



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE –
PROFMAT**

JOVENILSON MACEDO ALENCAR

**UMA PROPOSTA DA UTILIZAÇÃO DO TEOREMA DE PICK PARA
ESTIMAR A VEGETAÇÃO NATIVA PERDIDA EM ÁREAS
DESMATADAS DO VALE DO SÃO FRANCISCO PERNAMBUCANO**

JUAZEIRO

2023

JOVENILSON MACEDO ALENCAR

**UMA PROPOSTA DA UTILIZAÇÃO DO TEOREMA DE PICK PARA
ESTIMAR A VEGETAÇÃO NATIVA PERDIDA EM ÁREAS
DESMATADAS DO VALE DO SÃO FRANCISCO PERNAMBUCANO**

Trabalho apresentado a Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Ma. Tuanny da Silva Maciel

JUAZEIRO

2023

A368p Alencar, Jovenilson Macedo
Uma proposta da utilização do teorema de Pick para estimar a vegetação nativa perdidas em áreas desmatadas do Vale do São Francisco pernambucano / Jovenilson Macedo Alencar. - Juazeiro-BA, 2023.
xv, 90 f.: il; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2023.

Orientadora: Prof^a. Tuanny da Silva Maciel

1. Geometria plana 2. Matemática - estudo e ensino. I. Título. II. Maciel, Tuanny da Silva. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 516.05

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro. CRB - 5 / 1369.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE –
PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

JOVENILSON MACEDO ALENCAR

UMA PROPOSTA DA UTILIZAÇÃO DO TEOREMA DE PICK PARA
ESTIMAR A VEGETAÇÃO NATIVA PERDIDA EM ÁREAS
DESMATADAS DO VALE DO SÃO FRANCISCO PERNAMBUCANO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovado em: 16 de junho de 2023.

Banca Examinadora

Prof^a. Ma. Tuanny da Silva Maciel
Orientadora - PROFMAT/UNIVASF

Prof^a. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira
Examinadora interna – PROFMAT/UNIVASF

Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior
Examinador externo – UEPB

Dedico esse trabalho à minha família e a todos os professores que, em algum momento da minha vida até aqui, deixaram suas contribuições.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela força para perseverar e vencer todos os desafios até a realização deste objetivo.

A todos os professores do PROFMAT/UNIVASF que buscaram sempre contribuir da melhor maneira possível com seus conhecimentos.

A minha orientadora, professora Ma. Tuanny da Silva Maciel, pelo zelo, paciência e dedicação na orientação desta pesquisa.

Aos meus pais, Isabel e Diomar, e irmãos (Deilson, Gilson e João) pelos esforços que tanto já fizeram até aqui e ensinamentos.

Aos meus amigos do mestrado (Erick, Ewando, Lucileia, Joefson, Olimpio) que tanto me incentivaram e contribuíram nessa jornada.

"A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isso fica sendo a minha última e mais elevada descoberta."

Isaac Newton.

RESUMO

Este estudo tem por interesse trabalhar o teorema de Pick como um aliado da Educação Ambiental. É sabido que a Caatinga caminha a passos largos para a desertificação. Documentos oficiais evidenciam a necessidade da Educação Ambiental, como é o caso da BNCC e da lei nº 9.795/99, essa última que, dentre outras coisas, estabelece a Educação Ambiental em todos os níveis do processo educativo. Tendo em vista esses dois aspectos (a Caatinga que vem sendo destruída em larga escala e Educação Ambiental que busca entre outras coisas princípios como a sustentabilidade) esse estudo buscou unir conceitos matemáticos e ambientais. Para tanto, foram feitas pesquisas bibliográficas com o objetivo de caracterizar o bioma local, a Caatinga, e em seguida trabalhar o teorema Pick. É feita a apresentação e demonstração do referido teorema e em seguida efetuado o cálculo de área de figuras planas, das simples as irregulares. Após esse momento foi feito o cálculo de áreas de alguns lugares tradicionais de Petrolina-PE e feito a comparação com o resultado do *Google maps*, na qual foi constatado que os valores foram satisfatoriamente próximos. Por fim, foram trabalhadas propostas didáticas que buscavam estimar a quantidade de vegetação nativa perdida da Caatinga em áreas selecionadas no Vale do São Francisco pernambucano. Foi também estimada a área total da copa de algumas das espécies presentes na área selecionada para os cálculos. Com isso, esse estudo atingiu seu objetivo, que era apresentar maneiras de trabalhar problemas envolvendo área com uma abordagem voltada para a preservação do meio ambiente por meio do teorema de Pick e fornecer meios para o cálculo da vegetação nativa perdida em áreas desmatadas do Vale do São Francisco pernambucano.

Palavras-chave: Teorema de Pick. Educação Ambiental. Caatinga.

ABSTRACT

This study is interested in working Pick's theorem as an ally of Environmental Education. It is known that the Caatinga is heading towards desertification. Official documents show the need for Environmental Education, such as the BNCC and Law No. 9795/99, the latter which, among other things, establishes Environmental Education at all levels of the educational process. In view of these two aspects (the Caatinga that has been destroyed on a large scale and Environmental Education that seeks, among other things, principles such as sustainability) this study sought to unite mathematical and environmental concepts. For this purpose, bibliographic research was carried out with the objective of characterizing the local biome, the Caatinga, and then working on the Pick theorem. The aforementioned theorem is presented and demonstrated and then the area of flat figures is calculated, from simple to irregular. After that moment, the calculation of areas of some traditional places of Petrolina-PE was made and a comparison was made with the result of *Google maps*, in which it was verified that the values were satisfactorily close. Finally, didactic proposals were worked on that sought to estimate the amount of native vegetation lost from the Caatinga in selected areas in the São Francisco Valley of Pernambuco. The total crown area of some of the species present in the area selected for the calculations was also estimated. With that, this study achieved its objective, which was to present ways of working problems involving area with an approach focused on the preservation of the environment through Pick's theorem and provide means for calculating the native vegetation lost in deforested areas of the Vale do Pernambuco San Francisco.

Key-words: Pick's Theorem. Environmental Education. Caatinga.

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1 - Aplicação do método da exaustão para o cálculo da área do círculo por meio de triângulos.....	26
Figura 2 - Triângulo retângulo.....	28
Figura 3 - Quadrado	28
Figura 4 - Retângulo.....	29
Figura 5 - Círculo.....	29
Figura 6 - Linha poligonal.....	32
Figura 7 - Polígonos e não polígonos	33
Figura 8 - Polígonos simples e não simples	33
Figura 9 - Diferença entre fronteira e interior de um polígono.....	33
Figura 10 - Rede de pontos	34
Figura 11 - Triângulos e paralelogramos fundamentais e não-fundamentais ...	34
Figura 12 - Construção do paralelogramo fundamental	35
Figura 13: Paralelogramos fundamentais justapostos	36
Figura 14 - Triângulos e paralelogramos fundamentais por retas paralelas	36
Figura 15 - Representação do caso de m e n não forem primos entre si.....	37
Figura 16 - Representação do triângulo ABC	38
Figura 17 - Decomposição de um polígono convexo em $n- 2$ triângulos.....	39
Figura 18 - Possibilidades do polígono P	40
Figura 19 - Decomposição do triângulo ABC	41
Figura 20 - Representação dos pontos B' e B''	43
Figura 21 - ângulos dos pontos internos de P.....	43
Figura 22: Página inicial do site do Geogebra.....	46
Figura 23 - Interface de visualização 2D do Geogebra	47
Figura 24 - Interface de visualização 3D do Geogebra	47
Figura 25 - Rede de pontos (Geogebra)	53
Figura 26 - Polígonos sobre a rede de pontos.....	53
Figura 27 - Polígonos irregulares	57
Figura 28 - Praça Dom Malan	60
Figura 29 - Janela com opções de configuração de visualização do Geogebra	60
Figura 30 - Interface do Geogebra	61

Figura 31 - Janela de configuração	61
Figura 32 - Interface do Geogebra (inserir imagem)	61
Figura 33 - Ferramenta "Distância, comprimento ou Perímetro" e medição do segmento de escala	62
Figura 34 - Opções de configuração da imagem.....	62
Figura 35 - Configuração da imagem	62
Figura 36 – Ferramenta “Ponto” e rede de pontos desenhada sobre a área de interesse.....	63
Figura 37 - Polígono ajustado à área da praça Dom Malan com vértices sobre a rede de pontos.....	64
Figura 38 - Cálculo da área pelo <i>Google maps</i>	65
Figura 39 - Parque Josepha Coleho com a rede de pontos e o polígono delimitador	67
Figura 40 - Cálculo da área do Parque Josepha Coelho pelo <i>Google maps</i>	68
Figura 41 - Área de interesse com a escala do <i>Google maps</i> em 100 m.....	71
Figura 42 - Área de interesse na rede de pontos com o polígono ajustado e medição de ajuste da escala	71
Figura 43 - Cálculo da área do terreno pelo <i>Google maps</i>	72

LISTAS DE TABELAS

Tabela 1 – Modelo para preenchimento da atividade 1	55
Tabela 2 - Valores esperados da atividade 1	55
Tabela 3 - Valores esperados da atividade 2	57
Tabela 4 - Valores esperados da atividade 3	64
Tabela 5 - Cálculo da área da praça Dom Malan.....	64
Tabela 6 - Valores esperados para atividade 4	67
Tabela 7 - Cálculo da área com teorema de Pick.....	72
Tabela 8 - Tabela com estimativas da vegetação perdida conforme dados do Anexo B.....	73
Tabela 9 - Estimativa da vegetação perdida e respectiva copa (área - m ²)	75
Tabela 10 - Espécies com suas respectivas quantidades inventariadas no Campus de Ciências Agrárias da UNIVASF, Petrolina PE.....	88
Tabela 11 - Espécies com suas respectivas quantidades inventariadas no Campus de Ciências Agrárias da UNIVASF, Petrolina PE e dados da área da copa de algumas da espécies	89

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Algumas espécies da Caatinga e suas principais características ..82

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EMBRAPA	Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária
MM	Modelagem Matemática
ONU	Organização das Nações Unidas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TD	Tecnologias Digitais
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 A CAATINGA	21
2.1 CARACTERÍSTICAS DA CAATINGA.....	21
2.2 ALGUMAS ESPÉCIES NATIVAS DA CAATINGA	22
2.3 IMPORTÂNCIA DA CONSERVAÇÃO E RECUPERAÇÃO DA CAATINGA.....	23
3 BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE O SURGIMENTO E CÁLCULO DE ÁREA EM DIFERENTES MOMENTOS DA HISTÓRIA	25
3.1 PRINCIPAIS FIGURAS GEOMÉTRICAS TRABALHADAS DURANTE O ENSINO BÁSICO.....	27
3.1.1 Triângulo	28
3.1.2 Quadrado	28
3.1.3 Retângulo.....	29
3.1.4 Círculo	29
4. TEOREMA DE PICK	31
4.1 O TEOREMA.....	31
4.2 CONCEITOS BÁSICOS PARA A SUA DEMONSTRAÇÃO	32
4.2.1 Polígonos	32
4.2.2 Rede no plano.....	34
4.2.3 Triângulos e paralelogramos fundamentais	34
4.2.4 Decomposição de um polígono	38
4.3 A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PICK	42
5 TECNOLOGIAS DIGITAIS E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	44
5.1 GEOGEBRA.....	45
6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	48
7 PROPOSTAS DE ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK	51
7.1 CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS COM O TEOREMA DE PICK.....	51

7.1.1 Plano de aula/planejamento	51
7.2 CÁLCULO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS COMPLEXAS COM O TEOREMA DE PICK.....	56
7.2.1 Plano de Aula/planejamento	56
7.3 TEOREMA DE PICK NO CÁLCULO DE ÁREA DE LUGARES TRADICIONAIS DE PETROLINA.....	58
7.3.1 Cálculo da área da Praça Dom Malan por meio do teorema de Pick. ..58	
7.3.1.1 Plano de aula/planejamento:	58
7.3.2 Cálculo da área do Parque Josepha Coelho por meio do teorema de Pick	66
7.3.2.1 Plano de aula/planejamento	66
8 TEOREMA DE PICK NO CÁLCULO DE ÁREAS DE TERRENOS DESMATADOS E ESTIMATIVAS DA VEGETAÇÃO NATIVA DO VALE DO SÃO FRANCISCO PERNAMBUCANO	69
8.1 CÁLCULO DE UMA ÁREA DESMATADA DO VALE DO SÃO FRANCISCO E ESTIMATIVA DA VEGETAÇÃO PERDIDA.....	69
8.1.1 Plano de aula/planejamento	69
8.1.2 Discutindo e debatendo a atividade	74
8.2 Cálculo de uma área desmatada do Vale do São Francisco, estimativa da vegetação perdida e as respectivas áreas das copas de algumas espécies	75
9 CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
REFERÊNCIAS	79
ANEXOS	82
ANEXO A – QUADRO COM ALGUMAS DAS ESPÉCIES DA CAATINGA E SUAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS	82
ANEXO B – TABELA COM A RELAÇÃO DE ESPÉCIES NATIVAS DA CAATINGA DO VALE DO SÃO FRANCISCO E SUAS RESPECTIVAS QUANTIDADES MÉDIA POR HECTÁRE	88

ANEXO C – TABELA COM A RELAÇÃO DE ESPÉCIES NATIVAS DA CAATINGA DO VALE DO SÃO FRANCISCO COM SUAS RESPECTIVAS QUANTIDADES MÉDIA POR HECTÁRE E ALGUNS VALORES DA ÁREA DE SUAS COPAS.....89

1 INTRODUÇÃO

A Caatinga carrega o título de bioma exclusivamente brasileiro, sendo esse o único que possui tal status. Segundo Sena (2011, p.13), esse bioma ocupa 10% do território nacional, sendo que do Nordeste ele é responsável por cobrir 70% de seu território. Mesmo que sem especialidade técnica e científica, muitos idosos, que vivem nesse bioma, a partir da vivência, costumam afirmar que a caatinga se tornará deserto. E, é o que se verifica em visitas as áreas rurais, na qual é possível notar vastas aberturas/espços na vegetação. Muitos lugares já estão apenas com o xique-xique, um cacto típico da caatinga, sendo esse um dos únicos que ainda conseguem ocupar os espaços deixados pela vegetação nativa. Segundo Drumond et al. (2016, p. 6), mais de 50% da área já está alterada ou comprometida.

De acordo Sena (2011, p. 8), a Caatinga é o bioma brasileiro que mais vai sofrer com as mudanças climáticas e o aquecimento global, podendo deixar de ser semiárida para se tornar árida, ou seja, o seu clima se assemelharia aos de desertos, caso medidas não forem tomadas para contornar tal situação. Tendo em vista esse cenário apresentado, a busca por alternativas que evitem/minimizem a desertificação local justifica o desenvolvimento desse trabalho, na qual, como está descrito nos parágrafos seguintes, une conceitos matemáticos e a conscientização quanto a preservação do meio ambiente.

Embora a Matemática seja de fundamental importância e que tenha desempenhado papel chave no desenvolvimento da humanidade, muitas pessoas têm uma certa aversão. Muito disso, vem do ensino de Matemática aos moldes tradicionais, na qual excessivas listas de exercícios e repetições de conteúdos são as principais maneiras de ensino, fazendo com que muitos criassem essa ideia de que esse conhecimento é somente para “escolhidos”. Martins (2009, p. 2730), coloca não apenas a Matemática, mas toda a escola como uma instituição em crise devido as práticas ditas tradicionais. Assim, ao utilizar práticas inovadoras, como, por exemplo, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e a Modelagem Matemática (MM), como também apresentar os conteúdos matemáticos de maneira lúdica, são algumas das maneiras de contornar os efeitos deixados pelo ensino dito tradicional.

Esse trabalho foi desenvolvido por meio de uma abordagem voltada para a Modelagem Matemática aliada as TDIC. Segundo Bertone; Bassanezi e Jafelice (2019,p. 9-10) “a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia

teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la”. Para Kaminski e Boscarioli (2018, p. 1540), uma das maneiras de trabalhar a Modelagem Matemática em qualquer contexto de ensino é por meio da inserção das TDIC. Ainda segundo os autores, as TDIC enriquecem os conteúdos curriculares.

Diante disso, tendo em vista as dificuldades que os alunos geralmente apresentam quando se deparam com o conceito de área, no qual também costumam confundir com o de perímetro, esse trabalho busca abordar o conceito de área por meio do teorema de Pick, que permite o cálculo de área por meio da contagem de pontos possibilitando calcular áreas de uma vasta gama de figuras sem implicar no acúmulo de fórmulas matemáticas. Esse teorema é um poderoso aliado no cálculo de áreas, das mais simples as mais complexas. O referido teorema permite calcular áreas de regiões irregulares, por exemplo, sem a necessidade de conhecer as medidas dos lados de tais regiões.

Dito isso, esse estudo foi desenvolvido a partir da seguinte questão de pesquisa: É possível estimar a quantidade de árvores perdidas da mata nativa em áreas desmatadas no Vale do São Francisco Pernambucano com o suporte das TDIC e do teorema de PICK e, com isso, trabalhar uma matemática voltada para a educação ambiental?

Para tanto, o seguinte objetivo geral foi estabelecido: apresentar maneiras de trabalhar problemas envolvendo área com uma abordagem voltada para a preservação do meio ambiente por meio do teorema de Pick e fornecer meios para o cálculo da vegetação nativa perdida em áreas desmatadas do Vale do São Francisco Pernambucano.

Além do objetivo principal, foram traçados os seguintes objetivos específicos: trabalhar problemas de cálculo de área de figuras simples e complexas por meio do teorema de Pick; trabalhar exemplos práticos do cálculo de área por meio do teorema de Pick, em especial para região do Vale do São Francisco pernambucano; trabalhar exemplos práticos do cálculo de área por meio do teorema de Pick, em especial para região do Vale do São Francisco pernambucano. Sendo assim, essa pesquisa se caracteriza como sendo exploratória com levantamentos bibliográficos. Com isso, além de desenvolver habilidades relacionadas ao cálculo de área, trabalha a questão do meio ambiente, que é posto como um tema transversal nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), enfatizando sua importância desde as séries do fundamental. Os

PCN, tendo em vista os agravantes da sociedade causados por questões relacionadas ao meio ambiente, destacam:

Nesse contexto, fica evidente a importância de se educar os futuros cidadãos brasileiros para que, como empreendedores, venham a agir de modo responsável e com sensibilidade, conservando o ambiente saudável no presente e para o futuro; como participantes do governo ou da sociedade civil, saibam cumprir suas obrigações, exigir e respeitar os direitos próprios e os de toda a comunidade, tanto local como internacional; e, como pessoas, encontrem acolhida para ampliar a qualidade de suas relações intra e interpessoais com o ambiente tanto físico quanto social. (BRASIL, 1997, p. 23)

Nessa mesma perspectiva, a BNCC ao definir as dez competências gerais para a Educação Básica destaca uma com o objetivo voltado para a preservação da natureza (BRASIL, 2018, p, 9). Essa ação da BNCC mostra um alinhamento com os objetivos da Agenda 2030 da Organização das Nações Unidas (ONU), que estabeleceu 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Além das competências definidas pela BNCC que trata da educação socioambiental, a lei nº 9.795/99 estabelece a Educação ambiental garantindo que seja trabalhada em todos os níveis e modalidades do processo educativo, em caráter formal e não-formal.

