



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

DAMIÃO JEFERSON DE ARAÚJO SOUZA

DEMONSTRAÇÕES ANALÍTICAS EM GEOMETRIA PLANA

JUAZEIRO DO NORTE

2023

DAMIÃO JEFERSON DE ARAÚJO SOUZA

DEMONSTRAÇÕES ANALÍTICAS EM GEOMETRIA PLANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadores: Valdinês Leite de Sousa Júnior
Erica Boizan Batista

JUAZEIRO DO NORTE

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
Universidade Federal do Cariri.
Sistema de Bibliotecas

S729d

Souza, Damião Jeferson de Araújo.

Demonstrações analíticas em geometria plana / Damião Jeferson de Araújo Souza. – 2023.
x, 25 f.: il. color. 30 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte,
2023.

Orientação: Prof. Dr. Valdines Leite de Sousa Junior.

Profa. Dra. Érica Boizan Batista

1. Coordenadas baricêntricas. 2. Geometria analítica. 4. Geometria Euclidiana. I. Título.

CDD 516.3

Bibliotecária: Glacínésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

DAMIÃO JEFERSON DE ARAÚJO SOUZA

DEMONSTRAÇÕES ANALÍTICAS EM GEOMETRIA PLANA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 30 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI

Prof.^a Dra. Erica Boizan Batista
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI

Prof. Dr. Glauber Márcio Silveira Pereira
UNIJUAZEIRO

Prof. Dr. Lucas Vidal de Meireles
IF GOIANO

*Aos velhos, novos e futuros
matemáticos. Pois, são as
chaves para os avanços.*

Agradecimentos

Agradeço a minha família, a meu irmão João Paulo de Araújo Souza por todas as vezes em que me ajudou na graduação e no mestrado, a todos os meus professores do infantil até o mestrado, ao meu professor Valdinês Leite de Sousa Júnior e a minha professora Erica Boizan Batista pela orientação deste trabalho tão importante.

RESUMO

Este trabalho é baseado integralmente em um artigo científico com o mesmo título, escrito pelos autores Damião Jeferson de Araújo Souza, Valdinês Leite de Sousa Júnior e Erica Boizan Batista. Nele apresentamos uma abordagem para o ensino de algumas propriedades da geometria euclidiana plana, utilizando conceitos e propriedades da geometria analítica. Os autores adotam um método conhecido como coordenadas baricêntricas, introduzido pelo matemático August Ferdinand Möbius (1790-1868) em 1827, que permite resolver problemas e demonstrar teoremas da geometria plana usando conceitos de área, em vez de semelhança e congruência de triângulos, que são comumente utilizados no ensino básico no Brasil. São apresentados alguns teoremas clássicos, como o Teorema da Bissetriz Interna e o Teorema de Ceva, ambos demonstrados por meio de uma abordagem baseada nas ferramentas desenvolvidas por Möbius. Além de exemplificar o uso do método, o trabalho também apresenta problemas resolvidos para ajudar os estudantes a compreender melhor os conceitos apresentados.

Palavras-chave: Coordenadas Baricêntricas. Geometria Analítica. Geometria Euclidiana.

ABSTRACT

This work is based entirely on a scientific article with the same title, written by the authors Damião Jeferson de Araújo Souza, Valdinês Leite de Sousa Júnior and Erica Boizan Batista. In it we present an approach for teaching some properties of plane Euclidean geometry, using concepts and properties of analytic geometry. The authors adopt a method known as barycentric coordinates, introduced by the mathematician August Ferdinand Möbius (1790-1868) in 1827, which allows solving problems and demonstrating theorems of plane geometry using area concepts instead of similarity and congruence of triangles, which are commonly used in basic education in Brazil. Some classic theorems are presented, such as the Internal Bisector Theorem and Ceva's Theorem, both demonstrated through an approach based on the tools developed by Möbius. In addition to exemplifying the use of the method, the work also presents solved problems to help students better understand the concepts presented.

Keywords: Barycentric Coordinates. Analytical Geometry. Euclidean Geometry.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
2 Coordenadas Baricêntricas	4
3 Teoremas	9
4 Considerações finais	23
Referências	24

Lista de Figuras

2.1	Triangulação de um rosto.	5
2.2	2000 centros do triângulo.	5
2.3	Sinal de $[ABC]$	8
2.4	Decomposição de ΔABC	8
3.1	Triângulos ΔABC e $\Delta P_1P_2P_3$	9
3.2	Alturas do ponto P interno a ΔABC	11
3.3	Sinais das coordenadas baricêntricas de um ponto P qualquer	11
3.4	Sinais das coordenadas baricêntricas de P	12
3.5	Medianas do ΔABC	15
3.6	Baricentro do ΔABC	16
3.7	Baricentro do ΔABC	17
3.8	Teorema de Menelaus	20
3.9	\overline{AP} é bissetriz interna	21

Capítulo 1

Introdução

Como apontado em [2], a demonstração de um resultado é um dos fatos que torna a Matemática uma ciência tão sólida. Nessa linha, conseguir garantir a validade de um resultado ou teorema chega a ser tão importante quanto ser capaz de utilizá-lo em problemas específicos. Ainda em [2], é apontado que re-demonstrações consistem em uma forma de estudar e produzir matemática e, por isso, buscamos apresentar demonstrações alternativas para resultados já bem difundidos entre aqueles que estudam a Geometria Euclidiana Plana.

Duas provas distintas para um mesmo resultado podem parecer diferentes apenas por conta de uma simples variação na abordagem. Nessas situações, a escolha da melhor abordagem pode depender de fatores como simplicidade ou facilidade de entendimento.

Por outro lado, há casos em que as provas realmente são essencialmente diferentes entre si. Essas diferenças podem envolver a escolha de conceitos ou teoremas diferentes, ou até mesmo a aplicação de princípios matemáticos mais avançados. Em geral, essas provas tendem a ser mais complexas e requerem um maior conhecimento prévio em matemática.

Por isso, é importante que os estudantes tenham uma ampla compreensão das diferentes abordagens e técnicas utilizadas na solução de problemas. Através da exposição a diferentes provas para um mesmo resultado, é possível desenvolver uma compreensão mais profunda sobre os conceitos matemáticos e fortalecer as habilidades de resolução de problemas.

No entanto, resolver problemas ou demonstrar matematicamente a validade de alguns resultados pode não ser um caminho linear e, às vezes, até uma caminhada obscura. George Polya em [15], apresenta uma técnica composta por quatro fases que podem auxiliar no desenvolvimento de resoluções de problemas. Essas fases são: compreender o problema, planejar a solução, executar o plano e revisar a solução. A técnica de Polya se tornou uma ferramenta valiosa para professores e alunos na

busca por caminhos para soluções criativas e eficazes de problemas matemáticos, inclusive para teoremas.

Partindo da resposta do Gato de Cheshire à Alice (ver [5, p. 53]), quando questionado qual caminho ela deveria seguir (sendo que o destino poderia ser qualquer um)¹, também acreditamos que qualquer caminho sirva, mas, entretanto, que sempre haverá caminhos melhores do que outros. Para determinar qual é o melhor caminho, devemos conhecer os caminhos possíveis. Por isso, torna-se importante ter ciência das possibilidades que estão presentes ao abordar um certo problema.

Embora a geometria seja uma das áreas mais antigas da matemática, muitas vezes nos limitamos a seguir o caminho que nossos professores nos apresentam. No Brasil, ao contrário de outros lugares como a China, temos a tendência de nos concentrar exclusivamente nas congruências e semelhanças de triângulos na resolução de problemas de geometria euclidiana, negligenciando a utilização de outras ferramentas igualmente importantes. Por exemplo, Euclides em *Os Elementos* (ver [7]) ao demonstrar o Teorema de Pitágoras faz uso das propriedades da geometria relacionadas a área, argumento este que muitas vezes não é abordado em sala de aula.

