Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

LUISA MARA SILVA DE OLIVEIRA

ESTRATÉGIAS PARA ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAU EM TURMAS DE 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Orientador: Simon George Chiossi

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
JULHO/2023

LUISA MARA SILVA DE OLIVEIRA

ESTRATÉGIAS PARA ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAU EM TURMAS DE 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada por **Luisa Mara Silva de Oliveira** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Simon George Chiossi

Niterói
2023

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

O48e Oliveira, Luisa Mara Silva de
Estratégias para ensino e aprendizagem de funções polinomiais do 1° e 2° grau em turmas de 9° ano do ensino fundamental II / Luisa Mara Silva de Oliveira. - 2023.
125 p.: il.

Orientador: Simon George Chiossi Chiossi.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2023.

1. Função. 2. Funções polinomiais do 1° e 2° grau. 3. Ensino/aprendizagem da Matemática. 4. Abordagem de livro didático. 5. Produção intelectual. I. Chiossi, Simon George Chiossi, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

LUISA MARA SILVA DE OLIVEIRA

ESTRATÉGIAS PARA ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAU EM TURMAS DE 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

Dissertação apresentada por **LUISA MARA SILVA DE OLIVEIRA** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Ensino da Matemática na educação básica.

Aprovada em:

Banca Examinadora

Prof. SIMON GEORGE CHIOSSI - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. (a). MIRIAM DEL MILAGRO ABDÓN - Membro

Doutora – Universidade Federal Fluminense

Prof. MICHAEL DEUTSCH - Membro

Doutor – Universidade Federal do Rio de Janeiro

NITERÓI

2023

DEDICATÓRIAS

Às minhas filhas, como uma compensação do tempo que lhes foi "*roubado*" e a mãe (em memória), que sempre me pediu para não desistir, mesmo nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A Deus que me ilumina, me dando sabedoria em toda a caminhada e carregando-me no colo nos momentos mais difíceis.

Ao professor orientador, Doutor Simon George Chiossi, que tornou possível a realização deste trabalho, com toda paciência e apoio.

Aos demais Professores do Programa de Mestrado em Matemática pelo apoio recebido, quando mais precisei.

Aos meus colegas de turma, em especial Clarissa, Carlos Henrique, Mariana e Kíssia pelas ricas trocas de experiências.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para esta construção.

"Nunca nos tornaremos matemáticos, mesmo que a nossa memória domine todas as demonstrações feitas por outros, se o nosso espírito não for capaz de resolver todas as espécies de problemas".
(Descartes)

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo propor uma metodologia para a introdução e desenvolvimento do conteúdo de funções em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental II. Trata-se de um conteúdo muito importante para a continuidade da aprendizagem no Ensino Médio e, de um modo geral, para o estudo da matemática e áreas afins. Para isso, foram formalizados os principais conceitos, definições e propriedades sobre o tema, chegando às funções polinomiais do 1º e 2º grau. Por se tratar de um conteúdo muito abrangente, foram analisados de forma crítica, alguns livros didáticos destinados às redes Municipais das Prefeituras de Itaboraí e de Tanguá, comparando suas abordagens, conteúdos propostos e metodologias utilizadas, conforme orientações curriculares. Em seguida, foi realizada uma proposta metodológica para o trabalho deste conteúdo em sala de aula, com proposta de atividades direcionadas num caderno a parte, como complementação para o desenvolvimento da mesma.

Palavras-chaves: Função. Funções polinomiais do 1º e 2º grau. Ensino/aprendizagem da Matemática. Abordagem de livro didático. Produção Intelectual.

ABSTRACT

This work aims to propose a methodology for the introduction and development of the concept of functions in 9th grade classes of Elementary School II. This is a very important as regards continuous learning in high school and, in general, for the study of mathematics and related areas. For this, the main concepts, definitions and properties on the subject were formalized, reaching the polynomial functions of the 1st and 2nd degree. Because it is a very comprehensive matter, we analyzed, some textbooks used in the Municipal networks of Itaboraí and Tanguá, comparing their approaches, proposed content and methodologies used, according to curriculum guidelines. Then, a methodological plan was made for presenting this content in the classroom, with a proposal of directed activities in a separate notebook, as a complement to its development.

Keywords: Function. Polynomial functions of degree 1 and 2. Teaching/learning of Mathematics. Textbook approach. Intellectual production.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O estudo de funções apresentado ao aluno pela primeira vez no 9º ano do Ensino Fundamental II, serve de base para boa parte do desenvolvimento dos conteúdos aplicados no Ensino Médio, principalmente no 1º ano. Embora faça parte dos referenciais recomendados, à apresentação do conceito de função, com aprofundamento em funções polinomiais de 1º e 2º grau, raramente a abordagem é realizada desta forma. Num modo geral, o conceito de função na sua amplitude da palavra, geralmente é desprezado pela maioria dos profissionais e, atualmente, se quer é apresentado nos livros didáticos. Até mesmo os profissionais que atuam com o Ensino Médio, optam por dar ênfases aos procedimentos e cálculos que devem ser efetuados, apresentando uma espécie de *"receita de bolo"*, para cada tipo de função. O aluno que conseguir *"decorar"* os tipos de procedimentos propostos, relacionando-os corretamente com o assunto de referência, é considerado apto a prosseguir.

Por outro lado, tais procedimentos não fazem o menor sentido para a grande maioria do alunado, trazendo um grau de dificuldade desnecessário para um conteúdo relativamente simples, neste nível de abordagem. A grande maioria dos livros didáticos apresenta o conteúdo de forma modelada e particionada, primeiro estuda-se a função polinomial do 1º grau e depois se estuda a função polinomial do 2º grau, sem fazer qualquer relação entre uma e outra. Estes costumam trazer problemas lúdicos sobre as funções polinomiais ditas acima, que muitas vezes só contemplam a realidade de uma determinada região do país, não despertando o menor interesse dos demais alunos.

> Respeitar a leitura de mundo do educando significa tomá-la como ponto de partida para a compreensão do papel da curiosidade, de modo geral, e da humana, de modo especial, como um dos impulsos fundantes da produção do conhecimento. É preciso respeitar a leitura de mundo do educando para ir mais além dela, ... (FREIRE, 2000, p. 123, 3)

Especificamente no 9º ano, de um modo geral, o conceito de função é posto em segundo plano, explorando-se muito mais os procedimentos algébricos de resolução das equações polinomiais de 1º e 2º grau, o que faz menos sentido ainda para o aluno.

As abordagens de resolução são, basicamente, a ideia da "*balança"* para equações polinomiais do 1º grau e a fórmula resolutiva para equações polinomiais do 2º grau, popularmente conhecida como a fórmula de Bhaskara. Numa forma mais aprofundada de exploração do conteúdo, também é apresentado o método de Girard e o de completar quadrados. Este último tem surgido nos livros didáticos de forma tímida e mais recentemente.

Muitos estudiosos na área do Ensino da Matemática já comprovaram o quanto a compreensão do conceito e a relação do conteúdo a ser estudado com a realidade do aluno facilita o processo de ensino/aprendizagem na área, principalmente no segundo ciclo da educação básica.

A proposta deste trabalho é apresentar o conceito de função de forma significativa para alunos do 9º ano de redes distintas, de forma a dar sentido para o mesmo, através de atividades direcionadas. Em seguida, trabalhar funções polinomiais de 1º e 2º grau, com atividades de fixação de procedimentos "*chaves"* para a resolução das mesmas, de forma lúdica, com problemas que correspondam à realidade vivenciada pelo aluno.

É preciso que o aluno adquira a compreensão que, independentemente do método utilizado, as resoluções de equações polinomiais do 1º e 2º grau atuam de forma ferramental para o desenvolvimento de funções. Cada tipo específico de função possui suas formas próprias para resolução, buscando auxiliar na resolução de um problema que se enquadre naquele formato.

Por último, levar o aluno a compreender que o conceito de função vai muito além do domínio e da execução com perfeição da *"fórmula de Bhaskara*". Que tal conteúdo possui uma representação significativa para a humanidade, onde diversas áreas responsáveis pelo desenvolvimento do mundo moderno se baseiam em tipos específicos de funções, apresentando para isso os objetos e suas respectivas funções responsáveis por tal, de forma figurativa.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1998, p. 44)

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Não se sabe ao certo quando surgiu o conceito de função, mas data de 2000 a.C., as primeiras ideias relacionadas a construção de tabelas pelos babilônios. Ao longo da história, vários matemáticos como Descartes, Newton, Cauchy, Leibniz, Euler, Lagrange, Fourier, Cantor, entre outros, cada um na sua época, contribuíram de alguma forma para chegar à definição conhecida atualmente.

Logo, para iniciar os estudos de funções, neste caso em especial as funções polinomiais do 1º e 2º grau, é necessária uma compreensão clara sobre: parte da teoria de conjuntos, par ordenado e produto cartesiano, representação gráfica, conceitos de relação e algumas de suas propriedades, conceito e definição de função, além da sua notação própria.

Sendo assim, este capítulo é destinado a estas formalizações e conceitos.

2.1. CONJUNTOS

A noção intuitiva de conjunto como agrupamentos, coleções, etc. é, basicamente, a mesma utilizada na matemática elementar.

Segundo Iezzi e Murakami (2018, p.18), na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição, isto é, são consideradas noções primitivas:

a) conjunto

b) elemento

c) pertinência entre elemento e conjunto

É habitual fazer uso de letra maiúscula (A, B, C, …) para nomear os conjuntos e letra minúscula (a, b, c, …) para nomear seus elementos.

Uma forma usual de representação de um conjunto é contornar seus elementos com uma curva fechada simples. “*No caso de usarmos um círculo para representar um conjunto, estaremos usando o assim chamado diagrama de Euler-Venn.” (IEZZI & MURAKAMI, 2018, p. 19).*

Observe:

Figura 1 – Representações de conjunto e diagrama

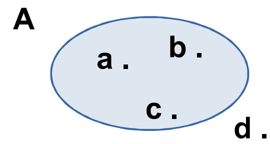


Diagrama de Euler-Venn

Fonte: Figura produzida pelo autor

Daí, temos:

$$a \in A,\ b \in A \text{ e } d \notin A.$$

Pois, conforme a relação primitiva de pertinência entre elemento e conjunto, seja A um conjunto e x um elemento. Se x pertence ao conjunto A, escrevemos:

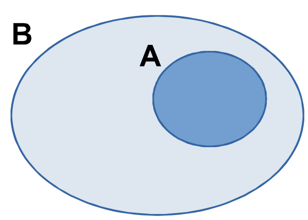
$$x \in A$$

Para indicar que x não é elemento do conjunto A, escrevemos:

$$x \notin A$$

Já a denominação que um conjunto é subconjunto de outro se, e somente se, todo elemento do subconjunto pertencer também ao outro conjunto. Ou seja, todo elemento do conjunto A, necessariamente, precisa pertencer também ao conjunto B.

Figura 2 – Representações de conjunto



Fonte: Figura produzida pelo autor

A notação $A \subset B$ indica que "*A é subconjunto de B*" ou "*A está contido em B*" ou "*A é parte de B*".

O sinal de inclusão é representado por " $\subset$ ". Em linguagem matemática, a definição fica assim:

$$\boldsymbol{A} \subset \mathbf{B} \Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B})$$

Exemplos:

1º) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$

2º) $\{1\} \subset \mathbb{N}$

3º) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2.2. RELAÇÃO

2.2.1. Produto Cartesiano e Par Ordenado

Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado a primeira coordenada de p e um objeto y, chamado a segunda coordenada de p. Dois pares ordenados $p = (x, y)$ e $q = (u, v)$ serão chamados iguais quando $x = u$ e $y = v$, isto é, quando tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada.

Chamamos de produto cartesiano ao conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, oriundos da relação entre os conjuntos A e B.

Utilizando a linguagem matemática, temos:

$$A \times B = \{(x, y);\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Exemplos:

Sejam A e B os conjuntos finitos definidos pelos primeiros três números pares e pelos primeiros três números ímpares, respectivamente, tais que $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

1º) Daí, temos como produto cartesiano de A por B, o conjunto

A x B= $\{(0, 1), (0, 3), (0, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$.

2º) Já se o produto cartesiano for B por A, o conjunto será

B x A= $\{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (3, 0), (3, 2), (3, 4), (5, 0), (5, 2), (5, 4)\}$.

2.2.2. Plano Cartesiano

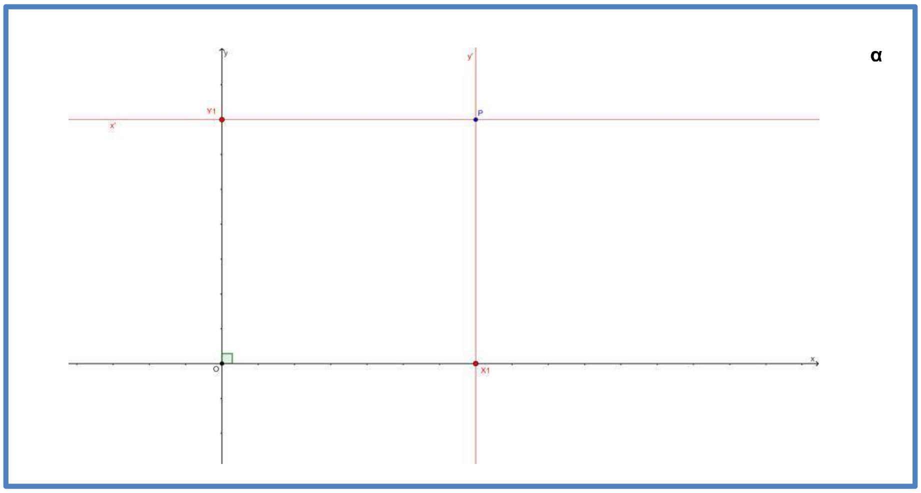
Consideremos dois eixos x e y perpendiculares em O, os quais determinam o plano α.

Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$ tracemos por ele duas retas:

$$x' \mathbin{//} x \text{ e } y' \mathbin{//} y.$$

Denominemos x_1 a interseção de x com y' e y_1 a interseção de y com x'.

Figura 3 – Representação do ponto P no plano cartesiano



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Nessas condições definimos:

a) abscissa de P é o número real x_p representado por x_1.

b) ordenada de P é o número real y_p representado por y_1.

c) coordenadas de P são os números reais x_p e y_p, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_p, y_p) em que x_p é o primeiro termo.

d) eixo das abscissas é o eixo x (ou Ox).

e) eixo das ordenadas é o eixo y (ou Oy).

f) sistema de eixos cartesiano ortogonal Oxy.

g) origem do sistema é o ponto O.

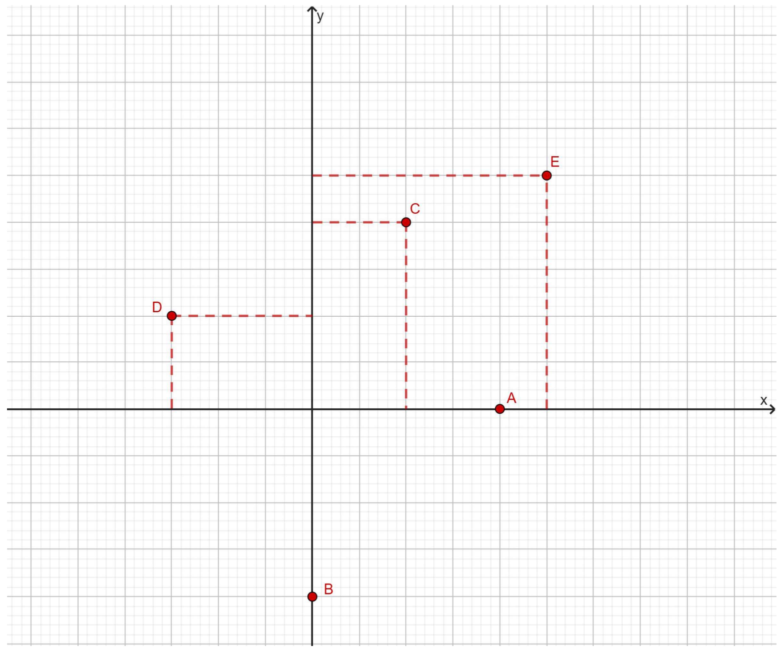
h) plano cartesiano é o plano α.

Exemplos:

Localizar os pontos no plano cartesiano lembrando que, no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo a ordenada do ponto.

$$A(4,0), B(0,-4), C(2,4), D(-3,2) \; e \; E(5,5).$$

Figura 4 – Representação dos pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

2.2.3. Relação Binária

Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação de A em B todo subconjunto R de A x B ou, mais simplesmente, uma relação binária de A em B.

$$R \text{ é } relação\ binária\ de\ A\ em\ B \Leftrightarrow R \subset A \times B.$$

O conjunto R está contido em A x B e é formado por pares (x, y), em que o elemento x de A é "associado" ao elemento y de B mediante certo critério de "*relacionamento*" ou "*correspondência*".

Exemplo:

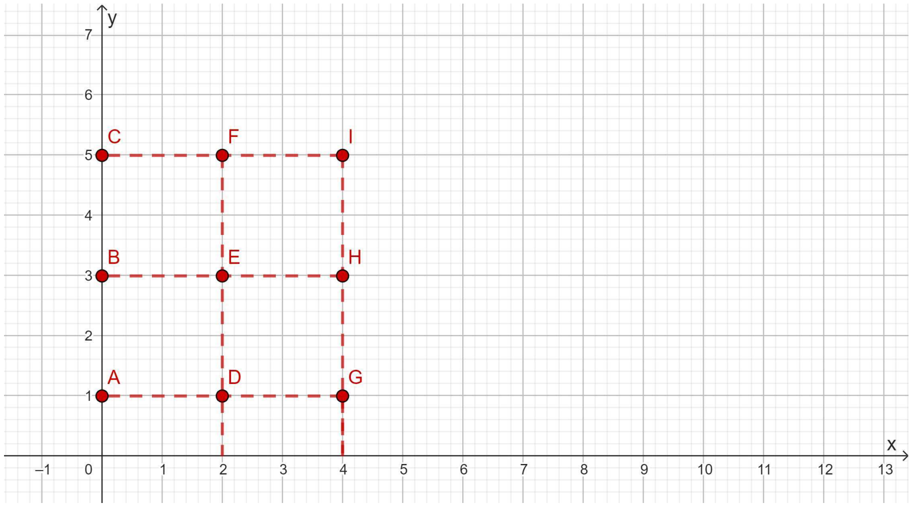
Sejam os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Como já exemplificado no item 1.2.1. deste capítulo, o produto cartesiano de A por B é o conjunto

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ e\ y \in B\},$$

formado por $3 \cdot 3 = 9$ elementos.

Observe estes elementos representados no plano cartesiano,

Figura 5 – Produto cartesiano de A por B



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

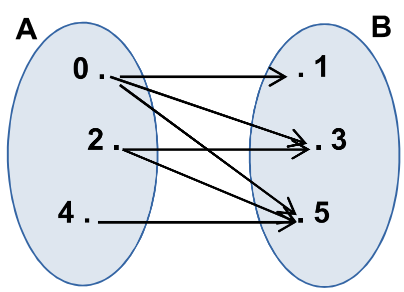
Considere o conjunto de pares ordenados (x,y) de A x B tais que $x < y$ (lê-se: x menor que y),

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\} = \{(0,1), (0,3), (0,5), (2,3), (2,5), (4,5)\},$$

que é chamado relação entre os elementos de A e de B.

Outra forma muito utilizada para a representação da relação é por meio de flechas, como pode ser observado na figura 6.

Figura 6 – Representação da relação A x B por meio de flechas



Fonte: Figura produzida pelo autor

2.2.4. Domínio e Imagem

O conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R chama-se de *domínio*.

$$x \in D \Leftrightarrow \exists y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

O conjunto IM de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R chama-se de imagem.

$$y \in IM \Leftrightarrow \exists x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Logo, conforme definição

$$D \subset A \text{ e } IM \subset B.$$

Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e R a relação

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é } múltiplo \ de \ x\},$$

ou seja,

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3)\}.$$

Daí, temos que o conjunto domínio

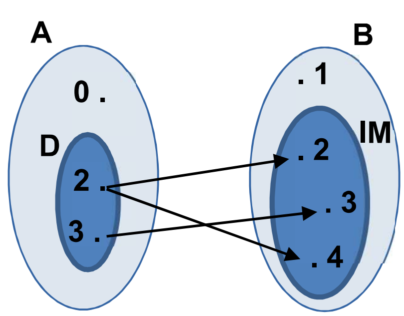
$$D = \{2, 3\}$$

e o conjunto imagem

$$IM = \{2, 3, 4\}.$$

Observe ainda as suas representações pelo esquema de flechas.

Figura 7 – Domínio e imagem da relação A x B por meio de flechas



Fonte: Figura produzida pelo autor

2.3. FUNÇÕES

2.3.1. Conceito, Definição e Notação

Uma relação em que CADA elemento do conjunto domínio se relacionar com um ÚNICO elemento do conjunto imagem denomina-se FUNÇÃO. Ou seja, função é um caso particular de relação.

Os termos em caixa alta na definição apresentada no parágrafo anterior, traduzem a importância da relação unívoca que está presente em qualquer definição de função. O fato é que embora a palavra seja muito formal para ser utilizada neste primeiro contato com a definição de função para os discentes do 9º ano do Ensino Fundamental II, de alguma forma intuitiva, tal conceito deve ser associado a função pelos mesmos, de forma clara. Já que a relação unívoca trata-se da correspondência única entre os elementos de dois conjuntos, para cada elemento de um conjunto há apenas outro elemento correspondente.

Toda função é uma relação binária de A em B, portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Muitas vezes, existe uma lei que a expressa, na forma de sentença aberta, do tipo $y = f(x)$, onde dado um $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}.$$

Isto significa que, dados os conjuntos A e B, a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

As notações mais usadas para indicar uma função f, definida em *A* com imagens em *B* segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, são:

$$\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

2.3.2. Domínio, Contradomínio e Imagem

Os conjuntos envolvidos na relação A x B, neste caso em particular denominado função, são classificados em domínio, contradomínio e imagem.

O conjunto D, domínio, é formado por todos os elementos do conjunto A, de onde partem as setas. Assim, costuma ser denominado também como o conjunto de partida. Observe que por se tratar de uma função, para todo elemento $x \in A$ existe um único $y \in B$.

Logo,

$$D = A.$$

Já o conjunto CD, contradomínio, é formado por todos os elementos de B, ou seja, é o conjunto que recebe as setas. Ele também é denominado como o conjunto de chegada, pois não necessariamente, todos os elementos de B precisam ser usados pela função, ou seja, receber setas.

Sendo assim,

$$CD = B.$$

Por último temos o conjunto IM, imagem, que é formado por todos os elementos de B que, de fato, recebem as setas. Observe que o conjunto IM é composto por todos os elementos "y" da função, com $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$, portanto o conjunto imagem é subconjunto do contradomínio.

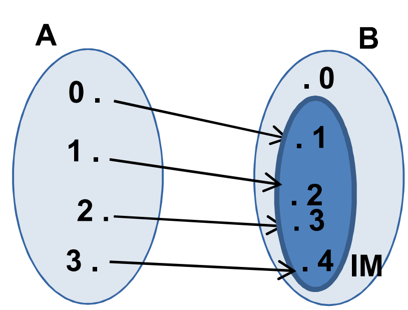
Daí,

$$IM \subset B.$$

Exemplo:

1º) Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $f(x)$ a função, conforme figura 8 no diagrama abaixo.

Figura 8 – Representação de $f(x)$ por meio de flechas



Fonte: Figura produzida pelo autor

Ou seja,

$$f(x) = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}.$$

Daí, temos que o conjunto domínio

$$D = A,$$

o contradomínio é

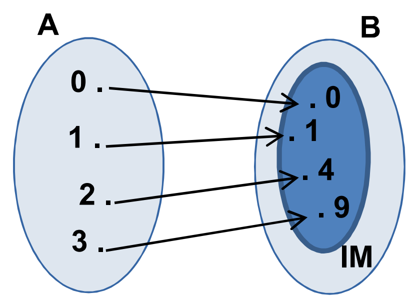
$$CD = B,$$

e o conjunto imagem

$$IM = \{1,2,3,4\}.$$

2º) Sejam os conjuntos $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,1,4,9\}\ e\ g(x)$ a função, conforme figura 9 no diagrama abaixo.

Figura 9 – Representação de $g(x)$ por meio de flechas



Fonte: Figura produzida pelo autor

Ou seja,

$$g(x) = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}.$$

Daí, temos que o conjunto domínio

$$D = A,$$

o contradomínio é

$$CD = B,$$

e o conjunto imagem

$$IM = \{0,1,4,9\} = B.$$

2.3.3. Gráfico de função

Assim como nem toda relação é uma função, nem todo gráfico pode ser atribuído a uma função. Para identificar o gráfico de uma função é necessário reconhecer a sua definição, para todo elemento *"x"* do conjunto domínio existe um único elemento *"y"* no conjunto imagem, com *"y"* pertencente também ao contradomínio.

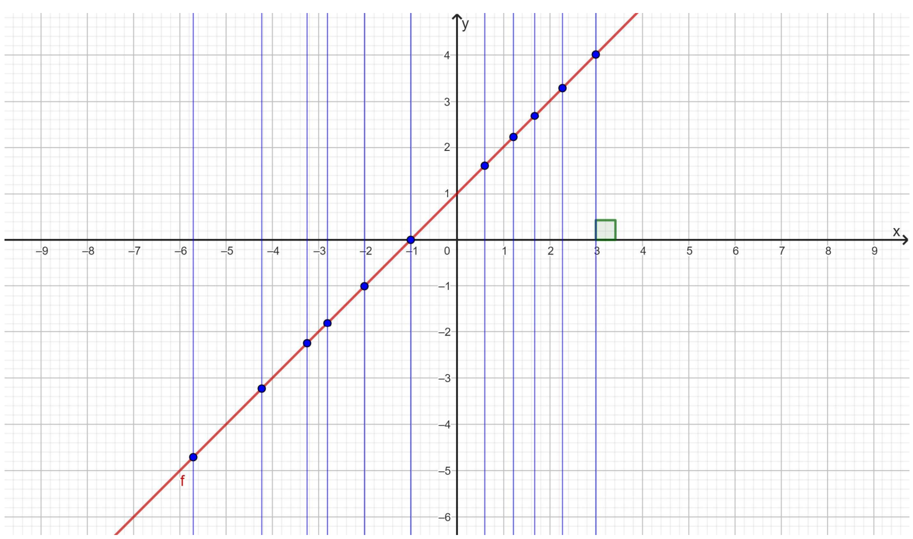
Observe que no plano cartesiano, o conjunto domínio é formado pelas abscissas que representam o *"x"* no par ordenado, (x, y). Já o *"y"* é representado pelas ordenadas e eles são os elementos que formam o conjunto imagem, subconjunto do contradomínio.

Uma forma prática de perceber a definição numa representação gráfica é traçando retas perpendiculares ao eixo das abscissas no plano cartesiano e verificando se as mesmas interceptam o gráfico em apenas um único ponto, ou seja, um único *"y"* para cada elemento do domínio.

Exemplos:

1º) Observe que na figura 10, o gráfico *"f"* é uma função, pois cada reta perpendicular ao eixo das abscissas intercepta o gráfico em um único ponto.