A elaboração desse estudo vai de encontro ao que os documentos oficiais defendem, uma vez que no decorrer dessa pesquisa buscou-se unir temas matemáticos a temas ambientais, contribuindo para a conscientização envolvendo tal tema e a importância da conservação dos ecossistemas e, em especial, o bioma Caatinga.

Esta pesquisa está dividida em 9 seções. Nessa primeira seção é feita a introdução sobre quais serão as principais ideias desenvolvidas no decorrer desse trabalho. Na segunda seção é feita uma contextualização sobre o bioma Caatinga, apresentando suas principais características; algumas das espécies nativas, além de trazer alguns dados sobre a importância de se conservar com urgência as áreas ainda existentes que não sofreram desmatamento. Na terceira seção é abordada de maneira sucinta alguns dos momentos da história que aconteceram contribuições fundamentais para o desenvolvimento do cálculo de área.

Já na quarta seção é trabalhado o teorema de Pick, abordando alguns conceitos importantes, bem como a demonstração do teorema. A quinta seção é voltada para as Tecnologias Digitais e a Educação Matemática. Na sexta seção é feita a explanação dos procedimentos metodológicos, destacando, por exemplo, o tipo de pesquisa e os aspectos quantitativos e qualitativos presentes nesse estudo. Na sétima seção são apresentadas algumas propostas didáticas envolvendo o teorema de Pick,

desde o cálculo de figuras, bem como a aplicação do teorema no cálculo de áreas de locais tradicionais na cidade de Petrolina com o auxílio das tecnologias digitais, como o *Google maps*.

Na oitava seção foram abordadas as propostas didáticas que são o objetivo principal desse estudo. Nas propostas didáticas da referida seção foi abordado o cálculo de área de lugares desmatados do Vale do São Francisco pernambucano e efetuado estimativas da vegetação perdida nos referidos locais. Para efetuar essas estimativas foi utilizado um estudo de levantamento florístico realizados no *Campus* de Ciências Agrárias da Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF). Além do referido estudo, foi utilizado outro feito anteriormente na região que mensurava a copa de algumas espécies. Com isso, nas propostas didáticas foram trabalhados com o cálculo de área, estimativas da vegetação perdida e a área das copas das árvores. Por fim, nas considerações finais, são feitas as reflexões acerca do desenvolvimento deste trabalho.

2 A CAATINGA

2.1 CARACTERÍSTICAS DA CAATINGA

O bioma Caatinga carrega inúmeras características que o faz único no mundo. Esse bioma, que está inserido num contexto de clima semiárido, é considerado a região semiárida mais povoada do mundo. Segundo Sena (2011, p.12), termos como Caatinga, Sertão e Semiárido costumam erroneamente ser utilizados como sinônimos, a autora destaca:

Porém, semiárido refere-se ao clima dessa região. Caatinga é um termo mais abrangente que envolve clima, relevo, solos, vegetação e fauna. Já o sertão, refere-se a qualquer região distante de grandes centros urbanos, com baixa infraestrutura e baixa densidade demográfica. Além do Nordeste, termo sertão também é utilizado na região centro-oeste. (SENA, 2011, p.12)

O clima predominante da caatinga, como já destacado, é o semiárido, que por sua vez tem uma média de precipitação pluviométrica de aproximadamente 800 mm, na qual em anos chuvosos esse número pode chegar a 1000 mm anual, mas em períodos de seca severa sua precipitação fica em apenas 200 mm no acumulado do ano (SENA, 2011, p. 14). Essa característica faz com que existam apenas dois períodos na Caatinga: o seco e o chuvoso.

A Caatinga possui uma biodiversidade rica, com um grande número de espécies endêmicas, seja de plantas, aves, peixes, anfíbios invertebrados ou mamíferos. Comprovando a importância e as características que tornam a Caatinga um local único, Tabareli e Silva (apud SENA, 2011, p. 45) destacam os seguintes números de sua biodiversidade:

A variedade da composição vegetal – das mais abertas e baixas, com árvores de 1 m de altura até as mais altas e fechadas, com árvores de até 20 m – somam 932 espécies de plantas, das quais 1/3 (318) são endêmicas;
Os mamíferos representam 143 espécies, sendo 19 endêmicas, como o mocó e o tatu-bola;
São 510 espécies de aves, o que equivale a um terço do total de aves do Brasil;
Entre os répteis são 116 espécies e de anfíbios são 51 no total;
Os peixes somam 240 espécies, sendo 136 endêmicas.

Números como esses mostram a riqueza da biodiversidade da Caatinga e, associado ao seu alto endemismo, evidenciam a importância desse bioma que precisa ser melhor protegido diante das ameaças de destruição por parte das ações do homem.

O clima semiárido não é exclusividade da Caatinga, existindo outros lugares do planeta que apresentam precipitações baixas e irregulares o que também faz destes lugares semiárido, como, por exemplo, regiões no Chile, África, Austrália e Estados Unidos. Mas, a Caatinga se apresentou como sendo um lugar único, na qual as espécies encontradas aqui são diferentes de espécies encontradas em outros locais com clima parecido, como também as espécies daqui apresentavam uma diversidade bem maior (SENA, 2011, p. 19).

Mas o que fez a Caatinga ser tão especial? A autora supracitada afirma que eventos relacionados ao clima, como grandes variações de temperatura (muito quente e muito frio), que ocorreram há milhares de anos fizeram com que a vida se estabelecesse aqui de forma diferente e peculiar. Para a grande diversidade de espécies, a autora afirma que isso está relacionado a variedade de rochas existentes que possibilitou a formação de diferentes solos na Caatinga e o clima com longos períodos secos fez com que apenas as plantas “selecionadas” prosperassem, como também o contato com biomas vizinhos, como o cerrado, floresta amazônica e atlântica, possibilitaram todo um cenário de condições específicas para a Caatinga, o que possibilitou surgir diversas espécies endêmicas.

2.2 ALGUMAS ESPÉCIES NATIVAS DA CAATINGA

Como já mencionado, a Caatinga possui cerca de 932 espécies vegetal. Nesta subseção são relacionadas algumas dessas espécies que podem ser utilizadas em programas de restauração florestal. Para relação e descrição das referidas espécies foi consultado o trabalho de Drumond et al. (2016) e destacadas dez espécies que são de grande importância para o sertão, são elas: O Angico, a Aroeira, a Baraúna, o Facheiro, o Juazeiro, o Mandacaru, a Maniçoba, o Sete-cascas, a Umburana-de-cambão e o Umbuzeiro. A escolha de tais espécies justifica-se pelas suas características, sendo tais espécies de grande valia para o sertanejo. Em anexo (ANEXO A) o leitor pode encontrar mais algumas especificações sobre as espécies mencionadas.

As espécies destacadas são apenas alguns exemplos da riqueza presente nesse bioma. O estudo utilizado para elaboração do Quadro 1 (ANEXO A) teve por objetivo servir de subsídio a programas de reflorestamento e conservação da Caatinga por meio da caracterização e usos das espécies do respectivo bioma, por isso sua escolha para a descrição das espécies selecionadas.

2.3 IMPORTÂNCIA DA CONSERVAÇÃO E RECUPERAÇÃO DA CAATINGA

A Caatinga é um dos biomas mais ameaçados do Brasil, com grande parte desse bioma já tendo sido alterado por atividades humanas, como a pecuária, agricultura, mineração e produção de lenha (SENA; SILVA, 2012, p. 23). Esse bioma, como mencionado, está localizado numa região de clima semiárido, caracterizado por baixos índices pluviométricos. Segundo os autores supracitados, a Caatinga está caminhando a passos largos para se tornar árida, clima semelhante aos de desertos, o que impactará diretamente na produção de alimentos, oferta de água e sobrevivência daqueles que fazem parte do semiárido mais povoado do mundo.

Ainda segundo os autores, 62% das áreas da Caatinga estão susceptíveis a processos de desertificação. O processo de desertificação é caracterizado pela perda do solo de sua capacidade produtiva, tornando sem proveito nenhum para produção de alimentos, sendo esse processo irreversível (SENA; SILVA, 2012, p. 24).

Os autores enfatizam que o clima semiárido (pouca precipitação) e os solos rasos associados ao manejo tradicional da terra favorecem estágios avançados de degradação ambiental que podem resultar na desertificação. Ainda segundo os autores, os seguintes fatores são responsáveis pela desertificação:

- Pisoteio de animais de grande porte, como o gado, compactua o solo e diminui a capacidade de infiltração da água;
- Pastoreio intensivo, o que dificulta a recuperação da vegetação;
- Retirada da cobertura vegetal/desmatamento;
- Atividades relacionadas a agricultura sem o devido cuidado do solo contribuem para o empobrecimento dos solos e deixam infértil.

Muito se fala em conservação, mas, afinal de contas, o que significa conservação? Segundo Sena e Silva (2012, p. 28) o conceito de conservação está relacionado ao uso racional dos ecossistemas. Segundo os autores a conservação promove a proteção e a recuperação de ambientes naturais. Ainda de acordo com os autores, as áreas de Caatinga conservada desempenham importantes funções, tais como:

- Manutenção das nascentes e cursos de rios;
- Formação e fertilidade dos solos, necessário para a produção de alimentos;

- Regulação do regime de chuvas;
- Refúgio da fauna;
- Fixação de carbono atmosférico, diminuindo o efeito estufa.

A recuperação de áreas degradadas, devido as características do clima e solo da região, é extremamente urgente, uma vez que toneladas de solo são perdidas todos os anos pela falta de cobertura vegetal, diminuindo cada vez mais a fertilidade e contribuindo para o processo de desertificação (SENA; SILVA, 2012, p. 32). Os autores ainda destacam que para restaurar/recuperar e manter 100 hectares por um ano custa cerca de R\$ 60.000,00, enquanto para manter os mesmos 100 hectares por um ano de mata natural custam apenas R\$ 6.250,00, evidenciando a importância da conservação de áreas naturais de forma preventiva.

3 BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO SOBRE O SURGIMENTO E CÁLCULO DE ÁREA EM DIFERENTES MOMENTOS DA HISTÓRIA

O desenvolvimento da Matemática sempre esteve relacionado a problemas que necessitavam de soluções. A geometria teve suas primeiras aplicações, mesmo que de maneira informal, desde os primitivos, tendo surgido da simples observação e da capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos, na qual a noção de distância foi um dos primeiros conceitos a serem desenvolvidos (EVES; 1992, p. 1).

Ainda segundo o autor, a geometria teve seu surgimento no Egito, na qual a motivação de tal acontecimento foi a demarcação de terras às margens do rio Nilo, que constantemente sofria inundações. É atribuído ao povo egípcio e babilônico a base para o desenvolvimento da geometria, mas Eves (1992, p. 7) destaca que:

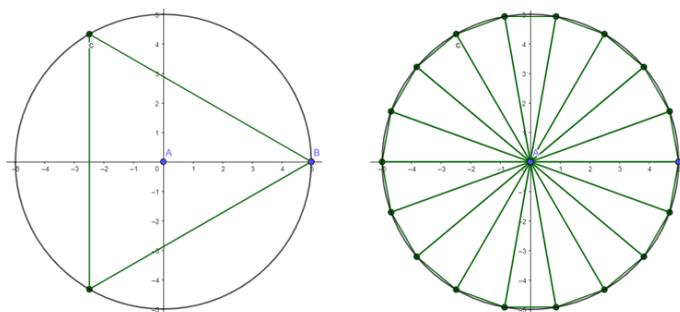
As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. Novos povos passaram ao primeiro plano, e os desenvolvimentos posteriores da geometria foram passados aos gregos, que transformaram a matéria em algo muito diferente do conjunto de conclusões empíricas produzido por seus predecessores.

Na Grécia, importantes nomes da Matemática vão surgir, sendo estes alguns dos que se destacaram: Tales de Mileto; Pitágoras; Zenão de Eleia; Euclides; Arquimedes. Tales de Mileto (640-564 a.C) foi o responsável por iniciar o período da rica matemática grega, sendo atribuído a Tales como sendo o primeiro a demonstrar teoremas geométricos, que, séculos mais tarde, seriam incluídos na obra *Os Elementos* de Euclides (MLODINOW, 2005 apud PIASESKI, 2010, p.10). Ainda de acordo com o autor, Pitágoras, outro matemático com destaque na história, não só aprendeu a geometria egípcia, como também foi o primeiro grego a aprender os hieróglifos egípcios. Suas contribuições são lembradas em um dos mais famosos teoremas, o teorema de Pitágoras, esse que relaciona o quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo com a soma dos quadrados dos catetos.

Quando se fala do desenvolvimento do cálculo de área tem-se que falar de Zenão de Eleia (450 a.C.), que desenvolveu o que ficou conhecido como método da Exaustão (ROSA, 2015, p. 10), método que utiliza da inscrição e circunscrição de polígonos mais simples para determinar a área de figuras tidas como complexas, como exemplo dessas figuras complexas para a época está o círculo, conforme pode

ser visto na figura 1.

Figura 1 - Aplicação do método da exaustão para o cálculo da área do círculo por meio de triângulos



Fonte: O autor (2023)

Na medida que a geometria desenvolvia, matemáticos buscavam apresentá-la como uma única cadeia de proposições baseadas em algumas definições e suposições, sendo Euclides, na sua obra *Os Elementos*, o responsável por tamanha proeza ao compilar 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega (EVES, p. 09, 1992).

Arquimedes(287-212 a.C.), considerado um dos maiores matemáticos da história, desenvolveu importantes trabalhos relacionados ao cálculo de áreas, principalmente relacionados ao de figuras mais complexas (ROSA,2015, p. 16). A autora destaca alguns desses trabalhos deixados por Arquimedes:

- Mensuração do círculo;
- Livro de lemas;
- Quadratura da parábola;
- Sobre conóides e esferóides.

O período da rica Matemática grega chegou ao fim com o domínio do Império Romano, no qual fez da Grécia uma província no ano de 146 a.C (EVES, 1992, p. 12). Ainda de acordo com o autor, mesmo após a queda do Império Romano no séc. V, seguindo até o séc. XI, a Europa viveu a chamada alta Idade Média europeia. Nesse período a Europa ocidental desceu a níveis muito baixos, com o ensino quase não existindo mais e por pouco o conhecimento grego não foi perdido.

Depois desses eventos, tendo acontecido ainda o século da peste (sec. XIV), na qual foi improdutivo, o período de maior destaque de produção para a Matemática ficou para o séc. XVI e XVII. A Europa, durante o século XVI e XVII, viveu a época

dos “indivisíveis”, ideia bastante explorada, principalmente por nomes como Johannes Kepler (1571-1630) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) que utilizaram desse raciocínio para formular suas teorias (ROSA, 2015, p. 32). Segundo a autora, Kepler entendia que a área de uma figura era composta por figuras indivisíveis e essas são em quantidade infinita. Já Cavalieri explora o conceito de indivisíveis para comparar áreas. Para ele existe uma correspondência biunívoca entre os indivisíveis de duas figuras dadas, tal que se os elementos que compõe as duas figuras tivessem a mesma razão, então as áreas das figuras em questão são iguais (ROSA, 2015, p. 33). Dessa abordagem de Cavalieri com os indivisíveis surge o famoso princípio de Cavalieri. Pierre de Fermat (1601-1665) se debruçou em determinar a quadratura da curva x^n , sendo n um inteiro positivo.

Ainda no século XVII aconteceu uma das mais importantes descobertas matemáticas, o Cálculo Integral e Diferencial, que teve como responsáveis Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), essa descoberta revolucionou o cálculo de áreas, possibilitando o cálculo dos mais diversos tipos de curvas (ROSA, 2015, p. 45).

3.1 PRINCIPAIS FIGURAS GEOMÉTRICAS TRABALHADAS DURANTE O ENSINO BÁSICO

O conceito de área é trabalhado na educação básica desde os anos iniciais. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca na parte de grandezas e medidas para o ensino fundamental (anos iniciais):

Além disso, devem resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) e capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, a transformações entre unidades de medida padronizadas mais usuais. (BRASIL, 2018, p. 273)

O livro didático, material de apoio mais utilizado durante as fases da educação básica, tem a tradição de abordar o cálculo de área somente de figuras mais simples, poligonais (triângulo, quadrado, retângulo, etc) e figuras planas como a circunferência, sem abordar as figuras tidas como mais complexas (regiões irregulares e ou não poligonais) (OLIVEIRA, 2021, p. 24).

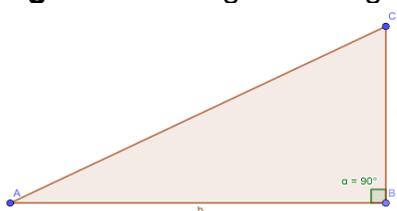
A seguir são apresentadas algumas das principais figuras trabalhadas durante

o ensino básico e suas respectivas expressões matemáticas utilizadas no cálculo da área. São apresentadas também suas definições, para tanto foi consultado o livro de Dolce e Pompeo (2013), Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria plana.

3.1.1 Triângulo

Dados três pontos, A, B e C , não colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ e \overline{BC} chama-se **triângulo ABC** (Figura 2).

Figura 2 - Triângulo retângulo



Fonte: O autor (2023)

A expressão matemática utilizada para o cálculo da área e dada por:

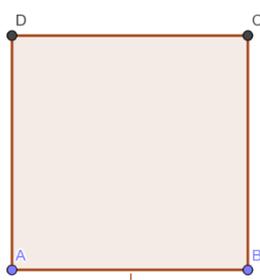
$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

onde b representa a medida da base e h a altura.

3.1.2 Quadrado

Define-se como quadrado um quadrilátero plano convexo que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes (Figura 3).

