UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

RHUANA CARLA MAURI ZEFERINO

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE ÁREAS E PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS NA REDE ESTADUAL DE ENSINO

VITÓRIA
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

RHUANA CARLA MAURI ZEFERINO

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE ÁREAS E PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS NA REDE ESTADUAL DE ENSINO

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

VITÓRIA
2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Mauri Zeferino, Rhuana Carla, 1988-

M454m A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DE ÁREAS E PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS NA REDE ESTADUAL DE ENSINO / Rhuana Carla Mauri Zeferino. - 2023.

69 f.

Orientador: Moacir Rosado Filho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Introdução. 2. Modelagem Matemática no Ensino de Matemática: histórico e evolução.. 3. Geometria: referencial teórico.. 4. A Modelagem Matemática no Processo de Ensino Aprendizagem. 5. Modelagem Matemática no Estudo de Perímetro e Áreas de Figuras Planas.. 6. Considerações Finais.. I. Rosado Filho, Moacir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

"A Modelagem Matemática Como Estratégia Facilitadora no Processo de Ensino-Aprendizagem de Áreas e Perímetros de Figuras Planas na Rede Estadual de Ensino"

Rhuana Carla Mauri Zeferino

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 18/07/2023 por:

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Orientador – UFES

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Membro Interno – UFES

Prof. Dr. Paulo Roberto Prezotti Filho
Membro Externo – IFES Guarapari

"A Matemática vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura".

Bertrand Russel

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e Nossa Senhora Aparecida por ser meu refúgio e fortaleza.

À minha mãe Rozane Beatriz Vegini Mauri, e meu pai Clarindo, por sempre acreditarem em mim e me darem o suporte necessário durante toda a minha caminhada.

Ao meu esposo Valdimério Zeferino pela paciência, resiliência, amor, carinho e compreensão.

Ao meu filho amado Kauan Mauri Zeferino por me alegrar, nos momentos que mais precisei, com seu carinho e amor incondicional.

Ao meu irmão Renan Mauri e sua família por sempre torcerem pelo meu sucesso.

À minha amiga irmã Joglícia Gonoring Rodrigues Freiman por ser meu suporte nos momentos de dificuldade.

A todos os meus colegas de trabalho, que me deram suporte para enfrentar todos os desafios ao longo do curso.

Ao meu orientador Moacir Rosado Filho por acreditar em mim mais do que eu mesma, pela sua dedicação, orientação e paciência.

E finalmente a todos educadores do Programa de Mestrado PROFMAT/UFES por todo o conhecimento compartilhado.

RESUMO

Este trabalho fala sobre a influência da modelagem matemática no processo de ensino aprendizagem de matemática nas séries do ensino fundamental, ensino médio e Educação de jovens e adultos (EJA). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também são relacionados à proposta da modelagem matemática como ferramenta neste processo. São abordados, através de investigação e embasamento teórico os aspectos do “fazer matemática” no contexto escolar. O trabalho relata também uma aplicação da modelagem matemática como estratégia de ensino aprendizagem de perímetro e áreas de figuras planas de forma contextualizada. Esta aplicação da modelagem ocorreu com os educandos da 2ª série do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Ilda Ferreira da Fonseca Martins. Através de atividades práticas, construção da planta baixa da escola, os educandos aplicaram os conteúdos em situações do cotidiano, o que despertou interesse e curiosidade pelo aprendizado, oportunizando um aprendizado significativo e ao mesmo tempo fortaleceu os laços afetivos entre educador e educandos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino de Matemática. PCN. Área. Perímetro.

ABSTRACT

This work talks about the influence of mathematical modeling in the teaching-learning process of mathematics in elementary school, high school and youth and adult education (EJA) grades. The National Curricular Parameters (PCN) are also related to the proposal of mathematical modeling as a tool in this process. Aspects of "doing mathematics" in the school context are approached, through investigation and theoretical basis. The work also reports an application of mathematical modeling as a teaching and learning strategy of perimeter and areas of plane figures in a contextualized way. This application of the modeling took place with students from the 2nd grade of high school at the State School of Elementary and Secondary Education Ilda Ferreira da Fonseca Martins. Through practical activities, construction of the school's floor plan, students applied the contents in everyday situations, which aroused interest and curiosity for learning, providing opportunities for meaningful learning and at the same time strengthening the affective bonds between educator and students.

Keywords: Mathematical Modeling. Mathematics Teaching. PCN. Area. Perimeter.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> "... Com esta prática educativa, procura-se através da ação do fazer chegar ao saber, fazendo da Modelagem, com sua Filosofia, com seu método, uma ação concreta na tentativa de amenizar esta crise no ensino da Matemática que, há muito, se encontra na dependência do saber para fazer" (BURAK, 1987).

Atualmente nota-se que o Ensino de Matemática e suas propostas curriculares acabam se tornando incompatíveis com a realidade quando muitas vezes deixam de relacionar a vivência do educando com as práticas educacionais escolares, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento de cálculos e interpretação de textos e atividades propostas.

Alguns educadores utilizam métodos para tentar diminuir essas dificuldades e com o objetivo de alcançar respostas positivas, mas, em contrapartida, há outros que não se preocupam com este aspecto. Muitas vezes agem de maneira rápida nas aulas e voltam sua preocupação ao cumprimento do conteúdo previsto no programa anual de ensino, imposto pelo sistema escolar.

Tais atitudes levam o educador à não aplicabilidade de outras formas de metodologia que poderiam viabilizar uma melhor comunicação com os educandos e maior facilidade de compreensão e estímulo ao raciocínio do educando. Isso acaba sendo negativo, pois é importante levar em consideração a vida cotidiana dos educandos pensadas por olhares atentos destes educadores.

Tendo em vista uma série de dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, a Modelagem Matemática apresenta-se como uma ferramenta que visa dar condições aos docentes de controlar ou até mesmo superar tais problemas decorrentes deste processo.

O ensino de Matemática sempre foi um alvo das atenções sociais, destacando-se como a disciplina que tradicionalmente é responsável pela maior parte dos históricos de baixo rendimento escolar.

A expectativa é que ao usar a Modelagem Matemática o grau de dificuldade apresentado pelos educandos em sala de aula seja minimizado ao máximo. Para isso apresentamos também uma abordagem referente ao PCN (BRASIL, 1998) relacionando os temas propostos a Modelagem.

O objeto de pesquisa deste trabalho está direcionado à **investigação dos métodos de aplicação da Modelagem Matemática no que diz respeito à melhoria do ensino-aprendizagem dos educandos e dos aspectos do "fazer Matemática" no contexto escolar**.

Para compreensão do objeto de pesquisa, a abordagem será feita da seguinte forma:

1. De que maneira a Modelagem Matemática pode ser trabalhada como estratégia e ferramenta no ensino-aprendizagem de perímetro e área de figuras planas?

2. De que forma a Modelagem Matemática aliada à proposta do PCN pode proporcionar a aprendizagem de geometria?

3. Como a Modelagem Matemática pode favorecer os educandos no que diz respeito à reflexão social e seu papel na sociedade?

A Modelagem Matemática como estratégia facilitadora da aprendizagem de Matemática visa também à formação de um educando mais crítico, consciente, reflexivo e participante. O intuito é mostrar novas formas de ensinar e aprender a disciplina e que é possível apresentá-la de forma diferente e contextualizada com o auxílio da Modelagem.

De maneira geral, a Modelagem Matemática apresenta-se como uma forma de construção do conhecimento de maneira natural e não por imposição, o que facilita o entendimento e as relações com o cotidiano do educando. Segundo CALDEIRA (1992):

> "O que é importante acentuar é que os conceitos aparecem da necessidade e não são impostos sem nenhum sentido de ser. Talvez essa seja a principal característica da dinâmica deste trabalho."

Por fim, são apresentados os benefícios da Modelagem Matemática para todas as séries do ensino fundamental, ensino médio e na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e os resultados que ela pode proporcionar ao ensino aprendizagem dos educandos em Matemática.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Para buscar uma resposta para as questões chaves que se apresentam nesta pesquisa - como situações de ensino orientadas por meio da Modelagem Matemática podem influenciar de forma significativa na construção dos conhecimentos dos educandos? - se estabelece o seguinte objetivo geral:

- Investigar como os educandos utilizam os conhecimentos de Modelagem Matemática na resolução de problemas reais envolvendo perímetro e áreas de figuras planas.

1.1.2 Objetivos específicos:

E, como objetivos específicos, temos:

-Verificar os impactos que as atividades em Modelagem Matemática provocam na prática pedagógica de todos os envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem.

-Verificar como se dá à transição das situações problemas para os conceitos matemáticos e como os educandos fazem para resolver essas situações.

-Analisar as alterações de atitudes dos educandos frente às distintas experiências realizadas (seleção temas, elaboração de propostas, resolução de problemas, entre outras).

-Analisar a avaliação do educando sobre seu próprio desempenho nas atividades propostas.

1.2 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

O meu interesse por esta investigação está diretamente ligado ao fato dela estar em consonância com meus interesses pessoais e minhas experiências mais recentes como educador e educando, além das contribuições que ela pode trazer em virtude da lacuna existente na literatura.

Este projeto foi sendo elaborado à medida que fui construindo minha identidade como educador matemático, preocupando-me com questões relativas ao ensino e a aprendizagem. Estas preocupações me fizeram buscar referências que ajudassem a encontrar respostas para essas questões. Nesse contexto, redigi a pergunta que vai direcionar esta pesquisa e creio que ela contribuirá substancialmente na continuidade do processo de construção da minha identidade como educador matemático.

Na literatura, a análise do processo de construção de modelos matemáticos, durante a abordagem de situações de Modelagem, costuma se concentrar na comparação dos procedimentos adotados pelos educandos com esquemas, normalmente herdados da Matemática Aplicada, que tentam normatizar o trabalho com Modelagem. Contudo, não tenho percebido na literatura a preocupação de investigar este processo de construção analisando como os educandos constroem esses modelos, quais as estratégias adotadas durante a construção e quais os critérios utilizados para abandonar ou reformular essas estratégias.

Assim, a minha expectativa é que a presente investigação traga considerações relevantes sobre este processo, levando em consideração às discussões que levam os educandos a abandonar ou reformular as estratégias adotadas para a construção dos referidos modelos e favoreça a compreensão do educador de Matemática sobre como o ambiente de Modelagem interfere na construção do conhecimento.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA: HISTÓRICO E EVOLUÇÃO

2.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA: ALGUMAS PERSPECTIVAS

Embora a aprendizagem possa ser considerada como um fenômeno amplo e complexo, caberia se perguntar até que ponto os aspectos desse fenômeno poderiam ser explicados.

Neste contexto, diversas pesquisas têm discutido a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica e possíveis contribuições advindas do seu uso em situações de ensino e aprendizagem. Entretanto, ainda que as pesquisas apontem diferentes tipos de contribuições, a perspectiva subjacente às atividades de Modelagem define encaminhamentos para o desenvolvimento destas atividades em sala da aula.

A Modelagem Matemática tem sido apontada por diversos educadores matemáticos como uma alternativa pedagógica que visa relacionar matemática escolar com questões extra matemáticas, configurando uma atividade que se desenvolve segundo um esquema - um ciclo de Modelagem - na qual a escolha do problema a ser investigado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos. Neste trabalho, assumimos o entendimento de Modelagem já apresentado em Almeida e Brito (2005), como sendo uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não essencialmente matemático.

São muitos os pesquisadores e educadores matemáticos que defendem a incorporação de atividades de Modelagem Matemática às aulas. Uma hipótese subjacente à proposta de Modelagem no Ensino de Matemática é que a abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesses dos educandos, pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos (Almeida e Brito, 2005) bem como pode servir para mostrar aplicações da matemática em outras áreas de conhecimento.

Por outro lado, em diversos trabalhos de Modelagem o foco não tem sido o conhecimento matemático ou as aplicações. Skovsmose (2001), pautado em suas ideias sobre Educação Matemática Crítica, atribui à Modelagem Matemática um potencial importante no que diz respeito à formação do educando enquanto cidadão.

Levando em consideração este contexto de observação das pesquisas relativas à Modelagem, parece notório que existem diferentes “perspectivas” para a Modelagem Matemática no âmbito das aulas de matemática nos diferentes níveis de escolaridade. Especialmente a partir de Keitel (1993), podem ser percebidas argumentações de que em atividades de Modelagem Matemática os educandos e/ou educadores podem considerar diferentes interesses e procedimentos para a resolução do problema. Alinhados com essa argumentação, Kaiser e Sriraman (2006) sistematizaram seis perspectivas para a Modelagem Matemática nas quais evidenciam diferentes aspectos quanto ao objetivo central com que a atividade de Modelagem é desenvolvida em contextos educativos, quais sejam: perspectiva realística, perspectiva contextual, perspectiva sócia-crítica, perspectiva epistemológica, perspectiva cognitiva e perspectiva educacional.

Na perspectiva realística os autores consideram situações-problema autênticas originadas da indústria ou de ambiente de trabalho, com o objetivo de desenvolver habilidades de resolução de problemas aplicados.

Na perspectiva contextual consideram a inclusão de situações-problema nas aulas de matemática com a finalidade de contextualizar ou mostrar aplicações dos conteúdos matemáticos levando em conta principalmente questões motivacionais. É um problema “de palavras”, de interpretação de enunciados, em que obter um modelo matemático é uma atividade de resolução de problemas, previamente construída visando que os educandos façam uso de situações significativas que os levem a construir e reconstruir ideias matemáticas.

Segundo os autores, a perspectiva sócia-crítica se caracteriza frente ao poder formatador da Matemática na sociedade e a ideia de que o ensino de matemática deve preparar e capacitar os educandos para exercerem a cidadania de forma autônoma e intervir em debates baseados em matemática por meio de sua reflexão sobre ela e sobre seu uso na sociedade.