Para uma compreensão mais completa da geometria, é importante que os professores apresentem aos alunos outras abordagens, como a utilização de áreas, para que eles possam desenvolver uma compreensão mais ampla da disciplina e de suas aplicações na vida cotidiana. Além disso, os professores devem incentivar os alunos a explorar a geometria de forma criativa, encorajando-os a pensar criticamente e a buscar soluções inovadoras para os problemas geométricos apresentados seja esse inédito ou não.

Apresentamos aos leitores uma abordagem clássica e poderosa, conhecida como coordenadas baricêntricas, que remonta a pelo menos 1827 com August Ferdinand Möbius. Essa abordagem permite explorar de maneira simples e profunda várias propriedades de figuras planas, especialmente dos triângulos, por meio de suas relações com as propriedades de áreas.

As coordenadas baricêntricas formam um sistema de coordenadas utilizada na geometria analítica como forma de representar qualquer ponto do plano em função das coordenadas dos vértices de um triângulo previamente fixado. Elas são muito úteis para resolver problemas geométricos que envolvem áreas, e esses problemas há os mais diversos possíveis como, por exemplo, as demonstrações dos teoremas clássicos da geometria euclidiana plana (como o Teorema de Ceva e o Teorema da Bissetriz Interna, demonstrado neste trabalho), a determinação de pontos específicos de um triângulo (incentro, baricentro, entre outros).

¹de que caminhar o bastante seria o suficiente. Ou seja, ao não parar ela poderia sair de qualquer lugar, mas o destino seria incerto.

Uma das vantagens de trabalhar com coordenadas baricêntricas é a variedade maior de ferramentas disponíveis para solucionar um mesmo problema. Além disso, as coordenadas baricêntricas são invariantes em relação a transformações rígidas do plano, como translações e rotações. Essa invariabilidade torna os cálculos mais fáceis e eficientes em certos problemas.

Atualmente, esse tipo de coordenada é muito utilizado em pesquisas matemáticas e em áreas como a Arquitetura, a Engenharia e Design, pela facilidade de se trabalhar com triangulações de figuras bidimensionais e tridimensionais.

Nos próximos capítulos, falaremos um pouco sobre as coordenadas baricêntricas, aplicando alguns exemplos e demonstraremos três teoremas bastante conhecidos da geometria plana (Teorema de Ceva, Teorema de Menelaus e o Teorema da bissetriz interna de um triângulo) usando essas coordenadas para correlacionar com a geometria analítica.

Capítulo 2

Coordenadas Baricêntricas

A palavra baricêntrica é derivada da palavra grega barys (pesado) e refere-se ao centro de gravidade. O cálculo baricêntrico é um método de tratar a geometria considerando um ponto como o centro de gravidade de alguns outros pontos aos quais são atribuídos pesos. Daí, em particular, o cálculo baricêntrico fornece uma visão excelente dos centros dos triângulos.

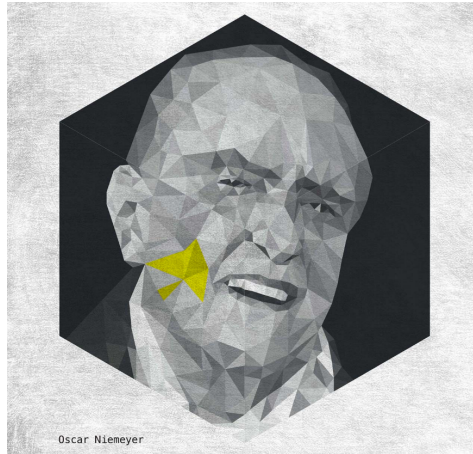
As coordenadas baricêntricas foram utilizadas pela primeira vez pelo matemático August Ferdinand Möbius quando publicou seu livro *Der Barycentrische Calcul* (O Cálculo Baricêntrico) em 1827 (ver [13]), com o intuito de representar pontos especiais de um triângulo em função de proporções relacionadas às medidas dos lados desse triângulo. Embora, essa ferramenta tenha ganhado fama apenas no século XIX, com o matemático Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) ao mostrar que as propriedades dos pontos não se alteram quando são multiplicadas por um fator comum (ver a observação 2). A partir disso, as coordenadas baricêntricas foram utilizadas nos estudos de outros matemáticos como, por exemplo, Luigi Cremona (1830-1903) e Jakob Steiner (1796-1863). Esses, por sua vez, descobriram várias propriedades importantes utilizando essa ferramenta como, por exemplo, uma relação entre as coordenadas baricêntricas e as cartesianas.

As coordenadas baricêntricas trabalham com a representação de qualquer ponto do plano e, com as devidas adaptações, do espaço tridimensional. Tal representação é importante na manipulação de imagens assim como as curvas poligonais são importante quando estamos tratando de curvas contínuas do espaço como, por exemplo, ao determinar o comprimento de uma curva contínua qualquer. Pois, mesmo que as curvas poligonais geralmente sejam diferentes das curvas contínuas, o erro obtido ao fazer tal troca é tão pequeno quanto se queira. Na figura 2.1, temos um exemplo de como seria a triangulação de uma imagem. Assim como nos casos da aproximação das curvas contínuas por funções poligonais, a aproximação¹ é tão boa quanto se

¹semelhança entre a imagem processada e a original.

queira. O ganho ao se trabalhar com triangulações de imagem pode estar, principalmente, na quantidade de processamentos que um computador precisará realizar para entender e processar a imagem. Para entender melhor essa aplicação veja [4, p. 95].

Figura 2.1: Triangulação de um rosto.

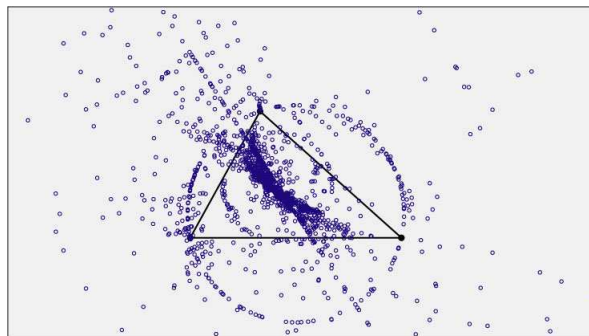


Fonte: Javiera Yávar [17]

Outro exemplo de processamento de imagens é o processo, que pode ser realizado utilizando as coordenadas baricênticas, feito por uma máquina de ultrassom para representar as informações obtidas em uma tela ou papel para que os dados possam ser lidos pelos médicos.

Mesmo que o triângulo seja a figura geométrica mais simples muitos dos pontos do plano estão intimamente relacionado a ele, como é o caso do baricentro. Como dito em [3], “Com o passar do tempo, mais propriedades, lugares geométricos e centros (pontos notáveis como por exemplos ortocentro, baricentro, incentro, circuncentro e entre outros) foram descobertos e, nas últimas décadas, o professor norte-americano Clark Kimberling vem catalogando estes pontos (Kimberling, [9], [10]) e disponibilizando uma lista das suas propriedades algébricas na internet (Kimberling, [11]).” Alguns desses pontos estão representados na figura 2.2.

Figura 2.2: 2000 centros do triângulo.



Fonte: Uma Versão Interativa da Enciclopédia dos Centros do Triângulo [3]

Ressaltamos que já existem mais de 36000 centros catalogados (ver [16, p. 17]).

Apresentadas algumas justificativas sobre a necessidade e importância das coordenadas baricêntricas, daremos início ao estudo definindo o que são tais coordenadas.