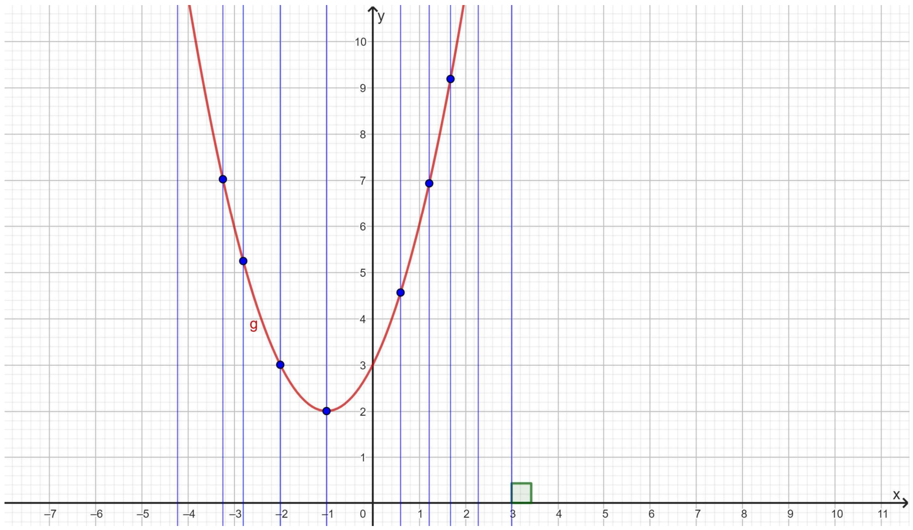
Figura 10 – Como reconhecer se o gráfico *"f"* é função



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

2º) Na figura 11, o gráfico *"g"* também é uma função, pois cada reta perpendicular ao eixo das abscissas intercepta o gráfico em um único ponto.

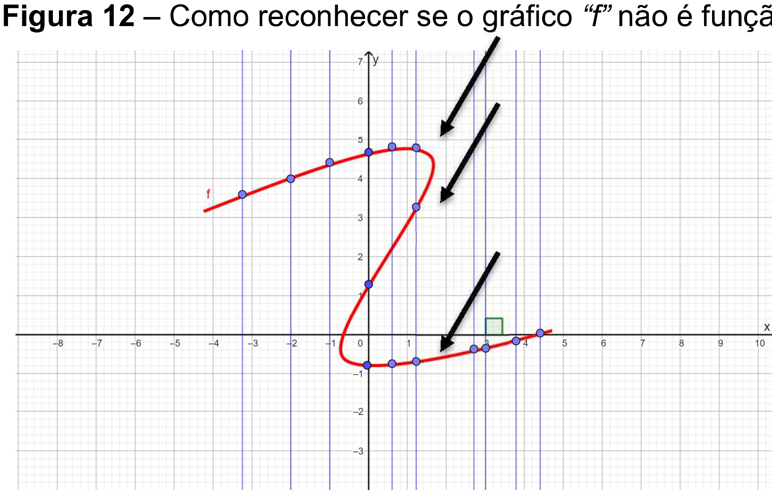
Figura 11 – Como reconhecer se o gráfico *"g"* é função



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

3º) Já na figura 12, o gráfico *"f"* não é uma função, pois algumas retas perpendiculares ao eixo das abscissas interceptam o gráfico em mais de um ponto. Observe que algumas abscissas (alguns valores do domínio *"x")* possuem mais de uma imagem, "*y*".

Figura 12 – Como reconhecer se o gráfico *"f"* não é função



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

2.3.4. Lei de formação

As funções de interesse são geradas através de uma expressão algébrica que nos permite encontrar os pares ordenados (x, y), por meio de uma fórmula denominada lei de formação. É através desta fórmula que se relacionam os elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

Exemplos:

1º) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = x + 1$, essa função recebe valores do domínio e relaciona-os com o seu valor adicionado de 1 no contradomínio;

2º) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com lei de formação $\mathrm{g}(x) = x$, essa função recebe valores do domínio e relaciona-os com a sua identidade no contradomínio;

3º) Seja $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com lei de formação $\mathrm{h}(x) = x^2$, essa função recebe valores do domínio e relaciona-os com a seu quadrado no contradomínio.

3. FUNÇÕES POLINOMIAIS

As funções polinomiais são as funções cujas leis de formação são compostas por polinômios. Neste caso, o grau da função é definido como o grau do polinômio.

Os estudos das funções polinomiais do 1º e 2º grau fazem parte das orientações curriculares para o 9º ano do Ensino Fundamental II, conforme Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Sendo assim, este capítulo será destinado aos estudos destas funções.

3.1. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Toda função polinomial do 1º grau possui como lei de formação um polinômio do 1º grau, completo ou incompleto. Logo, sua lei de formação deve ser do tipo $f(x) = ax + b$, com os coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$. O coeficiente "*a*" é chamado de coeficiente angular e é o responsável pela inclinação da reta representada no plano cartesiano.

Sendo assim, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ recebe o nome de função polinomial do 1º grau.

Exemplos:

1º) $f(x) = x + 1$, com $a = 1$ e $b = 1$;

2º) $f(x) = 3x$, com $a = 3$ e $b = 0$;

3º) $f(x) = -2x + 3$, com $a = -2$ e $b = 3$.

3.1.1. Representação por diagrama

Como em toda função, se substituir os valores de "*x*" pertencentes ao conjunto domínio na lei de formação dada, pode-se calcular a sua imagem, gerando assim o par $(x, f(x))$.

Exemplo:

Sejam $f(x) = x + 1$ e o conjunto domínio $D = \{0, 1, 2, 3\}$, temos:

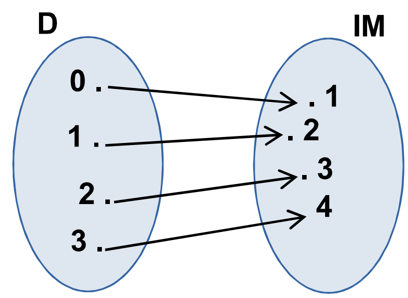
$f(0) = x + 1$	$f(1) = x + 1$	$f(2) = x + 1$	$f(3) = x + 1$
$f(0) = 0 + 1$	$f(1) = 1 + 1$	$f(2) = 2 + 1$	$f(3) = 3 + 1$
$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$f(2) = 3$	$f(3) = 4$
Logo, (0, 1).	Logo, (1, 2).	Logo, (2, 3).	Logo, (3, 4).

Daí,

$$f(x) = \{(0,1), (1,2), (2,3),(3,4)\}.$$

Na figura 13 temos a representação em forma de diagrama de $f(x) = x + 1$.

Figura 13 – Representação de $f(x) = x + 1$ por diagramas



Fonte: Figura produzida pelo autor

Observe ainda que nesta função o conjunto domínio e o conjunto imagem são $D = \{0, 1, 2, 3\}$ e $IM = \{1, 2, 3, 4\}$, respectivamente.

3.1.2. Representação gráfica

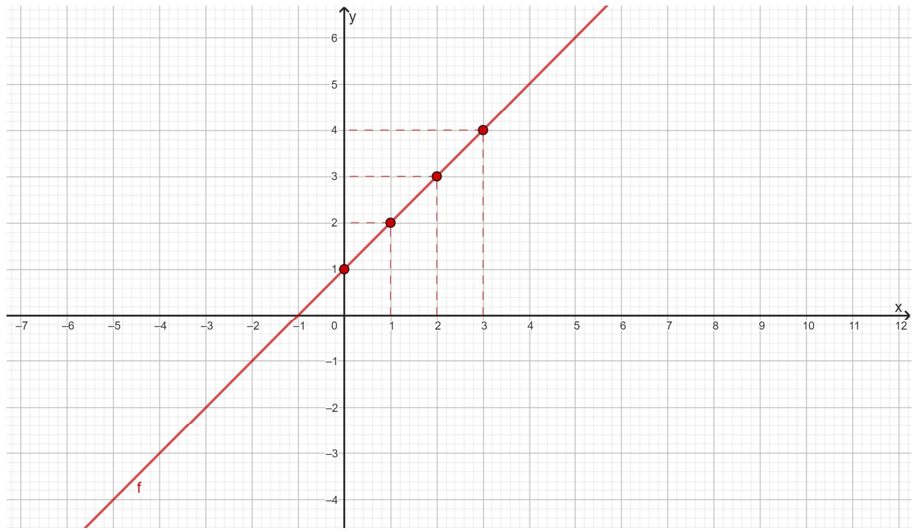
O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é sempre representado por uma reta.

Através dos pares ordenados gerados no exemplo do item 2.1.1, considerando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja a lei de formação é $f(x) = x + 1$, é possível construir o gráfico de f no plano cartesiano facilmente, como pode ser observado na figura 14.

Sendo,

$$f(x) = \{(0,1), (1,2), (2,3),(3,4)\}.$$

Figura 14 – Representação gráfica de $f(x) = x + 1$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Porém, conforme um dos axiomas da geometria Euclidiana pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos. Sendo assim, no gráfico de uma função polinomial do 1º grau, alguns pontos notáveis podem auxiliar bastante neste processo. Estes são os pontos de interseção com os eixos cartesianos.

O primeiro a ser estudado é a raiz do polinômio, ou também chamado zero da função. Este ponto trata-se da abscissa em que a lei de formação da função em questão gera um resultado nulo. Na prática este resultado é facilmente obtido, bastando igualar a expressão algébrica dada a zero e realizar alguns procedimentos resolutivos básicos, como pode ser observado a seguir, utilizando-se do exemplo apresentado no item 2.1.1.

$$f(x) = x + 1$$
$$0 = x + 1$$
$$x = -1$$

Logo, $(-1, 0)$.

Vale ressaltar que por se tratar de uma função polinomial de grau 1, a mesma possui apenas uma raiz, já que o grau do polinômio corresponde também a quantidade máxima de raízes que a função possui.

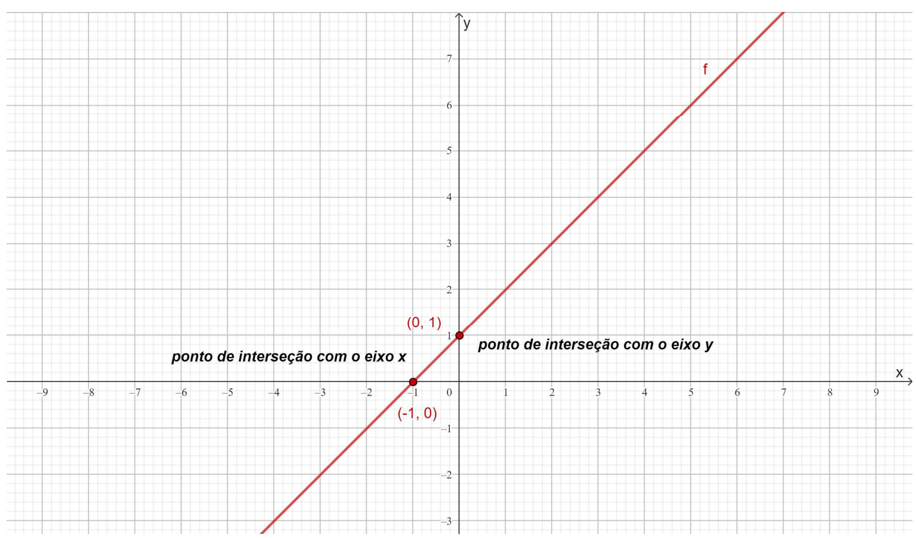
Dando continuidade, o segundo ponto a ser obtido é o par ordenado que intercepta o eixo das ordenadas, "y". Ou seja, quando a abscissa é zero.

Apesar de este ponto poder ser obtido com a substituição deste valor na lei de formação dada, como já calculado no exemplo 2.1.1 acima cuja as coordenadas do ponto foram $(0, 1)$, ele também pode ser gerado sem procedimento algébrico algum. Observando a lei de formação de uma função polinomial do 1º grau, é fácil à visualização que ao zerar a abscissa o que se obtém como resultado é o coeficiente de grau zero do polinômio, o *"b"*. Sendo assim, este segundo par ordenado pode ser obtido por $(0, b)$.

Novamente, utilizando-se da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja a lei de formação é $f(x) = x + 1$, onde os coeficientes angulares e lineares da função são $a = 1$ e $b = 1$, temos que as coordenadas deste segundo ponto são (0, 1).

Com estes dois pontos, $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, o gráfico de $f(x)$ pode ser construído, conforme figura 15.

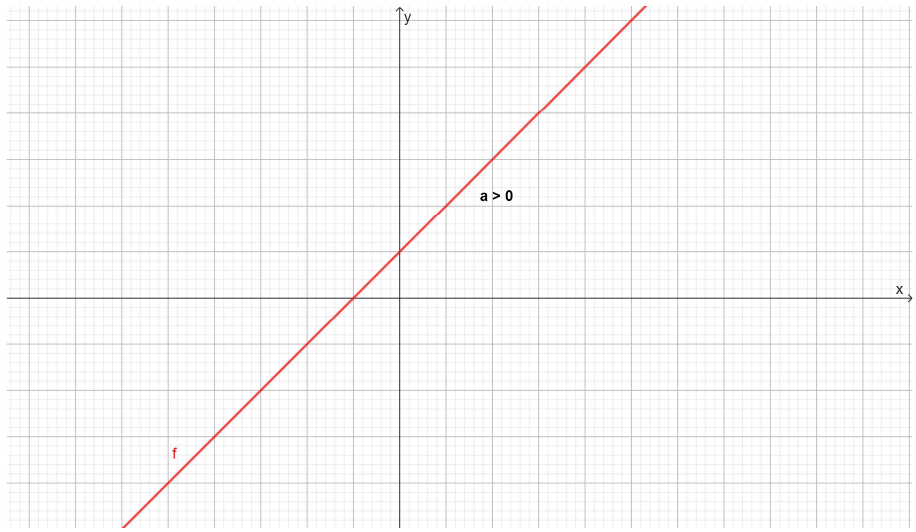
Figura 15 – Representação gráfica de $f(x) = x + 1$, interceptando os eixos



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

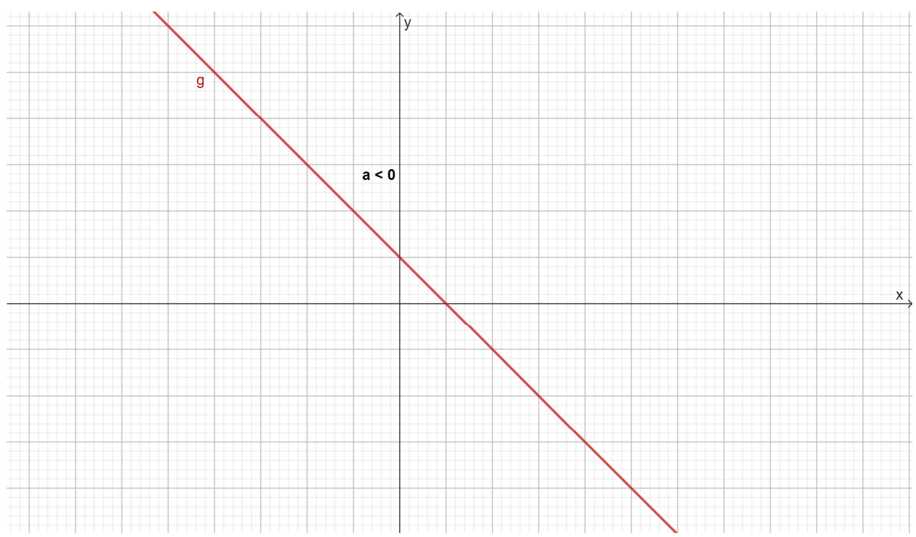
Vale ainda ressaltar que o sinal do coeficiente angular, o "*a*" da lei de formação da função polinomial do 1º grau, também contribui de forma significativa para a composição do gráfico. Se "*a*" for um valor real positivo, a reta "*sobe*" e a função é crescente, proporcionalmente. Já se este coeficiente for um valor real negativo, a reta “desce” e a função é decrescente, sendo as suas coordenadas inversamente proporcionais, *x* e *y* (se desconsiderarmos o termo de grau zero).

Figura 16 – Inclinação da reta conforme coeficiente angular, $a > 0$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Figura 17 – Inclinação da reta conforme coeficiente angular, $a < 0$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Por último, este tipo de função é altamente aplicável na matemática e nas ciências, o que torna sua modelagem com problemas do cotidiano muito fácil e de excelente compreensão por parte dos alunos.

3.2. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

As funções polinomiais do 2º grau, também conhecidas como funções quadráticas, são oriundas de polinômios do 2º grau, completos ou incompletos. Logo, sua lei de formação deve ser do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com os coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sendo assim, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ um elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$ é dado o nome de função polinomial do 2º grau ou função quadrática.

Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, com $a = 1, b = -4\ e\ c = 3$.

2º) $f(x) = 2x^2 - 3x$, com $a = 2, b = -3\ e\ c = 0$.

3º) $f(x) = -2x^2 + 3$, com $a = -2, b = 0\ e\ c = 3$.

4º) $f(x) = -x^2$, com $a = -1, b = 0\ e\ c = 0$.

3.2.1. Representação por diagrama

Assim como toda função, substituindo os valores de "*x*" pertencentes ao conjunto domínio na lei de formação dada, pode-se calcular a sua imagem, gerando assim o par ordenado $(x, f(x))$.

Exemplo:

Sejam $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e o conjunto domínio $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, temos:

$f(0) = x^2 - 4x + 3$

$f(0) = (0)^2 - 4(0) + 3$

$f(0) = 3$

Logo, $(0, 3)$.

$f(1) = x^2 - 4x + 3$

$f(1) = (1)^2 - 4(1) + 3$

$f(1) = 1 - 4 + 3$

$f(1) = 0$

Logo, $(1, 0)$.

$f(2) = x^2 - 4x + 3$

$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3$

$f(2) = 4 - 8 + 3$

$f(2) = -1$

Logo, $(2, -1)$.

$f(3) = x^2 - 4x + 3$

$f(3) = (3)^2 - 4(3) + 3$

$f(3) = 9 - 12 + 3$

$f(3) = 0$

Logo, $(3, 0)$.

$f(4) = x^2 - 4x + 3$

$f(4) = (4)^2 - 4(4) + 3$

$f(4) = 16 - 16 + 3$

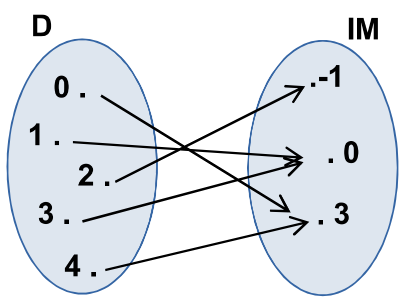
$f(4) = 3$

Logo, $(4, 3)$.

Sendo assim, $f(x) = \{(0,3), (1,0), (2,-1), (3,0), (4,3)\}$.

Na figura 18 tem-se a representação de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ por diagrama.

Figura 18 – Representação de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ por diagramas



Fonte: Figura produzida pelo autor

Definindo ainda os conjuntos domínio e imagem tem-se $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e $IM = \{-1, 0, 3\}$, respectivamente.

3.2.2. Representação gráfica

Toda função polinomial do 2º grau possui como representação gráfica uma curva chamada de parábola.

Para traçar uma parábola o ideal é que sejam definidos vários pontos. Para uma melhor organização dos resultados obtidos, costuma-se construir tabelas.

Considere o exemplo utilizado no item 2.2.1 deste capítulo, com $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sabendo que sua lei de formação de f é $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e que $f(x) = \{(0,3), (1,0), (2,-1), (3,0), (4,3)\}$, construindo a tabela temos:

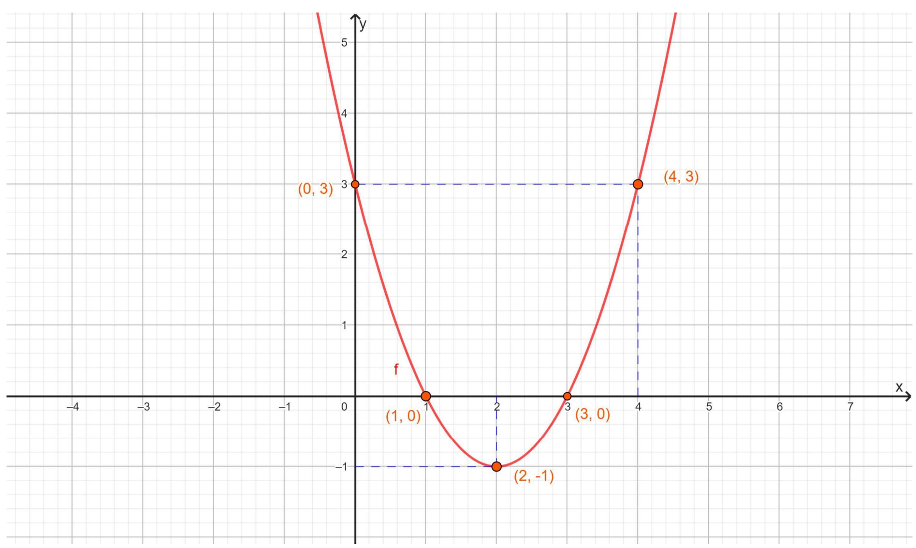
Figura 19 – Tabela de $f(x) = x^2 - 4x + 3$

x	$f(x) = x^2 - 4x + 3$
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3

Fonte: Figura produzida pelo autor

Podendo assim, a partir destas coordenadas, construir o gráfico conforme figura 20.

Figura 20 – Representação gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Observe que a construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau, com o auxílio de uma tabela de valores *x* e *y*, como foi feito na figura 19, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois na tabela atribuímos a *x* alguns valores inteiros. Pode acontecer que em alguns casos, os valores da abscissa (valores de *x*), onde a parábola intercepta o eixo do *x*, ou a abscissa do ponto da parábola de maior (ou menor) ordenada que determine o ponto máximo (ou mínimo) não sejam atribuídos na tabela.

Os valores de *"x"* que interceptam o eixo das abscissas e o ponto máximo (ou mínimo) da parábola são pontos significativos para que a mesma consiga ser definida com precisão.

Como na função polinomial do 1º grau, as abscissas que interceptam o eixo horizontal do plano cartesiano são facilmente definidas igualando a lei de formação a zero e resolvendo a equação gerada através dos procedimentos algébricos recomendados para resolução da mesma. Estas são os zeros da função ou raízes.

Já as coordenadas do ponto máximo (ou mínimo) de uma função quadrática, chamadas de coordenadas do vértice de uma parábola, são definidas através das equações:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad \text{e} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a},$$

onde a, b e c são os coeficientes numéricos da lei de formação e o discriminante delta (Δ), obtido através de parte da fórmula resolutiva ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Exemplos:

1º) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função cuja a lei de formação é dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$, que possui como coeficientes reais $a = 1,\ b = -4\ e\ c = 3$.

Geralmente nesta etapa de ensino os alunos optam pela fórmula resolutiva (Baskara) ou pela relação de Girard para resolver uma equação do 2º grau, já que são as mais familiares aos mesmos.

Neste caso, as raízes deste exemplo serão definidas pela fórmula resolutiva. Esta será desenvolvida em duas etapas.

Daí,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3)$$
$$\Delta = 16 - 12$$
$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$
$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x' = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Logo, os pares ordenados que interceptam o eixo das abscissas são $(1, 0)\ e\ (3, 0)$.

Para calcular as coordenadas do vértice, basta utilizar as equações para tal.

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-4)}{2(1)}$$

$$x_v = \frac{4}{2}$$

$$x_v = 2$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(4)}{4(1)}$$

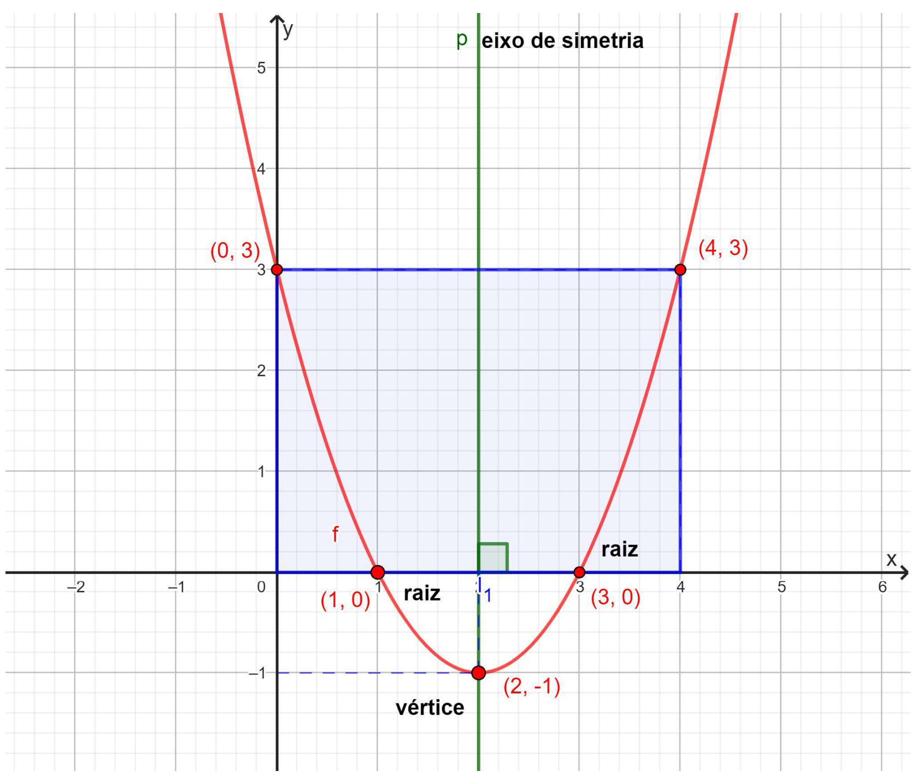
$$y_v = \frac{-4}{4}$$

$$y_v = -1$$

Daí, as coordenadas do vértice da parábola são $(2, -1)$.

Pelo vértice ainda é possível traçar o eixo de simetria da parábola. Através de uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe pelo vértice, é possível visualizar que a parábola se “*espelha*”.

Figura 21 – Representação do eixo de simetria de uma parábola



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Observe ainda que através da sua forma quadrática é possível definir mais dois pontos e melhorar o esboço da parábola.

Um ponto fácil de ser identificado é o que intercepta o eixo das ordenadas, *"y"*. Como na função polinomial do 1º grau, estas coordenadas são obtidas quando a abscissa é zero. Logo, basta gerar o par ordenado com o termo independente do polinômio do 2º grau, neste caso em especial, o termo c, $(0, c)$.

Pela forma quadrática é fácil definir um valor para o quinto ponto através do eixo de simetria. Analisando a figura 21 da função obtida pela lei de formação $f(x) = x^2 - 4x + 3$, um valor sugerido para a outra abscissa é o 4, pela sua forma quadrática.

Daí,

$$f(4) = x^2 - 4x + 3$$
$$f(4) = (4)^2 - 4(4) + 3$$
$$f(4) = 16 - 16 + 3$$
$$f(4) = 3.$$

Logo, os dois últimos pontos ideais para esta construção são $(0, 3)$ e $(4, 3)$.

2º) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função cuja a lei de formação é dada por $f(x) = x^2 - 4$, que possui como coeficientes $a = 1,\ b = 0\ e\ c = -4$.

Utilizando os mesmos procedimentos operatórios orientados no exemplo anterior, ou a resolução de forma direta de uma equação algébrica, por ser um polinômio incompleto, obtém-se as raízes $x' = -2$ e $x'' = 2$, gerando assim os pares ordenados $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

Desenvolvendo as fórmulas para determinar as coordenadas do vértice, temos $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (0, -4)$.

Observe que neste caso em particular o polinômio é incompleto, pois o coeficiente $b = 0$ e o vértice da parábola intercepta o eixo das ordenadas. Por último, são atribuídos pela forma quadrática da parábola os outros dois pontos, as abscissas com as mesmas distâncias das raízes, -3 e 3.

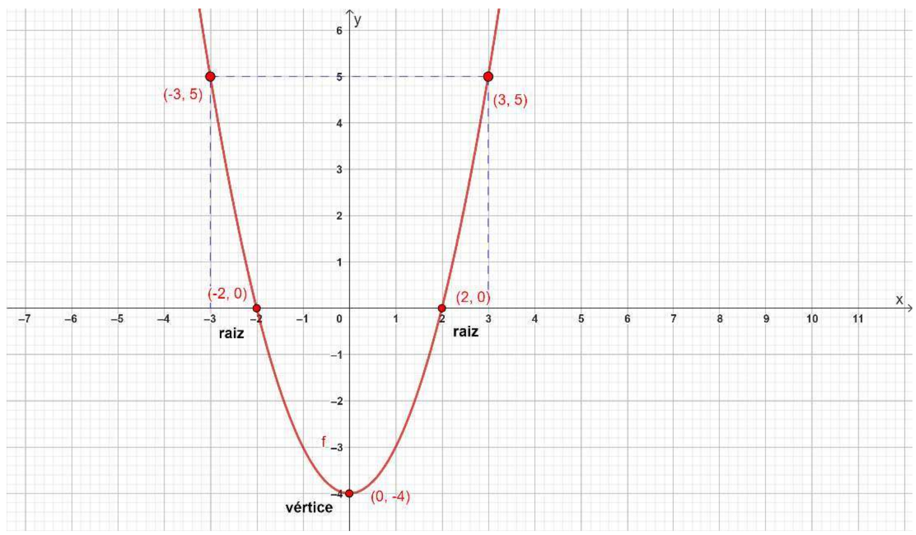
Substituindo na função em questão, temos:

$f(-3) = x^2 - 4$
$f(-3) = (-3)^2 - 4$
$f(-3) = 9 - 4$
$f(-3) = 5$
Logo, $(-3, 5)$.

