



Universidade Federal  
de São João del-Rei



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

LUCAS OLIVEIRA DE CARVALHO

**O ENSINO DE EQUAÇÕES COM A UTILIZAÇÃO DE UMA  
BALANÇA VIRTUAL QUE INCLUI A REPRESENTAÇÃO DE  
NÚMEROS NEGATIVOS**

São João del Rei  
2023

LUCAS OLIVEIRA DE CARVALHO

O ENSINO DE EQUAÇÕES COM A UTILIZAÇÃO DE UMA BALANÇA VIRTUAL  
QUE INCLUI A REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS NEGATIVOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São João Del Rei, Campus Alto Paraopeba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador:

Dr. Eduardo Sarquis Soares

São João del Rei  
2023

## TERMO DE APROVAÇÃO

LUCAS OLIVEIRA DE CARVALHO

### **O ENSINO DE EQUAÇÕES COM A UTILIZAÇÃO DE UMA BALANÇA VIRTUAL QUE INCLUI A REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS NEGATIVOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São João del Rei, Campus Alto Paraopeba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA em 07/07/2023

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Eduardo Sarquis Soares - UFSJ (Orientador)

---

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Gilcelia Regiane De Souza - UFSJ (Membro interno da UFSJ)

---

Prof. Dr. Paulo Henrique Dias Menezes – UFJF (Membro externo da UFSJ)

São João del Rei  
2023

Dedico esse trabalho a todos os meus alunos, vocês são diretamente responsáveis pela minha inspiração e minha vontade de melhorar a mim mesmo e ao ensino público do meu país. Vocês são brilhantes visto que fazem tanto com o tão pouco recurso, além de enfrentarem condições completamente adversas e desfavoráveis ao crescimento do interesse acadêmico.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por todas as graças concedidas diariamente e que me permitiram chegar até aqui. Nada disso seria possível se não fosse a sua proteção em todos os dias de minha vida.

Aos meus pais Luiz Carlos e Ivone por todo apoio que me deram durante toda minha vida, tenho certeza que todas as minhas conquistas são frutos da dedicação e criação amorosa que vocês me deram, sem o auxílio e orientação de vocês eu não seria o mesmo.

A minha irmã Leticia Carvalho, licenciada em letras pelo Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET-MG), lhe agradeço pela disposição de revisar o texto desse trabalho.

Meu enorme agradecimento a todos os meus professores por todo conhecimento transmitido, pela dedicação de vocês em ensinar e também pela paciência e compreensão que tiveram na tentativa de superar as dificuldades durante todo o período do curso, durante e após o período de afastamento social devido a pandemia COVID-19. Em especial, agradeço ao meu orientador Eduardo Sarquis, sua dedicação a esse trabalho, foi para mim, um exemplo de amor pela profissão.

Agradeço também a minha noiva Taynara Alves por todo apoio durante o curso, ao tempo que eu me dediquei, pelo companheirismo e entendimento de que tudo foi necessário.

E por último, mas não menos importante, agradeço também aos meus colegas de curso. Ana, Ivani, Nathalia e Paulinette que me acompanharam na caminhada, agradeço pelos momentos de estudo e união, em especial ao meu amigo Cêrvulo Augusto, que trabalha junto comigo e que muitas vezes me motivou a não desistir, sentirei saudades de todos vocês.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES)

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar a aplicabilidade em sala de aula de uma balança de torque virtual, criada para representar de forma interativa uma equação do 1º grau. Basearemos a nossa análise na teoria da aprendizagem significativa, compreendendo a aquisição de conhecimento como um processo construtivo/individual e ao mesmo tempo, resultante de interações sociais amplas. Propusemo-nos, então, a adotar uma abordagem teórica que dialogue com o construtivismo piagetiano e o humanismo inspirado em Paulo Freire. Para o trabalho de campo, foram envolvidos 112 alunos de quatro turmas de 9º ano da E. E. João Gonçalves Neto. A balança de torque virtual, enquanto permite a manipulação de pesos de valores positivos e negativos, visa contribuir com o ensino do método formal de resolução de equações, o qual consiste em realizar operações compensatórias em ambos os lados da equação. Apesar do interesse gerado pelo uso do modelo de equilíbrio e as suas possibilidades, e mesmo levando em conta o empenho em aprender dos alunos envolvidos no estudo, a análise do raciocínio desenvolvido e dos resultados nas avaliações sugere que os alunos expressaram uma defasagem acentuada no domínio de habilidades que, supostamente, deveriam ter sido consolidados em etapas anteriores. Neste sentido, dificuldades nas operações básicas de adição e subtração com números decimais foram constatadas. Mesmo reconhecendo tais dificuldades, nosso trabalho traz indícios de resultados animadores obtidos pelo uso da ferramenta aqui analisada.

Palavras-chave: Ensino de Equações. Aprendizagem significativa. Balança de torque virtual. Números negativos em balança virtual.

## **ABSTRACT**

The present work aims to analyze the applicability in the classroom of a virtual torque scale, created to interactively represent a 1st degree equation. We will base our analysis on the theory of meaningful learning, understanding the acquisition of knowledge as a constructive/individual process and, at the same time, resulting from broad social interactions. It is therefore necessary to adopt a theoretical approach that dialogues with Piagetian constructivism and humanism inspired by Paulo Freire. For the fieldwork, 120 students from four 9th grade classes at João Gonçalves Neto state school were involved. The virtual torque balance, while allowing the manipulation of weights of positive and negative values, aims to contribute to the teaching of the formal method of solving equations, which consists of carrying out compensatory operations on both sides of the equation. Despite the interest generated by the use of the equilibrium model and its possibilities, and even taking into account the commitment to learning of the students involved in the study, the analysis of the reasoning developed and the results in the evaluations suggests that the students expressed a marked gap in the domain skills that, supposedly, should have been consolidated in previous stages. In this sense, difficulties in the basic operations of addition and subtraction with decimal numbers were observed. Even acknowledging such difficulties, our work shows signs of encouraging results obtained by using the tool analyzed here.

**Keywords:** Teaching Equations. Meaningful learning. Virtual torque scale. Negative numbers on virtual scale.

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

Abreviaturas utilizadas neste trabalho:

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
COVID-19	Corona Virus Disease 2019
CAP	Campus Alto Paraopeba
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFSJ	Universidade Federal de São João del Rei

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – A balança de torque virtual.....	12
Figura 2.1 – Gráfico de aprendizagem autônoma ou recepção x significativa ou mecânica..	25
Figura 3.1 – Balança de dois pratos.....	27
Figura 3.2 – Interface inicial do programa.....	28
Figura 3.3 – Balança virtual sem pesos.....	29
Figura 3.4 – Balança virtual em desequilíbrio.....	29
Figura 3.5 – Balança virtual em equilíbrio.....	30
Figura 3.6 – Balança virtual com representação de valores negativos.....	30
Figura 3.7 – Balança virtual no modo desafio em desequilíbrio.....	31
Figura 3.8 – Balança virtual no modo desafio em equilíbrio.....	31
Figura 4.1 – Princípio de alavanca.....	35
Figura 4.2 – Lados da balança.....	36
Figura 4.3 – Resposta do item b.....	37
Figura 4.4 – Resposta errada do item a.....	39
Figura 4.5 – Resposta correta do item a.....	40
Figura 4.6 – Representação com balões.....	42
Figura 4.7 – Solução trivial.....	43
Figura 4.8 – Desafio proposto ao aluno.....	44
Figura 4.9 – Desafio equilibrado pelo aluno.....	44
Figura 4.10 – Resposta correta a representação algébrica.....	45
Figura 4.11 – Desafio 1.....	46
Figura 4.12 – Desafio 2.....	46
Figura 4.13 – Desafio 3.....	46
Figura 4.14 – Desafio 4.....	46
Figura 4.15 – Desafio 5.....	47
Figura 4.16 – Resolução dos desafios.....	47
Figura 5.1 – Peso desconhecido.....	51

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEORICA.</b>	<b>14</b>
2.1 Contribuições de Jean Piaget para a Teoria do Conhecimento.....	14
2.2 Práticas pedagógicas e metodologia de Paulo Freire.....	18
2.3 A Teoria de aprendizagem significativa de David Ausubel.....	24
<b>3 A BALANÇA VIRTUAL</b>	<b>27</b>
3.1 O porquê da balança virtual.....	27
3.2 A criação da balança de torque virtual.....	27
3.3 O modo livre.....	28
3.4 O modo desafio.....	31
<b>4 A BALANÇA VIRTUAL NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM</b>	<b>33</b>
4.1 Descrição da escola/campo.....	33
4.2 Sujeitos da pesquisa.....	33
4.3 Aula expositiva e avaliação diagnostica.....	34
4.4 Relato da experiência no laboratório de informática.....	36
4.4.1 Aula 1 – Conhecendo a balança.....	36
4.4.2 Aula 2 – Hipóteses de solução.....	40
4.4.3 Aula 3 - Introduzindo os números negativos.....	41
4.4.4 Aula 4 – Introduzindo uma incógnita.....	43
4.4.5 Aula 5 – Representação algébrica da balança.....	45
4.4.6 – Aula 6 - O modo desafio completo.....	46
4.5 Aplicação da avaliação pós utilização da balança.....	48
<b>5 ANÁLISE DO TRABALHO DE CAMPO</b>	<b>49</b>
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>54</b>
7 REFERÊNCIAS.....	56
ANEXO 1 – AVALIAÇÃO.....	58

# 1 INTRODUÇÃO

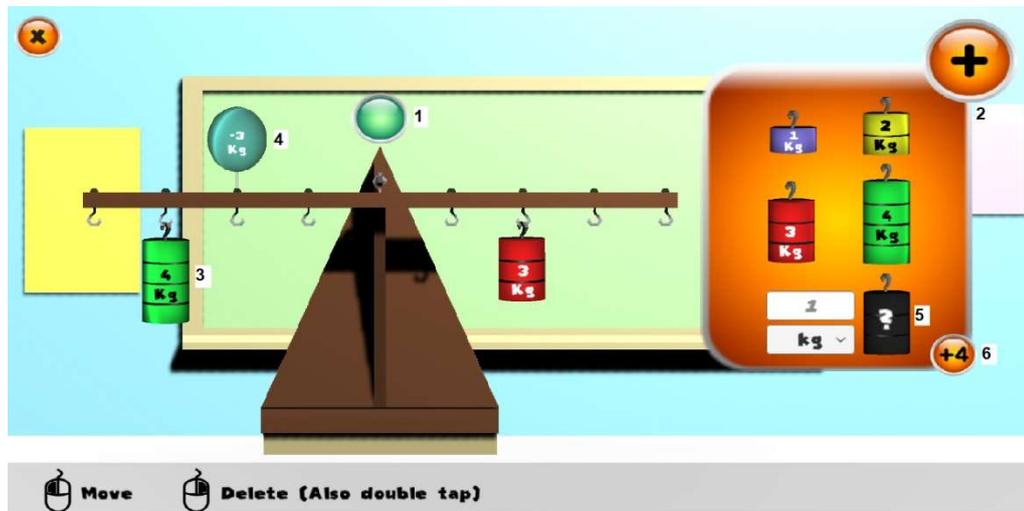
Nos dias atuais, é cada vez mais difundida a utilização de tecnologias e ferramentas modernas para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Neste contexto surge a balança de torque virtual, que tem como objetivo principal fornecer aplicações práticas de conceitos matemáticos, especificamente de equações do 1º grau, em situações reais de equilíbrio. O usuário pode interagir com a balança, inserindo pesos e/ou balões, estes últimos correspondentes a valores negativos. O presente trabalho tem como objetivo avaliar o impacto desta ferramenta no aprendizado de alunos da Escola Estadual João Gonçalves Neto. Foram observadas quatro turmas de 9º ano ao fazerem uso da balança virtual, a fim de identificar transformações no processo de ensino e aprendizagem de equações do 1º grau. Portanto, espera-se sair do modelo tradicional de ensino de equações do 1º grau, que se baseia principalmente em definições, regras e exercícios, para uma abordagem mais dinâmica e interativa, o que pode afetar positivamente a motivação e a compreensão dos alunos.

Durante nossas experiências como professor de matemática, notamos que nossos alunos apresentam dificuldades em relação à compreensão e resolução de equações do primeiro grau. É possível observar que os alunos desenvolvem a resolução de equações por meio de procedimentos mecânicos. Isso significa que, muitas vezes, apresentam procedimentos que evidenciam a não compreensão de conceitos relacionados à aritmética e à álgebra, necessários para justificar tais procedimentos.

Segundo Lorenzato (2006, p.53) “Ensinar matemática utilizando-se de suas aplicações torna a aprendizagem mais interessante e realista e, por isso mesmo, mais significativa”. Diante desse direcionamento, passar pela experiência de resolver equações realizando analogias com a balança de torque virtual realmente poderá fazer com que seja possível compreender a aplicação dos princípios de equivalência das igualdades e as operações inversas ao resolver uma equação. A proposta da utilização da balança visa incentivar o aluno a desenvolver o pensamento algébrico, compreender e construir significados para os conceitos abstratos encontrados na resolução de equações de 1º grau com uma variável.

Na página a seguir, a figura mostra uma possível situação de equilíbrio da balança que será utilizada nesse trabalho, além de exemplificar alguns de seus componentes, posteriormente, iremos abordar mais detalhadamente seu funcionamento.

**Figura 1.1:** A balança de torque virtual.



Fonte: Arquivo Pessoal

- 1- Led de luz verde, representando que a balança está em equilíbrio.
- 2- Botão (+) abre o quadro que está do lado direito, contendo os pesos de 1,2,3 e 4 quilos e também a possibilidade de gerar outros pesos.
- 3- Peso de 4kg já posicionado no gancho e assim gerando uma força para baixo, que representa um valor positivo.
- 4- Balão de -3kg já posicionado no gancho e assim gerando uma força para cima, que irá representar os valores negativos.
- 5- O peso com interrogação é responsável por gerar qualquer valor numérico, seja ele peso ou balão.
- 6- O botão (+4) serve para gerar 16 pesos de 1,2,3 e 4 quilos, que ficarão à disposição do usuário.

Na sequência deste texto, apresentamos nossos posicionamentos teóricos relacionados ao processo de aprendizagem, a importância dos processos sociais e do ensino como ferramenta de libertação, e a importância da aprendizagem se inserir em contextos significativos. Discorreremos, também sobre a prática durante a utilização da balança de torque virtual, mostrando como foi a abordagem, observação e análise do processo investigativo do trabalho. Finalmente, apresentamos nosso posicionamento e conclusões a respeito do uso da balança de torque virtual, como método de ensino de equações.

Justifica-se este estudo, pela importância da matemática como organizadora do pensamento, afim de desenvolver autonomia do aluno. Pretendemos propiciar aos alunos a compreensão de que a matemática não é somente um conjunto de técnicas, contas, exercícios,

e de fórmulas para calcular. Desejamos que eles percebam o fascínio que apenas essa disciplina pode proporcionar, ao integrar, modelar e equacionar de maneira tão encantadora a realidade que nos cerca.

Esse trabalho foi realizado na intenção de apresentar ao educador uma proposta de atividade para enriquecer suas aulas, tornando-as mais atrativas. Com essa proposta didático-metodológica deseja-se que, ao final das atividades, os alunos possam dar sentido, e reconhecer padrões em situações diversas, e que sejam capazes de aplicar, quando viável, os conceitos aqui apresentados.

## **2 FUNDAMENTAÇÃO TEORICA**

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos advindos de teorias que discorrem sobre o processo de ensino/aprendizagem. Destacamos o ponto de vista de três autores que dedicaram parte de seus esforços para tentar esclarecer o processo de aprendizagem nos seres humanos enquanto indivíduos pensantes e enquanto participantes de grupos sociais diversificados. Pretendemos assim, apoiar nossas análises sobre os impactos de um modelo de balança de torque digital no processo de ensino e aprendizagem de equações.

### **2.1 Contribuições de Jean Piaget para a Teoria do Conhecimento**

Jean Piaget (1896-1980) foi um psicólogo, biólogo e pensador suíço. É amplamente conhecido por seu trabalho sobre o desenvolvimento cognitivo, bastante significativo para inúmeros estudos em psicologia e pedagogia até os dias atuais. Durante a maior parte de sua carreira, Piaget interagiu com crianças, observando e estudando seu desenvolvimento, levando à criação de uma epistemologia genética e de uma teoria do conhecimento.

Seu principal objetivo foi compreender como o conhecimento é construído, ou seja, como os indivíduos se apropriam de estruturas cada vez mais aperfeiçoadas enquanto procuram resolver desafios mentais. A essa proposta de pensamento de como o desenvolvimento vai se constituindo é dado o nome de construtivismo cognitivo.