Definição 1 (Coordenadas baricêntricas). *Sejam A, B e C os vértices de um triângulo não degenerado ΔABC e P um ponto no plano. Dizemos que u, v e w são coordenadas baricêntricas de P em relação ao triângulo ΔABC se*

$$P = \frac{u \cdot A + v \cdot B + w \cdot C}{u + v + w},$$

isto é, se o ponto pode ser obtido como média ponderada dos vértices A, B e C com os pesos u, v e w respectivamente. O ponto P passa ser identificado por esses pesos e, neste caso, usaremos a notação

$$P = (u, v, w).$$

Observação 1. *Observe que $A = 1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$, $B = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C$ e $C = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C$. Assim, as coordenadas baricêntricas dos vértices de um triângulo ΔABC são $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Pode-se ver que essas coordenadas não mudam, independente do triângulo.*

Observação 2. *Vale salientar que a representação de um ponto por meio de coordenadas baricêntricas não é única. Pois, se $P = (u, v, w)$ forem as coordenadas baricêntricas do ponto P do plano com relação ao triângulo não degenerado ΔABC , então, dado $k \in \mathbb{R}^*$ e pondo $Q = (ku, kv, kw)$, teremos*

$$Q = \frac{kuA + kvB + kwC}{ku + kv + kw} = \frac{k(uA + vB + wC)}{k(u + v + w)} \underbrace{=}_{k \neq 0} \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} = P.$$

Dada essa variedade de possibilidade de representação em que $P = (u, v, w) = (ku, kv, kw) = Q$, destacaremos uma que é muito interessante, pois nela só há uma representação. As coordenadas baricêntricas homogêneas são as coordenadas baricêntricas de um ponto $P = (u, v, w)$, em que $u + v + w = 1$. Note que quando $u + v + w \neq 0$, sempre será possível encontrar a coordenada baricêntrica homogênea de um ponto dado, por $P = (u, v, w)$, basta assumir $k = 1/(u + v + w)$, ou seja,

$$P = \left(\frac{u}{u + v + w}, \frac{v}{u + v + w}, \frac{w}{u + v + w} \right).$$

É possível haver dúvidas em relação ao cálculo das coordenadas baricêntricas dos pontos especiais de um triângulo. Para ilustrar o problema, tomaremos como exemplo o cálculo das coordenadas baricêntricas do ponto médio de um dos lados de um triângulo.

Problema 1. *Encontre as coordenadas baricêntricas do ponto médio de \overline{AB} relacionada a um triângulo ΔABC qualquer.*

Solução: Considere $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$ pontos do vértice de um triângulo. O ponto médio de \overline{AB} é determinado por

$$M = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2} \right).$$

Considerando $P = (u, v, w)$ a coordenada baricêntrica do ponto médio de \overline{AB} . Logo

$$P = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w} = \left(\frac{ux_a + vx_b + wx_c}{u + v + w}, \frac{uy_a + vy_b + wy_c}{u + v + w} \right) = \left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2} \right)$$

Daí, temos que

$$\frac{u \cdot x_a + v \cdot x_b + w \cdot x_c}{u + v + w} = \frac{x_a + x_b}{2} \text{ e } \frac{u \cdot y_a + v \cdot y_b + w \cdot y_c}{u + v + w} = \frac{y_a + y_b}{2}$$

Da primeira parte, temos

$$2u \cdot x_a + 2v \cdot x_b + 2w \cdot x_c = (u + v + w) \cdot x_a + (u + v + w) \cdot x_b$$

$$\begin{cases} u + v + w = 2u \\ u + v + w = 2v \\ 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v + w = u \\ u + w = v \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v \\ w = 0 \end{cases}.$$

Portanto, as coordenadas baricêntricas que determinam o ponto médio de \overline{AB} é $P = (u, u, 0)$ ou $P = (1, 1, 0)$. De modo análogo, encontra-se as coordenadas que determinam os pontos médios de \overline{BC} e \overline{CA} , que são $Q = (0, 1, 1)$ e $R = (1, 0, 1)$, respectivamente. \diamond

Observe que essas coordenadas foram encontradas sem restringir a um triângulo ΔABC . Assim, essas coordenadas servem pra determinar os pontos médios dos lados de qualquer triângulo.

Antes de tratarmos das principais propriedades das coordenadas baricêntricas, apresentaremos mais uma definição que será útil para as propriedades apresentadas nesse trabalho e suas respectivas demonstrações. Tal definição trata do conceito de área determinada pela orientação da ordem dos vértices, gerando apenas uma diferença no sinal com relação à área convencional da Geometria Euclidiana Plana.

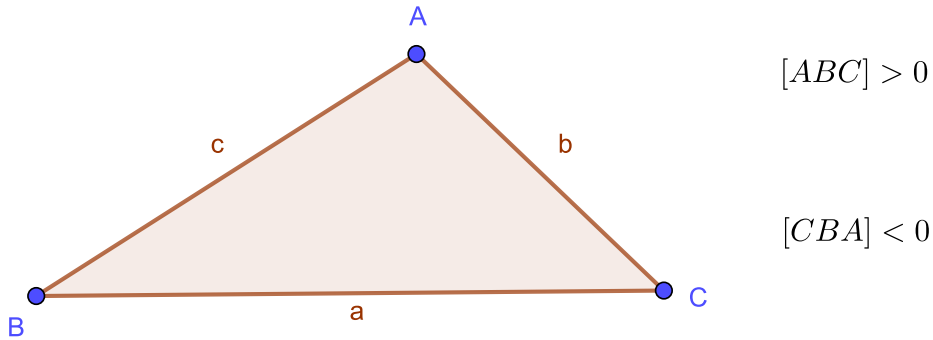
É importante lembrar que um triângulo é dito degenerado sempre que os seus vértices forem colineares, ou seja, a sua área é igual a zero.

Definição 2 (Área com sinal). *Sejam A, B e C pontos no plano. Se A, B e C forem colineares (triângulo degenerado), assumiremos que a área com sinal $[ABC]$*

será nula. Por outro lado, se A, B e C não forem colineares, então a área com sinal $[ABC]$, em função da área do ΔABC dada por S_{ABC} , será

$$[ABC] = \begin{cases} S_{ABC}, & \text{se os pontos estão dispostos no sentido anti-horário;} \\ -S_{ABC}, & \text{se os pontos estão dispostos no sentido horário.} \end{cases}$$

Figura 2.3: Sinal de $[ABC]$.



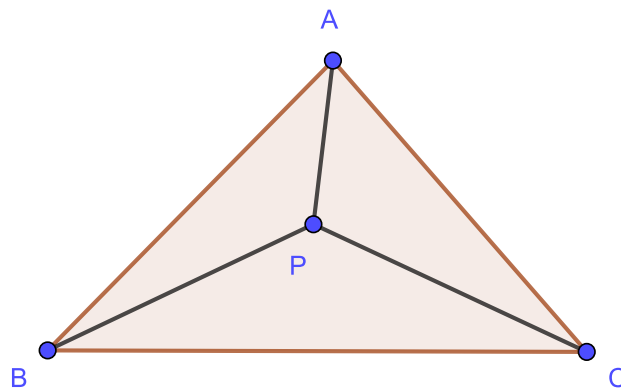
Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa maneira de representar a área de um triângulo tem a propriedade de que, dado qualquer triângulo não degenerado e um ponto P no interior do triângulo, vale

$$S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PAC} + S_{PAB}$$

como pode ser visto na figura 2.4. Observe que, se P estivesse na região externa ao triângulo ΔABC , não valeria $S_{ABC} = S_{PBC} + S_{PAC} + S_{PAB}$.