Na perspectiva epistemológica os autores ponderam que a Modelagem é tomada, inclusive, no contexto estritamente matemático e, portanto, tem como um de seus objetivos o desenvolvimento da Matemática enquanto teoria. Neste sentido, as situações-problema são estruturadas para gerar o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Já para a perspectiva educacional Kaiser e Sriraman (2006) argumentam que a atividade de Modelagem Matemática tem como foco a integração de modelos matemáticos no ensino de matemática, visando levar os educandos a investigar o ‘porquê’ e o ‘como’ dos modelos matemáticos, o que implica em ver o modelo com um objetivo em si, tanto quanto às potencialidades do modelo quanto como um meio para a aprendizagem matemática. Nesta perspectiva, é incumbência do educador analisar as dificuldades dos educandos no processo de Modelagem, especialmente os relacionados com a matematização e interpretação dos processos e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos curriculares.

A perspectiva educacional pode, ainda, ser tomada a partir de dois objetivos mais específicos: quando a atividade tem como objetivo desencadear processos de aprendizagem, os autores afirmam que se trata da perspectiva educacional didática; já se o objetivo está relacionado à introdução de conceitos matemáticos e ao seu desenvolvimento, a perspectiva educacional é denominada conceitual.

Já a perspectiva cognitivista, segundo os autores, tem como interesse principal compreender quais funções cognitivas estão envolvidas na atividade matemática dos educandos enquanto lidam com Modelagem Matemática. Em outras palavras, tal perspectiva se preocupa em analisar os processos cognitivos ativados pelos educandos durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem.

A perspectiva cognitivista está relacionada à perspectiva educacional, especialmente se considerarmos que o interesse, nessa perspectiva, reside na investigação dos processos cognitivos individuais dos educandos envolvidos nas atividades bem como identificar barreiras matemáticas, psicológicas ou cognitivas relacionadas com a aprendizagem quando os educandos desenvolvem atividades de Modelagem Matemática.

Para Barbosa e Santos (2007),

> [...] propósitos diferentes implicam em diferenças nas formas de organizar e conduzir as atividades de Modelagem. Isso nos força a refletir sobre as maneiras como as práticas de sala de aula

> representam ou constituem perspectivas mais amplas sobre Modelagem Matemática (p.2).

Conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas é potencializar a prática de Modelagem em sala de aula, uma vez que os educadores podem trabalhar com estas atividades de modo a contemplar diferentes perspectivas e, consequentemente, os diferentes aspectos inerentes às atividades de Modelagem. Visto que na Modelagem Matemática o educador é o mediador entre o conhecimento matemático e o conhecimento de cada educando.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL: O INÍCIO

A maneira como o processo de modelagem promove a matemática e as diversas formas de se construir ciência, chamou a atenção dos educadores e na década de 1970 surgem os primeiros trabalhos, aqui no Brasil, sobre modelagem matemática no ensino, promovidos, segundo Biembengut e Hein (2003), pelos educadores Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi.

A Modelagem na perspectiva de Educação Matemática para ensino de matemática no Brasil, teve sua primeira dissertação de mestrado na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Campus de Rio Claro – Rio Claro – São Paulo. Iniciou-se, para o autor, a construção de uma trajetória com a dissertação (1987), a tese (1992) e a difusão em eventos da área e que fortaleceu a concepção, inicialmente sentida, experienciada e vivida, no âmbito do Ensino Fundamental e Médio da Educação Básica. As referências teóricas que direcionaram o trabalho eram as referências da Matemática Aplicada embasadas em autores como Andrews J. G e MacLone, R. R (1976) no livro Mathematical Modelling ou ainda o livro Applications in School Mathematics (1979 YEARBOOK), e artigos que tratavam do assunto: Taylor, B & Oke, K. H, Kapur, N. J, Polak H. O, Oke, K. H. & Bajpai, A. C, Halmos, G. G, Haberman, R., Gross, H. E, Bassanezi R.C. e Berry, J. S. & O´Schea. T, dentre outros.

Trabalhos produzidos pelos Cursos de Especialização para educadores dos diversos níveis de ensino no ano de 1983, realizados na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava - FAFIG, atualmente Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, também serviram como importantes referenciais para o desenvolvimento do trabalho com Modelagem.

Neste contexto foram realizados encontros, onde buscava-se apresentar e discutir essa forma de trabalho para o ensino de Matemática, ainda de forma incipiente, entretanto, com linhas gerais mais ou menos definidas em nível de ideias. Os encontros permitiram avaliar aspectos do trabalho até então desenvolvidos.

Nos encontros realizados ficou nítida a existência de uma forte vontade de mudança na parte metodológica. Entretanto, havia presente também uma resistência bastante acentuada. Durante as discussões e depoimentos dos educadores participantes pôde-se perceber que essa resistência tinha como origem a insegurança para a adoção de uma nova forma de se trabalhar com a matemática; a não vivência dessa nova experiência; a preocupação com o programa da série e a falta de visão do todo do trabalho.

A Modelagem Matemática foi e está sendo concebida como “um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões” (BURAK, 1987, p. 21). Também se assume como referencial teórico adequado, à forma concebida para o trabalho com a Modelagem, as teorias cognitivistas, tendo como suporte as teorias Construtivistas de Jean Piaget, Sócio interacionista de Vygotsky e da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Os motivos dessas escolhas foram que elas se constituem nas mais difundidas no âmbito das teorias cognitivistas e todas têm papel importante na aprendizagem e em consequência para a Educação.

A modelagem matemática ganhou proporções maiores como estratégia de ensino aprendizagem e em 2001 a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, SBEM, cria o Grupo de Trabalho (GT) de Modelagem Matemática. Em Blumenau, Santa Catarina, surge, em 2006, o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino, CREMM. Segundo informações extraídas do próprio sítio oficial do GT de Modelagem Matemática, que também é conhecido por GT10 (por ter sido o décimo Grupo de Trabalho a ser criado pela SBEM), o grupo tem como principal missão “favorecer o debate e a colaboração dos pesquisadores brasileiros que realizam investigações sobre modelagem matemática, na perspectiva da Educação Matemática, articulando o desenvolvimento dessa frente de pesquisa no país”.

Em 2007, o GT10 reuniu diversos artigos sobre modelação matemática e os publicou em um livro intitulado Modelagem Matemática na Educação Matemática: Pesquisas e Práticas Educacionais. A obra apresenta a modelagem matemática de diversas maneiras e em diversas situações, fazendo emergir, de certa forma, quatro grandes áreas de concentração ou, em outras palavras, as tendências da modelagem matemática no ensino:

I. Aspectos teóricos da modelagem matemática: em um primeiro momento, os artigos apresentam uma preocupação com o aprofundamento teórico que contribua para a aplicação da modelação matemática.
II. Modelagem e prática de sala de aula: aqui são apresentadas as pesquisas de campo tanto no Ensino Básico como no Ensino Superior. É o momento onde as estratégias são testadas.
III. Modelagem matemática e as tendências da informação e da comunicação – nessa tendência, os artigos defendem o uso da modelagem matemática através dos ambientes virtuais de aprendizagem.
IV. Modelagem matemática e formação de educadores: a modelação matemática aqui é apresentada como estratégia de ensino para o educador e para o educando.

2.3 OS PRECURSORES DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL

Três pessoas são consideradas fundamentais no desenvolvimento e consolidação da Modelagem Matemática no ensino brasileiro: Aristides Camargos Barreto, entusiasta em modelar matematicamente músicas, utilizou-se da modelagem em suas aulas na graduação da PUC-Rio de Janeiro-RJ desde a década de 1970; Ubiratan D'Ambrosio, representante brasileiro na comunidade internacional de Educação Matemática, nas décadas de 1970 e 1980 promoveu cursos e coordenou projetos na Universidade de Campinas(SP) - UNICAMP que impulsionaram a formação de grupos em matemática aplicada, biomatemática e em modelagem e Rodney Carlos Bassanezi, que além de atuar nesses cursos e projetos da UNICAMP, tornou-se o principal disseminador da modelagem matemática pois, ao adotá-la em suas práticas de sala aula (graduação, pós-graduação lato e stricto sensu e cursos de formação continuada) conquistou número significativo de adeptos por todo o Brasil.

Aristides C. Barreto tomou conhecimento sobre modelagem matemática quando cursou Engenharia na década de 1960. A ideia de usar a modelagem no ensino de matemática começou na metade dos anos de 1970, na PUC-Rio ao passar atuar como educador nesta Instituição. Na PUC-Rio, Barreto sempre procurava utilizar-se de modelos como estratégia de ensino nas disciplinas de Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial Integral. Em 1976, realizou a primeira experiência pedagógica com 212 educandos de um Curso de Engenharia. Conjuntamente com os educandos, elaborou vários modelos em áreas específicas como Linguística, Ecologia, Biologia, dentre outras.

Essas experiências realizadas levaram-no a crer que a modelagem no ensino tornava os educandos mais motivados e interessados, descartando a constante e inquietante pergunta ‘para que serve isto?’ Diante das teorias, ele estimulava a criatividade e o espírito crítico. A partir de 1989, Barreto passou a interpretar e produzir textos literários em prosa e verso, com ênfase em letras de música. Muitos desses trabalhos ele divulgou por meio de artigos (em revistas e anais de congressos) e de eventos. Nesse ínterim, a convite do educador D’Ambrosio, faz palestra na UNICAMP, momento em que Bassanezi teve o primeiro contato com o tema e o termo modelagem matemática.

Na década de 1960, D’Ambrosio, educador e pesquisador na Brown University, em Providence, Rhode Island; na University of Rhode Island, em Kingston - Rhode Island e na State University of New York, em Búfalo- New York, tomou ciência do movimento que vinha ocorrendo nos Estados Unidos em relação ao ensino e a aprendizagem de matemática. Formava-se nessa época o Undergraduate Mathematics Application Program – UMAP que objetivava preparar módulos de aprendizagem de matemática por temas. Isto é, elegia-se um tema matemático e, então, procurava-se preparar um material de apoio didático com aplicações desse tema nas mais diversas áreas do conhecimento, com o fim de melhorar a aprendizagem matemática de educandos da Educação Superior.

Muito embora não se denominava de modelos matemáticos, os módulos apresentavam esta abordagem. Em 1972 D’Ambrosio retorna ao Brasil para atuar na UNICAMP. Com o apoio da UNESCO e da OEA, D’Ambrosio tem a oportunidade de implantar propostas de educação matemática no Brasil semelhantes as que ocorriam em alguns países da Europa e Estados Unidos. Dentre as propostas implantadas nesse período, destacam-se duas: a produção de materiais de apoio didático na forma de módulos e a criação do 1º Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática na UNICAMP. Foram produzidos novos materiais de apoio didático sobre vários temas matemáticos, todos voltados ao Ensino Fundamental. O mestrado, projeto da OEA, teve 4 turmas, com ingressos nos anos de 1975, 1976, 1977 e 1978. Cada turma tinha em média 32 educandos. A maioria dos mestrandos era educadores de Instituições de Educação Superior de diversos estados brasileiros e países das Américas do Sul e Central. O Curso tinha mais ou menos o modelo proposto na Universidade de Roskilde na Dinamarca, isto é, um modelo interdisciplinar, não linear. O modelo adotado nesse Mestrado deu origem a trabalhos em Modelagem Matemática e Etnomatemática.

Neste contexto, D'Ambrosio ouve falar de um educador da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RJ, Aristides Camargo Barreto, matemático e que está interessado em modelos dinâmicos integrados a música. Assim, Barreto vem a UNICAMP para uma palestra que contribuiu, em particular, para aumentar a motivação de Rodney Carlos Bassanezi.

Na década de 1980, Rodney Carlos Bassanezi coordena um outro Curso, também com o apoio da OEA e promovido na IMECC-UNICAMP, para 30 educadores de Cálculo Diferencial Integral, de diversas Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil, com duração de uma semana. Nesse curso não havia método pré-estabelecido, ou melhor, não se pretendia fazer uso do método tradicional de ensino. Assim, em primeiro momento, após 'bate-papo' com os participantes, foi proposto a eles que se reunissem por 2h e apresentassem um problema que envolvesse o Cálculo Diferencial e Integral para a solução. Duas horas depois, a maioria dos problemas propostos era igual aos que se apresentava nos livros texto, sem criatividade. Esse momento foi crucial para Bassanezi propor a modelagem matemática, em particular, na resolução de problemas de biologia aplicados ao Cálculo Diferencial Integral (biomatemática).

Em 1982, é organizado um Curso de Pós-Graduação na Universidade Estadual de Guarapuava- PR e convidados educadores da UNICAMP para ministrar, dentre eles, Bassanezi como coordenador. Assim, Bassanezi propõe uma alteração no programa tradicional de pós-graduação, que é aceita pelos participantes: fazer uma visita a empresas da cidade e, a partir do primeiro contato com as questões da realidade, levantar problemas de interesse para serem investigados. Assim, questões relativas às abelhas, ao chimarrão, a fabricação de papel, a suinocultura, dentre outras, impulsionaram a realização do 1º Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e, por consequência, a realização de dezenas de outros cursos sob a coordenação de Bassanezi nas mais diversas instituições de Educação Superior do Brasil. Atualmente, ele contabiliza dezenas e dezenas destes cursos de pós-graduação e de formação continuada e palestras, em várias cidades de todas as regiões brasileiras, promovidos por Instituições de Ensino ou Secretarias Estaduais e Municipais de Educação.

Os cursos realizados e as orientações de educandos de iniciação científica e de pós-graduação lato e stricto sensu, ao longo dos anos, levaram Bassanezi a reorganizar o método, as estratégias, os instrumentos e a própria pesquisa, passando a atuar mais na Matemática Aplicada, em particular, na linha de pesquisa em biomatemática. Parte deste trabalho encontra-se no último livro que publicou - Modelagem no Ensino Aprendizagem (2002) que tem sido adotado em vários programas de graduação e pós-graduação no país.