Segundo Piaget, o conhecimento não está no sujeito-organismo, nem mesmo no objeto-meio, mas é o resultado da interação contínua entre ambos. Para Piaget o pensamento surge na ação, e para compreender a origem das operações intelectuais é imprescindível observar a experiência que o sujeito tem com o objeto. Uma criança pequena, por exemplo, pode ter uma compreensão de número adquirida da contagem e, se essa compreensão não é desafiada, pode-se considerar que essa criança está “equilibrada”, ou seja, satisfeita com seu desempenho cognitivo. No entanto, em algum momento de sua vida, tal criança pode se confundir quando, por exemplo, pensa que 6 tampinhas podem ser mais que 7. Isso ocorre se um adulto coloca dois conjuntos de tampinhas um diante do outro sendo que a linha que une as 6 tampinhas ocupa maior comprimento que a linha que une as 7. Se a criança se sente insatisfeita com a contradição entre o que a contagem informa e o que a percepção visual a faz inferir, ela atinge um desequilíbrio. Nessa condição, a criança reconhece a necessidade de encontrar uma explicação capaz de superar a contradição percebida. Quando ela constrói tal compreensão, atinge um estágio de “equilíbrio majorante”, como o próprio Piaget denominou. (FREZZA e MARQUES, 2009).

Processos de desequilíbrio e equilíbrio majorante se sucedem constantemente:

“O desenvolvimento mental é uma construção contínua, comparável à edificação de um grande prédio que, à medida que se acrescenta algo, ficará mais sólido, ou à montagem de um mecanismo delicado, cujas fases gradativas de ajustamento conduziram a uma flexibilidade, e uma mobilidade das peças” (PIAGET, 1983, p. 12).

Piaget propõe pensar o desenvolvimento cognitivo infantil em quatro etapas: sensório-motor; pré-operatória; etapa de operações concretas e etapa das operações formais. Esses estágios vão desde o nascimento da criança até a adolescência, período em que as habilidades necessárias para o raciocínio lógico e abstrato, via de regra, são alcançadas.

Cada estágio é caracterizado pelo surgimento de estruturas originais, que diferem das anteriores em termos de propriedades, coordenação, e expansão do campo de aplicação. Essas estruturas correspondem a características transitórias que mudam com o desenvolvimento posterior, dependendo da necessidade de melhor organização, ou de acordo com Piaget: “cada estágio constitui então, pelas estruturas que o definem, uma forma particular de equilíbrio, efetuando-se uma evolução mental no sentido de uma equilíbrio sempre mais completa” (PIAGET, 1967, p. 14).

A fase sensório-motora ou pré-linguística compreende desde o nascimento até cerca dos dois anos de idade. Nesse período, a criança começa a desenvolver a capacidade de controlar os seus reflexos e desenvolve, gradualmente, sua coordenação motora. Pode coordenar suas ações e integrar informações que recebe pelos sentidos. Restringe-se ao real, elabora uma percepção do próprio corpo e dos objetos. O conjunto de subestruturas cognitivas, ou esquemas de assimilação desenvolvidos durante este período servirá de base para a construção de futuras estruturas de desenvolvimento.

O período pré-operatório, dos dois anos de idade até cerca dos sete, a criança adquire a capacidade de desenvolver o pensamento simbólico, incluindo a capacidade de representação de objetos ou acontecimentos. Nessa fase, por exemplo, a palavra cachorro já pode gerar a imagem mental do animal, mesmo que não haja nenhum cachorro dentro do campo de visão da criança. Essa fase torna possível também, por exemplo, a aquisição de parte da linguagem escrita e apropriação do uso de símbolos coletivos.

O egocentrismo é outra característica desse segundo estágio. Para uma criança que está no início desse período existe apenas a perspectiva dela, ou seja, a criança entende o mundo somente considerando as suas próprias experiências, sendo incapaz de se colocar no lugar do outro. Só a partir de cerca de quatro anos de idade que o egocentrismo começa a abrandar, quando o desenvolvimento cognitivo, segundo Piaget, proporciona aos pequenos o entendimento de que os outros podem ter opiniões, desejos e sentimentos diferentes dos deles.

No período das operações concretas, dos sete anos de idade até por volta dos doze, ocorre o desenvolvimento de alguns conceitos. A criança adquire a aplicação de princípios lógicos, a capacidade de realizar ações em seus pensamentos, relacionadas às ideias e memórias. Intuições articuladas se transformam em operações, classificação, ordenamento, correspondência, além de se observar o surgimento das noções de tempo, causalidade, conservação, entre outras. Entretanto, o pensamento ainda conserva seus vínculos com o mundo real, isto é, as operações se prendem às experiências concretas, não envolvendo, necessariamente, operações de lógica de proposições.

Finalmente, a partir dos doze anos de idade, começa a ser alcançada a independência do real, surgindo o período das operações formais. Esse estágio é caracterizado pela capacidade de administrar o pensamento abstrato, de gerar hipóteses e de investigar as possíveis consequências de hipóteses levantadas. Trata-se da aquisição de premissas do pensamento científico: o agora adolescente pode não só raciocinar sobre coisas reais, como também desenvolver suas próprias teorias e reflexões sobre o mundo.

Sendo assim, uma pergunta a se fazer é: Quais são os fatores ou condições que influenciam a criança a progredir nas etapas de desenvolvimento?

Observa-se que o processo de crescimento genético é uma condição necessária, na perspectiva de ser uma base, para a continuação do processo de formação do indivíduo. Porém, o crescimento genético, não explica todo o desenvolvimento humano, desempenhando o papel limitado de criar possibilidades para novos comportamentos, que precisarão ser compreendidos. Desta forma, faz-se necessário, que sejam consideradas outras condições, das quais a mais imediata é a experiência.

Quanto à experiência, Piaget estabelece dois tipos distintos: o primeiro, a experiência física, a qual está relacionada a conteúdos assimilados, e consiste em agir sobre os objetos, no intuito de abstrair e compreender suas propriedades. Outro tipo é a experiência lógico-matemática, que revela um aspecto construtivo da própria experiência física. Consiste também em agir sobre os objetos para abstrair e compreender suas propriedades, mas gerando um conceito importante de causalidade, ou seja, a experiência lógica-matemática não é um

simples registro de dados, mas uma estruturação ativa e assimiladora de quadros lógicos internos.

A comunicação social por meio da linguagem, educação ou contatos sociais mais amplos é um fator necessário porque as crianças transitam entre uma grande quantidade de conteúdos socialmente compartilhados. No entanto, cada criança somente assimilará informações que estejam de acordo com o conjunto de estruturas associadas ao seu nível de pensamento. Piaget (1982) afirmou que um grande erro da escola tradicional consiste em imaginar que a criança só precisa absorver o conteúdo que foi proposto, como se a transmissão não dependesse da capacidade de assimilação interna do indivíduo para promover uma reestruturação e, desta forma, uma correta compreensão do que foi transmitido.

O equilíbrio da compreensão é considerado por Piaget como fundamental, uma vez que completa um ciclo de aprendizagem e, ao mesmo tempo, evidencia que não se trata de um fenômeno pré-estabelecido no desenvolvimento das estruturas mentais do indivíduo. “A evolução ocorre sempre na direção de um equilíbrio, mas sem um plano preestabelecido, assim como a marcha para o equilíbrio da entropia em termodinâmica” (PIAGET; INHELDER, 1978, p. 134), ou seja, o equilíbrio depende da ação do sujeito sobre os distúrbios externos e, ao mesmo tempo, da ação do meio sobre o sujeito.

Observa-se então que, para Piaget (1964), o sujeito é um organismo que possui estruturas sempre dinâmicas, as quais determinam respostas aos estímulos do meio. Nesse sentido, o estímulo só será estímulo se for significativo e será significativo, se e somente se, existir uma estrutura que permita sua assimilação. Assim, Piaget procurou entender como essa estrutura age sobre o estímulo para fornecer a resposta.

Em sua obra *Para onde vai a educação?* (1973), Piaget afirma, que o futuro do ensino deve estar cada vez mais aberto à interdisciplinaridade e às necessidades cotidianas. Para isso, o ambiente de aprendizagem, deve dispor de práticas pedagógicas que estimulem os alunos, para que os mesmos possam evoluir suas estruturas de conhecimento. Podemos inferir que os educandos devem ser expostos a experiências concretas variadas pois, para Piaget, se os indivíduos não passarem pela experiência será adestramento e não educação.

O professor, nesse contexto, assume a posição de colaborador, ou seja, incentiva o indivíduo a realizar suas experiências e chegar às suas próprias conclusões. Piaget reconhece que o professor tem papel decisivo na prática educativa, enquanto estimula o processo de apropriação, por parte dos alunos.

Nesse sentido, a utilização da balança de torque virtual, é interessante, pois provoca no educando um sentimento de curiosidade, o que, em princípio, enriquece o conteúdo que está

sendo desenvolvido, em sala de aula e no laboratório de informática. Nosso trabalho será o de observar o comportamento espontâneo dos alunos diante da balança, observar do comportamento provocado por uma situação experimental e estabelecer um diálogo compreensível entre professor e aluno.

Também, iremos nos apropriar de algumas ideias de Piaget, com intuito, de fazer uma melhor análise sobre a utilização do modelo de equilíbrio, e seus possíveis ganhos ou dificuldades na construção e reestruturação do conhecimento. Desse modo, acreditamos estar melhor capacitados para avaliar os motivos do que percebemos como aprendizado ou como não aprendizado por parte dos alunos.

Todavia a teoria do conhecimento cognitivo de Piaget, não leva suficientemente em consideração aspectos históricos, econômicos, e culturais que estão profundamente presentes no cotidiano da escola onde foi desenvolvido esse trabalho. Faz-se necessário, a nosso ver que, além de conhecermos a ideias de Piaget, procuremos por abordagens que priorizem interações sociais mais amplas.

## **2.2 Práticas pedagógicas e metodologia de Paulo Freire**

Paulo Freire foi um educador e filósofo brasileiro, um dos pensadores mais notáveis na história da pedagogia mundial. O projeto educacional de Paulo Freire baseia-se em uma pedagogia crítica, na qual a prática é construída com base no reconhecimento da perspectiva do educando, visando a conquista da autonomia e do pensar crítico.

Embora a expressão "Método Paulo Freire" aparentemente se apresente hoje como uma expressão universalizada, referência de uma concepção democrática, crítica e progressista de prática educativa, o próprio Paulo Freire tem uma visão diferente a respeito de suas ideias. Em entrevista concedida a Nilcéia Lemos Pelandré, em 14/04/1993, ele diz o seguinte:

Eu preferia dizer que não tenho método. O que eu tinha, quando muito jovem, há 30 anos ou 40 anos, não importa o tempo, era a curiosidade de um lado e o compromisso político do outro, em face dos renegados, dos negados, dos proibidos de ler a palavra, relendo o mundo. O que eu tentei fazer e continuo hoje, foi ter uma compreensão que eu chamaria de crítica ou de dialética da prática educativa, dentro da qual, necessariamente, há uma certa metodologia, um certo método, que eu prefiro dizer que é método de conhecer e não um método de ensinar. (PELANDRÉ, 1998:298).

Em termos de organização e prática pedagógica, Paulo Freire defende que o educando conquistará sua identidade quando admitir um caráter próprio de crítica e autocrítica constante. Freire defende a educação como prática da liberdade, portanto a educação não pode ser feita por meio do simples depósito de conhecimentos do educador sobre o educando. A educação é proposta como uma prática de diálogo constante, na qual “quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender.” (FREIRE, 1992, p. 42)

Nessa perspectiva dialética, a aquisição do conhecimento consiste em um processo dinâmico e em constante construção. Esse processo exige rigorosidade de todos os envolvidos, pois tanto educando quanto educador são convidados a refletir sobre as práticas de aprendizagem por eles exercidas. Paulo Freire afirma que:

Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino [...] enquanto ensino continuo buscando, procurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade. (FREIRE, 1996, p. 32)

A partir daí podemos assumir que a pesquisa está presente no dia a dia do professor. O processo de ensino e aprendizagem pode se realizar de maneira significativa, uma vez que o professor assume uma postura investigativa e incentiva seus educandos pelo exemplo. Ele estimula os alunos a adotar o pensamento crítico a respeito dos problemas cotidianos. O professor disponibiliza ferramentas para que os aprendizes possam explorar e ampliar os seus conhecimentos. O processo educativo visa construir um modelo de cidadania e possibilitar que o sujeito tome decisões mais perspicazes a respeito de sua realidade.

É de suma importância que o professor busque sempre ampliar seus conhecimentos e tente sempre reinventar seus métodos e práticas em sala de aula e fora dela.

O professor que não leve a sério sua formação, que não estude, que não se esforce para estar à altura de sua tarefa, não tem força moral para coordenar as atividades de sua classe (...), significando que a incompetência profissional desqualifica a autoridade do professor. (FREIRE, 1996, p.92)

Reconheço ser de extrema importância a formação acadêmica dos professores, posto que os conhecimentos trabalhados na prática docente não devam estar distantes das exigências da vida social, devendo estar atrelados a projetos de intervenção na realidade. Paulo Freire inspira a construção de uma percepção de mundo ao qual o sujeito está inserido. Isso permite que o mesmo tome decisões ao identificar os limites atribuídos pela realidade social, tornando claro o nexos lógico entre os problemas vividos e aqueles abordados em sala de aula. Ao

descobrirem limites que a realidade lhes impõe, professores e alunos conseguirão decidir de modo crítico suas ações como sujeitos plenos de cidadania.

A ação pedagógica segundo Freire é um ato de conscientização a respeito da realidade, ou seja, o professor precisa se voltar para o educando e sua visão de mundo com o intuito de definir e elaborar estratégias necessárias para que o educando possa expandir e produzir conhecimentos, interpretações sobre sua própria prática social e, conseqüentemente, possa caminhar na direção de se tornar um sujeito crítico e capaz de fazer mudanças no meio em que vive.

Para que o conteúdo escolar se torne uma ferramenta do pensamento do aluno, na qual o aluno possa se embasar para a tomada de decisões, é necessário que exista em sala de aula um diálogo que procure atribuir significados às experiências sociais. Tal diálogo leva em consideração o conhecimento já alcançado pelo aluno, para o estimular a ultrapassar limites e expandir suas capacidades.

O professor precisa reconhecer a importância da relação entre o saber científico e o saber cotidiano para construir estratégias visando uma aprendizagem significativa. Caso contrário, o processo de ensino e aprendizagem será mecânico e sem sentido, o que, nas ideias de Freire identifica um ensino bancário, no qual a educação é:

[...] o ato de depositar, de transferir, de transmitir valores e conhecimentos [...] Dai, então, que nela:

- a) o educador é o que educa; os educandos, os que são educados;
  - b) o educador é o que sabe; os educandos, os que não sabem;
  - c) o educador é o que pensa; os educandos, os pensados;
  - d) o educador é o que diz a palavra; os educandos, os que a escutam docilmente;
  - e) o educador é o que disciplina; os educandos, os disciplinados;
  - f) o educador é o que opta e prescreve sua opção; os educandos os que seguem a prescrição;
  - g) o educador é o que atua; os educandos, os que têm a ilusão de que atuam, na atuação do educador;
  - h) o educador escolhe o conteúdo programático; os educandos, jamais ouvidos nesta escolha, se acomodam a ele;
  - i) o educador identifica a autoridade do saber com sua autoridade funcional, que opõe antagonicamente à liberdade dos educandos; estes devem adaptar-se às determinações daquele;
  - j) o educador, finalmente, é o sujeito do processo; os educandos, meros objetos.
- (FREIRE, 1987, p. 34)

Paulo Freire (1987) faz diversas observações a respeito de como pode ser o planejamento do professor, sugerindo que, ele se coloque como um mediador de conhecimentos, a fim de construir uma ação educativa libertadora, transitando por diferentes fases: investigações, codificações, descodificações, imersões e reduções.

Freire (1996, p.12) propõe um ensino incorporado à produção e construção de conhecimentos por meio de uma abertura para questionamentos e expressão de curiosidades, sendo estimulador do ser crítico no educando. Nessa perspectiva é indicado que a autoridade do professor quanto às decisões de sala, orientação de atividades, cobrança de produção individual ou coletiva não se confunda com autoritarismo. Advém daí a ideia de respeito às necessidades e realidades de cada aluno, uma perspectiva que entende o professor como também um pesquisador.

Paulo Freire (1996) defende que a prática pedagógica precisa ter rigorosidade metódica. Significa evidenciar uma forma de ensinar na qual os educadores e educandos criem ambientes que possibilitam o cultivo da curiosidade e do pensamento crítico. Nesse ambiente, educando e educador, são convidados a adotar uma postura de autorreflexão da prática, ou de construção da práxis. A proposta é desafiadora, pois o pensar crítico jamais será algo dado; ele envolve um movimento dialético, dinâmico entre o agir e o pensar, ou seja, a reflexão crítica sobre a prática serve como base para novas ações, novas reflexões e assim sucessivamente.