Figura 3 - Quadrado



Fonte: O autor (2023)

A expressão matemática utilizada para o cálculo da área é dada por:

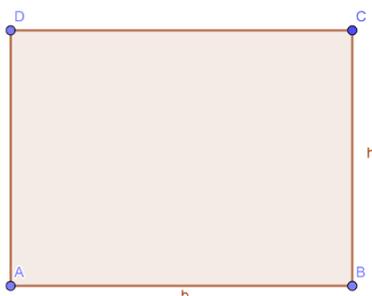
$$\text{Área} = l . l$$

onde l representa a medida do seu lado.

3.1.3 Retângulo

Define-se como retângulo um quadrilátero plano convexo que contém todos os quatro ângulos congruentes (Figura 4).

Figura 4 - Retângulo



Fonte: O autor (2023)

A expressão matemática utilizada para o cálculo da área é dada por:

$$\text{Área} = b . h$$

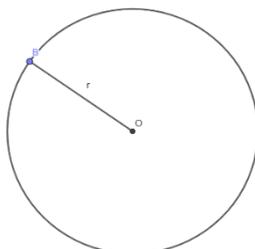
onde, b é a medida da base e h da altura.

3.1.4 Círculo

Define-se como círculo o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é menor ou igual a uma distância (não nula) dada. Dados um plano β , um ponto O de β e uma distância r , tem-se que o círculo (Figura 5) será todos os pontos que atenda a seguinte condição:

$$\text{Círculo de centro } O \text{ e raio } r = c(O, r) = \{P \in \beta \mid d_{p,o} \leq r\}$$

Figura 5 - Círculo



Fonte: O autor (2023)

A expressão matemática utilizada para o cálculo da área é dada por:

$$\text{Área} = \pi \cdot r^2$$

onde π é uma constante de valor aproximado 3,14 e r a medida do seu raio.

Algumas outras figuras planas, como os paralelogramos que não possuem todos os ângulos retos, são estudados por meio da equivalência de áreas planas, utilizando-se da decomposição de áreas de figuras tidas como mais difíceis por figuras que podem ser facilmente calculadas a sua área (BRASIL, 2018, p. 308). Na seção seguinte é abordado o teorema de Pick, que possibilita o cálculo de figuras planas, independentemente de sua forma, utilizando apenas contagem de pontos.

4. TEOREMA DE PICK

Nesta seção o objetivo será apresentar quem foi Georg Alexander Pick. Para tanto foram consultados os trabalhos acadêmicos de dissertação de Oliveira (2021) e Rêgo (2022). Na subseção seguinte é apresentado o teorema e na subseção 4.2, dividida em três, serão apresentados alguns conceitos necessários para a compreensão e demonstração do referido teorema. Por fim, na subseção 4.3, é feita a demonstração do teorema. Além dos trabalhos já mencionados anteriormente, no caso das definições e demonstração do teorema foi consultado o livro Lima (1991).

Georg Alexander Pick nasceu em 1859 na cidade de Viana, capital da Áustria. Recebeu de seus pais uma boa educação. Com 17 anos já publicava seu primeiro artigo científico. Em 1879, com 20 anos, já adquiria qualificação que lhe permitia lecionar Matemática e Física. No ano seguinte, 1880, em 16 de abril, George Pick concluiu seu doutorado. Seus estudos em Matemática foram bem amplos, com 67 artigos distribuídos entre tópicos relacionados a Álgebra Linear, Teoria dos Invariantes, Cálculo Integral, entre outros. De todos os seus trabalhos, certamente o mais lembrado é o seu teorema que carrega seu nome, o Teorema de Pick.

4.1 O TEOREMA

O Teorema de Pick, conforme Lima (1991, p.102), pode ser enunciado da seguinte maneira:

A área de um polígono cujo vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão:

$$A = \frac{b}{2} + I - 1,$$

onde b é o número de pontos que estão sobre as arestas do polígono e I é a quantidade de pontos que são internos ao polígono (pontos pertencentes ao polígono e que não estão na poligonal, ou seja, estão no interior).

O teorema de Pick permite o cálculo de figuras das mais simples, como também das tidas como complexas. Rêgo (2022, p. 22) em sua dissertação enfatiza que esse teorema por trabalhar com a malha quadriculada contribui para tornar o conceito de área mais palpável, algo que muitas vezes é confundido com o conceito de perímetro.

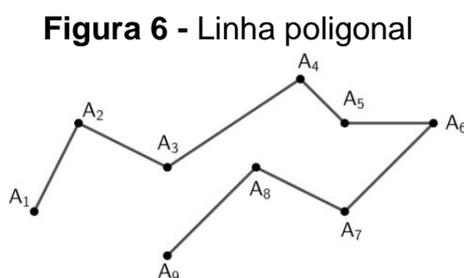
4.2 CONCEITOS BÁSICOS PARA A SUA DEMONSTRAÇÃO

Nesta subseção serão explanados alguns conceitos necessários para que seja possível apresentar o teorema principal do trabalho.

4.2.1 Polígonos

As primeiras definições, como segue nas subseções seguintes, são relacionados a conceitos sobre polígonos.

Definição 4.2.1.1: Uma poligonal é a figura formada pela sequência de pontos A_1, A_2, \dots, A_n e pela união dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ formados por esses pontos (Figura 6).

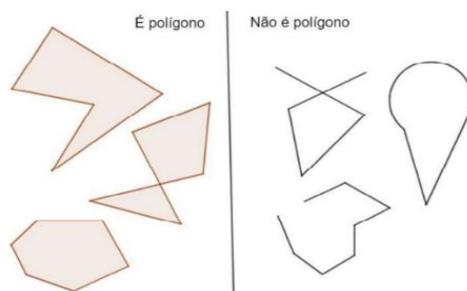


Fonte: Extraído de Lima Junior (2022, p. 19)

De acordo com Martins (2005, apud Gonçalves, 2021, p. 24), define-se um polígono como:

Definição 4.2.1.2: A região P de um dado plano α limitada pelos pontos $V=\{V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n\}$, na qual essa região é representada por $P = V_1V_2 \dots V_n$, sendo suas arestas V_nV_{n+1} , com $n = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ e aresta V_nV_1 , o que garante que polígono é uma poligonal fechada e, sendo uma poligonal, não pode ser uma figura com contornos “arredondados” (Figura 7).

Figura 7 - Polígonos e não polígonos

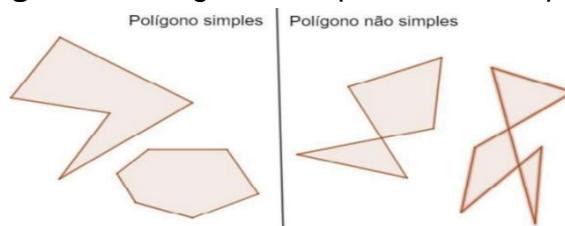


Fonte: Extraído de Gonçalves (2021, p. 25)

Ainda é possível fazer a classificação dos polígonos. Observe:

Definição 4.2.1.3: Um polígono é chamado de simples quando cada um de seus vértices é extremidade de apenas dois lados (Figura 8). Quando um polígono não é simples ele é chamado de complexo (RÊGO,2022, p. 13).

Figura 8 - Polígonos simples e não simples

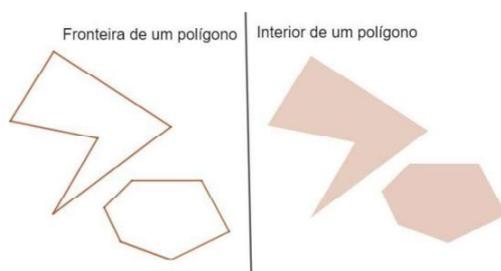


Fonte: Extraído de Gonçalves (2021, p. 25)

Segundo Martins (2005 apud GONÇALVES, 2021, p. 25),

Definição 4.2.1.4: Se A é um ponto do polígono P e A não pertence à fronteira de P , então é dito que A é um ponto interior de P . Por fronteira pode ser entendido como todos os pontos pertencentes à poligonal (Figura 9).

Figura 9 - Diferença entre fronteira e interior de um polígono



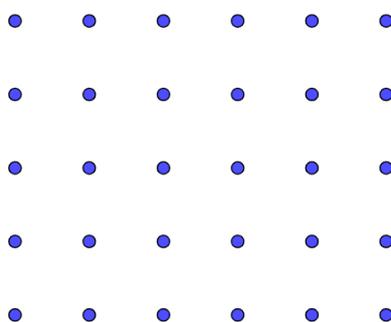
Fonte: Extraído de Gonçalves (2021, p. 25)

4.2.2 Rede no plano

De acordo com Lima (1991, p. 102):

Definição 4.2.2.1: Chama-se *rede* no plano o conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de tal modo que distância entre os pontos próximos na horizontal ou na vertical seja igual a 1, conforme Figura 10.

Figura 10 - Rede de pontos



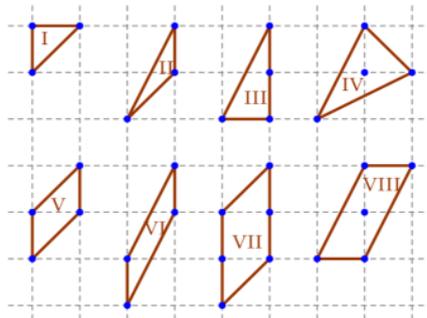
Fonte: O autor (2023)

4.2.3 Triângulos e paralelogramos fundamentais

Para Lima (1991, p. 103),

Definição 4.2.3.1: Define como sendo triângulo fundamental os triângulos que têm os três vértices e mais nenhum outro ponto, seja ele interior ou nas arestas, sobre a rede de pontos. De maneira análoga, um paralelogramo é chamado de *fundamental* quando seus quatro vértices pertencem a rede de pontos e nenhum outro ponto seu pertence à rede de pontos, conforme mostrado na Figura 11.

Figura 11 - Triângulos e paralelogramos fundamentais e não-fundamentais



Fonte: Extraído de Silva (2021, p. 43)

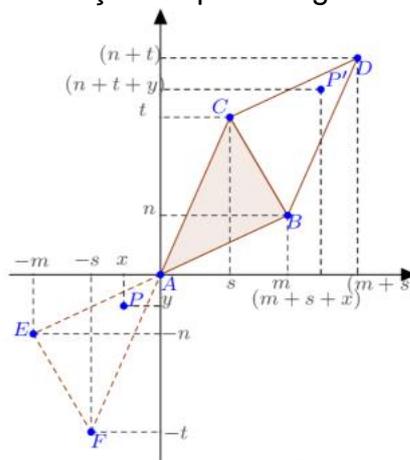
Na Figura 11 tem-se que os triângulos I e II são fundamentais, enquanto os triângulos III e IV são os não-fundamentais. Os paralelogramos V e VI são os fundamentais e os paralelogramos VII e VIII são os não-fundamentais.

Os resultados trabalhados nos próximos parágrafos, como teoremas e demonstrações, e a referida demonstração do teorema de Pick foram extraídos de Lima (1991).

Teorema 1: *Se ABC é um triângulo fundamental então $ABCD$ é um paralelogramo fundamental.*

Demonstração: Tendo como origem o ponto $A(0,0)$, considera-se um sistema de coordenadas cartesianas no plano, em relação ao qual os pontos de uma rede têm coordenadas inteiras. Sejam $B(m, n)$ e $C(s, t)$ as coordenadas dos outros dois vértices do triângulo ABC . Então o quarto vértice do paralelogramo terá coordenadas $D(m + s, n + t)$, conforme Figura 12.

Figura 12 - Construção do paralelogramo fundamental



Fonte: Extraído de Silva (2021, p. 43)

O triângulo AEF , cujos vértices são

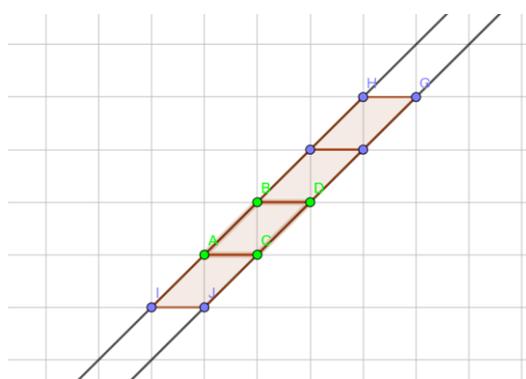
$$A(0,0), E(-m, -n) \text{ e } F(-s, -t)$$

É obtido trocando-se os sinais de ambas as coordenadas de cada ponto do triângulo ABC . Logo AEF não contém outro ponto com coordenadas inteiras além dos seus vértices, isto é, AEF é fundamental. O triângulo BCD é formado pelos pontos $P'(x + m + s, y + n + t)$, obtidos somando-se $m + s$ à abscissa e $n + t$ à ordenada de um ponto arbitrário $P(x, y)$ do triângulo AEF . Se P' tem coordenadas inteiras, P também tem. Como AEF é fundamental, o mesmo se dá com BCD . Assim os únicos pontos com coordenadas inteiras no paralelogramo $ABCD$ são os vértices, ou seja, $ABCD$ é

fundamental. □

Seja $ABCD$ um paralelogramo fundamental, do teorema anterior, tem-se como resultado imediato a conclusão de que não há pontos entre as retas paralelas AB e CD . Com isso, a região compreendida entre essas paralelas é uma reunião de paralelogramos justapostos, congruentes a $ABCD$. Cada um desses paralelogramos é fundamental porque resulta de $ABCD$ somando-se inteiros fixados à abscissa e à ordenada de cada um de seus pontos, valendo o mesmo resultado para o caso das retas paralelas AC e BD (Figura 13).

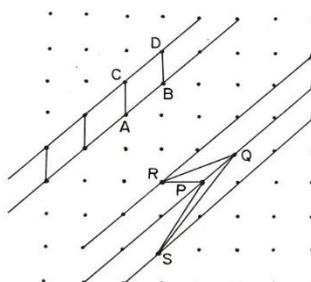
Figura 13: Paralelogramos fundamentais justapostos



Fonte: O autor (2023)

A observação anterior pode ser utilizada como método para gerar triângulos e paralelogramos fundamentais. Se PQ é um segmento de reta que não contém outros pontos da rede, apenas os vértices P e Q , e considerando todas as retas paralelas ao segmento PQ que contenham pontos do plano. Do conjunto dessas retas paralelas a PQ seleciona-se as duas mais próximas ao segmento PQ , uma de cada lado. Qualquer triângulo que tenha como vértices os pontos P , Q e o seu terceiro seja um ponto da rede pertencente a uma dessas retas será um triângulo fundamental. Na Figura 14, observe que o triângulo é fundamental, pois caso não fosse, a partir dos parâmetros estabelecidos, isso implicaria que existiria um ponto da rede pertencente

Figura 14 - Triângulos e paralelogramos fundamentais por retas paralelas



Fonte: Extraído de Lima (1991, p. 105)

ao triângulo que estaria mais próximo da reta PQ do que o vértice R.

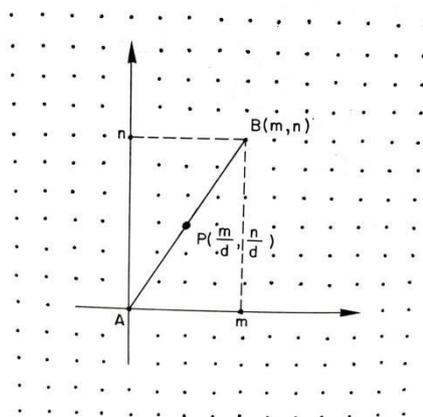
Outro resultado imediato é a de que todo paralelogramo que tenha como lados o segmento PQ e o seu outro segmento tenha mesmo comprimento que PQ e esteja situado sobre uma dessas retas paralelas mais próximas de PQ, então esse paralelogramo será fundamental.

O próximo teorema apresenta a ideia mais simples do teorema de Pick, pois envolve o cálculo de áreas de triângulos fundamentais.

Teorema 2: A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.

Demonstração: Inicialmente vamos considerar $A(0,0)$ e $B(m,n)$ as coordenadas dos dois primeiros vértices do triângulo fundamental, sendo essas coordenadas inteiras. O primeiro passo é mostrar que m, n são primos entre si, pois, caso contrário, admitindo $d > 1$ um divisor comum de m e n isso implicaria que existiria o ponto $P(\frac{m}{d}, \frac{n}{d})$ no interior do segmento da reta AB (Figura 15), ou seja, ABC não seria um triângulo fundamental.

Figura 15 - Representação do caso de m e n não serem primos entre si



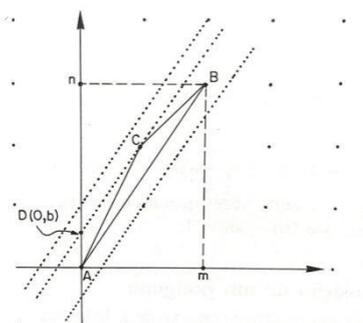
Fonte: Extraído de Lima (1991, p. 106)

Agora, supondo $m \neq 0$ é possível escrever a equação da reta que passa pelo ponto C e é paralela a AB como $y = \left(\frac{n}{m}\right)x + b$, em que b é a ordenada do ponto $D(0, b)$ no qual a reta corta o eixo vertical (Figura 16). Logo, tem-se que todos os triângulos de base AB e que o terceiro vértice esteja sobre essa reta têm a mesma área que ABC. Como exemplos tem-se que a área $ABC = \text{área } ABD = \frac{|bm|}{2}$, pois $|b|$ é a medida da base e $|m|$ da altura do triângulo ABC. Diante disso, falta apenas provar que $|b| = \frac{1}{|m|}$.

O passo seguinte agora é considerar a equação genérica da reta paralela a AB, que pode ser escrita então como $y = \left(\frac{n}{m}\right)x + \beta$, em que β é a ordenada do ponto da interseção da reta com o eixo vertical. Supondo que a reta passa por algum ponto da rede de coordenadas (s,t) , logo $t = \left(\frac{n}{m}\right)s + \beta$, que é equivalente a:

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - sn}{m}$$

Figura 16 - Representação do triângulo ABC



Fonte: Extraído de Lima (1991, p. 107)

Das retas possíveis nenhuma está mais próxima da reta AB do que a que passa pelo ponto C e para qual temos $\beta = b$. Logo, $|b|$ é o menor valor positivo que $|\beta|$ pode assumir. Como m e n são primos entre si, o lema que será brevemente destacado mais adiante nos garante que existem inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$. Portanto $\frac{1}{|m|}$ é o menor valor positivo de $|\beta|$, na qual temos que $|b| = \frac{1}{|m|}$.