2.4 PESQUISAS RECENTES NO BRASIL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA

O crescimento do interesse por Modelagem Matemática no campo da Educação Matemática tem sido visível nas últimas décadas. Trata-se de um tema sempre presente nos eventos e publicações, suscitando interesse de educadores e pesquisadores. Este crescimento tem impulsionado a configuração de uma comunidade brasileira de pesquisadores em Modelagem, cuja configuração parece estar relacionada à produção de dissertações e teses (FIORENTINI, 1996; SILVEIRA,2007).

Um primeiro balanço sobre a produção de dissertações e teses sobre Modelagem no país foi realizada por Fiorentini (1996). Este autor analisou os 15 trabalhos concluídos no período de 1976-1994. A maioria dos estudos concentravam-se principalmente em instituições como Universidade Estadual Paulista (UNESP) e Universidade de Campinas (UNICAMP). Segundo a argumentação de Fiorentini (1996), estes estudos pioneiros possuíam o mérito de mostrar novas possibilidades para o ensino de matemática, porém ainda demandavam maior rigor científico, detendo-se mais na argumentação pela inclusão da Modelagem na sala de aula e sua respectiva ilustração através de exemplos. Recentemente, Silveira (2007) realizou um levantamento da produção de dissertações e teses publicadas até 2005, mostrando que até este ano havia sido publicado 54 dissertações e 11 teses sobre o tema. Em particular, o autor mostra que a partir de 2002 a média de defesas de dissertações/teses é cerca de 8 ou 9 unidades/ano, enquanto que antes deste ano ficava em torno de 2 ou 3 unidades/ano. Tais fatos podem ser associados à criação pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), em 2001, do Comitê de Ensino de Ciências e Matemática, de modo que foram autorizados novos cursos de pós-graduação *stricto sensu*, sendo que alguns deles (Universidade Estadual de Londrina, Universidade Federal do Pará, etc.) possuíam docentes com interesse explícito em Modelagem. Outro fator, também reconhecido por Silveira (2007), refere-se à formação de novos doutores no país que passaram a orientar dissertações/teses sobre Modelagem, bem como o caso de pesquisadores que atuavam em outros campos e migraram para a da Modelagem Matemática. O ponto a ser destacado é o crescimento da produção de dissertações e teses sobre Modelagem Matemática, o que, provavelmente, deve se refletir na produção de artigos em periódicos e eventos arbitrados, dado os critérios de avaliação da CAPES para os Programas de Pós-Graduação. Esta produção científica significa que já temos um conjunto de conhecimentos sobre o tema. E como ela ocorre, em grande parte, nos Programas de Pós-Graduação, podemos relacionar com a formação de novos mestres e doutores que passaram e passarão a atuar na Área.

Ao mesmo passo que identificamos o crescimento da produção nos programas de pós-graduação (SILVEIRA, 2007), também lembro da criação e consolidação de espaços específicos para o debate sobre Modelagem Matemática: a Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) e o Grupo de Trabalho sobre Modelagem Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (GTMM/SBEM). Já o GTMM/SBEM foi estabelecido em 2001 pela Diretoria Executiva da SBEM, numa iniciativa de formar grupos de pesquisa no âmbito da entidade. O GTMM possui o claro objetivo de discutir relatos de pesquisas e desenvolver ações científicas. Até o momento, ele reuniu-se presencialmente durante os Seminários

Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), ocorridos em 2003 e 2006, respectivamente, em Santos e Águas de Lindóia.

Relacionando os trabalhos de Fiorentini (1996), Silveira (2007) e a breve retomada histórica da criação da CNMEM e do GTMM/SBEM, sugiro que podemos dividir a trajetória do movimento científico da Modelagem Matemática no país em dois momentos. O primeiro, que ocorreu até meados de 2000, é marcado pela produção de dissertações/teses em torno de 2 ou 3 unidades/ano e pela ausência de espaços específicos para o debate científico. No segundo momento, observamos a produção de dissertações/teses em torno de 8 ou 9 unidades/ano e a constituição e consolidação de espaços particulares para o debate científico, a saber a CNMEM e o GTMM/SBEM. Há também uma componente territorial nestes dois momentos. No primeiro, grande parte da produção científica estava concentrada em duas instituições, UNESP e UNICAMP (FIORENTINI, 1996; SILVEIRA, 2007). No segundo momento, podemos notar uma maior descentralização, envolvendo instituições da região Norte, Nordeste e Sul do país (SILVEIRA, 2007). Outra evidência deste aspecto pode ser notada no livro que, atualmente, o GTMM/SBEM está organizando (BARBOSA, CALDEIRA, ARAÚJO, 2007). Ele é composto por 15 capítulos, os quais expressam pesquisas realizadas em 14 instituições em 8 Estados da Federação. Então, podemos dizer que existe uma comunidade científica em Modelagem no Brasil?

Usando os critérios de Kuhn (1997), pode-se dizer há um objeto claro que nos unifica, a Modelagem, e temos uma comunicação relativamente ampla através de eventos, bancas de defesas de dissertações e teses, publicações, etc. Porém, seguindo ainda a conceituação de Kuhn (1997), não nos encaixamos bem na característica de ter tido uma mesma iniciação profissional, já que me parece razoável dizer que os pesquisadores em Modelagem possuem uma formação e trajetória profissional heterogênea, em grande medida pela jovem idade da comunidade. Igualmente, a característica de usar uma mesma literatura especializada não se aplica bem, como mostrarei adiante, no caso de nossa comunidade.

Talvez estes dois últimos aspectos, sobre a iniciação profissional e a literatura especializada, não se aplicam totalmente ao Ensino de Matemática e às comunidades que existem no seu interior. Pela natureza do objeto, multifacetado, atravessado por dimensões sociais, culturais, etc., parece-me desejável ter a presença de pesquisadores de diferentes trajetórias profissionais, trazendo contribuições de outros campos, mas mantendo os compromissos consensuados da comunidade. Igualmente, parece-me que a característica da literatura especializada deve ser relativizada, já que não podemos prescindir dos avanços teóricos ocorridos em outros campos. Portanto, a noção de comunidades científicas merece releitura para dar conta de casos particulares como o do Ensino de Matemática e suas comunidades. Seguindo este argumento, penso ser legítimo dizer que existe uma comunidade científica de Modelagem no país, a qual se encontra em processo de consolidação. Ela possui fortes perspectivas de crescimento e de maior consolidação, já que muitos de seus membros estão envolvidos na formação de novos doutores, dos quais se espera que se envolvam na formação de outros pesquisadores, e na teorização do campo.

O crescimento e a consolidação da comunidade de Modelagem não dependem apenas de aspectos numéricos, mas em particular de sua produção científica.

Através dela, podemos contribuir para a consolidação do campo maior da Educação Matemática e, em última instância, oferecer subsídios para a sociedade. Como decorrência, argumento que a comunidade necessita fazer uma reflexão mais sistemática sobre a prática de pesquisa em Modelagem.

2.5 O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E A PROPOSTA DA BNCC

A Modelagem Matemática proporciona aprendizagem de diversas competências gerais da Educação Básica, que vão desde a Educação Infantil até o Ensino Médio e precisam ser aplicadas em todas as etapas do ensino. Foram selecionadas algumas competências gerais da Educação Básica em que a Modelagem propicia um melhor aprendizado dessas competências.

Competência geral 2 (Pensamento científico, crítico e criativo): Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Competência geral 5 (Cultura digital): Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Competência geral 7 (Argumentação): Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

A Modelagem Matemática é um método científico de pesquisa com uma abordagem própria das ciências incluindo a investigação como descreve a competência 2 e argumentação com base e dados confiáveis, e utilização das tecnologias digitais como descritas na competência 5 e 7. Durante a etapa de formulação dos problemas e elaboração das hipóteses, o educando é levado a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, e em determinados momentos a utilizar as tecnologias digitais de informação e comunicação para acessar dados e resolver os problemas por eles propostos de forma clara e objetiva. Segundo Bassanezi o próprio ato de trabalhar com a modelagem matemática desenvolve a "capacidade em geral e atitudes dos educandos, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas" (BASSANEZI, 2002, p.36).

"A fase exploratória de um trabalho com modelagem matemática promove o aprendizado na busca por informações relevantes e confiáveis posteriormente usadas na formulação do problema e analisadas para construção do modelo. A escolha do tema permite o debate de questões relevantes à realidade dos educandos e da sociedade: um trabalho sobre o sistema de distribuição de água de uma cidade, por exemplo, pode suscitar questões sobre consumo e desperdício ou acesso à água potável pela população. Já os processos de validação do modelo e interpretação dos resultados exigem o desenvolvimento da capacidade argumentativa e interpretativa." (CHRISTIAN ROBERTO DAMETO, 2021, p.24).

A modelagem matemática proporciona um ambiente favorável ao aprendizado de todas as cinco competências específicas de Matemática e suas tecnologias. Que são elas:

Competência específica 1- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Competência específica 2- Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Competência específica 3- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência específica 4- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Competência específica 5- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A competência específica1 é envolvida na modelagem quando escolhe o tema que, de acordo com a proposta de Burak (1992, p.178), o grupo deve refletir quais são os assuntos que lhe interessam, podendo ser direcionados, com a mediação do educador, a questões socialmente relevantes da atualidade. Já a competência específica 2 aparece quando desenvolve o tema pois envolve decisões racionais promovendo o aprendizado da competência crítica, onde o trabalho com modelagem "focaliza a preparação dos educandos para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações e conceitos matemáticos" (BASSANEZI, 2002, p.37). Quando escolhemos qual estratégia, conceitos e procedimentos matemáticos utilizar para "interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos" (BRASIL, 2018, p.523), e as etapas de validação do modelo e interpretação dos resultados (BURAK, 1992, p.180-182) estamos abordando a competência específica 3. O argumento de aprendizagem apontado por Bassanezi (2002, p.37) implica que o trabalho com modelagem facilita "compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática" (BASSANEZI, 2002, p.37), favorecendo a construção do raciocínio matemático proposta pela competência específica 4. Nesse momento é utilizado diversas representações matemáticas (algébrica, geométrica, estatística, computacional, etc.), ou seja, é um momento com "um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas" (BASSANEZI, 2002, p.37). "Interpretar a matemática em todas suas facetas supõe também um progressivo trabalho com propriedades da matemática pura, e a experiência obtida durante a experimentação (BASSANEZI, 2002, p.26-27) contribui na capacidade de perceber padrões que darão origem a hipóteses no momento de abstração (BASSANEZI, 2002, p.27). Tais hipóteses são postas à prova para validação (BASSANEZI, 2002, p.30) dos resultados, e a necessidade de modelos progressivamente mais representativos dos problemas estudados leva a teorias e técnicas mais refinadas e complexas da matemática, incluindo demonstrações de propriedades matemáticas, junto com um entendimento da necessidade de argumentação consistente" (CHRISTIAN ROBERTO DAMETO, 2021, p.26). Assim, a modelagem matemática aborda também a competência específica 5.

3 GEOMETRIA: REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 A GEOMETRIA

A matemática surgiu da necessidade de contar e medir, ligadas às atividades e técnicas cotidianas. A geometria é, portanto, tão antiga quanto a escrita. Segundo Boyer (1974) é muito complicado afirmar sobre quando surgiu a geometria, mesmo assim Heródoto e Aristóteles deram os créditos a civilização egípcia. Ainda conforme Boyer (1989, p.6)

> "[...] Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria. [...].

Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar." Portanto a geometria não surgiu como um conhecimento lógico-formal, mas surgiu como uma representação real dos objetos e das formas.

Tales de Mileto trouxe a geometria para a Grécia no século 5 a.C., segundo Bicudo et al. (2003) na Grécia se acreditava naquilo que se via. Mol (2013) afirma que foram as necessidades práticas que serviram de estímulo para o desenvolvimento da matemática egípcia, esses conhecimentos eram repassados através de registros, como por exemplo o Papiro de Rhind, datado com cerca de 1650 a.C. onde contém problemas de aritmética e geometria, bem como suas soluções.

Segundo Mol (2013, p.29), na Grécia, a Matemática "deixou de ser uma coleção de resultados empíricos e passou a ter o formato de uma ciência organizada de maneira sistemática e por elementos racionais." Logo os gregos passaram a aperfeiçoar a geometria. Por volta de 300 a.C. Euclides escreveu o livro Os Elementos onde ele fez um grande resumo sobre os conhecimentos matemáticos existentes na época, conforme PIAGET e GARCIA (1987) “Euclides sistematizou em sua clássica obra, os elementos, os principais conhecimentos trabalhados pelos seus antecessores, dando um caráter axiomático-dedutivo ao conhecimento geométrico da época.”. Segundo Boyer

> “[Os Elementos] constitui o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado da matemática elementar que já fora eregido, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante esse intervalo a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável.”

Tales de Mileto foi o pioneiro em se preocupar com a matemática demonstrativa, isso ocorreu por volta do século VI a.C., com isso a matemática grega passou a utilizar proposições anteriores para demonstrar outras proposições, essas a partir de outras precedentes, e assim por diante, virando um ciclo sem fim. Mas os gregos perceberam isso e viram que era necessário parar o processo em certas proposições iniciais, consideradas óbvias (hoje, são conhecidas como postulados ou axiomas). A partir de cinco proposições iniciais (postulados ou axiomas) todas as outras proposições seriam demonstradas são demonstradas. Os cinco postulados utilizados por Euclides nos Elementos são:

Axioma I: Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

Axioma II: Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Axioma III: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

Axioma IV: Todos os ângulos retos são iguais.

