UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Valdemar Tessari Junior

Utilização dos conceitos de matrizes e determinantes para introdução à teoria de grafos no Ensino Médio.

CAMPINAS

2023

Valdemar Tessari Junior

Utilização dos conceitos de matrizes e determinantes para introdução à teoria de grafos no Ensino Médio.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt

ESTE TRABALHO CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VALDEMAR TESSARI JUNIOR, E ORIENTADA PELA PROF(A). DR(A). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

CAMPINAS

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

	Tessari Junior, Valdemar, 1974-
T284u	Utilização dos conceitos de matrizes e determinantes para introdução à teoria de grafos no ensino médio / Valdemar Tessari Junior. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.
	Orientador: Maria Aparecida Diniz Ehrhardt.
	Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Teoria dos grafos. 2. Ensino médio - Estudo e ensino. 3. Matrizes (Matemática). I. Ehrhardt, Maria Aparecida Diniz, 1956-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Use of the concepts of matrices and determinants for introduction to graph theory in high school
Palavras-chave em inglês:
Graph theory
High school - Study and teaching
Matrices
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Maria Aparecida Diniz Ehrhardt
Roberto Andreani
Maria do Socorro Nogueira Rangel
Data de defesa: 30-05-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0005-6268-3673
- Currículo Lattes do autor: https://lattes.cnpq.br/3320611444196109

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 30 de maio de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). MARIA DO SOCORRO NOGUEIRA RANGEL

A Ata da Defesa, assinada pelos membros Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico este trabalho a
minha querida esposa
Marisa Trotta.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado e iluminar o meu caminho.

Esta dissertação foi desenvolvida com o apoio de pessoas muito importantes para mim, e de modo especial, quero agradecer:

À todos os professores do mestrado que contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.

À professora Dra. Maria Aparecida Diniz Ehrhardt por todo o tempo, carinho e paciência dispensado na orientação dessa dissertação.

Aos membros da minha banca examinadora, professor Dr. Roberto Andreani e professora Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel pelas contribuições para o enriquecimento da minha dissertação.

À professora Dra. Denise Trevisoli Detsch pelas sugestões apresentadas.

À minha esposa, Marisa Trotta que esteve sempre ao meu lado, me apoiando, principalmente, nos momentos mais difíceis.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo oferecer aos alunos do ensino médio, ainda que superficialmente, a possibilidade de após o estudo de matrizes conhecerem um pouco sobre a Teoria de Grafos, conteúdo que não é contemplado no ensino médio.

Através desse trabalho os alunos terão contato com um conteúdo que permite a modelagem de diversos problemas do dia a dia que podem ir dos mais simples, os quais os alunos conseguirão solucionar até mesmo antes de terem o contato com a Teoria de Grafos, aos mais elaborados, em que os conceitos básicos de Teoria de Grafos darão suporte e fundamentação para a modelagem e solução de problemas.

O trabalho apresenta também, mais especificamente para professores que tenham interesse em se aprofundar um pouco mais na Teoria de Grafos, dois algoritmos, de Fleury e de Dijkstra que possibilitam a resolução de problemas mais elaborados na Teoria de Grafos, e que abre caminho para aqueles que tem domínio maior em programação de implementar programas que buscam a solução de problemas cuja solução tem um grau de dificuldade maior.

Com a reestruturação do Ensino Médio, e a criação de disciplinas eletivas, o tema abordado neste trabalho pode ser mais facilmente implementado pelo professor de Matemática como uma das eletivas elencadas ao longo do 2º ano do ensino médio.

Palavras-chave: Grafos – Ensino Médio – Matrizes – Eletivas

ABSTRACT

This work has as main objective to offer high school students, although superficially, the possibility of after the study of matrices to know a little about graph theory, content that is not contemplated in high school.

Through this work students will have contact with a content that allows the modeling of several problems of daily life that can go from the simplest, which I believe that students can solve even before having contact with graph theory, to the most elaborate, in which the basic concepts of Graph Theory will support and rationale for modeling and solving problems.

The paper also presents, more specifically for teachers who are interested in delving a little deeper into Graph Theory, two algorithms, by Fleury and Dijkstra that enable the resolution of more elaborate problems in Graph Theory, and that paves the way for those who have greater mastery in programming to implement programs that seek the solution of problems whose solution has a higher degree of difficulty.

With the restructuring of high school, and the creation of elective disciplines, I believe that the theme addressed in this work can be more easily implemented by the mathematics teacher as one of the electives listed throughout the 2nd year of high school.

Keywords: Graphs - High School - Matrices - Electives

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

Introdução

O ensino de matrizes e determinantes no ensino médio é, na maioria das vezes, apresentado aos alunos de forma bastante técnica e sem muita contextualização. Apesar de serem conteúdos que os alunos, de maneira geral, conseguem compreender e ter domínio satisfatório das propriedades e técnicas apresentadas, carecem de situações de aplicabilidade.[12]

Nosso objetivo inicial é trazer um breve relato do surgimento dos conceitos de matrizes e determinantes e de suas principais propriedades. Em seguida vamos apresentar um pouco sobre o estudo da teoria de grafos, proporcionando assim, aos alunos, a possibilidade do contato com um conteúdo que não está na grade curricular de matemática do ensino médio, mas que pode trazer a eles algumas aplicações mais próximas de seus cotidianos.[7] e [8]

Referências apresentadas no livro chinês Nove Capítulos da Arte Matemática, de Chui-Chang Suan-Shu, durante a dinastia Han, mostram que alguns problemas da época eram solucionados através da utilização de tabelas, o que leva a crer que a ideia de matriz já estava implicitamente presente nesse período.[2]

O nome Matriz aparece com James Joseph Sylvester (1814 – 1897) por volta de 1850. Ele toma como referência o significado informal da palavra Matriz: lugar onde alguma coisa se gera ou se cria; fonte. Para ele uma matriz era vista como "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes ..." [11]

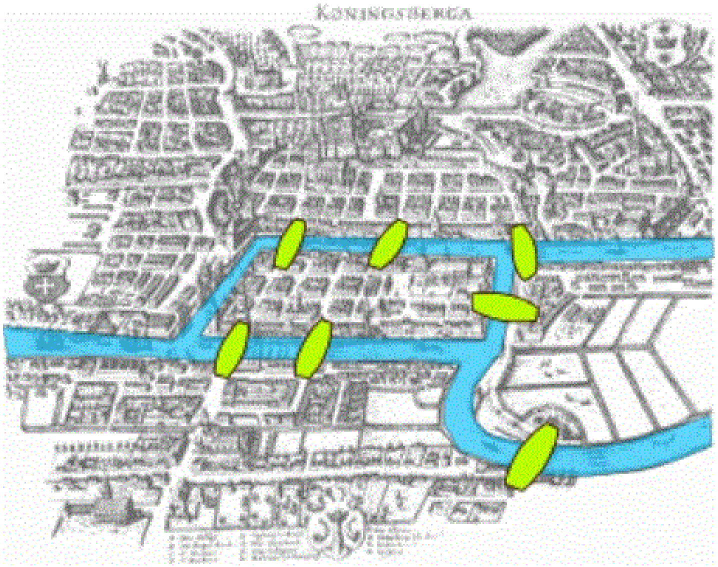
Como podemos observar no trecho descrito anteriormente, para Sylvester, Matriz estava intimamente associada às ideias de determinante.

Apesar de Sylvester já ter falado de matriz, foi Cayley (1821 – 1895) que em 1858 apresenta em sua obra "Memoir on the Theory of Matrices" [10] um estudo sobre matrizes como método de simplificar a notação de uma transformação linear.

Alguns anos adiante, Cayley escreve sobre a adição de matrizes e sobre a multiplicação de matrizes por escalares, bem como suas propriedades.

O início do estudo sobre grafos e suas propriedades foi uma das muitas e grandes contribuições do matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783).

Em 1736, foi apresentado um desafio a Euler, até então sem solução. Na cidade de Konigsberg (Rússia), que era cortada pelo rio Pregel, havia duas ilhas ligadas entre si por uma ponte, e essas ilhas eram, também, ligadas com o continente por outras seis pontes. O desafio consistia em saber se era possível atravessar as sete pontes sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida. Euler mostra que o trajeto que se buscava não existia, solucionando assim o problema. Para chegar a essa conclusão ele fez uma representação gráfica da situação proposta pelo desafio utilizando-se de linhas e pontos para representar as pontes e as regiões de terra respectivamente. Tal representação é considerada como o marco inicial da teoria de grafos.



Konigsberg Bridges – Fonte:
https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

Figura 1 - Pontes de Konigsberg

Veremos mais adiante que, no desenvolvimento da teoria de grafos, a utilização de matrizes torna-se um recurso importante para a representação dos grafos, principalmente com o surgimento dos computadores e de sua aplicação como ferramenta otimizadora na solução de problemas.

Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada do seguinte modo.

No capítulo 1 apresentamos o conceito de matriz e algumas propriedades. Abordamos, também, as operações com matrizes e o conceito de matriz inversa.

No capítulo 2 é apresentado o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 1, 2 e 3 e o Teorema de Laplace para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem n, com $n \geq 2$.

No capítulo 3 trazemos a introdução à teoria de grafos, sua representação através de diagramas e matrizes e alguns tipos de grafos. Neste capítulo abordamos também os trajetos eulerianos.

No capítulo 4 mostramos dois algoritmos: de Fleury (para trajetos eulerianos) e de Dijkstra (caminho mais curto).

No capítulo 5 trazemos uma sugestão de plano de aula para ser desenvolvido com alunos do 2º ano do ensino médio sobre a teoria de grafos.

Finalizamos com a conclusão onde são apresentadas algumas considerações sobre a dissertação realizada.

CAPÍTULO 1 – Matrizes e suas Propriedades

Nesse capítulo vamos apresentar o conceito de matriz e algumas de suas principais propriedades.

Nossas principais referências para este capítulo foram [6] e [14].

1.1 Conceito de Matriz

Damos o nome de matriz a uma tabela de elementos organizados em linhas e colunas.

Cada número que compõe uma matriz é chamado de elemento ou termo.

Em uma matriz, cada elemento ocupa uma posição definida por certa linha e por certa coluna, nessa ordem.

Veja a matriz a seguir:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz possui 3 linhas e 2 colunas. Nesse caso, dizemos que é uma matriz do tipo 3 x 2 (3 linhas e 2 colunas).

Genericamente, cada elemento de uma matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij} , em que *i* indica a linha e *j* indica a coluna.

Considerando a matriz acima, temos por exemplo:

- O elemento 5 está na 2ª linha e 1ª coluna; então $a_{21} = 5$.
- O elemento 9 está na 3ª linha e 2ª coluna; então $a_{32} = 9$.
- O elemento - 2 está na 1ª linha e 2ª coluna; então $a_{12} = -2$.

Assim, uma matriz A de m linhas e n colunas é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{com } m, n \in \mathbb{N}^*$$

De forma abreviada podemos escrever A = $(a_{ij})_{mxn}$.

1.2 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes, A e B, são matrizes iguais se, e somente se, elas possuem a mesma ordem e os elementos que ocupam a mesma posição em ambas as matrizes são iguais (elementos correspondentes).

Genericamente, podemos representar da seguinte forma:

$$A_{mxn} = B_{mxn} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}, 1 \leq i \leq m \; e \; 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo 1.2.1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1/8 \\ cos\, 60° & 0 \\ 2^3 & 3^0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -4 & 2^{-3} \\ 0{,}5 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes A e B são iguais pois são de mesma ordem (3x2) e os elementos correspondentes, embora com representações distintas, são iguais.

1.3 Tipos de Matrizes

Determinadas matrizes apresentam tipos especiais de estruturas e propriedades específicas. Vamos, a seguir, apresentar algumas dessas matrizes.

- **<u>Matriz Quadrada</u>**

Uma matriz de ordem *m* x *n* é quadrada quando o número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, *m* = *n*.

Exemplo 1.3.1

A= $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2x2 ou, simplesmente, matriz de ordem 2.

Especificamente nas matrizes quadradas, temos elementos que formam o que denominamos diagonal principal e diagonal secundária.

Considerando uma matriz quadrada de ordem n, temos:

A diagonal principal da matriz é formada pelos elementos a_{ij} em que *i* = *j*, isto é, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$.

A diagonal secundária da matriz é formada pelos elementos a_{ij} em que *i* + *j* = *n* + 1, isto é, $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \ldots, a_{n1}$

Exemplo 1.3.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundária Diagonal principal

- **Matriz Nula**

Uma matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero, isto é, $a_{ij} = 0$, para todo *i* e *j* é chamada matriz nula.

Exemplo 1.3.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz Linha**

A matriz que possui apenas uma linha, isto é, a matriz do tipo 1 x *n* é chamada de matriz linha.

Exemplo 1.3.4

$$A = (1 \quad -2 \quad 3).$$

- **Matriz Coluna**

A matriz que possui apenas uma coluna, isto é, a matriz do tipo *m* x 1 é chamada de matriz coluna.

Exemplo 1.3.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz Diagonal**

A matriz diagonal é a matriz quadrada em que os elementos que não estão na diagonal principal são todos nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo 1.3.6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 6 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz Triangular**

É a matriz quadrada de ordem n cujos elementos, acima ou abaixo da diagonal principal, são todos nulos. Assim, $a_{ij} = 0$ para $i < j$ ou $a_{ij} = 0$ para $i > j$. No primeiro caso, dizemos que A é triangular inferior. E, no segundo caso, triangular superior.

Exemplo 1.3.7

A = $\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & -5 & 5 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 8 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz Identidade**

É a matriz quadrada de ordem n em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais elementos, iguais a 0. Nesse tipo de matriz temos, então, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$. Quando temos uma matriz identidade de ordem *n* é comum representá-la por I_n.

Exemplo 1.3.8

I_3 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz Transposta**

Dada uma matriz A, *m* x *n*, em que A $= (a_{ij})$, *i* = 1,...,m e j = 1,...,n, representamos a matriz transposta de A por A^t, *n* x *m*, onde $A^t = (a'_{ji})$ tal que $a'_{ji} = (a_{ij})$ para j = 1,...n e i = 1,...,m.

Exemplo 1.3.9

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ e A^t = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Note que:

- A ordem da matriz A é 2 x 3 e a ordem da matriz A^t é 3 x 2;
- A 1ª linha da matriz A corresponde à 1ª coluna da matriz A^t;
- A 2ª linha da matriz A corresponde à 2ª coluna da matriz A^t.

