOLCE, O; DESENSZAJN, D; ALMEIDA, R. Matemática: Ciência e Aplicações, volume 2 PNLD 2018,2019, 2020, 2021. São Paulo: 9 ed. Editora Saraiva, 2016.

LIMA, E. L. Números e Funções reais. Rio de Janeiro: 1ª edição SBM, 2013.

MADEIRA, R. O. C. Função Cotangente. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/FhSRNJQW>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

MADEIRA, R. O. C. Função Tangente. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/NReJCURn>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

NETO, A. C. M. Geometria. Rio de Janeiro: 1ª edição, SBM, 2013.

SILVA, F. C. Função Cossecante. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/zrqr5yf4>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

SILVA, F. C. Função Secante. Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/b3qfz66a>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

TOMSON, P. Funções Trigonométrica (seno e cosseno). Página inicial. Disponível em <https://www.geogebra.org/m/yrhmcbjs>. Acesso em: 14 de mar. 2023.

Uma introdução à Trigonometria

Unidade 1. Trigonometria do Triângulo retângulo

1.1 Revisão

Professores:

José Carlos de Sá

Érica Boizan Batista

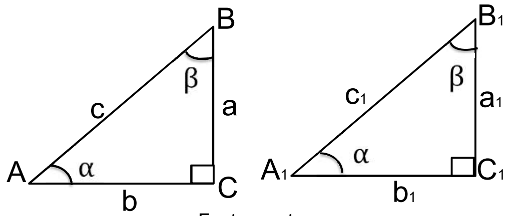
Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

- Razões trigonométricas do triângulo retângulo
- Relações entre seno, cosseno, tangente e cotangente
- Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares
- Razões trigonométricas especiais

Razões trigonométricas - Introdução

Consideramos os triângulos das figuras ao lado.



Fonte:o autor

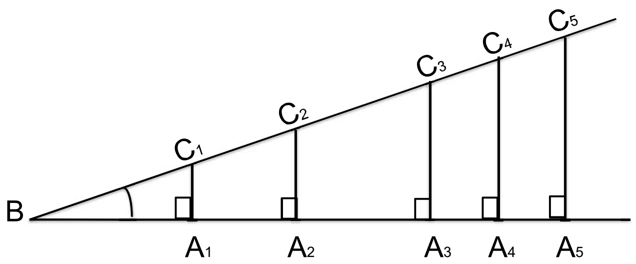
Se os ângulos agudos dos triângulos forem ordenadamente congruentes, os triângulos serão semelhantes, tendo portanto, lados proporcionais. Sendo assim, podemos deduzir que :

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c} \rightarrow \frac{a_1}{c_1} = \frac{a}{c} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} \rightarrow \frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c} \quad \text{(II)}$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} \quad \text{(III)}$$

As igualdades (I), (II) e (III) mostram que a razão entre dois lados quaisquer de um triângulo retângulo é igual à razão entre os dois lados homólogos de qualquer triângulo retângulo semelhante a ele. Em outras palavras, a razão entre dois lados quaisquer de um triângulo retângulo não depende do tamanho desse triângulo, mas apenas de seus ângulos.

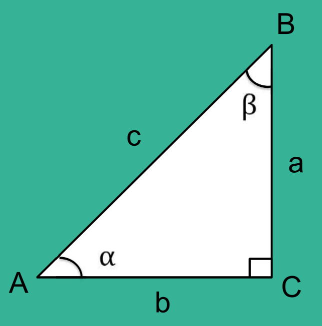


Fonte:o autor

Os triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3... são todos semelhantes entre si. Assim decorrem as chamadas **razões trigonométricas no triângulo retângulo,** que iremos estudar a seguir.

Razões

Considere o triângulo a seguir:



Fonte:o autor

Fixando um ângulo agudo α, temos as seguintes relações:

Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$$

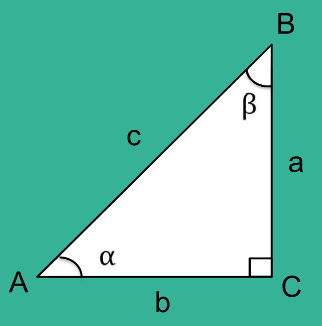
PoCA Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar

Razões

Considere o triângulo a seguir:



Fonte:o autor

Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

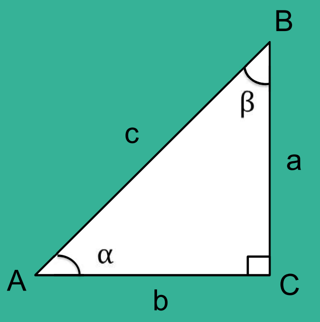
PoCA Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar

Razões

Considere o triângulo a seguir:



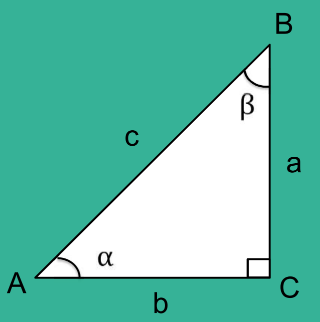
Fonte:o autor

Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Razões

Considere o triângulo a seguir:



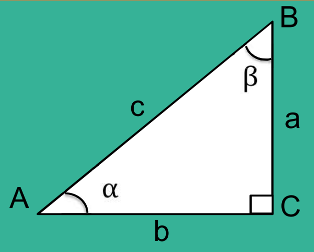
Fonte:o autor

Cotangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo .

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Relações entre seno, cosseno, tangente e cotangente

Relação Fundamental



Fonte:o autor

Dado um triângulo ABC, retângulo em C, sabemos que:

sen α = $\frac{a}{c}$ e **cos α** = $\frac{b}{c}$, então:

a = c. **sen α** e b = c. **cos α**

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos que " o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos" $c^2 = a^2 + b^2$, assim:

$c^2 = (c.\ \text{sen}\ \alpha)^2 + (c.\ \cos\alpha)^2$

$c^2 = c^2.\ \text{sen}^2\ \alpha + c^2.\ \cos^2\alpha$

$c^2 = c^2.(\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha)$

Portanto, surge a relação fundamental da trigonometria:

$$\textbf{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Relações entre seno, cosseno, tangente e cotangente

- Considerando a razão $\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$.

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \text{tg}\ \alpha$$

Portanto, **tg α** = $\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$.

- Consideremos a razão $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}$.

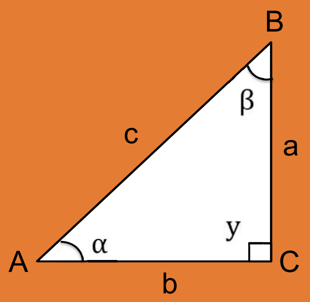
$$\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \text{cotg}\ \alpha$$

Portanto, **cotg α** = $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}$, que por sua vez fica fácil identificar que:

cotg α = $\frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$

Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares

Vamos considerar os ângulos α, β e γ de um triângulo retângulo.



Fonte:o autor

Propriedade dos ângulos internos de um triângulo: A soma dos ângulos internos de um triangulo é igual a 180º

Temos que:

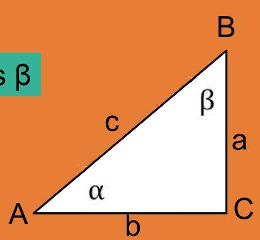
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \gamma = 90^\circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha \text{ e } \beta \text{ são complementares} \end{cases}$$

Seno, cosseno, tangente e cotangente de ângulos complementares

Como α e β são complementares, surgem as seguintes relações:

- $\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{a}{c} \\ \cos\beta = \dfrac{a}{c} \end{array}\right\}$ sen α = cos β

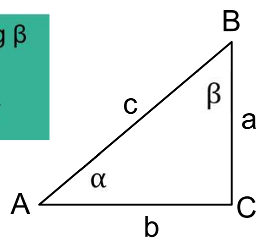
- $\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,\beta = \dfrac{b}{c} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \end{array}\right\}$ sen β = cos α



Fonte: o autor

- $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\text{cotg}\,\beta = \dfrac{a}{b}$ — tg α = cotg β ou $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\beta}$

- $\text{tg}\,\beta = \dfrac{b}{a}$, $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ — tg β = cotg α ou $\text{tg}\,\beta = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

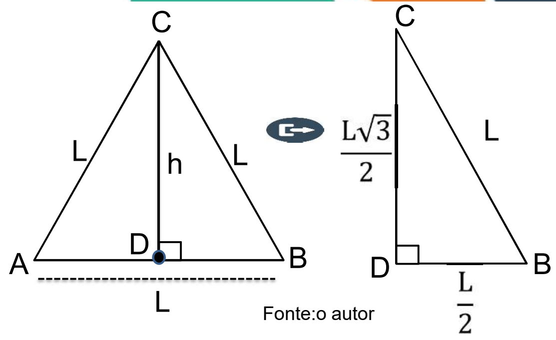


Fonte: o autor

Razões trigonométricas especiais (de 30°, 45° e 60°)

Na resolução de cálculos geométricos e trigonométricos, utiliza – se frequentemente os valores de seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°.

Para desenvolver as razões trigonométricas de 30° e 60°, consideramos um triângulo equilátero ABC, na qual traçamos uma altura h referente ao lado AB, obtendo um triângulo retângulo BDC, reto em D, cujos os ângulo agudos $\hat{C}$ e $\hat{B}$ medem 30° e 60°, respectivamente.