Nesse ambiente educativo espera-se que os envolvidos se reconheçam como sujeitos históricos e contraditórios, ou seja, como pessoas que estão em permanente construção de si mesmas. O educador não considera apenas os conteúdos programáticos formais, mas abre-se ao diálogo em sala de aula. Por meio do diálogo com o outro, surgem elementos que proporcionam o pensamento crítico. Professor e aluno percebem-se como seres incompletos estando em constante aprendizagem. São capazes de aprender e ensinar ao mesmo tempo e, de forma dialógica, intervir no mundo, decidir, romper e transformar enquanto assumem uma constante busca para superar seu nível de inacabamento.

Portanto, o ato de conhecer e conceituar para a pedagogia freiriana requer uma disposição de abertura e intencionalidade da consciência. A intencionalidade é o principal elemento, ou seja, é preciso que o aluno queira aprender, visto que o conhecimento não se dá de forma espontânea; logo o educando precisa estar aberto a novas ideias para que o processo de aprendizagem aconteça de forma eficiente.

Entendo que, como professores, somos desafiados a fomentar e estimular essa intencionalidade em aprender, a compreender a curiosidade como inquietação, indagação ou como vontade de desvendar algo, como uma procura pelo esclarecimento. O desafio consiste em estimular a curiosidade, assumida como algo inerente ao ser humano, trazer para a sala de aula a vontade de aprender, assim como uma criança tem vontade de explorar e conhecer o mundo.

Ao reconhecer que a curiosidade é algo fundamental para o conhecimento, pois é a partir dela que iremos questionar o mundo e sem o questionamento não podemos aprender ou nem mesmo ensinar, verificamos a necessidade de adotar uma prática pedagógica que inclua ações provocativas em sala de aula. Tal prática visa estimular o educando, provocar nele uma curiosidade crescente. Essa metodologia se guiaria pelo princípio que aceita o fato de que quanto mais se exerce a curiosidade de forma crítica, mais se desenvolve a capacidade de aprender, a capacidade de construir saberes que antes não eram pertencentes ao educando.

Coloca-se, então, uma questão para o professor: como estimular a curiosidade e atenção do aluno em pleno século 21, quando tecnologias digitais altamente avançadas tomam conta do cotidiano, com oferta de aparelhos cada vez mais modernos e cheios de funções bastante atrativas para crianças e adultos?

Paulo Freire entendia a tecnologia como uma das “grandes expressões da criatividade humana” (1975, p. 98) e como “a expressão natural do processo criador em que os seres humanos se engajam no momento em que forjam o seu primeiro instrumento com que melhor transformam o mundo” (1975, p. 98). A tecnologia faz “parte do natural desenvolvimento dos seres humanos” (1975, p. 98), e é elemento para a afirmação de uma sociedade.

Freire reconhece as exigências do seu tempo e as potencialidades dos recursos tecnológicos, sendo favorável ao uso de máquinas/técnicas com rigor metodológico para o seu uso. Ele incorporou em sua docência o uso de tecnologias no campo da educação, como slides, rádio, televisão, gravadores, computadores, na época, sendo utilizados especialmente para a alfabetização.

Uma outra característica importante de ser citada consiste na politicidade da tecnologia. A tecnologia, como toda prática humana, é política, é permeada pela ideologia. O uso que se faz da tecnologia não é neutro, é intencional. Não se produzem nem se usam tecnologias sem uma certa visão de mundo, de homem e de sociedade que a fundamentem. Freire chega a afirmar que o problema atual não é tecnológico, mas político.

O problema é saber a serviço de quem eles (os computadores) entram na escola. Será que vai se continuar dizendo aos educandos que Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil? Que a revolução de 64 salvou o país? Salvou de que, contra que, contra quem? Estas coisas é que acho que são fundamentais. (FREIRE, 1984, p. 1).

O uso da tecnologia, para Paulo Freire, faz com que seja necessária uma devida preparação. É preciso que os envolvidos no processo não sejam alienados quanto ao uso, ou seja, o uso da tecnologia pelo educando precisa ser contrário à utilização de ferramentas apenas para facilitar o trabalho e sem o devido raciocínio sobre os processos envolvidos.

Quando os educandos somente realizam movimentos repetitivos, visando o imediatismo, sem a mínima noção do que fazem ou do que produzem, não se verifica a formação de educandos e educadores na perspectiva freiriana. A compreensão das intenções inerentes aos processos envolvidos tem importância marcante na proposta de Freire. Essa compreensão conduz os homens à sua própria humanização porque propõe uma concepção da tecnologia como suporte para a ideia de mundo, passível de transformação. Propõe-se evitar o que ele chama de *maquinização* ou animalização instintiva dos seres humanos (FREIRE; PASSETI, 1998, p. 87).

A tecnologia, além de ser compreendida, precisa ser contextualizada no ambiente educacional. O professor/pesquisador pode descobrir e estimular os interesses e as ideias inerentes às tecnologias em uso. Pode analisar os benefícios e as limitações do uso de cada uma. O uso da tecnologia, assim como qualquer outro método de ensino, pode ser avaliado em função de suas implicações na vida dos usuários, visando a melhor forma de incorporá-la para o bem daquele grupo, naquele contexto.

Freire defende que nossa atitude diante da tecnologia precisa ser criticamente curiosa, indagadora e constantemente vigilante. (FREIRE, 1992, p. 133).

Utilizando dos pensamentos, levantamentos teóricos e práticos, da visão de ensino que foi desenvolvida por Paulo Freire, surgiu a necessidade de elaborarmos atividades que sejam interessantes para os educandos, usando a tecnologia em nosso favor, e buscando sempre estimular o pensamento crítico. Nesse sentido, professores e pesquisadores foram incentivados a desenvolver e aplicar em sala de aula uma balança de torque virtual, a qual é o objeto de estudos desse trabalho. Essa balança tem como objetivo criar uma aproximação do ensino de equações matemática ao contexto social e às práticas do cotidiano dos educandos, tendo em vista uma melhoria no processo de ensino/aprendizagem.

### 2.3 A Teoria de aprendizagem significativa de David Ausubel

A fim de articular o construtivismo de Piaget e o humanismo de Paulo Freire, iremos utilizar a teoria de aprendizagem significativa desenvolvida por David Ausubel.

David Ausubel foi um psicólogo, educador e pesquisador estadunidense que trabalhou em áreas como a psicologia racial e o campo da aprendizagem. Ele obteve prestígio especialmente graças à sua teoria da aprendizagem significativa.

Sua teoria considera que um indivíduo aprende significativamente quando consegue relacionar uma nova informação, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, com uma estrutura de conhecimento específica, que faz parte integrante da sua estrutura cognitiva prévia. Esta estrutura é única, dotada de características individuais, e complexa. Nela estão contidas as afirmações e conceitos previamente aprendidos pelo indivíduo. Também inclui todos os componentes emocionais da pessoa e os resultados da totalidade de suas ações e experiências.

A aprendizagem significativa consiste no processo pelo qual o novo conhecimento a ser aprendido é associado a conceitos pré-existentes na estrutura cognitiva do sujeito. Supõe-se que tais conceitos são específicos e apropriados ao conteúdo que está sendo assimilado. Para que ocorra a aprendizagem, os assuntos a serem ensinados devem ter significado potencial, ou seja, devem ter sentido lógico para o aluno. A estrutura cognitiva do mesmo deve ter conceitos e proposições que sejam suficientemente adequadas para a aquisição do conhecimento. Vemos, portanto, uma similaridade com ideias piagetianas. Outra condição consiste no fato de os alunos estarem dispostos mentalmente a relacionar o novo conteúdo, com a sua estrutura cognitiva de modo substantivo e não arbitrário.

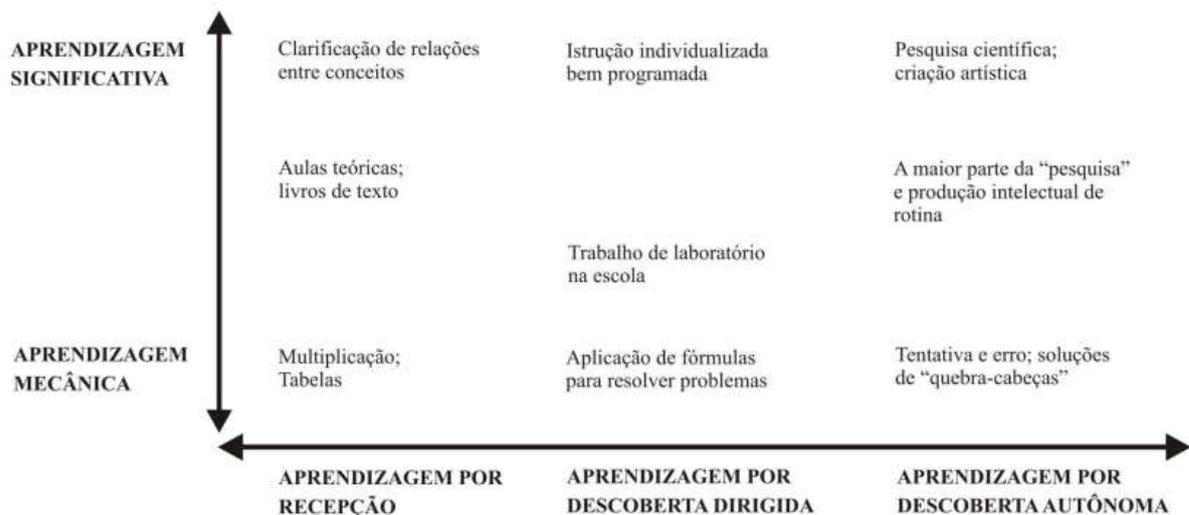
O oposto da aprendizagem significativa é a aprendizagem mecânica, literal, ou aprendizagem de memorização. Sendo mecânica, a nova informação apresentada ao aluno não interage com conceitos suficientes preexistentes na estrutura cognitiva. Isso se dá porque esses conceitos realmente não existem ou porque o aluno não quer se esforçar para confrontar a nova informação com conceitos já adquiridos. Tal confronto o permitiria analisar semelhanças e diferenças, para preencher lacunas eventualmente existentes entre os dois e finalmente, desencadear um processo de assimilação significativa.

Outra ideia muito valiosa de Ausubel é a constatação de que a aprendizagem pode ser significativa ou mecânica e isso não tem nada a ver com a maneira que a aprendizagem ocorreu, seja ela por descoberta autônoma, por descoberta guiada ou por recepção. Por exemplo, um aluno pode descobrir por si, por tentativas e sem ajuda, a forma de resolver um

desafio matemático e não compreender com rigor formal aquilo que realizou. Todavia, um aluno pode também assimilar significativamente um assunto que lhe foi exposto com toda a transparência conceptual, sem ter se esforçado para descobrir a estrutura conceptual desse assunto.

Ausubel classifica os tipos e os meios de aprendizagem em dois eixos de extremidades distintas, sendo aprendizagem mecânica - aprendizagem significativa (tipos) as extremidades de um dos eixos e aprendizagem por recepção – aprendizagem por descoberta (meios) as extremidades do outro

**Figura 2.1:** Gráfico de aprendizagem autônoma ou recepção x significativa ou mecânica



Fonte: Aprendizagem Significativa em Revista/Meaningful Learning Review – V1(1), pp. 36-57, 2011

A teoria da aprendizagem significativa preconiza um ensino investigativo baseado no pensamento crítico, sem afetar a capacidade do professor de ajudar os alunos a superar as dificuldades conceituais, por meio da intervenção. O professor precisa visar que a aprendizagem do aluno se aproxime cada vez mais das aprendizagens altamente significativas e por descoberta autônoma, caminhando assim para o ideal da produção de conhecimento científico ou da produção artística. Por suposição, essas são formas altamente originais e criativas de produção de novos conhecimentos.

Podemos inferir que os educadores precisam fazer “um esforço para integrar a psicologia da aprendizagem humana e a epistemologia da produção do conhecimento” (Novak, 1990, p. 17). Essa integração surge da ideia de ser possível a comunicação, discussão e mudança de significados por meio de uma teoria de aprendizagem baseada numa psicologia cognitivo-humanista. O construtivismo humano é, portanto, segundo Novak:

uma visão da criação de significados que engloba quer uma teoria da aprendizagem quer uma epistemologia da construção do conhecimento. Oferece o poder heurístico e válido de um modelo psicológico da aprendizagem humana, juntamente com o potencial analítico e explicativo englobado numa perspectiva filosófica única sobre a mudança dos conceitos (Mintzes e Wandersee, 2000, p. 58).

A teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel é uma teoria construtivista na medida em que defende o conhecimento como um processo construtivo. Valoriza o papel das estruturas cognitivas previamente existentes nos educandos e também é humanista na medida em que considera ideias, emoções, diferenças sociais, financeiras, ambientais e culturais como presentes na produção de sentido a ser atribuído às experiências vividas pelos alunos.

Consideramos ser pertinente trazer ideias de Ausubel aos nossos esforços para desenvolver e utilizar uma balança virtual. Ao verificar os resultados, poderemos pensar sobre estruturas cognitivas preexistentes nos alunos. Poderemos, também, avaliar se foi possível facilitar a assimilação de conteúdos matemáticos e, ainda, que significados os alunos teriam atribuído à prática proposta com exploração da balança e vinculação da mesma às equações do 1º grau.

### 3 A BALANÇA VIRTUAL

#### 3.1 O porquê da balança virtual

O uso de modelos de equilíbrio é bastante comum para o ensino da álgebra e de equações do 1º grau com uma incógnita. Um dos objetivos principais da utilização desse modelo consiste em demonstrar aos alunos o princípio de igualdade, quando o sinal correspondente passa a ter a propriedade de equivalência. O sinal pode estar situado entre duas expressões que levam ao mesmo resultado, como por exemplo:  $10+3=5+8$ . Outro objetivo é o de visualizar métodos formais de resolução de equações, a partir da equivalência da manipulação de pesos com a realização da mesma operação nos dois membros da equação.

Espera-se que o aluno desenvolva uma compreensão intuitiva de uma sentença aberta relativa a equações aritméticas antes mesmo de que lhe seja apresentado o verdadeiro significado de modelagem matemática. Ele passa a tomar posse gradualmente do processo de utilizar duas expressões para encontrar um valor particular do desconhecido.

Um dos modelos mais simples e mais encontrados na literatura voltada para o ensino de matemática é a balança de dois pratos, como pode ser visto na Figura 3.1, na qual se representa a equação:  $4x+5=3x+15$



Fonte: Clubes de matemática da OBMEP<sup>1</sup>

No entanto, o modelo de balança de dois pratos é omissivo na representação dos números negativos. Surge assim o desafio de que seja projetada uma balança que tenha a capacidade de modelar não somente o conjunto dos números racionais positivos ( $\mathbb{Q}^+$ ) mas também o simétrico desse conjunto.

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-pesando-caixas/>>. Acesso em: 20 de julho de 2023.

### 3.2 A criação da balança de torque virtual

Em 2017 um grupo de pesquisadores brasileiros cumpriram essa tarefa e desenvolveram um modelo de balança virtual capaz suprir essa necessidade. Essa balança virtual foi desenvolvida na plataforma Unity, um programa de computador para desenvolvimento de jogos eletrônicos.

O plano de acesso utilizado para a confecção da balança é o Unity Student, um dos pacotes gratuitos, onde o usuário tem as seguintes vantagens: acesso à última versão da plataforma Unity, o projeto desenvolvido na plataforma pode ter 5 colaboradores, todos os projetos e modificações são salvos de forma automática, o usuário tem acesso também aos tutoriais para aprendizagem de como programar na plataforma.

Por ter a característica de um jogo, a balança virtual que foi desenvolvida permite ao usuário uma maior interação com sua configuração, sendo possível criar e mover os pesos de lugar, excluir ou criar novos pesos, ou balões.

A interface inicial do programa, ou seja, assim que o usuário abre o aplicativo, é dada a possibilidade de escolher entre dois modos, o modo livre o modo desafio, como pode ser visto na Figura 3.2.