- **Matriz Simétrica**

É uma matriz quadrada A de ordem n em que A = A^t. Nesse tipo de matriz temos $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 1.3.10

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ é uma matriz simétrica porque A = A^t.

Observe que os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

- **Matriz Oposta**

Dada uma matriz A, denomina-se matriz oposta de A, e indica-se por –A, aquela cujos elementos são os simétricos dos elementos correspondentes de A.

Exemplo 1.3.11

A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$ então –A = $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -3 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$.

Nota-se que –A é obtida trocando-se todos os sinais de todos os elementos de A.

1.4 Operações com Matrizes

Em seguida vamos apresentar as principais operações envolvendo matrizes.

1.4.1 Adição e Subtração

Dada duas matrizes A e B, ambas de ordem m x n, podemos efetuar a adição de A com B adicionando-se, respectivamente, os seus elementos correspondentes. Assim, a matriz C, também de ordem m x n, é dada por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ 1 \leq i \leq\ m$ e $1 \leq j \leq\ n$.

Exemplo 1.4.1.1

A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

A + B = $\begin{pmatrix} 4+3 & 2+4 \\ 3+5 & -3+1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Então, C = $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Dada duas matrizes A e B, ambas de ordem m x n, podemos calcular a diferença A – B subtraindo-se os seus elementos correspondentes. Assim, a matriz C, também de ordem m x n, é dada por $c_{ij} = a_{ij}\ -\ b_{ij},\ 1 \leq i \leq\ m$ e $1 \leq j \leq\ n$.

Exemplo 1.4.1.2

A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

A – B = $\begin{pmatrix} 4\ -\ 3 & 2\ -\ 4 \\ 3\ -\ 5 & -3\ -\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Então, C = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Propriedades

Dadas as matrizes A, B, C e O de mesma ordem, temos:

- A + B = B + A (propriedade comutativa).
- A + (B + C) = (A + B) + C (propriedade associativa).
- A + O = A (propriedade do elemento neutro).

Nesse caso, O é a matriz nula de mesma ordem da matriz A.

- A + (–A) = O

Nesse caso, –A é a matriz oposta de A e O é a matriz nula de mesma ordem de A.

1.4.2 Multiplicação de um Número Real por uma Matriz

Para multiplicarmos um número real por uma matriz devemos multiplicar o número real por todos os elementos da matriz.

Dada a matriz A = (a_{ij}), de ordem m x n, e um número real k, temos que k.A é uma matriz B = (b_{ij}), de ordem m x n, tal que $(b_{ij}) = k.a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq \ m$ e $1 \leq j \leq \ n$.

Exemplo 1.4.2.1

Seja A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, então 4. A = $\begin{pmatrix} 4\,.\,4 & 4\,.\,2 \\ 4\,.\,3 & 4\,.\,(-3) \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$.

Propriedades

Dadas as matrizes A e B de mesma ordem, e β, α números reais, temos:

- β(A + B) = βA + βB
- (β + α)A = βA + αA
- 0A = 0
- α(βA) = (αβ)A

1.4.3 Multiplicação de Matrizes

Dadas as matrizes A = (a_{ij}), de ordem m x n, e B = (b_{rt}), de ordem n x p, podemos obter a matriz C = (c_{it}), como a matriz produto entre A e B.

Cada elemento c_{it} é obtido através da adição dos produtos dos elementos da linha i de A pelos elementos da coluna t de B, tomados ordenadamente:

$$(c_{it}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kt} = a_{i1}b_{1t} + a_{i2}b_{2t} + \ldots + a_{im}b_{mt}.$$

Dadas as matrizes A e B, vamos determinar a matriz C = A.B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ então,}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} \end{pmatrix}.$$

Vale ressaltar que o produto de duas matrizes A e B só é possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. A matriz C, produto entre A e B, terá o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

$$A_{mxn}.\, B_{nxp} = C_{mxp}$$

<u>Propriedades</u>

- Propriedade I (associativa)

Dadas as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{pxr}, temos (A.B).C = A.(B.C)

- Propriedade II (distributiva à esquerda)

Dadas as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{nxp}, temos A.(B+C) = A.B + A.C

- Propriedade III (distributiva à direita)

Dadas as matrizes A_{mxn}, B_{mxn} e C_{nxp}, temos (A +B).C = A.C + B.C

- Propriedade IV (elemento neutro)

Dadas as matrizes A_{mxn} e as matrizes identidades I_m e I_n, temos I_m.A = A e A.I_n= A.

- Propriedade V

Dadas as matrizes A_{mxn} e B_{nxp}, temos $(A.B)^t$= $B^t.A^t$

- Propriedade VI

Dadas as matrizes A_{mxn} e B_{nxp} e o número k ∈ ℝ, temos (k.A).B = A.(k.B) = k.(A.B).

Convém ressaltar que a propriedade comutativa não vale para a multiplicação de matrizes.

1.4.4 Matriz Inversa

Seja dada uma matriz quadrada A, de ordem n. Se existir uma matriz quadrada B, também de ordem n, tal que A.B = B.A = I_n, então dizemos que B é a matriz inversa de A e indicamos por A^{-1}.

Quando uma matriz quadrada possui inversa, dizemos que a matriz é invertível (ou não singular). Caso contrário dizemos que a matriz é não invertível (ou singular).

Exemplo 1.4.4.1

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ temos que ela será invertível se existir uma matriz B= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que A.B = I_2, ou seja:

A.B = $I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ 5a+2c & 5b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir da igualdade de matrizes, temos os sistemas:

$$(1) \begin{cases} 3a+c=1 \\ 5a+2c=0 \end{cases} \quad \text{e } (2) \begin{cases} 3b+d=0 \\ 5b+2d=1 \end{cases}$$

Caso algum dos sistemas (1) e (2) seja impossível, então a matriz A não é invertível.

Analisando cada um dos sistemas:

$$(1) \begin{cases} 3a+c=1 \quad .(-2) \\ 5a+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a - 2c = -2 \\ 5a+2c=0 \end{cases}$$

$$-a = -2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$3a+c=1 \Rightarrow 3.2+c=1 \Rightarrow 6+c=1 \Rightarrow \boxed{c=-5}$$

$$(2) \begin{cases} 3b+d=0 \quad .(-2) \\ 5b+2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6b - 2d = 0 \\ 5b+2d=1 \end{cases}$$

$$-b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$3.(-1)+d=0 \Rightarrow -3+d=0 \Rightarrow \boxed{d=3}$$

Assim, B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Agora, vamos verificar se A.B = I_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2+1.(-5) & 3.(-1)+1.3 \\ 5.2+2.(-5) & 5.(-1)+2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Portanto, a matriz A é invertível.

CAPÍTULO 2 – Determinantes

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, podemos associar a ela um número real, chamado determinante e indicamos esse determinante por det A.

2.1 Determinante de uma Matriz de Ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento a_{11}, ou seja, det A = $|a_{11}|$ = a_{11}.

Exemplo 2.1.1

A = (– 2), então det A = – 2.

2.2 Determinante de uma Matriz de Ordem 2

O determinante de uma matriz quadrada A, de ordem 2, é obtido calculando-se a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Assim, dada a matriz A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ temos que det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $a_{11}.\,a_{22}$ – $a_{12}.\,a_{21}$.

Exemplo 2.2.1

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, vamos encontrar o determinante de A.

det A = $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 2.5 – 4.1 = 10 – 4 = 6.

2.3 Determinante de uma Matriz de Ordem 3

Dada uma matriz quadrada A de ordem 3, A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ podemos calcular o seu determinante efetuando o seguinte cálculo:

$(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{23}.a_{32}.a_{11})$.

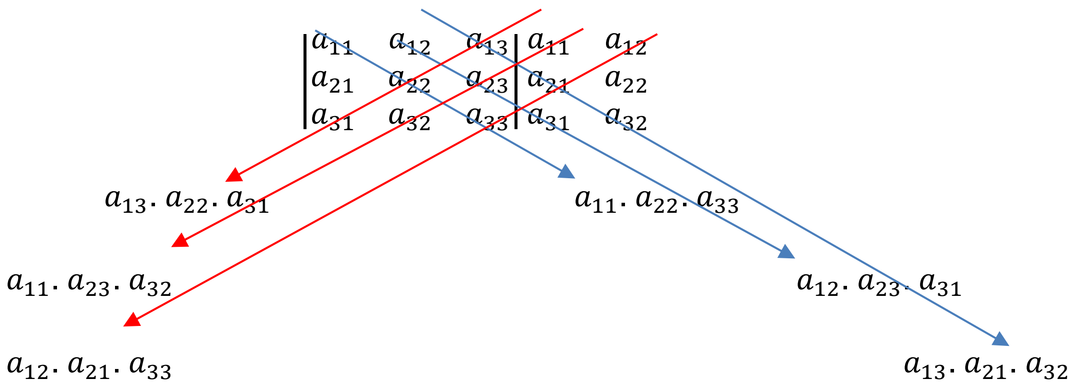
Podemos, também, calcular o determinante da matriz utilizando a regra de Sarrus.

Essa regra compreende alguns procedimentos:

1. Ao lado da matriz copiam-se as duas primeiras colunas.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2. Em seguida, efetuam-se as multiplicações conforme as indicações das setas representadas no esquema:



3. Por fim, calcula-se a diferença entre a soma dos resultados obtidos nas setas azuis e a soma dos resultados obtidos nas setas vermelhas.

Exemplo 2.3.1

Dada a matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, vamos calcular o det A.

det A = [1.1. (–1) + 2.3.2 + 3.4. (–2)] – [(–2).1.2 + 2.3. (–1) + 3.4.1]

det A = [–1 + 12 –24] – [– 4 – 6 + 12]

det A = –13 – 2

det A = –15.

2.4 Determinante de uma Matriz de Ordem n

Para calcularmos o determinante de uma matriz quadrada de ordem n, com n≥ 2, podemos usar o Teorema de Laplace. Porém, antes precisamos falar sobre cofator de um elemento da matriz.

- **<u>Cofator</u>**

Dada uma matriz quadrada A de ordem n ≥ 2, chamamos cofator do elemento a_{ij}, e denominamos C_{ij} ao produto $(-1)^{i+j}$. D_{ij} onde D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de A.

Exemplo 2.4.1

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e calculemos C_{12}.

Temos $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ então C_{12}= $(-1)^{1+2}$.$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ = -1.(3–56) = 53.

- **<u>Teorema de Laplace</u>**

Teorema 2.1 O determinante de uma matriz M, de ordem n ≥ 2, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Demonstração: (A demonstração completa pode ser vista no Apêndice I do livro de Iezzi [5]).

Assim, considerando a matriz quadrada A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, para calcularmos o seu determinante podemos escolher, por exemplo, a 2ª linha.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

então, det A = $a_{21}.C_{21}$+$a_{22}.C_{22}$+$a_{23}.C_{23}$.

Exemplo 2.4.2

Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, vamos calcular o det A.

Inicialmente vamos escolher a 1ª linha e calcular os cofatores C_{11}, C_{12}, C_{13} e C_{14}.

C_{11}= $(-1)^{1+1}$. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$= 1. [(0 – 36 + 70) – (– 15 + 0 + 30)] = 34 – 15 = 19

C_{12}= $(-1)^{1+2}$. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$= –1. [(0 + 48 + 0) – (20 + 0 – 12)] = – 48 + 8 = – 40

C_{13}= $(-1)^{1+3}$. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$= 1. [(0 + 60 + 0) – (140 +18 + 0)] = 60 – 158 = – 98

C_{14}= $(-1)^{1+4}$. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$= –1. [(–28 + 20 + 0) – (112 + 6 +0)] = 8 + 118 = 126

Agora, calculamos $a_{11}.C_{11}$+$a_{12}.C_{12}$+$a_{13}.C_{13}$ + $a_{14}.C_{14}$ = 1.19 + 0.(–40) + 3.(–98) + 2.126 = 19 – 294 + 252 = – 23.

Portanto, det A = – 23.

Propriedades

- Se A é a matriz de ordem n e A^t sua transposta, então det A^t = det A.
- Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz A de ordem n forem todos nulos, então det A = 0.

- Se multiplicarmos uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz A de ordem n por um número k, o determinante da nova matriz A' obtida será o produto de k pelo determinante de A, isto é, det A' = k.det A.
- Seja A uma matriz de ordem n ≥ 2. Se trocarmos de posição duas filas (linhas ou colunas) paralelas obteremos uma nova matriz A' tal que det A' = –det A.
- Se uma matriz A de ordem n ≥ 2 tem duas filas paralelas (linha ou coluna) formadas por elementos respectivamente iguais, então det A = 0.
- Se uma matriz A de ordem n ≥ 2 tem duas filas paralelas (linha ou coluna) formadas por elementos respectivamente proporcionais então det A = 0.
- Adicionando-se a uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A, de ordem n, uma outra fila (linha ou coluna) paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz A', tal que det A' = det A. (Teorema de Jacobi).
- Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n, então det (A.B) = det A. det B. (Teorema de Binet).

Há outras maneiras de obtermos o determinante de uma matriz A_{nxn}, com base na fatoração de A. Ver, por exemplo, referência [15]. No entanto não abordaremos estas formas aqui.

CAPÍTULO 3 – Introdução à Teoria dos Grafos

Nesse capítulo iremos apresentar a ideia de grafo e alguns conceitos básicos inerentes ao assunto. As principais referências desse capítulo são [9] e [3].

3.1 Conceito de Grafo

Um grafo G é uma estrutura formada por dois conjuntos, V e A, onde V é um conjunto finito, e não vazio, de elementos denominados vértices e denotado por V(G). Os elementos do conjunto A, denotados por A(G), são pares não-ordenados de elementos distintos de V chamados arestas ou arcos.

Dizemos que um percurso em um grafo G, tal que $V_iV_{i+1} \neq V_jV_{j+1}, 1 \leq i, j \leq n-1$, é uma trilha em G e um percurso tal que $V_i \neq V_j$, exceto possivelmente $V_1 = V_n$, é um caminho em G. Assim podemos dizer que em uma trilha as arestas não se repetem e que em um caminho os vértices são todos distintos, exceto o ponto inicial que pode ser igual ao ponto final. Um caminho com $V_1 = V_n$ é chamado ciclo, e uma trilha com $V_1 = V_n$ é chamado circuito (ou trilha cíclica).

Podemos estabelecer uma função ΨG que associa a cada aresta α de G um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G, chamados de extremos de α.

3.2 Representação de um Grafo através de Diagramas

A representação de um grafo pode ser feita através de diagramas. Nesse caso, cada vértice será representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos.

Exemplo 3.2.1

A seguir temos a representação de um grafo Z na forma de diagrama.