Fonte:o autor

Triângulo equilátero: possui todos os lados com medidas iguais.
AB = BC = AC

Razões trigonométricas especiais (de 30°, 45° e 60°)

Então, no triângulo retângulo BDC, temos:

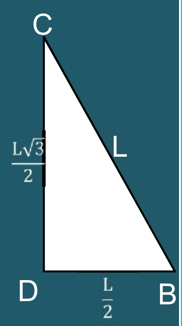
Ângulo de 30°

sen 30° = $\frac{\frac{L}{2}}{L}$ → sen 30° = $\frac{1}{2}$

cos 30° = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L}$ → cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

tg 30° = $\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}$ → tg30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

cotg 30° = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}}$ → cotg 30° = $\sqrt{3}$



Ângulo de 60°

sen 60° = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L}$ → sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos 60° = $\frac{\frac{L}{2}}{L}$ → cos 60° = $\frac{1}{2}$

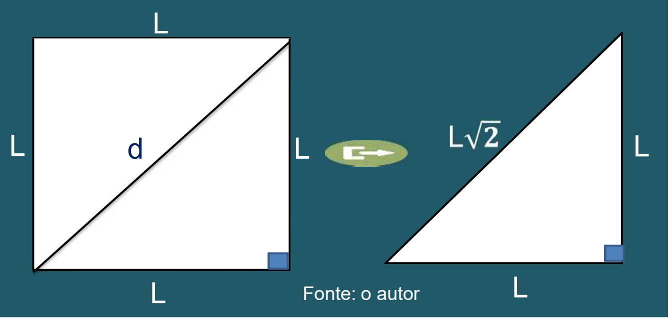
tg 60° = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}}$ → tg 60° = $\sqrt{3}$

Cotg 60° = $\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}$ → cotg 60° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Razões trigonométricas especiais (de 30°, 45° e 60°)

Ângulo de 45°

Já as razões trigonométricas para 45° são obtidas a partir do triângulo retângulo gerado da divisão de um quadrado de lado L por sua diagonal d. A diagonal de um quadrado divide o ângulo reto em dois ângulos de 45°.



Fonte: o autor

Então, no triângulo retângulo, temos:

sen 45° = $\frac{L}{L\sqrt{2}}$ ➔ sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos 45° = $\frac{L}{L\sqrt{2}}$ ➔ cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 45° = $\frac{L}{L}$ ➔ tg45° = 1

cotg 45° = $\frac{L}{L}$ ➔ cotg 45° = 1

Razões trigonométricas especiais (de 30°, 45° e 60°)

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Fonte:o autor

A tabela resume os valores de cada razão trigonométrica. Sua memorização é recomendada, uma vez que esses valores, como já dito, são frequentemente utilizados.

Uma Introdução à Trigonometria

Revisão: Trigonometria do Triângulo Retângulo

Resumo da apresentação

Apresentamos uma breve revisão relacionada as razões trigonométricas, relações entre as razões, razões de ângulos complementares e razões trigonométricas de ângulos notáveis.

CRÉDITOS

Autores

José Carlos de Sá

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática

Graduado em Química

Mestrando em Matemática

Erica Boizan Batista

Graduada em Licenciatura Plena em Matemática

Mestre em Matemática

Doutora em Matemática

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Graduação em Licenciatura Plena em Matemática

Mestre em Matemática

Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Manoel Jairo. Matemática para o Ensino Médio Série Parâmetro. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

IEZZI, Gerson. Fundamentos de matemática elementar: Trigonometria, Volume 3. 9 ed. Atual Editora, 2013.

Uma introdução à Trigonometria

Unidade 2. Trigonometria na Circunferência

2.1 Arcos e ângulos

Professores:

José Carlos de Sá

Érica Boizan Batista

Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

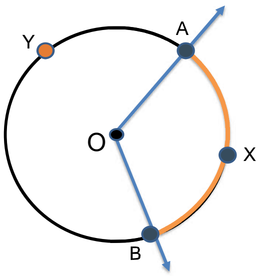
- Arcos de circunferência
- Medidas e comprimento de arco
- Medidas de ângulos
- Ciclo ou circunferência trigonométrica

Arcos de circunferência

Consideramos uma circunferência de centro O sobre a qual marcamos dois pontos distintos, A e B. Dessa forma a circunferência fica dividida em duas partes, cada uma é chamada de **arco de circunferência.**

Analisando a figura abaixo, note que existem dois arcos determinados por **A e B:**

- o arco de extremidade A e B que contém o ponto X é representado por $\overset{\frown}{AXB}$.
- o arco de extremidade A e B que contém o ponto Y é representado por $\overset{\frown}{AYB}$.



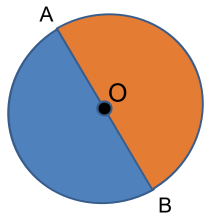
Fonte: o autor

OBS: Quando não houver dúvidas em relação ao arco ao qual nos referimos, podemos escrever simplesmente $\overset{\frown}{AB}$ para representar o arco com extremidades A e B.

Arcos de circunferência

Observe agora dois casos particulares de arcos de circunferência:

- Se A e B são simétricos em relação ao centro O, o segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência e cada um dos arcos determina uma semicircunferência e é chamado **arco de meia volta**.

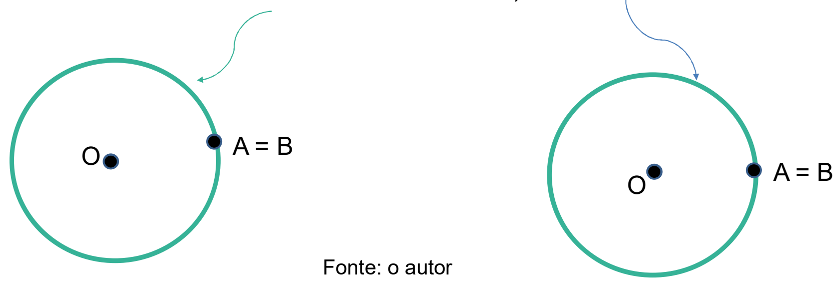


Fonte: o autor

O arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual ao arco $\overset{\frown}{BA}$.

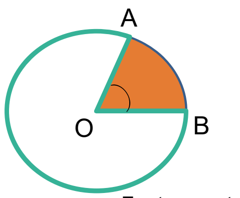
Arcos de circunferência

- No caso em que A coincidir com B, são determinados dois arcos. Um dele é o **arco de uma volta** e o outro, o **arco nulo.**



Fonte: o autor

Note que a todo arco $\overset{\frown}{AB}$ corresponde um ângulo central, isto é, um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

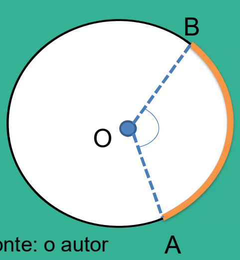


Fonte: o autor

AÔB é o ângulo central correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$

Medida e comprimento de arcos

A **medida angular de um arco** ou, simplesmente, **medida de uma arco** é igual à medida do ângulo central correspondente. Por exemplo:

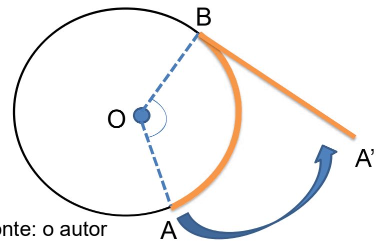


Fonte: o autor

O ângulo central AÔB = 120°

Dizemos que arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 120°

A **medida linear** de um arco refere-se ao seu **comprimento.** Quando retificamos um arco de circunferência, obtemos um segmento de reta cuja medida é igual ao **comprimento do arco**, que é medida em centímetros, metros, milímetros, quilômetros etc.



Fonte: o autor

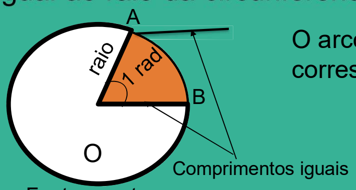
O segmento $\overline{BA'}$ é a medida linear do arco.

Medida e comprimento de arcos

Unidades de medidas de arcos e ângulos

Se tratando da medida de um arco, adotamos o grau (°) ou radiano (rad).

- **1 grau** é a medida de um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência correspondente. O grau possui submúltiplos, como o minuto e o segundo.
- **1 radiano** é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.



O arco $\overset{\frown}{AB}$, bem como seu ângulo correspondente AÔB, medem 1rad.

Fonte: o autor

O comprimento **C** de uma circunferência é dado em função do raio, definido por $C = 2\pi r$, em que π é o número irracional 3,14159265... aproximadamente.

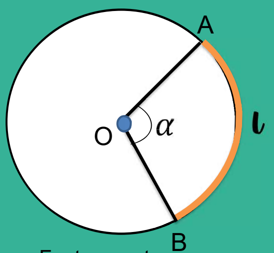
A partir daí, vamos determinar a medida do arco de uma volta **(comprimento da circunferência) em radianos**. Para isso, temos de dividir o seu comprimento pelo raio, obtendo: $\mathbf{C = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\, rad}$, dessa forma o arco mede $\mathbf{2\pi}$ **rad** ou 360°. Daí surge a relação:

2π rad ----------- 360°

π rad ------------ 180° sentença que servirá de base para efetuarmos as convenções de unidades de medidas de arco.