Axioma V: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Os Elementos foi um marco na história da matemática, sendo o livro mais editado depois da bíblia, por causa da época em que foi escrito, muitos de seus conceitos, embora intuitivos, não foram adequadamente esclarecidos. E os desenhos faziam parte das demonstrações e as condições de existência de alguns elementos não eram garantidas. Por mais de 2.000 mil anos os Elementos foram aceitos como verdades evidentes, segundo GREEMBERG (1980) "A abordagem da geometria feita por Euclides dominou o ensino desse campo da matemática por mais de dois mil anos, sendo o método axiomático, por ele empregado, a base do que chamamos de "matemática pura." Mas o V postulado, por não ser tão óbvio como os demais, despertou o interesse de alguns matemáticos, que acreditavam que o mesmo poderia ser demonstrado a partir dos outros axiomas. Por isso, Playflair (1748-1819) reformulou o axioma V da seguinte maneira "Duas retas que se cortam não podem ser ambas paralelas a uma mesma reta". Hoje ele é mais conhecido como: "Por um ponto fora de uma reta passa uma, e somente uma, reta paralela à primeira reta dada".

3.2 PERÍMETRO E ÁREA

A ideia de medir algo nos leva a pensar em comparar. Então, vamos conceituar medida como o ato de comparar a quantidade de uma grandeza qualquer com outra quantidade da mesma grandeza que se escolher como unidade (unidade de medida). As unidades de medidas são usadas como padrão para a realização de medidas. No cálculo de área de uma figura plana, que representa a região do plano delimitada pela figura, iremos usar como unidade de medida um quadrado de lado 1 e para o perímetro, que representa a soma dos segmentos de retas que contornam a figura, ou seja, a soma dos lados da figura, usaremos um segmento de reta com 1 medida de unidade. A área e o perímetro de uma figura são sempre representados por um número real, esse corresponde à quantidade de vezes que a unidade cabe em tal figura.

Vamos demonstrar as relações que são utilizadas para determinar as áreas dos polígonos essenciais, ou seja, área do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, losango e trapézio. Todas as demonstrações a seguir se encontram no livro do Elon Lages Lima - Medidas e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança.

3.2.1 A área do quadrado

Quadrado é um quadrilátero cujos lados e ângulos são congruentes, logo os quatro ângulos são retos. Vamos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento, o chamaremos de quadrado unitário. Por definição qualquer quadrado unitário terá área igual a um.

Teorema 01 - A área do quadrado é obtida fazendo o quadrado da medida de seu lado.

Demonstração: Suponhamos um quadrado cujo lado possui uma medida inteira n, podemos subdividir seus lados em n segmentos de comprimento unitário. Assim, teremos um total de n^2 quadrados de lado unitário. Então pela definição de área, podemos concluir que a área do quadrado cujo lado possui medida inteira n é igual a n^2.

Suponhamos agora um quadrado cuja medida do lado seja um número racional $\frac{m}{n}$. Se o lado de um quadrado Q tem por medida $\frac{1}{n}$, onde n é inteiro, então o quadrado unitário se decompõe, mediante paralelas aos seus lados, em n quadrados justapostos, todos congruentes a Q. Estes n quadrados congruentes a Q compondo um quadrado de área 1, segue-se que a área de Q deve satisfazer à condição n^2. (área de Q) $= 1$ e, portanto, área de $Q = \frac{1}{n^2}$.

Generalizando, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional $\frac{m}{n}$, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $\frac{1}{n}$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m^2 quadrados, cada um dos quais tem lado $\frac{1}{n}$. Como a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$ temos que a área de Q deve ser $m^2.\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2} = (\frac{m}{n})^2$.

Ainda existem quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. Suponhamos Q um quadrado de lado o número irracional a. Mostraremos agora que, ainda neste caso, deve-se ter área de $Q = a^2$.

Sejam b e c números reais qualquer tal que $b < a^2$, queremos mostrar que $b <$ área de Q. Depois, demonstraremos que $a^2 < c$, implica área de $Q < c$. Isto mostrará que a área de Q não pode ser um número b menor nem um número c maior do que a^2. Portanto, a área de $Q = a^2$. Demonstraremos somente a primeira parte deste argumento, pois a segunda é inteiramente análoga.

Suponhamos b um número real tal que $b < a^2$. Tomamos um número racional r, inferior a a, porém, tão próximo de a que se tenha $b < r^2 < a^2$. Seja r, uma aproximação por falta de a, com erro inferior a $a - \sqrt{b}$. Então $\sqrt{b} < r < a$ e, portanto, $b < r^2 < a^2$.

Tomamos um quadrado Q' de lado r, no interior de Q. Como r é racional, a área deste quadrado é r^2. Temos que Q' está contido no interior de Q, então área de $Q' <$ área de Q, ou seja, $r^2 <$ área de Q. Temos por hipótese que $b < r^2$. Conclusão: $b <$ área de Q. Assim, todo número real b, inferior a a, é também menor do que a área de Q. De maneira análoga se demonstra que todo número real c, maior do que a, é maior do que a área de Q. Logo, a área de Q não pode ser menor nem maior do que a^2. Por exclusão, deve-se então ter área de $Q = a^2$.

Portanto temos que a área de um quadrado Q, cujo lado mede a, deve ser expressa pela fórmula área de $Q = a^2$, onde a é um número real qualquer.

3.2.2 A área do retângulo

Retângulo é um quadrilátero que tem os quatro ângulos congruentes, ou seja, quatro ângulos retos.

Teorema 02 – A área do retângulo é obtida fazendo o produto da base pela altura.

Demonstração: Tome um quadrado Q de lado $(a + b)$.

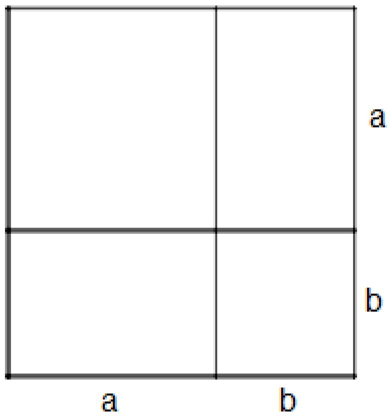


Figura 01: Quadrado de lado $a + b$.

Fonte: própria autora

Pelo teorema 1, temos que área de $Q = (a + b)^2 = a^2 + 2. a. b + b^2 (I)$.

Pela figura acima, podemos observar que o quadrado Q de lado $(a + b)$ é composto por um quadrado de lado a, um quadrado de lado b e dois retângulos congruentes de lados a e b (chamaremos esse retângulo de R). Pelo teorema 1 temos que a área do quadrado de lado a e do quadrado de lado b são, respectivamente, a^2 e b^2. Logo a área da figura acima é formada pela soma de a^2, b^2 com a área de R. Desta forma, temos que a área de $Q = a^2 + 2$.área de $R + b^2 (II)$.

Comparando as sentenças (I) e (II), temos $a^2 + 2. a. b + b^2 = a^2 + 2$.área de $R + b^2 \rightarrow$ área de $R = a. b$.

Portanto, a área do retângulo é obtida fazendo o produto da base pela altura.

3.2.3 A área do paralelogramo

Paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

Teorema 03 - A área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

Antes de iniciar a demonstração vamos definir o que altura de um paralelogramo.

Tomando uns dos lados do paralelogramo como base, define-se como altura do paralelogramo um segmento perpendicular que liga a base ao seu lado oposto (ou o seu prolongamento).

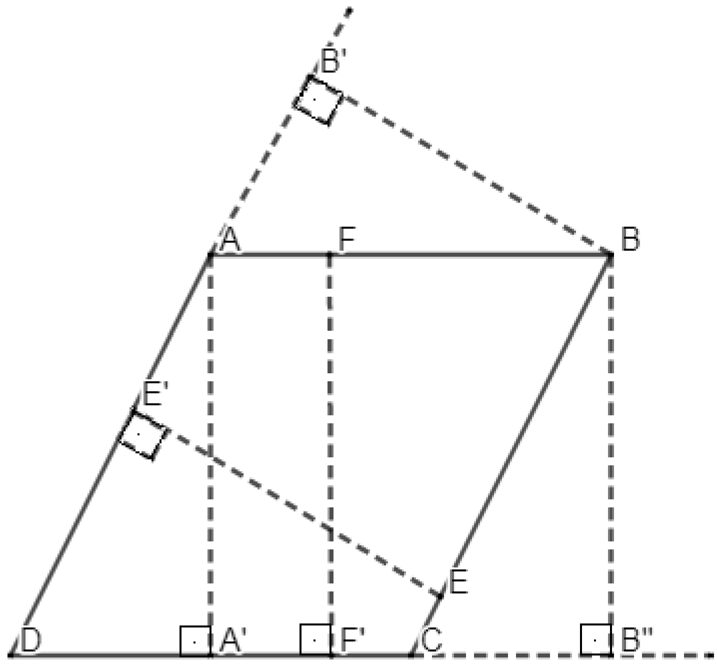


Figura 02: Paralelogramo ABCD, com algumas alturas traçadas.

Fonte: própria autora

Na figura acima, ABCD é um paralelogramo, se a base for o lado AB ou o lado CD, os segmentos AA’, FF’ e BB’’ representam alturas do paralelogramo em relação a base AB ou CD, como AB e CD são paralelos temos AA’≡FF’≡BB’’. Se a base for AD ou BC, os segmentos EE’ e BB’ representam alturas do paralelogramo em relação a base AD ou BC, como AD e BC são paralelos, então EE’≡BB’. Portanto, todas as alturas relativas a mesma base são congruentes.

Demonstração: Seja ABCD um paralelogramo, onde a base AB tem o comprimento b e sua altura DD’ tem comprimento h.

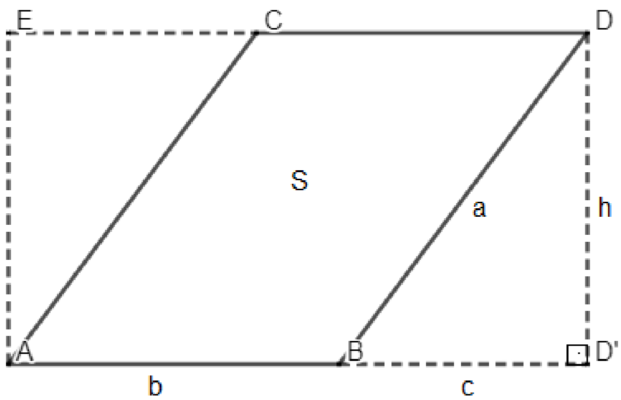


Figura 03: Paralelogramo ABCD traçadas as alturas AE e DD’, assim como o prolongamento das bases.

Fonte: própria autora

Pela figura acima, o paralelogramo está contido num retângulo de base $b + c$ e altura h. De acordo com o teorema 2, temos que a área desse retângulo é $(b + c).h = b.h + c.h\ (I)$. Podemos ver também que a área do retângulo de base $b + c$ e altura h é decomposta pela área do paralelogramo ABCD e a área de dois triângulos que juntos formam um retângulo de base c e altura h (como mostra a figura abaixo), logo, a área do retângulo de lado $b + c$ e altura h é igual a área do paralelogramo $ABCD + c.h\ (II)$.

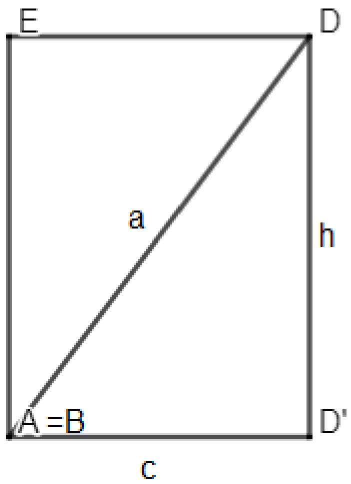


Figura 04: Retângulo AD'DE.

Fonte: própria autora

Comparando as sentenças (I) e (II), temos $b.h + c.h =$ área do paralelogramo $ABCD + c.h \rightarrow$ área do paralelogramo $ABCD = b.h$.

Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

3.2.4 A área do triângulo

Triângulo é um polígono de três lados.

Teorema 04 - A área de um triângulo é igual a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

Demonstração: Dado um triângulo ABC. Por C trace um segmento perpendicular a base AB, chame de C' o ponto de intersecção desse segmento com a base AB, o segmento CC' é a altura do triângulo relativa a base AB. Saindo de C trace um segmento paralelo e congruente a AB, faça o mesmo saindo do ponto B, porém paralelo a AC. Chame de D o ponto de encontro desses segmento. Logo, ABCD é um paralelogramo.

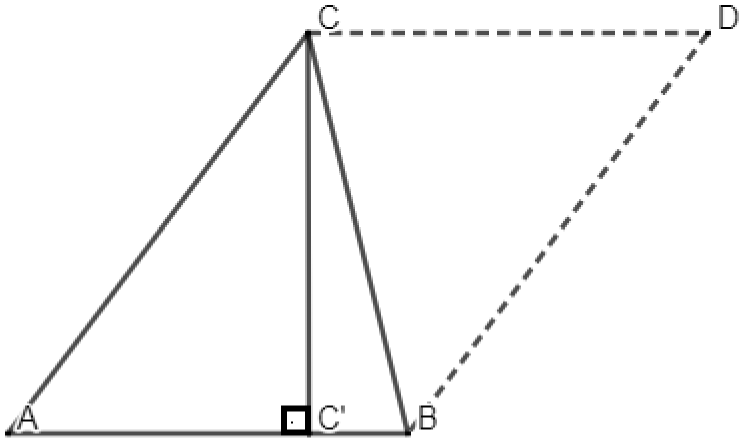


Figura 05: Triângulo qualquer ABC.

Fonte: própria autora

Pelo caso de semelhança LLL, os triângulos ABC e BCD são congruentes. Portanto, a área do triângulo ABC é igual a metade da área do paralelogramo ABCD, ou seja, a área do triângulo ABC é igual a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

3.2.5 A área do trapézio

Trapézio é um quadrilátero que possui dois lados paralelos, sendo esses lados paralelos suas bases.

Teorema 05 - A área de um trapézio é igual a metade da soma das bases vezes a altura entre elas.

Demonstração: Seja ABCD um trapézio, de bases AB e CD onde AB tem comprimento b e CD tem comprimento B. Trace o segmento BD que divide o trapézio em dois triângulos. Logo a área do trapézio é formada pela área do triângulo ABD mais a área do triângulo BCD.