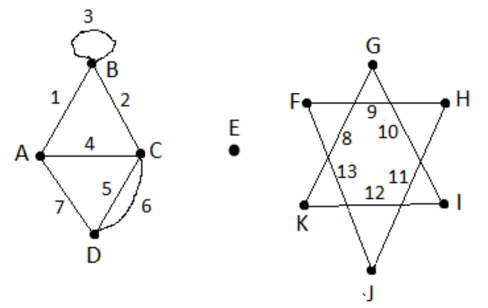


Figura 2 – Grafo Z

Nesse grafo temos os vértices V(Z) = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K} e as arestas A(Z) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

Uma função ΨZ pode ser estabelecida, associando cada aresta α de Z a um par não ordenado ΨZ(α) conforme representação a seguir.

α	ΨZ(α)
1	(A, B)
2	(B, C)
3	(B)
4	(A, C)
5	(C, D)
6	(C, D)
7	(A, D)
8	(G, K)
9	(F, H)
10	(G, I)
11	(H, J)
12	(K, I)
13	(F, J)

3.3 Arestas e Vértices

3.3.1 Arestas e Vértices Adjacentes

Definimos como arestas adjacentes aquelas que possuem pelo menos um extremo em comum. E dizemos que um vértice A é adjacente a um vértice B em V(Z) se existe uma aresta conectando A e B. Assim, para um subconjunto X de V(Z), denominamos AdjZ(X) ao conjunto dos vértices de Z adjacentes a pelo menos um dos vértices de X.

Exemplo 3.3.1.1

Seja X um subconjunto de V(Z) tal que X = (B, H, I), então AdjZ(X) = (A, B, C, F, J, G, K).

3.3.2 Arestas Paralelas

Quando duas arestas conectam os mesmos vértices de um grafo, dizemos que essas arestas são paralelas. Na figura a seguir podemos observar que as arestas h e c são paralelas.

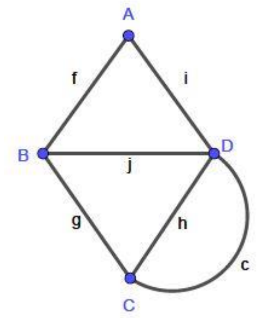


Figura 3 – Arestas paralelas

3.3.3 Laço

Dizemos que temos um laço quando os extremos de uma aresta coincidem. Caso contrário, temos uma ligação. Na Figura 4, podemos identificar um laço no vértice D.

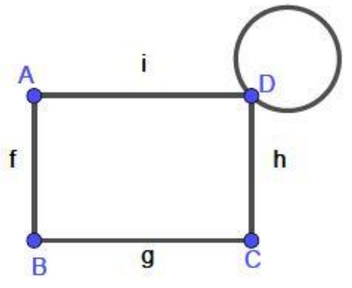


Figura 4 - Laço

3.4 Ordem e Tamanho de um Grafo

A ordem de um grafo G é dada pelo número de vértices de G. Assim, por exemplo, o grafo Z representado na Figura 2 tem ordem 11.

A soma do número de vértices com o número de arestas de um grafo G é denominada tamanho do grafo G. Ainda na Figura 2, podemos observar que há 11 vértices e 13 arestas o que nos dá um grafo de tamanho 24.

O grafo sem vértices e sem arestas é considerado um grafo de tamanho zero e é chamado de grafo vazio.

3.5 Grau de um Vértice

Considerando um grafo G e a representação V(G) e A(G), respectivamente, como o conjunto de vértices e o conjunto de arestas de G, o grau de um vértice K é dado pelo número de arestas que incidem em K, sendo que os laços são contados duas vezes. Dessa definição segue imediatamente a proposição:

Proposição 3.1 – A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do grafo, ou seja, $\sum_{\mathrm{K} \in \mathrm{V(G)}} g(K)$ é par.

Demonstração:

Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

Corolário 3.1 – Em todo grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Demonstração:

Considere G um grafo com *m* vértices de grau par e *n* vértices de grau ímpar, onde *n* e *m* são números inteiros não negativos. Vamos verificar que *n* é par.

Se *n* = 0, então G tem um número par de vértices de grau ímpar.

Agora para $n \geq 1$ vamos considerar P como a soma dos graus de todos os vértices de grau par; I como a soma dos graus de todos os vértices de grau ímpar e T como a soma de todos os graus de todos os vértices de G.

Consideremos $P_1, P_2, \ldots, P_m$ os vértices de grau par e $I_1, I_2, \ldots, I_n$ os vértices de grau ímpar. A partir daí teremos:

$P = \text{grau}(P_1) + \text{grau}(P_2) + \ldots + \text{grau}(P_m)$;

$I = \text{grau}(I_1) + \text{grau}(I_2) + \ldots + \text{grau}(I_n)$;

$T = \text{grau}(P_1) + \text{grau}(P_2) + \ldots + \text{grau}(P_m) + \text{grau}(I_1) + \text{grau}(I_2) + \ldots + \text{grau}(I_n)$;

Como T = P + I, que pela Proposição 3.1, concluímos que T deve ser um número par. Assim, P é par, pois é uma soma de números pares.

Fazendo I = T – P, concluímos que I é par pois temos a diferença entre dois números pares, T e P.

Portanto, como I é um número par e $I = \text{grau}(I_1) + \text{grau}(I_2) + \ldots + \text{grau}(I_n)$, é a soma de n números ímpares, o número de parcelas dessa soma é par e logo, concluímos que n é um número par.

Para ilustramos o corolário acima, considere o grafo Z representado na figura abaixo.

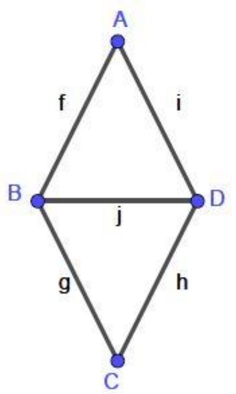


Figura 5 – Grafo Z

A partir da observação desse grafo podemos identificar algumas características:

Número de arestas: 5;

Número de vértices: 4;

Ordem(Z) = 4;

Tamanho (Z) = 4 + 5 = 9;

Grau: g(A) = 2; g(B) = 3; g(C) = 2; g(D) = 3.

A soma: g(A) + g(B) + g(C) + g(D) = 10 (par, conforme Proposição 3.1).

Vértices de grau par: A e C;

Vértices de grau ímpar: B e D.

Soma dos graus dos vértices: 10.

3.6 Representação de um Grafo através de Matrizes

Um grafo pode ser também representado utilizando-se o conceito de matriz. Através dessa representação podemos, por exemplo, utilizar linguagens de programação e/ou programas de computador para auxiliar na resolução de problemas envolvendo a Teoria de Grafos.

Essa representação pode ser feita utilizando-se a matriz de adjacência e a matriz de incidência, as quais detalharemos a seguir.

- **Matriz de Adjacência**

Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz *n* x *n*, onde *n* representa o número de vértices de um grafo G qualquer. A matriz de adjacência M é obtida da seguinte forma:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } o\ vértice\ V_i\ se\ liga\ ao\ vértice\ V_j \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 6 mostra um grafo G e, em seguida, temos sua matriz de adjacência.

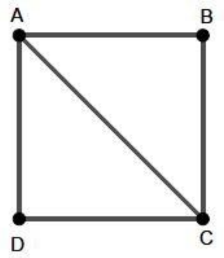


Figura 6 – Grafo G

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

▪ Matriz de Incidência

Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz *n* x *k*, onde n representa o número de vértices e *k* o número de arestas de um grafo G = (V,A), com V = $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ e A = $(a_1, a_{2,} \ldots a_k)$. A matriz de incidência M é obtida da seguinte forma:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } \mathrm{a_j} \text{ for incidente a } \mathrm{V_i} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Considerando, ainda, o exemplo da Figura 6, podemos obter:

	(A,B)	*(A,C)*	*(A,D)*	*(B,C)*	*(C,D)*
A	1	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	0	1	0	1	1
D	0	0	1	0	1

Tabela 1 – Incidência da Figura 6

Resultando na matriz de incidência:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7 Tipos de Grafos

- **Grafo Simples**

Um grafo que não contém laços nem arestas paralelas é denominado grafo simples.

Exemplo 3.7.1

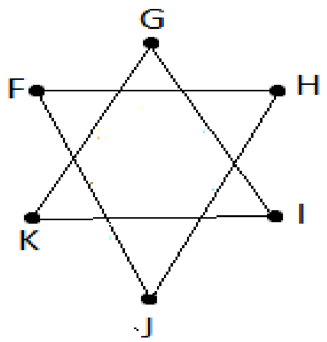


Figura 7 – Grafo Simples

- **Grafo Regular**

Um grafo é chamado regular, quando seus vértices têm todos o mesmo grau. Nesses casos, é comum chamar o grafo de k-regular, onde k representa o grau dos vértices.

Exemplo 3.7.2

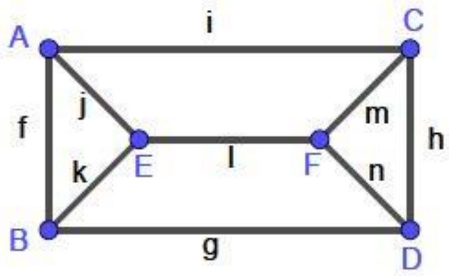


Figura 8 – Grafo 3-regular

- **Grafo Completo**

Quando temos um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes, dizemos que este é um grafo completo.

Um grafo completo com N vértices é denotado por Kn. A Figura 9 apresenta um grafo regular completo com 5 vértices, portanto K5. É pertinente também ressaltar que, em um grafo completo Kn, os seus vértices têm grau igual a *n – 1*.

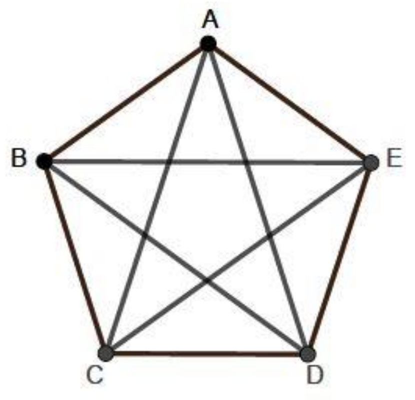


Figura 9 – Grafo Completo K5

Corolário 3.2 O número de arestas de um grafo completo Kn é $\frac{n.(n-1)}{2}$ **.**

<u>Demonstração:</u>

Considerando que Kn é um grafo regular simples e que o grau de cada vértice é (n – 1), podemos afirmar que a soma dos graus do grafo é n. (n – 1).

Aplicando a Proposição 3.1, a qual garante que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do grafo, concluímos que o número de arestas do grafo é $\frac{n.(n-1)}{2}$.

- ## <u>Grafo Orientado</u>

Um grafo G = (V,E) é orientado se os elementos de E são pares ordenados. Nesse caso, usamos (V_1,V_2) para indicar que a aresta que incide nos vértices V_1 e V_2 é orientada com início em V_1 e fim em V_2. Graficamente, utilizaremos setas para indicar a orientação das arestas.

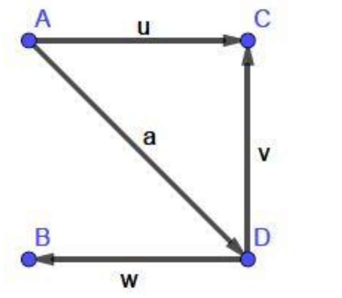


Figura 10 a – Grafo Orientado

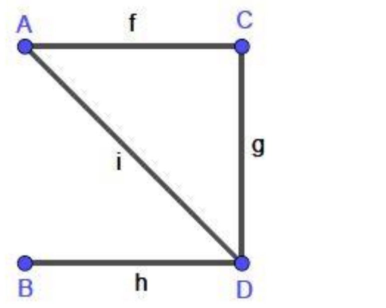


Figura 10 b – Grafo Não Orientado

- <u>**Grafo Conexo**</u>

Um grafo é dito conexo quando, para qualquer par (B,K) de seus vértices, existir um caminho com extremos em B e K.

Usando o grafo da Figura 11, podemos observar que o vértice V_2 não está ligado diretamente ao vértice V_1.

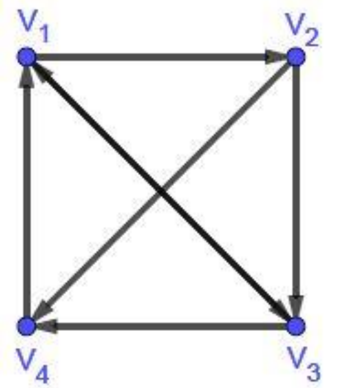


Figura 11 – Conexão

Entretanto, podemos conectar V_2 a V_1 utilizando a conexão $V_2 \rightarrow V_4 \rightarrow V_1$. Nesse caso, temos uma conexão de 2 passos (número de arcos). Da mesma forma, teríamos uma conexão de 3 passos em $V_2 \rightarrow V_4 \rightarrow V_1 \rightarrow V_3$.

O teorema a seguir mostra o número de todas as conexões de k passos, $k \in \mathbb{N}$, de um vértice V_i para um vértice V_j de um grafo orientado qualquer.

Teorema 3.1 Seja M uma matriz de vértices (matriz de adjacência) de um grafo orientado e seja m_{ij}^{k} o elemento (i,j) da matriz M^k. Então m_{ij}^{k} é igual ao número de conexões de k passos do vértice V_i para o vértice V_j.

Demonstração: Ver em [3].

Exemplo 3.7.3

a) Considere o grafo G, orientado, e sua matriz de adjacência dada por:

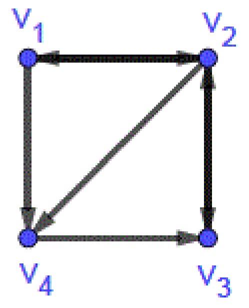


Figura 12 – Grafo G Orientado

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos encontrar o número de conexões de 2 passos do vértice V_1 ao vértice V_3.

De acordo com o Teorema 3.1, o número de conexões é dado pelo elemento m_{13}^{2} da matriz A^2.

$$A^2 = A \,.\, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontramos então que $m_{13}^{2} = 2$, ou seja, há duas conexões de dois passos para ir do vértice V_1 ao vértice V_3.

Analisando a Figura 12 podemos observar que essas duas conexões são:

$V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3$

e

$V_1 \longrightarrow V_4 \longrightarrow V_3$

b) Considere a matriz A como sendo a matriz de vértices de um grafo orientado dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, vamos encontrar o número de conexões de 3 passos do vértice V_1 ao vértice V_4.