Medida de ângulos

Para determinar a medida de um ângulo AÔB em radianos de uma circunferência de centro **O** e raio **r**, calculamos o quociente entre o comprimento $\boldsymbol{l}$ do arco AB e o raio **r** da circunferência.

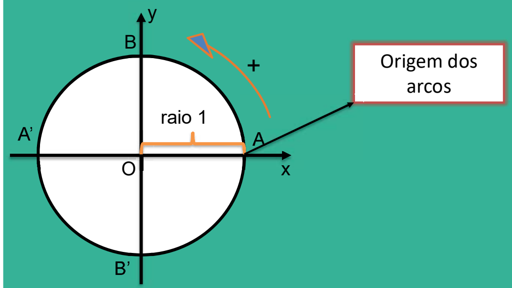


Fonte: o autor

$$\alpha = \frac{l}{r} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

Ciclo ou Circunferência trigonométrica

Denotamos de Ciclo ou Circunferência trigonométrica a circunferência de centro O e raio 1, orientada no sentido anti-horário, associada a um par de eixos de coordenadas cartesianas com o ponto (0;0) coincidindo com o centro O.



Fonte: o autor

Observe na figura que:

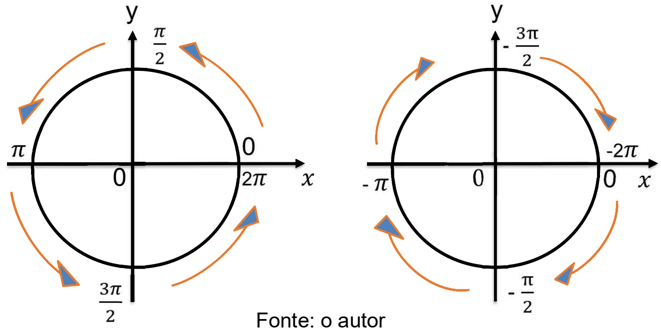
- o centro da circunferência é O (0;0);
- o ponto A (1;0) é a origem dos arcos, isto é, os arcos são medidos a partir de A;
- o raio da circunferência é igual a 1

Ciclo ou Circunferência trigonométrica

Todos os arcos da circunferência trigonométrica têm início em A, dessa forma, cada ponto da circunferência é a extremidade de um arco e a esses pontos ficam associados números reais que representam as medidas em radianos de cada arco, seja positivo (no sentido anti-horário) ou negativo (no sentido horário).

Em especial, o ponto A, origem dos arcos, é um arco nulo, de medida zero.

Os eixos cartesianos dividem a circunferência trigonométrica em quatro quadrantes de extremidades $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π.



Fonte: o autor

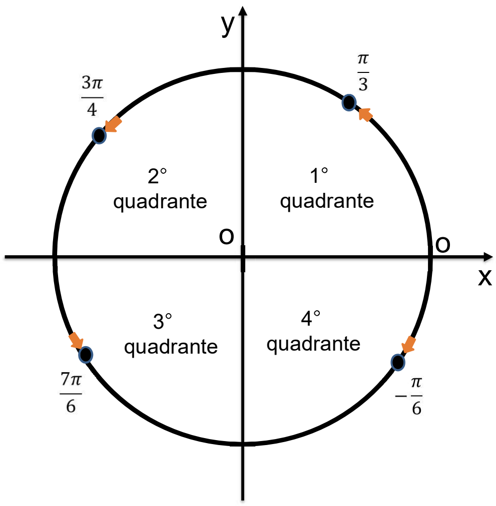
Sentido anti-horário

Sentido horário

Ciclo ou Circunferência trigonométrica

Para que um arco esteja em determinado quadrante sua extremidade precisa estar localizada nesse quadrante.

Por exemplo, os arcos de medidas $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6} e -\frac{\pi}{6}$, pertencem, respectivamente, ao 1°, 2°, 3° e 4° quadrantes. Como mostra a figura ao lado.



Fonte: o autor

Uma Introdução à Trigonometria

Trigonometria na Circunferência

Resumo da apresentação

Apresentamos os primeiros passos para estudo da trigonometria na circunferência, com ênfase no estudo de medidas de arco e ângulos e uma breve definição da circunferência trigonométrica.

CRÉDITOS

Autores

José Carlos de Sá

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática

Graduado em Química

Mestrando em Matemática

Erica Boizan Batista

Graduada em Licenciatura Plena em Matemática

Mestre em Matemática

Doutora em Matemática

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Graduação em Licenciatura Plena em Matemática

Mestre em Matemática

Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Manoel Jairo. Matemática para o Ensino Médio Série Parâmetro. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

IEZZI, Gerson. Fundamentos de matemática elementar: Trigonometria, Volume 3. São Paulo: 9 ed. Atual Editora, 2013.

IEZZI, Gerson; DOLCE, Osvaldo; DESENSZAJN, David; ALMEIDA, Roberto. Matemática: Ciência e Aplicações, volume 2 PNLD 2018,2019, 2020, 2021. São Paulo: 9 ed. Editora Saraiva, 2016.

Uma introdução à Trigonometria

Unidade 3. Trigonometria na Circunferência

2.2 Razões trigonométricas na circunferência

Professores:

José Carlos de Sá

Érica Boizan Batista

Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

- Introdução
- Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência
- Relações fundamentais entre as razões trigonométricas

PoCA Portal de Cursos Abertos

SEaD

UFSCar 50 ANOS 1970-2020 TRANSFORMANDO VIDAS

Introdução

Consideramos uma circunferência trigonométrica de origem A e raio $\overline{OA}$ igual a 1. Para iniciar os estudos das razões trigonométricas na circunferência, associaremos ao ciclo trigonométrico quatro eixos:

- Eixo dos cossenos (x)
  direção: $\overline{OA}$
  sentido positivo: O → A

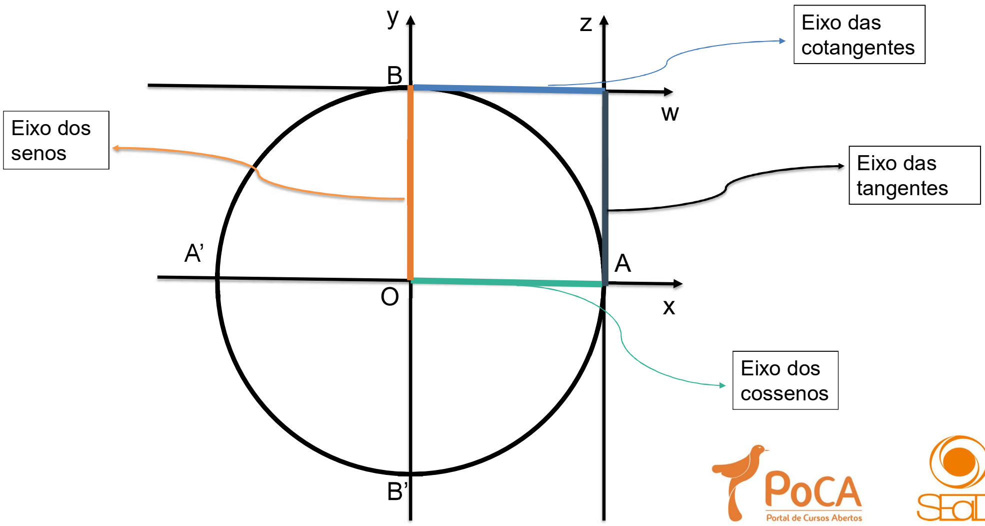
- Eixo dos senos (Y)
  direção: perpendicular a x, por O
  sentido positivo: O → B

- Eixo das tangentes (z)
  direção: paralelo a y por A
  sentido positivo: mesmo sentido de y

- Eixo das cotangentes (w)
  direção: paralelo a x por B
  sentido positivo: o mesmo de x

Introdução

A figura abaixo mostra os eixos do seno, cosseno, tangente e cotangente na circunferência trigonométrica



Fonte: o autor

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

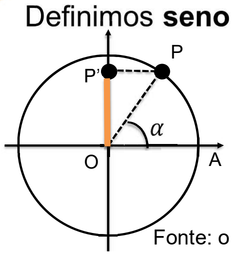
Ao estudar as razões trigonométricas em ângulos agudos de um triângulo retângulo, definimos sen α, cos α e tg α para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Nesta unidade iremos estender o conceito de seno, cosseno e tangente para um número real α, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e acrescentaremos as razões cotangente, secante e cossecante.

