



Universidade Regional do Cariri - URCA  
Departamento de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Tópicos de Geometria Analítica: Uma Noção de Curvas Planas Parametrizadas

José Carlos Pereira

Juazeiro do Norte - CE

2023

# Tópicos de Geometria Analítica: Uma Noção de Curvas Planas Parametrizadas

**José Carlos Pereira**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

## **Orientador**

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2023

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema  
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Pereira, José CARLOS

P436t Tópicos de Geometria Analítica: Uma Noção de Curvas Planas  
Parametrizadas / José CARLOS Pereira. Juazeiro do norte - CE, 2023.

100p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da  
Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira

1.Parametrização , 2.Curvas, 3.Paramétricas,; I.Título.

CDD: 516

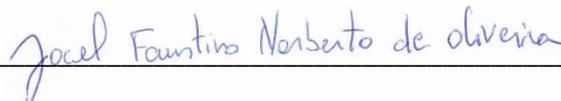
# Tópicos de Geometria Analítica: Uma Noção de Curvas Planas Parametrizadas

**José Carlos Pereira**

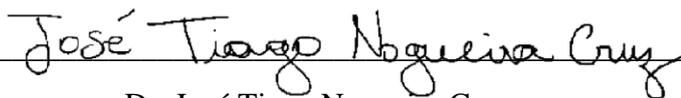
Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título mestre em matemática.

Aprovada em: 06 /04/2023.

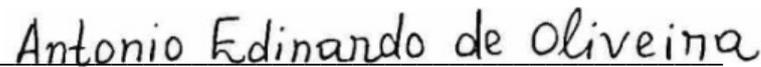
BANCA EXAMINADORA



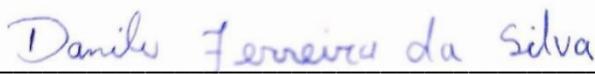
Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira (Orientador)  
Universidade Regional do Cariri (URCA)



Dr. José Tiago Nogueira Cruz  
Universidade Regional do Cariri (URCA)



Prof. Me. Antonio Edinardo de Oliveira  
Universidade Federal do Cariri (URCA)



Prof. Dr. Danilo Ferreira da Silva

*Dedico a meus pais, esposa e filho*

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus por sempre cuidar e estar comigo em todos os momentos, me dando as melhores oportunidades sempre para desenvolver com meu esforço e dedicação o melhor de mim. Agradeço aos meus pais, Antonia Valdeíza Pereira Brito (Deíza) e Manoel Pereira De Brito (Inacim), por todo sacrifício feito durante suas vidas para me proporcionarem as oportunidades de estudar e desenvolver aquilo que sempre gostei e sonhei da minha vida, estando sempre ao meu lado dando suporte necessário nos momentos mais difíceis dessa caminhada. Agradeço a minha esposa, Maria Graciele de Sousa Gomes Pereira (Gracie), e filho, Carlos Manoel Pereira (Manoel), pelo empenho e paciência demonstrada ao longo do curso de mestrado e também ao longo de toda a vida, uma vez que muito do tempo que devia ser dedicado a eles me dediquei ao curso com trabalhos e aulas e principalmente com o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço ao meu orientador Professor Dr. Jocel Faustino Noberto de Oliveira pelo empenho em ajudar durante todo o trabalho e também pela paciência demonstrada para ensinar-me. Agradeço aos meus colegas de turma pelo trabalho em equipe e pelo aprendizado compartilhado durante todo o processo. Agradeço também a CAPES pelo suporte financeiro dado durante o curso que certamente colaborou para que desenvolvesse todo o curso com seus custos de deslocamento e materiais didáticos. Agradeço finalmente a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para que fosse possível realizar este trabalho com todos os quesitos necessários.

“Duas coisas são infinitas: o universo e a estupidéz humana. ”(Albert Einstein)

## Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo entender como se dá a parametrização de uma curva no plano. Para isso, trabalha-se inicialmente com os conceitos básicos da geometria analítica como um todo, desde conceitos e fatos históricos até às noções básicas de assuntos como plano cartesiano e definições de curvas planas. Com o objetivo de mostrar as parametrizações de curvas como a elipse, a hipérbole e a parábola, o trabalho traz inicialmente as definições e as equações de tais curvas para o plano bidimensional aferindo-se estas equações através de conceitos e noções iniciais de suas definições. As equações paramétricas, de fato, são dadas após este primeiro estudo mais aprofundado das equações que definem cada curva plana a ser estudada, sendo que com essa nova formatação estas curvas recebem uma nova roupagem para suas parametrizações. Após todas as etapas necessárias para entender o processo de parametrizar curvas no plano, o referido trabalho traz também alguns outros exemplos de curvas que aumentam ainda mais o entendimento e o conhecimento a cerca do assunto, bem como finaliza com a expansão desses conceitos para curvas no plano complexo para fazer o paralelo a tudo que foi estudado. O estudo feito é direcionado aos alunos do ensino médio, de fácil compreensão e conceitos que podem seguramente ser interpretados e utilizados pelo aluno de nível médio. Um dos maiores objetivos do trabalho aqui desenvolvido é basicamente disponibilizar através deste a possibilidade de acesso ao assunto aqui abordado, para que torne-se mais um acervo ao qual o discente possa recorrer a fim de sua melhor compreensão quanto ao estudo ou aprofundamento sobre equações paramétricas no plano ou, como traz o título do trabalho, parametrização de curvas planas