Figura 2.4: Decomposição de ΔABC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 3

Teoremas

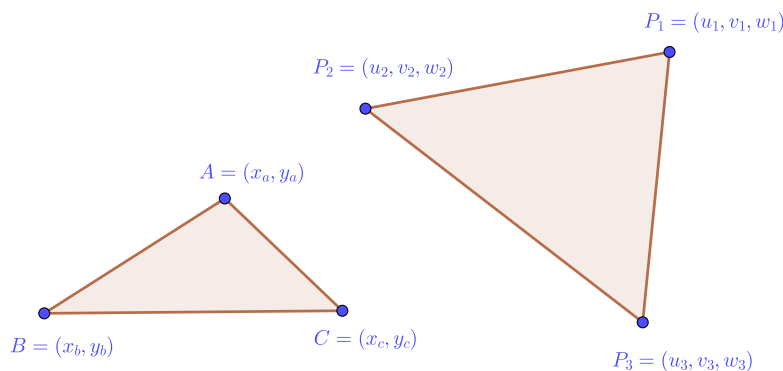
Nesta seção, apresentaremos as principais propriedades relacionadas às coordenadas baricêntricas. Sempre levando em conta uma definição clara e aplicações palpáveis. Como, por exemplo, a relação entre a fórmula para áreas dada em Geometria Analítica, a fórmula utilizando as coordenadas baricêntricas e o Teorema da Bissetriz Internas demonstrada de uma maneira diferente da convencional.

Teorema 1 (Fórmula da Área Baricêntrica). *Sejam A, B e C os vértices de um triângulo ΔABC e P_1, P_2 e P_3 pontos em coordenadas baricêntricas relacionada ao triângulo ΔABC de tal modo que $P_i = (u_i, v_i, w_i)$ para $i = 1, 2$ e 3 , então a área com sinal de $\Delta P_1 P_2 P_3$ é dado por*

$$[P_1 P_2 P_3] = \frac{[ABC]}{\prod_{i=1}^3 (u_i + v_i + w_i)} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Observe que, se as coordenadas baricêntricas de P_1, P_2 e P_3 , dados em função de $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, são $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)$ e (u_3, v_3, w_3) respectivamente, então

Figura 3.1: Triângulos ΔABC e $\Delta P_1 P_2 P_3$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$P_1 = \frac{u_1A + v_1B + w_1C}{u_1 + v_1 + w_1} = \left(\frac{u_1x_a + v_1x_b + w_1x_c}{u_1 + v_1 + w_1}, \frac{u_1y_a + v_1y_b + w_1y_c}{u_1 + v_1 + w_1} \right).$$

De modo análogo, pode-se obter as coordenadas cartesianas de P_2 e P_3 . Com isso, temos

$$[P_1P_2P_3] = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{u_1 \cdot x_a + v_1 \cdot x_b + w_1 \cdot x_c}{u_1 + v_1 + w_1} & \frac{u_1 \cdot x_a + v_1 \cdot x_b + w_1 \cdot x_c}{u_1 + v_1 + w_1} & 1 \\ \frac{u_2 \cdot x_a + v_2 \cdot x_b + w_2 \cdot x_c}{u_2 + v_2 + w_2} & \frac{u_2 \cdot x_a + v_2 \cdot x_b + w_2 \cdot x_c}{u_2 + v_2 + w_2} & 1 \\ \frac{u_3 \cdot x_a + v_3 \cdot x_b + w_3 \cdot x_c}{u_3 + v_3 + w_3} & \frac{u_3 \cdot x_a + v_3 \cdot x_b + w_3 \cdot x_c}{u_3 + v_3 + w_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a linha i por $u_i + v_i + w_i$, para $i = 1, 2, 3$, teremos

$$\begin{aligned} [P_1P_2P_3] &= \\ &= \frac{1}{2 \prod_{i=1}^3 (u_i + v_i + w_i)} \begin{vmatrix} u_1x_a + v_1x_b + w_1x_c & u_1x_a + v_1x_b + w_1x_c & u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2x_a + v_2x_b + w_2x_c & u_2x_a + v_2x_b + w_2x_c & u_2 + v_2 + w_2 \\ u_3x_a + v_3x_b + w_3x_c & u_3x_a + v_3x_b + w_3x_c & u_3 + v_3 + w_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \prod_{i=1}^3 (u_i + v_i + w_i)} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{[ABC]}{\prod_{i=1}^3 (u_i + v_i + w_i)} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

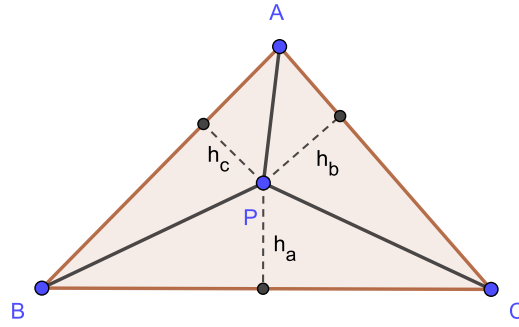
No próximo problema, apresentaremos como determinar as coordenadas baricêntricas de um ponto do plano com relação às áreas dos triângulos formado por esse ponto e os lados do triângulo tomando como referência.

Problema 2. *Mostre que as coordenadas baricêntricas homogêneas de um ponto P com relação ao triângulo ΔABC , podem ser dadas por*

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[APC]}{[ABC]}, \frac{[ABP]}{[ABC]} \right).$$

Solução: Consideraremos que o ponto $P = (u, v, w)$, com $u + v + w = 1$, é interno ao ΔABC como na figura 3.2.

Figura 3.2: Alturas do ponto P interno a ΔABC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo Teorema 1 e pela Observação 1, temos que,

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u.$$

De modo análogo, temos $v = \frac{[APC]}{[ABC]}$ e $w = \frac{[ABP]}{[ABC]}$. ◇

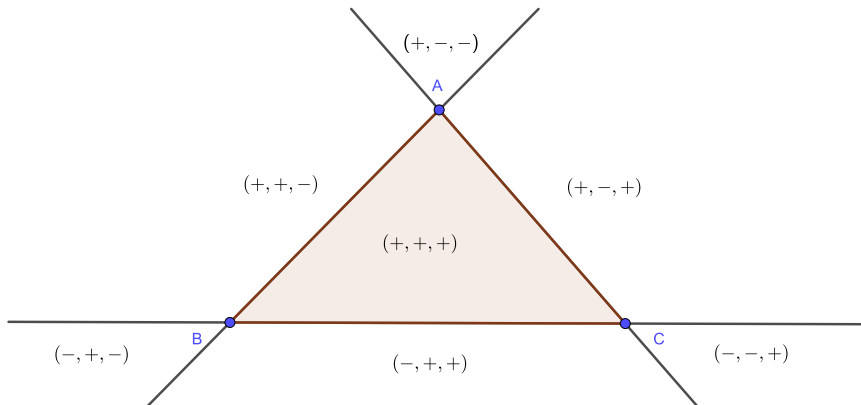
Ainda sobre a figura 3.2, se H_a é altura do triângulo ΔABC relativa à base \overline{BC} , então $(h_a \cdot BC)/2 = [PBC]$ e $(H_a \cdot BC)/2 = [ABC]$. Ou seja, $u = h_a/H_a$. De modo análogo, $v = h_b/H_b$ e $w = h_c/H_c$. Portanto,

$$P = \left(\frac{h_a}{H_a}, \frac{h_b}{H_b}, \frac{h_c}{H_c} \right) \text{ ou } P = (h_a \cdot H_b \cdot H_c, h_b \cdot H_a \cdot H_c, h_c \cdot H_a \cdot H_b)$$

são as coordenadas baricêntricas de P dadas em função das alturas. Além disso, podemos trabalhar com $P = ([PBC], [PCA], [PAB])$ se não for necessário utilizar as coordenadas baricêntricas homogêneas.

Vale observar que se o ponto P não for interno ao triângulo ΔABC as coordenadas terão sinais diferentes (como na figura 3.3), embora o módulo é mantido.