Seno

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Definimos **seno de α** como a ordenada do ponto P. Como na figura a seguir:



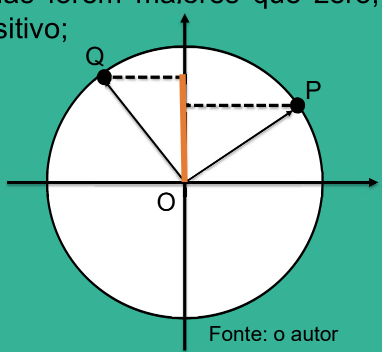
Fonte: o autor

sen α = med ($\overline{\mathrm{OP}'}$)

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Propriedades

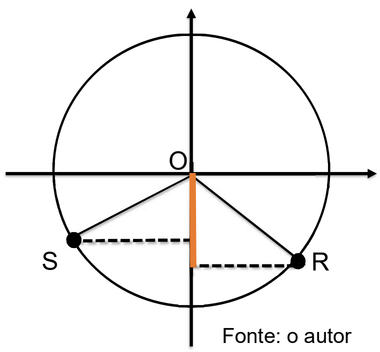
1 – Se os pontos P e Q estiverem no primeiro ou segundo quadrante e suas ordenadas forem maiores que zero, o seno será positivo;



Fonte: o autor

$0 \leq \text{sen} \leq 1$

2 – Se os pontos R e S estiverem no terceiro ou quarto quadrante e suas ordenadas forem menores que zero, o seno será negativo;

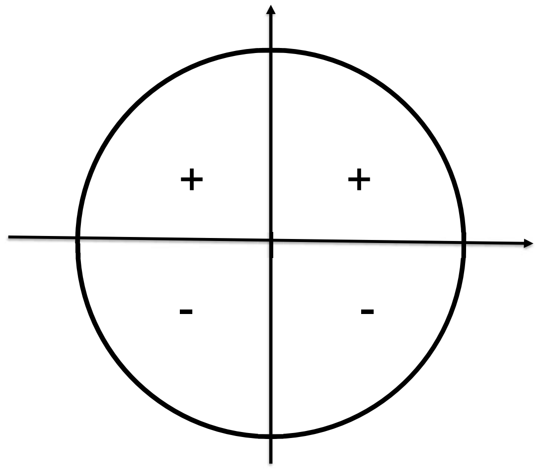


Fonte: o autor

$-1 \leq \text{sen} \leq 0$

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

O gráfico abaixo apresenta de forma sintetizada o sinal de **seno** em cada quadrante.



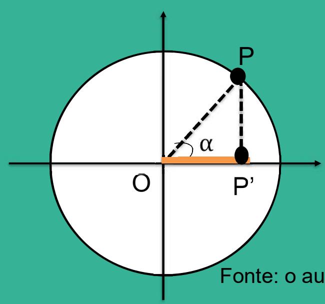
Fonte: o autor

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Cosseno

Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Definimos **cosseno de α** como a abscissa do ponto P. Como na figura a seguir:



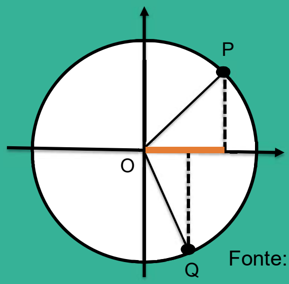
Fonte: o autor

cos α = med $(\overline{\mathrm{OP}'})$

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Propriedades

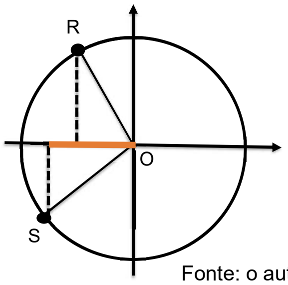
1 – Se os pontos P e Q estiverem no primeiro ou quarto quadrante e suas abscissas forem maiores que zero, o cosseno será positivo;



Fonte: o autor

$0 \leq \cos \leq 1$

2 – Se os pontos R e S estiverem no segundo ou terceiro quadrante e suas abscissas forem menor que zero, o cosseno será negativo;

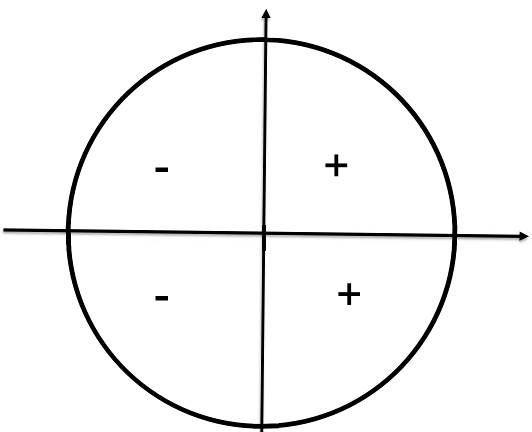


Fonte: o autor

$-1 \leq \cos \leq 0$

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

O gráfico abaixo apresenta de forma sintetizada o sinal de **cosseno** em cada quadrante.



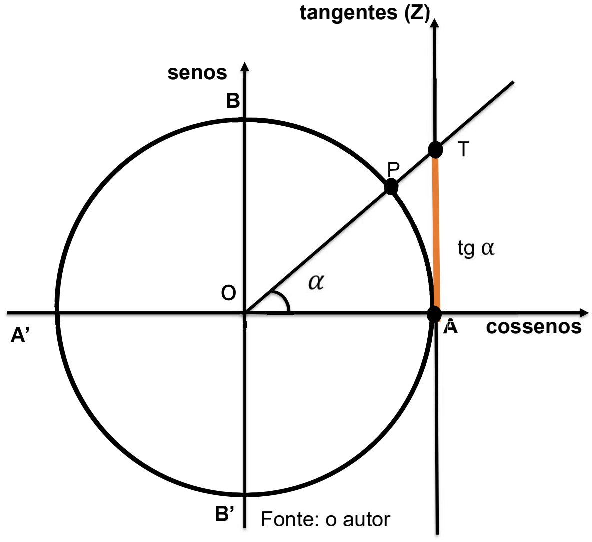
Fonte: o autor

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Tangente

Para definirmos a tangente de um número real α, vamos acrescentar à circunferência trigonométrica um terceiro eixo (z), denominado eixo das tangentes. Obtemos esse eixo tangenciando uma reta vertical, a circunferência no ponto A(1,0), o ponto A é a origem do eixo das tangentes.

Unindo-se o centro O à extremidade P (P ≠ B e P ≠ B') de um arco de medida α radianos, construímos assim a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que intersecta o eixo das tangentes no ponto T. Como mostra a figura ao lado:



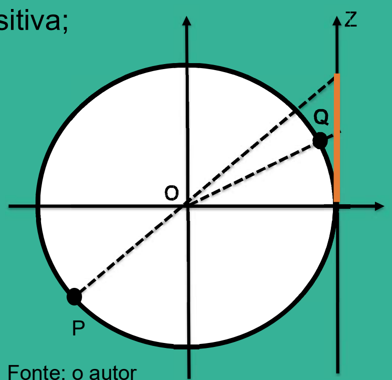
Fonte: o autor

$$\text{tg } \alpha = \text{med } (\overline{AT})$$

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Propriedades

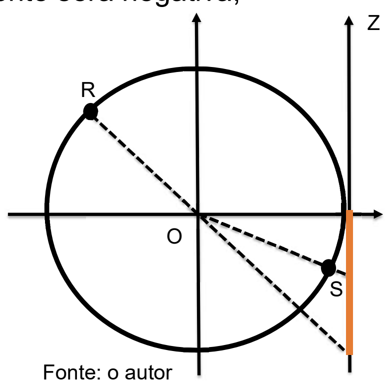
1 – Se os pontos P e Q estiverem no primeiro ou terceiro quadrante e o ponto T acima de A, a tangente será positiva;



Fonte: o autor

tg > 0

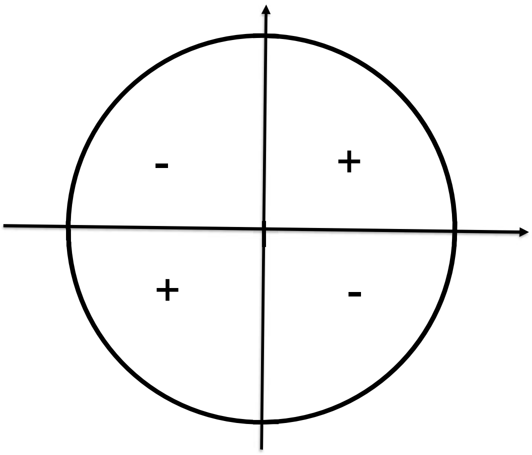
2 – Se os pontos R e S estiverem no segundo ou quarto quadrante e o ponto T abaixo de A, a tangente será negativa;



Fonte: o autor

tg < 0

O gráfico abaixo apresenta de forma sintetizada o sinal de **tangente** em cada quadrante.



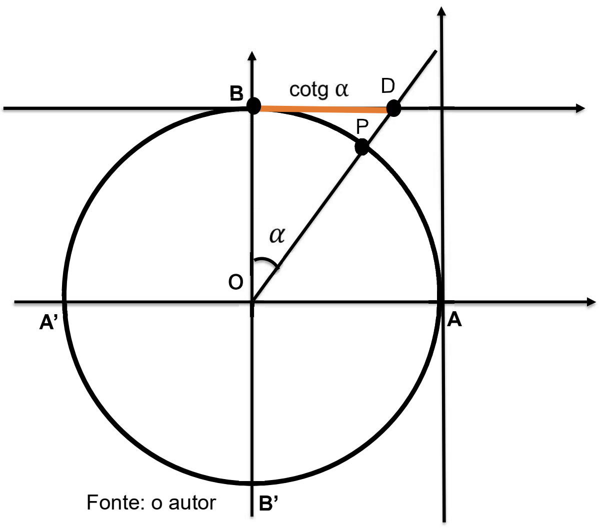
Fonte: o autor

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Cotangente

Para definirmos a cotangente de um número real α, vamos acrescentar à circunferência trigonométrica um quarto eixo (w), denominado eixo das cotangentes. Obtemos esse eixo tangenciando uma reta horizontal a circunferência no ponto B(0,1), o ponto B é a origem do eixo das cotangentes.