$f(3) = x^2 - 4$
$f(3) = (3)^2 - 4$
$f(3) = 9 - 4$
$f(3) = 5$
Logo, $(3, 5)$.

Sendo assim, segue na figura 22 o gráfico da função em questão.

Figura 22 – Representação gráfica de $f(x) = x^2 - 4$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

3º) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função cuja a lei de formação é dada por $f(x) = x^2 - 4x$, que possui como coeficientes $a = 1,\ b = -4\ e\ c = 0$.

Após a execução dos cálculos algébricos utilizando-se dos métodos de resolução apropriada ou de fatoração do polinômio, já que se trata de uma função incompleta cujo coeficiente c é nulo, obtém-se as raízes $x' = 0$ e $x'' = -4$, gerando assim os pares ordenados $(0, 0)$ e $(-4, 0)$.

Aplicando as fórmulas para gerar as coordenadas do vértice, temos $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (2, -4)$.

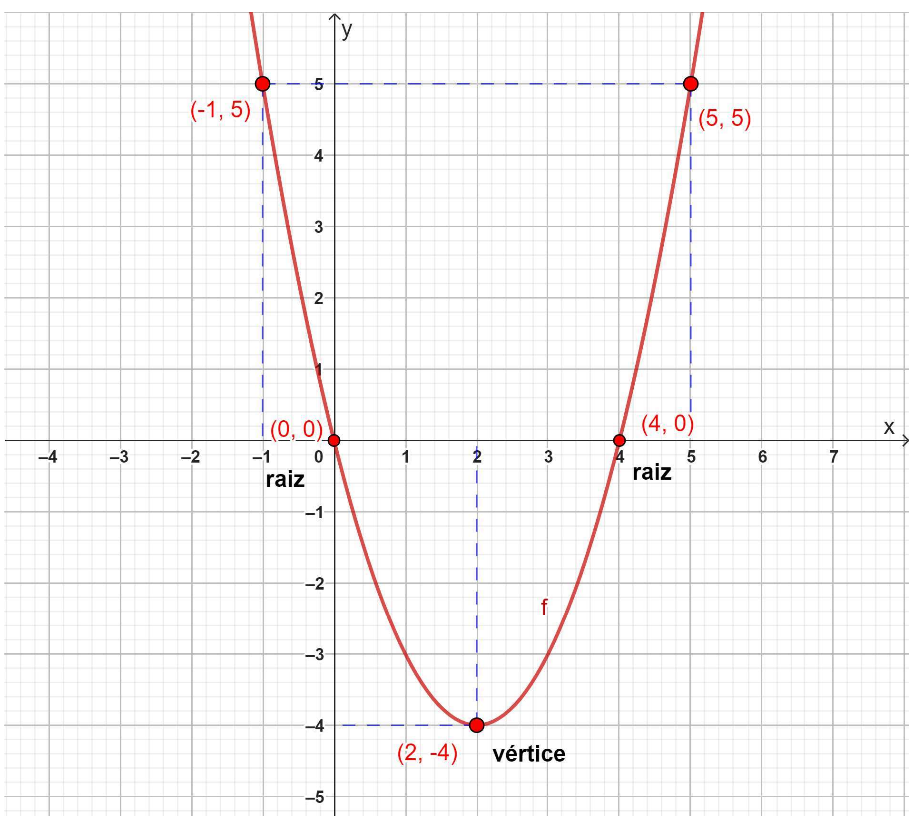
Observe que neste caso em particular que o polinômio é incompleto, uma das raízes parábola intercepta o eixo das ordenadas. Daí, novamente, são atribuídos pela forma quadrática da parábola os outros dois pontos, as abscissas com as mesmas distâncias das raízes, -1 e 5.

Substituindo na função em questão, temos:

$f(-1) = x^2 - 4x$	$f(5) = x^2 - 4x$
$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1)$	$f(5) = (5)^2 - 4(5)$
$f(-1) = 1 + 4$	$f(5) = 25 - 20$
$f(-1) = 5$	$f(5) = 5$
Logo, $(-1,\ 5)$.	Logo, $(5,\ 5)$.

Portanto, segue na figura 23 o gráfico da função em questão.

Figura 23 – Representação gráfica de $f(x) = x^2 - 4x$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

4º) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função cuja a lei de formação é dada por $f(x) = -x^2$, que possui como coeficientes $a = -1,\ b = 0\ e\ c = 0$.

Observe que neste caso em particular, cujos coeficientes são nulos, com exceção do *"a",* as duas raízes são idênticas $x' = x" = 0$, gerando assim um único par ordenado $(0, 0)$.

Pelo fato da parábola interceptar o eixo das abscissas em um único ponto, este também é o vértice da parábola.

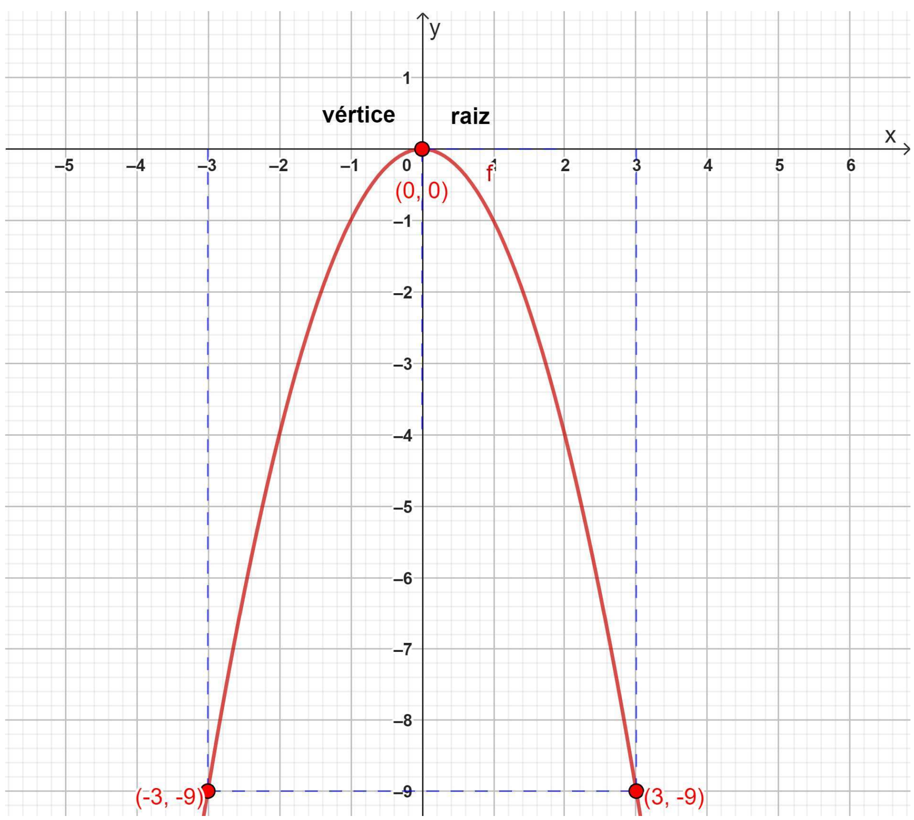
Sendo assim, bastam atribuir duas abscissas aleatórias, respeitando a forma quadrática da parábola e gerar mais dois pares ordenados. Neste caso em particular, considere -3 e 3.

Substituindo na função em questão, temos:

$f(-3) = -x^2$	$f(3) = -x^2$
$f(-3) = -(-3)^2$	$f(3) = -(3)^2$
$f(-3) = -9$	$f(3) = -9$
Logo, $(-3, -9)$.	Logo, $(3, -9)$.

Daí, temos na figura 24 o gráfico da função em questão.

Figura 24 – Representação gráfica de $f(x) = -x^2$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

5º) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a função cuja a lei de formação é dada por $f(x) = -x^2 + 2\,x - 2$, que possui como coeficientes $a = -1,\ b = 2\ e\ c = -2$.

Utilizando os mesmos procedimentos operatórios orientados no primeiro exemplo, a parábola não intercepta o eixo x, já que esta equação não possui raízes reais.

Desenvolvendo as fórmulas para determinar as coordenadas do vértice, temos $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (1, -1)$.

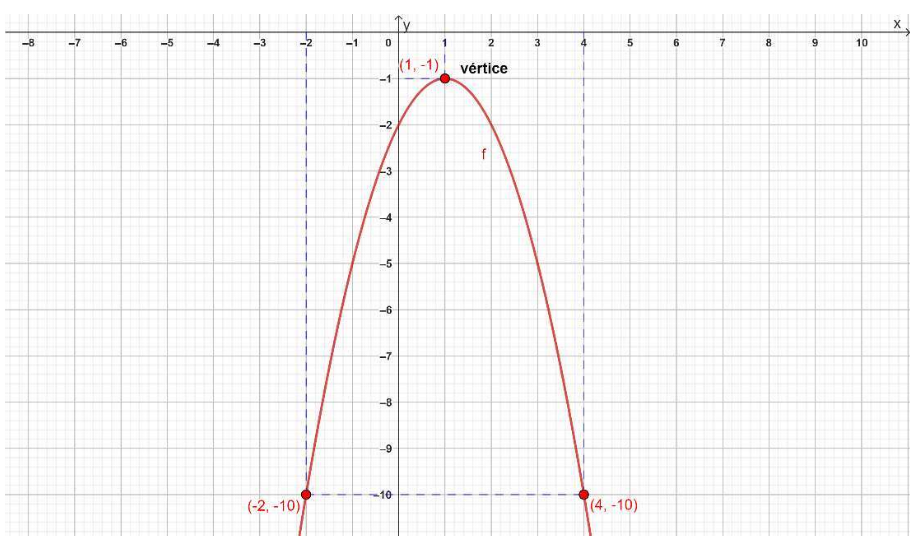
É preciso ainda definir no mínimo mais dois pontos para se traçar a parábola. Daí, são atribuídos pela forma quadrática da parábola os outros dois pontos, atribuindo abscissas com as mesmas distâncias das raízes, -2 e 4.

Substituindo na função em questão, temos:

$f(-2) = -x^2 + 2x - 2$	$f(4) = -x^2 + 2x - 2$
$f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) - 2$	$f(4) = -(4)^2 + 2(4) - 2$
$f(-2) = -4 - 4 - 2$	$f(4) = -16 + 8 - 2$
$f(-2) = -10$	$f(4) = -10$
Logo, $(-2, -10)$.	Logo, $(4, -10)$.

Sendo assim, segue na figura 25 o gráfico da função em questão.

Figura 25 – Representação gráfica de $f(x) = -x^2 + 2\,x - 2$

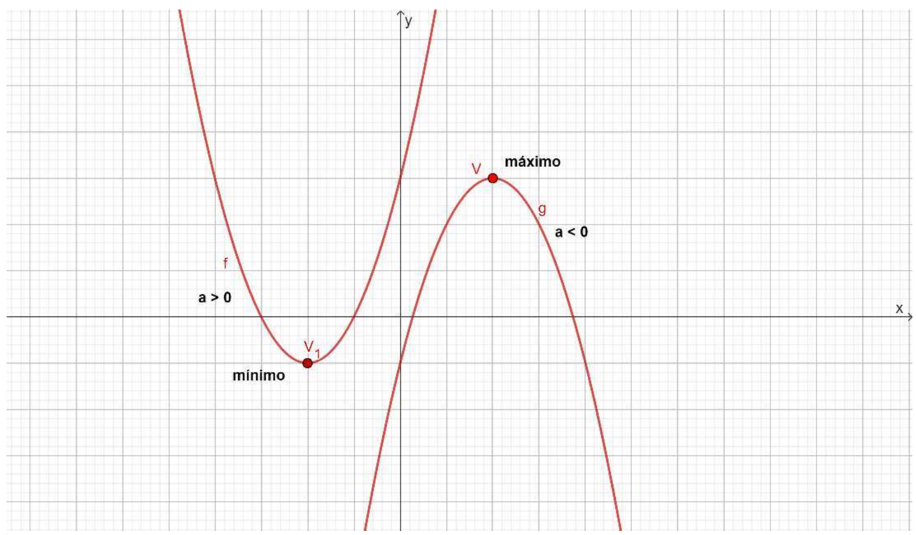


Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

3.2.3. Máximo ou mínimo da função

Toda parábola possui ponto máximo ou mínimo. Este é definido no vértice da parábola, dependendo do posicionamento da concavidade da mesma. Essa é definida pelo coeficiente *"a"* da lei de formação. Se o *"a"* for positivo, $a > 0$, a concavidade é voltada para cima, logo o vértice da parábola representa o ponto mínimo da função. Já se o *"a"* for negativo, $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo, logo o vértice da parábola representa o ponto máximo da função.

Figura 26 – Mínimo e máximo de uma parábola



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, com $a = 1 > 0$.

Sendo assim, temos que f possui ponto mínimo no seu vértice, V= $(2, -1)$.

2º) $f(x) = 2x^2 - 3x$, com $a = 2 > 0$.

Sendo assim, temos que f possui ponto mínimo no seu vértice, V= $\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.

3º) $f(x) = -2x^2 + 3$, com $a = -2 < 0$.

Sendo assim, temos que f possui ponto máximo no seu vértice, V= $(0, -3)$.

4º) $f(x) = -x^2$, com $a = -1 < 0$.

Sendo assim, temos que f possui ponto máximo no seu vértice, V= $(0, 0)$.

As funções polinomiais do 2º grau são bastante utilizáveis no cotidiano e áreas afins, principalmente pela possibilidade de analisar seus possíveis pontos de máximo (ou mínimo). A modelagem de problemas próximos a realidade dos alunos, não só facilitam a compreensão das mesmas, como os leva a entender a importância de aprofundar os estudos nas suas características e propriedades.

4. DEFINIÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS

Apesar dos inúmeros cursos de extensão e formações continuadas disponibilizadas, regularmente, para professores de matemática da educação básica, mencionando que os livros didáticos tratam-se de materiais de apoio no processo ensino/aprendizagem, muitos dos profissionais em questão sejam por opção ou por imposição da instituição em que atuam, ainda se apoiam, exclusivamente, no livro didático adotado pela unidade escolar para o desenvolvimento do conteúdo.

> O livro texto constitui-se, em nossa concepção, o mais forte referencial adotado pelo professor em sala de aula. Nele o professor baseia sua prática de ensino, não estabelecendo, em geral, sequer uma quebra na sequência em que os conteúdos são apresentados, ainda que surja a necessidade de fazê-lo. Tal fato tem sido muitas vezes apontado como um gerador de problemas para o desenvolvimento de determinados tópicos. (REGO, 2000 p.48)

Sendo assim, será apresentada uma breve análise das definições de função trazidas nos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental II, adotados nas redes públicas em questão.

Vale lembrar que estas são as definições que os alunos possuem contato sobre função.

4.1. LIVRO DIDÁTICO MATEMÁTICA BIANCHINI 9º ANO – ED. MODERNA

Segundo Bianchini (2018, p.217), "*dizemos que a grandeza y é função da grandeza x se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y.*"

Tal definição é apresenta após uma problematização lúdica da possível compra de um produto que custa *x*, onde o preço *y* que deverá ser pago, é determinado a partir da compra de uma quantidade estipulada.

Figura 27 – Situação problema do conteúdo de funções livro didático Matemática Bianchini 9º ano

1 Conceito de função

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Uma empresa de TV a cabo cobra de seus assinantes uma mensalidade de R$ 195,00 e mais R$ 9,00 por programa extra comprado. Desse modo, o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas extras comprados pelo assinante.

Vamos organizar um quadro que mostre a relação entre o número de programas extras comprados e o total a ser pago.

Número de programas extras	Preço (em real)
0	195
1	$195 + 1 \cdot 9$
2	$195 + 2 \cdot 9$
3	$195 + 3 \cdot 9$
4	$195 + 4 \cdot 9$


FLYING COLOURS/GETTY IMAGES

Indicando por x o número de programas extras comprados e por y o preço a pagar, podemos relacionar essas duas grandezas pela sentença:

$$y = 195 + x \cdot 9 \text{ ou } y = 195 + 9x$$

Fonte: Livro didático Matemática Bianchini 9º ano, 2018, p.217

Partindo de situações problemas similares ao exemplo apresentado na figura 27, o autor aprofunda o conceito de funções, desenvolvendo situações até a formação de funções lineares completas, com suas respectivas leis de formação.

Fazendo uso de tabelas e pares ordenados, segue a sua construção do conceito com a definição de zero da função, "*é todo valor de x para o qual y é igual a zero, ou seja, é a abscissa do ponto onde gráfico da função cruza o eixo dos x*" (BIANCHINI, 2018, p. 225). Dando sequência, orienta como reconhecer um gráfico de função.

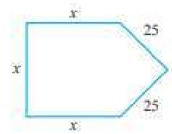
A partir de exemplos e contraexemplos o autor ressalta o que precisa ser observado em relação aos eixos, de acordo com retas perpendiculares ao eixo das abscissas traçadas nos gráficos apresentados. Ou seja, ele orienta que seja feita a verificação da definição de função, graficamente: *"... para qualquer valor de x, temos um único valor de y correspondente."* (BIANCHINI, 2018, p. 226)

Aprofundando a análise gráfica, explora ainda o estudo de sinais das mesmas, fazendo um "*link*" com proporcionalidade e finaliza com o estudo de funções polinomiais do 1º e do 2º grau (figuras 28 e 29) utilizando-se de uma metodologia similar.

Figura 28 – Conceito do conteúdo de função polinomial do 1º grau do livro didático Matemática Bianchini 9º ano

2 Função polinomial do 1º grau

Considere o pentágono da figura ao lado. Nele, as medidas são dadas em centímetro. O perímetro desse polígono depende dos valores que forem atribuídos a x. Indicando o perímetro por y, temos:



$$y = 3x + 50$$

A função definida pela lei $y = 3x + 50$ é um exemplo de função polinomial do 1º grau.

> Uma **função polinomial do 1º grau** é toda função dada por uma lei de formação do tipo $y = ax + b$, sendo os coeficientes a e b números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Veja outros exemplos de funções polinomiais do 1º grau, dos quais destacamos os valores de a e b.

a) $y = 2x - 1$, sendo $a = 2$ e $b = -1$.

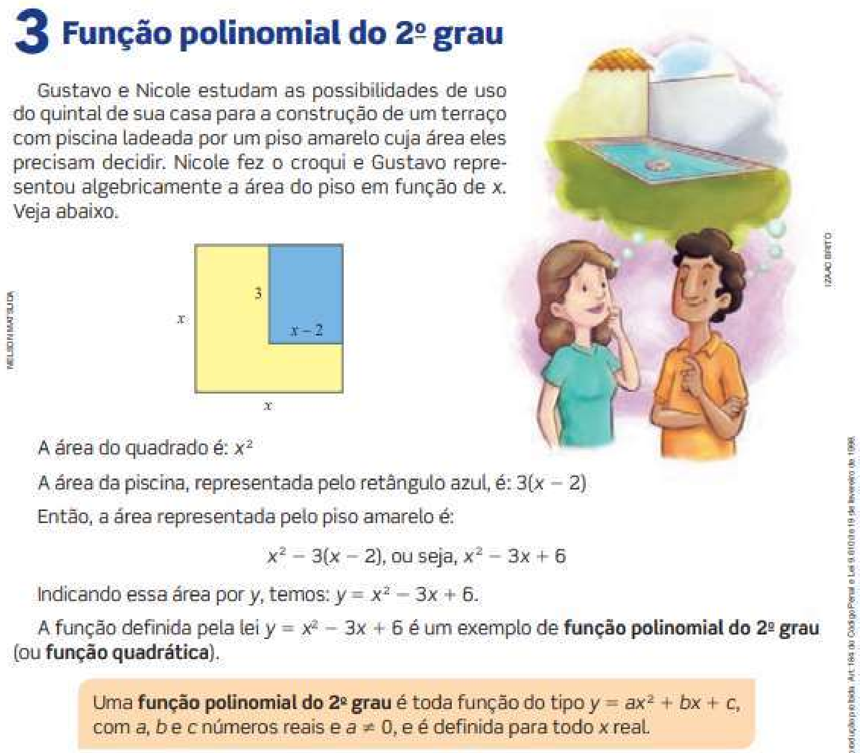
b) $y = -\frac{3}{2}x + 5$ sendo $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 5$.

c) $y = -5x$, sendo $a = -5$ e $b = 0$. Em casos como este, nos quais $b = 0$, chamamos a função polinomial do 1º grau de **função linear**.

d) $y = \frac{x}{2}$ sendo $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$.

Fonte: Livro didático Matemática Bianchini 9º ano, 2018, p.217

Figura 29 – Conceito do conteúdo de função polinomial do 2º grau do livro didático Matemática Bianchini 9º ano



3 Função polinomial do 2º grau

Gustavo e Nicole estudam as possibilidades de uso do quintal de sua casa para a construção de um terraço com piscina ladeada por um piso amarelo cuja área eles precisam decidir. Nicole fez o croqui e Gustavo representou algebricamente a área do piso em função de x. Veja abaixo.

A área do quadrado é: x^2

A área da piscina, representada pelo retângulo azul, é: $3(x - 2)$

Então, a área representada pelo piso amarelo é:

$$x^2 - 3(x - 2), \text{ ou seja, } x^2 - 3x + 6$$

Indicando essa área por y, temos: $y = x^2 - 3x + 6$.

A função definida pela lei $y = x^2 - 3x + 6$ é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** (ou **função quadrática**).

Uma **função polinomial do 2º grau** é toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Fonte: Livro didático Matemática Bianchini 9º ano, 2018, p.238

4.2. LIVRO DIDÁTICO PRATICANDO MATEMÁTICA 9º ANO – ED. DO BRASIL

Andrini & Vasconcellos apresentam o conceito de função em duas etapas. Num primeiro momento conceituam os conjuntos que serão envolvidos, para então formalizar o conceito de função propriamente dito.

> Para que tenhamos uma função é preciso:
> ◆ estabelecer dois conjuntos: um primeiro conjunto, do qual tomaremos os valores de *x*, e um segundo conjunto, no qual encontraremos os valores correspondentes de *y*;
> ◆ haver uma relação entre *x* e *y* de forma que a cada *x* tomado no primeiro conjunto corresponda um único *y* no segundo conjunto. (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2015, p.97)

Para isso, também iniciam com um problema hipotético conforme figura 30.

Figura 30 – Situação problema do conteúdo de funções do livro didático Praticando Matemática 9º ano

1. Conceito de função

A quantidade de combustível consumida por um automóvel é função da distância que ele percorre.

Nessa afirmação e em outras presentes em nosso dia a dia, usamos a expressão "é função de" para mostrar que a quantidade de combustível depende do número de quilômetros rodados pelo automóvel.

Mas o que é função? Já percebemos a ligação entre a palavra **função** e a relação de interdependência entre os valores de grandezas.

Vamos descobrir mais?

Fonte: Livro didático Praticando Matemática 9º ano, 2015, p.97

Em seguida, geram uma lei de formação e apresentam a representação do problema em forma de diagrama, conceituando os conjuntos e a forma formal de representação e leitura de uma função (figura 31). Só então formalizam o conceito de função propriamente dito.

Figura 31 – Lei de formação e diagramas do livro didático Praticando Matemática 9º ano

Observe que a cada número *x* dito pelo professor corresponde um único resultado correto *y* para a resposta dos alunos.

A fórmula que expressa a relação entre *x* e *y* é $y = 2x + 3$.

Nesse exemplo, dizemos que *y* é **função** de *x*.

A fórmula $\boxed{y = 2x + 3}$ é a **lei de formação** dessa função.

Outro modo de representar essa tabela é por meio de um **diagrama**:

Editora do Brasil

Formamos um conjunto A com os números dados pelo professor e um conjunto B com as respostas dos alunos.

Como os conjuntos que relacionamos são A e B, dizemos que essa é uma função de A em B. Escreve-se:

f: A ⟶ B (Lê-se: *f* é uma função de A em B.)

Fonte: Livro didático Praticando Matemática 9º ano, 2015, p.96

Após práticas de exercícios, fazendo uma analogia com o conceito de função e a ideia de uma máquina, classificam os conjuntos domínio e imagem dos problemas apresentados, reforçando assim o conceito de função que "*todo elemento do conjunto domínio possui apenas uma única imagem.*"

Utilizando de situações problemas com aplicações de funções polinomiais de 1º e 2º grau, finalizam o conteúdo explorando os conceitos de: lei de formação, tabelas, interpretações de tabelas com os seus respectivos gráficos, até construção de gráficos e resolução de problemas que envolvam funções (figuras 32 e 33).

Figura 32 – Lei de formação e tabelas do livro didático Praticando Matemática 9º ano

As funções têm aplicações nas situações do cotidiano e do trabalho. Acompanhe.

1. No açougue, o quilograma de determinado tipo de carne custa R$ 26,00. O preço a pagar *y* é função da quantidade de carne comprada *x*. Veja a tabela:

Quantidade de carne (kg)	Preço (R$)
x	y
1	$26 \cdot 1 = 26$
2	$26 \cdot 2 = 52$
3	$26 \cdot 3 = 78$
4	$26 \cdot 4 = 104$

A cada valor de *x* corresponde um único valor de *y*.

A lei de formação dessa função é $y = 26x$.

x e *y* são as variáveis da função

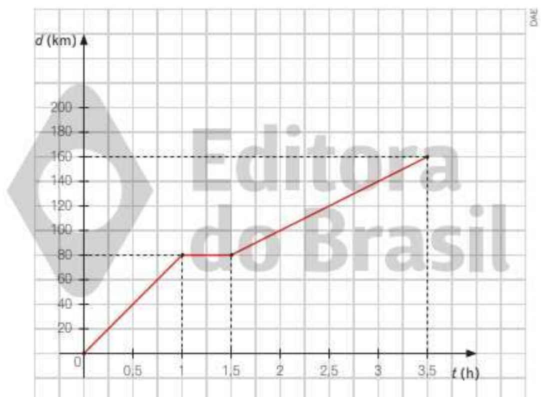
A **lei de formação** da função estabelece a relação matemática entre *x* e *y*.

Fonte: Livro didático Praticando Matemática 9º ano, 2015, p.103

Figura 33 – Interpretação de gráficos do livro didático Praticando Matemática 9º ano

Agora vamos analisar gráficos, retirando deles informações sobre a função.

1. Sérgio saiu de casa dirigindo seu automóvel e fez uma viagem de 160 km por uma estrada praticamente retilínea. Chegando ao seu destino, reclamou de um trecho da estrada em que teve de viajar com velocidade baixa por causa dos buracos.
O gráfico a seguir mostra a distância *d* percorrida pelo automóvel em função do tempo decorrido de viagem *t*.



O gráfico nos fornece muitas informações.

- Para $t = 1$ h, temos $d = 80$ km. Isso significa que em 1 hora de viagem o automóvel percorreu 80 km. Sua velocidade média nesse trecho da viagem foi de 80 km/h.

Fonte: Livro didático Praticando Matemática 9º ano, 2015, p.110

Os autores trabalham ainda, em um subtítulo do tópico construindo gráficos de funções, os pontos de interseções dos gráficos das funções com os eixos do plano cartesiano, definindo assim o zero de uma função, "*o(s) valor(es) de x encontrado(s) quando fazemos y = 0 na lei da função.*" (ANDRINI & VASCONCELLOS, 2015, p.119)

4.3. LIVRO DIDÁTICO DA COLEÇÃO TELÁRIS MATEMÁTICA 9º ANO – ED. ÁTICA

Para Dante (2018, p.118), *"dados 2 conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x ∈ A a um único elemento y ∈ B"*. Tal definição é apresentada seguida da forma correta de notação e leitura (figura 34).