### **Palavras-chave**

Parametrização, curvas, paramétricas, elipse, parábola, hipérbole, epiciclóide, ciclóide, cardióide, hélice.

## **Abstract**

The main objective of this work is to understand how the parameterization of a curve in the plane takes place. For this, we initially work with the basic concepts of analytic geometry as a whole, from concepts and historical facts to the basic notions of subjects such as the Cartesian plane and definitions of plane curves. With the objective of showing the parameterizations of curves such as the ellipse, the hyperbola and the parabola, the work initially brings the definitions and equations of such curves to the two-dimensional plane, gauging these equations through concepts and initial notions of their definitions. The parametric equations, in fact, are given after this first more in-depth study of the equations that define each flat curve to be studied, and with this new format these curves receive a new guise for their parameterization. After all the necessary steps to understand the process of parameterizing curves in the plane, this work also brings some other examples of curves that further increase the understanding and knowledge about the subject, as well as ends with the expansion of these concepts to curves in the complex plan to parallel everything that was studied. The study carried out is aimed at high school students, easy to understand and concepts that can safely be interpreted and used by high school students. One of the main objectives of the work developed here is basically to make available through this the possibility of access to the subject discussed here, so that it becomes another collection to which the student can resort in order to better understand the study or deepening of parametric equations. in the plane or, as the title of the work brings, parameterization of plane curves

**Keywords**

Parameterization, ellipse, parabola, hyperbola, epicycloid, cycloid, cardioid, helix.

## Lista de Figuras

2.1	Plano Cartesiano . . . . .	21
2.2	Localização de pontos no plano . . . . .	23
2.3	Distância entre pontos no plano . . . . .	23
2.4	Distância entre ponto e reta no plano . . . . .	26
3.1	Curvas no Plano . . . . .	28
3.2	Condição de alinhamento de três pontos . . . . .	30
3.3	Uma elipse de focos $F_1$ e $F_2$ . . . . .	34
3.4	Uma elipse com eixos sobre OX e OY . . . . .	35
3.5	Relação fundamental da elipse . . . . .	36
3.6	Uma hipérbole com focos $F_1$ e $F_2$ . . . . .	39
3.7	Pontos simétricos da hipérbole . . . . .	40
3.8	Elementos da hipérbole . . . . .	41
3.9	Hipérbole de focos $F_1(0, 5)$ e $F_2(0, -5)$ . . . . .	43
3.10	Parábola de foco $F$ e diretriz $d$ . . . . .	44
3.11	Parábola de parâmetro $p$ . . . . .	45
3.12	Parábola com vértice na origem e foco à esquerda da diretriz . . . . .	46
3.13	Parábola com vértice na origem e foco acima da diretriz . . . . .	47
4.1	Sistema de coordenadas polares . . . . .	50
4.2	Coordenadas polares de $P_1$ . . . . .	51
4.3	Relação entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas . . . . .	52
4.4	Parametrização da reta . . . . .	55
4.5	Reta $3x + 4y - 15 = 0$ . . . . .	57
4.6	Reta $x - 2y + 5 = 0$ . . . . .	58
4.7	Reta $y - 3y - 1 = 0$ . . . . .	59

4.8	Parametrização de um círculo . . . . .	60
4.9	Círculo em sistema de eixos transladado . . . . .	62
4.10	Parametrização da Elipse (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	64
4.11	Gráficos de cosh e sinh (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	66
4.12	Gráfico de $H = H_+ \cup H_-$ (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	67
4.13	Gráfico de $P: : (x - a)^2 = k(y - b)$ . . . . .	69
4.14	Parametrização da parábola $P: : (x - a)^2 = k(y - b)$ . . . . .	70
4.15	Ponto $P$ descrevendo uma epicicloide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	72
4.16	A cardioide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	74
4.17	Construção da curva de Agnesi (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	75
4.18	A curva de Agnesi (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	76
4.19	Construção da Cicloide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	77
4.20	A Ciclóide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT) . . . . .	78
5.1	Cissóide de Diócles - Figura retirada do livro Introdução às curvas algébricas planas, Israel Vainsencher. . . . .	80
5.2	Círculo: Curva fechada simples . . . . .	91