Unindo-se o centro O à extremidade P (P ≠ A e P ≠ A') de um arco de medida α radianos, construímos assim a reta $\overleftrightarrow{OP}$, que intersecta o eixo das cotangentes no ponto D. Como mostra a figura ao lado:

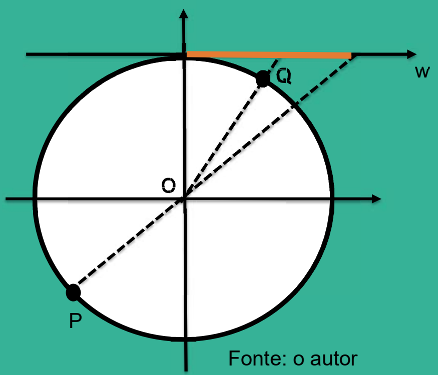


Fonte: o autor

cotg α = med $(\overline{BD})$

Propriedades

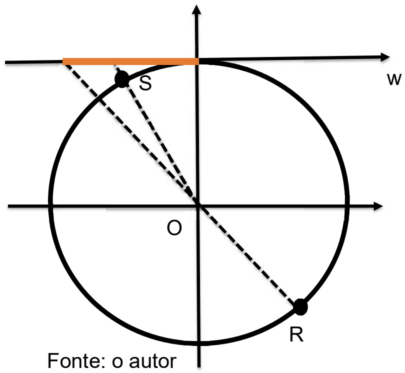
1 – Se os pontos P e Q estiverem no primeiro ou terceiro quadrante, a cotangente será positiva;



Fonte: o autor

cotg > 0

2 – Se os pontos R e S estiverem no segundo ou quarto quadrante, a cotangente será negativa;

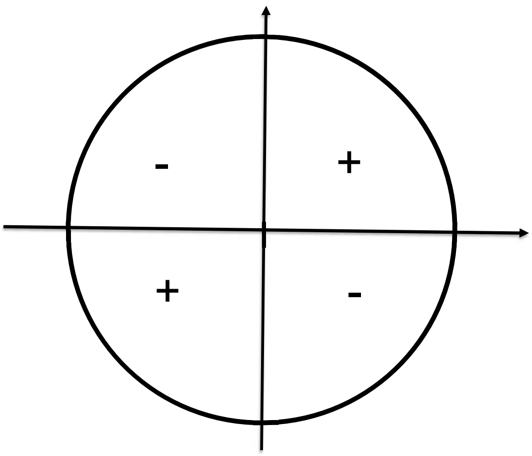


Fonte: o autor

cotg < 0

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

O gráfico abaixo apresenta de forma sintetizada o sinal de **cotangente** em cada quadrante.



Fonte: o autor

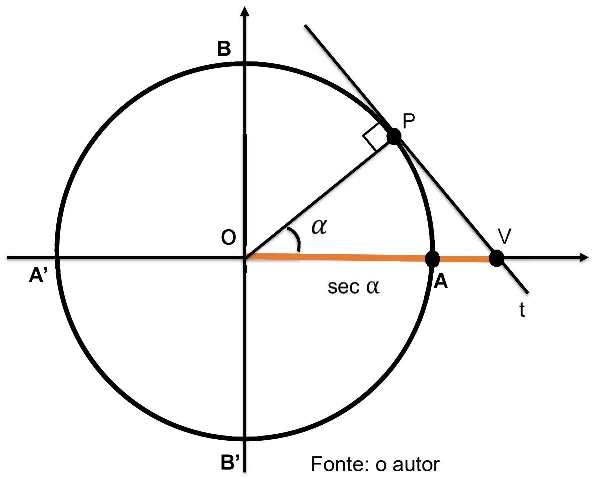
Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Secante

Definimos a reta t tangente a circunferência em P e tomamos V a sua interseção com o eixo dos cossenos.

Denominamos **secante de** α a abscissa $\overleftrightarrow{OV}$ do ponto V.

A secante está definida para todos os pontos da circunferência, exceto (P = B e P = B') de um arco de medida α radianos. Como mostra a figura ao lado:



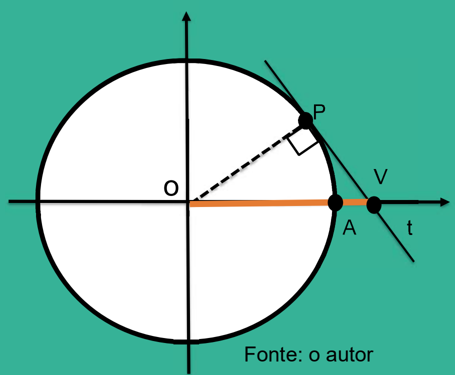
Fonte: o autor

$$\sec\alpha = \text{med}\,(\overline{OV})$$

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Propriedades

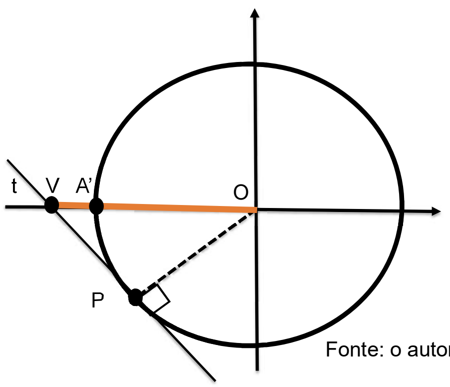
1 – Se o ponto P estiver no primeiro ou quarto quadrante, a secante será positiva;



Fonte: o autor

sec > 0

2 – Se o ponto P estiver no segundo ou terceiro quadrante, a secante será negativa;

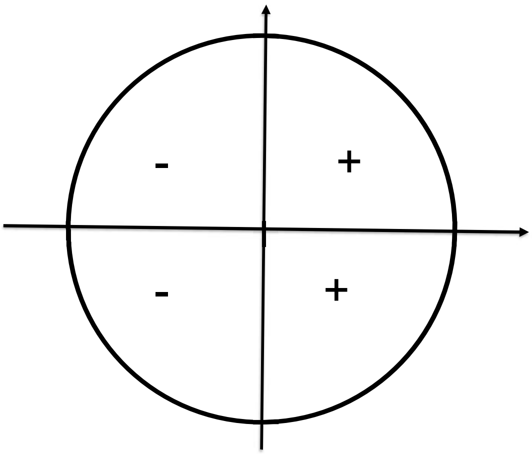


Fonte: o autor

sec < 0

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

O gráfico abaixo apresenta de forma sintetizada o sinal de **secante** em cada quadrante.



Fonte: o autor

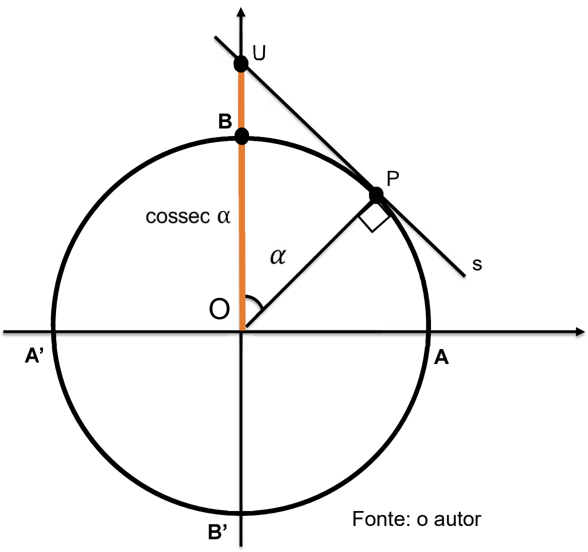
Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Cossecante

Definimos a reta s tangente a circunferência em P e tomamos U a sua interseção com o eixo dos senos.

Denominamos **cossecante de** α a ordenada $\overleftrightarrow{OU}$ do ponto U.

A cossecante está definida para todos os pontos da circunferência, exceto (P = A e P = A') de um arco de medida α radianos. Como mostra a figura ao lado:



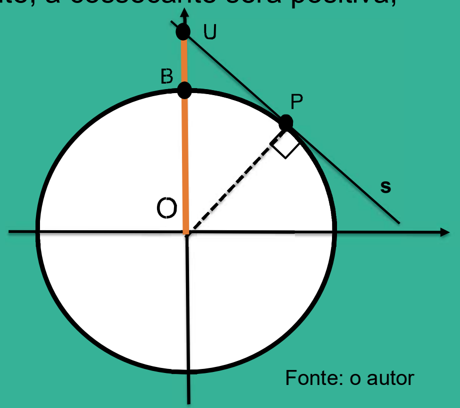
Fonte: o autor

$$\text{cosssec}\,\alpha = \text{med}\,(\overline{\text{OU}})$$

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

Propriedades

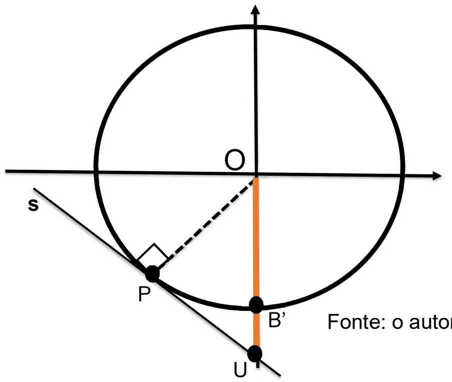
1 – Se o ponto P estiver no primeiro ou segundo quadrante, a cossecante será positiva;



Fonte: o autor

cossec > 0

2 – Se o ponto P estiver no terceiro ou quarto quadrante, a cossecante será negativa;

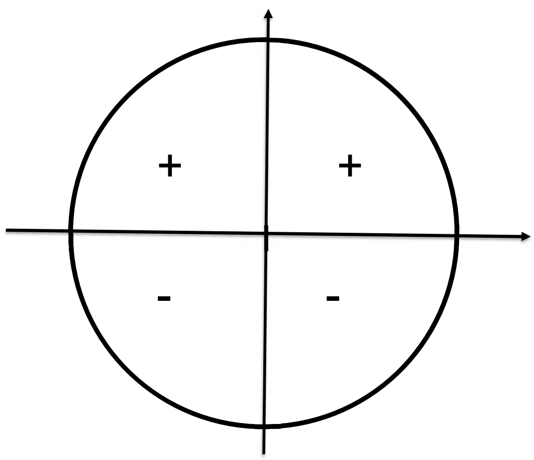


Fonte: o autor

cossec < 0

Seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante na circunferência

O gráfico abaixo apresenta de forma sintetizada o sinal de **cossecante** em cada quadrante.