Para auxiliar na visualização do grafo, vamos representá-lo através da figura abaixo:

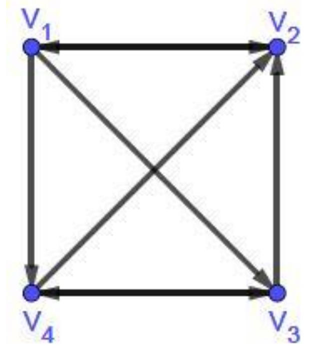


Figura 13 – Grafo Orientado

De acordo com o Teorema 3.1, utilizamos a matriz A^3.

$$A^3 = \text{A.A.A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como m_{14}^3 = 2, concluímos que há duas conexões de 3 passos para ir do vértice V_1 ao vértice V_4 .

3.8 Trajetos Eulerianos

Dizemos que temos um trajeto euleriano (grafo euleriano), em homenagem a Leonhard Euler, quando nesse trajeto passamos por todas as arestas uma, e uma só vez. Quando a partida e a chegada acontecem no mesmo vértice, temos um trajeto fechado, ou circuito, caso contrário, se a partida e a chegada não se derem no mesmo vértice, temos um trajeto aberto. Esse tipo de grafo tem origem no desafio apresentado a Euler, conhecido como o problema das pontes de Konigsberg, onde desejava-se saber se era possível atravessar as sete pontes sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida.

Temos um trajeto semi-euleriano (grafo semi-euleriano) quando nesse caminho percorremos todas as arestas do grafo passando uma única vez por cada uma delas, porém o início e o término do percurso são em vértices distintos.

Para verificarmos se um grafo tem trajetos eulerianos ou não recorremos ao teorema a seguir.

Teorema 3.2 Um grafo conexo G = (V,A) admite trajeto euleriano se, e somente se, todas os vértices tiverem grau par.

<u>Demonstração:</u> (baseada em [1])

(⇒) Tomando G como um grafo euleriano, podemos afirmar que G contempla um ciclo euleriano. Assim, a partir de cada vértice, há uma aresta saindo e outra chegando até ele, uma vez que não há repetição de arestas. Como toda aresta pertence ao trajeto, podemos afirmar que o número de arestas em cada vértice é par porque a chegada ao vértice se dá por uma aresta e a saída dele será por outra aresta.

(⇐) Considere G um grafo com todos os vértices de grau par. Tomemos um vértice V_a, qualquer de G, onde iremos construir um trajeto com a condição de não passarmos duas vezes pela mesma aresta. Pelo fato de que todos os vértices têm grau par, poderemos sempre chegar e sair em um vértice por arestas diferentes. Se após esse fazermos esse trajeto, que chamaremos de C, tivermos percorrido todas as arestas de G, então finalizamos a demonstração. Caso contrário, podemos retirar de G as arestas que percorremos em C, e aí, teremos um novo grafo G', em que todos os vértices têm grau par e necessariamente, um desses vértices pertence a C uma vez que G é um grafo conexo. Tomemos esse vértice como V_b e a partir dele, podemos construir um caminho C', que passará por todas as arestas e retornará a V_b. A partir desse vértice podemos unir os grafos C e C' e obtermos um trajeto único. Se por acaso alguma aresta ainda não tiver sido percorrida podemos repetir o processo até que todas sejam percorridas. Dessa forma, temos o ciclo euleriano e consequentemente o grafo é euleriano.

Na figura 14 temos um exemplo de um grafo euleriano:

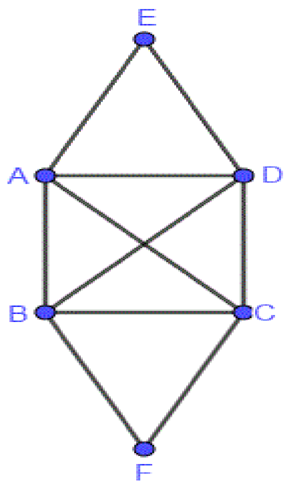


Figura 14 – Ciclo euleriano

No grafo da figura 14, temos o ciclo euleriano: (A – E – D – A – C – D – B – F – C – B – A).

Proposição 3.2: Um grafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, possuir exatamente um par de vértices de grau ímpar.

Demonstração:

(⇒) Seja G um trajeto aberto de comprimento m com início em um vértice V_a e término em um vértice V_b sem repetir arestas (grafo semi-euleriano de dimensão m). Como o caminho é aberto, os vértices V_a e V_b são distintos. Portanto, V_a e V_b têm grau ímpar, pois a trilha não termina onde começou.

(⇐) Tomemos G como sendo um Grafo conexo com um par de vértices de grau ímpar e sejam V_a e V_b esses vértices com grau ímpar. Se acrescentarmos uma aresta ligando V_a e V_b teremos todos os vértices com grau par, e fundamentado pelo teorema 3.1 teremos um ciclo euleriano de comprimento m + 1 em G e um trajeto aberto de comprimento m com início em V_a e término em V_b.

Na Figura 15 temos um exemplo de um grafo semi-euleriano (A – B – E – C – B – D – C – A – D).

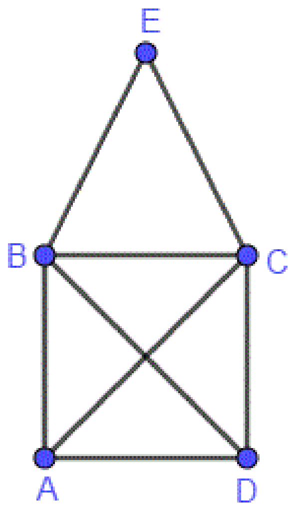


Figura 15 – Grafo Semi-euleriano

Um problema bastante conhecido, e relacionado a grafos eulerianos, é o Problema do Carteiro Chinês, que foi criado pelo matemático chinês Kwan Meio-Ko em 1962. Ele se baseou no trajeto que os carteiros faziam, em sua cidade, para entregar as cartas. O problema que ele levantou era que o carteiro deveria passar por todas as ruas da região para efetuar a entrega das cartas em todas as casas e percorrer o menor trajeto possível. Nesse caso, abordaremos um tipo de grafo conhecido como grafo valorado, onde suas arestas têm “valores” que podem, por exemplo, indicar a distância entre dois vértices ligados pela aresta.

A seguir temos um exemplo de um grafo valorado.

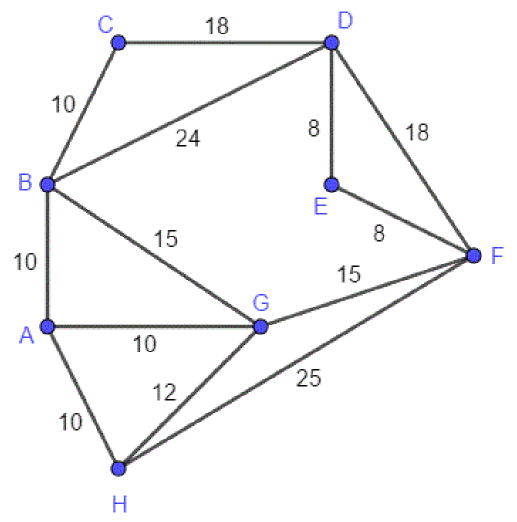


Figura 16 - Grafo valorado.

No caso da representação do trajeto que o carteiro tem que percorrer ser um grafo euleriano, então a questão está resolvida. O menor trajeto possível é a soma dos valores de cada uma das arestas do grafo.

Entretanto, se o grafo não for euleriano o carteiro terá que passar mais de uma vez por uma ou mais arestas, buscando fazer o percurso que tenha o menor valor. Para ilustrar essa situação vamos considerar a Figura 17 como sendo o desenho da região que o carteiro tem que percorrer, onde as arestas representam as ruas, e os valores apresentados em cada aresta representam a distância a ser percorrida por ele.

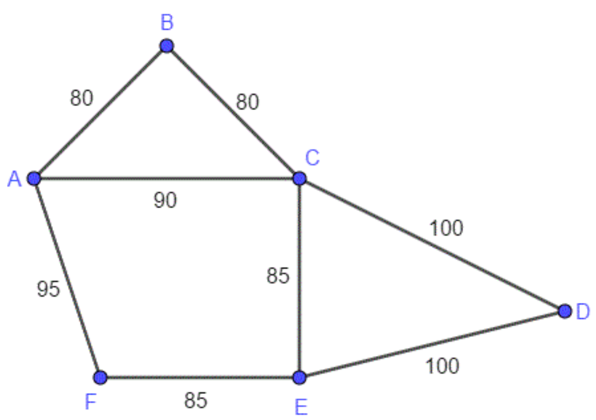


Figura 17 – Aplicação do Carteiro Chinês

Observe que na figura temos 6 vértices (A, B, C, D, E, F) sendo que 2 deles (A e E) têm grau ímpar. Sendo assim, temos um grafo semi-euleriano e, portanto, para termos um caminho semi-euleriano podemos partir do vértice A e chegarmos ao vértice E ou vice-versa. Como o carteiro precisa partir e retornar no mesmo vértice temos que encontrar o caminho com menor valor para o seu retorno.

Uma possibilidade seria:

Ida: A → B → C → D → E → C → A → F → E

Volta: E → C → A

Valorando o caminho teríamos então:

Ida: 80 + 80 + 100 + 100 + 85 + 90 + 95 + 85 = 715.

Volta: 85 + 90 = 175.

Assim o trajeto percorrido tem valor igual a 890.

O caminho de volta foi encontrado por inspeção, no entanto, quando o grafo apresenta um grau de dificuldade maior, esse método de inspeção torna-se mais trabalhoso. Nesse caso utilizamos algoritmos que determinam o caminho mais “curto” [1].

CAPÍTULO 4 – Algoritmos de Fleury e de Dijkstra

Quando estamos trabalhando com grafos, o Teorema do Circuito de Euler (Teorema 3.2) e as proposições: Proposição da Soma dos Graus de Euler (Proposição 3.1) e a Proposição do Caminho de Euler (Proposição 3.2), são muito importantes, pois através deles podemos saber, por exemplo, se um grafo é ou não euleriano. Entretanto, esses teoremas não nos mostram como encontrar esse caminho. Quando possível, fazemos isso por inspeção. No entanto, em casos mais complexos, isso demanda um trabalho muito grande. Com o avanço da informática, o computador se tornou uma ferramenta extremamente útil na solução de problemas. Como o computador é capaz de realizar tarefas com grande rapidez, o programamos para executar tais inspeções. Essa programação se dá através de algoritmos, que consistem em uma série de procedimentos que fazem com que o computador busque a solução.

A seguir veremos dois algoritmos: o de Fleury e o de Dijkstra.

4.1 Algoritmo de Fleury

O algoritmo de Fleury é um método que permite encontrar um circuito em um grafo euleriano ou um trajeto em um grafo semi-euleriano.

O algoritmo de Fleury [4], proposto em 1883, utiliza um grafo reduzido induzido pelas arestas ainda não marcadas.

Inicialmente todas as arestas estão não marcadas. As arestas vão sendo “marcadas”, ou removidas do grafo, à medida em que vão sendo inseridas no ciclo.

Considere um grafo conexo $G(V,A)$, onde $g(V_i)$ é par, $\forall\, V_i \in V$, $i \in \mathbb{N}$.

Para aplicarmos o algoritmo de Fleury em um grafo não dirigido e não valorado, os passos a seguir vão ser tomados:

Algoritmo de Fleury

1. Escolha um vértice V_1 para começar.
2. Entre os vértices conectados a V_1, faça:

i. Se houver apenas um vértice como opção, escolha este como V_2.

ii. Se houver mais de um vértice possível, escolha um V_2 apropriado dentre eles.

iii. Se uma aresta (V_1,V_2) é uma ponte[1] no grafo reduzido, então (V_1,V_2) só deve ser escolhida caso não haja outra opção.

3. Remova a aresta (V_1, V_2).
4. Se ainda houver arestas não percorridas, volte ao passo 2, considerando V_2 como o novo V_1.
5. Caso contrário, anote o caminho percorrido.

Exemplo 4.1.1: Grafo euleriano

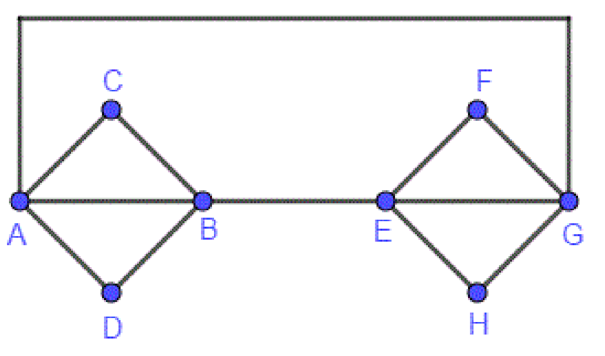


Figura 18 – Grafo euleriano; aplicação Algoritmo de Fleury

O grafo apresentado na Figura 18 é euleriano pois todos os seus vértices têm grau par. Sendo assim, podemos encontrar um circuito euleriano nesse grafo.

Utilizando o algoritmo de Fleury escolhemos aleatoriamente um vértice, nesse caso, o vértice D.

A partir do vértice D temos duas opções: seguir para o vértice A ou para o vértice B. Tomemos a aresta que leva ao vértice A (Figura 19).

[1] Uma ponte de um grafo G é uma aresta que se removida desconecta G.

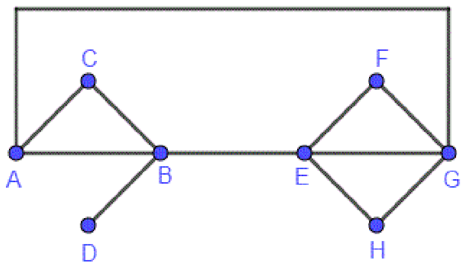
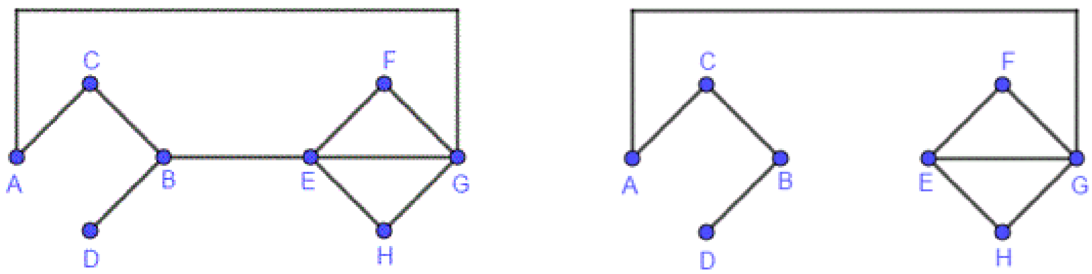


Figura 19 – Passos 1, 2 e 3 do Algoritmo de Fleury

A partir do vértice A temos três opções: AB, AC ou AG. Vamos escolher AB, (Figura 20 [a]).