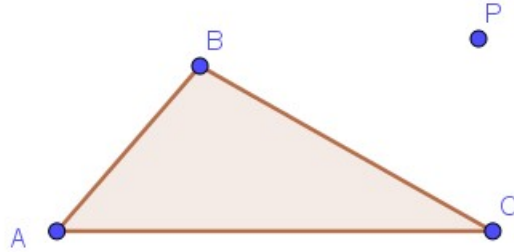
Figura 3.3: Sinais das coordenadas baricêntricas de um ponto P qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor.

Problema 3. *Determine os sinais das coordenadas baricêntricas do ponto P em relação ao triângulo ΔABC como mostra a figura 3.4.*

Figura 3.4: Sinais das coordenadas baricêntricas de P



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Pelo 2 vimos que,

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[APC]}{[ABC]}, \frac{[ABP]}{[ABC]} \right)$$

e pela Definição 2 temos que

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{-[PAC]}{[ABC]}, \frac{[ABP]}{[ABC]} \right).$$

Portanto, podemos concluir que os sinais das coordenadas baricêntricas de $P = (+, -, +)$ □

Dada a fórmula que determina a área de um triângulo a partir das coordenadas baricêntricas dos vértices desse triângulo com relação ao triângulo tomado como referência, apresentaremos uma maneira de determinar se três pontos estão, ou não, sobre uma mesma reta. Para isso, consideraremos que dados pontos distintos P e Q no plano, PQ denota o segmento ordinário que une P e Q , orientado de P para Q . Em particular, escrevemos $PQ = -QP$ como lembrete de que os segmentos orientados PQ e QP tem orientações distintas.

Teorema 2 (Colinearidade). *Seja P_1, P_2 e P_3 pontos com representações em coordenadas baricêntricas $P_i = (u_i, v_i, w_i)$, com $u_i + v_i + w_i \neq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Esses três pontos são colineares se, e somente se, a área sinalizada do $\Delta P_1 P_2 P_3$ for igual a zero*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Temos que P_1, P_2 e P_3 são colineares se, e somente se $[P_1P_2P_3] = 0$. Assumindo um triângulo não degenerado ΔABC e pela Fórmula da Área Baricêntrica, isso equivale a dizer que esses pontos são colineares se, e somente se,

$$\frac{[ABC]}{\prod_{i=1}^3 (u_i + v_i + w_i)} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Além disso, como $[ABC] \neq 0$ e $u_i + v_i + w_i \neq 0$, com $i = 1, 2, 3$, Vale

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Esse resultado torna simples o trabalho de garantir que as representações de um mesmo ponto em coordenadas baricêntricas referentes a um mesmo triângulo diferem apenas de uma multiplicação por uma contante não nula em cada uma das coordenadas. Como pode ser visto no Problema 4.

Problema 4. *Se o ponto $P = (u, v, w)$ tem mais de uma representação em coordenadas baricêntricas, então elas são do tipo $P = (ku, kv, kw)$, com $k \neq 0$.*

Solução: Considerando que P tenha duas representações em coordenadas baricêntricas, sendo elas $P = (a, b, c)$ e $P = (u, v, w)$, com relação ao triângulo não degenerado ΔABC , e $Q = (x, y, z)$ seja um ponto qualquer do plano, com $a + b + c \neq 0, u + v + w \neq 0$ e $x + y + z \neq 0$, note que

$$0 = [QPP] = \frac{[ABC]}{(x + y + z) \cdot (a + b + c) \cdot (u + v + w)} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

Como $[ABC] \neq 0$ e $(x + y + z) \cdot (a + b + c) \cdot (u + v + w) \neq 0$, temos

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

Por $Q = (x, y, z)$ ser um ponto qualquer, podemos concluir que a segunda e a terceira linhas do determinante são uma múltipla da outra. Portanto, temos que existe um $k \neq 0$, tal que $a = ku, b = kv$ e $c = kw$.

◇

Além dessa propriedade, o resultado sobre colinearidade nos dá a possibilidade de determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos dados em coordenadas baricêntricas.

Teorema 3 (Equação de uma reta). *A equação de uma reta assume a forma $u \cdot x + v \cdot y + w \cdot z = 0$, onde u, v e w são números reais.*

Demonstração. Sabemos que três pontos são colineares se, e somente se, a área com sinal do triângulo formado por esses três pontos for zero. Para determinar a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (u_1, v_1, w_1)$ e $P_2 = (u_2, v_2, w_2)$, basta considerar um terceiro ponto como $P = (x, y, z)$ sobre a reta que passa por P_1 e P_2 . Uma vez que esses três pontos são colineares, teremos que $[PP_1P_2] = 0$. Ou seja,

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = (v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2)x + (w_1 \cdot u_2 - u_1 \cdot w_2)y + (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)z.$$

Para $u = v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2$, $v = w_1 \cdot u_2 - u_1 \cdot w_2$ e $w = u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2$ substituindo na equação anterior, obteremos $u \cdot x + v \cdot y + w \cdot z = 0$ que ficará conhecida como a equação geral da reta. \square

Observação: Supondo que (x, y, z) esteja em uma reta

$$u \cdot x + v \cdot y + w \cdot z = 0$$

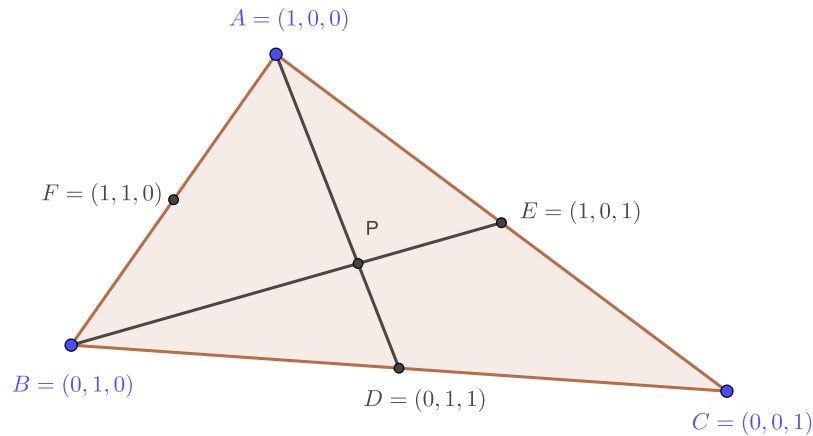
então, o mesmo acontece com os seus múltiplos $(2x, 2y, 2z)$, $(3x, 3y, 3z)$, ..., $(k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)$.

Propriedade 1. *Em um triângulo qualquer, as três medianas se intersectam em um único ponto. Tal ponto é chamado de baricentro.*

Demonstração. Considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$, com D , E e F sendo os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} respectivamente. Como D, E e F são os pontos médios e pelo Problema 2 temos que suas coordenadas baricêntricas são $D = (0, 1, 1)$, $E = (1, 0, 1)$ e $F = (1, 1, 0)$ (como na figura 3.5).

Além disso, como a soma de dois ângulos internos de um triângulo é menor do que um ângulo raso (dois ângulos retos), temos, assim, que duas medianas devem ser concorrentes. Inicialmente, determinaremos as coordenadas baricêntricas do ponto de interseção de duas medianas e, em seguida, mostraremos que esse ponto está na terceira mediana e, conseqüentemente, as medianas possuem um ponto em comum.

Figura 3.5: Medianas do ΔABC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Determinando a equação da reta r que passa pelos pontos A e D .

$$r : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = z \quad (3.1)$$

agora, determinaremos a equação da reta s que passa pelos pontos B e E .

$$s : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = z. \quad (3.2)$$

Como $P = (x, y, z)$ é ponto comum as retas r e s , das equações (3.1) e (3.2), temos

$$\begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Daí, as coordenadas baricêntricas do ponto P são $P = (x, x, x)$, com $x \neq 0$, ou $P = (1, 1, 1)$.