Fonte: o autor

Relações fundamentais

Introdução

Mostramos anteriormente o **sen α**, **cos α**, **tg α**, **cotg α**, **sec α** e **cossec α** na circunferência trigonométrica no intervalo $[0, 2\pi]$.

Agora, iremos mostrar que esses números possuem relações entre si, denominadas **relações fundamentais.**

Teorema 1

Para todo α real, $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale a relação:

$$\text{Sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Relações fundamentais

Teorema 2

Para todo α real, $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Teorema 3

Para todo α real, $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\alpha \notin \{o, \pi, 2\pi\}$, vale a relação:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Relações fundamentais

Teorema 4

Para todo α real, $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Teorema 5

Para todo α real, $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\alpha \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, vale a relação:

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

Relações fundamentais

Corolário

Para todo α real, $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\alpha \notin \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, valem as relações:

1 → $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$

2 → $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

3 → $1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cossec}^2 \alpha$

4 → $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha}$

5 → $\text{sen}^2 \alpha = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha}$

Uma Introdução à Trigonometria

Trigonometria na Circunferência

Resumo da apresentação

Nesta unidade, abordamos as definições e relações entre as razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.

CRÉDITOS

Autores

José Carlos de Sá
Graduado em Licenciatura Plena em Matemática
Graduado em Química
Mestrando em Matemática

Erica Boizan Batista
Graduada em Licenciatura Plena em Matemática
Mestre em Matemática
Doutora em Matemática

Valdinês Leite de Sousa Júnior
Graduação em Licenciatura Plena em Matemática
Mestre em Matemática
Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Manoel Jairo. Matemática para o Ensino Médio Série Parâmetro. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

IEZZI, Gerson. Fundamentos de matemática elementar: Trigonometria, Volume 3. São Paulo: 9 ed. Atual Editora, 2013.

IEZZI, Gerson; DOLCE, Osvaldo; DESENSZAJN, David; ALMEIDA, Roberto. Matemática: Ciência e Aplicações, volume 2 PNLD 2018,2019, 2020, 2021. São Paulo: 9 ed. Editora Saraiva, 2016.

Uma introdução à Trigonometria

Unidade 4. Trigonometria na Circunferência

2.3 - Funções Trigonométricas

Professores:

José Carlos de Sá

Érica Boizan Batista

Valdinês Leite de Sousa Júnior

TÓPICOS

- Função seno
- Função cosseno
- Função tangente
- Função cotangente
- Função secante
- Função cossecante

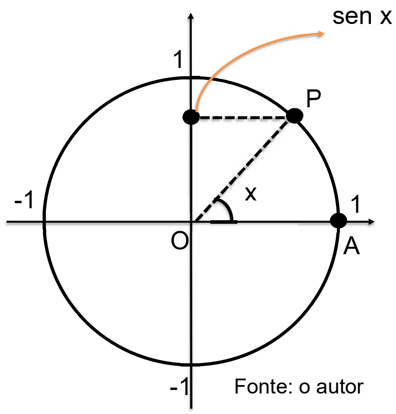
Função seno

Seja x um número real e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos **função seno** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o seu seno, isto é, **f(x) = sen x.**

Observe que **f** associa a cada número real x a ordenada do ponto correspondente a sua imagem **P.**

Lembramos que a ordenada de qualquer ponto na circunferência trigonométrica varia entre -1 e 1, ou seja, $-1 \leq \text{sen x} \leq 1$.



Fonte: o autor

Med($\widehat{\text{AP}}$) = x rad

Propriedades

1 – No 1° e 4° quadrantes, a função **f** é crescente, pois, à medida que x aumenta, os valores de sen x aumentam (1° Q os valores aumentam de 0 a 1 e no 4° Q os valores aumentam de -1 a 0);

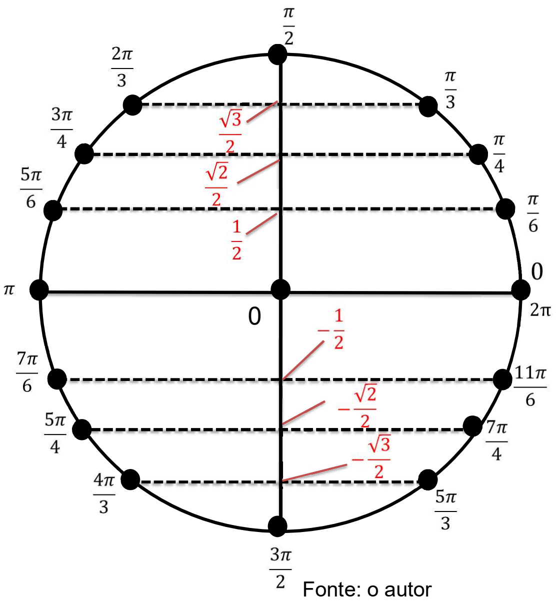
2 – No 2° e 3° quadrantes, a função **f** é decrescente, pois, à medida que x aumenta, os valores de sen x diminuem (2° Q os valores diminuem de 1 a 0 e no 3° Q os valores diminuem de 0 a -1.

3 – A função seno é **periódica** e seu período é 2π**.**

4 – f é uma função ímpar, pois para todo x ∈ $\mathbb{R}$, sen (- x) = - sen x.

Gráfico

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de **f**, dado por f(x) = sen x, que é chamado de **senoide.**

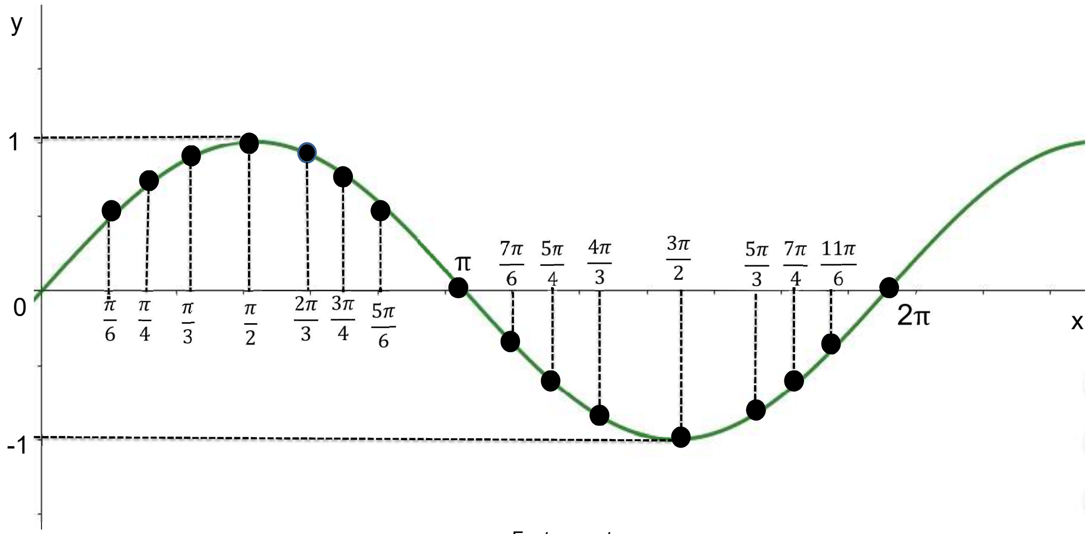


Fonte: o autor

x	y = sen x
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Fonte: o autor

Gráfico senoide



Fonte: o autor

Funções trigonométricas

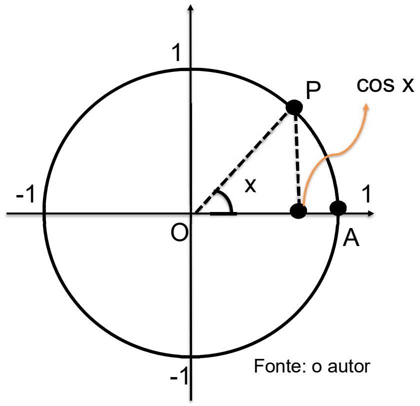
Função cosseno

Seja x um número real e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos **função cosseno** a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o seu cosseno, isto é, **f(x) = cos x.**

Observe que **f** associa cada número real x a abscissa do ponto correspondente a sua imagem **P**.