No vértice B temos duas opções: BE ou BC, pois BD não nos permitiria dar continuidade para as outras arestas. Assim, tomemos a aresta BE (Figura 20 [b]).



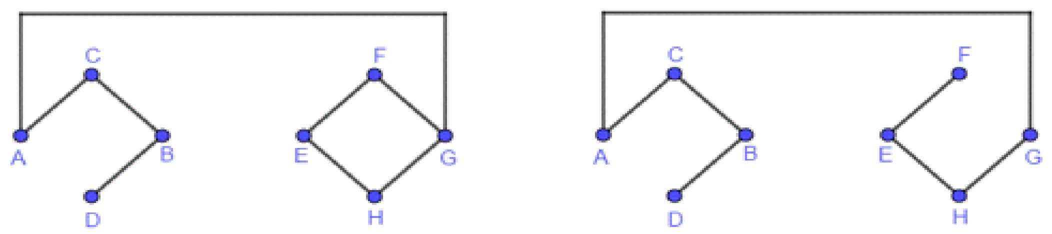
[a] – a partir do vértice A

[b] – a partir do vértice B

Figura 20 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

A partir do vértice E temos três opções: EF, EG ou EH. Vamos escolher EG, (Figura 21 [a]).

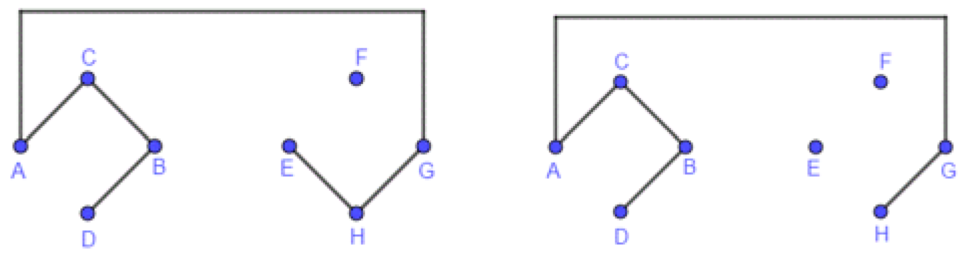
Do vértice G temos duas opções GF ou GH pois GA não pode ser escolhido por ser uma ponte e temos outras opções. Sendo assim escolhemos GF, (Figura 21 [b]).



[a] – a partir do vértice E [b] – a partir do vértice G

Figura 21 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

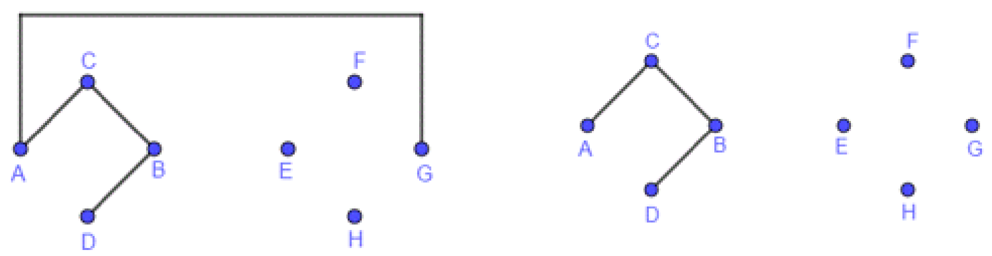
Agora seguimos com a aresta FE, (Figura 22 [a]) e depois com a aresta EH (Figura 22 [b]).



[a] – a partir do vértice F [b] – a partir do vértice E

Figura 22 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

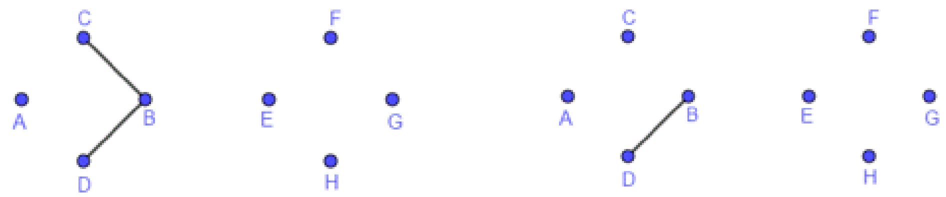
Em seguida a aresta HG (Figura 23 [a]), e depois a aresta GA (Figura 23 [b]).



[a] – a partir do vértice H [b] – a partir do vértice G

Figura 23 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

Na sequência temos a aresta AC (Figura 24 [a]), e depois a aresta CB (Figura 24 [b]).



[a] – a partir do vértice A [b] – a partir do vértice C

Figura 24 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

Finalmente, a aresta BD (Figura 25).

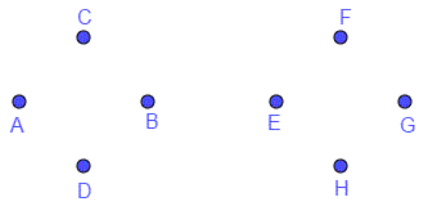


Figura 25 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

Dessa forma temos o circuito euleriano D A B E G F E H G A C B D.

Notemos que cada vértice aparece no circuito exatamente uma quantidade de vezes que é igual à metade do seu grau. A exceção é o vértice D; o número de vezes que este vértice aparece no circuito é igual à metade do seu grau mais um, porque este é o vértice que escolhemos para iniciar e terminar o circuito.

Exemplo 4.1.2: Grafo semi-euleriano.

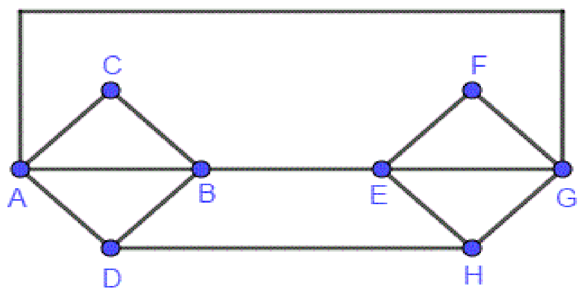
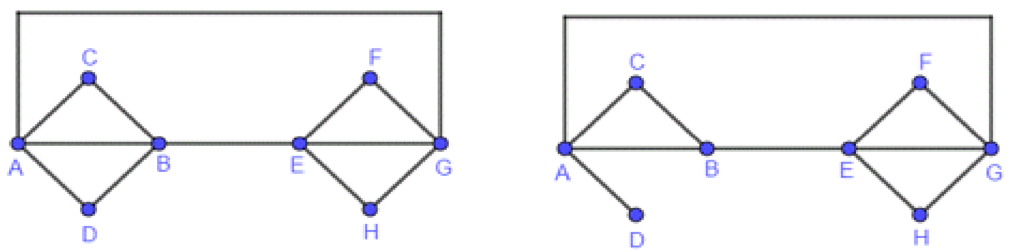


Figura 26 – Grafo semi-euleriano

No grafo da Figura 26, como os vértices D e H têm grau 3 (ímpar) e todos os outros vértices têm grau par, temos um grafo semi-euleriano e sendo assim podemos utilizar o algoritmo de Fleury para encontrar um trajeto euleriano.

Quando o grafo é conexo e tem apenas 2 vértices com grau ímpar, para utilizarmos o algoritmo de Fleury devemos começar por um dos vértices de grau ímpar [16]. Nesse caso, terminaremos o processo no outro vértice de grau ímpar.

Vamos escolher então o vértice H para iniciar. Uma possibilidade seria seguirmos pelas arestas: HD (Figura 27 [a]) e depois pela aresta DB (Figura 27 [b]).

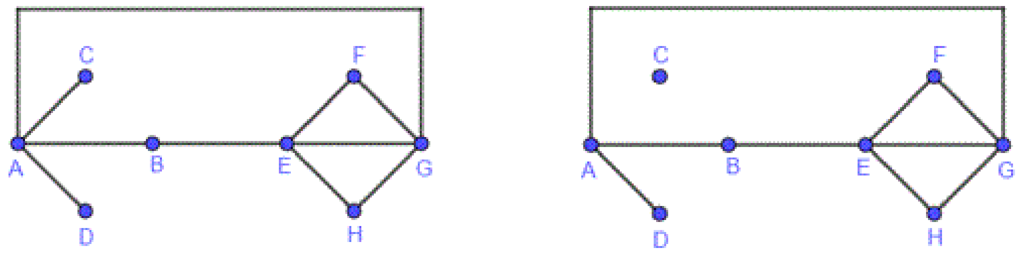


[a] – a partir do vértice H

[b] – a partir do vértice D

Figura 27 – Passos 1, 2 e 3 do Algoritmo de Fleury

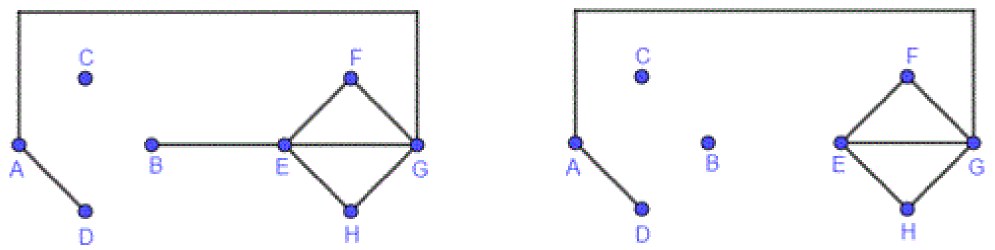
A partir do vértice B seguimos para BC (Figura 28 [a]) e depois a aresta CA (Figura 28 [b]).



[a] – a partir do vértice B [b] – a partir do vértice C

Figura 28 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

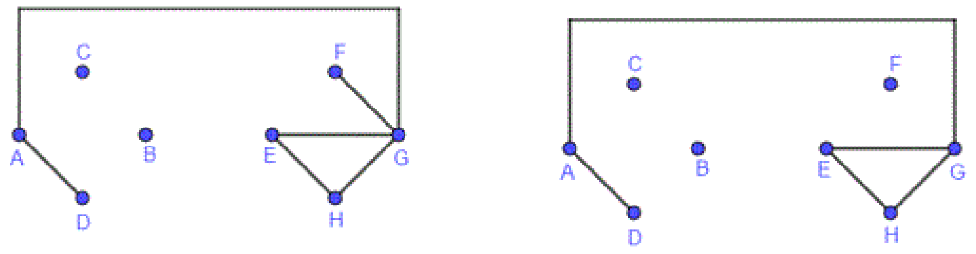
Em seguida a aresta AB (Figura 29 [a]), e depois a aresta BE (Figura 29 [b]).



[a] – a partir do vértice A [b] – a partir do vértice B

Figura 29 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

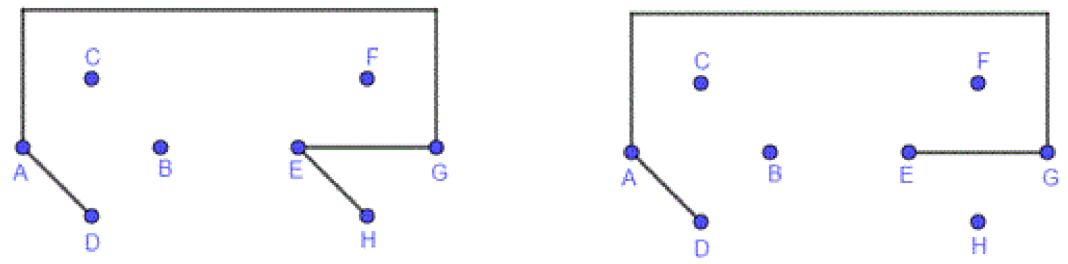
Na sequência, temos a aresta EF (Figura 30 [a]), e depois a aresta FG (Figura 30 [b]).



[a] – a partir do vértice E   [b] – a partir do vértice F

Figura 30 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

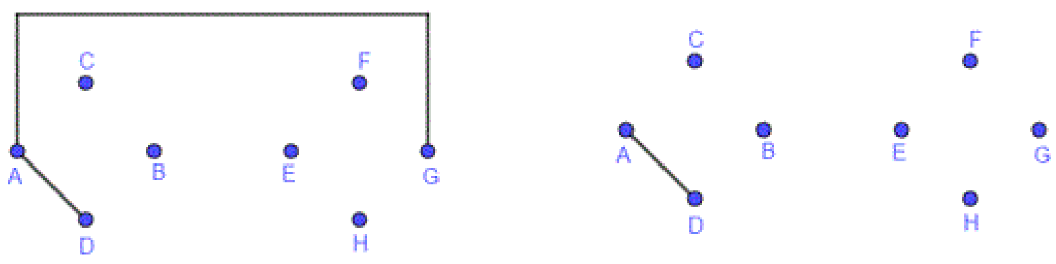
Em seguida, a aresta GH (Figura 31 [a]), e depois a aresta HE (Figura 31 [b]).



[a] – a partir do vértice G   [b] – a partir do vértice H

Figura 31 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

Depois a aresta EG (Figura 32 [a]), e a aresta GA (Figura 32 [b]).



[a] – a partir do vértice E   [b] – a partir do vértice G

Figura 32 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

E para finalizar, a aresta AD (Figura 33).

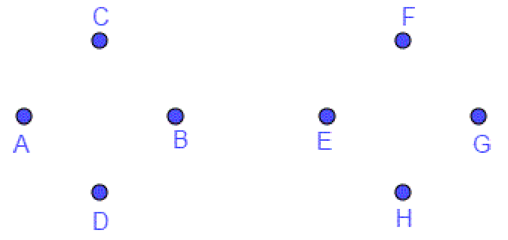


Figura 33 – Passos 2, 3 e 4 do Algoritmo de Fleury

Temos assim, um trajeto semi-euleriano: H D B C A B E F G H E G A D.

Uma outra possibilidade para usarmos o algoritmo de Fleury seria a de decompormos o grafo euleriano em vários circuitos, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.3: Circuitos eulerianos

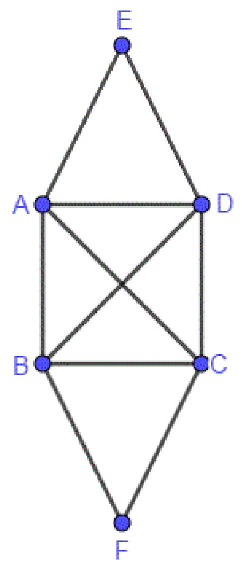


Figura 34 – Circuitos eulerianos

No grafo da Figura 34 temos, por exemplo, um circuito euleriano que pode ser descrito por E A C D E (Figura 35).