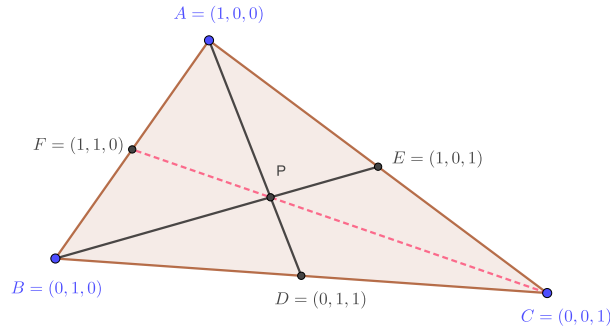
Para mostrar que P é colinear aos pontos C e F (ou seja, pertence à reta suporte da mediana \overline{CF}), usaremos o resultado encontrado no Teorema 2. Pois, com as coordenadas baricêntricas dos pontos C , P e F é possível determinar se os três pontos são colineares.

Aplicando o determinante dos pontos C , P e F ,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Podemos concluir, que as três medianas de um triângulo concorrem em um único ponto P e que as coordenadas baricêntricas desse ponto é quando $P = (x, x, x)$, com $x \neq 0$.

Figura 3.6: Baricentro do ΔABC



Fonte: Elaborada pelo autor.

□

Mais adiante veremos o Teorema de Ceva 4. Assim, utilizando tal teorema para demonstrar essa Propriedade 1, veremos que sua demonstração é de certo modo imediata.

Sendo D o ponto médio do lado \overline{BC} , temos que $D = (0, x, x)$, com $x \in \mathbb{R}^*$. Em particular, podemos tomar $x = 1/2$ sem qualquer perda de generalidade. Assim,

$$D = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow D = \frac{0 \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + \frac{1}{2} \cdot C}{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow D = \frac{1}{2} \cdot B + \frac{1}{2} \cdot C.$$

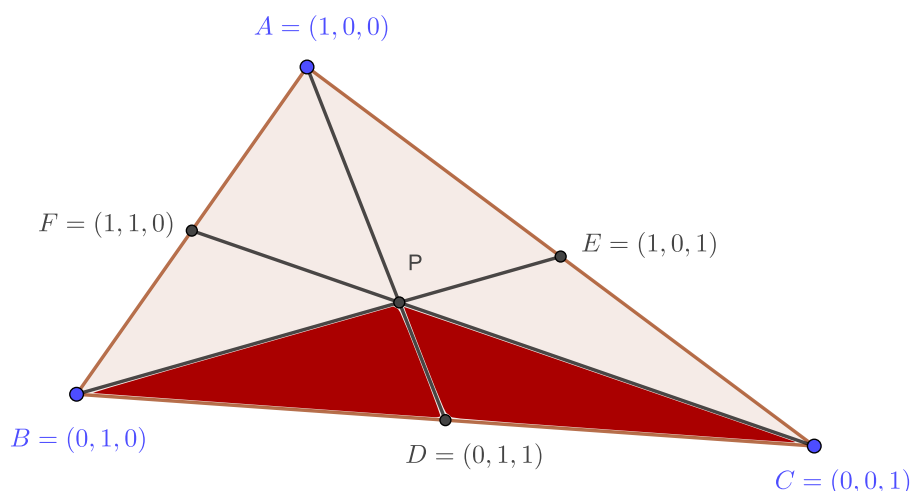
Ao assumir que o ponto P é o baricentro do triângulo ΔABC , temos que

$$P = (1, 1, 1) \Leftrightarrow P = \frac{A + B + C}{3} \Leftrightarrow P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) \Leftrightarrow P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}D.$$

Pelas propriedades de divisão de um segmento em partes proporcionais da geometria analítica, temos que o ponto P divide o segmento \overline{AD} em dois segmentos de tal forma que $AP = AD/3$ e $PD = 2AD/3$. Resultados análogos a esse também são válidos para os outros vértices.

Analisando as propriedades do baricentro de um triângulo ΔABC qualquer, podemos evidenciar uma, pela suas coordenadas baricêntricas $P = (1, 1, 1)$, pois P é um ponto interior ao triângulo dado, tal que $[PBC] = [PCA] = [PAB]$. Ou seja, P divide o ΔABC em três triângulo ΔPBC , ΔPAB e ΔPCA de mesma área. Podemos constatar esse fato utilizando o Teorema 1.

Figura 3.7: Baricentro do ΔABC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vejamos,

$$[PBC] = \frac{[ABC]}{(1+1+1)(0+1+0)(0+0+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{[ABC]}{3}$$

De modo análogo, para determinar que $[PAC] = [ABC]/3$ e $[PAB] = [ABC]/3$. Mais ainda, os seis triângulos gerados pelas áreas limitadas pelas medianas têm o mesmo valor para as suas áreas. Em particular, $[PBD] = [PDC] = [ABC]/6$.

Os resultados apresentados até o momento fundamentam a demonstração do Teorema de Ceva, um conhecido teorema da geometria plana que tem sido demonstrado de diversas maneiras, incluindo o uso de teoremas como o de Tales e Semelhança de Triângulos. Neste contexto, apresentaremos uma demonstração baseada nas propriedades das coordenadas baricêntricas, com o intuito de ilustrar a aplicabilidade desse método.

Teorema 4 (Teorema de Ceva). *Seja ΔABC um triângulo qualquer e D, E e F pontos sobre os lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente. Os segmentos \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes se, e somente se,*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Demonstração. Observe que a coordenada baricêntrica de D é determinada por:

$$D = \left(\frac{[DBC]}{[ABC]}, \frac{[DAC]}{[ABC]}, \frac{[DAB]}{[ABC]} \right).$$

Considerando $\frac{[DAC]}{[ABC]} = d$ e como a $[ABC] > 0$, temos

$$0 < [DAC] < [ABC] \Rightarrow \frac{0}{[ABC]} < \frac{[DAC]}{[ABC]} < \frac{[ABC]}{[ABC]} \Rightarrow 0 < d < 1.$$

Veja que: $\frac{[DBC]}{[ABC]} + \frac{[DAC]}{[ABC]} + \frac{[DAB]}{[ABC]} = \frac{0+[DAC]+[DAB]}{[ABC]} = \frac{[DAC]+[DAB]}{[ABC]} = \frac{[ABC]}{[ABC]} = 1$ e, assim,

$\frac{[DAC]}{[ABC]} + \frac{[DAB]}{[ABC]} = 1$. Substituindo $\frac{[DAC]}{[ABC]}$ por d , obtemos:

$$d + \frac{[DAB]}{[ABC]} = 1 \Rightarrow \frac{[DAB]}{[ABC]} = 1 - d.$$

Portanto,

$$D = \left(\frac{[DBC]}{[ABC]}, \frac{[DAC]}{[ABC]}, \frac{[DAB]}{[ABC]} \right) = (0, d, 1 - d)$$

de modo análogo, temos

$$E = \left(\frac{[EBC]}{[ABC]}, \frac{[EAC]}{[ABC]}, \frac{[EAB]}{[ABC]} \right) = (1 - e, 0, e),$$

$$F = \left(\frac{[FBC]}{[ABC]}, \frac{[FAC]}{[ABC]}, \frac{[FAB]}{[ABC]} \right) = (f, 1 - f, 0).$$

Então as retas \overleftrightarrow{AD} que passa por A e D , \overleftrightarrow{BE} que passa por B e E e a \overleftrightarrow{CF} que passa por C e F são dadas por:

$$\overleftrightarrow{AD} : d \cdot z = (1 - d)y;$$

$$\overleftrightarrow{BE} : c \cdot x = (1 - c)z;$$

$$\overleftrightarrow{CF} : f \cdot y = (1 - f)x.$$

Para que haja interseção das três retas, o objeto procurado deve satisfazer o sistema de equação a seguir. Além disso, queremos que exista uma solução não trivial para este sistema de equações (ou seja, uma diferente de $(0, 0, 0)$).