Por fim, para completar a demonstração falta considerar o caso em que $m = 0$. Mas esse caso é imediato a conclusão, pois $m = 0$ implica que $n = \pm 1$, sendo ABC um triângulo retângulo, ou seja, metade de um quadrado da rede, logo sua área é $\frac{1}{2}$.

Lema: Se os inteiros m, n são primos entre si então existem inteiros s, t tais que $tm - sn = 1$.

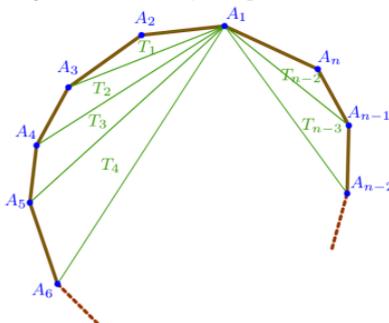
A demonstração desse lema pode ser encontrada em Lima(1991, p. 107-108).

4.2.4 Decomposição de um polígono

Um polígono convexo de n lados pode ser decomposto como a união de $n - 2$ triângulos justapostos sem a necessidade de adicionar novos vértices ao polígono. Para tanto, basta selecionar um vértice do polígono e, a partir dele, traçar as $n - 3$ diagonais que o ligam aos vértices não-adjacentes. Cada uma das diagonais será

comum a dois triângulos adjacentes (Figura 17).

Figura 17 - Decomposição de um polígono convexo em $n - 2$ triângulos



Fonte: Extraído de Silva (2021, p. 49)

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é π (tendo radiano como unidade de medida de ângulo) e que cada ângulo interno \hat{A} do polígono convexo é igual à soma dos ângulos dos triângulos da decomposição que têm o vértice A, logo chegamos na expressão $(n - 2)\pi$ que determina a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

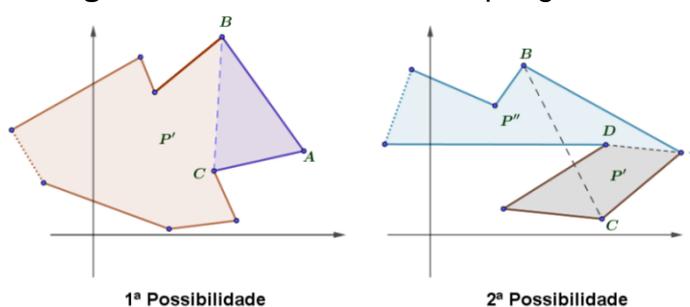
No parágrafo anterior chegamos a uma expressão que determina a soma dos ângulos internos de um polígono convexo. Resta saber se essa expressão vale para os casos em que estamos trabalhando com polígonos não-convexos. Embora o raciocínio acima seja falho para os casos dos polígonos não-convexos, a afirmativa é que sim, essa expressão pode ser utilizada para polígonos que não sejam convexos, com uma única advertência: os polígonos sejam simples, ou seja, a poligonal é fechada e é possível percorrê-la inteiramente sem passar mais de uma vez no mesmo vértice.

Nos parágrafos seguintes serão abordados os casos da decomposição de um polígono em triângulos adjacentes e da soma dos ângulos internos de um polígono, bem como o caso em que os vértices do polígono são pontos de uma rede será mostrado que o polígono poderá ser expresso como reunião de triângulos fundamentais. Esse último caso corrobora com a demonstração da fórmula de Pick com auxílio do teorema 2.

Teorema 3: *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de $n - 2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Demonstração: Supondo, por absurdo, que existem polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, sendo n o menor número natural tal que existe o polígono P , com n lados, o qual não pode ser decomposto em conformidade o teorema acima. Tomando no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A o ponto de maior abscissa pertencente a poligonal do polígono P . Como nenhum lado de P é vertical, A deve ser um vértice. Seja B e C os vértices adjacentes a A . Dito isso, tem-se duas possibilidades (Figura 18).

Figura 18 - Possibilidades do polígono P



Fonte: Extraído de Oliveira (2021, p. 31)

Primeira possibilidade: O triângulo ABC não contém outros vértices de P , além de A , B e C . Neste caso, o polígono P' , obtido de P quando se substituem os lados AB e AC por BC , tem $n - 1$ lado. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, P' pode ser decomposto em $n - 3$ triângulos conforme o teorema. Juntando o triângulo ABC a essa decomposição, concluímos que o teorema é verdadeiro para P , o que é uma contradição.

Segunda possibilidade: o triângulo ABC contém, além de A , B e C , algum outro vértice do ponto P . dentre esses, seja D o mais distante do lado BC . Então o segmento de reta AD decompõe P em dois polígonos P' e P'' , o primeiro com n' e o segundo com n'' lados, sendo $n' + n'' = n + 2$. Como $n' \geq 3$ e $n'' \geq 3$, vemos que n' e n'' são ambos menores que n . O teorema então vale para P' e P'' , que podem ser decompostos, respectivamente, em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos, conforme o enunciado. Justapondo essas decomposições ao longo de AD , obtendo uma decomposição de P em $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$ triângulos, o que se traduz em uma contradição. Isso completa a demonstração do teorema.

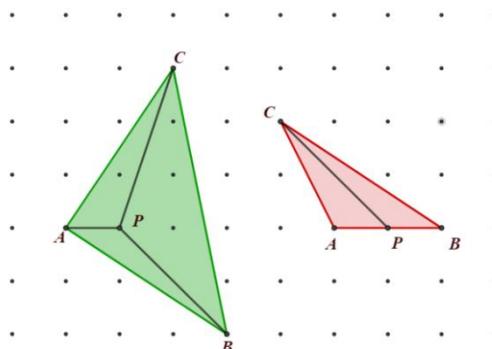
Corolário: A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n - 2)\pi$.

Observação: Os lados dos triângulos que fornecem a decomposição do polígono P no Teorema 3, ou são lados de P ou são diagonais (segmentos de reta que ligam dois vértices do polígono). Mas não são diagonais quaisquer: estão contidas no interior de P . Além disso, é importante notar que essas diagonais, embora não se originem no mesmo vértice, são, como no caso de polígonos convexos, em número de $n - 3$. Isso pode ser verificado com uma álgebra básica. São $n - 2$ triângulos, cada um com 3 lados, logo há $3n - 6$ lados no total. Destes, n são lados do polígono e chamaremos de x a quantidade de diagonais. Mas cada diagonal é lado de dois triângulos, logo foi contada 2 vezes quando se obteve $3n - 6$. Portanto $3n - 6 = n + 2x$. Resolvendo esta equação, obtém-se como resultado $x = n - 3$, que é o número de diagonais necessárias para decompor um polígono de n lados em $n - 2$ triângulos justapostos.

Teorema 4: *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração: Tendo em mãos já o Teorema 3, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC que contém n pontos da rede (seja no interior ou o bordo). Se existir realmente algum ponto P da rede no interior do triângulo, traça-se segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A , B e C e deste modo ABC é decomposto em três triângulos, cada um contendo um número menor de n pontos da rede. Se houver pontos da rede sobre os lados ABC escolhe-se um deles, por exemplo, sobre AB e ligam-se ao vértice C . assim, decompondo ABC em 2 triângulos, cada um contendo um número menor n de pontos da rede. Prosseguindo desta maneira, com um número finito de etapas chega-se a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais (Figura 19).

Figura 19 - Decomposição do triângulo ABC



Fonte: Oliveira (2021, p. 33)

Com o conhecimento desses teoremas agora tem-se como demonstrar o teorema de Pick. O Teorema 1 trabalha a construção de paralelogramos e triângulos fundamentais. No teorema 2 a garantia que a área de um triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, logo chega-se ao resultado que o paralelogramo fundamental é 1. O Teorema 3 garantiu que um polígono, convexo e não convexo (contanto que seja simples) pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos justapostos, na qual os vértices são vértices do polígono dado. Desse último teorema veio o resultado da soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, sendo $(n - 2)\pi$. Por fim, o Teorema 4 garante que todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.

4.3 A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PICK

Para iniciar a demonstração considera-se um polígono P cujo vértices pertencem a uma rede e indicado por B e I , respectivamente, o número de pontos da rede situados sobre o bordo e no interior de P .

Deseja-se mostrar que a área do polígono P é dada por $\frac{B}{2} + I - 1$, logo, basta mostrar que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P (Teorema 4) é igual a $B + 2I - 2$, pois a área de P é igual a $\frac{T}{2}$, conforme o Teorema 2.

Para demonstrar essa relação, calcula-se a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem o polígono P . A soma dos ângulos internos pode ser feita de duas maneiras:

A primeira é a mais evidente: se há T triângulos, logo tem-se que a soma dos seus ângulos internos é igual a $T \cdot \pi$.

A segunda maneira consiste em calcular separadamente a soma S_b (ângulos que têm vértice no bordo) e S_i (ângulos cujos vértices estão no interior de P). sendo B' o número de vértices de P e B'' o número de pontos da rede que estão sobre o bordo de P mas não são vértices. Então, $B = B' + B''$. Logo, S_b é igual à soma $(B' - 2)\pi$ dos ângulos internos de P mais $B'' \cdot \pi$ (pois os ângulos dos triângulos fundamentais, com vértice em cada um dos B'' pontos do bordo de P que não são vértices de P , somam um ângulo raso, ou seja, equivalente a π). Com isso, tem-se:

$$S_b = (B' - 2)\pi + B'' \cdot \pi = (B - 2)\pi. \quad (\text{Eq. I})$$

Por outro lado, tem-se que em cada ponto da rede interior a P , os ângulos que têm como vértice somam quatro retos, logo

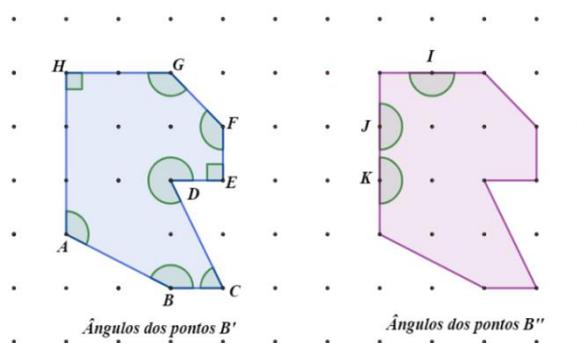
$$S_i = 2I \cdot \pi. \quad (Eq. II)$$

Portanto, de I e II :

$$S_b + S_i = (B - 2 + 2I)\pi.$$

Na Figura 20 temos os pontos A,B,C,D,E,F,G e H do tipo B' e I,J,K são os pontos do tipo B'':

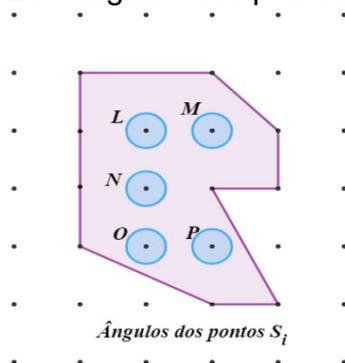
Figura 20 - Representação dos pontos B' e B''



Fonte: Oliveira (2021, p. 37)

Na Figura 21 (pontos L,M,N,O,P) pode-se ver a representação dos ângulos dos pontos internos S_i :

Figura 21 - ângulos dos pontos internos de P



Fonte: Oliveira (2021, p. 38)

Retomando as duas contagens e fazendo as devidas comparações, tem-se:

$$T \cdot \pi = (B + 2I - 2)\pi \Leftrightarrow T = B + 2I - 2$$

Como queríamos demonstrar.

5 TECNOLOGIAS DIGITAIS E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O final do séc. XX e início do séc. XXI foram marcados por grandes transformações na sociedade. Surge nesse período uma nova era conhecida como era da informação, marcada principalmente pelo surgimento e aperfeiçoamento das tecnologias digitais. Gadotti (2006, p. 01), destaca:

Nas últimas duas décadas do século XX assistimos a grandes mudanças, tanto no campo socioeconômico e político, quanto no campo da cultura, da ciência e da tecnologia. Vimos grandes movimentos sociais, como os que ocorreram no leste europeu no final dos anos 80, culminando com a queda do muro de Berlim. Ainda não fazemos uma ideia clara do que deverá representar, para todos nós, a globalização da economia, das comunicações e da cultura. As transformações tecnológicas tornaram possível o surgimento da era da informação.

O surgimento das tecnologias digitais atingiu todas as esferas da sociedade, contemplando-as e alterando o modo de organização a partir dessa nova era. Com a educação não foi diferente, com novas possibilidades surgindo. Para Borba; Silva e Gananiadis (2016, p. 10), “As dimensões da inovação tecnológica permitem a exploração e o surgimento de cenários alternativos para a educação e, em especial, para o ensino e aprendizagem de Matemática”.

A utilização das TD na educação matemática até a pandemia era dividida em quatro fases. A primeira fase é iniciada em 1985 com a utilização do software LOGO; a segunda fase se inicia na metade dos anos de 1990 e é marcada pela popularização dos computadores pessoais, na qual se destaca a popularização de softwares para a representação de funções; a terceira fase se inicia por volta de 1999 com o advento da internet e a quarta fase em 2004 com a inserção da internet rápida, onde se popularizou a utilização de vídeos na internet e os ambientes multimodais de aprendizagem (BORBA; SILVA; GANANIDIS, 2016, p. 7). Ainda segundo os autores, o surgimento de cada nova fase não exclui ou substitui uma anterior, havendo uma “sobreposição” entre as fases e uma interação, com tecnologias “antigas” ainda sendo utilizadas.

Para Borba; Silva e Gananiadis (2016, p. 27-29), é na quarta fase que surge o termo “tecnologias digitais” (TD), na qual é caracterizada por diversos aspectos, como:

- Geogebra;
- Multimodalidade;
- Novos designs e interatividade;
- Tecnologias móveis ou portáteis;
- Performance;

- Performance matemática e digital.

Com a pandemia que assolou o mundo em 2020, causada pelo SARS-CoV-2, a presença das tecnologias digitais na Educação Matemática alcançou tamanha intensidade jamais vista antes em nenhum outro programa projetado pela humanidade (BORBA; SOUTO; JUNIOR; 2022, p. 22). É nesse contexto que surge a quinta fase, conforme destacado pelos autores:

Enfim, o “bum” das lives, assim como a expansão dos enfoques baseados na produção de vídeos e a crescente popularização dos festivais de vídeos, constituem eventos que, entre outros, anunciam a quinta fase das TD. Um momento histórico em que o poder de ação de um vírus tem se tornado proeminente e acelerado mudanças na Educação Matemática, assim como na sociedade em geral, inclusive no tocante à participação (*agency*) de novas tecnologias (mídias). (BORBA; SOUTO; JUNIOR; 2022, p. 38)

O uso das TD surge como uma alternativa para o ensino e aprendizagem de Matemática, com diversos autores evidenciando sua importância e destacando-as como alternativa aos moldes tradicionais. Maltempo; Mendes (2016, p. 91) destacam: “Assim, atualmente a organização curricular por quão difícil é calcular não se justifica, pois as TD podem viabilizar um ensino de matemática, ao mesmo tempo, mais conceitual, relacional e prático (experiential)”. Tudo isso mostra o potencial que as TD trouxeram para o ensino e aprendizagem de Matemática, abrindo um leque de possibilidades para o professor explorar e obter uma melhor precisão no ensino.

5.1 GEOGEBRA

O objetivo dessa seção é fazer uma breve descrição sobre o software Geogebra, esse que será explorado nas propostas de atividade desse trabalho. Para tanto, foram consultados o livro Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento (BORBA; SILVA; GADANIDIS; 2020) e o site oficial <<http://www.geogebra.org>>.

No site é possível fazer o download gratuitamente do software, como também utilizar de forma online. Além do acesso ao aplicativo, é possível acessar vários materiais educacionais prontos que utilizam a ferramenta, bem como acessar comunidades de milhões de usuários distribuídas por diversos países. De acordo com a descrição presente no site oficial (Figura 22), o Geogebra é tido como: “um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra,

planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma”. (GEOGEBRA, 2023, p. 1)

Figura 22: Página inicial do site do Geogebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/>

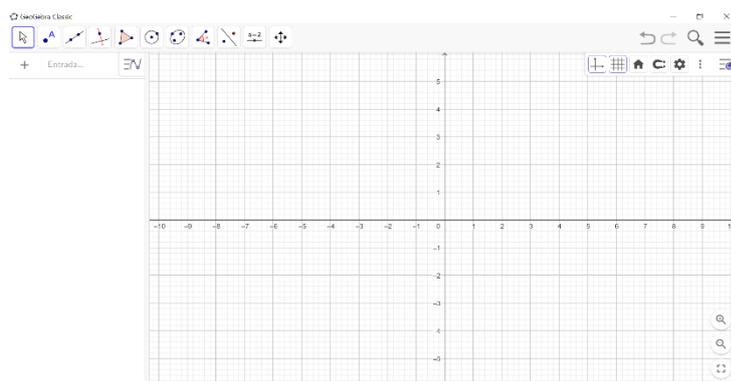
Essa poderosa ferramenta foi criada em 2001 por Markus Hohenwarter. De acordo com o Instituto São Paulo, conforme destacado por Borba, Silva e Gadanidis (2020, p. 38 – 39):

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação [...]. Algumas características importantes [são]:

- Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;
- Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
- Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo;
- Software gratuito e de código aberto.

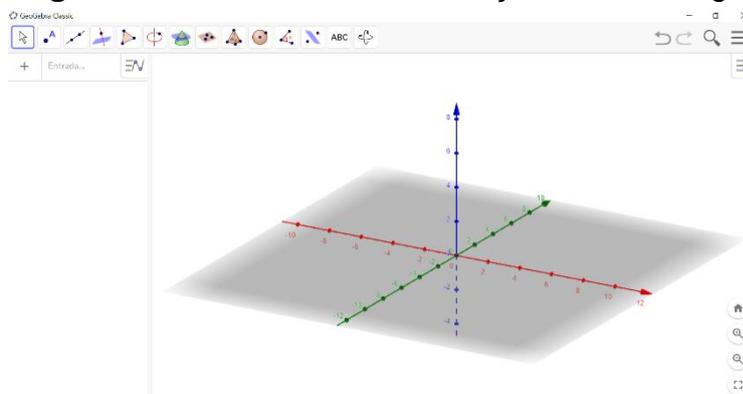
No Geogebra é possível, por exemplo, trabalhar em diferentes interfaces de visualização. Para a geometria plana existe a janela de visualização 2D (Figura 23), para explorar conteúdos da geometria espacial existe a possibilidade da visualização 3D (Figura 24).