**Figura 3.2:** Interface inicial do programa



Fonte: Arquivo Pessoal

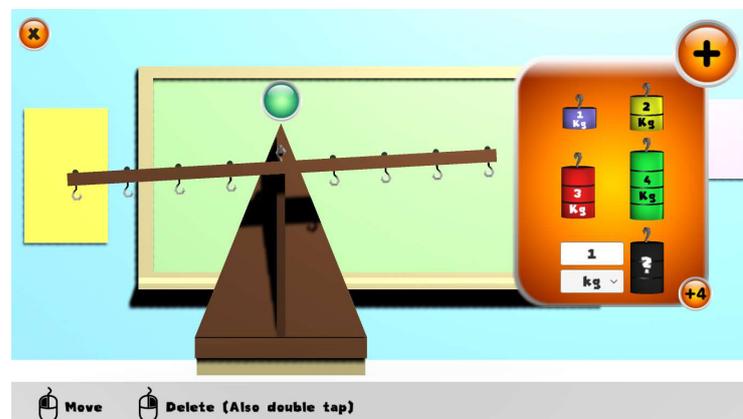
### 3.3 O modo livre

No modo livre o usuário, seja ele aluno ou professor, pode interagir com o modelo de equilíbrio a fim de conhecer todas as suas funcionalidades. No modo default, a escala utilizada para a medida de massa é o quilograma, sendo que o usuário pode mudar a escala para grama(g) ou qualquer outro múltiplo ou submúltiplo até uma casa decimal dessa medida

de massa. Vale ressaltar que, por se tratar de torque, ou seja, uma grandeza que envolve peso e distância, os pesos devem ser expressos em quilograma-força (kgf). Do mesmo modo, os valores atribuídos às forças associadas aos balões. Essa correção já foi indicada aos atuais responsáveis pelo desenvolvimento do software.

Os pesos de 1kg, 2kg, 3kg e 4kg já aparecem no modo default, basta que o usuário clique no sinal de + no alto do canto direito da tela, feito isso, basta que o usuário arraste o peso até o gancho desejado.

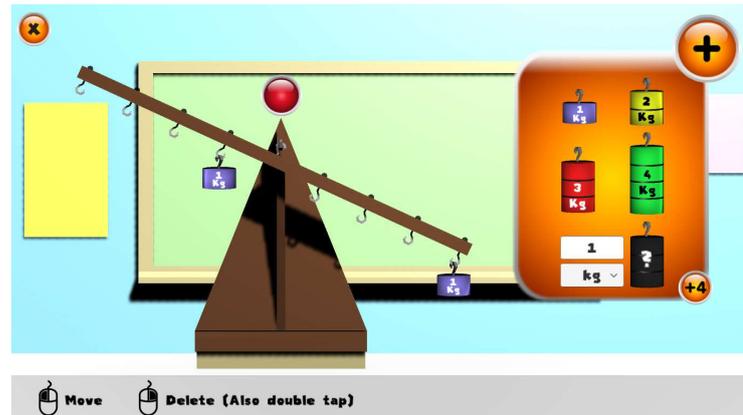
**Figura 3.3:** Balança virtual sem pesos



Fonte: Arquivo Pessoal

Como pode ser visto na Figura 3.3, o modelo conta com 4 ganchos de cada lado da haste, onde podem ser colocados os pesos, ou afixados balões. O equilíbrio depende do que chamamos de princípio da alavanca; portanto, deve-se considerar a relação de peso x distância do ponto de apoio ( $p \times d$ ) para que ele seja atingido, quando o equilíbrio é atingido a luz no topo da balança fica verde e o programa emite um sinal sonoro. Colocar, por exemplo, o mesmo peso em lados opostos, porém em ganchos de distância do centro diferentes não leva a balança ao equilíbrio, acendendo assim, uma luz vermelha, no topo da balança. Como pode ser visto na Figura 3.4.

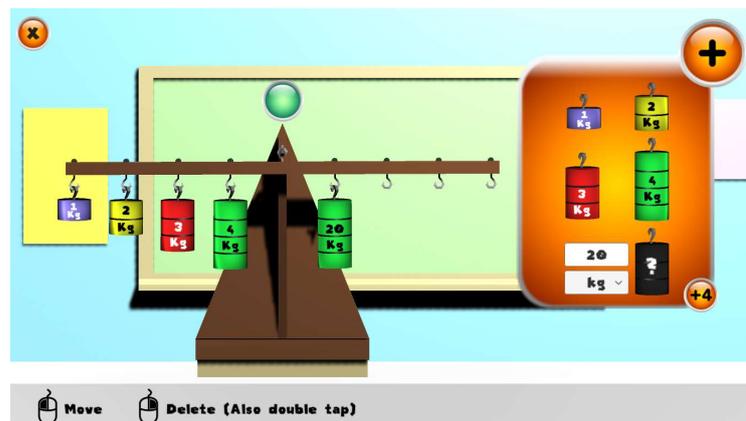
**Figura 3.4:** Balança virtual em desequilíbrio



Fonte: Arquivo Pessoal

Para que o usuário consiga obter o equilíbrio, a relação peso x distância do ponto de apoio deve resultar no mesmo valor em ambos os lados da balança. Um exemplo de equilíbrio está representado na Figura 3.5 com um pouco mais de complexibilidade:  
 $(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) = 1 \cdot 20$

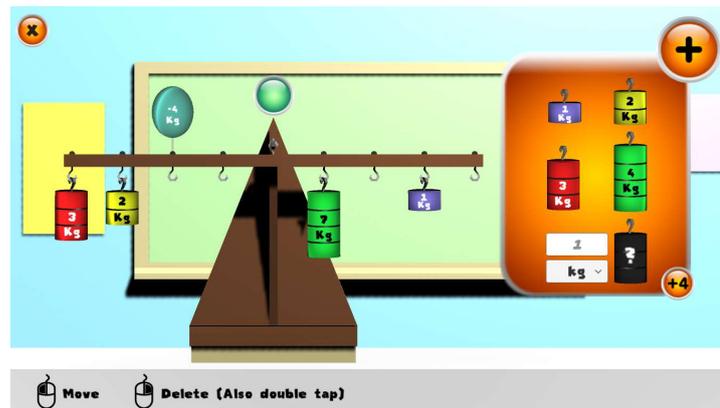
**Figura 3.5:** Balança virtual em equilíbrio



Fonte: Arquivo Pessoal

No modo livre o usuário pode também se familiarizar com a representação dos números negativos. Estes serão representados por balões que causam na balança uma força no sentido contrário ao da força gravitacional. Os pesos diferentes de 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, assim como os balões podem ser gerados clicando no peso de cor preta com a interrogação, após inserir o valor desejado na caixa de diálogo. Como pode ser visto a seguir, o equilíbrio é mantido quando a relação de peso x distância, resulta no mesmo valor, sendo  $(4 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (2 \cdot (-4)) = (1 \cdot 7) + (3 \cdot 1)$  o que resulta na igualdade  $10 = 10$ .

**Figura 3.6:** Balança virtual com representação de valores negativos

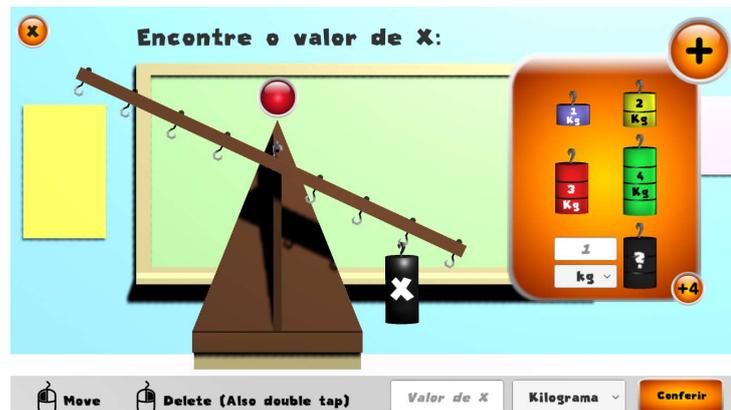


Fonte: Arquivo Pessoal

### 3.4 O modo desafio

No modo desafio é introduzido o peso desconhecido (incógnita) e o usuário deve primeiramente manipular os pesos na balança a fim de atingir o equilíbrio, para só então poder descobrir o valor do peso desconhecido. Na Figura 3.7 pode ser visto um desafio que foi proposto para que o usuário possa equilibrar e descobrir o valor do peso.

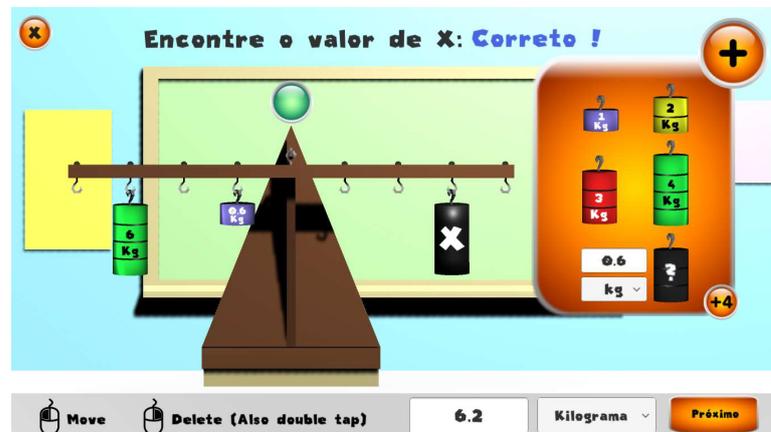
**Figura 3.7:** Balança virtual no modo desafio em desequilíbrio



Fonte: Arquivo Pessoal

Após algumas tentativas, alcançamos o equilíbrio, resultando na configuração representada abaixo, o que nos leva à equação:  $3 \cdot 6 + 0,6 = 3 \cdot x$ , ou simplificando,  $3x = 18,6$ . A equação tem como resultado o valor  $x = 6,2$ , ou seja, o peso desconhecido vale  $x = 6,2 \text{ kg}$ . Ao pressionar o botão de conferir o programa escreve ao usuário uma mensagem sinalizando se sua resolução está correta ou errada. Caso a resolução esteja correta, o usuário poderá clicar no botão “próximo”, que irá direcioná-lo para o próximo desafio.

**Figura 3.8:** Balança virtual no modo desafio em equilíbrio



Fonte: Arquivo Pessoal

Os desafios desse modo são gerados para o usuário de forma aleatória, não havendo nenhum tipo de classificação quanto à complexidade dos mesmos até o desenvolvimento de nosso trabalho. Sendo assim, os esforços da equipe de programação, nos dias atuais, estão sendo voltados a programar um nivelamento das dificuldades impostas em cada desafio. O usuário poderá começar a jogar no nível mais fácil e, à medida que vá avançando de fase, a complexidade dos desafios irá acompanhando o seu progresso dentro do jogo. Serão utilizados conceitos básicos de inteligência artificial para que o próprio software possa, através das interações com usuários, ir oferecendo desafios mais adequados conforme o desempenho demonstrado. Uma versão ainda não finalizada está sendo desenvolvida nesse sentido.

## **4 A BALANÇA VIRTUAL NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM**

Neste capítulo, iremos apresentar um pouco da estrutura física da escola onde o trabalho de campo foi realizado. Iremos também informar um pouco a respeito de algumas características dos alunos. Após tomarmos conhecimento das condições de trabalho, será apresentado a estrutura de organização das práticas desta pesquisa.

### **4.1 Descrição da escola/campo**

Esta pesquisa foi realizada em uma escola da rede estadual. Tal escola foi escolhida para a pesquisa pelo fato de o autor desse trabalho atuar ali como docente.

A escola atende à comunidade nos turnos manhã, tarde e noite. No turno da manhã, funcionam 18 turmas, sendo 10 turmas de Ensino Fundamental II, divididas em 5 turmas de 8º ano e 5 turmas de 9º ano. As outras 8 turmas são do ensino médio tempo integral (1º, 2º e 3º anos). No turno da tarde, a escola oferece mais 6 turmas do Ensino Fundamental II (6º e 7º) e também as turmas do Ensino Médio tempo integral (1º, 2º e 3º anos). No turno da noite, são oferecidas apenas 3 turmas de ensino médio regular (1º, 2º e 3º anos).

Notamos que o prédio da escola está em boas condições, necessitando apenas de algumas manutenções e modificações nas áreas externas como, por exemplo, obras que incluam acessibilidade para todos os alunos. Há 18 salas de aula; 1 secretaria; 1 sala para a especialista em educação (supervisora); 1 sala para a direção; 1 sala para a coordenação; 1 biblioteca com 3 computadores; 1 sala de informática; 1 laboratório de ciências; 1 quadra e 5 banheiros, sendo dois destinados para os alunos, um masculino e um feminino, outros dois menores anexos à sala dos professores, destinados aos funcionários e outro anexo às salas de supervisão e direção.

### **4.2 Sujeitos da pesquisa**

Para essa pesquisa participaram 4 turmas do 9º ano, sendo elas, 9ºREG1, 9ºREG2, 9ºREG3 e 9ºREG4, para as quais o professor, autor deste trabalho, ministra a disciplina de matemática, totalizando 112 alunos. Todos os alunos contribuíram participando das atividades que foram propostas para a investigação do tema estudado.

Para isso, foram ministradas 10 aulas com duração de 50 minutos cada, divididas em 3 fases como disposto na tabela a seguir.

<b>Plano de aulas e disposição das mesmas</b>		
<b>Fases</b>	<b>Quantitativo de aulas</b>	<b>Descrição</b>
Fase 1	3 aulas	Destinadas à apresentação do conteúdo e realização de alguns exercícios, com intuito de fazer um diagnóstico do nível de conhecimento dos alunos.
Fase 2	6 aulas	Foram destinadas 6 aulas, nas quais explicamos o conteúdo com o auxílio da balança virtual e os alunos puderam interagir com a software.
Fase 3	1 aula	Foi aplicado um teste formal para analisar o aprendizado dos alunos.

Tabela: Plano de aulas e disposição das mesmas

É importante salientar que nossa escola está localizada em uma cidade periférica a Belo Horizonte e que nossos alunos, em ampla maioria, pertencem a classes sociais economicamente desfavorecidas. Além disso, os padrões de aprendizagem nas turmas eram insatisfatórios, de acordo com o corpo docente.

Sendo assim, nossa pesquisa deve reconhecer essa realidade. Ao considerar a importância da relação entre o saber científico e os saberes da cultura de origem dos alunos, tínhamos a expectativa de criar possibilidades para que eles produzissem seus próprios conhecimentos, constituindo-se como sujeitos em desenvolvimento de processos críticos. Portanto, tomamos como objetivo estimular os alunos a pensarem de maneira autônoma em vez de simplesmente transferir o conhecimento de forma bancária.

### 4.3 Aula expositiva e avaliação diagnóstica

Nesta fase da pesquisa, foram ministradas três aulas. Na primeira aula, expositiva/dialogada, tratamos dos métodos formais de resolver uma equação e também recordamos com eles algumas operações e propriedades para a manipulação das equações, a exemplo de:

- Soma:  $ax + bx = (a + b)x$ ,
- Subtração:  $ax - bx = (a - b)x$ ,
- Multiplicação:  $a * (bx) = (ab)x$
- Divisão:  $(ax) \div b = \left(\frac{a}{b}\right)x$

O objetivo da segunda aula, expositiva/demonstrativa, foi explicar superficialmente o princípio da alavanca e o a noção de torque associada a ela. Para realizar um experimento foram utilizadas duas vassouras idênticas e dois alunos foram convidados a auxiliar o professor. Esses alunos foram escolhidos propositalmente, considerando as seguintes características: o menino escolhido tinha a maior estatura entre os colegas da sala e a menina tinha a menor. Cada um teve que erguer uma das vassouras até a altura do busto, segurando com ambas as mãos de forma que a vassoura ficasse paralela ao solo.

Finalmente, foi dado o comando para que ambos soltassem uma mão da vassoura, mas sem deixar que a vassoura saísse da posição paralela ao solo. Porém, ao menino, foi dado o comando de que soltasse a mão que estava mais próxima das cerdas, e para menina foi dado o comando contrário, que ela soltasse a mão que estava mais distante das cerdas. Ganhava quem conseguisse segurar a vassoura por mais tempo naquela posição.

**Figura 4.1:** Princípio de alavanca



Fonte: Clube incrível<sup>1</sup>

Não coincidentemente, a vencedora da competição foi a menina, o que gerou uma inquietação propositalmente instigada. Afinal, os alunos perceberam que a diferença de

comandos não era justa. Passada essa inquietação, o professor explicou que, de fato, se tratava de uma brincadeira e que o objetivo da brincadeira era demonstrar para os alunos o princípio da alavanca. A força necessária a ser aplicada em uma das extremidades da vassoura, com o intuito de segurar o objeto, será diretamente proporcional à distância da mão ao ponto de aplicação do vetor peso exercido pelo conjunto de toda a vassoura.

Em uma terceira aula, foi proposta a resolução de exercícios, com o objetivo de diagnosticar as possíveis dificuldades e, desta maneira, fazer uma pré-avaliação de suas capacidades de resolver exercícios de equações do 1º grau. Tais exercícios podem ser encontrados no ANEXO 1 deste trabalho.