Note que:

$$\begin{cases} d \cdot z = (1 - d)y \\ c \cdot x = (1 - c)z \\ f \cdot y = (1 - f)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x - (1 - d) \cdot y + d \cdot z = 0 \\ c \cdot x + 0 \cdot y - (1 - c) \cdot z = 0 \\ -(1 - f) \cdot x + f \cdot y + 0 \cdot z = 0. \end{cases}$$

O sistema terá solução diferente da trivial se, e somente se, o determinante dos coeficientes do sistema de equação for igual a zero. Ou seja, temos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & -(1-d) & d \\ c & 0 & -(1-c) \\ -(1-f) & f & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow d \cdot e \cdot f - (1-d) \cdot (1-e) \cdot (1-f) = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{d \cdot e \cdot f}{(1-d) \cdot (1-e) \cdot (1-f)} = 1. \quad (3.3)$$

Como,

$$d = \frac{[DAC]}{[ABC]} = \frac{\frac{DC \cdot h}{2}}{\frac{BC \cdot h}{2}} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow 1-d = \frac{BC}{BC} - \frac{DC}{BC} = \frac{BC-DC}{BC} = \frac{BD}{BC}.$$

De modo análogo, temos:

$$e = \frac{[EAB]}{[ABC]} = \frac{EA}{CA} \Rightarrow 1-e = \frac{CE}{CA}$$

$$f = \frac{[FBC]}{[ABC]} = \frac{FB}{AB} \Rightarrow 1-f = \frac{AF}{AB}$$

Substituindo esses valores na equação 3.3, obtemos

$$\frac{\frac{DC}{BC} \cdot \frac{EA}{CA} \cdot \frac{FB}{AB}}{\frac{BD}{BC} \cdot \frac{CE}{CA} \cdot \frac{AF}{AB}} = 1 \Leftrightarrow \frac{DC \cdot EA \cdot FB}{BD \cdot CE \cdot AF} = 1 \Leftrightarrow \frac{BD \cdot CE \cdot AF}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1.$$

Por fim,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

□

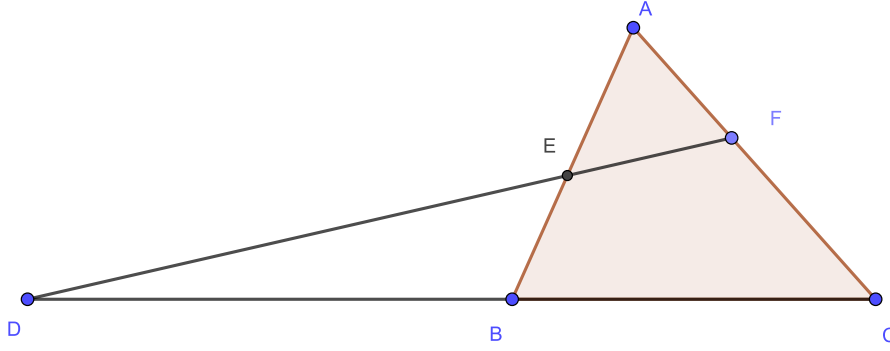
Teorema 5 (Teorema Menelaus). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e D, E e F pontos sobre as retas suportes dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC . Então:*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = -1$$

se, e só se, os pontos D, E e F forem colineares.

Demonstração. Inicialmente, suponha que $D \in \overrightarrow{CB} \setminus \overline{BC}$, $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$ e que os pontos D, E e F são colineares (os demais casos são totalmente análogos). Como mostra a figura 3.8.

Figura 3.8: Teorema de Menelaus



Fonte: Elaborada pelo autor.

A coordenada baricêntrica do ponto D é determinada por:

$$D = \left(\frac{[DBC]}{[ABC]}, \frac{[DAC]}{[ABC]}, \frac{[DAB]}{[ABC]} \right).$$

Como $[DBC] = 0$ e seja $[DAC]/[ABC] = d$ temos que $[DAB]/[ABC] = d + 1$. Assim, $D = (0, d, d + 1)$. De modo análogo, obtemos as coordenadas baricêntricas dos pontos E e F que são

$$E = \left(\frac{[EBC]}{[ABC]}, \frac{[EAC]}{[ABC]}, \frac{[EAB]}{[ABC]} \right) = (e, e - 1, 0) \text{ e}$$

$$F = \left(\frac{[FBC]}{[ABC]}, \frac{[FAC]}{[ABC]}, \frac{[FAB]}{[ABC]} \right) = (1 - f, 0, f).$$

Sabendo que os pontos D, E e F são colineares se, e somente se, o seu determinante for igual a zero. Logo,

$$\begin{vmatrix} 0 & d & d + 1 \\ e & e - 1 & 0 \\ 1 - f & 0 & f \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -d \cdot e \cdot f - (1 - d) \cdot (1 - e) \cdot (1 - f) = 0,$$

que equivale

$$\frac{d \cdot e \cdot f}{(d + 1) \cdot (e - 1) \cdot (1 - f)} = -1. \quad (3.4)$$

Note que,

$$d = \frac{[DAC]}{[ABC]} = \frac{-DC}{BC} \text{ e } d + 1 = \frac{-DC}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{-DC + BC}{BC} = \frac{-DB}{BC},$$

$$e = \frac{[EBC]}{[ABC]} = \frac{EB}{AB} \text{ e } e - 1 = \frac{EB}{AB} - \frac{AB}{AB} = \frac{EB - AB}{AB} = \frac{-AE}{AB},$$

$$f = \frac{[FAB]}{[ABC]} = \frac{FA}{CA} \text{ e } 1 - f = \frac{CA}{CA} - \frac{FA}{CA} = \frac{CA - FA}{CA} = \frac{CF}{CA}.$$

Substituindo esses valores em 3.4, obtemos

$$\frac{\frac{-DC}{BC} \cdot \frac{EB}{AB} \cdot \frac{FA}{CA}}{\frac{-DB}{BC} \cdot \frac{-AE}{AB} \cdot \frac{CF}{CA}} = -1 \Leftrightarrow \frac{-DC \cdot EB \cdot FA}{DB \cdot AE \cdot CF} = -1 \Leftrightarrow \frac{BD \cdot AE \cdot CF}{DC \cdot EB \cdot FA} = -1.$$

□

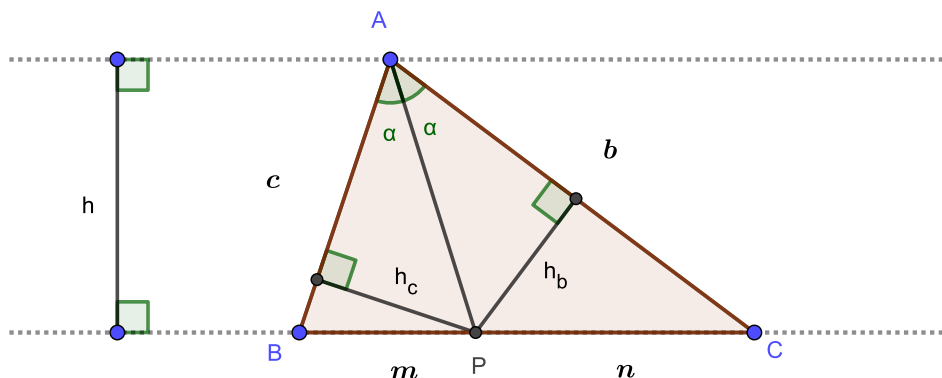
Portanto, fica demonstrado mais um teorema usando coordenadas baricêntricas de modo similar como foi apresentado na demonstração do Teorema de Ceva 4.