Figura 23 - Interface de visualização 2D do Geogebra



Fonte: Geogebra

Figura 24 - Interface de visualização 3D do Geogebra



Fonte: Geogebra

Percebendo o potencial do uso do Geogebra como facilitadora no processo de ensino e aprendizagem, Meneguci (2022, p. 50) afirma que:

Ao utilizar o GeoGebra como ferramenta visual que permite aos alunos raciocinar e deduzir por si próprios, cria-se um ambiente de maior participação e discussão das informações, o que favorece a motivação no novo objeto de aprendizagem utilizado.

Todas essas características fazem do Geogebra uma importante ferramenta aliada do professor em sala de aula, possibilitando de forma gratuita acesso a diversos recursos que tornam as aulas de Matemática mais dinâmicas e intuitivas.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Uma das características essenciais que difere o conhecimento científico dos demais é a existência de uma metodologia. Segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 22) o conhecimento científico difere dos outros tipos de conhecimento por carregarem toda uma fundamentação e metodologias a serem seguidas, além de partir de informações já classificadas, submetidas à verificações, que vão fornecer explicações sobre o objeto estudado em questão.

Sabendo a importância da metodologia para um trabalho científico, os próximos parágrafos serão dedicados a esclarecer os procedimentos metodológicos dessa pesquisa. Do ponto de vista de seus objetivos, essa pesquisa pode ser classificada como exploratória por meio de levantamentos bibliográficos. A pesquisa exploratória tem por objetivo:

quando a pesquisa se encontra na fase preliminar, tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento, isto é, facilitar a delimitação do tema da pesquisa; orientar a fixação dos objetivos e a formulação das hipóteses ou descobrir um novo tipo de enfoque para o assunto. Assume, em geral, as formas de pesquisas bibliográficas e estudos de caso. (PRODANOV; FREITAS, 2013, p.51-52)

Do ponto de vista dos procedimentos técnicos a pesquisa pode ser classificada como uma pesquisa bibliográfica, uma vez que será elaborada a partir de materiais já existentes. A pesquisa bibliográfica pode ser entendida como:

quando elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 54)

Do ponto de vista da forma de abordagem do problema essa pesquisa apresenta características tanto quantitativa, como também qualitativa. É quantitativa na medida que o objetivo é determinar a quantidade de plantas em determinada área, utilizando de meios estatísticos. No que se refere a parte qualitativa, sua predominância está principalmente na descrição do ambiente em que essa pesquisa é desenvolvida. Prodanov e Freitas (2013, p. 69) afirmam que a pesquisa quantitativa considera que tudo pode ser quantificável e isso requer o uso de recursos e técnicas estatísticas, como média, moda, mediana, etc. Os autores supracitados, quando abordam sobre a

pesquisa qualitativa, destaca que a principal diferença em relação a quantitativa está no fato de não utilizar meios estatísticos como o centro do processo de análise de um problema, sendo que os dados coletados nessa pesquisa tendem a ser descritivos, buscando retratar o maior número de elementos possível na realidade estudada. Ainda sobre esses dois tipos de abordagem do problema de uma pesquisa os autores concluem enfatizando que alguns estudiosos não fazem separação entre elas por acreditarem que sempre em uma abordagem encontrará a outra.

Tendo em vista o objetivo desta pesquisa, que é trabalhar o conceito de área por meio da aplicação do teorema de Pick para o cálculo de áreas de locais desmatados do Vale do São Francisco Pernambucano, mais especificamente no município de Petrolina, foram feitas pesquisas bibliográficas sobre o bioma do local, a Caatinga, buscando realizar sua caracterização, abordando algumas de suas principais espécies nativas, importância da conservação e reflorestamento, na qual buscou também estimar a composição da sua mata nativa por quantidade de plantas e distribuição de espécies.

Para a estimar a quantidade de plantas por hectare nas propostas de atividade foi utilizado o estudo de Dias (2015), na qual foi feito o levantamento da relação de espécies arbóreas e arbustivas nativas da Caatinga do Vale do São Francisco e suas respectivas quantidades médias por hectare, conforme tabela 9 (Anexo A). O estudo citado anteriormente foi realizado no Campus de Ciências Agrárias da UNIVASF, Petrolina-PE. Além do estudo de Dias (2015), que foi utilizado para a estimativa da quantidade de plantas/hectare, foi utilizado o estudo de Albuquerque; Soares e Araújo Filho (1982) realizado numa área de Caatinga similar da EMBRAPA. No estudo, entre outros dados, foi mensurado a área média da copa das espécies. Esse estudo, embora não contemple todas as espécies da tabela 9, fornece dados importantes das principais espécies (tabela 10/Anexo B). Sendo assim, a quantidade de plantas/hectare acompanha o estudo de Dias (2015) e a esse incrementa dados do estudo de Albuquerque, Soares e Araújo Filho (1982) por esse que escreve entender que são dados complementares.

Após esse primeiro momento de familiarização do local em que o trabalho é desenvolvido, foi feita uma breve contextualização sobre problemas envolvendo o cálculo de áreas no decorrer da história e em seguida abordado as principais formas geométricas em que o conceito de área é trabalhado no ensino básico. Após esse

momento de contextualização de problemas envolvendo área buscou dar ênfase ao teorema de Pick e sua demonstração.

Na sequência, foi abordado como forma de propostas de atividades alguns exemplos da utilização do teorema de Pick. Num primeiro momento envolvendo figuras geométricas planas simples e complexas. Após esse primeiro momento, trabalhado alguns cálculos de áreas de lugares famosos de Petrolina-PE, como o Parque Josepha Coelho e a Praça Dom Malan, para isso foi utilizado ferramentas digitais, tais como o *Google maps* e o Geogebra. Para a utilização dessas ferramentas e a aplicação do teorema de Pick foi utilizado o recurso de captura de tela do Windows, na qual foi utilizado para coletar as imagens desejadas do maps e colada no Geogebra.

No Geogebra, para que não ocorra “distorção” na escala da imagem no momento da colagem, foi utilizado a ferramenta “Comprimento” para possibilitar o cálculo das novas dimensões da imagem conforme a interface do Geogebra. Os procedimentos e como podem ser realizados estão descritos no desenvolvimento das atividades.

Por fim, foram extraídas imagens do *Google maps* do município de Petrolina de locais visivelmente desmatados, sendo realizado o cálculo da área do local por meio do teorema de Pick, com o auxílio das ferramentas digitais supracitadas, e a estimativa da mata nativa perdida por tal ação. Essa estimativa foi feita buscando determinar a quantidade de árvores totais e descrição das principais espécies presente na região do Vale do São Francisco. O cálculo da quantidade de árvores perdidas visa conscientizar sobre o impacto da ação humana, ao mesmo tempo que estabelece o que seria necessário para reestabelecer a mata nativa daquele local. Além da estimativa da quantidade de plantas por hectare, foi estimado também perdas relacionadas a área das copas.

7 PROPOSTAS DE ATIVIDADES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PICK

O objetivo dessa seção é trabalhar algumas atividades envolvendo o teorema de Pick que podem ser usadas como modelo pelo professor nas aulas de matemática, em assuntos envolvendo o conceito de áreas. As atividades aqui desenvolvidas têm como público-alvo os alunos que estão no ensino médio.

As atividades propostas estão divididas em seções, na primeira trabalha-se com teorema na sua forma unicamente teórico, com o cálculo de área de figuras simples e complexas. Depois, trabalha-se com o cálculo de área de lugares tradicionais do município de Petrolina-PE, atividades essas que buscam contextualizar o conteúdo com aplicações práticas e que contribuem para uma abordagem transdisciplinar, como o caso da geografia do local e seus índices socioeconômicos. Todas essas atividades buscam estimular o raciocínio dos alunos acerca dos temas abordados, corroborando com o desenvolvimento do pensamento geométrico.

No decorrer das subseções seguintes serão apresentadas as atividades propostas. As atividades estão com os passos para o seu desenvolvimento descritos. Em cada atividade é identificada a competência abordada; Habilidade(s) envolvida(s); objeto do conhecimento e expectativas de aprendizagem.

7.1 CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS COM O TEOREMA DE PICK

Nessa subseção é abordado o teorema de Pick e o cálculo de áreas de figuras planas cuja expressões matemáticas são amplamente trabalhadas, possibilitando uma fácil comparação entre o teorema e as respectivas expressões usuais, além de demonstrar seu potencial em calcular diferentes formas sem o acúmulo de fórmulas matemáticas.

7.1.1 Plano de aula/planejamento

Tempo estimado para a realização da atividade: 1 hora aula.

Competência abordada da BNCC:

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531)

Habilidade envolvida da BNCC:

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

Objetos do conhecimento:

- Área de figuras planas
- Perímetro

Expectativa de aprendizagem:

Espera-se que o aluno já tenha um conhecimento prévio sobre o cálculo de área de figuras planas, conhecendo as principais expressões, e que o teorema de Pick seja um importante instrumento no cálculo de área de figuras planas, possibilitando o cálculo sem a necessidade de tantas fórmulas.

1º momento – Construindo a atividade (Geogebra): Para iniciar a atividade apresenta-se o teorema de Pick, como citado abaixo:

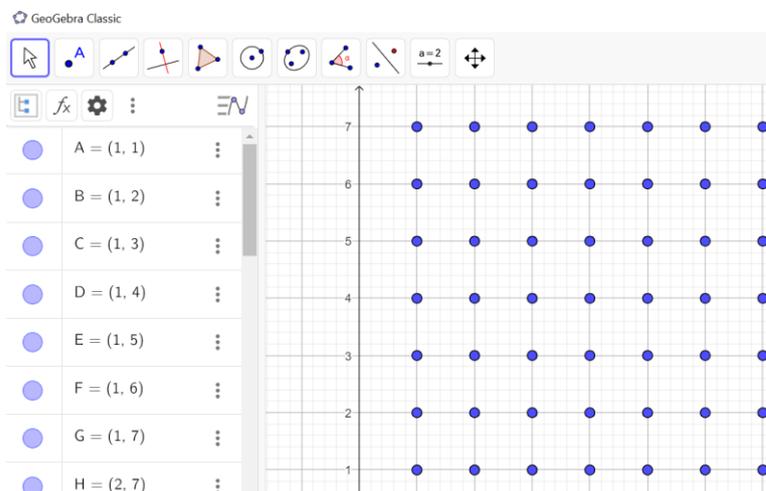
A área de um polígono cujo vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão:

$$A = \frac{b}{2} + I - 1,$$

Onde b é o número de pontos que estão sobre as arestas do polígono e I é a quantidade de pontos que são internos ao polígono.

Com o teorema familiarizado, apresente aos alunos, com o auxílio do Geogebra, o que é uma rede de pontos (Figura 25), explicando que se trata de pontos dispostos no plano cartesiano com coordenadas inteiras e equidistantes.

Figura 25 - Rede de pontos (Geogebra)

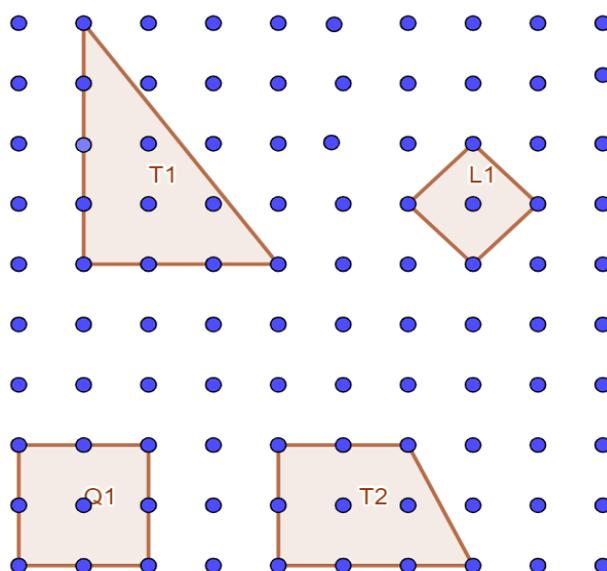


Fonte: O autor (2023)

A partir desse momento serão dados os seguintes comandos para a realização da atividade:

Comando 1: Construa uma rede de pontos com espaçamento de 1 unidade, com o comprimento e largura de 10 unidades. Com a rede de pontos construída peça aos alunos que construa polígonos (Figura 26).

Figura 26 - Polígonos sobre a rede de pontos



Fonte: Elaborado pelo autor

Comando 2: Calcule a área dos polígonos desenhados. (Aqui é esperado que os alunos utilizem as expressões usuais, e previamente conhecidas, para cada uma das figuras formadas). Na exemplificação exposta na Figura 26, temos um triângulo, um losango, um quadrado e um trapézio, e as fórmulas para o cálculo de área com os seus resultados esperados são:

Área do triângulo retângulo:

$$A_{T1} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$A_{T1} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ unidades de área}$$

Área do quadrado:

$$A_{Q1} = \text{lado} \cdot \text{lado}$$

$$A_{Q1} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ unidades de área}$$

Área do Losango:

$$A_{L1} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{L1} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ unidades de área}$$

Área do trapézio:

$$A_{T2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{T2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ unidades de área}$$

2º momento – Aplicação do Teorema de Pick no cálculo de áreas

Após trabalhar o cálculo de áreas pelo método usual, aplicando as expressões a cada uma das respectivas figuras, é hora de o professor trabalhar com o teorema de Pick, no qual espera que esse já tenha sido previamente apresentado aos alunos.

Para esse 2º momento utiliza-se uma tabela para anotar os dados de cada uma das figuras para facilitar o cálculo pelo teorema de Pick. Peça aos alunos que preencham a tabela, como exemplo observe a Tabela 1.

Tabela 1 – Modelo para preenchimento da atividade 1

Figura	B	I	$A = \frac{B}{2} + I - 1$	Área encontrada
Losango				
Quadrado				
Triângulo				
Trapézio				

Fonte – O autor (2023)

Considerando B o número de pontos do bordo e I o número de pontos internos ao polígono, conforme enunciado do teorema, preenchendo a tabela e calculando as respectivas áreas, tem-se a Tabela 2:

Tabela 2 - Valores esperados da atividade 1

Figura	B	I	$A = \frac{B}{2} + I - 1$	Área encontrada
Losango	4	1	$A = \frac{4}{2} + 1 - 1$	2 u.a.
Quadrado	8	1	$A = \frac{8}{2} + 1 - 1$	4 u.a.
Triângulo	8	3	$A = \frac{8}{2} + 3 - 1$	6 u.a.
Trapézio	8	2	$A = \frac{8}{2} + 2 - 1$	5 u.a.

Fonte: O autor (2023)

Como era de se esperar, obtém-se os mesmos valores quando comparado aos cálculos realizados pelas expressões usuais de cada uma das figuras.

3º momento – Discutindo a atividade

Nesse momento, chegando ao final da atividade o professor deve realizar questionamentos sobre os métodos abordados e sua aplicabilidade. Algumas questões que podem ser levantadas pelo professor:

- 1) Houve dificuldades durante a realização da atividade? Caso a resposta seja afirmativa, quais?
- 2) Embora os métodos sejam diferentes, os resultados foram os mesmos?
- 3) É importante o conhecimento desses métodos?
- 4) Com suas palavras, como enunciaria o teorema de Pick?

- 5) Qual a vantagem do teorema de Pick?
- 6) Você acredita que a depender da situação algum desses métodos pode ser mais indicado que o outro? Por quê?

7.2 CÁLCULO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS COMPLEXAS COM O TEOREMA DE PICK

O objetivo dessa atividade é trabalhar com figuras planas irregulares, na qual não possuem expressões prontas para o cálculo de suas respectivas áreas.

7.2.1 Plano de Aula/planejamento

Tempo estimado para realização da atividade: 1 hora aula.

Competência abordada da BNCC:

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531)

Habilidade envolvida da BNCC:

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

Objetos do conhecimento:

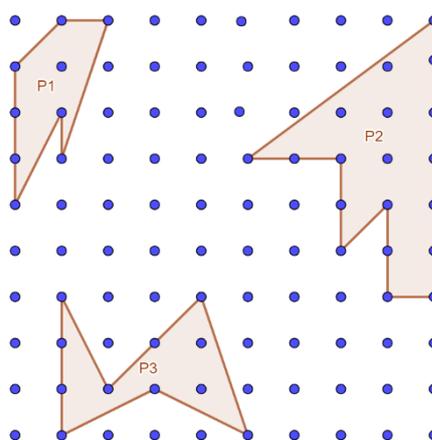
- Polígonos regulares e irregulares
- Área

Expectativa de aprendizagem:

Determinar a área de figuras irregulares por meio do teorema de Pick.

1º momento: Apresente os polígonos devidamente desenhados na rede de pontos (observe o exemplo da Figura 27, construído no Geogebra) e em seguida peça para que coloquem em prática os conhecimentos envolvendo o teorema de Pick e determinem a área das figuras irregulares.

Figura 27 - Polígonos irregulares



Fonte: O autor (2023)

Com a Figura 27 em mãos, seja ela impressa ou, caso possível, desenvolvida individualmente no laboratório de informática, é esperado que os valores obtidos, conforme o teorema trabalhado na atividade 1, sejam os mesmos da Tabela 3.

Tabela 3 - Valores esperados da atividade 2

Figura	B	I	$A = \frac{B}{2} + I - 1$	Área encontrada
Polígono 1 (P1)	8	1	$A = \frac{8}{2} + 1 - 1$	4 u.a.
Polígono 2 (P2)	15	4	$A = \frac{15}{2} + 4 - 1$	10,5 u.a.
Polígono 3 (P3)	9	2	$A = \frac{9}{2} + 2 - 1$	5,5 u.a.

Fonte: O autor (2023)

2º momento – Discutindo a atividade

O professor deverá instigar os alunos sobre a atividade trabalhada, podendo lançar as seguintes perguntas:

- 1) Houve dificuldades? No caso de afirmativa, quais?
- 2) Seria possível encontrar os valores das áreas sem o teorema de Pick?
- 3) Em quais situações podemos nos deparar com cálculo de área de figuras irregulares?

7.3 TEOREMA DE PICK NO CÁLCULO DE ÁREA DE LUGARES TRADICIONAIS DE PETROLINA

Nesta subseção é abordado o teorema de Pick envolvendo o cálculo de área de lugares tradicionais de Petrolina-PE. Para tanto, foram selecionados a Praça Dom Malan e o Parque Josepha Coelho.