Lembramos que a abscissa de qualquer ponto na circunferência trigonométrica varia entre -1 e 1, ou seja, $-1 \leq \cos x \leq 1$.



Fonte: o autor

$\text{Med}(\widehat{AP}) = x$ rad

Propriedades

1 – No 1° e 2° quadrantes, a função **f** é decrescente, pois, à medida que x aumenta os valores de cos x diminuem (1° Q os valores diminuem de 1 a 0 e no 2°Q os valores diminuem de 0 a -1);

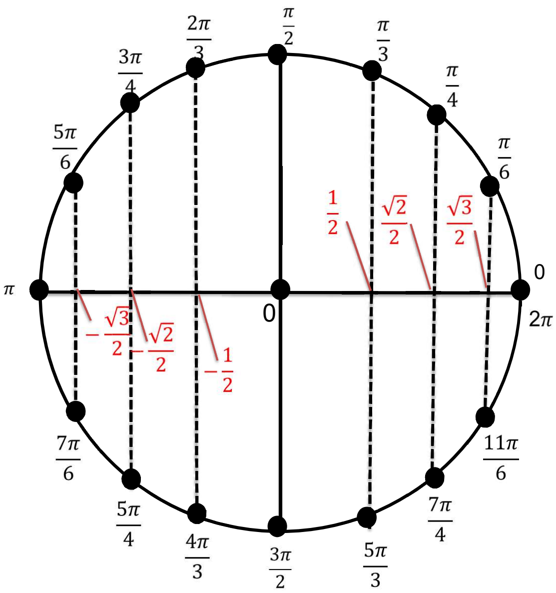
2 – No 3° e 4° quadrantes, a função **f** é crescente, pois, à medida que x aumenta os valores de cos x aumentam (3° Q os valores aumentam de -1 a 0 e no 4°Q os valores aumentam de 0 a 1);

3 – A função é **periódica** e seu período é 2π.

4 – **f** é uma função par, pois para todo x$\in \mathbb{R}$, cos (-x) = cos x

Gráfico

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de **f**, dado por f(x) = cos x, que é chamado de **cossenoide.**

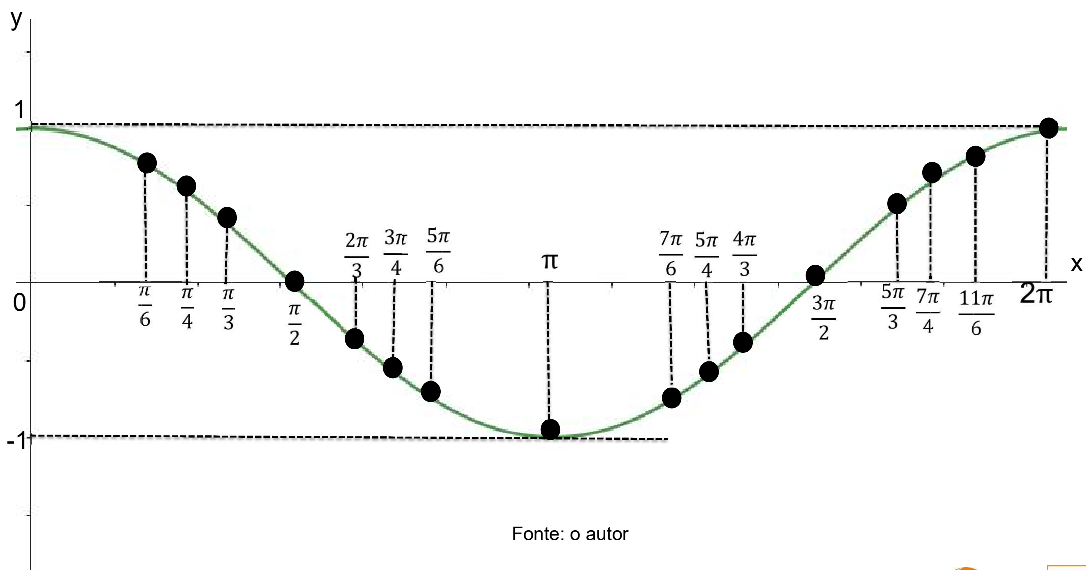


Fonte: o autor

x	y = cos x
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Fonte: o autor

Gráfico cossenoide



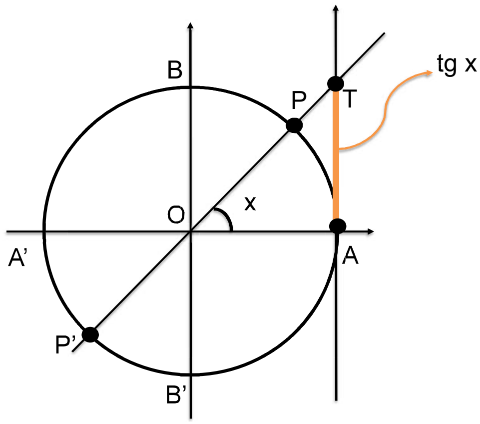
Fonte: o autor

Função tangente

Seja x um número real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos **função tangente** a função f: $D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o número real AT = tg x, isto é, **f(x) = tg x.**

Notemos que, se P está em B ou B', então, a reta $\overline{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Dessa forma, não existe o ponto T e a tg x não é definida.



Fonte: o autor

Propriedades

1 – No 1° quadrante a tangente cresce de 0 a $+\infty$;

2 – No 2° quadrante a tangente cresce de 0 a $-\infty$;

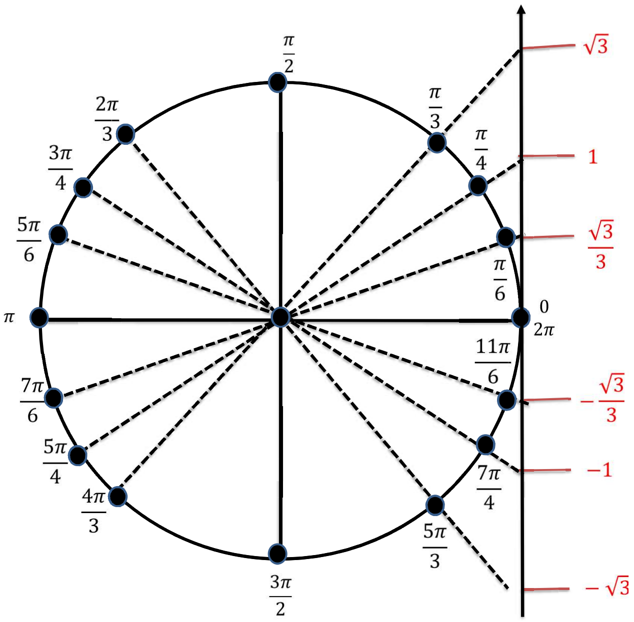
3 – O domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$;

4 – A imagem da função tangente é $Im(f) = \mathbb{R}$;

5 – A função tangente é **periódica** e seu período é π.

Gráfico

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de **f**, dado por f(x) = tg x, que é chamado de **tangentoide.**

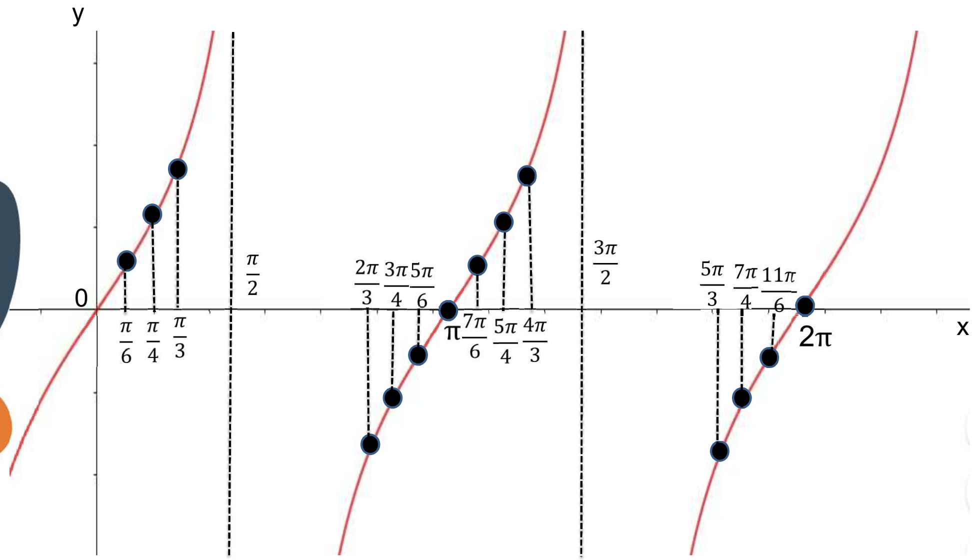


Fonte: o autor

x	y = tg x
0	0
$\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$	∄
$\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π e 2π	0

Fonte: o autor

Gráfico tangentoide



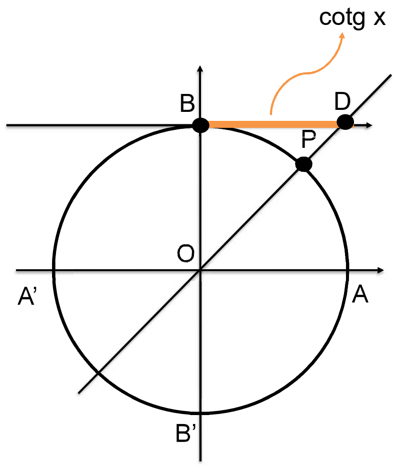
Fonte: o autor

Função cotangente

Seja x um número real, $x \neq k\pi$ e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos **função cotangente** a função $f\colon D \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, $x \neq k\pi$, o número real BD = cotg x, isto é, **f(x) = cotg x.**

Notemos que, se P está em A ou A', então, a reta $\overline{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Dessa forma, não existe o ponto D e a cotg x não é definida.