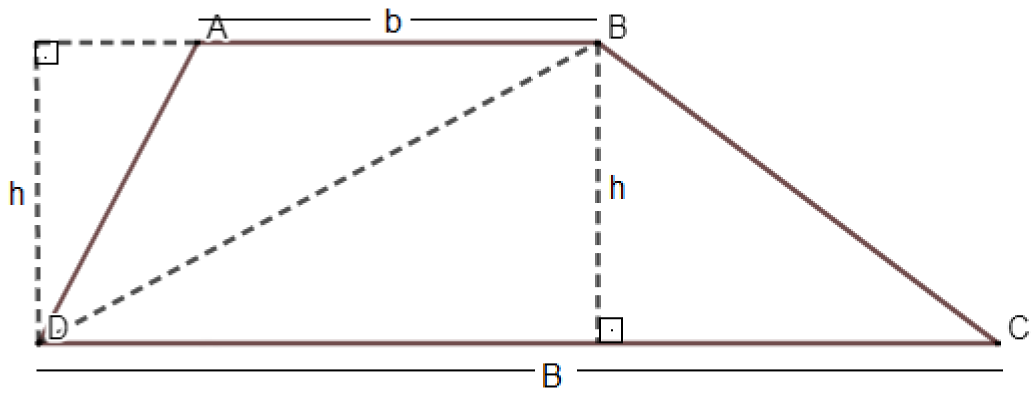


Figura 06: Trapézio ABCD.

Fonte: própria autora

Aplicando o teorema 04 para calcular as áreas desses triângulos, temos:

Área do triângulo $ABD = \frac{b.h}{2}$ e área do triângulo $BCD = \frac{B.h}{2}$, então área do trapézio $ABCD = \frac{b.h}{2} + \frac{B.h}{2} = \frac{(b+B).h}{2}$.

Portanto, a área de um trapézio é igual a metade da soma das bases vezes a altura entre elas.

3.2.6 A área do losango

Losango é um quadrilátero que possui os quatro lados congruentes.

Teorema 06 – A área de um losango é igual a metade do produto de suas diagonais.

Antes de iniciar a demonstração vamos definir o que são as diagonais do losango.

Diagonais do losango são segmentos de reta que ligam dois de seus vértices e não são lados dele.

Demonstração: Seja ABCD um losango, de diagonais AC e BD, onde AC tem comprimento D e BD tem comprimento d. Pelo caso LLL os triângulos ADC e ABC são semelhantes, logo a altura de ambos é $\frac{d}{2}$, e possuem áreas congruentes. A área do losango ABCD é a soma da área do triângulo ABC com o triângulo ACD.

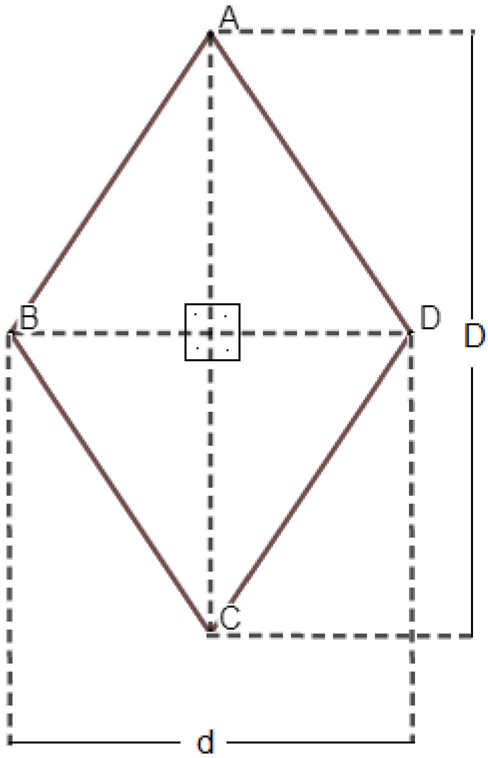


Figura 07: Losango ABCD.

Fonte: própria autora

Aplicando o teorema 04, temos que área do triângulo $ABC =$área do triângulo $ACD = \frac{D.\frac{d}{2}}{2} = \frac{D.d}{4}$. Então área do losango $ABCD =$ área do triângulo $ABC +$ área do triângulo $ACD = \frac{D.d}{4} + \frac{D.d}{4} = 2.\frac{D.d}{4} = \frac{D.d}{2}$.

Portanto, a área de um losango é igual a metade do produto de suas diagonais.

4 A MODELAGEM MATEMÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

4.1 CONCEPÇÕES DE ENSINO DE MATEMÁTICA E MODELAGEM

A Modelagem Matemática caracteriza-se como um ambiente de aprendizagem no qual os educandos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações provenientes de outras áreas (BARBOSA, 2001). Assim sendo, a importância da integração de situações provenientes do cotidiano e de outras áreas do conhecimento na sala de aula, com o propósito de possibilitar os educandos a intervirem na sua realidade, é ressaltada neste ambiente.

Os documentos oficiais apontam algumas das características da Modelagem Matemática a serem desenvolvidas no ensino médio. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, por exemplo, sinalizam no tópico investigação e compreensão os seguintes aspectos:

> "identificar o problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades" (BRASIL, 1999, p. 259).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio evidenciam como um caminho para se trabalhar Matemática na escola a Modelagem Matemática e a conceituar como a "habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e revolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (p. 84). De acordo com o documento, o educando terá que mobilizar uma variedade de procedimentos no processo de fazer Modelagem, a saber:

> "selecionar variáveis que serão relevantes para o modelo a construir; problematizar, ou seja, formular o problema teórico na linguagem do campo matemático envolvido; formular hipóteses explicativas do fenômeno em causa; recorrer ao conhecimento matemático acumulado para a resolução do problema formulado, o que, muitas vezes, requer um trabalho de simplificação quando o modelo originalmente pensado é matematicamente muito complexo; validar, isto é, confrontar as conclusões teóricas com os dados empíricos existentes; e

> eventualmente ainda, quando surge a necessidade, modificar o modelo para que esse melhor corresponda a situação real" (BRASIL, 2006, p. 85).

A literatura na área tem discutido à configuração de Modelagem no currículo e na sala de aula (CALDEIRA, 2005; ALMEIDA; DIAS, 2004; HAMSON, 2003; BARBOSA, 2001). Barbosa (2001) apresentou uma sistematização teórica das práticas curriculares em Modelagem, as quais denominaram de "casos", como possibilidades para desenvolver Modelagem em sala de aula.

Como educador matemático, concordo com Barbosa (2001, p.22) quando afirma que "mais do que informar matematicamente as pessoas, é preciso educar criticamente através da matemática. Essa dimensão ultrapassa os limites intrínsecos da matemática e volta-se para a preocupação do ser-sujeito pela matemática".

Educar criticamente através da matemática é despertar no educando o desejo de desafiar características antidemocráticas da sociedade e isto acontece quando o Ensino de Matemática assume uma função social e política. Isto é, quando o conhecimento matemático adquirido pelo educando, associado a uma visão crítica da sociedade em que está inserido promove uma ação reflexiva e transformadora.

Esta associação entre conhecimento matemático e visão crítica da sociedade, defendida pela Educação Matemática Crítica, contribui para a formação de cidadãos mais conscientes, incentivando o desenvolvimento do senso crítico. A partir daí, o educando começa a pensar em questões como: O que estudar? Quais as aplicações do que estamos estudando? Estas aplicações promovem o bem estar da comunidade? Etc. (ALMEIDA & DIAS, 2004; BARBOSA, 2001; SKOVSMOSE, 1996).

Nesta pesquisa, a partir das considerações feitas acima, a Modelagem é concebida como um ambiente de aprendizagem em que os educandos abordam situações problemáticas com referência na realidade, enfatizando, na organização e condução das atividades de Modelagem, a reflexão dos educandos sobre a presença da Matemática na sociedade.

Para tanto, adoto a perspectiva sócio critica onde são enfatizados o conhecimento reflexivo e as discussões reflexivas e os educandos são convidados a discutir, a partir da solução dos problemas com referência na realidade, as implicações dos resultados matemáticos na sociedade. (BARBOSA, 2003).

4.2 ANÁLISE ACERCA DA CONSTRUÇÃO DOS MODELOS CONCEBIDOS PELOS EDUCANDOS

O processo de construção dos modelos e os critérios utilizados para escolher, transformar ou abandonar estratégias durante esta construção serão investigados a partir da observação e análise das discussões dos educandos durante a realização de atividades de Modelagem. Essas discussões podem ser segundo Barbosa (2006a, 2006b), matemáticas, técnicas ou reflexivas. Essa classificação foi inspirada na ideia de que em atividades de Modelagem utilizamos conhecimentos matemáticos, técnicos e reflexivos (SKOVSMOSE, 1990, apud BARBOSA, 2006b).

Os conhecimentos matemáticos, técnicos e reflexivos aparecem com mais ou menos ênfase em atividades de Modelagem no âmbito da Educação Matemática dependendo da perspectiva em que estas estão sendo desenvolvidas. A perspectiva científico-humanista, por exemplo, enfatizará o conhecimento matemático, a pragmática, o conhecimento técnico e a sócia-crítica, o conhecimento reflexivo (BARBOSA, 2001, 2003).

Pesquisas (ARAÚJO, 2002; BARBOSA, 2006b) indicam que as discussões matemáticas e/ou técnicas costumam ser privilegiadas pelos educandos durante a execução de atividades de Modelagem, contudo, discussões reflexivas sobre o papel social da Matemática podem ser favorecidas através de intervenções do educador.

Essas intervenções podem gerar o que Barbosa (2006b) denomina “Impasses”. Estes acontecem quando existem obstáculos que favorecem a transição entre as discussões matemáticas, técnicas e reflexivas. Como a noção de impasse pode favorecer o surgimento de discussões reflexivas a partir de intervenções do educador ou dos próprios educandos creio que ela pode contribuir com o processo de construção dos modelos na perspectiva de Modelagem adotada nesta investigação.

A análise do processo de construção de modelos matemáticos tem nos levado a uma tendência de comparar os procedimentos adotados pelos educandos com esquemas, normalmente herdados da Matemática Aplicada, que prescrevem as etapas que devem ser seguidas na abordagem de situações de Modelagem. Um desses esquemas e a descrição de cada uma de suas etapas pode ser encontrado em Bassanezi (2002).

Compreender o papel dos modelos matemáticos na sociedade ajuda a organizar o modelo de Modelagem, ajudando o educando a se envolver e consequentemente explorar a atividade matemática, provocando reflexões sobre os critérios utilizados. De acordo com BARBOSA e SANTOS, 2007, p.7:

> Estes argumentos não possuem o mesmo status nas diferentes perspectivas, sendo que algum ou alguns deles são priorizados conforme os propósitos didáticos estabelecidas por elas. Para cada perspectiva, podemos eleger dentre os cinco argumentos aquele ou aqueles que constitui/constituem "o fim", enquanto os demais podem ser compreendidos como "meios".

Não existe pretensão em classificar em bom ou ruim nesta investigação, o "fazer Modelagem" de educandos através da comparação com esquemas prescritivos previamente concebidos, mas compreender como eles constroem os modelos a partir da análise dos fatores que influenciam a elaboração, reformulação ou abandono das estratégias adotadas, evidenciando as potencialidades do trabalho com Modelagem no que se refere às concepções de ensino de matemática expostas anteriormente.

4.3 ETAPAS NO PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (Bassanezi 2002). Ela permite a realização de previsões e tendências e é eficiente a partir do momento que tomamos consciência de que estamos trabalhando sobre representações de um sistema ou parte dele. É um processo dinâmico, onde, partindo-se de um problema real, associado a um conjunto de hipóteses, é obtido um modelo que forneça possíveis soluções para o problema.

Segundo Baroni e Nobre:

> O movimento de Ensino de Matemática incorpora, de tempos em tempos, alguns componentes novos que visam, em uma primeira instância, fornecer instrumentos metodológicos que possam ser

> utilizados pelo educador de Matemática em suas atividades didáticas. Esses "instrumentos" são introduzidos através de, inicialmente, uma reflexão teórica metodológica e são divulgados sob o ponto de vista de "propostas didático-pedagógicas". Como exemplo, evidenciamos as inúmeras atividades envolvendo a utilização de "Resolução de Problemas" como forma de garantir uma melhor compreensão por parte dos educandos. A Modelagem Matemática, a Etnomatemática, a Informática, dentre outros, são também exemplos de importantes estudos teóricos-educacionais que proporcionam avanços nas relações educacionais voltadas ao trabalho diário do Educador de Matemática. (apud BICUDO, 1999, p. 129).

Como método de pesquisa, tem uma orientação metodológica a ser seguida. Neste sentido, foram elaborados diferentes esquemas visando descrever as etapas pertinentes a um processo de Modelagem Matemática. Um esquema encontrado com frequência na literatura é composto pelas seguintes etapas:

• **Definição do problema**: a partir de uma situação real é identificado o problema a ser estudado. Em seguida deve-se obter os dados necessários para sua solução.

• **Simplificação e formulação de hipóteses**: Os dados são examinados e selecionados de modo que preservem as características do problema, isto é, é feita uma simplificação.

• **Dedução do modelo matemático**: Nesta etapa substitui-se a linguagem em que se encontra o problema para uma linguagem matemática coerente.

• **Resolução do problema matemático:** é a fase em que, utilizando-se recursos da Matemática, procura-se uma solução do problema matemático formulado.

• **Validação**: é a fase em que a aceitação do modelo encontrado é analisada. Assim, os dados reais são comparados com os dados fornecidos pelo modelo. Caso o modelo seja considerado não válido, deve-se retornar à formulação de hipóteses e simplificações e reiniciar o processo.

• **Aplicação do modelo:** Caso seja considerado válido, o mesmo é utilizado para compreender, explicar, analisar, prever ou decidir sobre a realidade em estudo. Esta é a fase que possibilita o intervir, o exercitar, o manejar situações associadas ao problema.