A realização dessas atividades consiste na obtenção de imagens por meio do *Google maps* e em seguida essas imagens são trabalhadas no Geogebra. De acordo com Oliveira (2021), essa atividade envolvendo o cálculo de área com mapas, na qual aborda escalas e o teorema de Pick, proporciona ao aluno desenvolver sua interpretação de mapas; localização de regiões sobre mapas e o uso correto de escalas. Ainda segundo o autor supracitado a relação interdisciplinar pode ocorrer ao considerar aspectos geográficos do local abordado, tais como: sua localização, população, economia, hidrografia, relevo, vegetação, etc.

As duas atividades propostas nesta subseção seguem a mesma ideia de execução. Tendo em vista esse aspecto, será detalhado na primeira atividade o passo a passo e na atividade seguinte será omitido alguns desses passos.

7.3.1 Cálculo da área da Praça Dom Malan por meio do teorema de Pick.

7.3.1.1 Plano de aula/planejamento:

Tempo estimado para a realização da atividade: 2 horas aula.

Competência abordada da BNCC:

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em

diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p.531)

Habilidade trabalhada da BNCC:

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

Objetos do conhecimento:

- Área
- Escala
- Polígonos
- Uso de ferramentas computacionais
- Sistema internacional de medidas

Expectativas de aprendizagem:

- Cálculo de área por meio do teorema de Pick
- Comparar dois métodos de obtenção do cálculo de área

1º passo: Identificação da área de interesse e ajustes de escala - Para essa atividade, o 1º momento consiste na obtenção da imagem de satélite, que no caso será utilizado o *Google maps*. Para obtenção da imagem foi feita a aproximação da área, por meio do recurso de zoom, de tal maneira que a escala ficasse em 20 m (canto

inferior direito, Figura 28), já que com essa escala a área desejada fica bem ajustada na tela.

Figura 28 - Praça Dom Malan

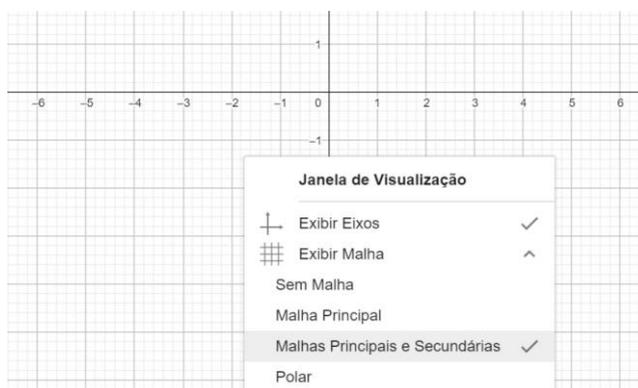


Fonte: *Google maps*

2º Passo: Salvar imagem no dispositivo - Com o objetivo de guardar a imagem, o aluno poderá utilizar o recurso *Alt+PrtScr*, que salva automaticamente a imagem que está na tela no diretório Imagens, do Windows. Depois de salvar a imagem, é importante recortá-la, deixando apenas a área desejada. Para isso, pode ser utilizado o Paint e a sua ferramenta “recortar”, que permite selecionar apenas a parte da imagem que se deseja e excluir o restante.

3º Passo: Configurando e inserindo imagem no Geogebra - Com o *software* do Geogebra aberto, caso as Malhas não estejam visíveis, o aluno poderá clicar com o botão direito do *mouse* na interface do Geogebra, na qual aparece opções relacionadas a “Janela de Visualização” (ver Figura 29). Já nas opções, basta acessar *Exibir Malha* → *Malhas Principais e Secundárias* (Figura 29).

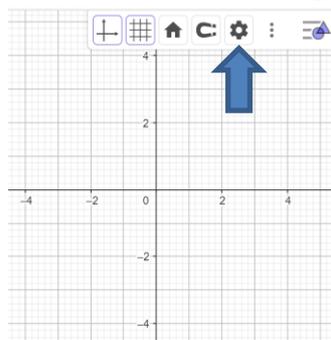
Figura 29 - Janela com opções de configuração de visualização do Geogebra



Fonte: O autor (2023)

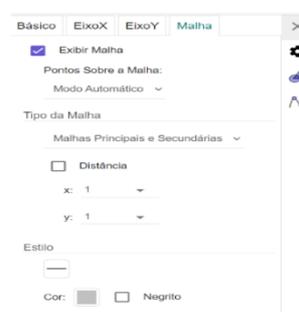
Outras configurações são possíveis, como alterar a cor da malha, distância entre as linhas da malha e escala utilizada (por padrão é o cm) na aba “Configurações” (Figuras 30 e 31). A distância entre as linhas das malhas será ajustada para 1 cm, tanto no eixo X, como no eixo Y (Figura 31).

Figura 30 - Interface do Geogebra



Fonte: O autor (2023)

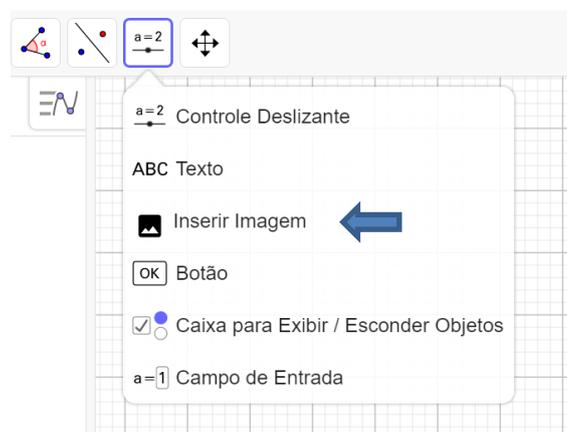
Figura 31 - Janela de configuração



Fonte: O autor (2023)

Na sequência, após os ajustes necessários das etapas anteriores, é hora de inserir a imagem que já foi salva no computador. Nesse momento o aluno irá utilizar a opção *Inserir Imagem*, conforme pode observado na Figura 32:

Figura 32 - Interface do Geogebra (inserir imagem)



Fonte: O autor (2023)

Após selecionar essa opção irá abrir uma janela para que seja selecionada a imagem desejada. Selecionando a imagem da Praça Dom Malan, o passo seguinte será clicar na imagem e com o botão direito do *mouse* seleciona a opção *Configurações* e, na sequência marca a opção *Imagem de Fundo* (conforme Figuras 33 e 34), essa opção permitirá que as malhas se sobreponham a imagem e facilitará no momento de construir a rede de pontos.

Figura 35 - Configuração da ima-



Fonte: O autor (2023)

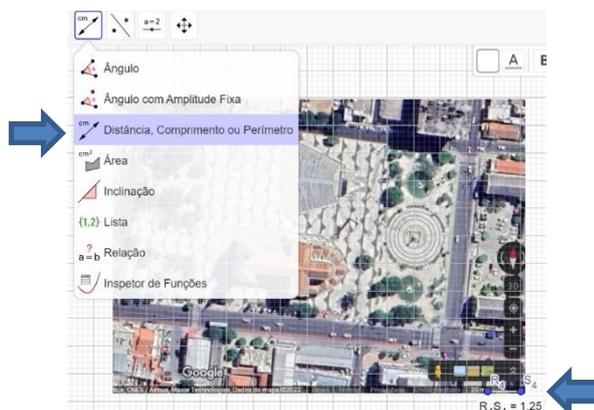
Figura 34 - Opções de configuração da imagem



Fonte: O autor (2023)

4º Passo: Verificando as proporções da imagem e desenhando a rede de pontos sobre a imagem - Nesse passo, instrua os alunos a marcarem dois pontos sobre as extremidades do segmento referente à escala da imagem e em seguida utilize a ferramenta de medição do Geogebra para verificar as respectivas medidas (Figura 35).

Figura 33 - Ferramenta "Distância, comprimento ou Perímetro" e medição do segmento de escala



Fonte: O autor (2023)

Logo, pelas medições feitas pode-se perceber a seguinte relação:

20 m é equivalente a 1,25 cm no Geogebra.

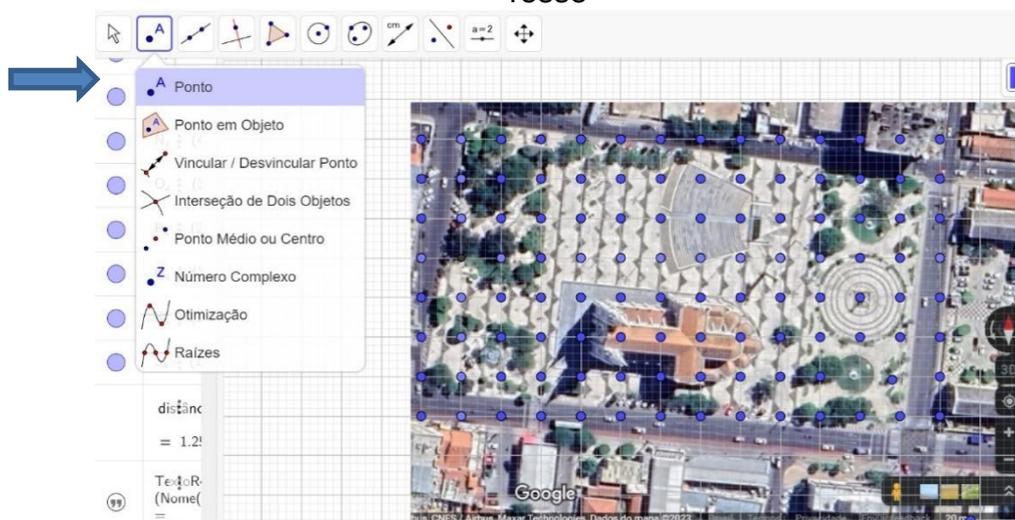
$$1,25x = 20$$

$$x = 16 \text{ m}$$

Portanto, cada centímetro no Geogebra equivale a 16 m considerando as proporções reais. Com essas informações, tem-se que cada cm^2 encontrado no *software* é equivalente a 256 m^2 nas proporções reais. Essas proporções podem variar para cada caso e o aluno deverá perceber as relações existentes entre a escala da imagem trabalhada e os seus valores representados.

5º Passo: Construção da rede de pontos - O próximo passo é construir a rede de pontos. Para isso utiliza-se a ferramenta “Ponto” e em cada interseção da malha insere-se um ponto, de tal maneira que a área de interesse fique compreendida no espaço da rede de pontos (Figura 36).

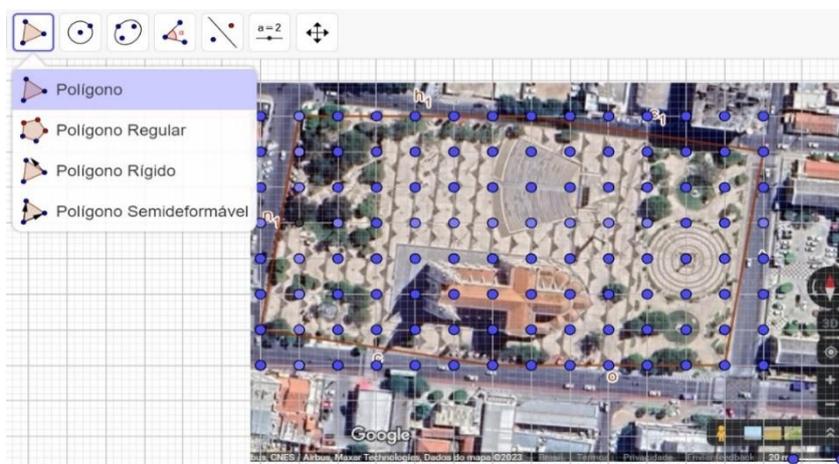
Figura 36 – Ferramenta “Ponto” e rede de pontos desenhada sobre a área de interesse



Fonte: O autor (2023)

6º Passo: ajustando o polígono sobre a área da praça Dom Malan para aplicação do teorema de Pick - Já com todos esses passos feitos, agora chegou a hora de usar a ferramenta “Polígono” e desenhar sobre a rede de pontos o polígono que mais se aproxima da área da praça Dom Malan (Figura 37) para a aplicação do teorema de Pick e, então, cálculo da área.

Figura 37 - Polígono ajustado à área da praça Dom Malan com vértices sobre a rede de pontos



Fonte: O autor (2023)

7º Passo: Determinar a área do polígono utilizando o teorema de Pick - Nesse passo, o aluno deverá determinar a área do polígono que foi ajustado à área da praça Dom Malan. Considerando o enunciado do teorema, chamando B os pontos da borda e I do interior, tem-se os seguintes resultados como mostrado na Tabela 4:

Tabela 4 - Valores esperados da atividade 3

Figura	B	I	$A = \frac{B}{2} + I - 1$	Área encontrada
Polígono ajustado	16	72	$A = \frac{16}{2} + 72 - 1$	79 cm^2

Fonte: O autor (2023)

Sabendo que cada 1 cm^2 representa 256 m^2 da área real, temos a seguinte área para a área da praça Dom Malan, conforme Tabela 5:

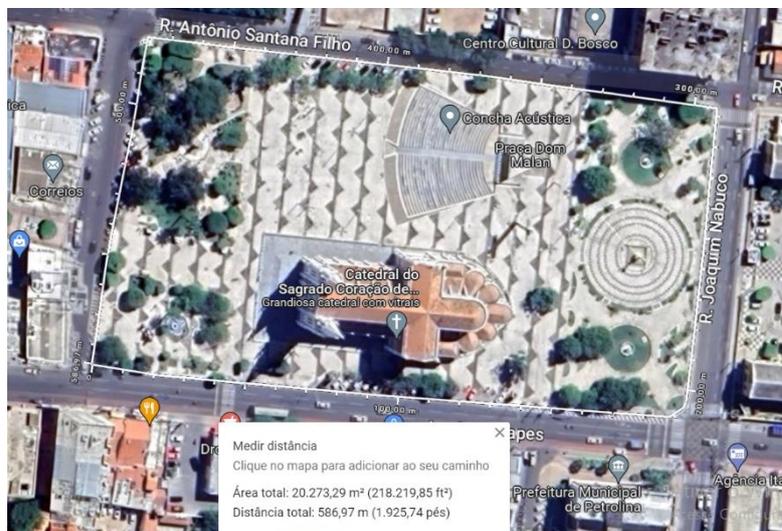
Tabela 5 - Cálculo da área da praça Dom Malan

Valor medido na imagem	Valor em escala real
1 cm^2	256 m^2
79 cm^2	20.224 m^2

Fonte: Elaborado pelo autor

Efetuada a medição da área diretamente no *Google maps*, tem-se como valor 20.273 m^2 (Figura 35), uma diferença de apenas 49 m^2 .

Figura 38 - Cálculo da área pelo *Google maps*



Fonte: *Google maps*

Considerando o valor real como sendo o medido pelo *Google maps* e calculando o erro relativo, obtém-se os seguintes valores:

$$E_{relativo} = \frac{\text{Erro absoluto}}{\text{Valor real}} \times 100 \quad \Rightarrow \quad E_{relativo} = 0,24\%$$

Onde o *Erro absoluto* é o módulo da diferença entre o valor medido e o *valor real* e esse último é o valor observado na medição do *Google maps*.

Logo, o erro foi de menor que 1%. Portanto, considerando os métodos trabalhados, o erro foi consideravelmente baixo e, embora esse cálculo tenha sido feito sobre um terreno aparentemente retangular, o teorema de Pick mostrou seu poder: o cálculo de área por meio de contagem. Essa característica é que tornará seu uso fundamental no cálculo de áreas irregulares, em que fórmulas não são diretamente aplicáveis.

8º Passo: Discutindo a atividade - Algumas questões que podem ser levantadas pelo professor para investigar se os objetivos propostos pela atividade foram alcançados:

- 1) Você sentiu dificuldades para calcular a área? Se sim, quais?
- 2) O que lhe chamou atenção nesse método de calcular áreas?
- 3) Os resultados obtidos pelo teorema de Pick podem ser aceitos tendo em vista o valor real da área?

- 4) Em quais momentos esse conhecimento poderá ser fundamental para o cálculo de áreas?

7.3.2 Cálculo da área do Parque Josepha Coelho por meio do teorema de Pick

7.3.2.1 Plano de aula/planejamento

Tempo estimado para a realização da atividade: 2 horas aula.

Competência abordada da BNCC:

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531)

Habilidade trabalhada da BNCC:

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

Objetos do conhecimento:

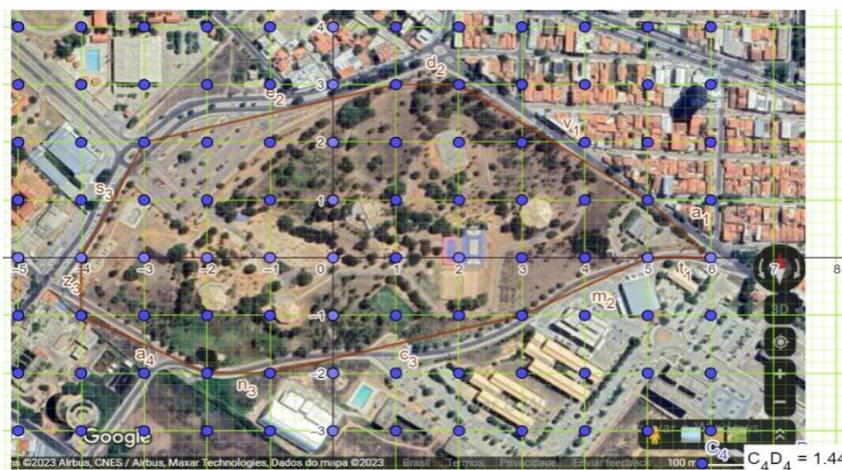
- Área
- Escala
- Polígonos
- Uso de ferramentas computacionais
- Sistema internacional de medidas

Expectativas de aprendizagem:

- Cálculo de área de lugares com formato irregular por meio do teorema de Pick
- Comparar dois métodos de obtenção do cálculo de área

Tendo em vista a semelhança com a atividade anterior, para essa atividade 4 será abordada já a partir do que seria o 7º passo da anterior, que é determinar a área do polígono sobre a rede de pontos do local desejado.