#### **4.4 Relato da experiência no laboratório de informática**

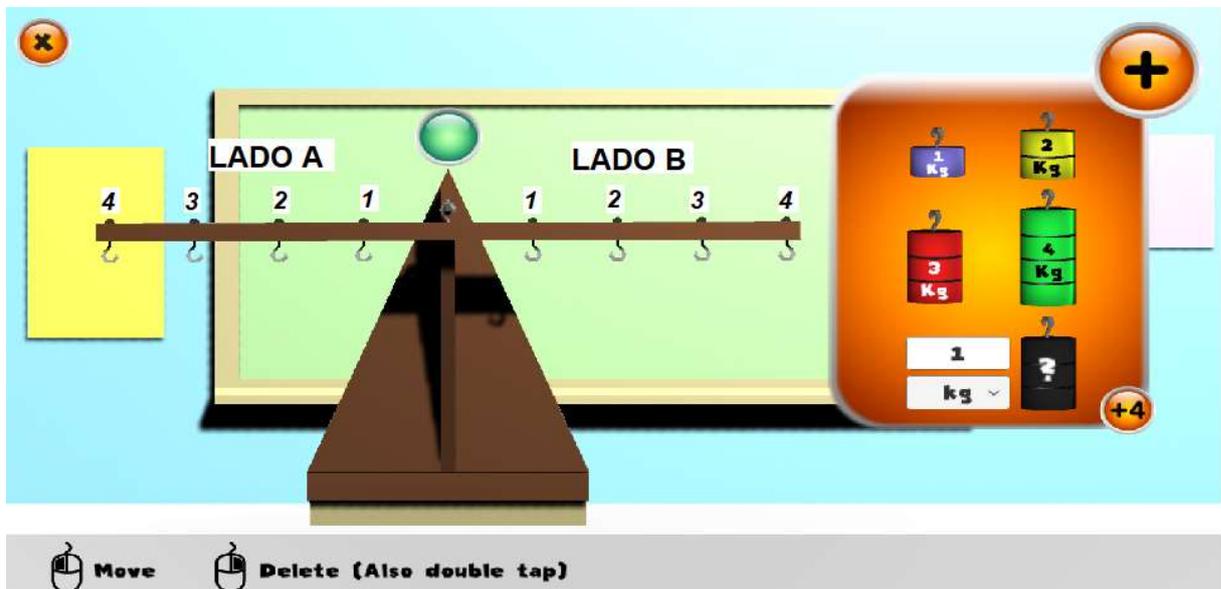
Nesta fase da pesquisa foram ministradas 6 aulas a respeito do conteúdo de equações do 1º grau, todas as aulas ocorreram no laboratório de informática e com o auxílio da balança de torque virtual. Como a escola não dispõe de muitos computadores, durante todas as seis aulas, sem exceção, os alunos ficaram dispostos em grupos de 2 ou 3 participantes. Os grupos foram formados de acordo com a afinidade entre os integrantes.

##### **4.4.1 Aula 1 – Conhecendo a balança**

Na primeira aula desta fase, a balança de torque virtual foi apresentada à turma. Utilizamos, portanto, o modo livre para representar pesos de valores inteiros e positivos. Nesta aula foram propostas 3 atividades, quando os alunos tiveram a possibilidade de testar suas habilidades e conhecer o funcionamento da balança.

Consideremos a balança na configuração a seguir, onde os lados serão classificados como lado A e lado B. Cada gancho receberá um valor referente à sua posição. Esse valor será proporcional à distância entre o referido gancho e o ponto de apoio.

Figura 4.2: Lados da balança



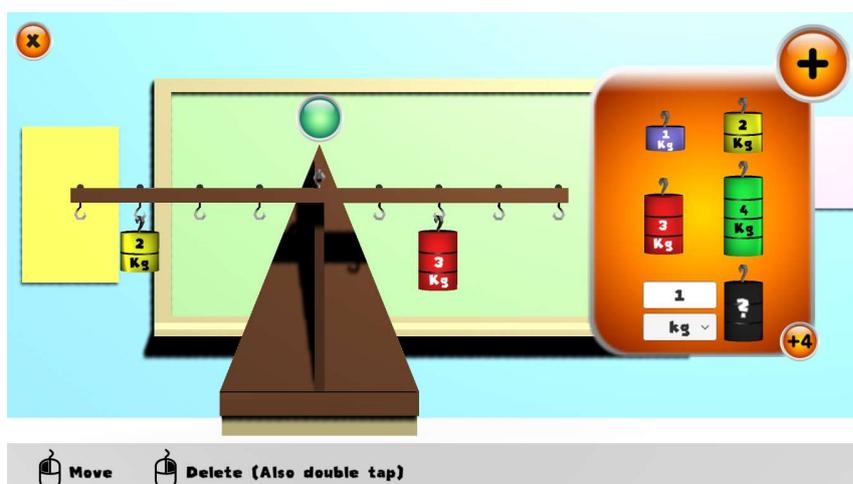
Fonte: Arquivo Pessoal

**Atividade 1:** A primeira atividade era composta por 3 itens.

- Utilizando apenas o peso de 1kg e o peso de 4kg como manter o equilíbrio?
- Utilizando apenas o peso de 2kg e o peso de 3kg como manter o equilíbrio?
- Utilizando apenas o peso de 2kg e o peso de 4kg como manter o equilíbrio?

A Figura 4.3 mostra uma resposta para o item b dessa atividade, onde  $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ .

Figura 4.3: Resposta do item b



Fonte: Arquivo Pessoal

A outra possível resposta para o item b, consiste em inverter os pesos de lado mantendo a distância que eles se encontram do centro. Os demais itens dessa atividade podem

ser respondidos de forma análoga. Por serem triviais sua resolução não será incluída nesse trabalho.

Todos os alunos conseguiram atingir o equilíbrio da balança, porém quase todos os alunos fizeram a atividade por tentativa e erro, destacando-se apenas um grupo de alunos, dentre todas as turmas, que ao fazer o primeiro item, foram capazes de compreender o funcionamento da balança, a esse grupo de alunos, daremos o nome de grupo de alunos destaques, pois seu desempenho se sobressaiu aos demais, sendo considerados um “ponto fora da curva” nessa pesquisa. O professor percebeu através de um diálogo com esse grupo, que esses alunos realizaram a descoberta de forma autônoma. Supostamente, teriam, como base para a descoberta, conhecimentos preexistentes e as aulas de equação e princípio de alavanca que já haviam sido ministradas.

Esse grupo era composto por 3 integrantes, todos pertencentes a turma 9ºREG2, os 3 eram considerados, pelos professores, destaques acadêmicos em sua série. Desses três, dois foram aprovados em processos seletivos para realizar o ensino médio em Institutos Federais.

Finalizada essa atividade, foi proposto aos alunos um outro exercício, a fim de estimular o pensamento no sentido de descobrir o princípio matemático que expressa o equilíbrio da balança.

**Atividade 2:** Podendo utilizar apenas o gancho de número 1 do lado B o aluno deve equilibrar a balança nas seguintes situações.

- a) O peso de 1kg colocado no gancho de número 1 do lado A.
- b) O peso de 1kg colocado no gancho de número 2 do lado A.
- c) O peso de 1 kg colocado no gancho de número 3 do lado A.
- d) O peso de 1kg colocado no gancho de número 4 do lado A.

Nessa atividade todos os alunos conseguiram atingir o equilíbrio, porém, valendo-se de intensas observações, foi possível perceber que a maioria ainda persistiu em utilizar o método de tentativa e erro, sem questionar ou elaborar o devido raciocínio sobre o desafio proposto. Outros, no entanto, demonstravam verbalmente ou por meio de comportamentos os quais era possível observar que estavam pensando antes de manipular a balança, ou seja, estavam levantando hipóteses sobre o que estava acontecendo. Uma dessas hipóteses dizia que a cada gancho que o peso de 1kg se distanciava do ponto de apoio, era adicionado mais 1kg do outro lado, o que não estava errado para essa atividade. Porém essa hipótese será ineficiente para outras situações possíveis de serem descritas na balança. Outra hipótese

levantada nesse dia, se mostrou correta, e iremos abordá-la com mais detalhes posteriormente neste trabalho.

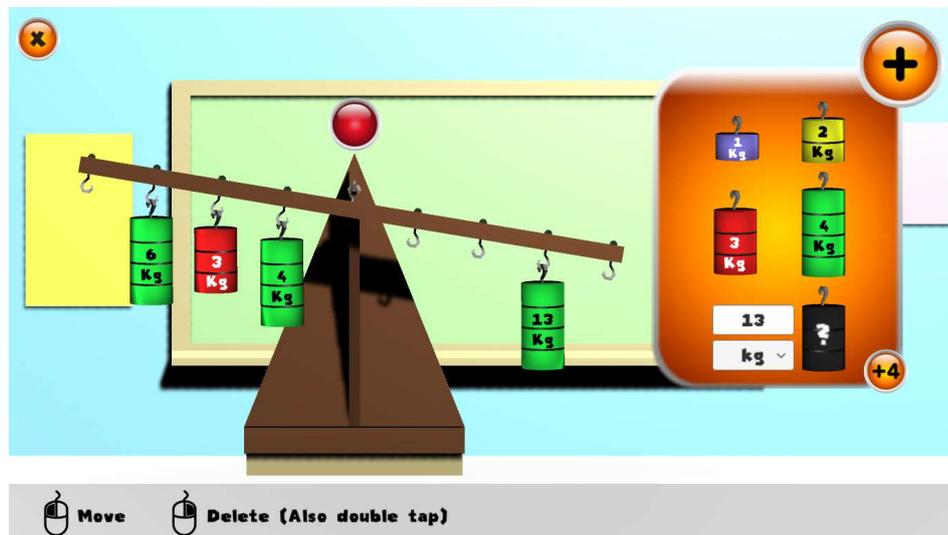
**Atividade 3:** Foram propostas 5 situações problemas, nas quais se deveria equilibrar a balança apenas acrescentando, sem retirar nenhum peso, e não podendo utilizar-se da mesma configuração de pesos em ambos os lados da balança. Deste modo, utilizando apenas o lado A da balança, para cada item, separadamente, o professor montou a seguinte configuração, nas posições 4, 3, 2 e 1, respectivamente, foram colocados os pesos de:

- a) 4kg, 3kg, 2kg, 1kg
- b) 0kg, 6kg, 3kg, 4kg
- c) 8kg, 5kg, 1kg, 4kg
- d) 1kg, 7kg, 6kg, 0kg
- e) 6kg, 5kg, 0kg, 2kg

Posto que o grau de dificuldade aumentou, os alunos perceberam que o método de tentativa e erro, não era tão eficaz. Vários grupos manifestaram suas dificuldades perguntando ao professor como deveriam proceder para encontrar o equilíbrio, pois perceberam que estavam demorando muito para encontrar uma solução pelo método de tentativa e erro. Foi possível notar, pelas conversas, que alguns grupos não dispunham ainda de outras ferramentas ou métodos para tentar solucionar o equilíbrio da balança; esperavam que o professor lhes fornecesse a resposta.

Outros, no entanto, realizaram a atividade somando diretamente os valores que foram propostos, por exemplo, no item a,  $4+3+2+1=10$  levando a crer que peso de 10kg seria a resposta. Por coincidência, nesse exercício o equilíbrio acontece quando os alunos testam o peso de 10kg no terceiro gancho. Eles descobriram essa solução ao testarem o peso de 10kg em todos os ganchos do lado direito da balança, o que reforçou a ideia de que poderiam estar corretos. No entanto, ao se depararem com a situação do item b, viram que a mesma técnica não era eficaz para solucionar esse desafio, afinal,  $0+6+3+4=13$ . Nesse cenário, o peso de 13kg não é solução para o problema, mesmo que colocado em qualquer gancho da balança. Esses grupos demonstram uma evolução, pois estavam se empenhando no sentido de tentar encontrar uma solução definitiva para os desafios de equilibração, uma vez que pensaram em um método de resolução diferente do método de tentativa e erro. Foi possível observar que ainda não haviam percebido o motivo de estarem equivocados, não levando em consideração a relação de peso vezes distância ( $p \cdot d$ ).

**Figura 4.4:** Resposta errada do item a



Fonte: Arquivo Pessoal

Nesta primeira aula prática, apenas o grupo de alunos já citados como destaque, pertencentes ao 9ºREG2 utilizou a regra relacionada ao torque. Esse grupo de alunos destaques, desde a atividade 1 desta aula, sobressaiu-se aos demais. Esses foram os únicos, mesmo que comparados a todas as turmas, que já utilizavam neste ponto da pesquisa, a lógica matemática associada à balança de forma correta.

#### 4.4.2 Aula 2 – Hipóteses de solução

A segunda aula teve por objetivo levantar hipóteses para a lógica matemática das atividades propostas na primeira aula, até que a solução fosse encontrada. Na turma 9ºREG2, à qual pertencia o grupo de alunos destaques, que já tinha descoberto o funcionamento da balança, a solução correta foi proposta logo de imediato.

Nas demais turmas, essa descoberta teve de ser feita de forma guiada. O professor relembrou, em todas as demais classes, o que tinha sido explicado aos alunos a respeito do princípio de alavanca, desta vez sem a utilização de uma vassoura. Após a explicação a respeito do tema, não demorou muito para que alguns alunos com maior domínio do conteúdo, em todas as salas, indicassem em um debate aberto aos demais grupos (de sua respectiva turma), que a lógica por trás da balança deve considerar que o somatório de peso vezes a posição do lado A da balança tem de ser igual ao somatório de peso vezes posição, do lado B.

$$\sum_{i=1}^4 (p_i \cdot P_i)_A = \sum_{i=1}^4 (p_i \cdot P_i)_B$$

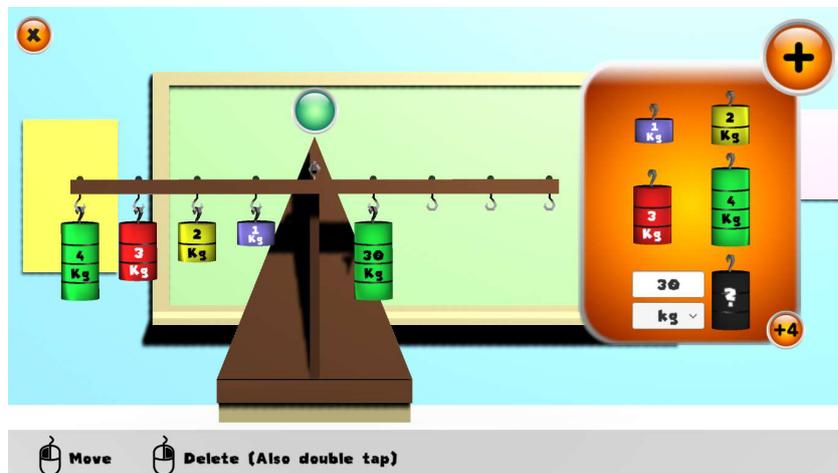
onde,  $p$  = peso e  $P$  = posição

Evidentemente que, em todas as turmas, sem exceção, os alunos não apresentaram a solução utilizando o símbolo de somatório. Essa solução mais elegante está sendo descrita apenas neste trabalho. Na prática, a solução foi descrita por eles como sendo:

$$4 \cdot p_{4A} + 3 \cdot p_{3A} + 2 \cdot p_{2A} + 1 \cdot p_{1A} = 1 \cdot p_{1B} + 2 \cdot p_{2B} + 3 \cdot p_{3B} + 4 \cdot p_{4B}$$

Portanto, uma resolução correta para o item (a) da atividade 3 realizada na aula anterior deve levar em consideração  $(4 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1) = 30$ . A solução trivial para essa atividade seria colocar um peso de 30kg na posição 1 do lado B.

**Figura 4.5:** Resposta correta do item a



Fonte: Arquivo Pessoal

Existem várias possibilidades de solução. Outro exemplo de uma possível solução seria colocar um peso de 10kg na posição 3 do lado B.

Depois dessa discussão, os alunos tiveram que refazer e conferir as soluções de todas as atividades da aula 1, podendo, caso julgassem necessário, recorrer ao uso da calculadora.

Nessa fase da pesquisa, alguns alunos demonstraram certa facilidade no manuseio das operações algébricas, solucionando rapidamente aquilo que foi proposto. A esses alunos foi

permitido que explorassem de forma autônoma as funcionalidades da balança de torque virtual. Aos alunos que apresentaram maior dificuldade, o professor explicou quais operações deveriam ser feitas em cada posição. Na posição 1, iremos multiplicar o peso por 1; na posição 2 iremos multiplicar o peso por 2, e assim sucessivamente até chegarmos à posição 4. Ao final, somamos os resultados das multiplicações de cada lado separadamente, devendo assim, corroborar a igualdade pois a balança atingiria o equilíbrio.