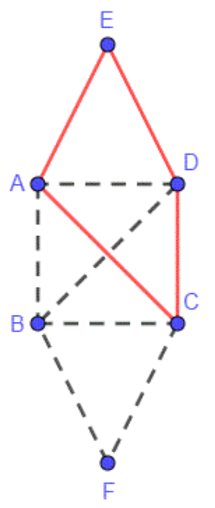


Figura 35 – Circuito euleriano

Agora escolhemos um vértice desse circuito (E A C D E) que tenha arestas incidentes que não tenhamos ainda percorrido. Por exemplo, o vértice A. Então criamos um outro circuito euleriano a partir desse vértice: A D B A (Figura 36).

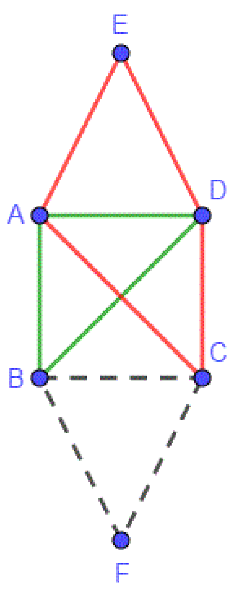


Figura 36 – Circuito euleriano

Agora tomamos o 1º circuito euleriano que montamos, E A C D E, e substituímos nele o 2º circuito euleriano, A D B A. Ficamos então com um novo circuito euleriano formado pela junção dos dois circuitos anteriores: E A D B A C D E (Figura 37).

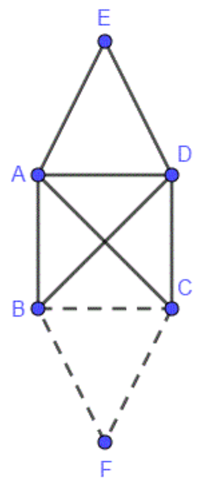


Figura 37 – Circuito euleriano

Como ainda não passamos por todas as arestas do grafo da Figura 34, vamos continuar escolhendo um vértice que tenha arestas incidentes ainda não percorridas para montarmos um circuito euleriano. Partindo do vértice C temos o circuito euleriano: C F B C (Figura 38).

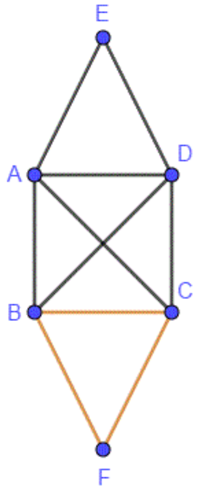


Figura 38 – Circuito euleriano

Substituindo esse último circuito C F B C no circuito E A D B A C D E, ficamos com um circuito euleriano para o grafo da Figura 34: E A D B A C F B C D E.

4.2 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra [4] nos permite encontrar o caminho mais curto em um grafo dirigido, ou não dirigido, que possui arestas com peso não negativo (valor).

Considere um grafo orientado simples G(V,A) valorado, ou seja, a cada aresta (V_i,V_j) está associado um número real $W_{ij} \geq 0$ (representando comprimento ou distância, por exemplo). Vamos supor que queremos encontrar o caminho mínimo entre os vértices V_i e V_j, i, j = 1 ... n, i ≠ j.

A ideia para aplicação do algoritmo de Dijkstra consiste nos passos descritos a seguir [13].

Algoritmo de Dijkstra

1. Rotular os vértices do grafo.
2. A partir do vértice inicial V_i, seguir em direção ao vértice final V_j (seguindo as arestas orientadas), rotulando os vértices com as suas distâncias ao vértice Vi, medidas até aquele momento.
3. A cada estágio do algoritmo teremos vértices que possuem rótulos temporários e vértices com rótulos permanentes.
4. O rótulo de um vértice V_k, $k \in \{1, ..., n\}$, é considerado permanente quando este rótulo apresenta a menor distância de V_i até V_j.
5. Começamos associando rótulo permanente igual a zero para o vértice V_i, e um rótulo temporário igual a ∞ para os outros n – 1 vértices do grafo.
6. A cada iteração, um novo vértice recebe um rótulo permanente de acordo com as seguintes regras:
   i. Cada vértice V_k com um rótulo temporário recebe um novo rótulo temporário dado por:
      min{rótulo de V_k, (rótulo de V_l) + W_{lk}},
      onde V_l é o vértice que recebeu rótulo permanente na iteração anterior e W_{lk} é o valor da aresta entre o vértice V_l e o vértice V_k.

ii. Encontre o menor valor entre os rótulos temporários.
Este será o rótulo permanente do respectivo vértice.
Em caso de empate, selecione qualquer um dos candidatos e atribua rótulo permanente ao escolhido.

7. Repetir 6i e 6ii até que o vértice destino, V_j, receba um rótulo permanente.

Exemplo 4.2.1: Caminho mais curto

Para apresentarmos o algoritmo de Dijkstra consideremos o grafo da Figura 39.

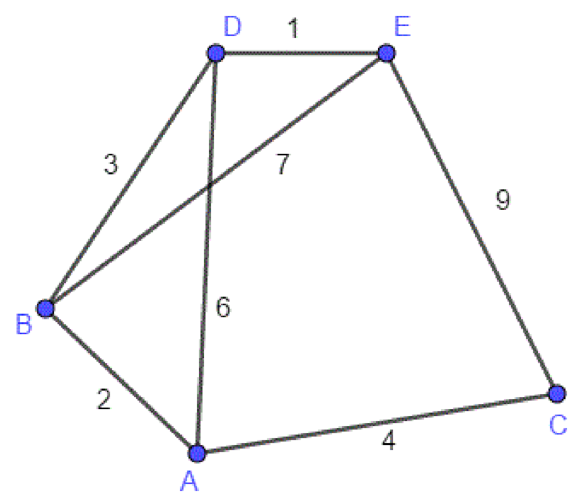


Figura 39 – Grafo valorado; aplicação do Algoritmo de Dijsktra

Como o grafo possui 5 vértices, montamos uma tabela com 5 linhas e 5 colunas.

c	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A					
B					
C					
D					
E					

Suponha que desejamos encontrar o caminho com a menor distância entre os vértices A e E.

Na tabela iremos utilizar a notação (valor acumulado, vértice de origem) para representar a distância até o ponto em questão. Por exemplo, para irmos até o vértice B no grafo da Figura 39, partindo de A, teríamos uma distância de valor igual a 2. Sendo assim representaríamos (2, A) na linha B (Passo 1).

Pois bem, como vamos partir do vértice A, temos então que o peso de A até A é zero e a tabela fica preenchida com (0,A) no Passo 1 e nos demais passos colocaremos o símbolo – .

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A	**(0,A)**	--	--	--	--
B					
C					
D					
E					

Em seguida vamos analisar o grafo e verificar quais são os vértices adjacentes ao vértice A e preencher a tabela com a distância de cada um deles ao vértice A.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A	**(0,A)**	--	--	--	--
B	(2,A)				
C	(4,A)				
D	(6,A)				
E	--				

Podemos observar que os vértices B, C e D são adjacentes ao vértice A e suas distâncias até o vértice A são respectivamente 2, 4 e 6. Então, representamos (2,A) na linha do vértice B pois indica que até o vértice B temos uma distância de peso 2 a partir do vértice A e assim sucessivamente para os demais.

Como o vértice E não é adjacente ao vértice A representamos com – na linha do vértice E.

Agora, observamos os pesos que aparecem no Passo1 e, como estamos procurando o caminho com a menor distância, devemos escolher o que apresenta menor valor. No caso é a distância até o vértice B que aparece na tabela como (2,A).

Copiamos então esse valor do vértice B para o Passo 2 e ele passa a ser definitivo. Logo os demais passos do vértice B ficam representados com --.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A	**(0,A)**	--	--	--	--
B	(2,A)	**(2,A)**	--	--	--
C	(4,A)				
D	(6,A)				
E	--				

Como o vértice B levou ao menor valor precisamos verificar quais são os vértices adjacentes a ele. No caso vemos que são adjacentes a B os vértices D e E. Preenchemos então a tabela com a distância do vértice B até o vértice D. Aqui vale ressaltar que temos que colocar o valor acumulado ou seja, o valor de A até B que é 2 mais o valor de B até D que é 3, portanto, temos (5, B) no Passo 2, linha D.

Como o vértice E é adjacente a B temos no Passo 2, linha E, a representação (9, B).

Na linha C, Passo 2, repetimos a representação que tínhamos no Passo 1, pois C não é adjacente ao vértice B.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A	**(0,A)**	--	--	--	--
B	(2,A)	**(2,A)**	--	--	--
C	(4,A)	(4, A)			
D	(6,A)	(5, B)			
E	--	(9, B)			

Agora que completamos o Passo 2, analisamos qual é a menor distância que temos e verificamos que é (4, A). Essa distância passa a ser a definitiva no Passo 3.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A	**(0, A)**	--	--	--	--
B	(2, A)	**(2, A)**	--	--	--
C	(4, A)	(4, A)	**(4, A)**	--	--
D	(6, A)	(5, B)			
E	--	(9, B)			

Vamos então verificar quais são os vértices adjacentes ao vértice C. E nesse caso temos apenas o vértice E. Assim, marcamos a distância acumulada do vértice C até o vértice E que é (13, C). Porém observamos que temos no passo 2 um valor acumulado até E (9, B) que é menor que o que acabamos de encontrar. Como buscamos o caminho com menor valor descartaremos o valor (13, C) e manteremos o valor (9, B).

Como o vértice C não é adjacente ao vértice D repetimos (5, B) na linha D passo 3.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A	**(0, A)**	--	--	--	--
B	(2, A)	**(2, A)**	--	--	--
C	(4, A)	(4, A)	**(4, A)**	--	--
D	(6, A)	(5, B)	(5, B)		
E	--	(9, B)	(9, B) ~~(13, C)~~		

Completado o Passo 3, repetimos a análise para buscar o menor valor e encontramos o (5, B) que passa a ser o valor definitivo no Passo 4.

O vértice D é adjacente ao vértice B, A e E (não é mais necessário analisar os vértices A e B). Calculamos então o valor acumulado do vértice D ao vértice E e encontramos (6, D).

Como na linha E o menor valor é o do passo 4 temos então esse valor como o valor a ser repassado para o passo 5 como definitivo.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5
A	**(0, A)**	--	--	--	--
B	(2, A)	**(2, A)**	--	--	--
C	(4, A)	(4, A)	**(4, A)**	--	--
D	(6, A)	(5, B)	(5, B)	**(5, B)**	--
E	--	(9, B)	(9, B) ~~(13, C)~~	(6, D)	**(6, D)**

Assim, encontramos que a menor distância do vértice A ao vértice E tem valor 6. Refazendo o caminho: E, D, B, A, ou seja, o menor caminho é A B D E com distância igual a 2 + 3 + 1 = 6.

CAPÍTULO 5 – Plano de Aula

Nesse capítulo apresentaremos algumas ideias de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula, como sugestão para o 2º ano do ensino médio, para que os alunos possam conhecer os conceitos e algumas aplicações da teoria de grafos.

5.1 Aula 1: Parte Histórica

5.1.1 Objetivo

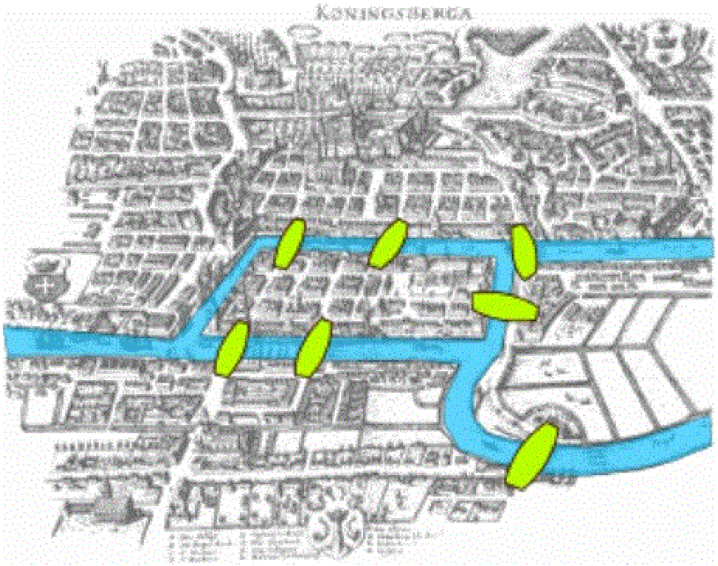
Essa primeira aula tem como objetivo, de forma breve, situar historicamente o surgimento dos conceitos de matrizes, determinantes e, em seguida, o surgimento da teoria de grafos.

5.1.2 Atividade

1. Apresentar aos alunos, através de *slides*, um pouco da história de matrizes, determinantes e teoria de grafos.

2. Apresentar o problema das Pontes de Konigsberg (atual Kaliningrado), considerado o marco da teoria dos grafos. Esse problema, mencionado na Introdução deste trabalho, era um desafio que intrigava os habitantes de Konigsberg que queriam saber se era possível atravessar as sete pontes do Rio Pregel, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida. Leonhard Euler em 1736, ao tomar conhecimento do problema, apresentou a solução, representando a situação através de um grafo (vértices e arestas), e mostrou que não seria possível satisfazer a exigência de atravessar todas as pontes sem passar duas vezes na mesma ponte.

Para essa atividade projetaremos a imagem do problema (Figura 40), para que os alunos possam refletir e apresentar caminhos para a sua solução, argumentando as possíveis soluções bem como, caso seja mencionado por algum aluno, a impossibilidade de encontrar uma solução.



Konigsberg Bridges – Fonte:
https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

Figura 40 - Pontes de Konigsberg

5.2 Aula 2: Introdução à Teoria de Grafos

5.2.1 Objetivo

Nessa aula apresentaremos aos alunos os conceitos básicos da teoria de grafos a partir da projeção da imagem das Pontes de Konigsberg e das considerações dos alunos a respeito do problema.

5.2.2 Atividade

Retomando a projeção da imagem das Pontes de Konigsberg, solicitar aos alunos que tente representá-las utilizando diagramas, e a partir dessa representação daremos início aos conceitos básicos da teoria de grafos: representação através de diagramas; arestas; vértices; grau de um vértice; grau de um grafo; alguns tipos de grafos.