Figura 34 – Definição e notação de função do livro didático da Coleção Teláris Matemática 9º ano

Definição e notação

Dados 2 conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Usamos a seguinte notação:

$$f: A \to B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

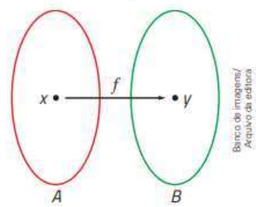
(Lemos: f é uma função de A em B.)

A função f transforma x de A em y de B, ou seja, $f: x \to y$.

Escrevemos assim:

$$y = f(x)$$

(Lemos: y é igual a f de x.)



$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\to y \end{aligned}$$

Fonte: Livro didático Coleção Teláris Matemática 9º ano, 2018, p.118

Assim como os livros anteriores, Dante também inicia a construção do conceito de função com uma problematização lúdica, conforme figura 35.

Figura 35 – Situação problema do conteúdo de funções do livro didático da Coleção Teláris Matemática 9º ano

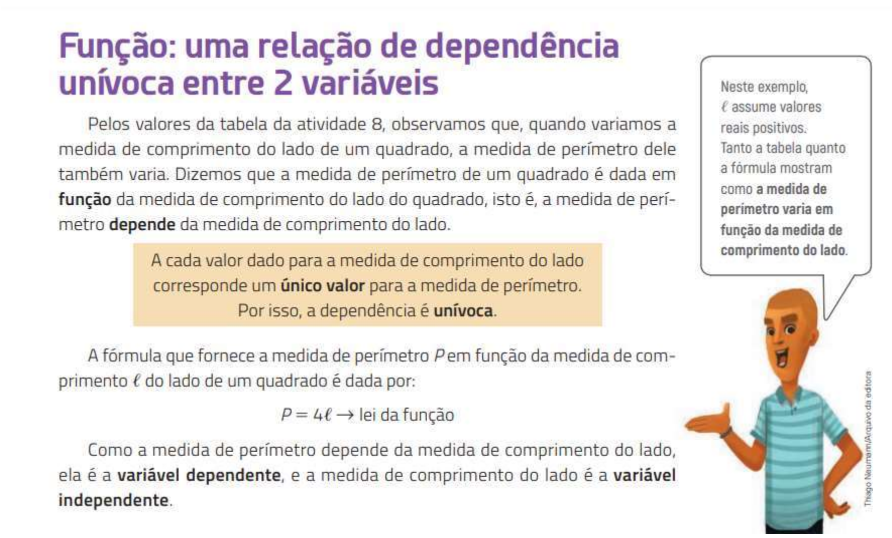
Nesse ponto de táxi, o preço a ser pago por uma corrida depende do número de quilômetros rodados. Dizemos que o preço é dado em **função** do número de quilômetros rodados.

Fonte: Livro didático Coleção Teláris Matemática 9º ano, 2018, p.111

Através de situações problemas, de forma intuitiva o autor vai apresentando os termos formais que fazem parte da definição e que, provavelmente, sejam desconhecidos até então pelo público-alvo.

Inicia argumentando sobre a relação de dependência existente, até chegar a afirmação que "*O conceito de função está presente em situações em que relacionamos 2 grandezas variáveis.*" (DANTE, 2018, p.112) Após algumas atividades propostas e apoiado nos procedimentos necessários para as resoluções das mesmas, caracteriza variável dependente e variável independente, exemplificando assim a dependência unívoca. "*A cada valor dado para a medida de comprimento do lado corresponde um único valor para a medida de perímetro. Por isso, a dependência é unívoca.*" (DANTE, 2018, p.114)

Figura 36 – Conceito de relação de dependência unívoca do livro didático da Coleção Teláris Matemática 9º ano



Função: uma relação de dependência unívoca entre 2 variáveis

Pelos valores da tabela da atividade 8, observamos que, quando variamos a medida de comprimento do lado de um quadrado, a medida de perímetro dele também varia. Dizemos que a medida de perímetro de um quadrado é dada em **função** da medida de comprimento do lado do quadrado, isto é, a medida de perímetro **depende** da medida de comprimento do lado.

A cada valor dado para a medida de comprimento do lado corresponde um **único valor** para a medida de perímetro. Por isso, a dependência é **unívoca**.

A fórmula que fornece a medida de perímetro P em função da medida de comprimento ℓ do lado de um quadrado é dada por:

$P = 4\ell \rightarrow$ lei da função

Como a medida de perímetro depende da medida de comprimento do lado, ela é a **variável dependente**, e a medida de comprimento do lado é a **variável independente**.

Fonte: Livro didático Coleção Teláris Matemática 9º ano, 2018, p.114

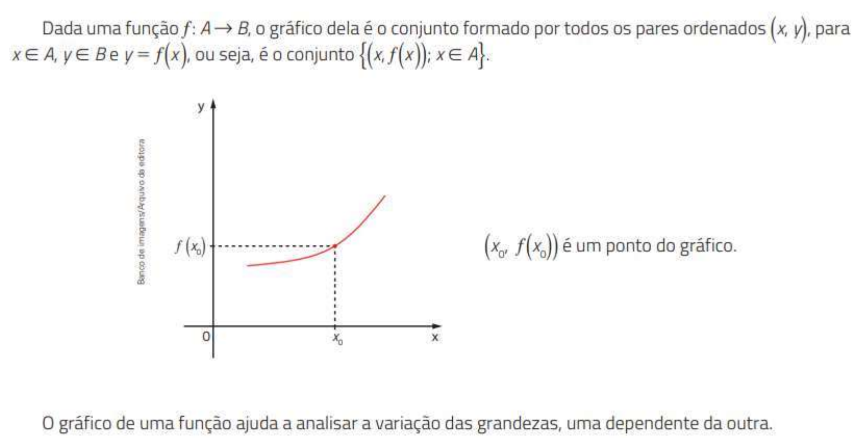
Dando continuidade a construção do conceito de função, ainda de forma intuitiva e utilizando-se de situações problemas, o autor caracteriza funções e não funções apoiando-se na teoria de conjuntos e dispondo de diagramas. Só então apresenta sua definição formal de função descrita no início deste subcapítulo.

Ainda de forma lúdica, gera pares ordenados, caracterizando variáveis dependentes e variáveis independentes.

A partir daí, passa a definir todas as demais propriedades e características que envolvam o conceito de função de forma abstrata, deixando a problematização apenas para aplicações em atividades propostas.

Formaliza os conjuntos utilizados, definindo domínio, contradomínio e imagem de uma função de forma direta, com o auxílio de um diagrama cujos elementos utilizados são *x* e *y*. De forma análoga apresenta a representação gráfica de uma função a partir do conjunto dos seus pares ordenados (figura 37), aproveitando para diferenciar os gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus, dando destaque para os pontos que representam os zeros das funções, *"entre os possíveis valores que x pode assumir em uma função, é chamado de zero da função todo valor de x, quando existir, para o qual y = 0."* (DANTE, 2018, p.128)

Figura 37 – Representação gráfica de uma função do livro didático da Coleção Teláris Matemática 9º ano



Fonte: Livro didático Coleção Teláris Matemática 9º ano, 2018, p.125

Em seguida, explica como reconhecer o gráfico de uma função com o auxílio de uma reta perpendicular ao eixo das abscissas no plano cartesiano. "*Geometricamente, se esses 2 conjuntos de valores são o conjunto dos números reais, significa que qualquer reta perpendicular ao eixo x deve intersectar o gráfico, sempre em um único ponto.*" (DANTE, 2018, p.129)

Finaliza o conteúdo com resolução de problemas que envolvem o conceito de função, função afim incluindo seus gráficos e sistemas de duas equações do 1º grau.

5. ANÁLISE DAS METODOLOGIAS UTILIZADAS PARA APRESENTAR AS DEFINIÇÕES PELOS LIVROS DIDÁTICOS

Um aluno da educação básica tem o seu primeiro contato com o conceito de função no 9º ano do Ensino Fundamental II. Como podemos observar pelas definições transcritas no capítulo anterior, o conceito de função vai sendo construído aos poucos, em subtítulos isolados, sem transmitir ao aluno uma visão geral do mesmo e as suas formas de representação. Cada etapa é apresentada como se fossem conteúdos isolados, sem fazer conexão com os conteúdos trabalhados anteriormente.

Podemos observar que nenhum dos autores analisados faz menção ao conceito de relação. O conceito de função é apresentado de forma direta, através de exemplos práticos do cotidiano, não mencionando em momento algum a sua generalização e a importância de tal para vários contextos e áreas de estudos da matemática.

> A generalização do conceito de funções é essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois permite a compreensão de relações e padrões que se estendem para além de casos específicos. Através da generalização, somos capazes de aplicar os mesmos princípios e métodos a uma ampla gama de situações, fornecendo uma base sólida para a resolução de problemas e a construção de teorias. A importância dessa generalização reside na sua capacidade de capturar a essência dos fenômenos matemáticos e de estabelecer conexões entre diferentes áreas do conhecimento, impulsionando assim o avanço da ciência e da tecnologia. (Autor desconhecido).

Na Coleção Teláris, o autor, de forma muito sutil, menciona sobre a existência de uma regra para associar os elementos em sua definição. Atribuir tal nomenclatura a uma definição induz o aluno ao erro, já que toda definição tem como objetivo explicar de forma concisa e clara algo, enquanto uma regra é associada a um padrão que se é estabelecido. Sendo assim, tal nomenclatura pode levar o aluno a associar o conceito de função a um padrão único, restringindo assim a sua generalização.

No livro Praticando Matemática, também é citado pelo autor sobre uma relação entre *x* e *y* na definição. Porém, em ambos os casos, não é feito qualquer esclarecimento sobre os termos utilizados. Já Dante, da Coleção Teláris, apresenta a notação de função por meio de conjuntos e classifica a relação existente entre os diagramas como o que "*é função*" e o que "*não é função*", mas nada além disso.

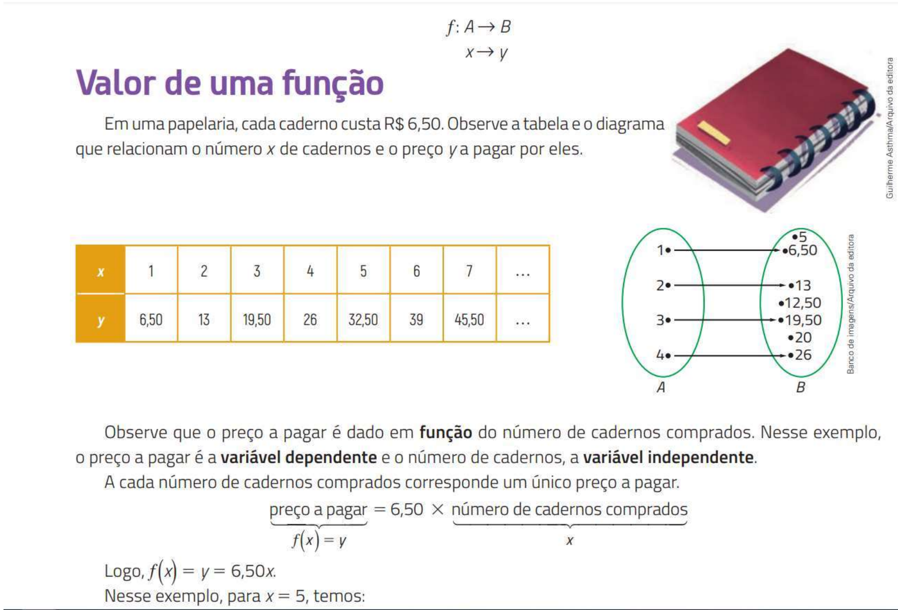
Na verdade, no momento em que os autores analisados tentam fazer uma espécie de adaptação à definição de função, acabam por não apresentá-las corretamente, como observamos no capítulo anterior. Ensinar um conceito de forma distorcida para um aluno que está tendo contato com ele pela primeira vez, prática comum utilizada na educação básica, pode trazer consequências desastrosas a longo prazo para o processo ensino/aprendizagem. Vale a pena ainda ressaltar que o conceito de função abrange boa parte das orientações curriculares para o Ensino Médio e é significativo para o desenvolvimento acadêmico em qualquer área do conhecimento que envolva a matemática. Isso já era sinalizado por Ponte desde a década de 90.

> O conceito de função é considerado um dos mais importantes da matemática e seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência, como por exemplo, na contagem. Mas, a noção de função, claramente individualizada como objeto de estudo corrente é mais recente. (PONTE, 2010, p.3).

Dante, da Coleção Teláris, por trazer sua definição baseada em conjuntos, é o único dos autores analisados que classifica os conjuntos domínio, contradomínio e imagem. Andrini & Vasconcellos, do Praticando Matemática, apenas fazem menção sobre diagramas como outra forma de notação para função, não fazendo relação com a sua definição e registrando assim os conjuntos domínio e imagem de forma superficial. A representação da definição de função por diagramas é muito comprometida num modo geral, dando a entender que não pertence ao conteúdo em si. Os autores não relacionam os diagramas com a sua representação gráfica em momento algum, limitando assim a construção de uma generalização para a definição de função.

Como todos os autores analisados iniciam o conceito de função por exemplificações lúdicas, como pôde ser observado no capítulo anterior, ao apresentar a definição do conceito, os mesmos já vão relacionando-a com a lei de formação de uma função, gerando inclusive tabelas para melhor relacionar os valores obtidos. Como Dante explora a definição utilizando-se de diagramas, ele relaciona tais valores obtidos na tabela exemplificando com os diagramas (figura 38). Também, Andrini & Vasconcelos, com bem menos ênfase, como se pode visualizar na figura 39. Já o Bianchini, da coleção Matemática Bianchini, reduz a exemplificações dos valores obtidos apenas em tabelas (figura 40).

Figura 38 – Relacionar problematização de função com representações do livro didático Coleção Teláris Matemática 9º ano



$$f: A \to B$$
$$x \to y$$

Valor de uma função

Em uma papelaria, cada caderno custa R$ 6,50. Observe a tabela e o diagrama que relacionam o número x de cadernos e o preço y a pagar por eles.

x	1	2	3	4	5	6	7	...
y	6,50	13	19,50	26	32,50	39	45,50	...

Observe que o preço a pagar é dado em **função** do número de cadernos comprados. Nesse exemplo, o preço a pagar é a **variável dependente** e o número de cadernos, a **variável independente**.

A cada número de cadernos comprados corresponde um único preço a pagar.

$$\underbrace{\text{preço a pagar}}_{f(x)\,=\,y} = 6{,}50 \times \underbrace{\text{número de cadernos comprados}}_{x}$$

Logo, $f(x) = y = 6{,}50x$.

Nesse exemplo, para $x = 5$, temos:

Fonte: Livro didático Coleção Teláris Matemática 9º ano, 2018, p.118

Figura 39 – Relacionar problematização de função com representações do livro didático Praticando Matemática 9º ano

Veja na tabela os números ditos pelo professor e as respostas dos alunos:

Número dado pelo professor	Resposta dos alunos
4	11
6	15
−5	−7
0	3

Qual deveria ser a resposta dos alunos se o professor dissesse:

a) $\frac{1}{2}$? 4 b) 1,3? 5,6

A resposta dos alunos depende do número escolhido pelo professor.

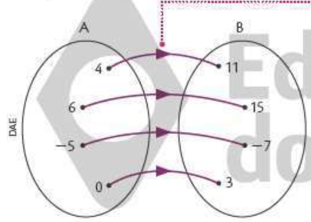
Observe que a cada número *x* dito pelo professor corresponde um único resultado correto *y* para a resposta dos alunos.

A fórmula que expressa a relação entre *x* e *y* é $y = 2x + 3$.

Nesse exemplo, dizemos que *y* é **função** de *x*.

A fórmula $y = 2x + 3$ é a **lei de formação** dessa função.

Outro modo de representar essa tabela é por meio de um **diagrama**:



Cada seta associa o número falado pelo professor com a respectiva resposta dos alunos.

Fonte: Livro didático Praticando Matemática 9º ano, 2015, p.96

Figura 40 – Relacionar problematização de função com representações do livro didático Matemática Bianchini 9º ano

Situação 2

Paulo é vendedor de assinaturas de revistas e seu salário varia conforme o número de assinaturas que ele vende no mês. Ele recebe um valor fixo de R$ 1.800,00, mais comissão de R$ 40,00 para cada assinatura vendida. Veja no quadro abaixo a relação entre o número de assinaturas vendidas e o salário de Paulo.

Número de assinaturas vendidas	Salário de Paulo (em real)
0	1.800
1	$1.800 + 1 \cdot 40 = 1.840$
2	$1.800 + 2 \cdot 40 = 1.880$
3	$1.800 + 3 \cdot 40 = 1.920$
4	$1.800 + 4 \cdot 40 = 1.960$
5	$1.800 + 5 \cdot 40 = 2.000$

Nesse caso, podemos escrever a lei de função:

$$f(x) = 1.800 + x \cdot 40 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1.800 + 40x$$

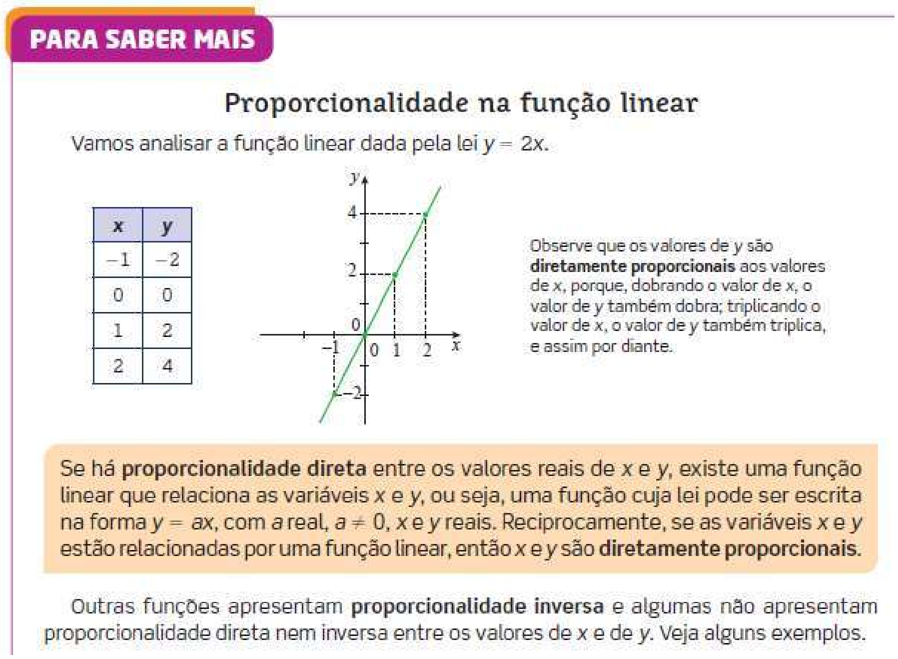
Observe que $f(x)$ representa o salário de Paulo e x, o número de assinaturas vendidas.

Com essas informações, podemos responder, por exemplo, às questões a seguir.

Fonte: Livro didático Matemática Bianchini 9º ano, 2018, p.218

Bianchini ainda relaciona as funções lineares ao conceito de proporcionalidade aprofundando assim os estudos das mesmas, conforme pode ser observado na figura 41.

Figura 41 – Proporcionalidade na função linear do livro didático Matemática Bianchini 9º ano


PARA SABER MAIS

Proporcionalidade na função linear

Vamos analisar a função linear dada pela lei $y = 2x$.

x	y
−1	−2
0	0
1	2
2	4

Observe que os valores de y são **diretamente proporcionais** aos valores de x, porque, dobrando o valor de x, o valor de y também dobra; triplicando o valor de x, o valor de y também triplica, e assim por diante.

Se há **proporcionalidade direta** entre os valores reais de x e y, existe uma função linear que relaciona as variáveis x e y, ou seja, uma função cuja lei pode ser escrita na forma $y = ax$, com a real, $a \neq 0$, x e y reais. Reciprocamente, se as variáveis x e y estão relacionadas por uma função linear, então x e y são **diretamente proporcionais**.

Outras funções apresentam **proporcionalidade inversa** e algumas não apresentam proporcionalidade direta nem inversa entre os valores de x e de y. Veja alguns exemplos.

Fonte: Livro didático Matemática Bianchini 9º ano, 2018, p.237

Embora associar um conteúdo novo a conteúdos já consolidados facilite o processo ensino/aprendizagem, é preciso levar em consideração que o aluno em questão recebe uma quantidade significativa de informações neste primeiro contato com o conteúdo de funções. Vale ressaltar ainda que, conforme observado no capítulo anterior, o autor em questão opta por consolidar tal conceito nas aplicações em funções polinomiais do 1º e 2º grau. Sendo assim, propor esta relação entre estes conteúdos neste momento do processo ensino/aprendizagem, pode comprometer a compreensão da generalização do conceito de função para o aluno, já que o mesmo ainda se encontra em processo de consolidação do conteúdo de funções.

Andrini & Vasconcelos fazem ainda uma analogia com o conceito de função dando a ideia de uma máquina. Dante, com menor ênfase, aborda a ideia na forma de exercícios.

Figura 42 – Relacionar a ideia da máquina com função


A ideia da máquina

Forme dupla com um colega para conhecer a brincadeira que Carla criou!

O professor propôs uma atividade em que ele dizia um número e colocava as orientações na lousa; os alunos faziam as operações pedidas e davam o resultado. A partir disso, Carla pensou numa nova brincadeira:

Observem o desenho e usem o cálculo mental para responder oralmente qual o valor das bolinhas coloridas que sairão da máquina.

Fonte: Livro didático Praticando Matemática 9º ano, 2015, p.99

Atrelar o conceito de função a ideia de uma máquina, em um primeiro momento parece até interessante para facilitar a compreensão do aluno. Porém, novamente a longo prazo, pode gerar uma distorção na generalização do conceito de função. No ponto de vista matemático, a ideia da máquina está associada a um algoritmo, ou seja, pode ser apenas um passo a passo para executar uma tarefa ou resolver um problema, através de instruções ou comandos realizados de maneira sistemática, enquanto função trata-se de procedimentos que, necessariamente, geram um resultado concreto.

Outro ponto que precisa ser observado é o contexto que os autores apresentam a representação gráfica. Andrini & Vasconcelos até iniciam fazendo uma leitura de gráficos já construídos, relacionando-os com problemas lúdicos. Mas, assim como os demais autores, a representação gráfica de uma função é introduzida pelo passo a passo da construção de gráficos, partindo da lei de formação. Só após os estudos de todos os procedimentos e métodos necessários para a construção de um gráfico que eles iniciam a análise dos pontos importantes do gráfico de uma função. Os zeros das funções, os termos independentes, ou seja, os pontos em que os gráficos interceptam os eixos no plano cartesiano e o vértice de uma parábola, só são analisados após o domínio dos procedimentos para a construção dos mesmos pela maioria dos alunos. Relacionar a representação gráfica de uma função com o seu conceito, reconhecer quando se trata do gráfico de uma função ou não, só é apresentado para o aluno no final da abordagem do tema, e apenas por Dante e Bianchini.

Novamente, a representação gráfica de uma função é apresentada ao aluno como uma "*nova matéria*", com procedimentos e cálculos algébricos que, na maioria das vezes, os alunos não conseguem compreender. Ao final de todo este "*desgaste*", por vezes até emocional, tentar relacioná-los ao conteúdo de função, já não faz mais o menor sentido para o público-alvo em questão.

Levar um aluno a realizar inúmeros cálculos algébricos sem uma compreensão real do objetivo dos mesmos, construindo tabelas e utilizando fórmulas e procedimentos que não fazem o menor sentindo num primeiro momento, não só é cansativo como traz muita desmotivação para o processo ensino/aprendizagem. Quando, de fato, precisar marcar os pontos no plano cartesiano e traçar os gráficos, na maioria das vezes, os alunos custam a relacioná-los com os procedimentos iniciais. A grande maioria entende que estão iniciando um novo exercício, principalmente se a questão se tratar da construção de um gráfico de uma função polinomial do 2º grau.

Vale lembrar que estes discentes estão tendo contato com uma formalização matemática e abstrações que requerem um maior rigor matemático pela primeira vez. Isso pode ser constatado, facilmente, observando a composição curricular do Ensino Fundamental. Na grande maioria das orientações curriculares, este conteúdo é recomendado para o segundo semestre do ano letivo, como uma espécie de introdução a matemática propriamente dita e preparando o aluno para iniciar o Ensino Médio.

Na verdade, independentemente da abordagem escolhida por cada autor, num modo geral, eles não se atêm a fundamentar o conceito de função propriamente dito e optam por aprofundarem os procedimentos algébricos e aplicações dos conceitos de forma isolada, primeiro explorando a função polinomial do 1º grau e em seguida a do 2º grau. Cabe ainda ressaltar que na coleção Teláris o estudo sobre função polinomial do 1º grau é mais aprofundado, porém o autor não faz qualquer menção às funções polinomiais do 2º grau na sua obra.

Reduzir os estudos sobre funções, as suas aplicações em funções polinomiais do 1º e 2º grau, para um aluno que está sendo exposto a este conteúdo pela primeira vez, pode levá-lo a um entendimento distorcido do que seja de fato uma função. Na maioria das vezes, eles acabam construindo um conceito errado de que função se reduz a uma parábola, sendo muito otimista, a uma parábola ou reta, ignorando assim a sua generalização.

No estudo da função polinomial do 1º grau, Andrini & Vasconcelos e Dante apresentam as funções lineares, constante, até desdobrarem o conceito na ideia de proporcionalidade contida nas funções. Já Bianchini concentra os estudos na construção dos gráficos referentes a estas funções. Os autores exploram ainda, o estudo de sinais e classificam as funções em crescente e decrescente.

Em ambos os casos, funções polinomiais do 1º e 2º grau, os autores exploram de maneira satisfatória as modelagens com funções. Problemas claros e do cotidiano levam os alunos a entenderem a importância do conceito no contexto da matemática e suas possíveis aplicações no dia a dia.

É preciso ressaltar ainda que como foi observado no capítulo anterior, cada autor apresenta partes da representação de uma função. Nenhum dos autores analisados sentiu a necessidade de definir formalmente função, nem mesmo apresentar todo o conceito na íntegra. Andrini & Vasconcelos e Dante abordam o conceito partindo das suas representações por conjuntos, Bianchini apenas utiliza a parte lúdica, apresentando a sua construção de gráficos, chegando aos zeros das funções. Tais características são apresentadas já na exploração das funções polinomiais do 1º grau e/ou do 2º grau, como se tal propriedade só fizesse parte de determinado gráfico e não como uma generalização.

Apresentar o conceito de função com toda a sua amplitude, generalizações e ir construindo as etapas conforme a necessidade observada para obter aquele resultado, juntamente com os alunos, auxiliaria na compreensão da abstração. Tal procedimento levaria o aluno a entender que os procedimentos e cálculos algébricos funcionam como "*ferramentas*" para a obtenção dos resultados, objetivos estes que precisam ser visualizados no início do desenvolvimento do exercício proposto. Fixar procedimentos de cálculos, após o entendimento de sua necessidade, faz mais sentido e facilita a apreendizagem pelo celebro. Pois, como MOREIRA (2010, p.2) afirma,

> É importante reiterar que a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre conhecimentos prévios e conhecimentos novos, e que essa interação é não literal e não arbitrária. Nesse processo, os novos conhecimentos adquirem significado para o sujeito e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva. (MOREIRA, 2010, p. 2)

6. PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

As metodologias utilizadas no processo ensino/aprendizagem nos dias atuais, apesar dos inúmeros incentivos para atualizações e uso de recursos tecnológicos, encontram-se a cada dia mais distante e menos motivadora para os alunos.