Nesse momento, foi possível observar que os alunos e grupos de alunos com maior dificuldade, compreenderam o que deveria ser feito ao utilizarem a soma de peso vezes posição, e começaram a resolver algumas atividades na balança de forma mecânica, ou seja, sem demonstrar senso crítico a respeito das operações que estavam sendo feitas. Na nossa percepção, e utilizando-se das ideias de Piaget e Ausubel, podemos inferir que esses alunos com maior dificuldade, não tinham conhecimento cognitivo prévio necessário para compreender e dar sentido para o processo de resolução através do somatório de peso  $\times$  posição. Para esses alunos, tudo parecia mágica ou simplesmente uma programação descompromissada que fazia com que o jogo desse certo naquela configuração. Isso nos fez levantar a hipótese de que esses alunos não aprenderam significativamente como funciona o princípio da alavanca e as leis físicas inerentes ao processo.

#### **4.4.3 Aula 3 - Introduzindo os números negativos**

Para essa aula os alunos tiveram que realizar atividades similares às que foram propostas na aula 1, porém no lugar de pesos foram utilizados balões, os quais representam números negativos.

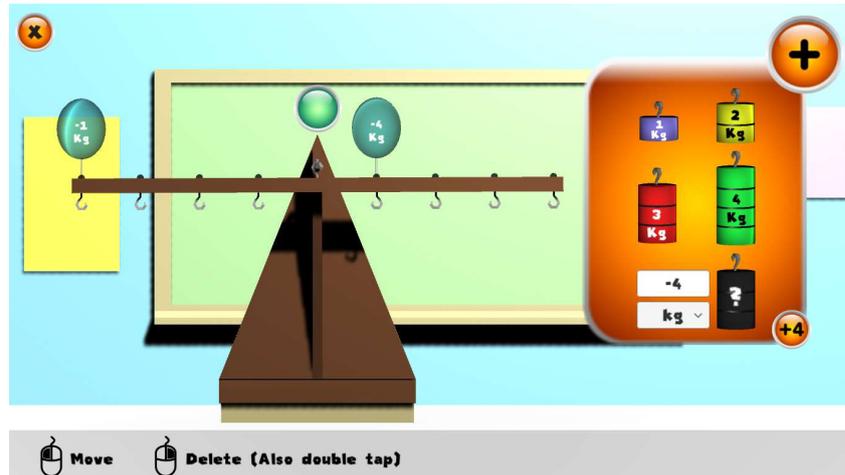
##### **Atividade 1.**

- i. Utilizando apenas o balão de -1kg e o balão de -4kg como manter o equilíbrio?
- ii. Utilizando apenas o balão de -2kg e o balão de -3kg como manter o equilíbrio?
- iii. Utilizando apenas o balão de -2kg e o balão de -4kg como manter o equilíbrio?

**Atividade 2:** Utilizando apenas o gancho de número 1 do lado B o aluno deve equilibrar a balança nas seguintes situações.

- i. O balão de -1kg colocado no gancho de número 1 do lado A.
- ii. O balão de -1kg colocado no gancho de número 2 do lado A.
- iii. O balão de -1kg colocado no gancho de número 3 do lado A.
- iv. O balão de -1kg colocado no gancho de número 4 do lado A.

**Figura 4.6:** Representação com balões



Fonte: Arquivo Pessoal

Nessas duas atividades, os alunos de todas as turmas conseguiram rapidamente equilibrar a balança. De maneira geral, quase metade dos alunos utilizaram o somatório de peso vezes posição para resolver esses problemas. Alguns, porém, ainda persistiram em utilizar o método de tentativa e erro, sem elaborar o devido raciocínio sobre o desafio proposto.

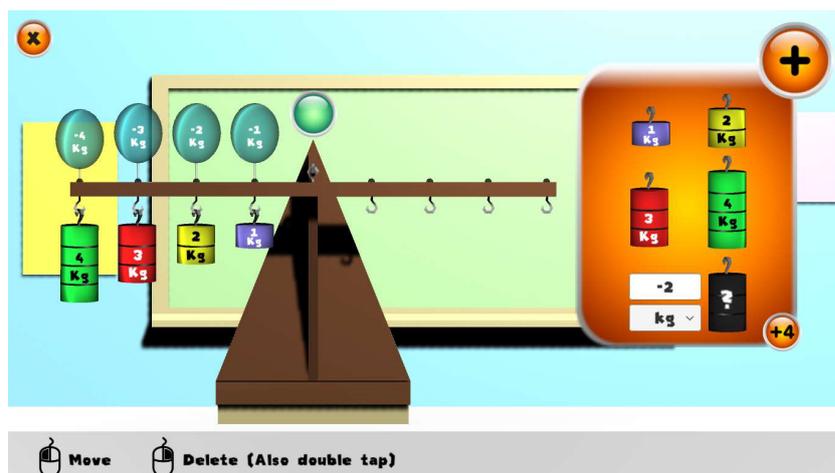
**Atividade 3:** Foram propostas para os alunos 5 situações problemas. Eles deveriam equilibrar a balança sem retirar nenhum balão, apenas acrescentando novos pesos ou balões. Também não poderiam utilizar da mesma configuração em ambos os lados da haste. Deste modo, utilizando apenas o lado A da haste, para cada item, separadamente, o professor montou a seguinte configuração, nas posições 4, 3, 2 e 1, respectivamente, inserindo os balões de:

- 4kg, -3kg, -2kg, -1kg
- 0kg, -6kg, -3kg, -4kg
- 8kg, -5kg, -1kg, -4kg
- 1kg, -7kg, -6kg, 0kg
- 6kg, -5kg, 0kg, -2kg

Nessa atividade notamos que, de modo geral, os alunos apresentaram uma enorme dificuldade para atingir o equilíbrio. Atribuímos isso à inclusão dos valores negativos. Visto que o método por tentativa e erro não é o mais indicado para essa atividade, pudemos observar que os alunos demonstraram uma certa incompreensão ao somar números negativos. No entendimento deles, o sinal de menos (-) é referente à operação de subtração. Portanto, do ponto de vista dos alunos, deveria ser feita a subtração, o que gerou uma dúvida de como deveriam proceder ao realizar uma operação do tipo:  $-6-5=?$

O professor, então, promoveu uma revisão do conteúdo que envolve soma de dois números negativos, como por exemplo,  $-6+(-5)=-11$ , a fim de evitar erros do tipo  $-6+(-5)=1$ . Todavia, alguns alunos, perceberam que existia uma solução trivial para essa atividade, que consiste em colocar na mesma posição que está no balão um peso com o mesmo valor.

Figura 4.7: Solução trivial



Fonte: Arquivo Pessoal

Aproveitando a oportunidade, o professor chamou atenção para o fato de que a igualdade havia sido mantida, afinal  $4 \cdot (4-4) + 3 \cdot (3-3) + 2 \cdot (2-2) + 1 \cdot (1-1) = 0$

#### 4.4.4 Aula 4 – Introduzindo uma incógnita

Nesta aula, os alunos, de todas as turmas, foram direcionados a utilizar pela primeira vez o modo desafio. Como esse modo ainda está sendo desenvolvido, foi proposto a eles, que entrassem e saíssem do modo desafio até que aparecesse um desafio que incluísse apenas um

valor desconhecido, no formato de peso ou balão. Sendo assim, cada grupo teve que, primeiramente, equilibrar um desafio específico, proposto de forma aleatória pelo programa.

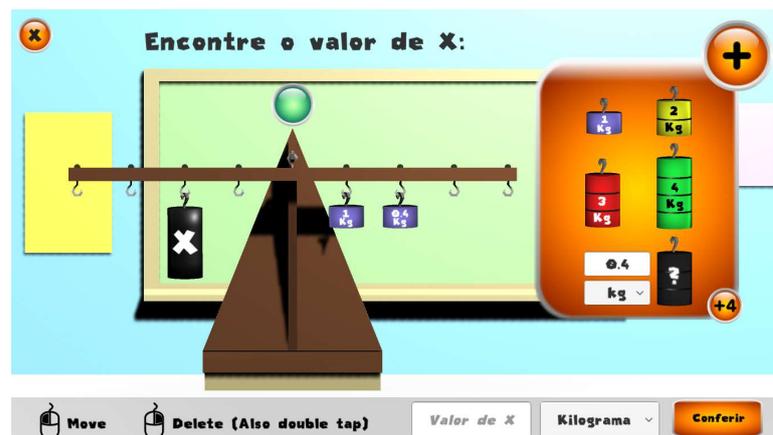
**Figura 4.8:** Desafio proposto ao aluno



Fonte: Arquivo Pessoal

No modo desafio, o equilíbrio da balança só pode ser atingido utilizando-se do método de tentativa e erro. Portanto, após algumas tentativas todos os grupos conseguiram equilibrar a balança.

**Figura 4.9:** Desafio equilibrado pelo aluno



Fonte: Arquivo Pessoal

As dificuldades foram observadas quando os alunos tiveram que encontrar o valor do peso desconhecido (x). Levando em consideração todas as 4 turmas, mais da metade dos alunos não conseguiram chegar ao resultado, pois não sabiam fazer a representação algébrica

da balança. Ficavam tentando valores por aproximação. Demonstraram dificuldades ao elaborar cálculos de divisão, principalmente quando o resultado apresentava uma parte decimal.

#### 4.4.5 Aula 5 – Representação algébrica da balança

Nessa aula, tivemos como objetivo aprender a equacionar as situações propostas na aula anterior, com o intuito de facilitar a resolução. Para isso, foi necessário lembrar aos alunos que o equilíbrio da balança é atingido se, e somente se, o somatório de peso vezes posição de um lado for igual ao somatório de peso vezes posição do outro. Portanto:

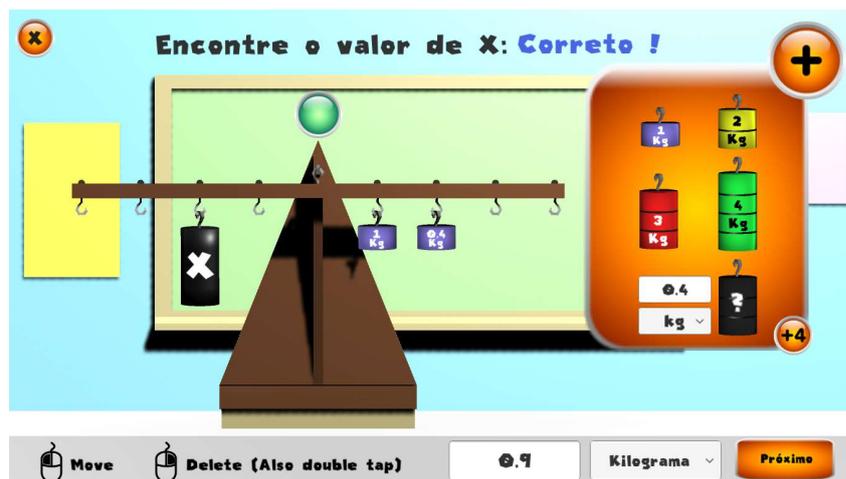
$$\sum_{i=1}^4 (p_i \cdot P_i)_A = \sum_{i=1}^4 (p_i \cdot P_i)_B$$

Deste modo, o desafio proposto na Figura 4.9 é representado na forma de equação como sendo:

$$2 \cdot x = (1 \cdot 1) + (2 \cdot 0,4)$$

que pode ser simplificado para  $2x = 1,8$ , que implica que  $x = \frac{1,8}{2}$  e, portanto,  $x = 0,9$ .

**Figura 4.10:** Resposta correta a representação algébrica



Fonte: Arquivo Pessoal

Nessa etapa do trabalho, foi possível observar que, em todas as turmas tínhamos pelo menos um grupo que já apresentava o domínio esperado sobre a lógica matemática, na qual está envolvido o processo de equilíbrio da balança. Realizavam com certa facilidade, e de

forma correta, a representação algébrica, sendo eficazes ao fazer os cálculos necessários para resolução dos desafios.

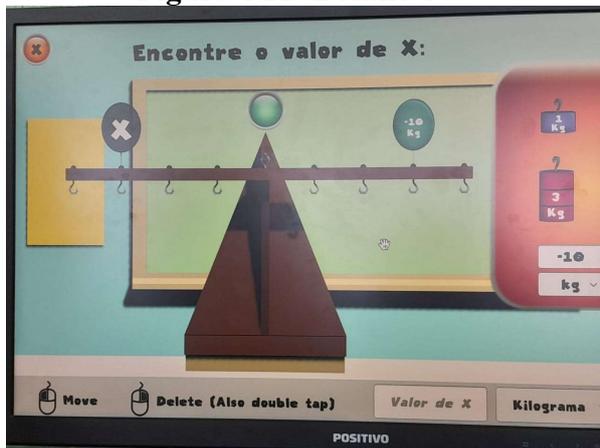
Outros alunos, no entanto, não conseguiam equacionar o problema, ficando perplexos com a dificuldade imposta. Ao se depararem com problemas do tipo  $2 \cdot x$ , apresentavam dúvidas quanto à multiplicação da incógnita. Na nossa percepção, esses alunos tinham dificuldades em compreender que algumas operações não seriam realizadas durante a modelação do problema.

#### 4.4.6 – Aula 6 - O modo desafio completo

Na última aula com a utilização da balança, foi proposto aos alunos, que resolvessem sem o auxílio do professor, atividades do modo desafio, sendo que, cada grupo deveria realizar os 5 primeiros desafios que fossem propostos aleatoriamente. Além disso, cada grupo deveria registrar a resolução, ou seja, o grupo teria de equilibrar a balança, salvar um print ou foto da tela, e enviar para o professor, junto com a solução da equação algébrica que representa aquela situação.

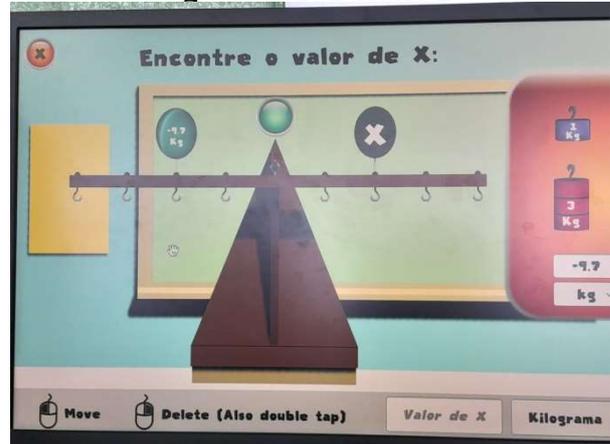
As Figuras 4.11 a 4.16 mostram as resoluções enviadas ao professor de um desses grupos.