Propor aos alunos algumas atividades que explorem os conceitos apresentados:

<u>Atividade 1</u>: Observe cada um dos grafos a seguir e, em seguida, determine:

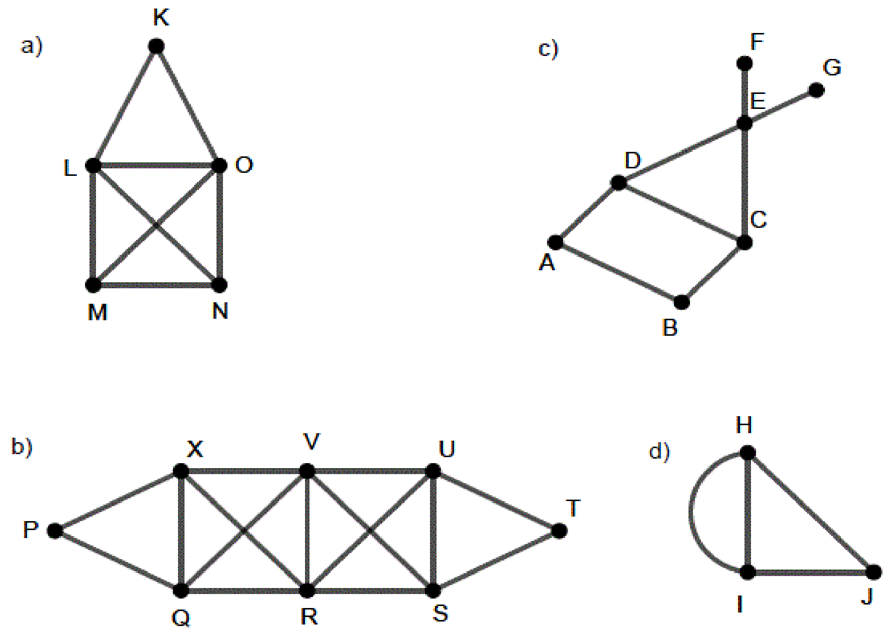


Figura 41 – Atividade 1 – Aula 2

a) Quantidade de vértices.
b) Quantidade de arestas.
c) Grau de cada vértice.
d) Grau de cada grafo.

<u>Atividade 2</u>: A partir dos grafos dados verifique qual(is) dele(s) é(são):

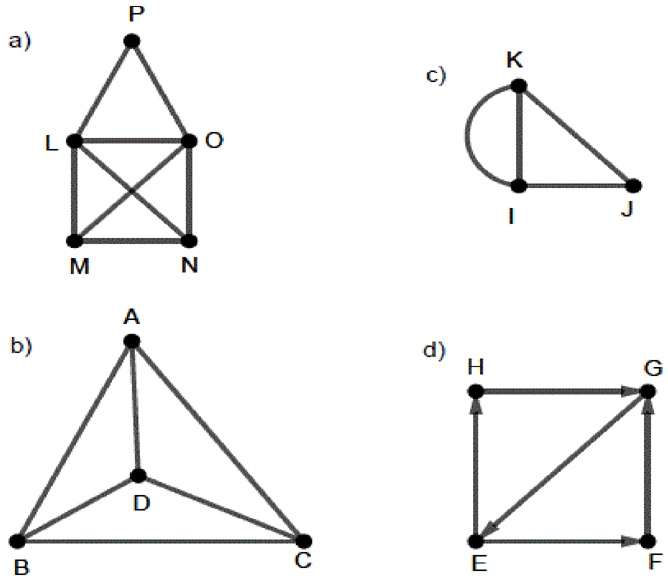


Figura 42 – Atividade 2 – Aula 2

a) Simples.
b) Regular.
c) Completo
d) Orientado.

5.3 Aula 3: Trajetos eulerianos

5.3.1 Objetivo

Apresentar aos alunos o conceito e as condições para que um grafo possa ter trajetos eulerianos e, a partir desses conceitos, refletir novamente sobre a solução das Pontes de Konisgberg.

5.3.2 Atividades

Antes de apresentar formalmente o conceito de trajeto euleriano, propor aos alunos as seguintes atividades:

Atividade 1: Observe a figura abaixo e tente encontrar um caminho que passe por todos os vértices da figura sem tirar o lápis do papel e sem passar mais de uma vez por um caminho que já passou.

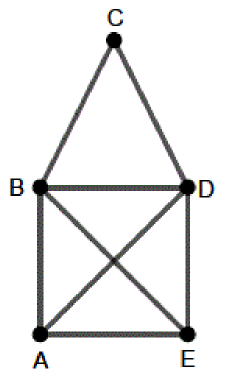


Figura 43 – Atividade 1 – Aula 3

Então, definir trajeto euleriano.

Após realizar a Atividade 1, analisar se é possível executar essa mesma atividade a partir de qualquer vértice.

Atividade 2: Observe as figuras abaixo, e verifique em qual(is) dela(s) há um trajeto eureliano.

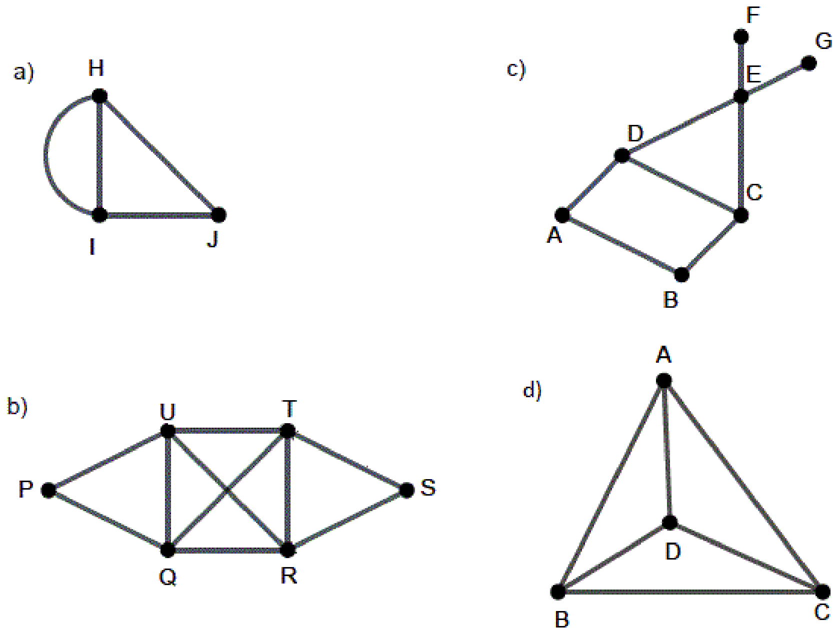


Figura 44 – Atividade 2 – Aula 3

Para a próxima atividade, fazer a apresentação do problema do carteiro chinês que está descrito nas páginas 49 e 50 para os alunos, de modo que eles tenham noção da origem do problema e, em seguida, apresentar o exemplo da figura 16 da página 50 com sua respectiva solução. Após essa pequena introdução, aplicar a atividade 3.

Atividade 3: Resolva o problema do carteiro chinês, determinando, por inspeção, o menor percurso possível para o grafo abaixo.

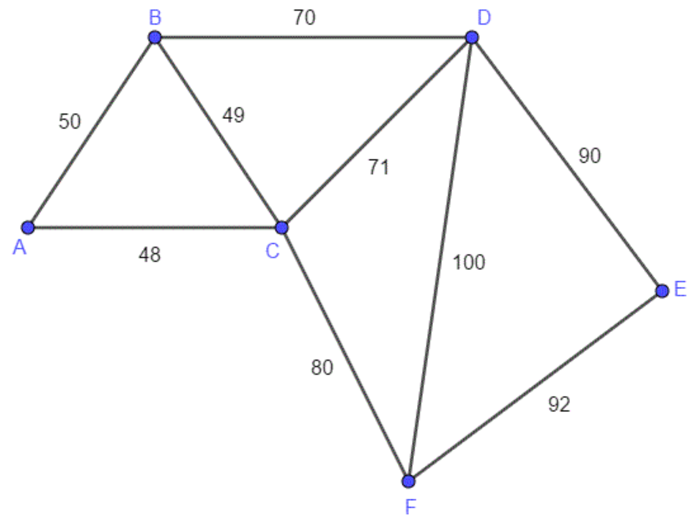


Figura 45 – Atividade 3 – Aula 3

5.4 Aula 4: Representação matricial de um grafo

5.4.1 Objetivo

Mostrar que um grafo pode ser representado através de uma matriz e que, dessa forma, há uma vantagem maior em utilizar programas de computador como facilitadores de alguns processos.

5.4.2 Atividades

Apresentar aos alunos um exemplo de um grafo na forma de diagrama e sua respectiva matriz de adjacência e de incidência. Em seguida, propor as atividades 1 e 2 que seguem.

Atividade 1: A partir dos grafos representados nos diagramas abaixo, escreva a matriz de adjacência e a matriz de incidência correspondente a cada um.

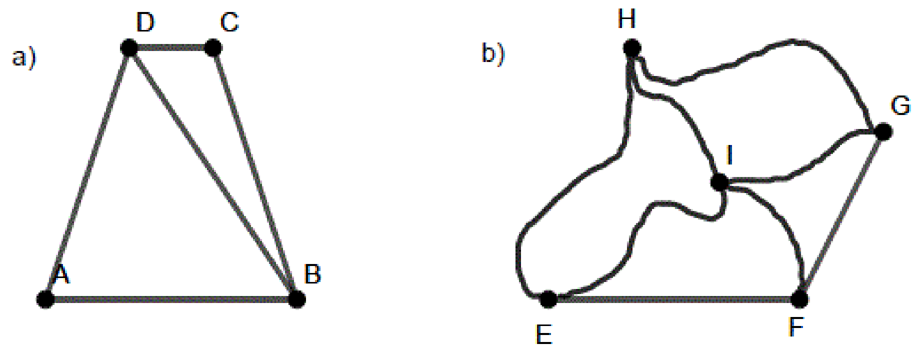


Figura 46 – Atividade 1 – Aula 4.

Atividade 2: Dada a matriz de adjacência a seguir, determine o seu grafo correspondente (diagrama).

	A	B	C	D	E
A	1	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	0	1	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	1	1	1	0	1

5.5 Aula 5: Algumas aplicações em jogos

5.5.1 Objetivo

Apresentar algumas situações de jogos em que podemos utilizar a teoria de grafos como ferramenta para resolução de problemas.

5.5.2 Atividades

Para a realização de algumas das atividades a seguir, serão disponibilizados aos alunos alguns jogos de dominó e alguns tabuleiros de xadrez com suas respectivas peças.

<u>Atividade 1:</u> Dominó

Nessa atividade distribuir as peças de dominós para os grupos de alunos e apresentar o problema a seguir.

Apenas com as pedras 0 -1, 0 - 3, 0 - 6, 1 - 1, 1 - 2, 1 - 4, 2 - 3, 3 - 3, 3 - 4, 3 - 6, 4 - 4, 4 - 5, 4 - 6 e 5 - 6 de um dominó, é possível dispô-las sequencialmente da forma usual em tal jogo?

Após a apresentação do enunciado, deixar os alunos refletirem sobre o problema manuseando as peças do dominó.

À medida que forem encontrando a solução do problema, propor a estruturação das peças do jogo de dominó apresentadas em um grafo onde os vértices representam os pontos de cada meio dominó e as arestas serão representadas pelas conexões.

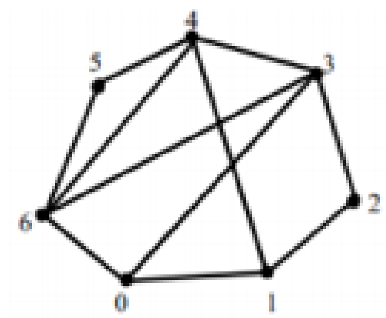


Figura 47: Grafo das peças dos dominós

Embora não seja trabalhado o algoritmo de Fleury com os alunos, vamos utilizá-lo para validar a solução.

Considerando o grafo da figura 47, faremos a verificação se ele possui algum percurso que passe por todas as arestas sem repetição, ou seja, se é um trajeto euleriano.

Para isso, utilizamos o Teorema 3.2 e vemos que como os vértices 0 e 1 possuem grau ímpar, o grafo não apresenta um trajeto euleriano. Entretanto, como o grafo possui apenas um par de vértices com grau ímpar, a Proposição 3.2 nos garante que temos um grafo semi-euleriano. Assim, podemos fazer o percurso pelo grafo passando uma única vez por cada aresta desde que o início seja no vértice 0 e o término no vértice 1, ou vice-versa.

Dessa forma, teríamos a organização das peças de dominó dispostas de acordo com a Figura 48.

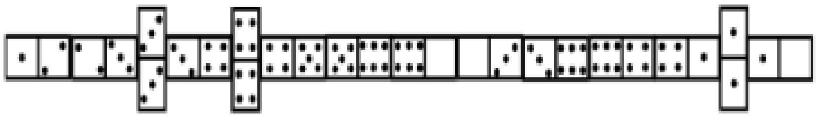


Figura 48: Sequência das peças do dominó

Atividade 2: Os cavalos do xadrez

Esse problema é bastante comum em olimpíadas de matemática e foi retirado do material do Programa Olímpico de Treinamento, nível 2, aula 8, do professor Bruno Holanda [5].

O problema consiste em saber se é possível que os cavalos da Posição 1 da Figura 49, fiquem na posição 2 da mesma figura, em um jogo de xadrez.

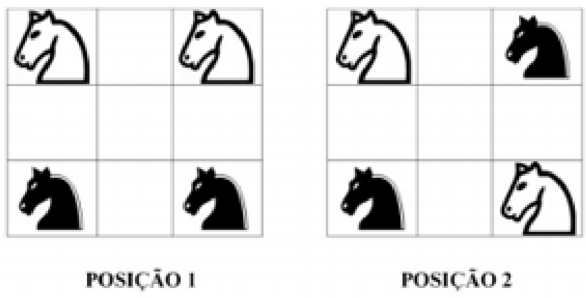


Figura 49: Problema do cavalo no jogo de xadrez

É pertinente lembrar que a peça do cavalo no jogo de xadrez, se desloca da seguinte maneira: duas casas na vertical ou horizontal e depois, uma casa na direção perpendicular à direção em que havia se movimentado antes (movimento em L).