Figura 39 - Parque Josepha Coleho com a rede de pontos e o polígono delimitador



Fonte: Elaborado pelo autor

Da Figura 39, pode-se tirar as seguintes informações para a aplicação do teorema de Pick e o respectivo cálculo da área:

- 1,44 *cm* na imagem representam 100 *m* nas dimensões reais.
- Logo, 1 *cm* na imagem equivale a aproximadamente 69,44 *m* na escala real.
- Desse último dado, tem-se que 1 *cm*² na imagem representará 4822 *m*²

Aplicando o teorema de Pick no polígono da imagem 12, temos:

Tabela 6 - Valores esperados para atividade 4

Figura	B	I	$A = \frac{B}{2} + I - 1$	Área encontrada
Polígono ajustado	11	29	$A = \frac{11}{2} + 29 - 1$	33,5 <i>cm</i> ²

Fonte: O autor (2023)

Considerando as informações acima e a área do polígono ajustado na imagem de 33,5 *cm*², temos que a área real do parque é:

$$\text{Área do parque} = 33,5 \cdot 4822 = 161.537 \text{ m}^2$$

Observando o valor calculado direto do *Google maps*:

Figura 40 - Cálculo da área do Parque Josepha Coelho pelo *Google maps*



Fonte: *Google maps*

Considerando o valor encontrado utilizando o teorema de Pick (161.537 m^2) e o valor encontrado quando efetuado o cálculo diretamente pelo *Google maps* (158.270 m^2), sendo 1.555 m^2 a diferença. Isso gerou um erro relativo inferior a 1%, conforme cálculos já trabalhados na atividade anterior.

Discutindo a atividade: Após a realização dessa atividade procure fazer algumas indagações ao aluno com o intuito de perceber se os objetivos propostos da atividade foram alcançados. Eis algumas questões que podem estar sendo levantadas:

- 1) Você sentiu dificuldades para calcular a área? Se sim, quais?
- 2) O que lhe chamou atenção nesse método de calcular áreas?
- 3) Os resultados obtidos pelo teorema de Pick podem ser aceitos tendo em vista o valor real da área?
- 4) O que pode estar sendo feito para aproximar ainda mais os valores encontrados pelo cálculo envolvendo o teorema de Pick e os valores reais?
- 5) Em quais momentos esse conhecimento poderá ser fundamental para o cálculo de áreas?

8 TEOREMA DE PICK NO CÁLCULO DE ÁREAS DE TERRENOS DESMATADOS E ESTIMATIVAS DA VEGETAÇÃO NATIVA DO VALE DO SÃO FRANCISCO PERNAMBUCANO

No tópico anterior já foram trabalhadas algumas atividades com o teorema de Pick. O objetivo deste tópico é abordar o cálculo de áreas desmatadas do Vale do São Francisco pernambucano e efetuar a estimativa da vegetação perdida conforme tabela 9 elaborada a partir do estudo de Dias (2015) , além do cálculo da área da cobertura da copa de algumas espécies conforme tabela 10 (anexo B).

As atividades trabalhadas nesse tópico é o objeto central desse trabalho, na qual possibilita o professor trabalhar desde a conscientização ambiental como também conteúdos interdisciplinares envolvendo os componentes curriculares de Geografia, Biologia e até mesmo algumas questões históricas. Portanto, as atividades seguintes buscam trazer questões relacionadas a temas ambientais do contexto em que os alunos estão inseridos, contribuindo para a conscientização de tais temas.

8.1 CÁLCULO DE UMA ÁREA DESMATADA DO VALE DO SÃO FRANCISCO E ESTIMATIVA DA VEGETAÇÃO PERDIDA

8.1.1 Plano de aula/planejamento

Tempo estimado para a realização da atividade: 3 horas aula.

Competências abordada da BNCC:

Competência específica 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2018, p. 531)

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em

diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 531)

Habilidade trabalhada da BNCC:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (BRASIL, 2018, p. 534)

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. (BRASIL, 2018, p. 537)

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). (BRASIL, 2018, p. 537)

Objetos do conhecimento:

- Área
- Escala
- Notação Científica.
- Uso de ferramenta computacional.
- Algarismos significativos e técnicas de arredondamento.
- Sistema internacional de medidas.

Expectativas de aprendizagem:

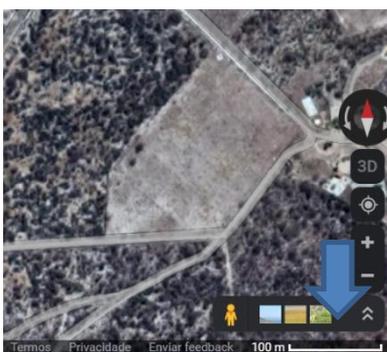
- Representar quantidades não inteiras usando técnicas de arredondamento.

- Comparar métodos de obtenção do cálculo de área e seu grau de precisão.
- Cálculo de área de terrenos com formato irregular por meio do teorema de Pick.
- Estimativa da quantidade de vegetação perdida em áreas desmatadas.
- Potencialidades de algumas espécies da Caatinga.
- Consequências do desmatamento

Iniciando a atividade: o passo a passo para obter a imagem, salvar e ajustar conforme o teorema de Pick no Geogebra é idêntico a atividade 3, já exposta em 7.3.1, da seção anterior, por isso não será colocado novamente.

Um pequeno ajuste será feito em relação a referida atividade: a escala do *Google maps* será ajustada para 100 m, conforme Figura 41 . O local de interesse foi escolhido por identificação visual, escolhendo um local claramente desmatado ($8^{\circ}48'01.3''S$ $40^{\circ}30'07.3''W$) para o exemplo.

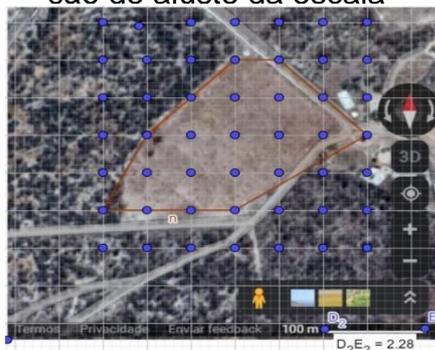
Figura 41 - Área de interesse com a escala do *Google maps* em 100 m



Fonte: *Google maps*

Escolhido uma área de interesse e ajustado a escala de visualização no *Google maps* os passos são semelhantes ao da atividade 3, conforme já mencionado.

Figura 42 - Área de interesse na rede de pontos com o polígono ajustado e medição de ajuste da escala



Fonte: Elaborado pelo autor

Observando a medição de ajuste da escala da Figura 42 e efetuando os devidos cálculos percebe-se que cada cm^2 é aproximadamente $1924 m^2$ na escala real. Sabendo que a rede de pontos está espaçada em $1 cm$ e efetuando os cálculos pelo teorema de Pick, tem-se os resultados mostrados na Tabela 7.

Tabela 7 - Cálculo da área com teorema de Pick

Figura	B	I	$A = \frac{B}{2} + I - 1$	Área encontrada
Polígono ajustado	10	10	$A = \frac{10}{2} + 10 - 1$	$14 cm^2$

Fonte: O autor (2023)

Como cada cm^2 é equivalente a $1927 m^2$ na escala real, tem-se:

$$\text{Área do terreno na escala real} = 14 \cdot 1924$$

$$\text{Área do terreno na escala real} = 26936 m^2$$

Como foi feito nas atividades anteriores, compara-se o valor encontrado utilizando o teorema de Pick com o valor medido diretamente utilizando o *Google maps* (Figura 43).

Figura 43 - Cálculo da área do terreno pelo *Google maps*



Fonte: *Google maps*

Comparando os dois valores, teorema de Pick e *Google maps*, tem-se que o teorema de Pick teve um erro de pouco mais de 6%. Esse percentual poderia ser menor se a escala de visualização do *Google maps* fosse maior, pois o polígono ajustado seria o mais fiel possível da área de interesse.

Considerando que o estudo que quantifica a vegetação utiliza como unidade de medida o hectare, transforma-se a área encontrada para a referida unidade de medida. Tem-se que:

$$1 \text{ hectare} = 10.000 m^2$$

Logo, basta dividir a área encontrada por 10.000 e obtém-se quantas hectares possui o terreno em estudo:

$$\text{número de hectares} = \frac{26936}{10000} = 2,7$$

Portanto, utilizando uma casa decimal, obtém-se que o número de hectares é de aproximadamente 2,7. Esse valor será utilizado como fator multiplicativo para calcular o número de plantas retiradas do local. Como algumas espécies apresentam alta frequência por hectare e o arredondamento do valor da área pode influenciar nesses casos, foi aberta uma coluna na Tabela 8 com o exemplo do caso em que o cálculo é feito sem o arredondamento, com os cinco algarismos significativos.

Para a estimativa da quantidade de árvores será feito arredondamento para que os valores sejam inteiros. Observe a Tabela 8.

Tabela 8 - Tabela com estimativas da vegetação perdida conforme Anexo B

Nome vulgar	Quant./ha	Estimativa da vegetação (2,7 ha)	Estimativa da vegetação (2,6936 ha)
Jurema preta	295	797	795
Catingueira miúda	217	586	585
Umburana de cambão	72	194	194
Faveleira	29	78	78
Jurema branca	45	122	121
Velame	29	78	78
Catingueira	31	84	84
Pereiro	14	38	38
Pinhão	7	19	19
Alagadiço/jurema	27	73	73
Imbiruçú	7	19	19
Maniçoba	6	16	16
Angico de bezerro	11	30	30
Angico	5	14	13
Imbiratanha	4	11	11
Umbuzeiro	3	8	8
Pata de vaca	3	8	8
Xique-xique	3	8	8
Marmeleiro	3	8	8
Morto	3	8	8
Baraúna	2	5	5
Pau branco	2	5	5
Quebra-facão	2	5	5
Mofumbo	1	3	3
Feijão bravo	1	3	3
Rompe gibão	1	3	3
Facheiro	1	3	3
São João	1	3	3
	825	2229	2222

Fonte: Elaborado pelo autor

Logo, em pouco menos de 3 hectares de desmatamento a estimativa de perda da vegetação é de 2222 plantas, 7 a menos quando sem o arredondamento do valor da área. Questões como essas, na qual evidenciam erros devido o arredondamento de valores, contribuem para discursões sobre a influência de tais procedimentos nos resultados.

Essa atividade é importante que seja desenvolvida em planilhas eletrônicas para não se tornar cansativa. Conforme orientações das atividades anteriores, todo o processo de busca, armazenamento e processamento das imagens envolvem as TD, mais especificamente o *Google maps*, *Geogebra*, *Paint*, e no caso da planilha foi utilizado o software *Excel*. Todo esse uso das TD corrobora com o que defende a BNCC, que desde o ensino fundamental enfatiza a utilização de tais aparatos, como é o caso das planilhas eletrônicas (BRASIL, 2018, p. 528). Levando em consideração o contexto de grandes transformações tecnológicas e a continuidade dos conhecimentos desenvolvidos durante o ensino fundamental, a BNCC destaca a importância das tecnologias digitais e aplicativos como forma de investigação matemática (BRASIL, 2018, p. 528).

Durante o desenvolvimento dessa atividade o professor poderá abordar algumas características e potenciais das plantas da Caatinga (nesse trabalho já está descrito algumas espécies da Caatinga), como exemplo está o grande potencial melífero de uma vasta quantidade de espécies como destacado pela EMBRAPA (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária). Dentre as espécies citadas pela EMBRAPA que se destacam estão o juazeiro, aroeira, a baraúna, a umburana de cheiro, a quixabeira, as juremas, os marmeleiros, as embiras, entre outros.

Além do potencial que pode ser destacado e enfatizado o seu uso sustentável, conforme já mencionado nesse trabalho, a Caatinga se não preservada caminha a passos largos para a desertificação, o que seria irreversível.

8.1.2 Discutindo e debatendo a atividade

Após a realização dessa atividade procure fazer algumas reflexões e indagações aos alunos com o intuito de perceber se os objetivos propostos da atividade foram alcançados. Num primeiro momento, como já mencionado, busque apresentar algumas características e potencialidades das espécies da Caatinga. Após esse primeiro momento, faça alguns questionamentos aos alunos. Observe as sugestões:

- 1) Você acredita que foi vantajoso o desmatamento?
- 2) É possível desenvolver atividades que não agredem a natureza e ao mesmo tempo sejam lucrativas?
- 3) O que leva o homem a fazer desmatamento desenfreado sabendo que o prejudicado será ele mesmo e suas futuras gerações?
- 4) Sobre o cálculo com o teorema de Pick, o que pode ser feito para aproximar ainda mais os valores encontrados pelo cálculo envolvido o teorema de Pick e os valores obtidos no *Google maps*?
- 5) Em quais momentos esse conhecimento poderá ser fundamental para o cálculo de áreas?

8.2 Cálculo de uma área desmatada do Vale do São Francisco, estimativa da vegetação perdida e as respectivas áreas das copas de algumas espécies

O objetivo dessa atividade é semelhante ao da atividade 5, adicionando o fator área da copa de algumas espécies que foram possíveis obter a partir do estudo de Albuquerque, Soares e Araújo Filho (1982). Devido a grande semelhança da atividade anterior, será utilizado o mesmo terreno e parâmetros. Com isso, essa sugestão de atividade já constará a partir dos resultados e algumas considerações. Novamente, assim como na atividade anterior, é feito o cálculo da área total de copa perdida considerando o arredondamento do valor da área e na última coluna com os cinco algarismos significativos encontrados no cálculo da área do terreno (Tabela 9).

Tabela 9 - Estimativa da vegetação perdida e respectiva copa (área - m²)

Nome vulgar	Quant./ha	Área de copa (m ²)	Área de copa (m ² /ha)	Estimativa da vegetação perdida (2,7 ha)	Área total de copa perdida (m ²) – 2,7 ha	Área total de copa perdida (m ²) – 2,6936 ha
Jurema preta	295	23,94	7062,3	797	19080,18	19023,01
Catingueira miúda	217	8,74	1896,6	586	5121,64	5108,63
Umburana de cambão	72	52,29	3764,9	194	10144,26	10141,08
Faveleira	29	28	812	78	2184	2187,20
Jurema branca	45	10,54	474,3	122	1285,88	1277,57
Velame	29	sd	-	78	-	-
Catingueira	31	sd	-	84	-	-

Pereiro	14	21,52	301,28	38	817,76	811,53
Pinhão	7	sd	-	19	-	-
Alagadiço/jurema	27	sd	-	73	-	-
Imbiruçú	7	69,49	486,43	19	1320,31	1310,25
Maniçoba	6	2,69	16,14	16	43,04	43,47
Angico de bezerro	11	sd	-	30	-	-
Angico	5	25,65	128,25	14	359,1	345,45
Imbiratanha	4	sd	-	11	-	-
Umbuzeiro	3	105,55	316,65	8	844,4	852,93
Pata de vaca	3	2,18	6,54	8	17,44	17,62
Xique-xique	3	sd	-	8	-	-
Marmeleiro	3	6,54	19,62	8	52,32	52,85
Morto	3	sd	-	8	-	-
Baraúna	2	7,84	15,68	5	39,2	42,24
Pau branco	2	16,97	33,94	5	84,85	91,42
Quebra-facão	2	4,46	8,92	5	22,3	24,03
Mofumbo	1	sd	-	3	-	-
Feijão bravo	1	sd	-	3	-	-
Rompe gibão	1	sd	-	3	-	-
Facheiro	1	12,9	12,9	3	38,7	34,75
São João	1	0,46	0,46	3	1,38	1,24
	825	399,76	15357	2229	41456,76	41365,27

Fonte: O autor (2023)

SD: sem dados

As competências, habilidades, objetos do conhecimento e demais parâmetros são semelhantes ao da atividade 5. O erro da área total de copa perdida ocasionado pelo arredondamento foi na ordem das casas dos décimos, desprezível. Essa atividade segue todos os procedimentos da atividade anterior, com destaque para a discussão sobre a variável “Área de copa perdida (m²)”. Segundo Albuquerque; Soares e Araújo Filho (1982, p. 3), enfatizam que a cobertura tem recebido mais importância ecológica que a densidade de plantas, uma vez que com os dados de cobertura é possível ter uma ideia melhor da fitomassa aérea. Outro destaque é a cobertura superior a área do terreno de estudo, o que indica que nesse cenário a vegetação é densa devido a superposição de copas. As espécies que não constam os dados não tiveram grande impacto no cálculo, uma vez que são espécies com copas de pequenas áreas e/ou em pequenas quantidades.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo buscou em seu desenvolvimento abordar o teorema de Pick como uma alternativa ao cálculo de área de figuras planas, bem como de alguns locais da região em que esse trabalho foi desenvolvido. A escolha do teorema se dá pela praticidade no cálculo de áreas, desde figuras simples até as mais complexas. Enquanto os métodos amplamente utilizados durante praticamente todo o percurso da educação básica envolvem o cálculo de área por meio de fórmulas que vão se acumulando na medida que novas formas são estudadas. Este teorema permite o estudo de todos os polígonos e regiões curvas sem a necessidade de muitas fórmulas.

Junto com o teorema de Pick foi trabalhada a questão ambiental, que é amplamente apoiada em documentos oficiais dos quais foram citados no decorrer desse estudo. Buscando desenvolver propostas didáticas em consonância com as competências e habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) foram utilizadas questões ambientais envolvendo a região local, que é o Vale do São Francisco Pernambucano, mais especificamente em Petrolina-PE.

Nessas propostas didáticas foram utilizados estudos que mostraram o número de plantas por hectare e mensuraram a área da copa de algumas espécies na região. Com esses dados em mão, foram feitas estimativas em uma determinada área visivelmente desmatada da quantidade de plantas perdidas e a cobertura que tinha no referido local, com isso, o objetivo desse trabalho foi alcançado, que era a estimar a vegetação perdida em áreas desmatadas do Vale do São Francisco. Além disso, foram realizadas propostas de atividades envolvendo o teorema de Pick com figuras planas regulares e irregulares, como também de lugares tradicionais da região em que o estudo foi desenvolvido, como destacava os objetivos específicos. Embora o estudo seja especificamente de uma dada região, poderá servir de inspiração para elaboração de atividades semelhantes em outras regiões desde que considere os respectivos estudos locais.

Com a elaboração dessa pesquisa, na qual buscou unir conceitos matemáticos e ambientais, trabalhando o teorema de Pick desde a sua parte teórica ao cálculo de áreas desmatadas e estimativas da vegetação perdida, acredita-se que seu desenvolvimento em sala de aula trará benefícios não só para conteúdos matemáticos, como no caso do cálculo de áreas, mas abordará questões importantes relacionadas ao meio ambiente. Futuros trabalhos poderão surgir com novas

estimativas sobre a vegetação nativa, uma vez que a Caatinga sofre uma grande transformação. Além disso, a distribuição das espécies pode mudar de região para região, devido sua grande diversidade. É importante a pesquisa por materiais relacionados a esse tópico e sempre observando o local em que se desenvolveu.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Severino G. de; SOARES, José Givaldo G.; ARAUJO FILHO, João Ambrósio de. Densidade de espécies arbóreas e arbustivas em vegetação de caatinga. Petrolina: EMBRAPA-CPATSA, 1982. 9 p. (EMBRAPA-CPATSA. Pesquisa em andamento, 16). Tipo: comunicado Técnico/Recomendações Técnicas. Disponível em: <<https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/45354/1/PA-16-1982.pdf>>. Acesso em: 25 de fev. de 2023

BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. Modelagem matemática. 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25315/1/Modelagem%20Matem%C3%A1tica.pdf>>. Acesso em: 10 de out. de 2022

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. Autêntica, 2016.