**Figura 4.11: Desafio 1**

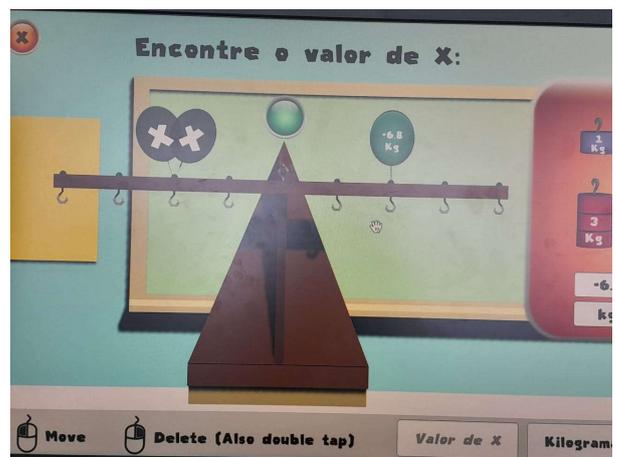
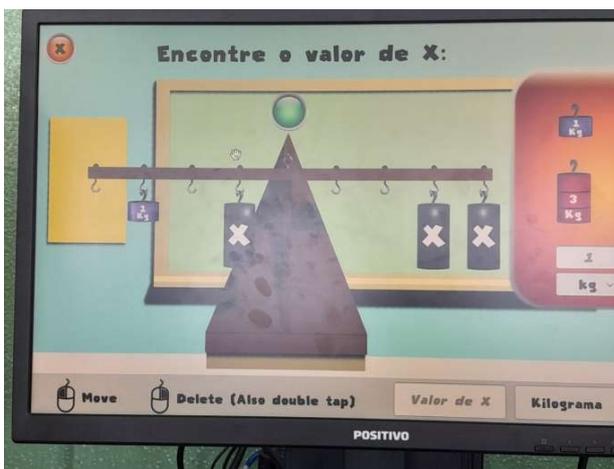


Fonte: Arquivo Pessoal

**Figura 4.12: Desafio 2**



Fonte: Arquivo Pessoal



Fonte: Arquivo Pessoal

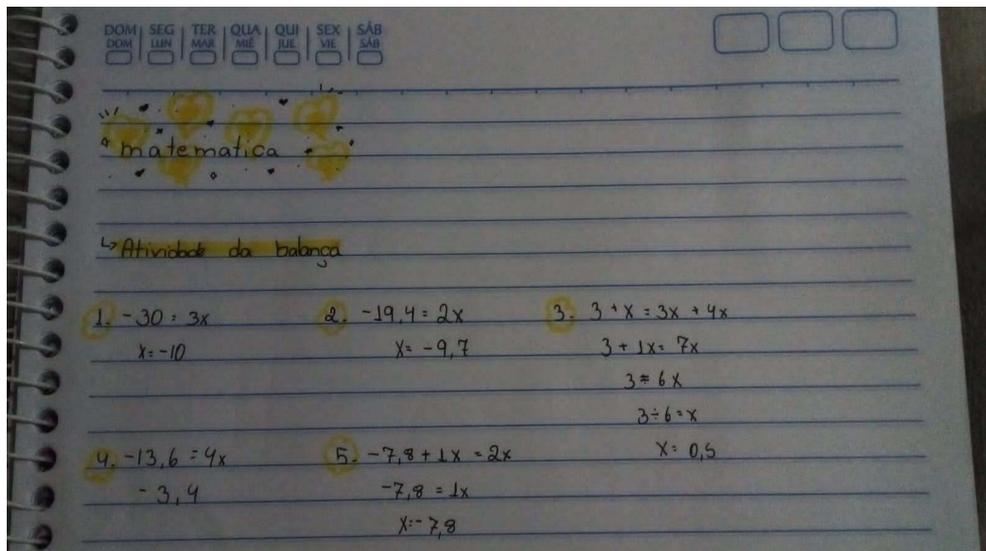
Fonte: Arquivo Pessoal

**Figura 4.15: Desafio 5**



Fonte: Arquivo Pessoal

**Figura 4.16: Resolução dos desafios**



Fonte: Arquivo Pessoal

Foi dado, como incentivo aos alunos, 3 pontos na nota do bimestre, sendo que, ganharia 1 ponto cada integrante do grupo que enviasse o print da tela com os desafios equilibrados, mais 1 ponto para cada integrante do grupo que enviasse a representação

algébrica dos desafios propostos na balança e mais 1 ponto para os integrantes que solucionassem de forma correta as equações relacionadas ao exercício.

Quase todos os grupos enviaram as fotos ou prints da balança de torque virtual equilibrada no modo desafio. No entanto, nem todos os grupos que entregaram, enviaram junto aos prints as equações algébricas que representassem as situações de equilíbrio que havia sido descrita no problema. Nesta fase do trabalho, não foi possível, devido ao tempo de pesquisa e a grande quantidade de alunos envolvidos nesse trabalho, levantar um valor exato do quantitativo de alunos que obtiveram a nota máxima de 3 pontos; 2 pontos; 1 ponto ou zero, portanto, deixamos aqui uma estimativa de que 50% dos 112 alunos obtiveram a nota máxima, ou seja, apenas metade deles realizaram todos os tópicos desejados.

#### **4.5 Aplicação da avaliação pós utilização da balança**

Foi aplicada uma avaliação com as mesmas questões do pré-teste realizado ao início do trabalho (ANEXO 1). Ao elaborarmos as questões, buscamos redigir com clareza os enunciados necessários para equacionar e resolver cada questão. Tentamos deixar de fácil compreensão as representações de valores desconhecidos, igualdade, membros e desenvolvimentos nas resoluções. Para isso, lançamos mão de ilustrações da balança e propusemos problemas para verificar se o aluno seria capaz de modelar com equações as situações apresentadas.

Foi possível notar uma melhoria na forma de interpretar o problema, visto que a maioria dos alunos entenderam os comandos expressos nas questões. Muitos deles, no entanto, ainda demonstraram dificuldades na resolução das operações necessárias à resolução dos desafios.

## 5 ANÁLISE DO TRABALHO DE CAMPO

Para analisar este trabalho, estabelecemos uma abordagem qualitativa, agregando um conjunto de técnicas de investigação. Essas técnicas reúnem simultaneamente três modos de trabalho: a observação do comportamento espontâneo dos alunos, a observação do comportamento provocado por uma situação experimental e o diálogo estabelecido entre o professor e alunos.

Para que pudéssemos analisar o desempenho dos alunos, inicialmente foram ministradas duas aulas expositivas/dialogadas e também aplicamos uma avaliação de sondagem. O nosso objetivo era rever alguns conteúdos necessários para o trabalho e também fazer um levantamento acerca do nível de aprendizagem dos alunos com relação ao domínio do conteúdo escolhido, para que posteriormente pudéssemos fazer uma comparação.

Na segunda etapa da pesquisa, foram ministradas 6 aulas no laboratório de informática. O objetivo dessas aulas consistiu em observar o comportamento e a interação dos alunos com a balança de torque virtual.

Nessa etapa da pesquisa, a partir das interações do pesquisador com os alunos, em sua percepção, ficou evidente que os alunos compreendiam que há desequilíbrio quando pesos diferentes são colocados em distâncias iguais ao centro da haste. Da mesma maneira, observamos que os alunos também compreendiam o desequilíbrio quando os dois lados continham pesos iguais, porém colocados em ganchos diferentes. Acreditamos, portanto, que os alunos já possuíam ideias prévias sobre o que seria uma equivalência aplicada à balança. Compreendiam, portanto, que o equilíbrio depende da interação de duas grandezas: do peso e da posição em que ele é aplicado.

Nas palavras de Ausubel (1980), os alunos apresentavam uma estrutura cognitiva prévia, relativa à compreensão das condições de equilíbrio, pois realizaram corretamente os desafios propostos, mesmo que utilizando de estratégias distintas.

Em um primeiro contato com a balança, quando os alunos foram estimulados a equilibrar a balança usando dois pesos distintos, pudemos observar que, em maioria, os alunos de todas as turmas, adotavam a estratégia de tentativa e erro para equilibrar a balança

utilizando dois pesos distintos, porém de valores conhecidos. Essa estratégia, por vezes se mostrou eficaz. Por terem um conhecimento cognitivo prévio, os alunos, em sua totalidade, na primeira tentativa já colocavam um peso de cada lado da balança, porém sem levar em consideração a relação de peso x distância. Dessa forma, os pesos eram colocados um em cada lado, e caso a primeira tentativa não desse certo, eles trocavam um dos pesos de gancho, porém mantendo o lado, até que a balança atingisse o equilíbrio desejado. Não foi possível observar se houve alguma evolução nesse método ou se os alunos que utilizavam essa estratégia conseguiram fazer alterações/adaptações para melhorar suas tentativas.

Outros, já demonstravam maior facilidade ao compreender a relação de peso x distância antes de inserir o peso necessário para gerar o equilíbrio. Foi possível constatar essa diferença, pois, notamos que pequenos grupos de alunos terminavam as atividades antes dos demais. Ao perceber isso, o professor questionou esses alunos sobre a estratégia que eles estavam utilizando para realizar as atividades. Os mesmos explicaram que o equilíbrio depende de duas coisas, do peso e da posição em que ele é colocado, sendo que o primeiro gancho multiplica por 1, segundo gancho por 2 e assim sucessivamente. Tal explicação fornecia um indício claro de que os alunos compreendiam a relação necessária para equilibrar a balança.

Esses alunos foram questionados também sobre como conseguiram chegar a essa descoberta. Então eles disseram que compreendiam que essa relação era necessária pois, em uma aula anterior a essa, havia sido explicado o princípio da alavanca. Além disso, com a utilização de uma vassoura, o professor demonstrou a diferença da força necessária para levantar um peso distante ou um outro peso que está perto do ponto onde a força é aplicada. Desta forma, eles perceberam que aquele mesmo princípio outrora utilizado na vassoura também se aplicava ao caso da balança.

Utilizando das ideias de Ausubel, não podemos dizer que esses alunos chegaram na relação de peso x distância por um processo de descoberta autônoma, mas sim por um processo de descoberta dirigida. Ao mesmo tempo, não podemos dizer que a aprendizagem deles tenha sido mecânica, afinal eles haviam entendido o processo físico envolvido e eram capazes de aplicar seus conhecimentos em situações distintas. Se observarmos o gráfico 2.1 na página 27, onde David Ausubel classifica os meios de aprendizagem, considerando os dois eixos, temos que, aprendizagem por descoberta dirigida (eixo horizontal) e aprendizagem significativa (eixo vertical) resultam exatamente nos pontos de trabalho de laboratório na escola ou instrução individualizada bem programada. Apesar da instrução a respeito do

princípio de alavanca não ter sido individualizada, vimos que a mesma surtiu efeito positivo na aprendizagem dos grupos de alunos supra citados.

Percebemos também que os alunos encaram relevantes dificuldades na resolução de problemas, ou seja, no procedimento de esquematizar a operação correta, interpretação, resolução e chegada numa resposta correta. Foi o caso das aulas 4, 5 e 6, pois era necessário que o(a) aluno(a) montasse a equação, representando o valor desconhecido por uma incógnita e esquematizando a operação correta da equação para resolver e encontrar o valor correspondente.

Penso que a balança funcionou como um instrumento potencializador do interesse dos alunos em compreender o processo que levaria à resolução dos problemas. Nesta etapa, inspirei-me em algumas ideias de Paulo Freire a respeito de como pode ser o processo de ensino aprendizagem, uma vez que propus uma abordagem mais realista do problema. O desafio para encontrar soluções incorporava um aspecto lúdico da atividade. O fato de que alguns alunos conseguiram pensar no experimento com a vassoura enquanto resolviam desafios com a balança poderia ser considerado um indício de um ensino contextualizado. A noção de fundo, ou seja, a ideia de que o equilíbrio depende de dois fatores foi extrapolada de um contexto para outro.

Também foi observado o desempenho dos alunos diante das dificuldades impostas quando inserimos o peso desconhecido. Nessa etapa, o equilíbrio só é atingido por tentativa e erro, uma vez que tal peso é apresentado pelo programa sem qualquer outra informação preliminar.

**Figura 5.1:** Peso desconhecido



Fonte: Arquivo Pessoal

Percebemos que todos tinham o conhecimento cognitivo prévio necessário para equilibrar a balança. Sabiam, por exemplo, que caso a balança estivesse tombada para o lado

A, deveriam adicionar o peso do lado B. Tinham noção também que, caso o peso colocado ultrapassasse o necessário, e invertesse o posicionamento da haste, deveriam tentar um peso menor, ou o contrário caso tentassem um peso abaixo do necessário.

A dificuldade foi demonstrada pelos alunos no processo de descobrir o valor do peso desconhecido. Afinal, nessa etapa era necessário que os alunos modelassem o problema para que pudessem assim determinar o valor da incógnita. Essa parte da pesquisa foi crucial para o andamento do trabalho.

Algumas considerações metodológicas devem ser feitas a respeito desse trabalho e de outros trabalhos que possam vir com esse mesmo viés de pesquisa. Percebemos, nesse momento, que a escolha por observar e acompanhar todas as 4 turmas, formadas por mais de 25 alunos cada, na tentativa de atender e incentivar a todos, não foi a melhor opção para o trabalho de pesquisa. Deixo então uma sugestão para os próximos pesquisadores que desejem continuar ou realizar alguma pesquisa de campo no sentido de que foquem suas observações em grupos menores. Só assim será possível fazer uma observação mais detalhada e, ao mesmo tempo, acompanhar e orientar os sujeitos envolvidos na pesquisa.

Mesmo com a dificuldade de acompanhar um grupo grande de alunos, foi possível identificar em cada turma dois grupos distintos: aquele de alunos que sabiam modelar e resolver e aquele em que os alunos não sabiam modelar o problema e, conseqüentemente, não o resolviam. Apesar de notarmos essa distinção, uma separação não foi feita na prática, para não constranger os alunos e permitir que trocassem ideias. Aos que sabiam equacionar foi dado uma menor atenção nesse momento, pois os mesmos resolviam com facilidade os problemas, uma vez que, já tinham adquirido o conhecimento necessário para concluir a tarefa. Sendo assim, tentamos focar o nosso olhar naqueles alunos que apresentavam maior dificuldade, a fim de levantar indícios e possíveis ganhos na aprendizagem dos mesmos.

Notamos que esse grupo de alunos com maior dificuldade necessitava de um acompanhamento mais individualizado e de uma intervenção capaz de retomar alguns conteúdos e habilidades supostamente estudados em anos escolares anteriores. Apesar da utilização da balança ter sido eficaz na demonstração do equilíbrio por trás de toda equação do 1º grau, e mesmo podendo verificar um maior comprometimento e interesse por parte deles, não foi possível observar uma melhoria no seu desenvolvimento a respeito da resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau.

Com a aplicação do pós-teste, última etapa do trabalho, pudemos notar uma melhoria na compreensão das questões propostas, visto que a maioria dos alunos entenderam o que deveria ser feito. Porém, mesmo compreendendo o comando inserido na questão, os alunos

categorizados no grupo que não sabiam modelar o problema, continuaram demonstrando dificuldades na resolução dos exercícios.

Nessa etapa da pesquisa, pudemos notar dificuldades apresentadas durante o desenvolvimento dos problemas apresentados no teste. Tais dificuldades se vinculavam ao fato de que alguns alunos não dominavam satisfatoriamente as 4 operações aritméticas, principalmente quando se aplicavam a números decimais. Mesmo compreendendo o que deveria ser feito, eles não tiveram êxito na resolução das questões. Nesse sentido, podemos destacar, referendados em Piaget (1983), que a acomodação da aprendizagem não se completou. Entendemos que não é possível atingir uma acomodação quando falta o domínio de ferramentas adequadas à resolução do problema apresentado ao indivíduo. Talvez seja razoável considerar que, nesses casos, o indivíduo não detém o conhecimento prévio necessário para processar uma equilibração majorante. Por outro lado, supomos que os alunos percebiam suas limitações e, com isso, podemos inferir que eles já tinham superado uma condição inicial de equilíbrio cognitivo. Em tal condição, o princípio da tentativa e erro seria aplicado a todas as situações.

Foi possível verificar que o uso da balança de torque virtual consolidou uma imagem associada ao conceito de igualdade entre dois termos de uma equação, os quais foram representados pelos dois lados da haste da balança. De acordo com o que foi trabalhado, acreditamos que a utilização da balança funcionou como um organizador prévio, possibilitando e facilitando a identificação e desenvolvimento de ações compensatórias ou equivalentes. Tais ações podem ser feitas em ambos os lados de uma equação, acompanhando o que se nota na manipulação da balança. Acrescente-se que a balança possibilita verificar que os efeitos se fazem sentir tanto em números positivos quanto em números negativos.

Mesmo com a utilização da balança, a principal dificuldade ainda apresentada pelos alunos foi referente às operações compensatórias. Aparentemente entenderam os conceitos de equilíbrio e igualdade matemática, e que esses estão interligados. No entanto, mesmo relacionando esses conceitos com a resolução de expressões algébricas, mais da metade dos alunos ainda demonstraram um conhecimento insuficiente para formalizar e sistematizar certas técnicas de resolução ao tentarem descobrir o valor desconhecido da equação. São, portanto, dificuldades relacionadas às técnicas de manipulação dos elementos inerentes às equações.

Arriscamos dizer que a utilização de um objeto familiar ao educando aproxima o ensino de equações matemáticas ao contexto social e às práticas do cotidiano dos educandos. A correlação entre balança (socialmente conhecida) e equações (objeto do conhecimento

escolar) constituiu uma tentativa de criar um ambiente que pode despertar a curiosidade dos alunos. Nesta perspectiva Freire (1987) indica a importância de que a prática pedagógica considere que o sujeito aprende por meio da reflexão e do estabelecimento de relações da própria vivência.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista os objetivos do trabalho e as reflexões geradas após os estudos, observou-se o quanto a utilização da balança de torque virtual para representar uma equação de 1º grau pode contribuir com a aprendizagem. Acreditamos que, por ser um material rico e interessante, os alunos tiveram a oportunidade de estudar mesclando o lúdico com o abstrato e chegando a generalizações e a construções de conceitos matemáticos. Essa mescla facilitaria a atribuição de significados às equações resultando em uma maior compreensão do assunto.