Para responder tal questão, podemos iniciar enumerando as casas do tabuleiro, conforme mostra a Figura 50.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 50: Casas do tabuleiro enumeradas

Agora, podemos construir um grafo G, em que seus vértices correspondem às casas do tabuleiro e, dois vértices, *i* e *j,* são extremos de uma aresta se for possível que o cavalo saia da casa *i* e vá para a casa *j* com apenas um movimento.

Assim, o grafo G fica representado como na Figura 51.

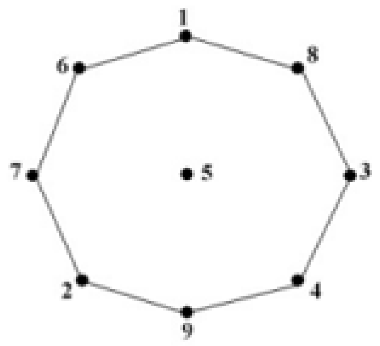


Figura 51: Grafo dos movimentos do cavalo

Agora, posicionando os cavalos da Figura 49, posição 1 e posição 2, em suas respectivas casas no grafo da Figura 51, obtemos dois grafos que estão representados na Figura 52.

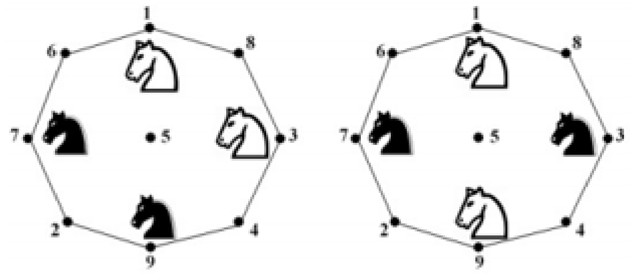


Figura 52: Grafos das posições 1 e 2.

A partir da Figura 52 fica fácil de visualizar que não é possível que os cavalos da posição 1 fiquem na posição 2, pois não podemos alterar a ordem cíclica dos cavalos.

Atividade 3: Torneio de futebol

O grêmio estudantil do colégio, resolveu montar um interclasse de futebol de salão, onde cada classe do colégio terá um time. As turmas que participarão do campeonato são: 1º A, 1º B, 1º C, 2º A, 2º B, 2º C, 3º A e 3º B. Nesse interclasse todos os times jogam contra todos os outros, uma única vez, e o campeão é aquele que obtiver o maior número de pontos, de acordo com o regulamento estabelecido pelo professor de educação física.

Considerando que as turmas representem os vértices e que os jogos representem as arestas, organize o problema com a utilização de um grafo e indique o número de jogos que serão realizados nesse interclasse.

A Figura 53 mostra o grafo que representa o problema.

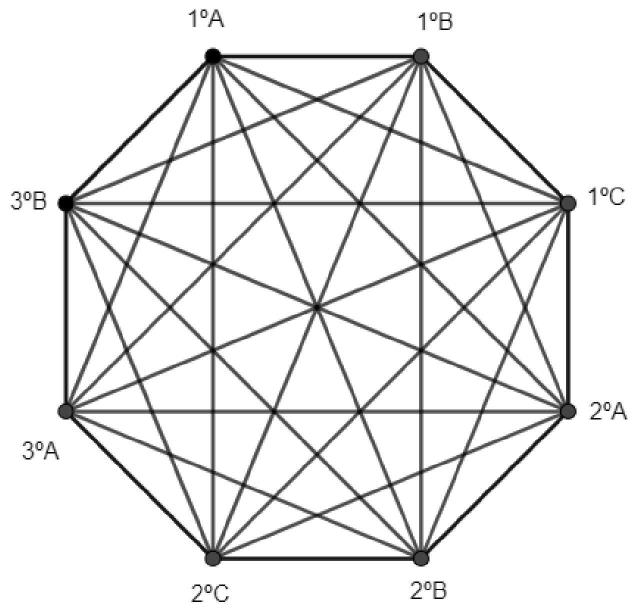


Figura 53: Grafo dos jogos de futebol

A quantidade de jogos desse interclasse é igual à quantidade de arestas do grafo da Figura 53. Como todos os vértices possuem grau 7 (números de arestas) e temos 8 vértices (número de times), temos pela Proposição 3.1 que $\frac{7\ .\ 8}{2} = 28$ arestas, ou seja, 28 jogos.

5.6 <u>Aula 6: Caminho mais curto</u>

5.6.1 Objetivo

Levar os alunos a buscar o caminho mínimo entre dois pontos em um grafo valorado.

5.6.2 Atividades

Na atividade 1 buscamos inicialmente permitir que os alunos analisem o grafo da figura 54 e, a partir daí, tentem encontrar a solução do problema fazendo levantamento de possíveis percursos e comparando suas distâncias para que encontrem a menor.

Atividade 1: Percurso Mínimo

Inicialmente apresentamos o enunciado do problema e o grafo da Figura 54 para que os grupos possam ler e começarem a refletir sobre as possíveis soluções.

Alfredo deseja sair de sua casa e ir até o supermercado do bairro. Para isso, ele possui vários caminhos que podem ser percorridos, conforme apresentados na Figura 54. Considere os valores apresentados na figura como a distância entre os estabelecimentos. Qual é o menor percurso para ele sair de casa e chegar ao supermercado? Obs: Não é necessário percorrer todas as arestas.

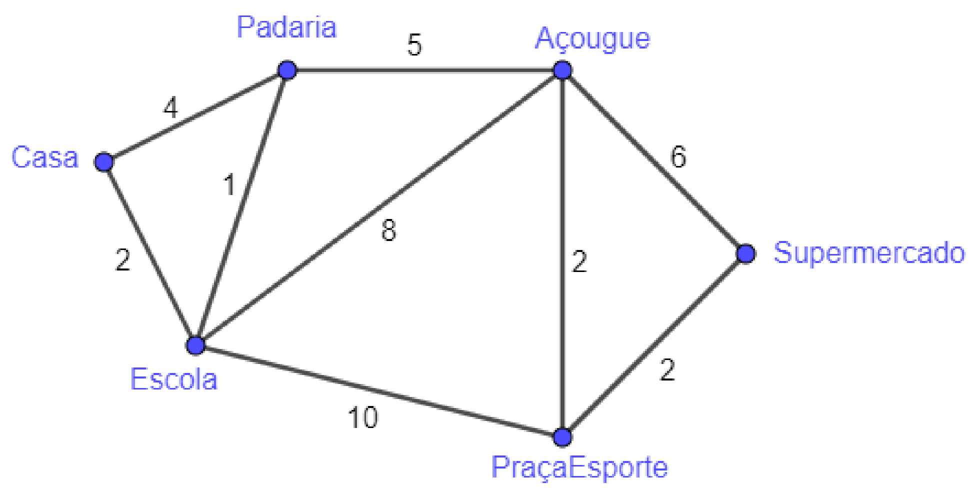


Figura 54: Caminho mínimo

Ao término da atividade apresentamos todos os trajetos encontrados pelos grupos para que possam verificar qual deles é a solução do problema.

A validação da solução do problema será feita, apenas aqui, utilizando o algoritmo de Dijkstra, com a introdução de tabelas, sem a formalização do algoritmo.

Para determinarmos o trajeto mais curto da casa de Alfredo até o supermercado usando o algoritmo de Dijkstra, iniciamos observando que o grafo apresentado na Figura 54 possui 6 vértices. Para facilitar a representação consideraremos os vértices C = Casa, P = Padaria, A = Açougue, E = Escola, Q =

Praça de esporte e S = Supermercado. Sendo assim montamos uma tabela com 6 linhas e 6 colunas.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5	Passo6
C						
P						
E						
A						
Q						
S						

Como partimos do vértice C, temos que a distância de C até C é zero, logo no passo 1 temos (0,C). Na sequência verificamos quais são os vértices adjacentes ao vértice C e preenchemos a tabela com a distância de cada um deles ao vértice C, ou seja (4,C) e (2,C).

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5	Passo6
C	(O,C)	--	--	--	--	--
P	(4,C)					
E	(2,C)					
A	--					
Q	--					
S	--					

Analisando as distâncias que aparecem no passo 1 observamos que a menor delas é 2, ou seja, a distância de C (casa) até E (escola). Então essa passa a ser definitiva.

Agora analisamos quais são os vértices adjacentes a E e encontramos os vértices P, A e Q. Da mesma forma preenchemos a tabela com as distâncias do vértice E a cada um de seus vértices adjacentes. Lembrando que vamos considerar o valor acumulado, isto é, a partir de C.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5	Passo6
C	(O,C)	--	--	--	--	--
P	(4,C)	(3,E)				
E	(2,C)	(2,C)				
A	--	(10,E)				
Q	--	(12,E)				
S	--	--				

Verificando as distâncias encontradas no passo 2 vemos que a menor delas é (3,E) e essa então passa a ser definitiva.

O próximo passo é verificar os vértices adjacentes a P. Temos então, apenas o vértice A, cuja distância até P é (8,P). Essa é a menor distância que encontramos no passo 3, sendo assim a definitiva.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5	Passo6
C	(O,C)	--	--	--	--	--
P	(4,C)	(3,E)	(3,E)	--	--	--
E	(2,C)	(2,C)	--	--	--	--
A	--	(10,E)	(8,P)	(8,P)	--	--
Q	--	(12,E)	(12,E)			
S	--	--	--			

A análise agora é no vértice A. Observamos que ele é adjacente aos vértices S e Q. Calculando sua distância até cada um deles, encontramos respectivamente (14,A) e (10,A). A menor distância é de A até Q e essa passa a ser definitiva.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5	Passo6
C	(O,C)	--	--	--	--	--
P	(4,C)	(3,E)	(3,E)	--	--	--
E	(2,C)	(2,C)	--	--	--	--
A	--	(10,E)	(8,P)	(8,P)	--	--
Q	--	(12,E)	(12,E)	(10,A)	(10,A)	---
S	--	--	--	(14,A)		

O vértice Q é adjacente apenas ao vértice S. Calculando a distância entre eles temos (12,Q). Dessa forma chegamos ao vértice S (supermercado) que era o objetivo inicial.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5	Passo6
C	(O,C)	--	--	--	--	--
P	(4,C)	(3,E)	(3,E)	--	--	--
E	(2,C)	(2,C)	--	--	--	--
A	--	(10,E)	(8,P)	(8,P)	--	--
Q	--	(12,E)	(12,E)	(10,A)	(10,A)	---
S	--	--	--	(14,A)	(12,Q)	(12,Q)

Temos então que o menor trajeto que Alfredo pode percorrer de sua casa até o supermercado é o caminho Casa -> Escola -> Padaria -> Açougue -> Praça de esportes -> Supermercado, que tem uma distância igual a 12.

Conclusão

A partir desta dissertação espero contribuir com os alunos e também colegas de trabalho do ensino médio, mostrando-lhes que podemos oferecer aos alunos temas mais atuais, que lhes permitem visualizar a aplicação dos mesmos em diversas áreas e situações mais próximas da realidade.

Essa dissertação traz uma revisão dos conceitos inerentes a Matrizes para, em seguida, apresentar os conceitos básicos de Grafos os quais, embora não estejam elencados nos conteúdos que fazem parte do currículo do ensino médio, acredito que podem ser compreendidos pelos alunos, e atividades que podem ser básicas ou mais complexas, contemplando a diversidade de alunos que temos em sala de aula.

Espero que, trabalhando problemas matemáticos com os alunos, ainda que adaptados à capacidade deles, porém mais práticos, mais próximos da realidade, possamos mostrar-lhes que a matemática é feita a partir de necessidades, de problemas que surgem na sociedade. Não é algo pronto e acabado.

É importante também deixar claro aos alunos que apresentamos aqui apenas uma pequena parte da Teoria de Grafos e algumas aplicações. Mas que este assunto é muito mais amplo e capaz de resolver situações problemas muito mais complexas.

Espero que, de alguma forma, os colegas que tiverem a oportunidade de conhecer este trabalho possam se sensibilizar não apenas com o tema abordado, mas também perceber que podemos ir além do que estamos acostumados a tratar em sala de aula, e desta forma ampliar e enriquecer nossas aulas.

Referências Bibliográficas

[1] BOAVENTURA NETTO, P.O. GRAFOS: Teoria, Modelos, Algoritmos. Ed. Blucher, 2006.

[2] BOYER, C. História da matemática 2 ed Trad. Elza Gomide. Edgard Blucher, São Paulo 1996.

[3] FERREIRA, S. R. I. Aplicações de Matrizes no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) – ICMC – USP – São Carlos, 2013.

[4] GOLDBARG, M. C.; GOLDBARG, E. Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Elsevier. Campus, 2012.

[5] HOLANDA, B. Teoria dos Grafos – OBM - C:/Users/Bruno Holanda/Desktop/SO2011/Nivel 1 - Grafos.dvi (obm.org.br) Último acesso em: 24 de janeiro 2023.

[6] IEZZI, G.; MURAKAMI, C; DOLCE, O; HAZZAN, S; MACHADO, N; POMPEU, J.N. Fundamentos da matemática elementar São Paulo, Atual, 2013.

[7] JURKIEWICZ, S. (2002) Matemática discreta em sala de aula. História e Tecnologia no Ensino de Matemática, v1, 115–161. Carvalho, L. M.; Guimarães, L. C. (org.), IME-UERJ, Rio de Janeiro.

[8] LOZANO, Daniele; Rangel, Socorro; PIRES, Célia. Uma proposta de oficina de coloração de mapas e grafos para o ensino fundamental e médio. Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, v. 2, p. 216-225, 2010.

[9] LUCCHESI, C. L. Introdução à Teoria dos Grafos. IMPA, 1979.

[10] MOURA, M. I. Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) – UFG – Jataí, 2013.

[11] PORTO DA SILVEIRA, J.F. Matrizes - http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/minmatr.html Último acesso em: 14 janeiro 2023.

[12] RANGEL, S. Espaços Museológicos e o Ensino de Matemática. In: Elso Drigo Filho. (Org.). Espaços Museológicos e Educação Formal. 1ed.Jundiai: Paco Editorial, 2015, v. 1, p. 77-88.

[13] RANGEL, S.; ANTUNES, V.; ARAUJO, S. Teoria dos Grafos – Notas de Aula. https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica-aplicada/docentes/socorro/disciplinas/teoria-dos-grafos/ Último acesso em: 14 janeiro 2023.

[14] RIBEIRO, J. Matemática: ciência e linguagem: volume único. São Paulo: Scipione, 2007.

[15] RUGGIERO, M. A.G.; LOPES, V.L.R. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição, Mcgraw-hill, 1988.

[16] SAOUB, K. R. (2017). A Tour Through Graph Theory. Chapman and Hall/CRC.