Estas etapas não representam uma prescrição rigorosa, mas constitui uma sequência de procedimentos norteadores que podem proporcionar maior êxito no estudo de problemas por meio da Modelagem Matemática.

4.4 ARGUMENTOS PARA INSERÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A Modelagem matemática tem sido reconhecida como uma alternativa pedagógica na condução do processo de ensino e aprendizagem em cursos regulares submetidos à programas e cronogramas preestabelecidos. Entre os argumentos que têm sido usados para justificar e sugerir a criação de um espaço para introduzir atividades de Modelagem Matemática na estrutura curricular de Matemática, citamos:

• **O desenvolvimento de aspectos sociais.** O conflito gerado na interação dos indivíduos pode beneficiar mutuamente as pessoas que se encontram em um mesmo nível de desenvolvimento cognitivo, mas que analisam uma determinada situação com perspectivas diferentes. As atividades desenvolvidas em grupos podem proporcionar o desenvolvimento do senso de responsabilidade, a autoestima, a cooperação e a criticidade. Nestes grupos são valorizadas qualidades sociais, tais como capacidade de negociar, de comunicar-se na linguagem do grupo, de partilhar responsabilidades e de trabalhar em equipe.

• **Reconhecimento do papel da Matemática na sociedade.** A Matemática tem sido utilizada como argumento para apresentar sugestões e soluções à problemas políticos e sociais. É encarada como a palavra final em virtude de dados estatísticos e resultados matemáticos, os quais muitas vezes são utilizados como base nas argumentações. Este poder de conter o argumento definitivo é sustentado pelo que denominam de “ideologia da certeza”. Assim, é importante que todo indivíduo conheça e reconheça o papel importante que a Matemática tem na vida, seja ela no âmbito acadêmico, profissional ou social. Se a Matemática é tão importante na sociedade parece natural que no ensino da Matemática se mostre o porquê e como.

• **Aquisição de conceitos matemáticos e suas aplicações.** As dificuldades encontradas pelos educandos no aprendizado da Matemática ultrapassam os limites do ensino fundamental e médio, chegando ao curso superior. Essa situação acarreta um alto grau de desistência e/ou reprovação nas disciplinas de Matemática e outras que necessitam dos conteúdos matemáticos. Por outro lado, se o educando não teve a oportunidade durante a sua vida acadêmica, de participar ativamente da elaboração e solução de problemas, coletando dados, sugerindo hipóteses, encontrando a solução, este provavelmente não conseguirá solucionar os problemas encontrados no setor profissional. Assim, é preciso uma educação que incentive a resolução de problemas mostrando onde e como se aplica a Matemática. A aplicação de conceitos matemáticos em situações do dia-a-dia exige que essa capacidade seja desenvolvida e ainda que, devemos trabalhar em sala de aula com "verdadeiras situações problemas". Uma atividade de Modelagem Matemática pode apoiar os educandos na aquisição e compreensão dos conteúdos matemáticos como também promover atividades e habilidades que estimulem a criatividade e a solução de problemas. A apresentação de novos conceitos a partir de situações reais pode ser uma base concreta para desenvolver os conceitos, como também ter um importante papel motivador.

• **Desenvolvimento do conhecimento reflexivo.** A Matemática intervém na realidade quando nos oferece não apenas discussões de fenômenos, mas também modelos para a alteração de comportamento. Agimos de acordo com a Matemática, e diante disto, entende que é necessário desenvolver uma competência crítica nos educandos que possa possibilitá-los a lidar com o desenvolvimento social e tecnológico que estamos presenciando. Essa forma específica de saber está relacionada com uma dimensão do conhecimento, chamada por Skovsmose de conhecimento reflexivo. Este autor afirma que o conhecimento reflexivo se refere "à competência de refletir sobre o uso da Matemática e avaliá-lo".

• **Processos cognitivos desenvolvidos pelos educandos.** O conhecimento construído através dos modelos é um saber contextualizado e com significado. O educando é agente desse processo de construção, onde ele observa, coleta dados, procura soluções e toma decisões. Se o conceito for construído pelo educando será facilmente resgatado quando necessário. Compreensão de situações extra matemáticas, atribuição de significados aos aspectos matemáticos, aplicação de conhecimentos, introdução de novos conceitos, elaboração de estratégias próprias.

4.5 COMO UTILIZAR MODELAGEM MATEMÁTICA DENTRO DA SALA DE AULA?

Observamos que em um ambiente de ensino e aprendizagem os trabalhos de Modelagem Matemática podem ser desenvolvidos de forma gradativa com os educandos, respeitando diferentes momentos:

- **Momento 1:** abordar com todos os educandos, situações em que está em estudo a dedução, utilização, análise e exploração de um modelo matemático a partir de uma situação problema já estabelecida.
- **Momento 2:** o educador sugere uma situação problema já estabelecida, juntamente com um conjunto de informações, e os educandos realizam a formulação das hipóteses e a dedução do modelo durante uma investigação e, finalmente, validam o modelo encontrado para o problema em estudo.
- **Momento 3:** os educandos, divididos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de modelagem a partir de um problema escolhido por eles, assessorados pelo educador. Uma vez estabelecido o problema, os educandos procedem a coleta de informações e dados necessários para encontrar uma possível solução. O processo de validação do modelo leva o educando a analisar, tomar decisões, discutir, descobrir, explorar, experimentar o novo.

Este encaminhamento das atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, embora não constitua uma prescrição rigorosa, tem-se mostrado bastante adequado na prática em diferentes níveis de ensino. Não se trata de uma prática definida rigorosamente, apresenta-se apensa como uma ideia, um modelo a ser seguido e utilizado na sala de aula.

4.6 INTERAÇÕES COM OS MODELOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: OBSERVAÇÃO DAS RESPOSTAS GERAIS FORNECIDAS PELOS EDUCANDOS.

Durante o desenvolvimento das atividades baseadas na modelagem matemática, geralmente observamos que a interação estimulada pelo trabalho em grupo traz benefícios para o processo de aprendizagem da Matemática. Verifica-se ainda que com atividades de Modelagem no ensino o educando pode observar a Matemática presente no dia-a-dia, estabelecer relação entre a Matemática e o mundo fora dela, desenvolver habilidades para aplicar os conceitos matemáticos para solucionar problemas e visualizar a aplicabilidade da Matemática escolar na sua vida profissional como também no meio social e político em que vive.

Considera-se que a metodologia aplicada possibilita um aprendizado mais eficiente, visto que conduz ao estabelecimento de uma conexão entre a Matemática escolar e a Matemática presente em situações do cotidiano.

Leva-se em consideração que se pode concluir que mesmo em um curso regular, com limitações de tempo e conteúdos programáticos, é possível desenvolver as atividades de modelagem e proporcionar grande eficiência no processo de aprendizagem dos educandos.

4.7 O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E A PROPOSTA DOS PCNs: ABORDAGEM ACERCA DA TRANSVERSALIDADE

Uma característica fortemente observada nos princípios norteadores pautados nos PCN é que a matemática deve ter um aspecto de inserção social e política, o que certamente conduzirá a uma maior aplicabilidade dos conceitos aprendidos. É necessário, portanto, implementar nas salas de aula uma prática de ensino e aprendizagem que valorize o espírito de investigação, a formulação de conjecturas e a argumentação. Nesta ótica, parece razoável apontar aspectos em que os PCN apresentam consenso com a área da Modelagem Matemática, como por exemplo, indicar questões que geram reflexões e uma atuação construtiva e cooperativa no meio em que se vive. Além disso, tem-se em vista a busca de explicações para fenômenos sociais e naturais de outras áreas do conhecimento, legitimando assim a sua relevância.

O que diz os PCNs (1998) sobre a transversalidade:

> Por serem questões sociais, os Temas Transversais têm natureza diferente das áreas convencionais. Tratam de processos que estão sendo intensivamente vividos pela sociedade, pelas comunidades, pelas famílias, pelos educandos e educadores em seu cotidiano. São debatidos em diferentes espaços sociais, em busca de soluções e de

> alternativas, confrontando posicionamentos diversos tanto em relação à intervenção no âmbito social mais amplo quanto à atuação pessoal.

Os temas transversais começam a ter um significado muito forte a partir do momento em que o educador inicia uma proposta com a modelagem dentro de temas relacionados com os aspectos sociais. É relevante que o educando também aprenda a ter um conhecimento crítico sobre os assuntos que fazem parte de sua vida, ou seja, do seu cotidiano. Acreditamos que é possível falar de higiene, ensinando ciências, falar de luz elétrica, ensinando matemática. O trabalho via modelagem matemática, permite tratar dessas especificidades porque através dele será feito pelos educandos uma pesquisa sobre o tema.

Para Araújo (1997), existem várias maneiras de entender a transversalidade:

> Numa primeira concepção**,** temas vinculados ao cotidiano social "atravessam" os conteúdos curriculares tradicionais, que formam o eixo longitudinal do sistema educacional; numa segunda concepção, esses temas podem ser trabalhados pontualmente na forma de projetos e, numa terceira, busca-se uma relação interdisciplinar dos conteúdos tradicionais com os temas.

No momento em que Araújo (1997) relata que os temas do cotidiano atravessam os conteúdos tradicionais, voltando nossos olhares para a modelagem, percebemos que primeiro é feito a escolha do tema pelos educandos, este tema geralmente parte da realidade social dos educandos. Em seguida são levantadas as questões em relação ao que pretendem resolver através da pesquisa até que se chegue ao modelo matemático. Nesse estudo são feitos muitos comentários e então surgem inúmeras questões que realmente atravessam o tema em questão.

A proposta dos PCNs procura trabalhar buscando a realidade dos educandos para que estes pudessem ter uma aprendizagem significativa e contextualizada, considerando seus conhecimentos e saberes, aproximando, assim, os fundamentos da Matemática às suas vidas. Os próprios *PCN* (*Parâmetros Curriculares Nacionais*) orientam que a Matemática seja uma disciplina que venha a descrever e trabalhar a realidade do educando, para que possa ser mais lúdica e contextualizada. Santana (2008) afirma que habilidades e competências podem ser desenvolvidas com o ensino da Matemática, destacando a capacidade de utilizar essa disciplina na interpretação e intervenção do real e na seleção de estratégias para resolução de problemas, entre outros. “A Matemática, assim como as outras disciplinas do currículo escolar, pode servir para organizar o discurso; ativa o processo de pensar, impulsionando as operações básicas de análise, de síntese, da abstração e da generalidade” (Borges, 1995, p. 103). O ensino de Matemática precisa ser trabalhado em paralelo à realidade para que o conhecimento matemático tenha realmente significado e relevância para o aprendiz, fazendo com que este identifique no seu cotidiano as relações matemáticas existentes. Para isso, acredita-se que a modelagem matemática pode proporcionar um ambiente colaborativo de aprendizagem, em que aspectos relacionados à realidade podem ser abordados, visto que “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvendo-os e interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (Bassanezi, 2002 p. 16).

Biembengut e Hein acrescentam que:

> “A modelagem no ensino da Matemática pode ser um caminho para despertar no educando o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao educando a oportunidade de estudar situações-problema por meio da pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico” (2003, p. 18).

Os autores descrevem ainda alguns objetivos que podem ser alcançados com a modelagem aplicada ao ensino da Matemática:

1. Aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;
2. Enfatizar a importância da Matemática para a formação do educando;
3. Despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;
4. Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
5. Desenvolver a habilidade para resolver problemas; e
6. Estimular a criatividade.

4.8 APLICAÇÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A matemática é muito usada em problemas de otimização. Independemente da área de análise queremos sempre maximizar ganhos e minimizar perdas. Os gerentes de negócios tentam controlar as variáveis para maximizar o lucro ou atingir um meta desejada para produção e entrega a um custo mínimo. Gestores de recursos renováveis, como pesca e plantações, tentam controlar as taxas de colheita para maximizar o rendimento a longo prazo. As agências governamentais estabelecem padrões para minimizar os custos ambientais da produção de bens de consumo. Gerenciadores de sistemas de computador tentam maximizar o rendimento e minimizar os atrasos. Agricultores espaçam seus plantios para maximizar o rendimento. Os médicos regulam os medicamentos para minimizar o lado prejudicial dos efeitos. O que todas essas aplicações e muitas outras têm em comum é uma determinada estrutura matemática. Uma ou mais variáveis podem ser controladas para produzir o melhor resultado em alguma outra variável, sujeita na maioria dos casos a uma variedade de restrições práticas sobre as variáveis de controle. Modelos de otimização são projetados para determinar os valores das variáveis de controle que levam a um bom resultado, dadas as restrições do problema.

Nossa análise em torno de modelos de otimização se dará em torno de alguma experiência pratica dos envolvidos. O objetivo desta sessão é mostrar um exemplo para introduzir os fundamentos da modelagem matemática em um ambiente familiar.

O exemplo abaixo foi retirado e adaptado do livro Mathematical Modeling Fourth Edition, 2013.

Exemplo: Um porco de 100 quilogramas ganha 2 quilogramas por dia e, 7 reais por dia, para custear as despesas. O preço de mercado dos suínos é de 10 reias por quilograma, mas vai caindo 5 centavos de real por dia. Quando o porco deve ser vendido?

A abordagem de modelagem matemática para resolução de problemas consiste em cinco passos:

1. Faça a pergunta.

2. Selecione a abordagem de modelagem.

3. Formule o modelo.

4. Resolva o modelo.

5. Responda à pergunta.

6. Verificar a validade da resposta.

O primeiro passo é fazer uma pergunta. A questão deve ser formulada em termos matemáticos, e muitas vezes requer muito trabalho para fazer isso. No processo somos obrigados a fazer uma série de suposições sobre como as coisas realmente são. Não devemos ter medo de adivinhar nesta fase. Sempre podemos voltar e fazer uma pergunta melhor mais tarde.