BORBA, Marcelo De Carvalho; SOUTO, Daise Lago Pereira; JUNIOR, Neil da Rocha Canedo. Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. Autêntica Editora, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 02 de nov. de 2022

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: meio ambiente, saúde/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: 128p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro091.pdf>>. Acesso em: 07 de nov. de 2022

DIAS, Uêdija Natalí Silva. Estrutura e Diversidade do componente Arbustivo-Arbóreo da Caatinga no Campus de Ciências Agrárias da UNIVASF. Petrolina, 2015. Disponível em: <https://www.nema.univasf.edu.br/files/GERAL/Publicacoes_NEMA/000006a7.pdf>. Acesso em 25 de fev. de 2023

DRUMOND, Marcos Antônio et al. Caracterização e usos das espécies da caatinga: subsídio para programas de restauração florestal na Unidades de Conservação da Caatinga (UCCAs). Embrapa Semiárido-Fôlder/Folheto/Cartilha (INFOTECA-E), 2016. Disponível em:<<https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/146566/1/cartilha-plantas-caatinga-11-8.pdf>>. Acesso em: 10 de out. de 2022

GADOTTI, Moacir. Desafios para a era do conhecimento. Viver Mente & Cérebro. Coleção Memória da Pedagogia, n. 5, p. 6-15, 2006. Tradução. Disponível em: <<https://tinyurl.com/hx34578y>>. Acesso em: 17 jun. 2023

GEOGEBRA. O que é o GeoGebra? 2023. Disponível em:< <https://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 17 jun. 2023.

GONÇALVES, da Silva Lilian; OLIVEIRA, Joelma Ananias de. O Uso do GeoGebra para o Ensino do Cálculo da Área de Polígonos no Ensino Fundamental. Revista Ensino@ UFMS, v. 2, n. Esp., p. 332-353, 2021. Disponível em: <<https://intermeio.ufms.br/index.php/anacptl/article/view/13933>>. Acesso em 25 de jan. de 2023

JUNIOR LIMA, José Valdeci De Santana. O TEOREMA DE PICK NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM COM O USO DO GEOGEBRA. 2022. Disponível em: <http://profmat.uefs.br/arquivos/File/JOSE_VALDECI_DE_SANTANA_LIMA_JUNIOR.pdf>. Acesso em: 25 de jan. de 2023

KAMINSKI, Marcia Regina; BOSCARIOLI, Clodis. Criação de jogos digitais na perspectiva de introdução à Modelagem Matemática nos anos iniciais. Revista Thema, v. 15, n. 4, p. 1538-1548, 2018. . Disponível em:< <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1060>>. Acesso em: 10 de out. de 2022

LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias. 4. ed. Rio de Janeiro, 1991.

MALTEMPI, Marcus Vinicius; MENDES, Ricardo de Oliveira. Tecnologias Digitais na Sala de Aula: por que não. *In*: IV CONGRESSO INTERNACIONAL DE TIC NA EDUCAÇÃO. 2016. Disponível em: https://ria.ua.pt/bitstream/10773/18628/1/%282016%29_mat_red_atas.pdf. Acesso em: 19 jun. 2023.

MARTINS, Zélia. As TIC no ensino-aprendizagem da Matemática. *In*: Anais do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. Universidade do Minho. Portugal. 2009. p. 2727-2742. Disponível em: <<https://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/documentos/congreso/xcongreso/pdfs/t7/t7c200.pdf>>. Acesso em: 26 jun. 2023.

MENEGUCI, Maicon do Nascimento. Uma proposta de metodologia de ensino de logaritmos através da tecnologia. 2022. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2022. Disponível em: <<https://tede.ufrj.br/handle/jspui/5736>>. Acesso em: 20 jun. 2023

OLIVEIRA, Onalda Marciana Nascimento de. Uma Proposta de Ação Didática Com o Uso do Teorema de Pick Com Aplicações ao Meio Ambiente. Sinop: Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021. 97 p. Disponível em:< https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6257&id2=171054599>. Acesso em 02 de nov. de 2022

OLIVEIRA, Wagner Rogério de. Uma proposta de áreas de polígonos simples usando o Teorema de Pick e o aplicativo Pythagorea nas séries dos anos finais do ensino fundamental. Maringá, 2021. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6106&id2=171055542>. Acesso em 16 de nov. de 2022

REGO, Aderbal Soares do. O Teorema de Pick no ensino-aprendizagem da geometria plana: cálculo de áreas de polígonos simples. João Pessoa, 2022. Disponível em: < https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=6516&id2=171055490>. Acesso em 16 de nov. de 2022

PIASESKI, Claudete Maria. A geometria no ensino fundamental. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI – Campos de Erechim. Disponível em: <https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1271.pdf>. Acesso em: 29 de out. de 2022

PRODANOV, Cleber Cristiano; DE FREITAS, Ernani Cesar. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição. Editora Feevale, 2013

ROSA, Eduardo Henrique Fernandes. A evolução do cálculo de áreas através da história. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/9046>>. Acesso em: 29 de out. de 2022

SENA, Liana Mara Mendes de. Conheça e Conserve a Caatinga – O Bioma Caatinga. Vol. 1. Fortaleza: Associação Caatinga, 2011. 54p. Disponível em: <https://www.acaatinga.org.br/wp-content/uploads/Conhe%C3%A7a_e_Conserve_a_Caatinga_-_Volume_1__O_Bioma_Caatinga.pdf>. Acesso em: 10 de out. de 2022

SENA, Liana Mara Mendes; SILVA, Sandino Moreira. Conheça e Conserve a Caatinga – Mudanças Climáticas. Vol. 2. Fortaleza: Associação Caatinga, 2012, 48p. Disponível em: <https://www.acaatinga.org.br/wp-content/uploads/Conhe%C3%A7a_e_Conserve_a_Caatinga_-_Volume_2__Mudan%C3%A7as_Clim%C3%A1ticas-1.pdf>. Acesso em: 28 de out. de 2022

ANEXOS

ANEXO A – QUADRO COM ALGUMAS DAS ESPÉCIES DA CAATINGA E SUAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

Quadro 1 - Algumas espécies da Caatinga e suas principais características

	<p>Nome científico: Anadenanthera colubrina</p> <p>Nome Vulgar: Angico</p> <p>Principais características: Atinge até 15 m de altura. Se bem utilizado é uma excelente forragem para os animais. Sua casca é rica em tanino, substância utilizada na indústria do curtume. Na medicina popular costuma ser utilizada como chá ou cicatrizante.</p>
	<p>Nome científico: Myracrodruon urundeuva Allemão</p> <p>Nome Vulgar: Aroeira</p> <p>Principais Características: Exemplos dessa espécie atingem em média 10 m de altura. Sua casca tem um alto teor de tanino, aproximadamente 15%. A casca por apresentar um elevado teor de tanino é utilizada pela indústria do curtume.</p> <p>Na medicina suas aplicações estão relacionadas ao tratamento das vias respiratórias e urinárias. Suas folhas maduras são uma excelente forragem para os animais. A aroeira está na lista de espécies ameaçadas de extinção, sendo ela protegida pelos órgãos ambientais e seu corte proibido por lei.</p>

	<p>Nome científico: Schinopsis brasiliensis Engler</p>
	<p>Nome Vulgar: Baraúna</p>
	<p>Principais características: Árvore de porte médio, pode atingir até 12 m de altura. Sua ocorrência costuma ser em grupamentos em certas áreas e ausentes em outras. Suas folhas permanecem verdes por quase todo o ano, se destacando na Caatinga. A casca desta árvore é rica em tanino, sendo utilizada na indústria do curtume.</p> <p>Na medicina popular sua casca é utilizada como analgésica, digestiva e para males da coluna (infusão). Suas folhas servem para o tratamento da gripe e pressão alta quando utilizada como chá.</p>
	<p>Nome científico: Pilosocereus pachylados Ritter</p>
	<p>Nome vulgar: Facheiro</p>
<p>Principais Características: É um cacto de grande porte, podendo atingir até 10 m. O facheiro é bastante apreciado pelo sertanejo, podendo ser utilizado para a forragem, apresentando em média 15,66% de proteína bruta, sendo esse um importante alimento em períodos de estiagem. Sua madeira pode ser transformada em tábuas para uso em carpintarias. Suas ramificações longas após descascadas podem ser utilizadas como caibros e ripas na cobertura de casas.</p>	

	Nome científico: Ziziphus joazeiro Mart.
	Nome vulgar: Juazeiro
	<p>Principais Características: É uma árvore de tronco espinhento. Pode atingir cerca de 10 m de altura. Uma de suas principais características é a capacidade de permanecer sempre verde graças às raízes profundas que conseguem explorar o solo com destreza em busca de água. Essa espécie tem preferência pelos aluviais argilosos. O juazeiro é uma planta de grande valia para o sertanejo, suas folhas e frutos possuem em média de 12,95% de proteína e é um excelente alimento para os animais durante os longos períodos de seca que a região costuma enfrentar. Por estar sempre verde, é uma excelente opção para servir de sombra para os animais.</p> <p>Na medicina o juazeiro costuma ser utilizado como tônico capilar, no tratamento de doenças respiratórias; antisséptico bucal. Suas folhas são utilizadas para o tratamento de seborreia e males digestivos. A raspa da entrecasca do juazeiro é rica em saponina, uma substância utilizada na produção de creme dental e sabão.</p>

	<p>Nome científico: <i>Cereus jamacaru</i> P. DC.</p>
	<p>Nome vulgar: Mandacaru</p>
	<p>Principais Características: É uma espécie símbolo da Caatinga. Seu nome vem do Tupi e significa feixe cheio de espinhos. Esse cacto pode chegar até 10 m de altura. As suas flores são grandes e brancas, por questões relacionadas ao clima seco só se abrem a noite.</p> <p>O mandacaru é uma espécie essencial para aqueles que habitam o tão sofrido semiárido. Seus galhos, após queimados os espinhos, serve como alimentação para os animais, apresentando cerca de 10,72% de proteína bruta. O caule também fornece fécula que pode ser utilizada na produção de pães, biscoitos, broas e mingaus. Na medicina popular a planta também é apreciada, sendo utilizada na forma de chá. Serve para eliminar manchas na pele, já suas raízes costumam ser utilizadas para tratar males da coluna. O caule principal pode ser utilizado para produzir tábuas e ripas.</p>
	<p>Nome científico: <i>Manihot pseudoglaziovii</i> Pax et L. Hoffman</p>
	<p>Nome vulgar: Maniçoba</p>
	<p>Principais Características: As árvores desta espécie podem atingir até 7 m de altura. Seu tronco é liso e produz um látex leitoso. Sua principal aplicação está relacionada a alimentação de animais. As folhas e ramos mais novos (in natura), fenados, possuem aproximadamente 17,94% de proteína bruta, o que faz desta espécie uma excelente opção para a alimentação de bovinos, ovinos e caprinos.</p>

	<p>Nome científico: Handroanthus spongiosus (Rizzini) S. O. Grose</p>
	<p>Nome vulgar: Sete-cascas</p>
	<p>Principais Características: Espécie de médio porte, podendo atingir até 7 m de altura. Popularmente é chamada de cascudo. Suas cascas são acinzentada e suas flores são de uma beleza exuberante, tendo a cor amarelo-ouro. A espécie é de grande valor para o sertanejo. Suas folhas e flores são uma excelente forragem para os animais, com o percentual de proteína bruta chegando a 16,19%. Sua beleza durante a época de floração faz da espécie uma boa opção para arborização de praças e canteiros. Suas flores são uma importante fonte de néctar para as abelhas produzirem mel.</p>
	<p>Nome científico: Commiphora leptophloeos (Mart.) Gillet</p>
	<p>Nome vulgar: Umburana-de-Cambão</p>
	<p>Principais Características: Seu porte é variável conforme o local onde se desenvolve. Sua ocorrência nos mais diversos locais da Caatinga, desde áreas secas do Sertão do São Francisco onde não chega a ultrapassar os 3 metros de altura, às Caatingas arbóreas de Itiúba, por exemplo, onde atinge um porte de 6 a 8 metros de altura, evidencia sua amplitude de tolerância.</p> <p>Possui uma vasta gama de aplicações. A madeira branca é apreciada na marcenaria e</p>

	<p>construção civil. Sua forragem é considerada excelente, seca ou verde. O xarope da casca do caule é utilizado como tônico, cicatrizante. Indicado também para casos de tosses, inflamações do trato urinário, bronquites. Seu tronco possui valor ornamental e a copa da árvore é uma excelente sombra no verão.</p>
	<p>Nome científico: Spondias tuberosa Arruda</p>
	<p>Nome vulgar: Umbuzeiro</p>
	<p>Principais Características: Esta espécie atinge cerca de 6 m quando adulta. Seus galhos forma uma espécie de semicírculo, sendo uma excelente proteção para o solo. Costuma ocorrer em regiões com precipitação entre 400 e 800 mm anuais, além de temperaturas que variam de 12 a 38 °C.</p> <p>A espécie possui grande valor para os moradores da região. As folhas apresentam em média 15,31% de proteína bruta, além dos frutos e raízes serem uma excelente alimentação para os animais. Os frutos (Umbu) pode ser consumido in natura, como também pode ser utilizado para a produção de suco, doce, geleia, picolés e a tradicional umbuzada. As raízes, uma espécie de cuca, além de servir de reservatório de água para o sertanejo e os animais em períodos de secas severas, podem ser utilizadas para a fabricação de geleias e doces. Na medicina popular os ramos e cascas do umbuzeiro são utilizados como digestivas, tratamento de anemias e cicatrizantes.</p>

Fonte: Elaborado pelo autor conforme estudos de Drumond et al. (2016)

ANEXO B – TABELA COM A RELAÇÃO DE ESPÉCIES NATIVAS DA CAATINGA DO VALE DO SÃO FRANCISCO E SUAS RESPECTIVAS QUANTIDADES MÉDIA POR HECTÁRE

Tabela 10 - Espécies com suas respectivas quantidades inventariadas no Campus de Ciências Agrárias da UNIVASF, Petrolina PE.

Espécies	Nome vulgar	Quant./ha
Mimosa tenuiflora (Willd.) Poir.	Jurema preta	295
Poincianella microphylla (Mart. Ex G.Don) L.P.Queiroz	Catingueira miúda	217
Commiphora leptophloeos (Mart.) J.B.Gillett	Umburana de cambão	72
Cnidoscolus quercifolius Pohl	Faveleira	29
Piptadenia stipulacea (Benth.) Ducke	Jurema branca	45
Croton rhamnifolius Willd.	Velame	29
Poincianella pyramidalis (Tull.) L.P.Queiroz	Catingueira	31
Aspidosperma pyriforme Mart.	Pereiro	14
Jatropha mollissima (Pohl) Baill.	Pinhão	7
Mimosa hexandra Micheli	Alagadiço/jurema	27
Pseudobombax simplicifolium A.Robins	Imbirucú	7
Manihot carthaginensis (Jacq.) Müll.Arg.	Maniçoba	6
Pityrocarpa moniliformis (Benth.) Luckow & R.W.Jobson	Angico de bezerro	11
Anadenanthera colubrina (Vell.) Brenan	Angico	5
Pseudobombax marginatum (A.St.-Hil.) A. Robins	Imbiratanha	4
Spondias tuberosa Arruda	Umbuzeiro	3
Bauhinia cheilantha (Bong.) Steud.	Pata de vaca	3
Pilosocereus gounellei (F.A.C. Weber) Byles & Rowley	Xique-xique	3
Croton blanchetianus Baill.	Marmeleiro	3
Morto	-	3
Schinopsis brasiliensis Engl.	Baraúna	2
Fraunhoferia multiflora Mart.	Pau branco	2
Erythroxylum revolutum Mart.	Quebra-facão	2
Combretum monetaria Mart.	Mofumbo	1
Cynophalla hastata (Jacq.) J.Presl	Feijão bravo	1
Erythroxylum pugens O.E.Schulz	Rompe gibão	1
Pilosocereus pachycladus F.Ritter	Facheiro	1
Senna macranthera var. pudibunda (Benth.) H.S. Irwin & Barneby	São João	1
Total		825

Fonte: Elaborado pelo autor conforme estudo de Dias (2015).

ANEXO C – TABELA COM A RELAÇÃO DE ESPÉCIES NATIVAS DA CAATINGA DO VALE DO SÃO FRANCISCO COM SUAS RESPECTIVAS QUANTIDADES MÉDIA POR HECTÁRE E ALGUNS VALORES DA ÁREA DE SUAS COPAS

Tabela 11 - Espécies com suas respectivas quantidades inventariadas no Campus de Ciências Agrárias da UNIVASF, Petrolina PE e dados da área da copa de algumas das espécies

Nome vulgar	Quant./ha	Área de copa (m²)	Área de copa (m²/ha)
Jurema preta	295	23,94	7062,3
Cantigueira miúda	217	8,74	1896,58
Umburana de cambão	72	52,29	3764,88
Faveleira	29	28	812
Jurema branca	45	10,54	474,3
Velame	29	sd	-
Catingueira	31	sd	-
Pereiro	14	21,52	301,28
Pinhão	7	sd	-
Alagadiço/jurema	27	sd	-
Imbiruçú	7	69,49	486,43
Maniçoba	6	2,69	16,14
Angico de bezerro	11	sd	-
Angico	5	25,65	128,25
Imbiratanha	4	sd	-
Umbuzeiro	3	105,55	316,65
Pata de vaca	3	2,18	6,54
Xique-xique	3	sd	-
Marmeleiro	3	6,54	19,62
-	3	sd	-
Baráúna	2	7,84	15,68
Pau branco	2	16,97	33,94
Quebra-facão	2	4,46	8,92
Mofumbo	1	sd	-
Feijão bravo	1	sd	-
Rompe gibão	1	sd	-
Facheiro	1	12,9	12,9
São João	1	0,46	0,46
	825	399,76	15356,87

SD: sem dados

Fonte: Elaborado pelo autor conforme estudos de Albuquerque; Soares e Araújo Filho (1982) e Dias (2015).