Mesmo iniciando o estudo de funções através de modelagens, da forma que é apresentada pelos livros didáticos analisados, eles ainda trazem uma abordagem baseada em procedimentos e métodos de resoluções particionados. Esperando-se então, que ao final da abordagem do conteúdo, o aluno tenha a compreensão de tudo o que foi estudado sobre o assunto e o entenda como um todo, ou seja, função.

Como já citado anteriormente, é no 9º ano do Ensino Fundamental que este aluno é apresentado ao conceito de função. Conforme orientações curriculares, ele traz dos anos anteriores o conhecimento prévio sobre operações básicas com polinômios, expressões e equações algébricas, além de resolução de sistemas com duas equações do 1º grau, incluindo a sua representação gráfica. Este último, na maioria das vezes, é o conteúdo escolhido pelo professor para ser suprimido do processo ensino/aprendizagem em detrimento aos demais, quando o mesmo não possui tempo hábil para a conclusão do currículo.

A geração atual, devido ao grande avanço tecnológico ocorrido nas últimas décadas, possui acesso, por muitas vezes em tempo real, a um volume considerado de informações/conhecimentos. Tal circunstância nos apresenta um público altamente crítico e imediatista. Mostrar a este alunado cálculos totalmente abstratos, por um longo período, sem apresentar um objetivo a ser alcançado que justifique a sua necessidade, não só traz uma desmotivação geral para a classe, como dificilmente os alunos farão alguma conexão entre estes cálculos ao final do trabalho com o conteúdo.

> Neste contexto, o termo alpha foi uma denominação do sociólogo australiano Mark McCrindle para caracterizar as crianças que nasceram a partir do ano de 2010. São humanos com uma capacidade incrível de resolver problemas (normalmente com uso de tecnologia), quando comparados às gerações anteriores.[...] Personagem importante dentro das salas de aula, o professor da Era Digital deve ser um mediador do conhecimento e não apenas transmissor de conteúdo, logo, a dinâmica da aula também deve mudar. (BLOG EDUCACIONAL, 2021)

O conceito de função precisa ser introduzido no início da sua abordagem. É necessário, no primeiro contato do aluno com o tema, formalizar o que é uma relação binária e deixar claro que função é um caso particular de relação, definindo-a conforme o capítulo 1 deste, *"uma relação em que CADA elemento do conjunto domínio se relacionar com um ÚNICO elemento do conjunto imagem denomina-se FUNÇÃO."*

Ainda é preciso levar o aluno a compreender a diferença entre incógnita e variável, apresentando exemplos lúdicos sobre as mesmas, conforme produto educacional em anexo.

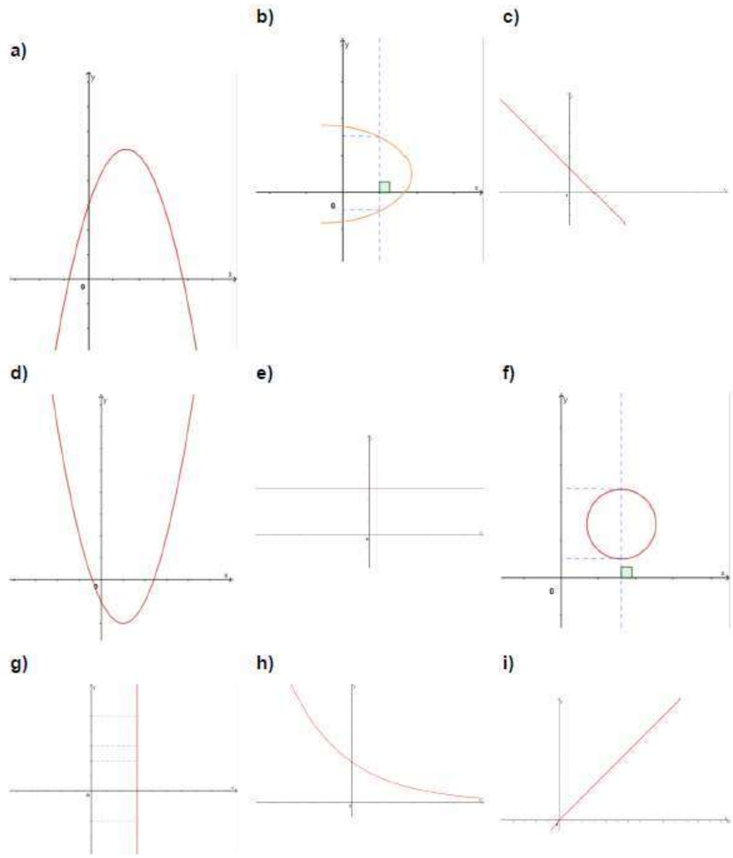
Neste primeiro momento se faz necessário que o aluno entenda o conceito de função através de todas as suas possíveis representações para o ano de escolaridade em questão (diagramas e gráficos), ensinando-o como diferenciar uma função de uma relação simples. Isso deve ser feito de forma simples, sempre ressaltando a relação unívoca e a necessidade de que todos os elementos do conjunto domínio sejam utilizados. As metodologias sugeridas pelos autores analisados atendem perfeitamente a esta necessidade, usando retas verticais para analisar a função graficamente no plano cartesiano e observando o conjunto domínio na relação apresentada entre diagramas (setas e elementos).

Uma analogia muito próxima da linguagem utilizada por este público-alvo na idade regular é comparar a função a um relacionamento. Quando o "*x*" é correto e fiel, ele se relaciona com apenas um "*y"* e não sobra ninguém "*solto na pista"* para bagunçar os relacionamentos. Já a relação simples é "*bagunça"* e pode tudo. Ou seja, "*x*" se relaciona com quantos "*y"* ele desejar e ainda pode ter "*x"* "*livre"* para "*bagunçar".* É preciso praticar um pouco para consolidar tal entendimento, antes de avançar com o conteúdo. O produto educacional em anexo sugere os exercícios de 01 a 07, capítulo 1.1.

Figura 43 – Atividade 04 do Produto Educacional

Atividade 4: (Teláris – p.130, nº 35) Para *x* e *y* números reais, identifique se o gráfico é de uma função ou de uma relação. Justifique sua resposta nos casos em que não for função.

Figura 5 – Representações gráficas de função e relação - Atividade



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Fonte: Exercício produzido pelo autor, p. 10 - Produto Educacional

Em seguida, é necessário ir fornecendo *"ferramentas"* para que o aluno tenha condições de concluir um exercício sobre o tema na íntegra. Ressaltam-se os pares ordenados presentes nos diagramas ou mesmo em suas representações gráficas. Então, conceitua-se lei de formação, mostrando que cada função possui uma espécie de *"identidade"* única e que é através dela que obtemos um gráfico único da mesma. É preciso levar o aluno a compreensão que sabendo o valor de uma das variáveis presentes na lei de formação, ele consegue definir a outra, com alguns procedimentos algébricos, determinando assim os pares ordenados da função em questão. Neste momento, é recomendável exercitar esses procedimentos com funções polinomiais do 1º e 2º grau, conforme o produto educacional na figura 44, criando assim uma familiaridade com as funções que serão aprofundadas posteriormente.

Figura 44 – Atividades 01 e 02 do Produto Educacional

Atividade 1: Conforme a lei de formação das funções abaixo, determine o conjunto relação, de acordo com $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) $y = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

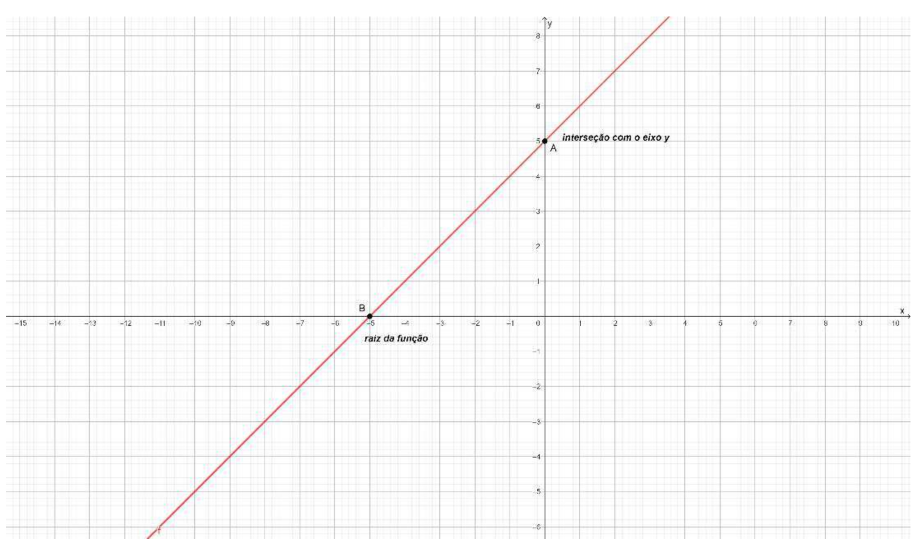
Atividade 2: Dada a função ***f(x)* = 2*x* − 3**, o domínio {2, 3, 4} e o contradomínio composto pelos naturais entre 1 e 10, qual das opções abaixo representa o conjunto imagem dessa função?

a) {1, 3, 5}
b) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
c) {4, 6, 8}
d) {1, 2, 3, 4, 5}
e) {1, 3, 8}

Fonte: Exercício produzido pelo autor, p. 14 - Produto Educacional

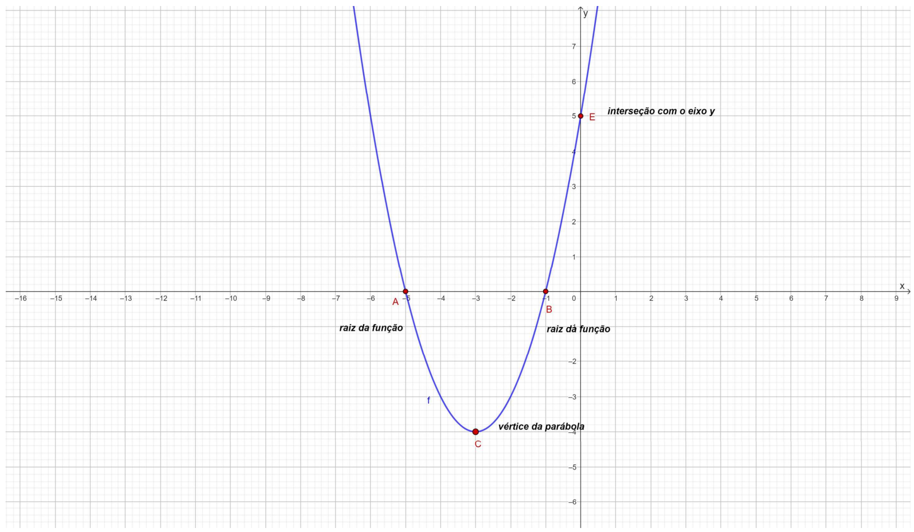
Para iniciar a construção de gráficos e tabelas, aprofunda-se o conceito de função polinomial do 1º e 2º grau, relacionando-os com os seus respectivos gráficos (reta e parábola). Caso seja possível, é interessante a utilização do aplicativo *GeoGebra* (no celular ou computador), para que o aluno tenha a possibilidade de visualizar os pontos notáveis das funções e ir percebendo, de forma intuitiva, as variações geradas de acordo com a lei de formação inserida no aplicativo.

Figura 45 – Gráfico de uma função polinomial do 1º grau, *f(x)= ax+b*



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Figura 46 – Gráfico de uma função polinomial do 2º grau, y= $ax^2 + bx + c$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Cada função citada no parágrafo anterior possui características próprias que vão desde a sua representação gráfica até a quantidade de raízes que cada uma possui. Logo, o professor deve aprofundar estas características e suas respectivas propriedades separadamente. Porém, sempre que possível, deve-se relacionar tais informações com os conceitos estudados anteriormente.

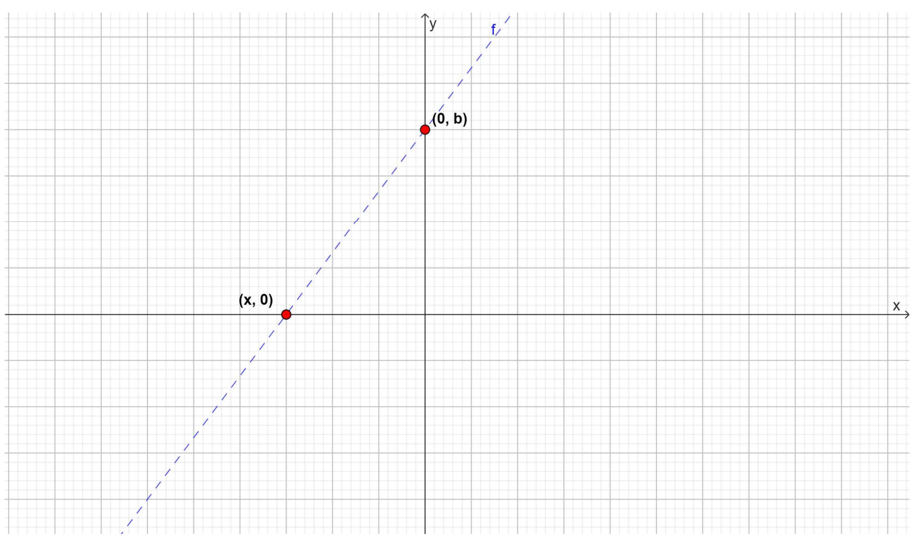
Em relação à função polinomial do 1º grau, o aluno costuma apresentar alguma familiarização, pelo fato de já ter estudado em anos anteriores equações do 1º grau e em alguns casos, sistemas de equações. O fato do gráfico gerado pela lei de formação ser uma reta, também facilita a compreensão da mesma num modo geral. É preciso destacar para o aluno como identificar, graficamente, a raiz da função, seja com o auxílio de um aplicativo, malhas ou mesmo desenhos a mão livre de alguns gráficos com as suas respectivas leis de formação. Após levar o aluno a compreensão com clareza do zero de uma função, define-se formalmente o conceito e apresentam-se os procedimentos algébricos necessários para obtê-lo.

Vale ressaltar ainda que a função em questão possui apenas uma raiz por se tratar de um polinômio do 1º grau, deixando claro que o grau do polinômio determina a quantidade de raízes das funções polinomiais (reais ou não).

Recordando a propriedade geométrica de reta, também estudada em anos anteriores, onde por dois pontos passa uma única reta, justifica-se que bastam dois pares ordenados para traçar o gráfico de uma função polinomial do 1º grau. Após alguns exemplos praticando a teoria, o conceito pode ser construído gradativamente com o auxílio de malhas ou papéis quadriculados, fazendo com que o aluno perceba que se optar pelos pares ordenados formado pelos pontos que interceptam os eixos no plano cartesiano, o processo fica muito mais simples.

Para obter os pares ordenados sugeridos basta utilizar a raiz da função gerando o par $(x, 0)$ e o ponto que intercepta o eixo das ordenadas (*y*), obtendo assim o par ordenado $(0, y)$. Novamente, utilizando-se da análise gráfica, o professor deve levar o aluno a perceber que a curva (reta) intercepta o eixo *y* no valor do termo independente da lei de formação ($f(x) = ax + b$), ou seja, o "b" $(y = b)$. Através destes dois pontos marcados no plano cartesiano, o aluno traçará uma reta tranquilamente.

Figura 47 – Pontos notáveis para traçar gráfico de uma função polinomial do 1º grau



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Não se pode deixar de destacar ainda que o sinal do coeficiente *"a"* (coeficiente angular) determina o direcionamento da reta. Se *"a"* for positivo,

$a > 0$, a reta tende para a direita e é crescente. Já se o coeficiente *"a"* for negativo, $a < 0$, a reta tende para a esquerda e é decrescente.

Observe o exemplo da figura 48, do gráfico da função do 1º grau $f(x) = x + 5$. O termo independente da lei de formação em questão é 5. Logo, pode-se definir um par ordenado $(0, 5)$. Já para definir a raiz (ou zero) da função, basta substituir o *f(x)* por zero e realizar os procedimentos algébricos,

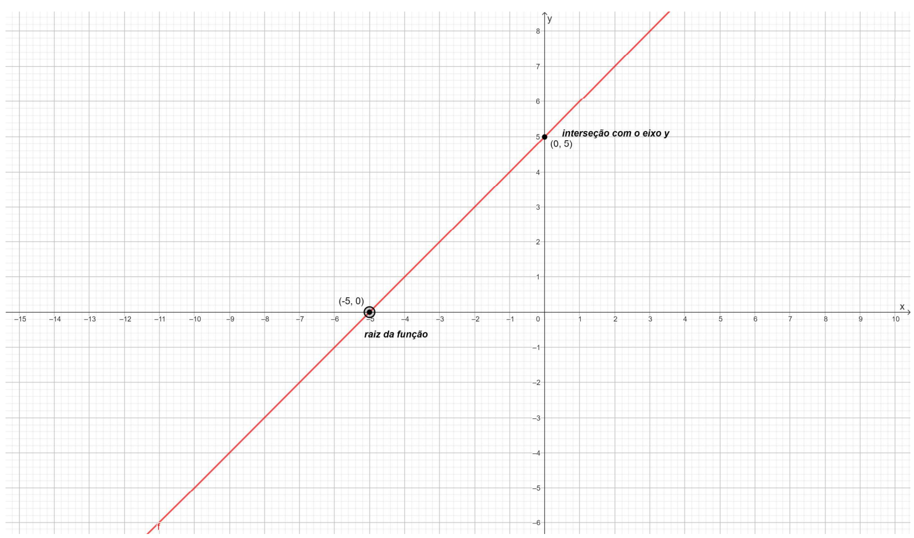
$$f(x) = x + 5$$

$$0 = x + 5$$

$$x = -5$$

Daí, o segundo par ordenado gerado é $(-5, 0)$. Como o coeficiente $a = 1$, logo positivo, a reta tende para o lado direito e é crescente.

Figura 48 – Gráfico de uma função polinomial do 1º grau *f(x)= x +5*



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Após exercitar tais conceitos e procedimentos, conforme o produto educacional em anexo, é importante também nesta etapa utilizar o conceito de função polinomial do 1º grau em algumas aplicações de questões práticas familiares aos alunos. Nesta etapa de ensino, eles precisam conseguir fazer a conexão do conteúdo matemático apreendido em sala de aula com suas práticas diárias. Dar significado sempre que possível, de alguma forma, a toda abstração trabalhada na disciplina, agrega familiaridade ao aluno, auxiliando assim no processo ensino/aprendizagem.

> O estudo das Funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. (BRASIL, 2002, p. 121).

Já a função polinomial do 2º grau é um pouco mais complexa, pois o aluno aprende a resolver equações do 2º grau também no 9º ano. Geralmente, antes de se iniciar o conteúdo de funções, é trabalhada a resolução deste tipo de equações pelo método da fórmula resolutiva de Bhaskara, pelo método de Girard ou completando quadrados, em alguns casos. Vale observar que os alunos costumam apresentar bastante dificuldade neste tipo de resolução. Logo, o ideal é iniciar este conteúdo com os conceitos de análises gráficas, já estudados nas funções polinomiais do 1º grau. Com o auxílio do *GeoGebra* ou mesmo de gráficos de função polinomial do 2º grau em malhas, etc. em um primeiro momento, deve-se levar o aluno a observar as raízes das mesmas. É importante destacar que por se tratar de um polinômio do 2º grau, a função possui duas raízes reais quando o gráfico intercepta o eixo das abscissas (x) em dois pontos. Porém, o mesmo pode possuir apenas uma raiz real ou até nenhuma raiz real. Estas também podem ser facilmente definidas, algebricamente, conforme o discriminante delta:

$\Delta > 0$ (possui duas raízes reais).

$\Delta = 0$ (possui uma raiz real).

$\Delta < 0$ (não possui raízes reais).

Tais propriedades precisam ser consolidadas através de exercícios sobre as mesmas, conforme pode ser observado na figura 49 que faz menção ao produto educacional no apêndice.

Figura 49 – Atividade 01 do Produto Educacional

Atividade 1: O vértice da parábola que representa a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ será um ponto do eixo das abscissas se:

a) $\Delta = 0$.

b) $\Delta < 0.$

c) $\Delta \geq 0.$

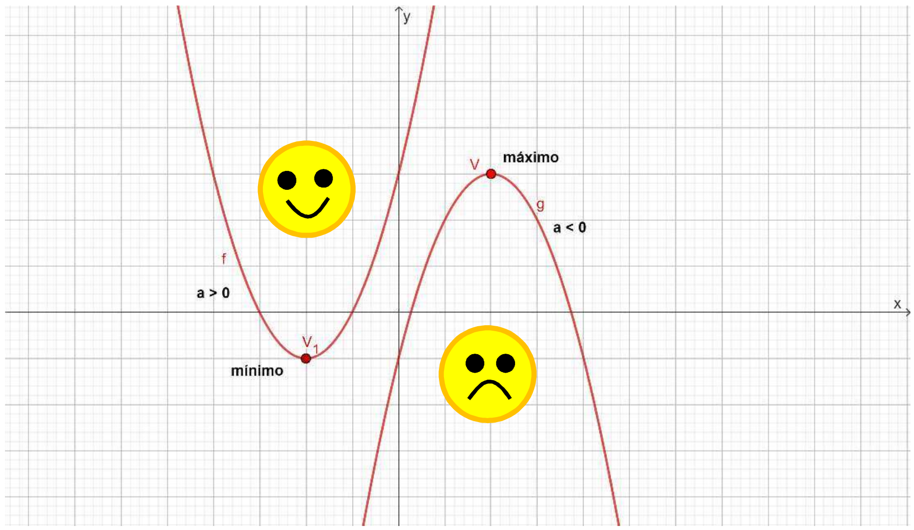
d) $\Delta > 0.$

Fonte: Exercício produzido pelo autor, p. 32 - Produto Educacional

Vale ressaltar ainda que o ponto em que ele intercepta o eixo das ordenadas (y) é o termo independente da função polinomial. Como a função polinomial do 2º grau é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, o termo independente é o "*c*". É preciso levar o aluno a observar que o termo "*c*" é equivalente ao termo "*b*" na função polinomial do 1º grau ($f(x) = ax + b$). Ou seja, quando o *"x"* na função for zero, o *"y"* terá exatamente este valor, gerando o par ordenado $(0, c)$.

Por último, analisa-se os vértices das parábolas, o ponto responsável pelo valor máximo (ou mínimo) assumido por este tipo específico de função. Destaca-se ainda que o sinal do coeficiente *"a"* determina a concavidade da parábola. Se *"a"* for positivo, $a > 0$, a parábola terá a concavidade voltada para cima, logo ponto mínimo. Costuma-se fazer uma analogia aos "*emojis",* comumente utilizados pelos alunos, e dizer que a parábola está feliz. Já se o coeficiente *"a"* for negativo, $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo e a função possui ponto máximo. Aplicando a mesma analogia dos "*emojis",* pode se dizer que a parábola está triste. Tais analogias ajudam ao aluno a fixar determinadas propriedades.

Figura 50 – Mínimo e máximo de uma parábola (emojis)



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Após a análise gráfica, é preciso formalizar tais observações e apresentar os procedimentos algébricos necessários para se obter estes pontos específicos. Lembrar que para determinar os pares ordenados $(x',0)$ e $(x'',0)$, os zeros ou raízes da função, basta substituir o "*y*" por zero e resolver uma equação do 2º grau, pelo método que for mais conveniente ao aluno. Já para determinar as coordenadas do vértice, é só aplicar as fórmulas específicas $x = -\frac{b}{2a}$ e $y = -\frac{\Delta}{4a}$, determinando assim (x_v, y_v). Com estes 3 pontos (duas raízes e vértice) já se torna possível traçar o gráfico de uma parábola, como pode ser observado na figura 52, no exemplo da função $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

Obtendo as raízes,

$$f(x) = x^2 + 6x + 5$$

$$0 = x^2 + 6x + 5, \text{ onde } a = 1,\ b = 6\ e\ c = 5.$$

Utilizando o método de Girard, temos

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{1}$$

e

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{1},$$

daí

$$x' = -1 \; e \; x'' = -5.$$

Logo, podemos definir dois pares ordenados $(-5, 0)$ e $(-1, 0)$.

Aplicando as fórmulas específicas para localizar o par ordenado do vértice da parábola, gera-se o terceiro par ordenado, $(-3, -4)$.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$$

e

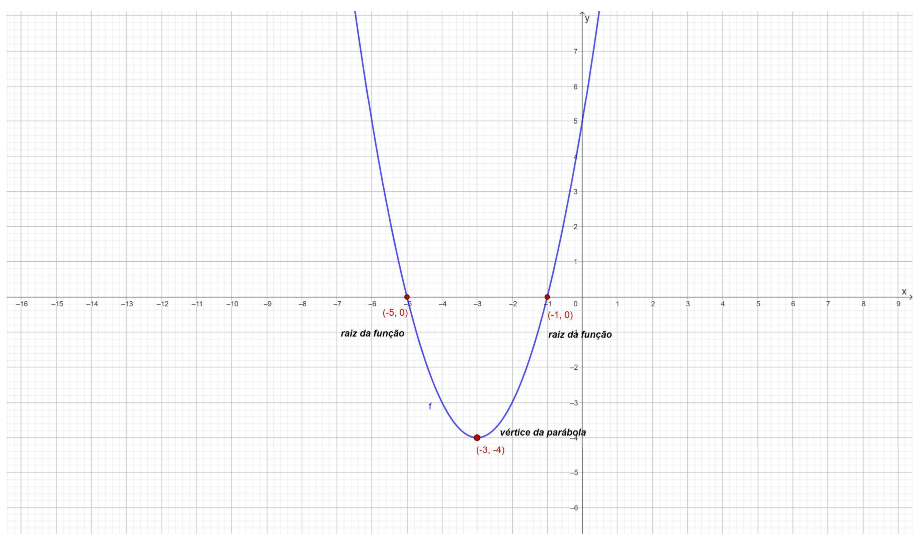
$$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4,$$

com

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4(1)(5) = 16$$

Figura 51 – Gráfico de uma função polinomial do 2º grau, conhecido raízes e vértice



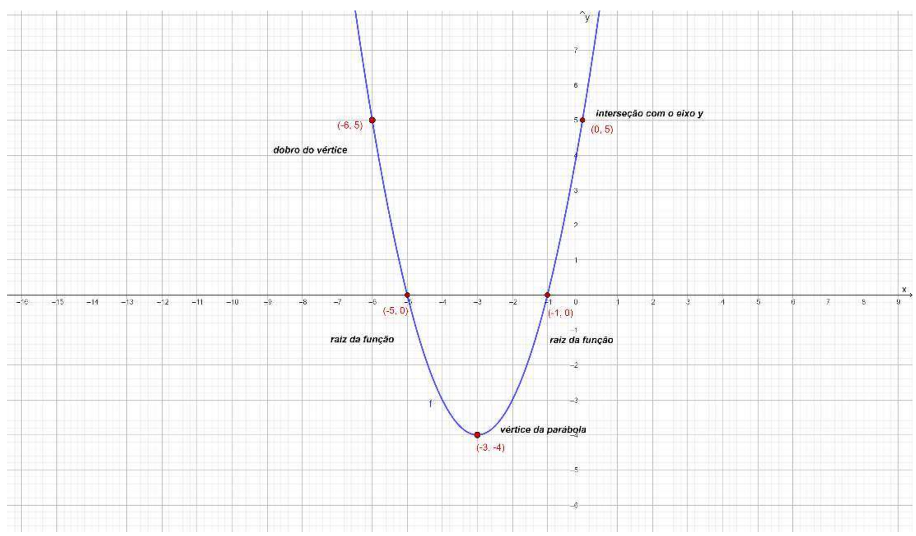
Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Observe ainda que como neste caso em questão o coeficiente $a = 1$, logo positivo, $a > 0$, a parábola possui a concavidade voltada para cima.

Porém, para se obter um gráfico um pouco mais preciso, o ideal é que se obtenha 5 pontos. O ponto de interseção com o eixo *"y"*, $(0, c)$ é uma boa sugestão como um dos pontos. Já o quinto, se calcular a distância (*d*) do x_v ao zero no eixo das abscissas ($d = |x_v - 0|$), o *x* do outro ponto pode ter abscissa igual ao dobro desta distância partindo do zero, com o sinal idêntico ao sinal do x_v $(2x_v, c)$, obtendo-se assim a forma quadrática da parábola. Mas, nada impede que este ponto seja um valor aleatório para *"x"*. Sendo assim, basta substituí-lo na lei de formação da função em questão, para gerar o quinto ponto de forma aleatória, (x, y).