Vamos definir o que precisaremos para a pergunta do nosso problema:

1º - Listar as variáveis e incluir as unidades apropriadas:

t = tempo (dias)

w = peso do porco (kg)

p = preço dos suínos (R$/kg)

C = custo de manutenção do porco t dias (R$)

R = receita obtida com a venda de porco (R$)

P = lucro da venda do porco (R$)

2º - Fazer uma lista de suposições sobre essas variáveis. Inclua quaisquer relações entre variáveis (equações e desigualdades) que são conhecidas ou assumidas.

$w = 100 + 2t$

$p = 10 - 0,05t$

$C = 7t$

$R = p \cdot w$

$P = R - C$

$t \geq 0$

3º - Escreva em matemática explícita a linguagem o objetivo deste problema. (Observe que as etapas preliminares de variáveis de listagem, unidades, equações e desigualdades, e outras suposições são realmente uma parte da questão. Eles enquadram a questão).

O peso do porco começa em 90 quilogramas e sobe em 2 kg/dia então temos $(w\ quilogramas) = (100\ quilogramas) + (2\ quilogramas\ dia).(t\ dias)$.

Observe que incluímos unidades para verificar se nossa equação faz sentido.

As outras suposições inerentes ao nosso problema são as seguintes:

$$\left(\frac{p\ reais}{quilograma}\right) = \left(\frac{10\ reais}{quilograma}\right) - \left(\frac{0{,}05\ \text{reais}}{quilograma.dia}\right).(t\ dias)$$

$$(C\ reais) = (\frac{7\ reais}{dia})\ (t\ dias)$$

$$(R\ reais) = \left(\frac{p\ reais}{quilograma}\right).(w\ quilogramas)$$

$$(P\ \text{reais}) = (R\ \text{reais}) - (C\ reais)$$

Também estamos assumindo que t ≥ 0. Nosso objetivo neste problema é maximizar nosso lucro líquido, P reais.

Os três estágios do passo 1 (variáveis, suposições e objetivo) não precisam ser concluído em qualquer ordem específica. Por exemplo, muitas vezes é útil determinar o objetivo no início do passo 1. No Exemplo,não fica claro que R e C são variáveis até definirmos nosso objetivo. Uma maneira de verificar se o passo 1 está concluído é verificar se nosso objetivo P relaciona-se todo o caminho de volta para a variável t.

O passo 2 é selecionar a abordagem de modelagem. Agora que temos um problema expresso em linguagem matemática, precisamos selecionar uma abordagem matemática para obter uma resposta. Muitos tipos de problemas podem ser declarados em um padrão para o qual existe um procedimento de solução geral eficaz. A maioria das pesquisas em matemática aplicada consiste em identificar essas categorias gerais de problemas e traçar maneiras eficientes de resolvê-los. Nosso exemplo será modelado como um problema de otimização de uma variável, ou seja, problema máximo-mínimo.

O passo 3 é formular o modelo. Precisamos tomar a questão exposta no passo 1 e reformulá-la no formulário padrão selecionado no passo 2, para que possamos aplicar o procedimento de solução geral padrão. Muitas vezes é conv,eniente mudar nomes de variáveis se nos referirmos a uma abordagem de modelagem que foi descrita usando nomes de variáveis específicos, como é o caso aqui. Nós escrevemos

$$P = R - C$$

$$= p \cdot w - 7t$$

$$= (10 - 0{,}05t)(100 + 2t) - 7t$$

$$= 1000 + 20t - 5t - 0{,}1t^2 - 7t$$

$$= -0{,}1t^2 + 8t + 1000$$

Seja $y = P$ a quantidade que desejamos maximizar e $x = t$ a variável independente. Nosso problema agora é maximizar $y = f(x) = -0{,}1x^2 + 8x + 1000$ (1.1) sobre o conjunto $S = \{x : x \geq 0\}$.

O passo 4 é resolver o modelo, usando o procedimento de solução padrão identificado no passo 2. Em nosso exemplo queremos encontrar o máximo da função $y = f(x)$ definido pela equação (1.1) sobre o conjunto $x \geq 0$. A função $y = f(x)$ é uma função quadrática que possui concavidade para baixo (como podemos ver no gráfico abaixo), logo possui um ponto máximo. Usando a fórmula do x do vértice, temos $x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-8}{2.(-0{,}1)} = \frac{-8}{-0{,}2} = 40$. Logo, o máximo da função $y = f(x)$ ocorre quando $x = 40$, ou seja, $f(40) = -0{,}1.(40)^2 + 8.(40) + 1000 = 1160$.

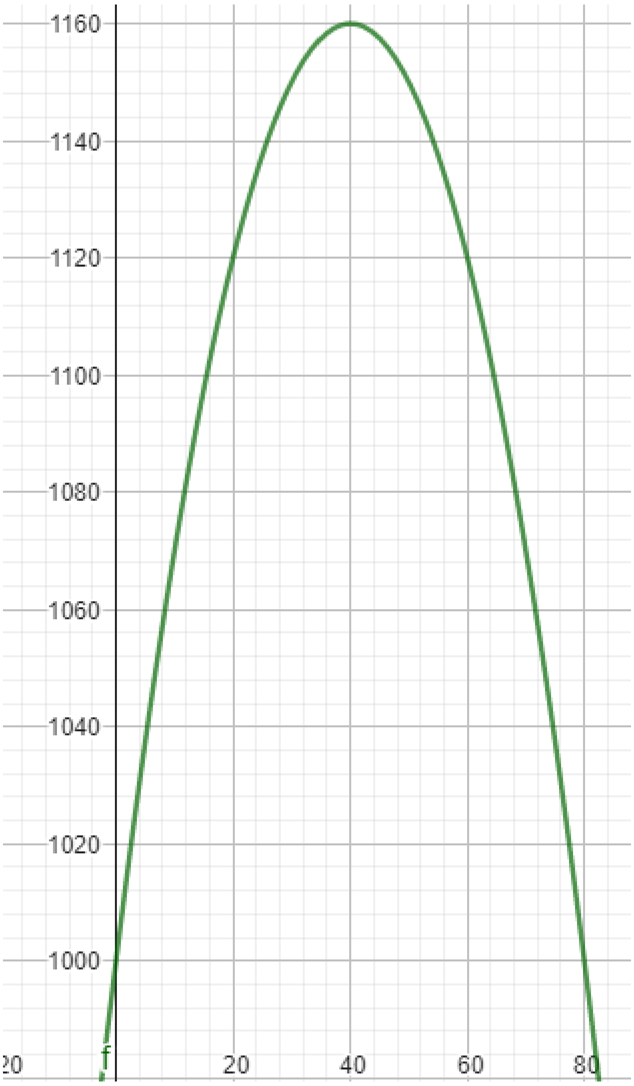


Figura 08: Gráfico da função $f(x) = -0,1x^2 + 8x + 1000$.

Fonte: própria autora

O passo 5 é responder à pergunta feita originalmente no passo 1; ou seja, quando vender o porco para maximizar o lucro. A resposta obtida pelo nosso modelo matemático é vender o porco após quarenta dias, obtendo assim um lucro líquido de R$ 1160,00.

O passo 6 é verificar a validade da resposta. Esta resposta é válida desde que as suposições feitas no passo 1 permaneçam válidas.

5 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE PERÍMETRO E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

5.1 APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA CONSTRUÇÃO DA PLANTA BAIXA DA ESCOLA

A pesquisa foi realizada com os 34 educandos da 2ª série V03 do Ensino médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Ilda Ferreira da Fonseca Martins” localizada no município de São Gabriel da Palha no Estado do Espírito Santo, durante os meses de abril e maio de 2023.

Como foi o primeiro contato dos educandos com a modelagem matemática, num primeiro momento foi explicado aos educandos o que era e o que se tratava a Modelagem Matemática, para isso foi passado alguns slides aonde estavam contidos alguns trechos de autores sobre o tema, como por exemplo, Bassanezi, que afirma que: "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". (Bassanezi 2011, p. 16). Nesses slides foram apresentados também o capítulo 4 desta dissertação para que os educandos entendessem com clareza sobre o processo da Modelagem Matemática e sua importância. Logo nesse primeiro contato já foi possível notar interesse dos educandos pela realização dessa atividade.

No segundo momento pedi aos educandos sugestões de temas a serem trabalhados utilizando a modelagem matemática, porém eles apresentaram dificuldade em sugerir temas, já que não estão acostumados a serem sujeitos ativos, participantes na construção da aula de matemática. Sendo assim, eles tiveram 10 minutos para pesquisarem sobre temas e escrever numa folha de ofício e colocaram em cima da mesa do educador. Assim que concluíram esse passo, li as propostas dos educandos, escrevi as que apareceram com mais frequência no quadro e fiz uma votação rápida sobre qual tema trabalhar, os temas foram os mais variados possíveis, como por exemplo: saneamento básico, fornecimento de energia, agricultura, pesca, abastecimento de água, comércio, futebol, escola, saúde pública, gasto com combustível, entre outros. Por votação foi escolhido o tema escola, já que é uma realidade comum a todos. Na modelagem matemática a escolha do tema é muito importante pois o mesmo deve estar no cotidiano dos educandos, e como os mesmos fazem parte do processo de escolha eles se sentem valorizados como indivíduo pensante e sujeitos ativos no processo de ensino aprendizagem de matemática, como escreve Jacobini: "a opção pela escolha do tema pelos próprios educandos é recomendada por muitos autores, pois remetem interesses, ansiedades e relações dos educandos com seu cotidiano". (Jacobini 2004, p.55). Levando em consideração o tema escolhido, em diálogo entre mim e os educandos foram levantados o que abordar na escola que englobasse perímetros e áreas de figuras planas. As propostas de pesquisa foram: medição e a partir desses dados, calcular os perímetros e as áreas da escola e montar com esses dados a planta baixa da mesma.

A modelagem Matemática, junto com o tema escolhido, buscou abordar os conteúdos matemáticos de perímetros e áreas de figuras planas com situações do cotidiano, fazendo com que a aprendizagem seja dinâmica e significativa. Para garantir o bom andamento do trabalho, a direção, a equipe pedagógica e os educandos da escola receberam um material contendo a proposta do trabalho e foram convidados a conhecer a proposta da modelagem, cuja finalidade seria utilizar uma nova metodologia para subsidiar o processo de ensino aprendizagem na sala de aula.

No terceiro momento a turma foi dividida em 7 grupos para que cada um desses grupos realizasse a medição de uma parte específica do prédio. A divisão ficou assim:

- Grupo 1 - ficou responsável pelas medidas do bloco que estudam as primeiras séries;
- Grupo 2 - ficou responsável pelas medidas do bloco que estudam as segundas séries;
- Grupo 3 - - ficou responsável pelas medidas do bloco que estudam as terceiras séries;
- Grupo 4 – ficou responsável pelas medidas do auditório, coordenação e corredores;
- Grupo 5 – ficou responsável pelas medidas da sala dos educadores, sala de planejamento, sala da direção, secretaria e recepção.
- Grupo 6 – ficou responsável pelas medidas do pátio, refeitório, cozinha e quadra esportiva.
- Grupo 7 – ficou responsável pela biblioteca e sala do AEE.

No quarto momento cada grupo calculou as áreas e perímetros de cada espaço, tudo sendo supervisionado e conferido por mim. Neste momento ficou em evidencia a curiosidade que os educandos estavam em realizar os cálculos e por diversos momentos fui mero expectador, pois os educandos trocavam informações e conhecimentos entre si.

No quinto momento, os grupos fizeram a colocação em comum de suas pesquisas. Nesse momento foi compartilhado os cálculos dos perímetros e das áreas de cada espaço da escola. De acordo com as orientações curriculares nacionais:

> ... a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”) (BRASIL, 2016).

E, no sexto momento, os grupos se juntaram para organizar e montar a planta baixa da escola.

> Ao educando deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender" mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um "aprender" que se esvazia em brincadeiras. Mas um "aprender" significativo do qual o educando participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade (FIORENTINI D.; MIORIM, 1993).

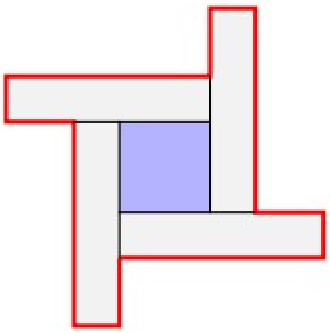
No sétimo e último momento, foi aplicado aos educandos o questionário abaixo contendo 10 questões objetivas sobre perímetro e áreas de figuras planas.

Questão 01 (OBMEP 2011 – N1Q5 – 1ª fase) Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

(A) 48 cm
(B) 50 cm
(C) 52 cm
(D) 54 cm

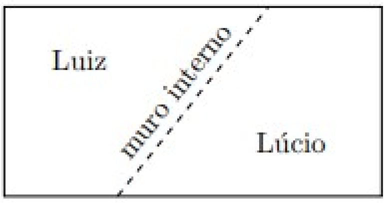
(E) 56 cm

Questão 02 (OBMEP 2014 – N1Q3 – 1ª fase) Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta de ponta mais grossa ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento deste contorno?



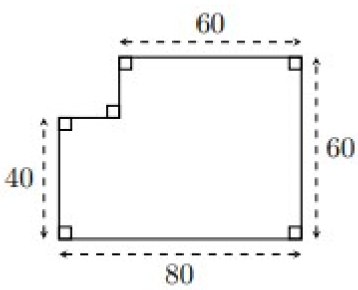
(A) 180 cm
(B) 200 cm
(C) 220 cm
(D) 280 cm
(E) 300 cm

Questão 03 (OBMEP 2014 – N1Q10 – 1ª fase) Os irmãos Luiz e Lúcio compraram um terreno cercado por um muro de 340 metros. Eles construíram um muro interno para dividir o terreno em duas partes. A parte de Luiz ficou cercada por um muro de 260 metros e a de Lúcio, por um muro de 240 metros. Qual é o comprimento do muro interno?