Considerando a pesquisa de campo, temos como ponto culminante deste trabalho as tarefas realizadas utilizando a balança de torque virtual. Os alunos tiveram a oportunidade de manusear, visualizar e, assim, comprovar e compreender a igualdade entre dois membros de uma equação e os princípios de equivalência. De acordo com as metodologias empregadas nesse trabalho, acreditamos que um problema bem formulado incita a curiosidade e estimula o aluno a adotar um comportamento investigativo, resultando na redução de sua passividade e conformismo, e assim, levando-o a desenvolver as habilidades necessárias para tornar-se um sujeito crítico. Foi exatamente esse tipo de interação ativa (entre alunos e desafios), que percebemos ao longo do nosso trabalho.

A resolução de equações contando com a analogia com um modelo de balança virtual contribui para que o aluno aprenda de forma significativa, pois ele pode compreender a aplicação dos princípios de equivalência e das operações compensatórias. Com isso, tem a oportunidade de resolver conscientemente as equações, quando associa imagens advindas da manipulação da balança às operações inversas, por exemplo. Estamos nos referindo ao que se nomeia como “passa para o outro lado com sinal trocado”. Na perspectiva freiriana adotada em nosso trabalho, temos clara a importância do processo de ensinar gerando reflexões. Quando o ensino é vazio e não reflexivo, não tem compromisso com a transformação. Neste caso faz-se jus à utilização da balança para uma melhor compreensão das ações compensatórias. Caso contrário, a equação envolveria apenas manipulações mecânicas e “ativismo”. A ação mecânica, mesmo em aulas de matemática, minimiza a reflexão e então dificulta a transformação da realidade do aluno. Isso se justifica quando nos deparamos com

uma ideia muito difundida de que a matemática consiste em regras de manipulação de dados. Tais regras, nessa perspectiva, teriam de ser obedecidas, sem a necessidade de serem compreendidas. Haveria, então, uma entidade superior ao comum dos mortais que determinaria o funcionamento da realidade. Mudanças não estariam, portanto, ao alcance das pessoas comuns.

No processo de observação dos alunos, à medida que eles realizavam cada tarefa, percebia-se que uma das grandes vantagens de utilizar uma balança para o ensino de equações, é tornar a matemática um conteúdo mais atrativo, compreensível e acessível. Os alunos demonstraram maior atenção e mais curiosidade a respeito do conteúdo quando comparo seu comportamento a outras tantas turmas para as quais lecionei o mesmo conteúdo. Alguns países, como a Índia e as nações escandinavas, adotam esse método de ensino, em que a matemática é apresentada como um jogo, com abordagens lúdicas, buscando assim incutir uma sensação de alegria no aprendizado.

Além de tornar o conteúdo mais atrativo, durante a aplicação das atividades e ao realizar diálogos entre pesquisador e alunos, evidenciou-se um fato importante. Refiro-me à aprendizagem gerada pela interação “aluno com aluno”. Atividades em grupo geram compreensões que o professor sozinho não seria capaz de promover. Isso acontece, por exemplo, quando os alunos conseguem transmitir informações utilizando uma linguagem mais próxima dos aspectos cognitivos previamente adquiridos pelo grupo.

Por fim podemos destacar que os procedimentos adotados em nossa intervenção possibilitaram melhora no aprendizado e no interesse de nossos alunos. Com aplicação desta metodologia, percebemos que os alunos compreendem melhor o referido conteúdo, ou seja, esse método gera fatores positivos no ensino e aprendizagem das equações do 1º grau com uma incógnita.

Reconhecemos que o nosso trabalho não contém uma análise quantitativa da melhora proporcionada pela utilização da balança de torque virtual. Acreditamos, todavia, que temos indícios suficientes para confiar que as atividades que romperam com a forma habitual de se lidar com o ensino de equações, conseguiram promover maior atenção e principalmente maior interesse dos alunos. Concluímos então que a utilização da balança de torque virtual agrega positivamente no processo de aprendizagem significativa. Estamos plenamente cientes da importância de que professores utilizem ferramentas que aproximem o conteúdo formal da materialidade percebida pelos alunos sempre que possível.

É importante salientar que, as reflexões aqui obtidas não findam, levando-nos a compreender que o processo de ensino-aprendizagem, no qual estamos incluídos, não deve ser tomado como algo singular e estático, mas como processos em contínua evolução.

## 7 REFERÊNCIAS

ABREU, Nilva Ropelatto; FERNANDES, Carlos Ropelatto. **Equações de 1º grau com uma variável: Uma questão de equilíbrio.** Paraná, 2013. Disponível em: [http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes\\_pde/2013/2013\\_fafipa\\_mat\\_artigo\\_nilva\\_ropelatto\\_abreu.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_fafipa_mat_artigo_nilva_ropelatto_abreu.pdf) Acesso em: 27 jan. 2023.

ALENCAR, Anderson F. de. **A pedagogia da migração do software proprietário para o livre: uma perspectiva freiriana.** Dissertação de mestrado. (FEUSP), 2007. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-08112007-150130/publico/DissertacaoAndersonAlencar.pdf> Acesso em: 21 jul. 2023.

ANDRADE, Geovanny Soares; MENDONÇA, Erivelton de Souza. **As tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem nas series iniciais do ensino fundamental.** Curso de Pedagogia (UFAM), 2018. Disponível em: [https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO\\_EV127\\_MD1\\_SA19\\_ID13339\\_01102019175047.pdf](https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA19_ID13339_01102019175047.pdf) Acesso em: 21 jul. 2023.

BARBOSA, Vivian Antunes. **A importância da utilização de ferramentas digitais no ensino fundamental.** Monografia de especialização. (UTFPR): São José dos Campos, 2018. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20572/1/importanciaferramentasdigitaisensino.pdf> Acesso em: 21 jul. 2023.

BARROS, Márcia Graminho Fonseca Braz e; MIRANDA, Jean Carlos; COSTA, Rosa Cristina. **Uso de jogos didáticos no processo ensino-aprendizagem.** Revista Educação Pública, v. 19, nº 23, 1 de outubro de 2019. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/19/23/uso-de-jogos-didaticos-no-processo-ensino-aprendizagem> Acesso em: 21 jul. 2023.

D'AFONSECA, L. A. **Como Escrever uma Dissertação para o PROFMAT.** PROFMAT (CEFET-MG): Belo Horizonte, 2020. Disponível em: <https://www.profmag.cefetmg.br/downloads/> Acesso em: 20 dez. 2022.

ENGELMANN, Alini Kunz; SORANÇO, Angéle Passari. **Paulo Freire: educação, conhecimento e práxis pedagógicas.** Licenciatura em Pedagogia (UFFS): Chapecó, 2016. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/bitstream/prefix/1246/1/ENGELMANN%20e%20SORAN%20C%27%87O.pdf> Acesso em: 21 jul. 2023.

FEITOSA, Sonia C. S. **Método Paulo Freire: princípios e práticas de uma concepção popular da educação.** Dissertação de mestrado. (FEUSP), 1999. Disponível em: [https://nedeja.uff.br/wp-content/uploads/sites/223/2020/05/O\\_Mtodo\\_Paulo\\_Freire-1.pdf](https://nedeja.uff.br/wp-content/uploads/sites/223/2020/05/O_Mtodo_Paulo_Freire-1.pdf)  
Acesso em: 21 jul. 2023.

HUMMES, Viviane Beatriz. **Aprendizagem significativa de equações do primeiro grau: um estudo sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor.** PROFMAT (UFRGS): Porto Alegre, 2014. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/182598/001076324.pdf?sequence=1>  
Acesso em: 27 jan. 2023

MARQUES, Nelson L R. **Teoria de aprendizagem de David Ausubel, Mapa Conceitual e Diagrama V.** Monografia de especialização em ciências e tecnologias na educação. (IFRS): Pelotas. Disponível em: [https://www.nelsonreyes.com.br/AP%20SIGNIF\\_MAPA%20CONCEITUAL\\_DIAGRAMA%20V.pdf](https://www.nelsonreyes.com.br/AP%20SIGNIF_MAPA%20CONCEITUAL_DIAGRAMA%20V.pdf) Acesso em: 21 jul. 2023.

PATRÍCIO, Nívea da Costa; MATOS, Francisca Juliana de. **A curiosidade como produção do conhecimento discente no processo de aprendizagem.** Universidade Estadual do Ceará, 2011. Disponível em: [https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/21129/1/2011\\_eve\\_ncpatr%C3%ADciofjmatos.pdf](https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/21129/1/2011_eve_ncpatr%C3%ADciofjmatos.pdf) Acesso em: 27 jan. 2023.

POSSAMAI, Leusa Fátima Lucatelli. **Contribuições da pesquisa-ação na produção de conhecimentos escolares: experiências curriculares na rede pública municipal de educação de Chapecó.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Curso de pós graduação em Educação - Universidade do Estado de Santa Catarina, Florianópolis, 2014. Disponível em: [http://www.faed.udesc.br/arquivos/id\\_submenu/151/leusa\\_fatima\\_lucatelli\\_possamai.pdf](http://www.faed.udesc.br/arquivos/id_submenu/151/leusa_fatima_lucatelli_possamai.pdf)  
Acesso em: 27 jan. 2023

SILVA, Jussiliano. **O Ensino das Equações do 1º Grau no Ensino Fundamental com o uso de Balanças.** Curso de licenciatura em matemática a distância. (UFPB): Araruna, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/1371/1/JAS04102016.pdf> Acesso em: 27 jan. 2023.

TREVISIO, Vanessa Cristina; ALMEIDA, José L. V. **O conhecimento em Jean Piaget e a educação escolar.** Centro Universitário UNIFAFIBE, Bebedouro, SP. 2012. Disponível em: <https://unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/cadernodeeducacao/sumario/31/04042014074544.pdf> Acesso em: 21 jul. 2023.

VALADARES, Jorge. **The Meaningful Learning Theory as a constructivist theory.** Universidade Nova de Lisboa, 2011. Disponível em: [http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo\\_ID4/v1\\_n1\\_a2011.pdf](http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID4/v1_n1_a2011.pdf) Acesso em: 27 jan. 2023

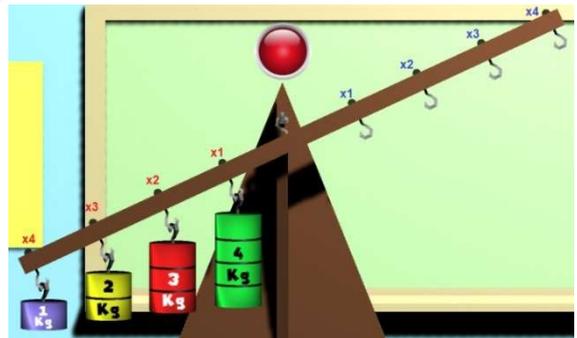
VLASSIS, J. The balance model: **Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown.** Universite de Liege. Bélgica, 2004.

## ANEXO 1 – Avaliação

<b>Escola Estadual</b>	
Turma: 9º ano _____	Data: ___/___/2022
Disciplina: Matemática	
Nome: _____	Nota: _____

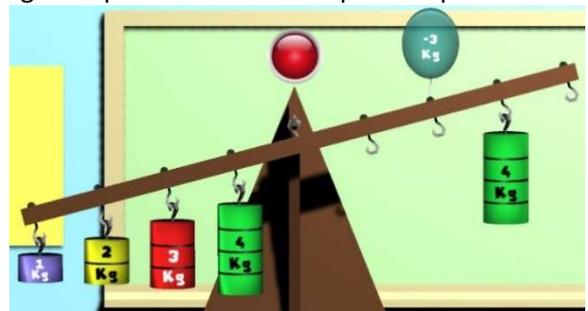
- 1) Pedro estava brincando com um jogo de equilíbrio e observou que a balança estava completamente desequilibrada, quantos quilos serão necessários colocar do lado direito para atingir o equilíbrio, utilizando apenas o primeiro gancho?

- a) 5 kg
- b) 100 kg
- c) 15 kg
- d) 20 kg



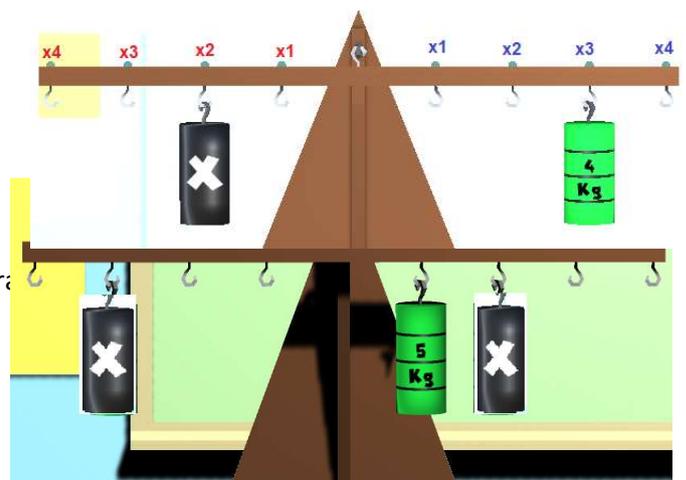
- 2) Pedro não escutou seu conselho na questão anterior e tentou resolver de forma diferente, mas mesmo fazendo algumas mudanças ele não conseguiu atingir o equilíbrio, agora quantos quilos serão necessários colocar do lado direito para atingir o equilíbrio utilizando apenas o primeiro gancho?

- a) 5 kg
- b) 70 kg
- c) 14 kg
- d) 20 kg

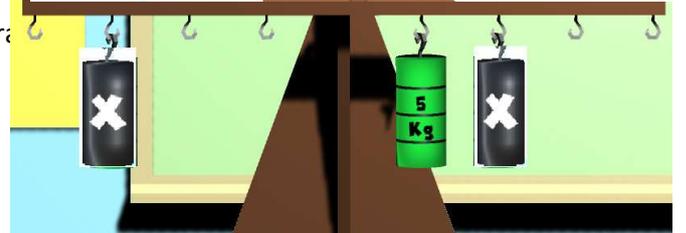


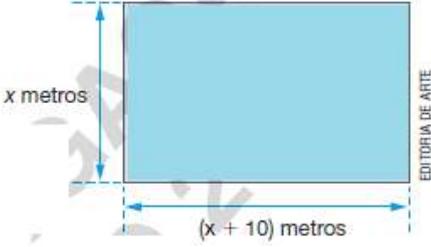
- 3) Sabendo que a balança abaixo já está equilibrada qual é o valor do peso x?

- a) 4 kg
- b) 6 kg
- c) 12 kg
- d) 240 kg



- 4) Sabendo que a balança abaixo já está equilibrada



- a) 5 kg  
b) 6 kg  
c) 7 kg  
d) 32 kg
- 5) Calcule a raiz ou solução da seguinte equação  $10x - 19 = 21$
- a)  $x = 4$   
b)  $x = 5$   
c)  $x = 2$   
d)  $x = 400$
- 6) Calcule a raiz ou solução da seguinte equação  $11x + 17 = 10x + 13$
- a)  $x = 4$   
b)  $x = 17$   
c)  $x = 1354$   
d)  $x = -4$
- 7) Daqui a 5 anos Karina terá 37 anos. Usando a letra  $x$  para representar a idade de Karina hoje, quais das equações abaixo permite calcular a idade que Karina tem hoje.
- a)  $x - 37 = 5$   
b)  $x + 37 = 5$   
c)  $x - 5 = 37$   
d)  $x + 5 = 37$
- 8) Em um terreno retangular, o comprimento tem 10 metros a mais que a largura. Se representarmos pela letra  $x$  o número de metros da largura, o comprimento será representado por  $x + 10$ . Sabendo que o perímetro desse terreno é 80 metros, qual é o valor da largura do terreno?
- 
- O diagrama mostra um retângulo azul. À esquerda, uma seta vertical indica a largura como 'x metros'. Abaixo, uma seta horizontal indica o comprimento como '(x + 10) metros'. À direita do retângulo, há uma seta vertical apontando para cima com o texto 'EDITORIA DE ARTE' ao lado.
- a)  $x = 500\text{ m}$   
b)  $x = 10\text{ m}$   
c)  $x = 15\text{ m}$   
d)  $x = 20\text{ m}$
- 9) Um número  $x$  de países disputou a primeira edição dos Jogos Olímpicos da Era Moderna, realizados em 1896 na cidade de Atenas (capital da Grécia). Se  $x$  representa a raiz da equação  $2x + 12 = 110 - 5x$ , quantos países disputaram a primeira edição dos Jogos Olímpicos da Era Moderna?
- a) 13 países  
b) 14 países  
c) 15 países  
d) 1896 países

**10)** (Ufla-MG) 10 caixas fechadas de parafusos mais 100 parafusos soltos pesam o mesmo que 15 caixas fechadas mais 20 parafusos soltos. Supondo que cada caixa tenha exatamente a mesma quantidade de parafusos, o número de parafusos em cada caixa é

- a) 16 *parafusos*
- b) 20 *parafusos*
- c) 24 *parafusos*
- d) 120 *parafusos*