Fonte: o autor

Propriedades

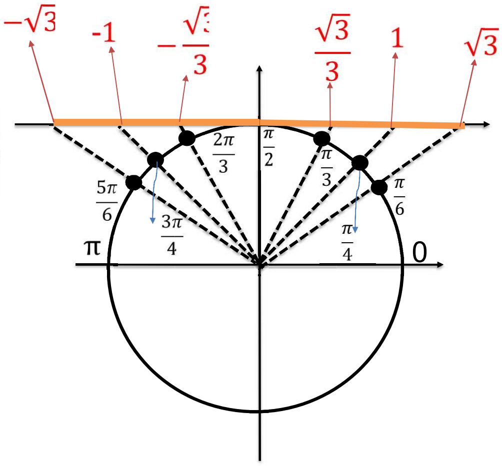
1 – O domínio da função cotangente é D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$;

2 – A imagem da função cotangente é Im(f) = $\mathbb{R}$;

3 – A função cotangente é **periódica** e seu período é π.

4 – A função cotangente é sempre decrescente, exceto onde ela não está definida.

Considerando arcos do 1° e 2° quadrantes, temos os seguintes pares ordenados (x, cotg x) mostrados na circunferência trigonométrica:



Fonte: o autor

$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$;	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$;
$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$;	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$;
$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3}\right)$
$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$;	

Fonte: o autor

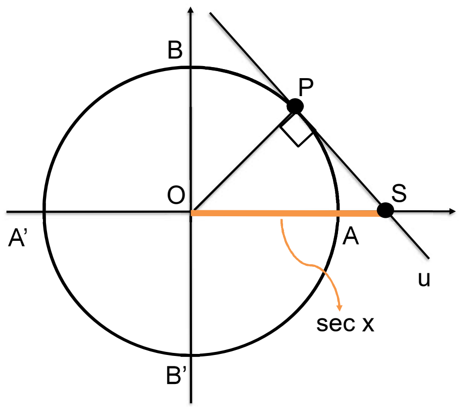
Funções trigonométricas

Função secante

Seja x um número real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos **função secante** a função f: $D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o número real OS = sec x, isto é, **f(x) = sec x.**

Notemos que, se P está em B ou B’, então, a reta u fica paralela ao eixo dos cossenos. Dessa forma, não existe o ponto S e a sec x não é definida.



Fonte: o autor

Propriedades

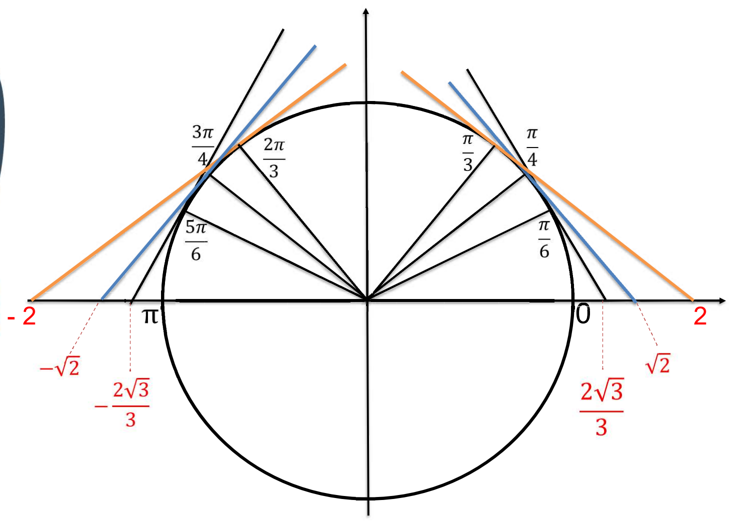
1 – O domínio da função secante é D = $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$;

2 – A imagem da função secante é Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \ ou \ y \ \geq 1 \}$;

3 – A função secante é **periódica** e seu período é 2π.

4 – A função secante é crescente no 1° ou 2° quadrantes e decrescente no 3° ou 4° quadrantes.

Considerando arcos do 1° e 2° quadrantes, temos os seguintes pares ordenados (x, sec x) mostrados na circunferência trigonométrica :



Fonte: o autor

$(0, 1)$;	$\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$;
$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$;
$\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$;	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;
$\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$;	$(\pi, -1)$

Fonte: o autor

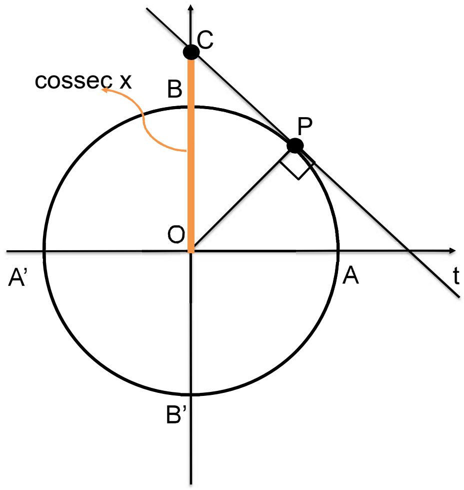
Funções trigonométricas

Função cossecante

Seja x um número real, x$\neq k\pi$ e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos **função cossecante** a função f: $D \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x, x$\neq k\pi$, o número real OC = cossec x, isto é, **f(x) = cossec x.**

Notemos que, se P está em A ou A', então, a reta t fica paralela ao eixo dos senos. Dessa forma, não existe o ponto C e a cossec x não é definida.



Fonte: o autor

Propriedades

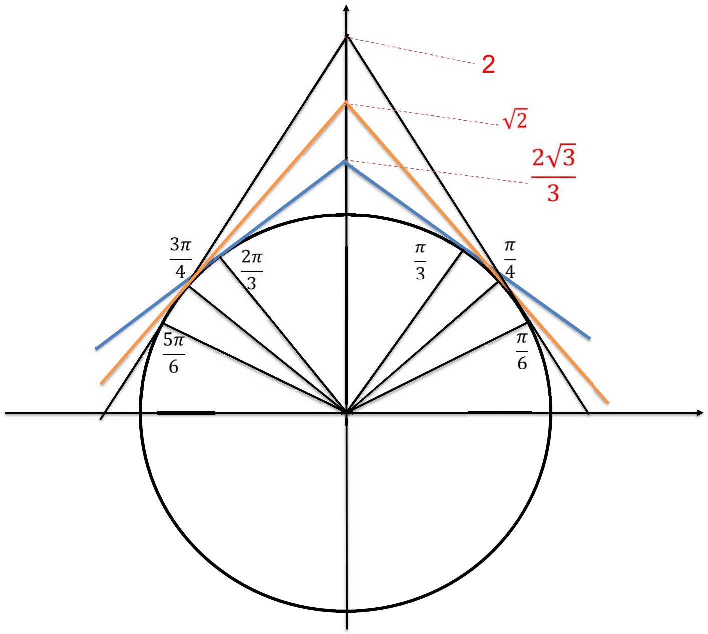
1 – O domínio da função cossecante é D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$;

2 – A imagem da função cossecante é Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ } ou \text{ } y \geq 1\}$;

3 – A função cossecante é **periódica** e seu período é 2π.

4 – A função cossecante é crescente no 2° ou 3° quadrantes e decrescente no 1° ou 4° quadrantes.

Considerando arcos do 1° e 2° quadrantes, temos os seguintes pares ordenados (x, cossec x) mostrados na circunferência trigonométrica :



Fonte: o autor

$\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$;	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;
$\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$;	$\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$;
$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$;	$\left(\frac{5\pi}{6}, 2\right)$;
$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$;	

Fonte: o autor

Uma Introdução à Trigonometria

Trigonometria na circunferência

Resumo da apresentação

Abordamos nessa unidade as definições, propriedades e mostramos alguns dos valores das funções trigonométricas na circunferência trigonométrica.

CRÉDITOS

Autores

José Carlos de Sá

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática

Graduado em Química

Mestrando em Matemática

Erica Boizan Batista

Graduada em Licenciatura Plena em Matemática

Mestre em Matemática

Doutora em Matemática

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Graduação em Licenciatura Plena em Matemática

Mestre em Matemática

Doutor em Matemática

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Manoel Jairo. Matemática para o Ensino Médio Série Parâmetro. Volume único. São Paulo: Scipione, 2001.

IEZZI, Gerson. Fundamentos de matemática elementar: Trigonometria, Volume 3. 9 ed. Atual Editora, 2013.

IEZZI, Gerson; DOLCE, Osvaldo; DESENSZAJN, David; ALMEIDA, Roberto. Matemática: Ciência e Aplicações, volume 2 PNLD 2018,2019, 2020, 2021. São Paulo: 9 ed. Editora Saraiva, 2016.