Sendo assim, em $f(x) = x^2 + 6x + 5$, temos o termo independente $c = 5$ e $2x_v = 2(-3) = -6$, gerando mais dois pares, $(0, 5)$ e $(-6, 5)$. Observe, conforme a figura 52, que o gráfico da parábola fica melhor definido com os cinco pontos escolhidos.

Figura 52 – Gráfico da função polinomial do 2º grau $f(x) = x^2 + 6x + 5$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Por último, tais conceitos devem ser consolidados com a prática de exercícios, conforme produto educacional no apêndice e trabalhados ludicamente com problematizações que façam referências a realidade dos alunos. Isso pode ser observado no exemplo da figura 53 do produto educacional em anexo sobre o tema.

Figura 53 – Exercício 12 do Produto Educacional

Atividade 12: (Andrini & Vasconcelos – p. 107) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 7,00 e cada quilômetro rodado custa R$ 1,20, responda:

a) Qual o valor ***v*** a pagar numa corrida de ***n*** quilômetros?

b) Quanto vai custar uma corrida de 11 quilômetros?

c) Quanto vai custar uma corrida de 5 quilômetros e 800 metros?

Fonte: Exercício produzido pelo autor, p. 26 - Produto Educacional

7. CONCLUSÃO

Após análise detalhada da forma que o conceito de função é introduzido na educação básica, especificamente no 9º ano do Ensino Fundamental II, é possível perceber as lacunas significativas entre o que é apresentado ao aluno e a definição de função. Até as formas que são representadas a definição, que vão desde a sua representação em forma de diagrama, lei de formação e representação gráfica, depende, exclusivamente, do autor do livro didático adotado a ser trabalhado ao longo do ano letivo. Observa-se uma necessidade entre os autores analisados, e por que não afirmar de um modo geral, de demonstrar aplicações práticas do conteúdo, especialmente relacionadas as funções polinomiais do 1º e 2º grau, em detrimento a formalização abstrata da definição de função e sua generalização.

Outro ponto relevante observado após a realização da pesquisa é a dificuldade apresentada pelos alunos em conectar os procedimentos e cálculos algébricos totalmente abstratos com a definição de função, ao final do processo ensino/aprendizagem, independentemente da rede (municípios de Itaboraí ou Tanguá). Tais procedimentos, como puderam ser constatados, são apresentados de forma particionada aos alunos, por sugestão dos autores.

Analisando a realidade atual do público-alvo em questão, cujo acesso as informações de várias naturezas e fontes ocorre em volume e velocidade expressivos, é necessário deixar claro desde o início para os alunos os objetivos almejados. Os discentes de hoje possuem uma linguagem muito imediatista e se o que for apresentado a eles não fizer algum sentido ou não tiver um objetivo claro a ser alcançado, eles logo perdem o interesse pelo assunto, por maior que seja a motivação inicial.

As adaptações realizadas nas definições de conceitos básicos sobre o conteúdo também é um alerta que precisa ser observado no Ensino Fundamental, já que se trata de uma prática comum e não de uma questão isolada neste conteúdo. Como já relatado ao longo da pesquisa, tal prática pode comprometer todo um desenvolvimento dentro da vida acadêmica de um discente. Neste caso, com o conteúdo de funções, a preocupação é ainda mais alarmante, devido a ser um conteúdo que abrange tantas áreas afins, além do universo da matemática pura em si.

Conforme proposto durante a investigação, a definição do conteúdo de função deve ser feita de forma concisa, relacionando-a com todas as suas formas de representação. Explorar a representação gráfica da definição, utilizando-se de aplicativos como o *GeoGebra* por exemplo (linguagem familiar aos adolescentes), auxilia no entendimento do conteúdo e na generalização do mesmo, traçando assim objetivos claros a serem alcançados.

Apresentar os procedimentos e cálculos algébricos como ”ferramentas*”* necessárias para que o aluno alcance os objetivos traçados, não só faz mais sentido, como auxilia na compreensão das definições e propriedades relacionadas a este conteúdo, neste caso em particular, função. Vale lembrar que para isso é necessário que se relacione tais procedimentos as suas representações ao longo de todo o processo ensino/aprendizagem.

Ir construindo todo o conceito, conforme for surgindo a necessidade ao longo do processo, é fundamental para a consolidação do mesmo. De acordo com o produto educacional em anexo, a interpretação gráfica para uma visualização geral de um todo, no que diz respeito a definição e propriedades atribuídas a função, com o auxílio de aplicativos (linguagem familiar a chamada “*geração alpha*”), não só aguça a curiosidade e a compreensão por parte dos alunos sobre o conteúdo trabalhado, mas também auxilia no entendimento da importância dos procedimentos algébricos. Estes são fundamentais para a construção de uma aprendizagem sólida e significativa dentro da área.

A modelagem matemática e as contextualizações com o dia a dia, ainda continuam sendo bons “*artifícios*” para se utilizar no processo ensino/aprendizagem no que diz respeito ao ensino da matemática na educação básica. Porém, criar *“falsas ilusões”* ou até mesmo distorcer conceitos e definições de forma “*isolada*”, para satisfazer necessidades momentâneas e que, certamente, causarão prejuízos futuros enumeráveis, não é a forma mais recomendada para facilitar o processo ensino/aprendizagem.

A abstração matemática é a base para o ensino e a compreensão da matemática em si. Esta precisa de mais atenção no que tange a educação básica. Este é um dos grandes fatores responsáveis por cada vez mais alunos criarem verdadeira aversão à disciplina devido as constantes construções, desconstruções e reconstruções de conceitos básicos que deveriam ser apreendidos desde o primeiro contato com os mesmos.

É comum professores ouvirem em desabafos de alunos que eles não gostam da matemática porque quando começam a entender a matéria, muda todo novamente.

Lógico que é preciso levar em consideração a maturidade do público-alvo e o nível de compreensão dos mesmos, para definir qual o grau de abstração necessário no momento do processo ensino/aprendizagem. Porém, desconectar a matemática da sua "*essência*" com a desculpa de que é um agente facilitador para o processo ensino/aprendizagem, não só estão gerando perdas irreparáveis por gerações, como também tem sido um dos principais motivos para o desinteresse e descontentamento dos alunos em relação a disciplina.

Sugestões de Estudo

As conclusões descritas acima são as primeiras evidências do início de uma investigação sobre o tema proposto que ainda tem muito para ser explorado.

Considero de extrema relevância para um melhor entendimento do mesmo, a investigação de algumas suposições encontradas no decorrer deste trabalho e que seguem listadas abaixo como sugestão de estudos futuros.

1) Definição e conceitos básicos de função necessários ao longo da vida acadêmica do aluno.

2) Ausências de generalizações na educação básica, possíveis consequências ao longo da vida acadêmica do discente.

3) Conceitos e definições adaptadas para educação básica, facilitador ou erros estruturais no processo ensino/aprendizagem?

8. REFERÊNCIAS

- ANDRINI, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática 9º ano.** 4. ed. São Paulo: Ed. do Brasil, 2015.

- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini 9º ano**. 9. ed. São Paulo: Ed. Moderna, 2018.

- BRANDÃO, L. de O. **Introdução a funções.** São Paulo, 17 mai. 2021. Disponível em:<https://www.ime.usp.br/~leo/mac2166/2017-1/introducao_funcoes.html> Acessado em: 02 jun. 2023.

- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnologia. PCN+ Ensino Médio: **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática. Brasília.** MEC/SEMTEC, 2002.

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática 9º ano.** 3. ed. São Paulo: Ed. Ática, 2018.

- FREIRE, F. M. P.; PRADO, M. E. B. **O computador em sala de aula: articulando saberes.** Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 2000.

- GERAÇÃO ALPHA: o que vem mudando em casa e nas salas de aula? **EDUCACIONAL: Ecossistema de Tecnologia e Inovação,** 2021 Disponível em: <https://site.educacional.com.br/artigos/geracao-alpha-o-que-vem-mudando-em-casa-e-nas-salas-de-aula> Acessado em: 12 jun. 2023.

- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo, vol.1.** 5. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2013.

- IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática 1 Elementar – Conjuntos e Funções.** 7. ed. São Paulo: Ed. Átual, 2013.

- LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1 – Funções de Uma Variável.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

- LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais – Coleção PROFMAT.** 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

- MPPEB – CPII. Mestrado Profissional em Práticas de Educação Básica. **Colégio Pedro II**. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em <http://www.cp2.g12.br/blog/mpcp2/produtos-educacionais>. Acessado em: 1[illegible] jan. 2023.

- NORMAS ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **Normas abnt org**, 2022. Disponível em: https://www.normasabnt.org/normas-abnt-2022/. Acessado em: 10 jan. 2023.

- PONTE, J. P. **Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem.** Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática (ISSN: 1815-0640), 21, 13-30. Universidade de Lisboa – U Lisboa, 2010.

- RÊGO, R. G. **Um estudo sobre a construção do conceito de função.** Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte -UFRN, 2000.

9. Apêndice

Produto Educacional

Produto Educacional

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES E FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAU EM TURMAS DE 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II

LUISA MARA SILVA DE OLIVEIRA

NITERÓI
JULHO/2023

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a),

Apresentamos a você, este caderno de atividades, parte integrante da dissertação de mestrado intitulada "*ESTRATÉGIAS PARA CONSOLIDAR O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAU EM TURMAS DE 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL II*", resultado da pesquisa vinculada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ligado ao Instituto de Matemática e Estatística, da UFF (Universidade Federal Fluminense).

Este tem como objetivo complementar e apoiar as orientações metodológicas sugeridas no último capítulo da pesquisa citada acima. Está dividido em quatro sequências compostas por parte teórica, seguidas de sugestões de exercícios que buscam consolidar a aprendizagem do conteúdo estudado.

São elas:

1. Relação x Função.
2. Lei de Formação.
3. Função Polinomial do 1º Grau.
4. Função Polinomial do 2º Grau.

1. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta, assume-se que o público-alvo possua conhecimentos prévios sobre:

- Teoria de conjuntos.
- Par ordenado.
- Plano cartesiano.
- Equações do 1º e 2º grau.

Caso não seja esta a realidade encontrada, se faz necessário que se introduza tais conceitos e definições antes de iniciar esta sequência didática. Para isso, sugerimos que utilize como apoio o capítulo 1, itens 1.1 e 1.2 (1.2.1. e 1.2.2.), da dissertação para desenvolvimento dos mesmos.

1.1. RELAÇÃO X FUNÇÃO

Objetivo:

- Compreender os conceitos e definições de relação (ou relação binária) e função.
- Levar o aluno a diferenciar relação (ou relação binária) de função.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, videoaulas de sua preferência sobre o tema.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Neste primeiro momento se faz necessário uma aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos. Porém, se tiver a possibilidade de reproduzir uma mídia digital, sugere-se que utilize videoaulas de sua preferência sobre o assunto.

Registros para serem realizados na lousa:

1.1.1. Introdução ao Estudo de Funções

Toda letra em uma equação pode assumir o papel de:

Dicas → Deve-se exemplificar oralmente com exemplos lúdicos que façam parte do cotidiano dos alunos, para melhor compreensão.

Tipo:

- **Quanto pagarei pela passagem do ônibus variando o número de pessoas?**
- **Fiz uma compra e gastei um determinado valor, sabendo que um produto custa tanto, quanto custa o outro?**

- Incógnita → são os valores desconhecidos de uma sentença matemática a serem determinados em um problema.

Exemplo:

$$x + 3 = 4$$
$$x = 1$$

- Variável → são as letras de uma expressão algébrica que podem assumir diferentes valores conforme a situação.

$p/x = 2$ $\qquad$ $p/x = -1$

$x + 3 = 5$ $\qquad$ $x + 3 = 2$

1.1.2. Relação

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **relação** de A em B todo subconjunto R de *A x B* ou, mais simplesmente, uma relação binária de A em B.

$$\boldsymbol{R \text{ é } relação\ binária\ de\ A\ em\ B \Leftrightarrow R \subset A \times B.}$$

O conjunto R está contido em *A x B* e é formado por pares *(x, y),* em que o elemento *x de A* é *"associado"* ao elemento *y de B* mediante um certo critério de *"relacionamento" ou "correspondência".*

Exemplo:

Dica ⟶ Utilize cores distintas para a representação dos elementos referentes aos conjuntos A e B.

Sejam os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. O produto cartesiano de A por B é

A x B= $\{(0,1), (0,3), (0,5), (2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}$.

Observe que como o conjunto A possui 3 elementos e o conjunto B também, assim temos $3 \cdot 3 = 9$. Daí, o conjunto A x B é composto por 9 elementos.

Considere o conjunto de pares ordenados (x, y) ∈ A x B, tais que $x < y$ (lê-se: *x* menor que *y*),

R = $\{(0,1), (0,3), (0,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$, este é chamado de **relação** entre os elementos de A e B.

1.1.3. Função

Uma relação em que **CADA** elemento do conjunto domínio (x) se relacionar com um **ÚNICO** elemento do conjunto imagem (y) denomina-se **FUNÇÃO**. Ou seja, **função é um caso particular de relação.**

Esta pode ser representada por:

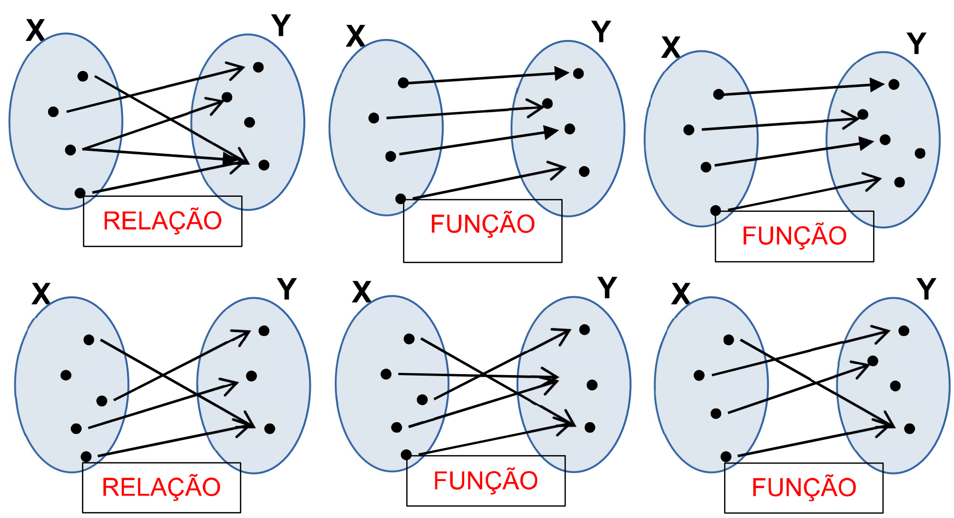
- Diagramas (Conjuntos)

Exemplos:

Dicas→ É preciso classificar em função e relação junto com os alunos, verificando a definição:

1. **Utilizando *"cada elemento do domínio (x)"*;**
2. **Se relacionando "*com um único y"*;**
3. **Vale ressaltar ainda que só importa de onde partem as setas (x).**
4. **Uma analogia muito próxima da linguagem utilizada por este público-alvo na idade regular é comparar a função a um relacionamento. Quando o *"x"* é correto e fiel, ele se relaciona com apenas um *"y"* e não sobra ninguém *"solto na pista"* para bagunçar os relacionamentos. Já a relação simples é *"bagunça" e pode tudo. Ou seja, "x"* se relaciona com quantos *"y"* ele desejar e ainda pode ter *"x" "livre"* para *"bagunçar".***

Figura 1 – Representação de função por diagramas



Fonte: Figura produzida pelo autor

1.1.3.1. Gráficos

Observe que no plano cartesiano, o conjunto domínio é formado pelas abscissas que representam o *"x"* no par ordenado (x, y). Já o *"y"* é representado pelas ordenadas e eles são os elementos que formam o conjunto imagem.

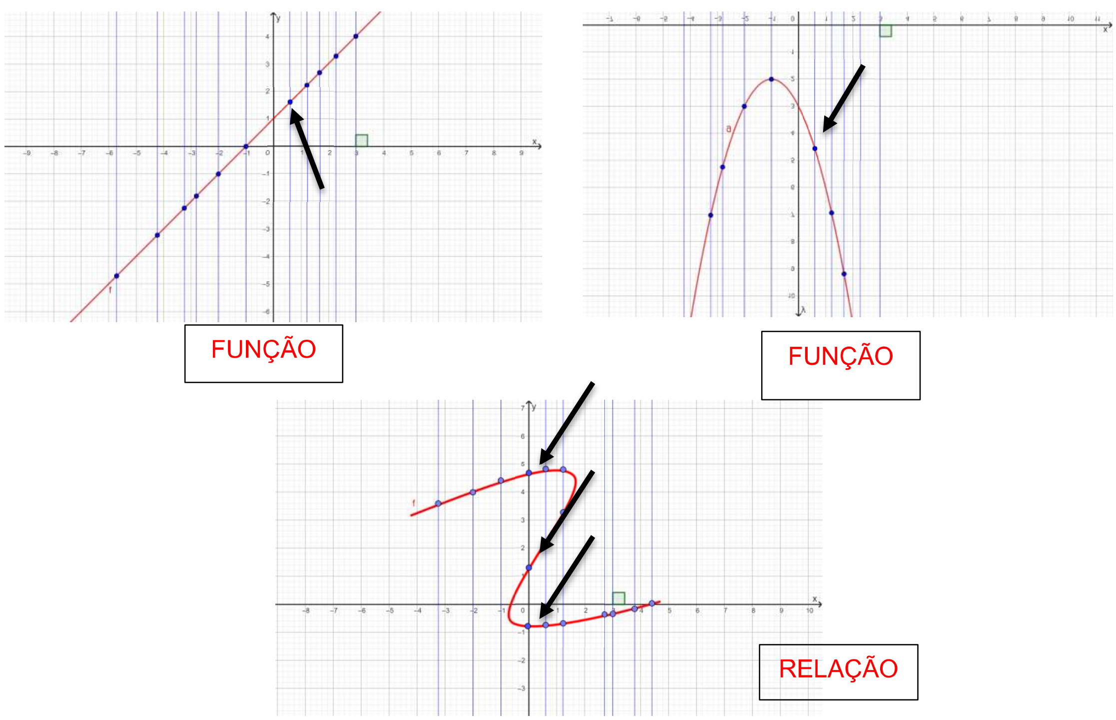
Uma forma prática de perceber a definição numa representação gráfica é traçando retas perpendiculares ao eixo das abscissas (x) no plano cartesiano e verificando se as mesmas interceptam o gráfico em apenas um único ponto, ou seja, um único *"y"* para cada elemento do domínio.

Exemplos:

Dicas ⟶ É preciso classificar em função e relação junto com os alunos, verificando a definição:

1. **Utilizando *"cada elemento do domínio (x)"* no eixo das abscissas*;***
2. **Se relacionando "*com um único y",* corta o gráfico em um único ponto;**
3. **Uma analogia muito próxima da linguagem utilizada por este público-alvo na idade regular é comparar a função a um relacionamento. Quando o *"x"* é correto e fiel, ele se relaciona com apenas um *"y"* e não sobra ninguém "solto na pista" para bagunçar os relacionamentos. Já a relação é *"bagunça"* e pode tudo. Ou seja, *"x"* se relaciona com quantos *"y"* ele desejar e ainda pode ter *"x" "livre"* para *"bagunçar".* É preciso praticar um pouco para consolidar tal entendimento, antes de avançar com o conteúdo.**

Figura 2 – Representação gráfica de função



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

1.1.3.2. Domínio, Contradomínio e Imagem

Os conjuntos de uma função são classificados em domínio, contradomínio e imagem.

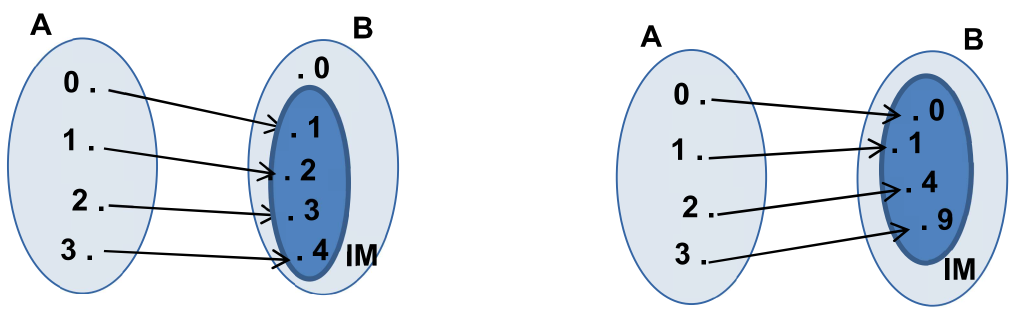
O conjunto D, domínio, é formado por todos os elementos do conjunto A, de onde partem as setas. Assim, costuma ser denominado também como o conjunto de partida.

Já o conjunto CD, contradomínio, é formado por todos os elementos de B, ou seja, é o conjunto que recebe as setas. Ele também é denominado como o conjunto de chegada, pois não necessariamente, todos os elementos de B precisam ser usados pela função, ou seja, receber setas.

Por último temos o conjunto IM, imagem, que é formado por todos os elementos de B que, de fato, recebem as setas. Observe que o conjunto IM é composto por todos os elementos "y" da função, portanto o conjunto imagem é subconjunto do contradomínio.

Exemplo:

Figura 3 – Domínio, Contradomínio e Imagem



$D = A,$

$CD = B,$

$IM = \{1, 2, 3, 4\}$

$D = A,$

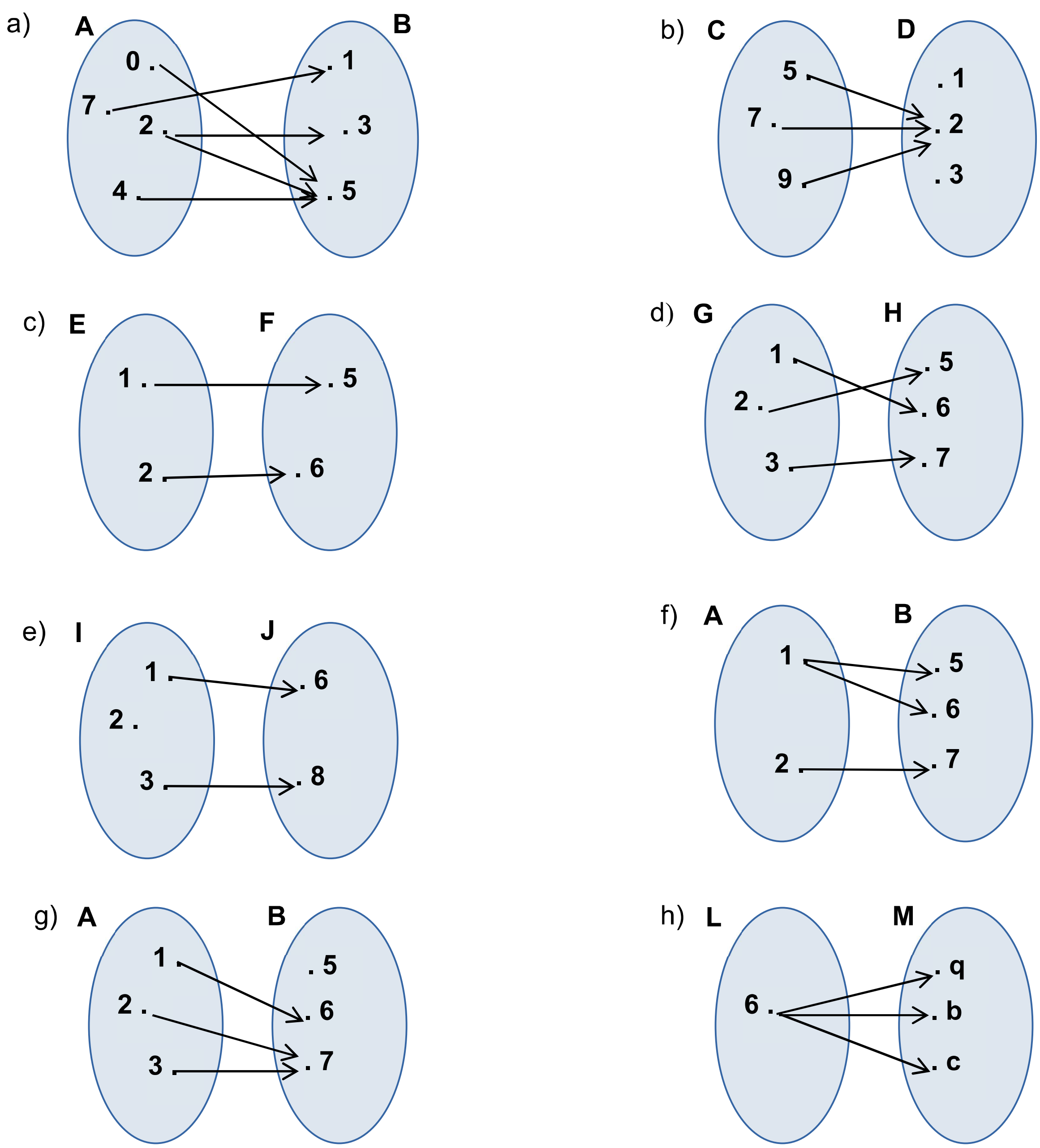
$CD = B,$

$IM = \{0, 1, 4, 9\} = B.$

Fonte: Figura produzida pelo autor

Atividade 1: Considere as relações dadas pelos diagramas abaixo e classifique em **Função** ou **Relação**.

Figura 4 – Representação de função por diagramas - Atividade



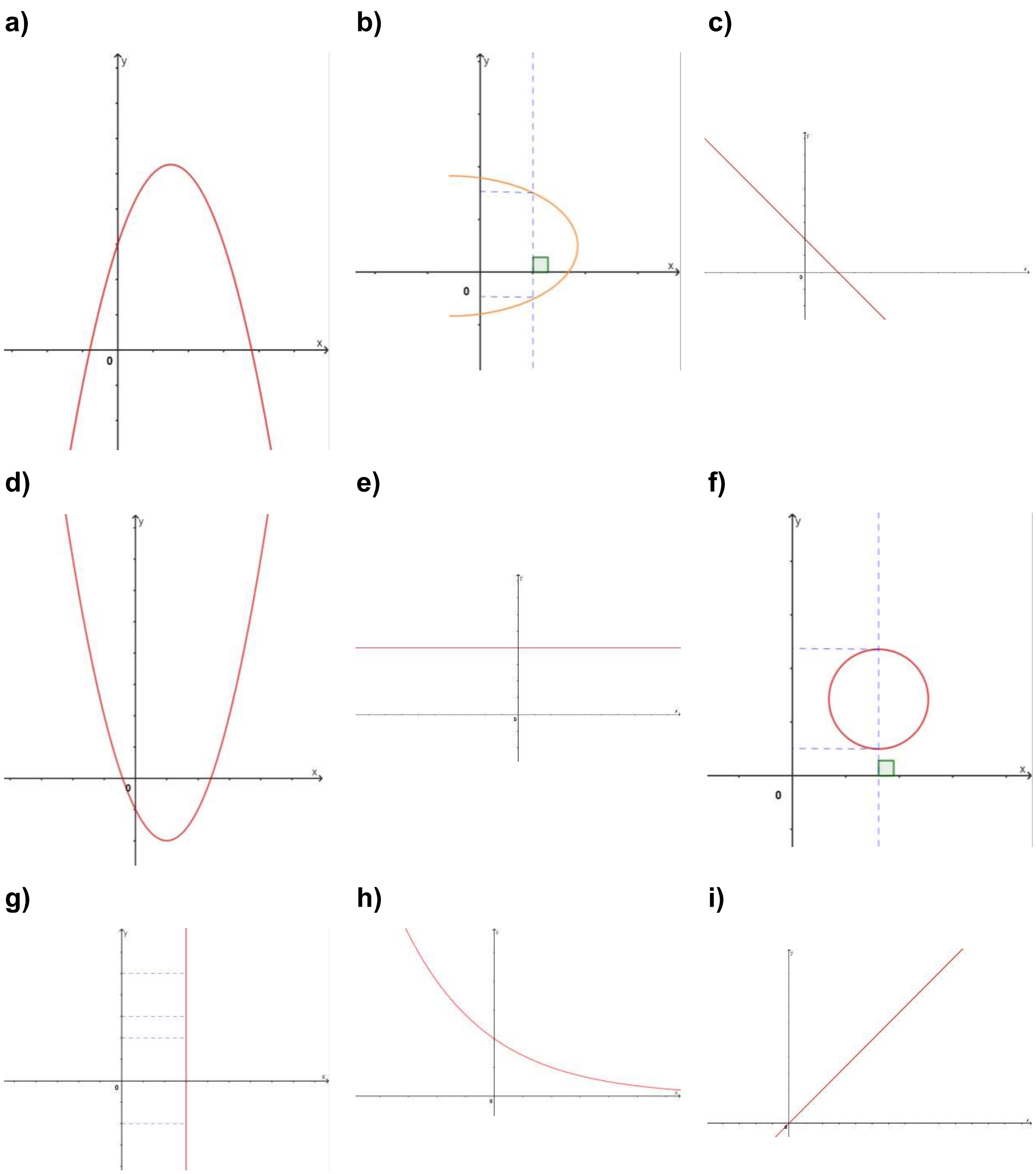
Fonte: Figura produzida pelo autor

Atividade 2: Determine o Domínio, Contradomínio e Imagem dos diagramas da atividade 1.