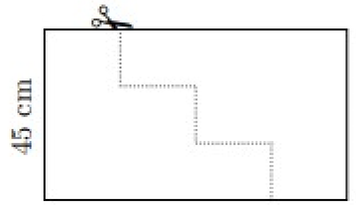
(A) 80 m
(B) 100 m
(C) 160 m
(D) 180 m
(E) 200 m

Questão 04 (OBMEP 2005 – N1Q8 – 1ª fase) Daniela quer cercar o terreno representado pela figura. Nesta figura, dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?



(A) 140
(B) 280
(C) 320
(D) 1800
(E) 4800

Questão 05 (OBMEP 2007 – N1Q16 – 1ª fase) Um retângulo de papelão com 45 cm de altura é recortado em dois pedaços iguais, ao longo da linha pontilhada, como na figura. Com estes dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45 cm. Qual é o comprimento da base do retângulo?

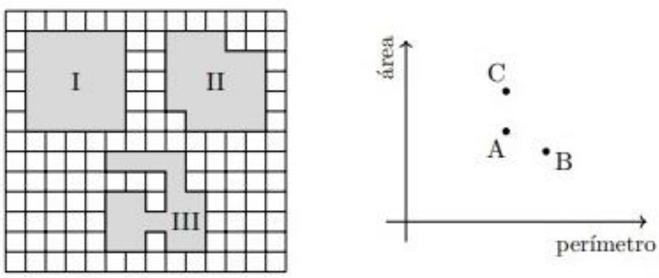


(A) 65
(B) 70
(C) 75
(D) 80
(E) 85

Questão 06 (OBMEP 2011 – N2Q16 – 1ª fase) Márcia cortou quatro tiras retangulares de mesma largura cada uma, de um dos lados de uma folha de papel medindo 30 cm por 50 cm. O perímetro do pedaço de papel que sobrou é 85% do perímetro da folha original. Qual é a largura das tiras?

(A) 2 cm
(B) 2,5 cm
(C) 3 cm
(D) 3,2 cm
(E) 3,5 cm

Questão 07 (OBMEP 2007 – N2Q15 – 1ª fase) A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.



Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

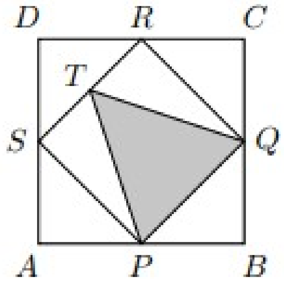
(A) $\mathrm{I} \to \mathrm{C}, \mathrm{II} \to \mathrm{B}, \mathrm{III} \to \mathrm{A}$
(B) $\mathrm{I} \to \mathrm{B}, \mathrm{II} \to \mathrm{A}, \mathrm{III} \to \mathrm{C}$

(C) $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{A}, \mathrm{II} \rightarrow \mathrm{C}, \mathrm{III} \rightarrow \mathrm{B}$

(D) $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{A}, \mathrm{II} \rightarrow \mathrm{B}, \mathrm{III} \rightarrow \mathrm{C}$

(E) $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{C}, \mathrm{II} \rightarrow \mathrm{A}, \mathrm{III} \rightarrow \mathrm{B}$

Questão 08 (OBMEP 2009 – N1Q10 – 1ª fase) Na figura, o quadrado ABCD tem área 40 cm². Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento RS. Qual é a área do triângulo PQT?



(A) 10 cm²

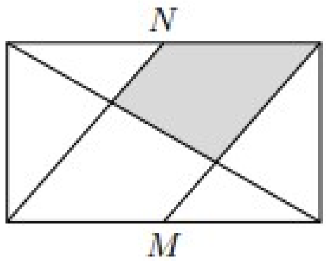
(B) 12 cm²

(C) 14 cm²

(D) 16 cm²

(E) 18 cm²

Questão 09 (OBMEP 2013 – N2Q7 – 1ª fase) A figura representa um retângulo de 120 m² de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



(A) 20 m²

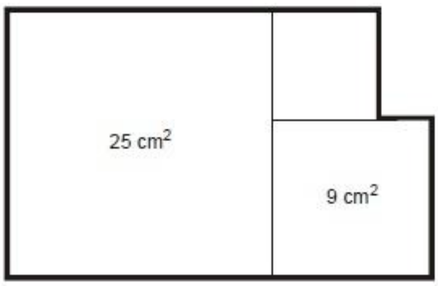
(B) 24 m²

(C) 30 m²

(D) 36 m²

(E) 40m²

Questão 10 (OBMEP 2006 – N1Q8 – 1ª fase) A figura é formada por três quadrados, um deles com área de 25 cm² e o outro com 9 cm². Qual é o perímetro da figura?



(A) 20 cm

(B) 22 cm

(C) 24 cm

(D) 26 cm

(E) 38 cm

5.1.1 Análise dos resultados do questionário aplicado aos educandos.

O questionário foi respondido por 27 educandos, o que corresponde a 79,4% da turma da 2ª V03. Os resultados estão no gráfico abaixo.

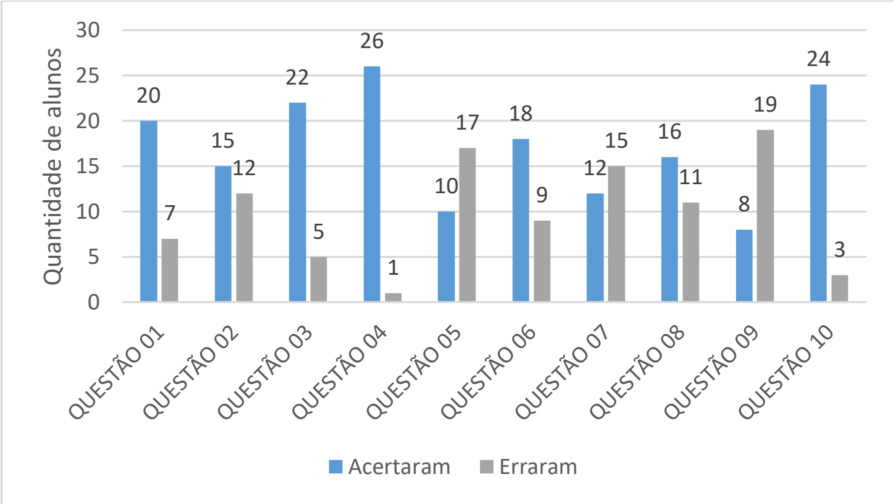


Figura 09: Tabela com o resultado do questionário.

Fonte: Própria autora

Os educandos não valorizam as olimpíadas brasileira de matemática das escolas públicas (OBMEP), pois acham que as questões são muito difíceis e acabam por nem tentarem fazer. Apesar de os resultados no gráfico não serem o ideal, eu fiquei satisfeita pois pela primeira vez os educandos tentaram resolver os exercícios da OBMEP e perceberam que são capazes. E não apenas isso, durante a correção da lista de exercícios no quadro o que mais ouvi dos alunos foi “mas era só isso?”. Portanto, foi atingido o meu objetivo, que era de despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade, melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos, desenvolver a habilidade para resolver problemas e estimular a criatividade e a curiosidade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Modelagem Matemática, como uma alternativa pedagógica para o ensino aprendizagem de matemática, o educando tem oportunidade de experimentar, modelar, testar sua capacidade de organização, analisar situações e tomar decisões.

A evolução tecnológica e o acentuado desenvolvimento social observado nas últimas décadas têm conduzido transformações profundas na educação. Nestas transformações insere-se também o ensino de matemática. As justificações usadas nas análises de diferentes formas de ensinar Matemática estão longe de ser consensuais. Todavia, as tendências de renovação e inovação do ensino de matemática envolvem mudanças de paradigma, percebendo que a postura linear onde o educador expõe o conteúdo, faz exercício de fixação e avalia, já não responde às necessidades dos educandos na sociedade atual. Relacionam-se também com a complexidade da sociedade pós-moderna e com os desafios que ela coloca aos cidadãos e futuros profissionais.

Bittencourt (2001) (apud Néri, 2004), ressalta que o contexto no qual vivemos e fazemos nossa educação na atualidade não pode mais ser pautado pelos antigos moldes de ensino extremamente estáticos e nada relacionais, que dificultam a interação educador-educando e o processo de aprendizagem. Faz-se necessário o diálogo e a articulação da escola com o universo do trabalho para ampliar os espaços de reflexão, conduzindo a novas competências e habilidades.

Almeida e Dias (2003) salientam a importância de introduzir atividades de Modelagem nos cursos de Licenciatura em Matemática, por meio de disciplina específica ou em outras disciplinas do currículo, com o intuito de viabilizar aos futuros educadores experiências e perspectivas em relação ao uso da Modelagem Matemática em sua futura prática profissional.

A inserção da Modelagem nos cursos de Licenciatura em Matemática tem ocorrido conforme discutido pela área, através de disciplina específica ou de atividades nas disciplinas do currículo (ALMEIDA; DIAS, 2003). Barbosa (2001) sustenta a necessidade de os cursos de Licenciatura incorporarem esta temática em seus currículos, mediante os problemas práticos de sala de aula. O autor sugere que a presença deste ambiente não se restrinja apenas a uma disciplina, mas faça parte das diversas disciplinas do curso.

Apesar dos argumentos positivos em utilizar Modelagem Matemática na prática docente, as preocupações para utilizá-la vêm acompanhadas de insegurança (BARBOSA, 1999). Estas são justificadas pelos seguintes aspectos: ausência de clareza para concretizar as atividades no contexto escolar; incertezas em relação aos conhecimentos dos educadores nesse ambiente e a reação dos pares, educandos e outros participantes da escola à proposta. Pesquisas (ALMEIDA, 2004; BARBOSA, 2001; ROMA, 2003) sustentam que as experiências com Modelagem nas instâncias de formação podem favorecer os educadores a realizarem atividades dessa natureza, ou próximas dela, na sua sala de aula.

Essas pesquisas indicam perspectivas para estudos futuros e reiteram os esforços sobre a investigação na área de Modelagem Matemática no contexto da formação de educadores, conduzindo a reflexões sobre o alcance e as limitações dos programas de formação em relação ao desenvolvimento profissional do educador e à sua prática pedagógica.

Podemos chegar as seguintes conclusões acerca da utilização de modelos matemáticos através da modelagem matemática:

1. A modelagem matemática é um importante instrumento pedagógico por que envolve pesquisa, coleta, análise de dados e atividades em equipe;

2. A modelagem é um processo e não um fim;

3. Na modelagem há necessidade de pesquisa dos assuntos e temas relacionados, o que motiva os educandos a estudarem;

4. Os conceitos que são apresentados prontos nos livros didáticos são construídos pelos educandos a partir de dados experimentais que chegam em modelos que explicam o fenômeno em questão.

A capacidade de pensar aparece assim como um dos objetivos do ensino de matemática e, atualmente, uma tendência acentuada neste sentido é o desenvolvimento da reflexão. É neste encaminhamento que pensamos que para assegurar uma aprendizagem reflexiva de conteúdo, quem aprende necessita explicar, argumentar, perguntar, defender suas próprias ideias e decidir. Neste contexto pensamos na modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, como uma forma de fazer com que o educando desenvolva a sua capacidade de reflexão.

É notório que com a aplicação da modelagem matemática para a 2ª série do ensino médio estabeleceu uma conexão entre conteúdos matemáticos e a aplicação em situações reais palpáveis a realidade do educando. A conexão entre a teoria e a prática estabelecida com a elaboração da planta baixa da escola possibilitou maior interação, colaboração e socialização entre educador e educandos, além de mostrar que os conteúdos aprendidos em sala de aula são aplicáveis em situações do dia a dia, o que torna o momento de aprendizagem interessante e agradável.

A modelagem matemática inova a prática pedagógica dos educadores e proporciona uma aprendizagem significativa aos educandos, com isso o educador assume o papel de mediador do conhecimento e coloca o educando como protagonista de sua aprendizagem.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWICZ, A.; MOLL, J. (orgs.) **Para além do fracasso escolar**. 5. ed. Campinas: Papirus, 2002. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico)

ALARCÃO, I. **Alunos, professores e escola face à sociedade da informação**. São Paulo: Cortez, 2003. p. 12-39.

ALMEIDA, L. M. W; DIAS, M. R. **Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino aprendizagem**. Bolema, Rio Claro, ano 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática como método de ensino-aprendizagem**. Boletim da SBMAC, 1990.

BASSANEZI, R. C**. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática – uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3 ed. São Paulo: Contexto, 2003

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, promulgada em 20 de dezembro de 1996**. São Paulo, Ed. do Brasil, 1996.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo ensino-aprendizagem**. 1992. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1992.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2. ed. Campinas: UNICAMP; São Paulo: Summus, 1986.

FAZENDA, I. C. A. **Práticas interdisciplinares na escola**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

PIRES, C. M. C.; PIETROPAOLO, R. C**. Matemática e suas interfaces com outras disciplinas**. São Paulo: Editora PROEM, 2006.

SILVA, F. H. S.; SANTO, A. O. E. **A contextualização: uma questão de contexto**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7. Recife. Anais... Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

BASSANEZI, R. **Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** EditoraContexto, 2004.

GIORDANO, F. R.; FOX, W.P.; HORTON, S. B.; WEIR, M. D. **A First course in mathematical modeling.** Brooks Cole, 2008.

MEERSCHAERT.M**. Mathematical modeling.** Academic Press, 2007.

BLUM, W; GALBRAITH, P. L.; HENN. Henn and M. Niss,(Eds). **Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study.** Springer Verlag, 2007.

LIMA, E. L. **Medidas e forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança.** SBM, 1991.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria.** SBM, 2022 (Coleção PROFMAT).

SANTOS, L. C. D. **Um breve estudo sobre o conceito e o cálculo de áreas de figuras planas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.

PEREIRA, M. M.; NATTI, P. L. **Modelagem matemática no processo de ensino aprendizagem de área, perímetro e escala**. Dissertação (Mestrado em Matemática, 2012).