O Teorema da Bissetriz Interna de um Triângulo afirma que a bissetriz interna de um dos ângulo de um triângulo qualquer divide o lado oposto em segmentos cujas medidas são proporcionais aos outros dois lados do triângulo.

Esse teorema já foi provado de varias formas distintas, usaremos coordenadas baricêntricas para provar esse Teorema 6, como veremos a seguir.

Teorema 6 (Teorema da Bissetriz Interna de um Triângulo). *Seja um triângulo ΔABC qualquer e P um ponto pertencente ao segmento \overline{BC} . Se \overline{AP} for a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$, então P divide o segmento \overline{BC} em dois segmentos \overline{PB} e \overline{PC} , de medidas m e n respectivamente, de tal modo que $m/c = n/b$, com c e b sendo as medidas dos segmentos \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo ΔABC respectivamente.*

Figura 3.9: \overline{AP} é bissetriz interna



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Considere h , h_b e h_c as alturas dos triângulos ΔABC , ΔPCA e ΔABP relativas aos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} respectivamente (como na figura 3.9). Utilizaremos a fórmula relativa a áreas para determinar as coordenadas baricêntricas do ponto gerado pela interseção da bissetriz de $B\hat{A}C$ com o segmento \overline{BC} .

Podemos simplificar a expressão de

$$P = \left(\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PAC]}{[ABC]}, \frac{[PAB]}{[ABC]} \right) = ([PBC], [PAC], [PAB])$$

Veja que, tomando diferente bases para os mesmo triângulos, conseguiremos duas representações para P sendo elas

$$P = \left(0, \frac{n \cdot h}{2}, \frac{m \cdot h}{2}\right) \text{ e } P = \left(0, \frac{b \cdot h_b}{2}, \frac{c \cdot h_c}{2}\right).$$

Logo, pelo Problema 4 referente a diferentes representações, em coordenadas bari-cêntricas, de um mesmo ponto, valem as igualdades a seguir

$$\frac{n \cdot h}{2} = k \cdot \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ e } \frac{m \cdot h}{2} = k \cdot \frac{c \cdot h_c}{2}, \text{ com } k \neq 0 \text{ daí temos que,}$$

$$k = \frac{n \cdot h}{b \cdot h_b} = \frac{m \cdot h}{c \cdot h_c} \Rightarrow \frac{n}{b \cdot h_b} = \frac{m}{c \cdot h_c}. \quad (3.5)$$

Por outro lado, utilizando uma das propriedades trigonométricas bastante conhecida na geometria euclidiana que é:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{h_c}{AP} = \frac{h_b}{AP} \Rightarrow h_b = h_c.$$

Substituindo esse resultado na equação 3.5 e simplificando, obtemos o que que-ríamos demonstrar que é

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}.$$

□

Capítulo 4

Considerações finais

Apesar de que trabalhar com as coordenadas baricêntricas demande uma certa abstração com relação a como abordar certos problemas, tal dificuldade é vencida pela grande aplicabilidade desse método. Pois, ao trabalhar com Geometria Euclidiana Plana, querendo ou não, estamos condicionados a buscar resolver tudo com semelhança e congruência de triângulos e com as coordenadas baricêntricas não temos essa limitação. Salientamos que o esforço pode ser compensado sempre que conseguirmos ver um problema com uma ótica diferente da que estamos acostumados.

Além disso, nem sempre o mais importante é o onde chegar, mas, sim, o como chegar. Uma vez dominada essa possibilidade de abordagem de problemas geométricos (ou físicos a depender da situação), podemos perceber “saídas” mais simples e possibilidades diversas. Tornando-se, assim, uma ferramenta a mais para apresentar aos nossos alunos e esses poderão passar isso para frente, fazendo com que uma abordagem analítica possa ser algo casual nas resoluções de problemas geométricos em um futuro próximo.

É importante salientar que as demonstrações alternativas e as re-demonstrações são técnicas válidas e relevantes para o ensino e a pesquisa matemática. De acordo com [2], essas técnicas não apenas proporcionam a revisitação e o reforço de resultados já conhecidos, como também possibilitam a descoberta de novos resultados e relações matemáticas, fomentando o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e ampla da disciplina. Os exemplos e as propriedades apresentados aqui são apenas uma amostra do que pode ser feito quando temos a Geometria Analítica atrelada a problemas diversos. Esperamos que esses sejam suficientes para instigar a curiosidade e o desejo do leitor a procurar por mais possibilidades.

Referências

- 1 BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. - Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.
- 2 BATISTELA, Rosemeire de Fatima; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; LAZARI, Henrique. **Demonstrações Alternativas e Re-Demonstrações na Produção e no Ensino de Matemática**. JIEEM v.13, n.2, p. 203-210, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n2p203-210>>.
- 3 BORTLOSSI, Humberto José; CUSTÓDIO, Lis Ingrid Roque Lopes; DIAS, Suely Machado Meireles Dias. **Uma Versão Interativa da Enciclopédia dos Centros do Triângulo**. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/268291987_UMA_VERSAO_INTERATIVA_DA_ENCICLOPEDIA_DOS_CENTROS_DO_TRIANGULO_OS_CENTROS_DO_TRIANGULO>.
- 4 BORTLOSSI, Humberto José; FIGUEIREDO, José Osorio de. **Coordenadas Baricêntricas: Uma Introdução com Ênfase na Geometria Moderna do Triângulo** Rio de Janeiro, RJ: 2017. Disponível em: <<http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/arquivo/2017.1/cms/cms-coordenadas-baricentricas.pdf>>.
- 5 CARROLL, Lewis. **Alice no país das maravilhas**. 2. ed. - Jandira, SP: Ciranda Cultural, 2019.
- 6 CHEN, Evan. **Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads**. - MAA Press, EUA: 2016.
- 7 EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. - São Paulo: UNESP, 2009.
- 8 GÓMEZ, Jorge Joaquín Delgado; FRENSEL, Katia Rosenvald; CRISSAFF, Lhaylla dos Santos. **Geometria Analítica**. 2. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- 9 KIMBERLING, Clark. Central Points and Central Lines in the Plane of a Triangle. **Mathematics Magazine**, 67, 163-187, 1994.
- 10 KIMBERLING, Clark. Triangle Centers and Central Triangles. *Congressus Numerantium*, 129, **Winnipeg: Utilitas Mathematica Publishing, Inc**, 1998.

- 11 KIMBERLING, Clark. Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), 2008.
Disponível em: <<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>>
- 12 LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, César Augusto. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 3. 7. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- 13 MÖBIUS, August Ferdinand. **Der barycentrische Calcul**. - Leipzig: J. A. Barth, 1827.
- 14 MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. 2. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2022.
- 15 PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. - Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- 16 SILVA, Bernardo Camargo da. S. **Além dos Pontos Notáveis: Identificação e Propriedades dos Centros do Triângulo**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília. p. 108. Brasília, 2020.
Disponível em: <https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/39015/1/2020_BernardoCamargodaSilva.pdf>.
- 17 YÁVAR, Javiera. “Arte e Arquitetura: CARA, uma série de arquitetos ilustrados com a técnica de triangulação” [Arte y Arquitectura: CARA, una serie de arquitectos ilustrados con la técnica de la triangulación] 13 jul 2014. ArchDaily Brasil. Disponível em: <<https://www.archdaily.com.br/br/623904/arte-e-arquitetura-cara-uma-serie-de-arquitetos-ilustrados-com-a-tecnica-de-triangulacao>>. Acessado em: 20 mar 2023.