Atividade 3: Represente as relações da atividade 1, enumerando os pares ordenados.

Atividade 4: (Teláris – p.130, nº 35) Para *x* e *y* números reais, identifique se o gráfico é de uma função ou de uma relação. Justifique sua resposta nos casos em que não for função.

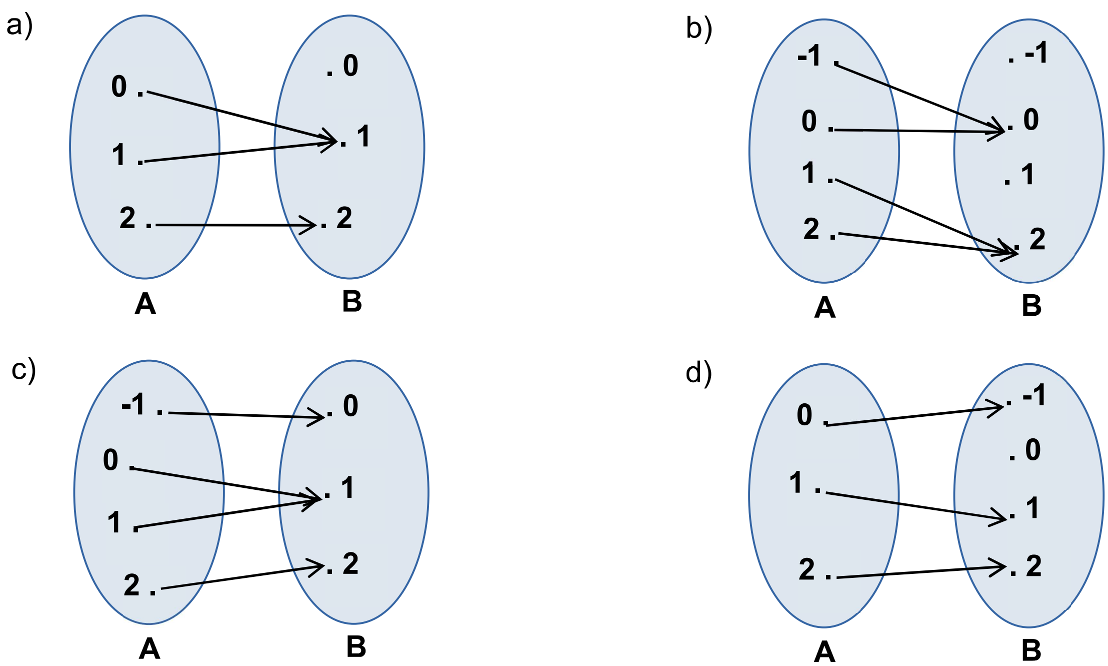
Figura 5 – Representações gráficas de função e relação – Atividade



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Atividade 5: Quais dos esquemas abaixo definem uma função de $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ em $\boldsymbol{B} = \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$?

Figura 6 – Representação de função por diagramas – Atividade 2



Fonte: Figura produzida pelo autor

Atividade 6: Dada à função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$, o domínio $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ e o contradomínio composto pelos naturais entre **1** e **10**, qual das opções abaixo representa o conjunto imagem dessa função?

a) $\{1, 3, 5\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

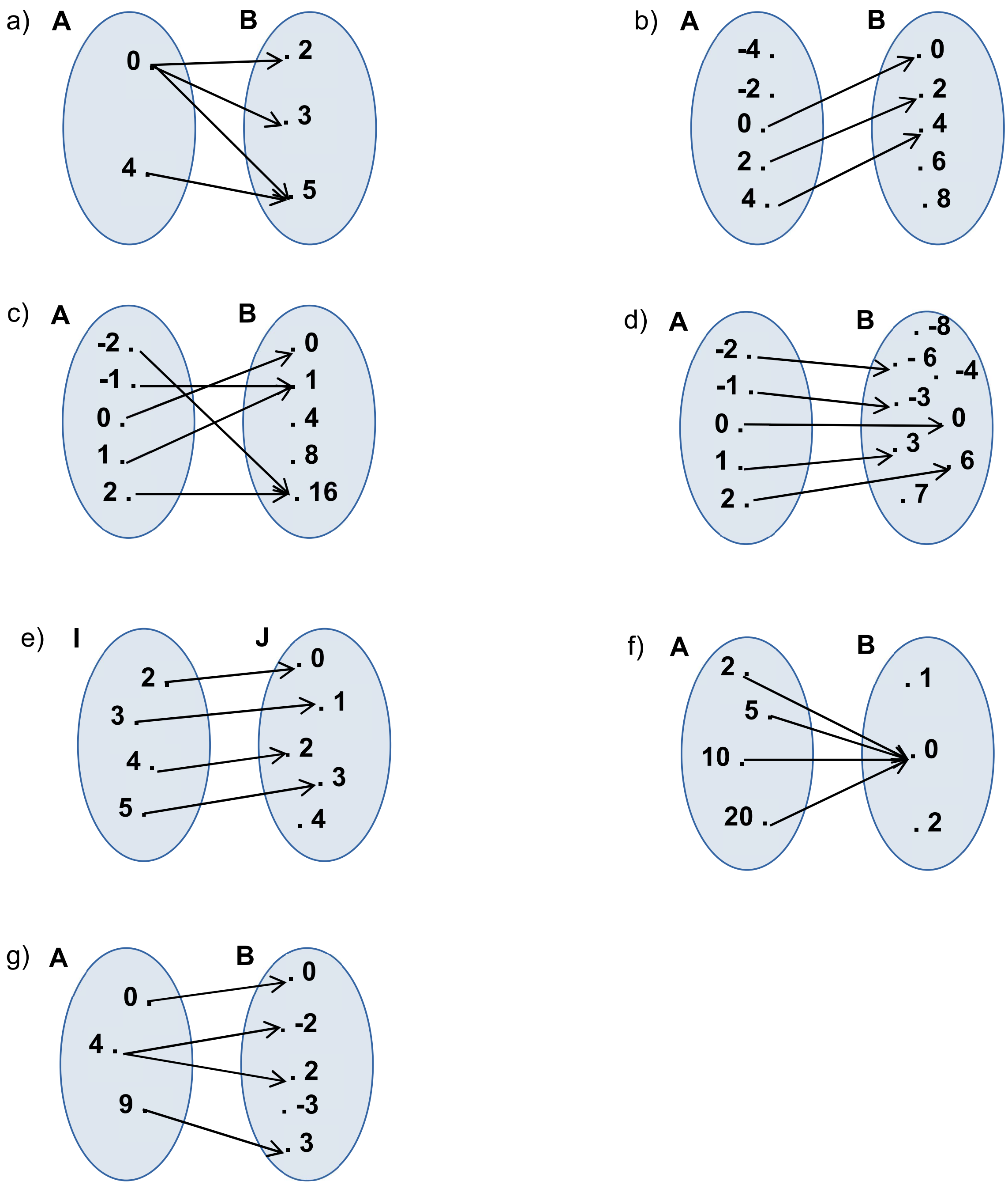
c) $\{4, 6, 8\}$

d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

e) $\{1, 3, 8\}$

Atividade 7: Verifique quais relações abaixo representam FUNÇÕES.

Figura 7 – Representação de função por diagramas – Atividade 3



Fonte: Figura produzida pelo autor

1.2. LEI DE FORMAÇÃO

Objetivo:

- Compreender o conceito de lei de formação.
- Identificar os pares ordenados (x, y) que geram uma função.

- Levar o aluno a compreender de forma intuitiva a generalização de fórmulas matemáticas.

Material necessário: Lousa e pilotos coloridos.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 3 aulas de 50 minutos.

Aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos.

Registros para serem realizados na lousa:

Lei de Formação

Quando a função é gerada através de uma expressão algébrica que nos permite encontrar os pares ordenados (x, y), por meio de uma fórmula denominada **lei de formação.** É através desta fórmula que se relaciona os elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

A lei de formação da função é uma espécie de "*identidade*" única e é através dela que se gera um gráfico único da mesma.

Exemplos:

$$y = x + 1 \qquad f(x) = x^2 + 2x + 5 \qquad y = 2^x$$

$$y = \log x \qquad f(x) = sen\ 2x \qquad f(x) = |x - 3|$$

Para determinar um par ordenado (x, y), basta conhecer o valor da variável, *"x"*, para determinar o valor da outra o *"y"*.

Nota-se que $f(x) = y$.

Exemplos:

Dica ⟶ Neste momento, é recomendável exercitar esses procedimentos com funções polinomiais do 1° e 2° grau uma familiaridade com as funções que serão aprofundadas posteriormente.

$f(x) = x + 1, p\ /\ x = 1$	$y = 5x - 3, p/x = 0$	$y = x^2 + 5x + 6, p/x = 2$
$f(1) = (1) + 1$	$y = 5(0) - 3$	$y = (2)^2 + 5(2) + 6$
$f(1) = 2$	$y = -3$	$y = 4 + 10 + 6$
$(1, 2)$	$(0, -3)$	$y = 20$
		$(2, 20)$

Em alguns casos particulares, como nas funções polinomiais do 1º grau, conhecendo *"y"* podemos encontrar *"x"*. Mas, em geral, isso não é possível.

$f(x) = x + 1, p\ /\ y = 4$

$4 = x + 1$

$x = 3$

$(3, 4)$

$y = 5x - 3, p/y = 0$

$0 = 5x - 3$

$x = \frac{3}{5}$

$\left(\frac{3}{5}, 0\right)$

Atividade 1: Conforme a lei de formação das funções abaixo, determine o conjunto relação, de acordo com $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

a) $y\ =\ 2x\ +\ 1$

$b)\ f(x)\ =\ x^2 - 3x\ +\ 4$

Atividade 2: Dada a função ***f(x) = 2x – 1***, o domínio {1, 2, 3, 4, 5} e o contradomínio composto pelos naturais entre 1 e 10, qual das opções abaixo representa o conjunto imagem dessa função?

a) $\{1, 3, 5\}$
b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
c) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
e) $\{1, 3, 8\}$

Atividade 3: Seja a função $f\ :\ D\ \rightarrow\ R$ dada pela lei de formação $\boldsymbol{f(x)\ =\ 5x\ + 2}$, de domínio $\boldsymbol{D} = \{\mathbf{-3},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4}\}$. Determine o conjunto imagem dessa função.

1.3. FUNÇÕES POLINOMIAIS

1.3.1. Função Polinomial do 1º Grau

Objetivo:

- Compreender o conceito de função polinomial do 1º grau.
- Analisar e construir gráficos de função polinomial do 1º grau.
- Relacionar problemas do cotidiano com função polinomial do 1º grau.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, Datashow, GeoGebra (App) e papel quadriculado.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Dica ⟶ Caso seja possível, o ideal é que em todo o processo utilize o GeoGebra no Datashow e nos celulares dos alunos, ora para simples conferência de resultados, ora para expor várias leis de formações de forma a levar o aluno a perceber que um sinal mudado gera um gráfico distinto.

Aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos. É recomendável que a análise gráfica seja feita com o auxílio do aplicativo GeoGebra nos celulares dos alunos, com auxílio de Datashow, papel quadriculado, etc. na medida do possível.

Registros para serem realizados na lousa:

Funções Polinomiais

As funções polinomiais são as funções cujas leis de formação são compostas por polinômios. De acordo com o grau do polinômio é definido o grau da função e quantas raízes reais ou não a mesma possui.

- Função polinomial do 1º grau

Toda função polinomial do 1º grau possui como lei de formação um polinômio do 1º grau, completo ou incompleto. Logo, sua lei de formação deve ser do tipo

$f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

$y = 2x + 4$, onde a = 2 e b = 4. $f(x) = 3x$, onde a = 3 e b = 0;

$f(x) = -2x + 3$, onde a = -2 e b = 3.

O coeficiente *"a"* é chamado de coeficiente angular e define a inclinação da reta representada no plano cartesiano.

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é sempre representado por uma reta.

Através dos pares ordenados calculados de acordo com a lei de formação é possível construir um gráfico.

Como toda função, substituindo os valores de "x" pertencentes ao conjunto domínio na lei de formação dada, é possível calcular "y", obtendo–se assim os pares ordenados (x, y).

Exemplo:

Sejam $f(x) = x + 1$ e o conjunto domínio $D = \{0, 1, 2, 3\}$, temos:

$f(0) = x + 1$	$f(1) = x + 1$	$f(2) = x + 1$	$f(3) = x + 1$
$f(0) = 0 + 1$	$f(1) = 1 + 1$	$f(2) = 2 + 1$	$f(3) = 3 + 1$
$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$f(2) = 3$	$f(3) = 4$
Logo, $(0, 1)$.	Logo, $(1, 2)$.	Logo, $(2, 3)$.	Logo, $(3, 4)$.

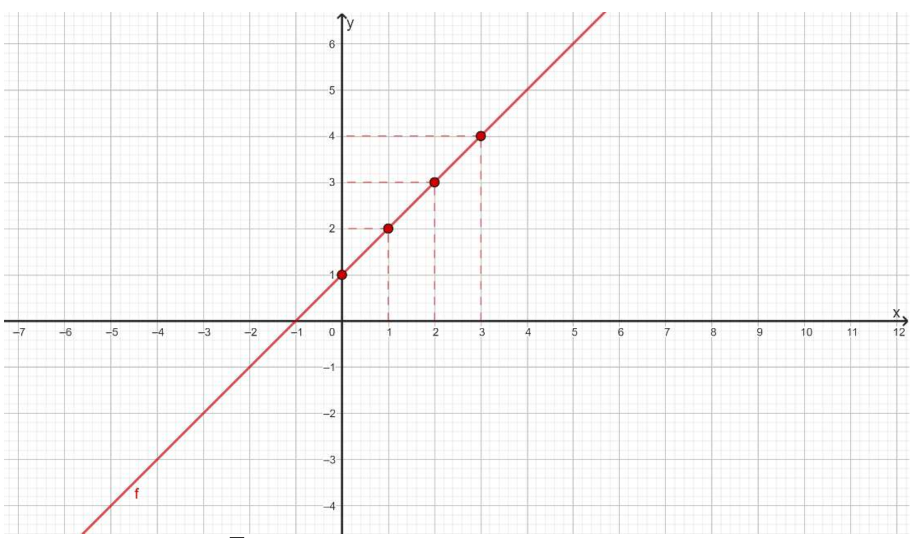
Arrumando no formato de tabela para melhor organização dos dados obtidos, temos:

Figura 8 – Tabela de $f(x) = x + 1$

x	$f(x) = x + 1$
0	1
1	2
2	3
3	4

Fonte: Figura produzida pelo autor

Figura 9 – Representação gráfica de $f(x) = x + 1$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Porém, da geometria Euclidiana temos que "*pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.*" Sendo assim, no gráfico de uma função polinomial do 1º grau, alguns pontos notáveis podem auxiliar bastante neste processo. Estes, são os pontos de interseção com os eixos cartesianos.

O primeiro a ser estudado é a raiz da função, ou também chamado zero da função. Basta igualar a expressão algébrica dada à zero.

Exemplo:

$$f(x) = x + 1$$
$$0 = x + 1$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

Logo, $(-1, 0)$.

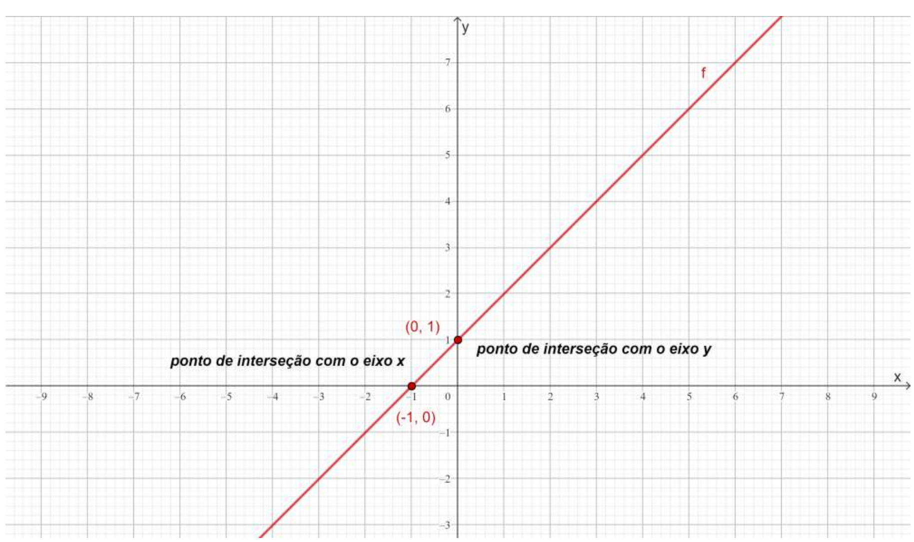
Vale ressaltar que por se tratar de uma função polinomial de grau 1, a mesma possui apenas uma raiz, já que é o grau do polinômio corresponde também ao número máximo de raízes que a função possui.

Dando continuidade, o segundo ponto a ser obtido é o par ordenado que intercepta o eixo das ordenadas, *"y"*. Ou seja, quando a abscissa é zero.

Apesar deste ponto poder ser obtido com a substituição do zero na lei de formação dada, ele também pode ser gerado pelo coeficiente independente do polinômio, o *"b"*. Sendo assim, este segundo par ordenado pode ser obtido por $(0, b)$.

Com estes dois pontos, $(-1, 0)\ e\ (0, 1)$, o gráfico de $f(x)$ pode ser construído.

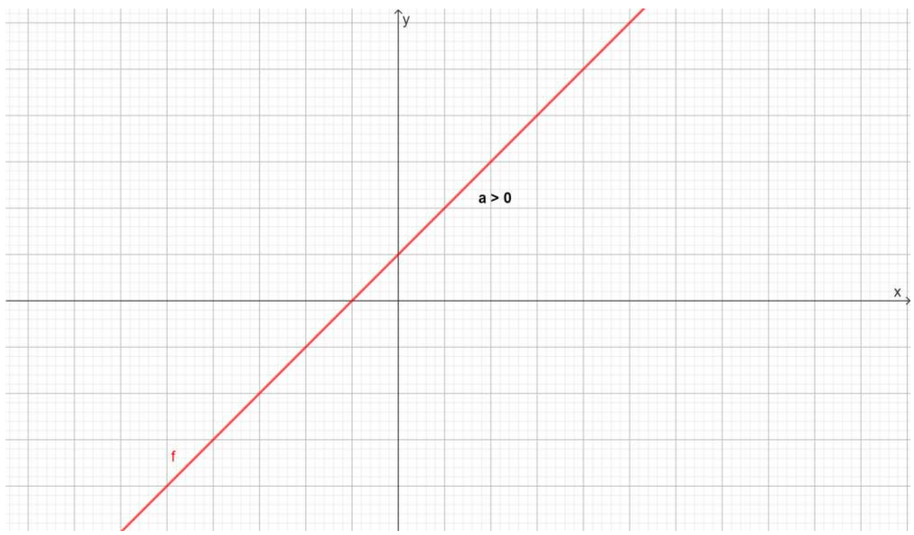
Figura 10 – Representação gráfica de $f(x) = x + 1$, interceptando os eixos



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

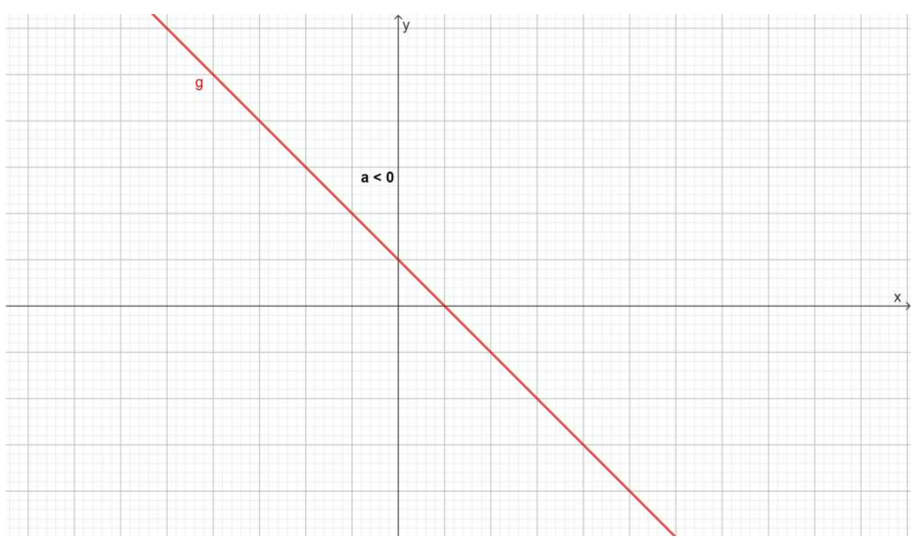
O sinal do coeficiente angular, o "*a*" da lei de formação da função polinomial do 1º grau, conforme o próprio nome sugere, determina a inclinação da reta. Se este for um valor real positivo, a reta *"sobe"* e a função é crescente, proporcionalmente. Já se este coeficiente for um valor real negativo, a reta "*desce"* e a função é decrescente.

Figura 11 – Inclinação da reta conforme coeficiente angular, $a > 0$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Figura 12 – Inclinação da reta conforme coeficiente angular, $a < 0$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Após exercitar tais conceitos e procedimentos, é importante também nesta etapa utilizar o conceito de função polinomial do 1º grau em algumas aplicações de questões práticas, familiares aos alunos. Nesta etapa de ensino, eles precisam conseguir fazer a conexão do conteúdo matemático apreendido em sala de aula com suas práticas diárias. Dar significado sempre que possível, de alguma forma, a toda abstração trabalhada na disciplina, agrega familiaridade ao aluno, auxiliando assim no processo ensino/aprendizagem.

Atividade 1: (Bianchini adaptado – p 229) Identifique as leis que representam funções polinomiais do 1º grau.

a) $y = x + 3$

e) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = -5x + 1$

d) $y = -4x$

c) $y = x^2 - 3x$

f) $y = 2 - x$

Atividade 2: Dados *a* e *b*, escreva a lei de cada função polinomial do 1º grau em que ***y = ax + b.***

a) $a = 2$ e $b = -1$

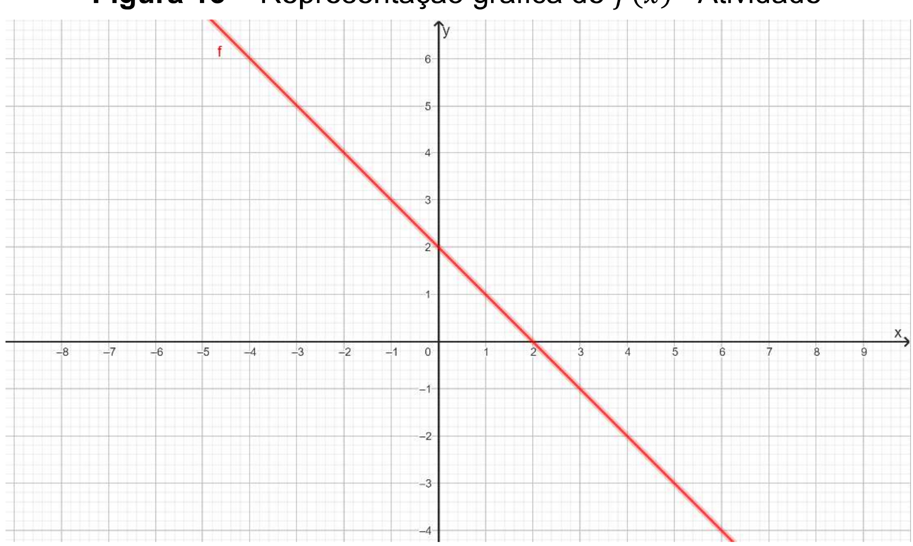
b) $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$

c) $a = \sqrt{2}$ e $b = 0$

d) $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$

Atividade 3: (Bianchini – p 231) Observe o gráfico de uma função para responder as questões abaixo:

Figura 13 – Representação gráfica de $f(x)$ - Atividade



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

a) Qual é o valor de $\boldsymbol{y}$, quando $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$?

b) Para que valor de $\boldsymbol{x}$, tendo $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$?

Atividade 4: Considere a função polinomial do 1º grau definida pela lei $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbf{3}$.

a) Represente graficamente essa função em uma folha de papel quadriculado.

b) Qual é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo dos *x*?

c) Qual é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo dos *y*?

Atividade 5: Dada a função definida pela lei $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}$, com *x* real, determine:

a) $f(-1)$

b) $f(-\frac{3}{5})$

c) O valor de *x* para que se tenha $f(x) = 6$

d) O valor de *x* para que se tenha $f(x) = 0$

Atividade 7: (Andrini & Vasconcellos adaptado – p. 126) Atribua valores à variável *x*, construa uma tabela com alguns pares ordenados e desenhe o gráfico das funções:

a) $y = -2x$

b) $y = -x - 1$

c) $y = 3 - x$

d) $y = \frac{x}{2} + 1$

e) $y = \frac{x}{3} + 1$

f) $y =- x$

1.3.1.1. Problemas envolvendo Funções Polinomiais do 1º grau

Apesar de ser um conteúdo bastante abstrato, função é aplicável em várias áreas do conhecimento, como: Contabilidade, Análise de sistema, Arquitetura, Engenharias, entre outras.

Exemplo:

Dica ⟶ A construção da solução deve ser feita de forma intuitiva junto com os alunos, fazendo questionamentos sobre o melhor caminho a seguir para determinar a solução, até que os mesmos consigam compreender a abstração, respondendo assim a segunda parte da pergunta.

Quanto pagarei de Porto das Caixas a Itaboraí, aproximadamente 9 km de distância, para 3 pessoas, indo:

a) Na linha de ônibus 06, cujo preço da passagem é R$ 3,75? Qual expressão matemática me permite este cálculo?

Valor p a ser pago	Expressão matemática
$p = 3 \cdot 3{,}75$	$y = ax + b$
$p = 11{,}25$	$p = 3{,}75x, com\ b = 0$

b) Indo de Uber, sabendo que a taxa cobrada pela contratação do serviço é R$ 3,50 e que por cada km percorrido é cobrado R$ 1,60? Qual expressão matemática me permite este cálculo?

Valor p a ser pago	Expressão matemática
$p = 9 \cdot 3{,}50 + 1{,}60$	$y = ax + b$
$p = 33{,}10$	$p = 3{,}50x + 1{,}60$

Atividade 8: (Bianchini adaptado – p. 220) Responda:

Em certa loja, uma blusa custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre.

a) Na compra de 2 blusas, qual será o valor pago? E na compra de 10 blusas?

b) Para cada quantidade comprada dessa blusa, o preço associado é único?

c) A relação entre a quantidade de blusas e o preço pago é uma função?

d) Determine o preço pago **(*y*)**, como uma função do número de blusas compradas **(*x*)**.

Atividade 9: (Bianchini adaptado – p. 220) Em um estacionamento, são cobradas as seguintes tarifas:

* pela 1ª hora: R$ 10,00;
* pela 2ª hora e seguintes: R$ 2,00 por hora.

Se ***x*** representa o número de horas que um carro permaneceu no estacionamento e ***y***, o valor a ser pago, qual é a lei da função que fornece ***y*** em função de ***x***?

Atividade 10: (Bianchini – p. 220) Uma máquina produz 8 litros de sorvete a cada 10 minutos. Assim, a produção ***p*** depende da quantidade ***t*** de minutos em que a máquina produz.

Escreva a lei dessa função, que fornece ***p*** em função de ***t***.

Atividade 11: (Bianchini – p. 220) Em uma loja, certo tipo de tecido está sendo vendido a R$ 8,00 o metro.

a) Escreva a fórmula que indica o preço ***y*** a pagar na compra de ***x*** metros de tecido, ou seja, ***y*** em função de ***x***, sendo ***x*** e ***y*** reais com $x \geq \mathbf{0}$.

b) Construa uma tabela relacionando ***x*** e ***y***:

$x = 5$ $\quad$ $x = {}^{1}/_{2}$ $\quad$ $x = 3{,}5$ $\quad$ $x = 1{,}25$

c) Faça o gráfico correspondente para ***x real*** e $x \geq \mathbf{0}$.

Atividade 12: (Andrini & Vasconcelos – p. 107) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 7,00 e cada quilômetro rodado custa R$ 1,20, responda:

a) Qual o valor $\boldsymbol{v}$ a pagar numa corrida de $\boldsymbol{n}$ quilômetros?

b) Quanto vai custar uma corrida de 11 quilômetros?

c) Quanto vai custar uma corrida de 5 quilômetros e 800 metros?

d) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 27,40 pela corrida?

e) Qual é a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 18,40 pela corrida?

Atividade 13: (CEFET - MG - 2015) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R$ 5,00 e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado $(\boldsymbol{R})$ num dia, é função da quantidade total $(\boldsymbol{x})$ de quilômetros percorridos e calculado por meio da função $\boldsymbol{R(x) = ax + b}$, em que $\boldsymbol{a}$ é o preço cobrado por quilômetro e $\boldsymbol{b}$, a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R$ 410,00, então a média de quilômetros rodados por corrida, foi de:

Dados: $\boldsymbol{a = 2}$ **e** $\boldsymbol{b = 5}$

a) 14

b) 16

c) 18

d) 20

Atividade 14: Carlos é dono de uma empresa e o salário de seus funcionários é dado por um valor fixo e uma taxa variável de acordo com o número de horas extras trabalhadas. Veja a função que representa o salário pago por Carlos.

$$\boldsymbol{S(t) = 1022 + 15.t}$$

Considerando($\boldsymbol{S}$) o salário pago e ($\boldsymbol{t}$) o número de horas extras trabalhadas, o salário recebido por um funcionário que trabalhou 5 horas extras mensais será equivalente a:

a) R$ 1022,00.

b) R$ 1037,15.

c) R$ 1097,00.

d) R$ 1112,00.

Atividade 15: (UCSAL - adaptada) Sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ funções de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$, sendo $\boldsymbol{R}$ o conjunto dos números reais, dadas por $\boldsymbol{f(x) = 2x - 3}$. Nestas condições, $\boldsymbol{f(-1)}$ é igual a:

a) -5

b) -4

c) 0

d) 4

e) 5

1.3.2. Função Polinomial do 2º Grau

Objetivo:

- Compreender o conceito de função polinomial do 2º grau.
- Analisar e construir gráficos de função polinomial do 2º grau.
- Relacionar problemas do cotidiano com função polinomial do 2º grau.
- Diferenciar funções polinomiais do 1º e do 2º grau.

Material necessário: Lousa, pilotos coloridos, Datashow, Geogebra (App) e papel quadriculado.

Tipo de atividade: Individual.

Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Dica ⟶ Caso seja possível, o ideal é que em todo o processo utilize o GeoGebra no Datashow e nos celulares dos alunos, ora para simples conferência de resultados, ora para expor várias leis de formações de forma a levar o aluno a perceber que um sinal mudado gera um gráfico distinto.

Novamente, aula expositiva, com registros de conceitos e definições. Para isso, pode-se utilizar o próprio quadro da sala de aula com o auxílio de pilotos coloridos. É recomendável que a análise gráfica seja feita com o auxílio do aplicativo GeoGebra nos celulares dos alunos, com auxílio de Datashow, papel quadriculado, etc. a medida do possível.

Registros para serem realizados na lousa:

- Função polinomial do 2º grau

As funções polinomiais do 2º grau, também conhecidas como funções quadráticas, são oriundas de polinômios do 2º grau, completos ou incompletos. Logo, sua lei de formação deve ser do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com os coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad f(x) = -2x^2 + 3$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x \qquad f(x) = -x^2$$

A sua representação gráfica é dada por uma parábola.

A função polinomial do 2º grau possui duas raízes reais quando o gráfico intercepta o eixo das abscissas (x) em dois pontos. Porém, o mesmo pode possuir apenas uma raiz real ou até nenhuma raiz real. Estas também podem ser facilmente definidas algebricamente conforme o discriminante delta:

$\Delta > 0$ (possui duas raízes reais).

$\Delta = 0$ (possui uma raiz real).

$\Delta < 0$ (não possui raízes reais).

Ao contrário da função polinomial do 1º grau, cujo gráfico é uma reta, a parábola precisa de vários pontos para ser traçada. Preferencialmente, com as duas raízes e o vértice já se torna possível esboçar a parábola.

Para calcular as coordenadas do vértice basta utilizar as fórmulas específicas

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ e } y = -\frac{\Delta}{4a},$$

determinando assim (x_v, y_v).

Exemplo:

Dica ⟶ É preciso lembrar ao aluno que para determinar os pares ordenados (x', 0) e (x", 0), os zeros ou raízes da função, basta substituir o "*y*" por zero e resolver uma equação do 2º grau, pelo método que for mais conveniente ao aluno.

Para $f(x) = x^2 + 6x + 5$, com $a = 1,\ b = 6\ e\ c = 5$.

Aplicando as fórmulas das coordenadas do vértice da parábola, temos:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3 \text{ e } y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4,$$

com

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4(1)(5) = 16,$$

gerando assim as coordenadas do vértice $(-3, -4)$.

Observe que como o discriminante é positivo, $\Delta > 0$, ela possui duas raízes reais.

Definindo as raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

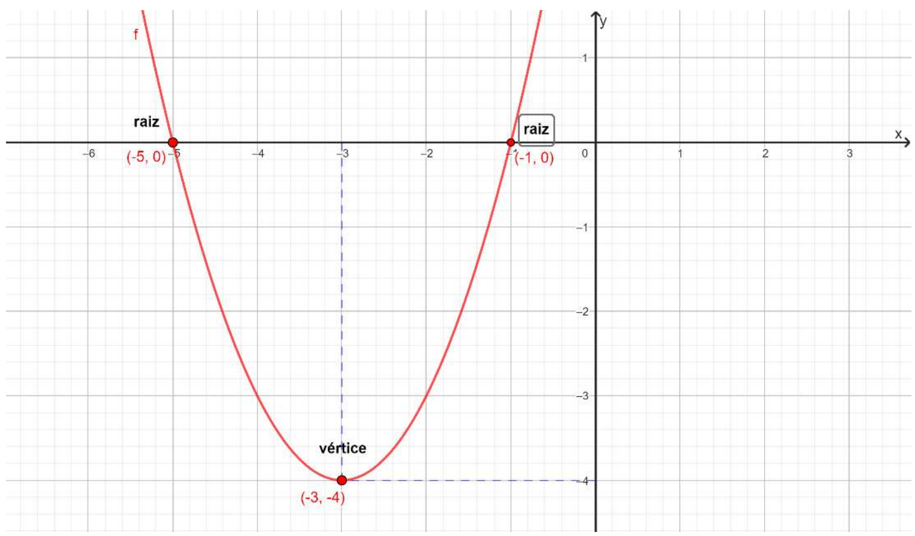
$$x' = \frac{-6+4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x" = \frac{-6-4}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

Logo, os pares ordenados que interceptam o eixo das abscissas são $(-1, 0)\ e\ (-5, 0)$.

Daí,

Figura 14 – Representação gráfica de $f(x) = x^2 + 6x + 5$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Porém, para se obter um gráfico um pouco mais preciso, o ideal é que se tenha um número maior de pontos. O ponto de interseção com o eixo *"y"*, $(0, c)$ é uma boa sugestão como um dos pontos. Já um ponto extra, se calcular a distância (*d*) do x_v ao zero no eixo das abscissas ($d = |x_v - 0|$), o *x* de um ponto pode ter abscissa igual ao dobro desta distância partindo do zero, com o sinal idêntico ao sinal do x_v ($2x_v$, c), obtendo-se assim a forma quadrática da parábola. Mas, nada impede que este ponto seja um valor aleatório para *"x"*. Sendo assim, basta substituí-lo na lei de formação da função em questão, para gerar o quinto ponto de forma aleatória, (x, y).

Complementando o gráfico $f(x) = x^2 + 6x + 5$, do exemplo temos,

Figura 15 – Tabela de $f(x) = x^2 + 6x + 5$

x	$f(x) = x^2 + 6x + 5$
-5	0
-1	0
-3	-4
0	5
-6	5

Fonte: Figura produzida pelo autor

Observe que a distância entre o x_v e o zero é -2. Daí,

$$2 \cdot (-2) = -4$$

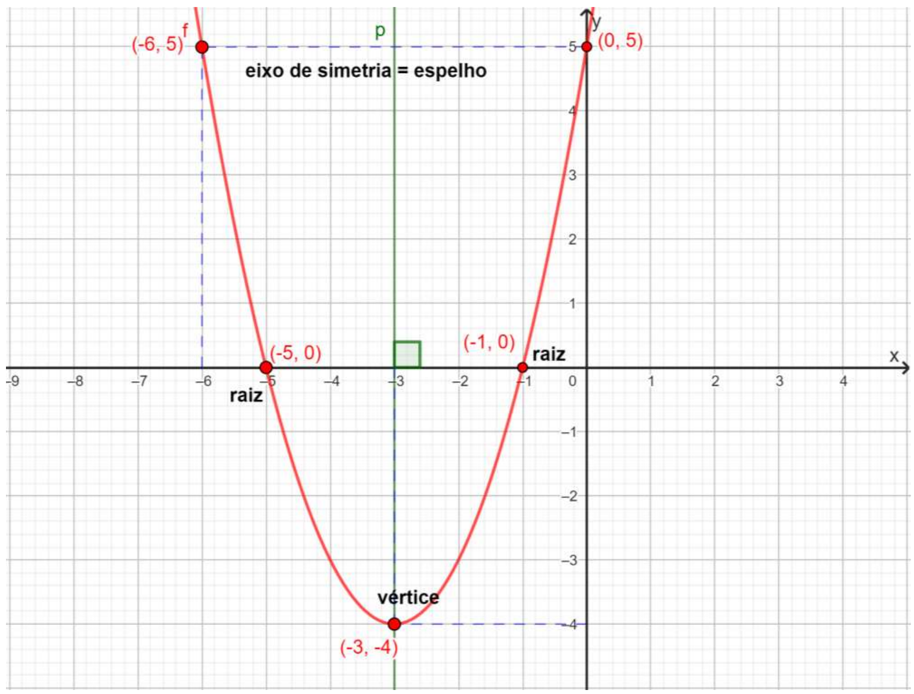
que adicionado a abscissa do vértice, temos:

$$-4 + (-2) = -6.$$

Ou,

$$f(-6) = x^2 + 6x + 5$$
$$f(-6) = (-6)^2 + 6(-6) + 5$$
$$f(-6) = 36 - 36 + 5$$
$$f(-6) = 5$$

Figura 16 – Parábola completa e eixo de simetria



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Pelo vértice ainda é possível traçar o eixo de simetria da parábola. Através de uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe pelo vértice, é possível visualizar que a parábola se "*espelha*".

Atividade 1: O vértice da parábola que representa a função quadrática $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ será um ponto do eixo das abscissas se:

a) $\Delta = 0$.

b) $\Delta < 0$.

c) $\Delta \geq 0$.

d) $\Delta > 0$.

Atividade 2: Considere a função definida pela lei $\boldsymbol{y = x^2 - 2x + 1.}$

a) Determine o(s) zero(s) dessa função.

b) Construa o gráfico da função.

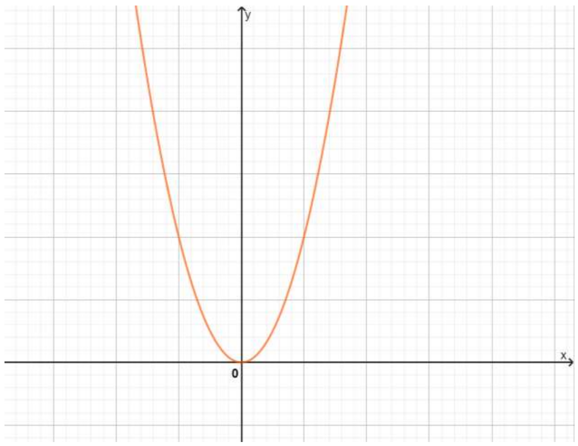
c) Para que valores de x temos $y = 1$?

d) Para que valores de x temos $y > 0$?

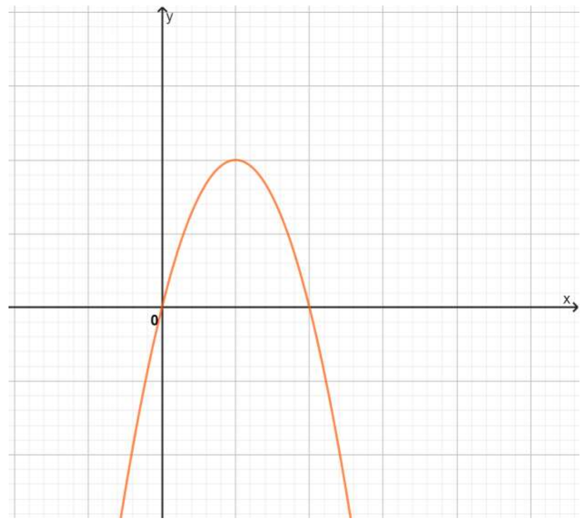
Atividade 3: (SARESP) O gráfico que melhor representa a função definida por $y = -x^2$ é:

Figura 17 – Parábolas – Atividade

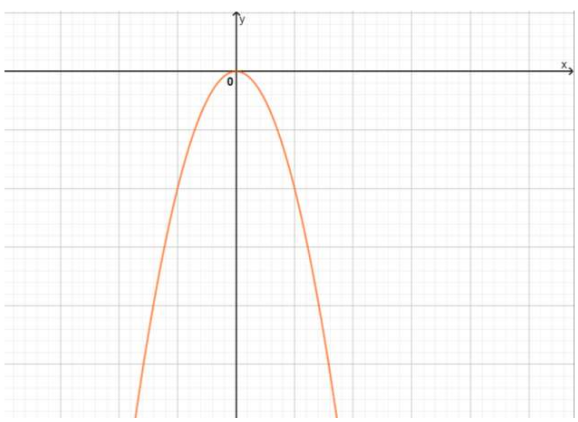
a)



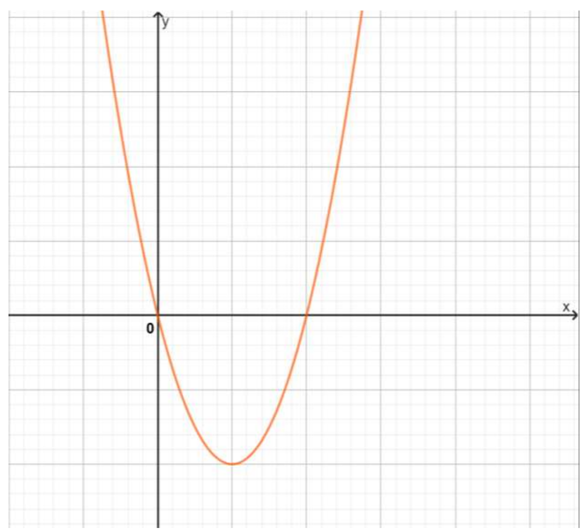
b)



c)



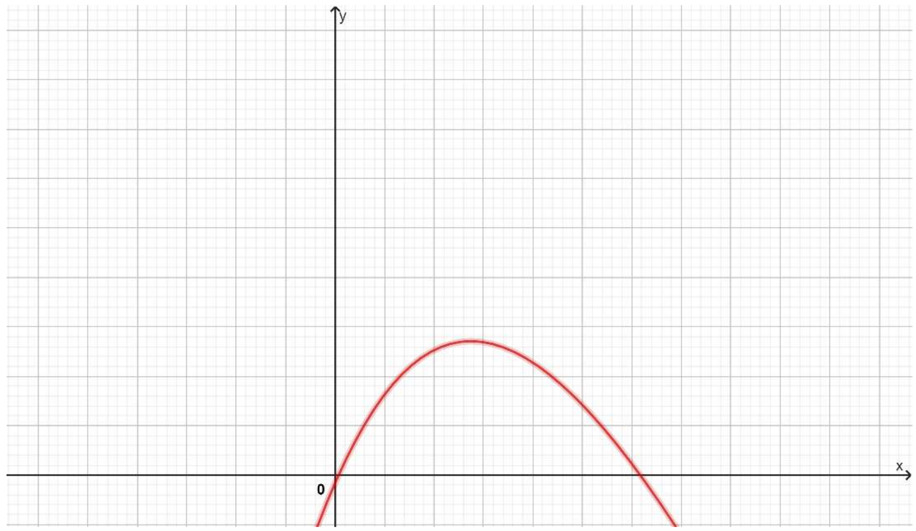
d)



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Atividade 4: (CEETEPS-SP) Um projétil é atirado do ponto 0, como mostra a figura, e descreve uma parábola cuja função é $\boldsymbol{y = -2x^2 + 80x}$, sendo *x* e *y* dados em metros.

Figura 18 – Parábola $y = -2x^2 + 80x$



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

O alcance desse projétil é:

a) 40 m

b) 60 m

c) 80 m

d) 100 m

Atividade 5: Usando o discriminante, determine no caderno quantas raízes reais cada função tem.

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = 2x^2 + 10x - 250$

c) $y = 5x^2 - x - 1$

1.3.2.1. Máximo e Mínimo

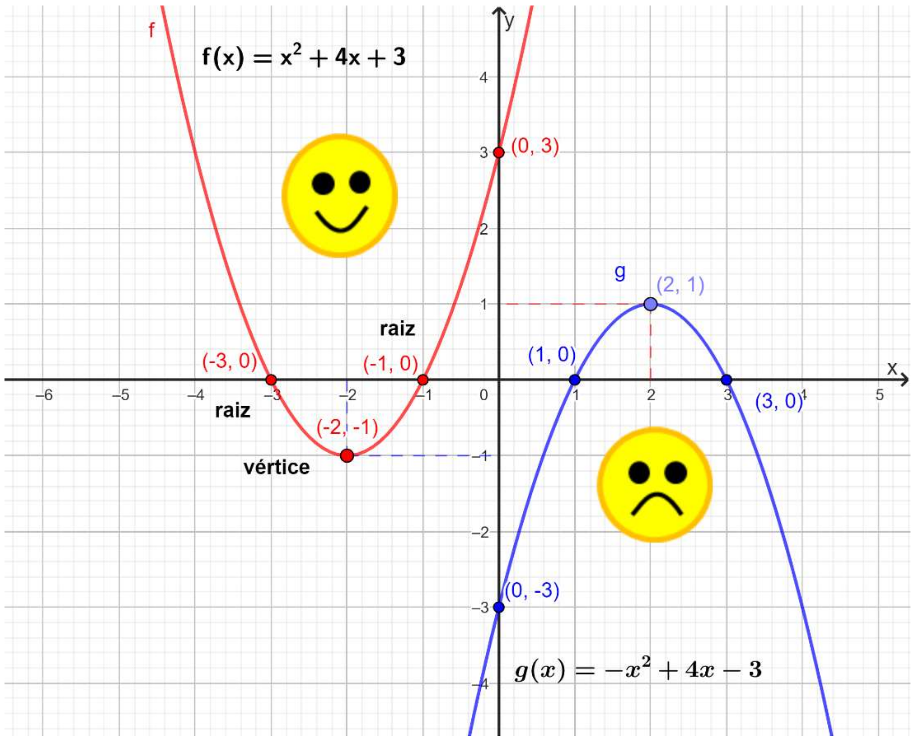
O vértice da parábola é o ponto responsável pelo valor máximo (ou mínimo) assumido por este tipo específico de função. O sinal do coeficiente *"a"* determina a concavidade da parábola. Se *"a"* for positivo, $a > 0$, a parábola terá a concavidade voltada para cima, logo ponto mínimo. Já se o coeficiente *"a"* for negativo, $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo e a função possui ponto máximo.

Exemplo:

Dica →Se *"a"* for positivo, $a > 0$, a parábola terá a concavidade voltada para cima, logo ponto mínimo. Costuma-se fazer uma analogia aos "*emojis*", comumente utilizados pelos alunos, e

dizer que a parábola está feliz. Já se o coeficiente *"a"* for negativo, $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo e a função possui ponto máximo. Aplicando a mesma analogia dos "*emojis*", pode se dizer que a parábola está triste. Tais analogias ajudam ao aluno a fixar determinadas propriedades.

Figura 19 – Mínimo e máximo de uma parábola (emojis)



Fonte: Figura produzida pelo autor no GeoGebra

Atividade 6: Dadas as funções quadráticas, responda se cada vértice é um ponto de máximo ou mínimo:

a) $y = x^2 - 3x + 2$

b) $y = x^2 + 4x - 1$

c) $y = -x^2 + 1$

d) $y = -x^2 + 6x - 5$

e) $y = x^2 + x - 1$

f) $y = x^2 + 8x - 9$

g) $y = 2x^2 + x + 6$

h) $y = -x^2 + 5x$

i) $y = -2x^2 + 3$

Atividade 7: Em uma apresentação aérea de acrobacias, um avião a jato descreve um arco no formato de uma parábola de acordo com a seguinte função $y = -x^2 + 60x$. Determine a altura máxima atingida pelo avião.

Atividade 8: Uma empresa produz um determinado produto com o custo definido pela seguinte função $\boldsymbol{C(x) = x^2 - 80x + 3000}$. Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, determine a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo e o valor desse custo mínimo.

Atividade 9: De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $\boldsymbol{L = R - C}$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria de peças automotivas produziu x unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $\boldsymbol{C(x) = x^2 - 2000x}$ e a receita representada por $\boldsymbol{R(x) = 6000x - x^2}$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

1.3.2.2. Problemas envolvendo Funções Polinomiais do 2º grau

O conceito de função polinomial do 2º grau é usado no dia a dia para calcular o lançamento e o movimento de projéteis como balas de canhão e foguetes, para presumir o ângulo de reflexão de faróis de carros, conjecturar o ângulo da antena parabólica, entre outras coisas.

Exemplo:

Dica ⟶ A construção da solução deve ser feita de forma intuitiva junto com os alunos, fazendo questionamentos sobre o melhor caminho a seguir para determinar a solução, até que os mesmos consigam compreender a abstração respondendo assim a segunda parte da pergunta.

(UFSCAR–SP) Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $\boldsymbol{h(t) = -2t^2 + 8t \ \ (t \geq 0)}$, onde ***t*** é o tempo medido em segundo e ***h(t)*** é a altura em metros da bola no instante ***t***. Determine, após o chute:

a) o instante em que a bola retornará ao solo.

Dica ⟶ É preciso levar os alunos a compreenderem que no momento em que a bola tocar o solo a sua altura será nula.

$$h(t) = -\ 2t^2 +\ 8t$$
$$0 = -\ 2t^2 +\ 8t$$
$$t\ (-\ 2t +\ 8) = 0$$

$$t' = 0$$

$$-2t'' + 8 = 0$$
$$-2t'' = -8$$
$$t'' = 4$$

Observe que a bola atinge o chão no instante zero e no tempo 4 segundos. O instante zero é no início e após 4 segundos toca o chão novamente.

b) a altura atingida pela bola.

Dica → É preciso levar os alunos a observar que como o coeficiente a < 0, a parábola possui ponto máximo. Logo, basta identificar o y do vértice para se obter a altura máxima.

$h(t) = -\ 2t^2 +\ 8t$, logo $a = \ -2, b = \ 8\ e\ c = 0$.

$$y = -\frac{\Delta}{4a} = \ -\frac{64}{4(-2)} = \ 8$$

$$\Delta = \ b^2 - 4ac$$
$$\Delta = \ 8^2 - 4(-2)(0) = 64$$

Logo, a altura atingida pela bola é 8 m.

Atividade 10: (Bianchini – p. 255) (UFRGS RS) Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = 2x^2 +\ 12x$, em que *y* é a altura dada em metro. A altura máxima atingida pela bola é:

a) 36 m.

b) 18 m.

c) 12 m.

d) 6 m.

e) 3 m.

Atividade 11: (Bianchini – p. 255) Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões, em metro, são expressas por $\boldsymbol{x \cdot\ (20 - x)\ e\ 2.}$ Qual é o maior volume que essa piscina poderá ter, em metro cúbico?

Atividade 12: (Bianchini – p. 255) (ESPM-SP) A estrutura do lucro de uma pequena empresa pode ser estudada através da equação $\boldsymbol{y = -x^2 + 120x - 2.000}$, sendo *y* o lucro em real quando a empresa vende *x* unidades. Com base nisso, pode-se afirmar que:

a) o lucro é máximo quando $x = 60$.

b) o lucro é máximo quando $x = 1.600$.

c) o lucro é máximo quando $x = 20$ ou $x = 100$.

d) o lucro é máximo quando $x > 2.000$.

e) o lucro é máximo quando $a < 20$ ou $x > 100$.

Atividade 13: (Bianchini – p. 255) O lucro (L) de uma empresa para certo produto é obtido pela função definida pela lei $\boldsymbol{L = -2x + 2000x - 100}$, em que *x* representa a quantidade do produto. Calcule para quantas unidades se obtém o lucro máximo possível.

Atividade 14: (Bianchini – p. 255) A temperatura, em grau Celsius, no interior de uma câmara frigorífica é dada por uma função cuja lei é $\boldsymbol{y = t^2 - 7t + c}$, em que t indica o tempo e *y* indica a temperatura.

a) Sabendo que para $t = 0$ a temperatura é de 10 °C, calcule o valor de *c*.

b) Qual é a lei da função?

c) Calcule o valor de *t* para que a temperatura seja a mínima possível.

2. REFERÊNCIAS

- ALVES, A. Exercícios sobre funções quadráticas, ponto máximo, mínimo e vértice resolvido para o 9º ano. *In:* ALVES. **Mania de Calcular**. Disponível em: <http://maniadecalcular.blogspot.com/2015/04/exercicios-de-matematica-de-funcoes.html>. Acessado em: 14 jun. 2023.

- ANDRINI, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática 9º ano.** 4. ed. São Paulo: Ed. do Brasil, 2015.

- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini 9º ano**. 9. ed. São Paulo: Ed. Moderna, 2018.
- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática 9º ano.** 3. ed. São Paulo: Ed. Ática, 2018.

- MPPEB – CPII. Mestrado Profissional em Práticas de Educação Básica. **Colégio Pedro II**. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <http://www.cp2.g12.br/blog/mpcp2/produtos-educacionais>. Acessado em: 10 jan. 2023.

- SILVA, M. N. P. da. Exercícios sobre Máximo e Mínimo. *In:* Brasil Escola. **Exercícios Brasil Escola.** Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-maximo-minimo.htm>. Acessado em: 14 jun. 2023.