5.3	Cardioide: Curva fechada não simples . . . . .	91
5.4	A Hélice Circular no cotidiano (figura retirada da internet) . . . . .	96
5.5	A Hélice Circular (figura retirada da internet) . . . . .	97

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>19</b>
2.1	Um pouco de história . . . . .	19
2.2	O plano Cartesiano . . . . .	21
2.3	Distância entre dois pontos no Plano . . . . .	23
2.4	Distância entre ponto e reta no plano . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Uma noção de curvas planas</b>	<b>28</b>
3.1	Curvas no plano . . . . .	28
3.2	A reta e suas equações . . . . .	29
3.2.1	Condição de alinhamento de três pontos . . . . .	29
3.2.2	Equação geral e equação reduzida da reta . . . . .	32
3.3	A Elipse . . . . .	33
3.3.1	Definição e relação notável . . . . .	34
3.3.2	Equação da elipse . . . . .	37
3.4	A Hipérbole . . . . .	38
3.4.1	Definição e principais elementos . . . . .	38
3.4.2	Equação da hipérbole . . . . .	41
3.5	A parábola . . . . .	43
3.5.1	Definição e principais elementos . . . . .	43
3.5.2	Equação reduzida da parábola . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Parametrização de Curvas Planas</b>	<b>48</b>
4.1	Parâmetro e parametrização . . . . .	48

4.2	Coordenadas polares . . . . .	50
4.3	Parametrização de uma reta . . . . .	55
4.3.1	Equações paramétricas da reta . . . . .	56
4.4	Parametrização de um círculo . . . . .	60
4.4.1	Parametrização do círculo em sistema trasladado . . . . .	61
4.5	Parametrização de uma elipse . . . . .	63
4.5.1	Significado geométrico do parâmetro $t$ . . . . .	64
4.6	Parametrização de uma hipérbole . . . . .	65
4.7	Parametrização de uma parábola . . . . .	69
4.8	A Epiciclóide . . . . .	71
4.9	Cardióide . . . . .	73
4.10	A curva de Agnesi . . . . .	74
4.11	A Ciclóide . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Outras abordagens</b>	<b>79</b>
5.1	Parametrização de curvas algébricas . . . . .	79
5.2	Curvas regulares e Comprimento de arco . . . . .	81
5.3	Teorema fundamental das curvas planas . . . . .	86
5.4	Parametrização de Curvas e o Plano Complexo . . . . .	88
5.5	A Hélice Circular: Uma noção de curvas no espaço . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>98</b>

# 1 Introdução

Começaremos pela ideia de contemplar um pouco da geometria desde seus primórdios, isto é, iniciaremos nosso trabalho entendendo um pouco da história e da importância da geometria desde seus primeiros conceitos até chegar ao nosso objeto principal de estudo que será a parametrização de algumas curvas planas. Entender o significado de geometria como parte da matemática cujo objeto é o estudo do espaço e das figuras que podem ocupá-lo é, talvez, o primeiro passo para que possamos de fato desenvolver as teorias e as ideias que devem contemplar nosso estudo. Para isso devemos conceituar e trabalhar com as noções básicas iniciais que devem ser tratadas como alicerce e principal método de entendimento do nosso trabalho.

Vamos inicialmente tratar de ideias como plano cartesiano e conceitos tais como a distância entre dois pontos nesse mesmo plano e distância entre ponto e reta. Estas ideias tem como principal objetivo dar suporte ao que trabalharemos mais a frente a fim de desenvolver o nosso trabalho. Noções de parametrização de uma reta e coordenadas polares também estarão presentes nos primórdios do nosso entendimento com o mesmo objetivo já citado um pouco mais acima. Entretanto, o que de mais importante faremos é, de fato, entender como e por que fazer as parametrizações de curvas como a parábola, a elipse e a hipérbole que são as principais que trataremos aqui. Por fim, devemos neste processo, buscar os métodos mais simples para que o leitor, por mais leigo que seja ao assunto, possa acompanhar e entender cada passo aqui desenvolvido.

Na parte de curvas planas começa, de fato, nossas principais considerações e conceitos, onde serão detalhadamente especificados todos os requisitos para que o nosso objetivo principal seja melhor apresentado. Ideias de o que são curvas planas e como construí-las são algumas das que nos auxiliarão no momento em que estivermos a trabalhar com as parametrizações tão recorrentes em nosso desenvolvimento geral. Enten-

der as definições e os processos de como obter equações dessas curvas planas estarão também entre os nossos objetivos iniciais a fim de proporcionar ao leitor o melhor compreensão de tudo aquilo que posteriormente será trabalhado.

Finalmente, na última parte do trabalho, faremos as parametrizações de curvas planas como as que serão trabalhadas um pouco antes, estabelecendo o passo a passo de como encontrar tais equações paramétricas a partir de suas equações cartesianas. Desenvolveremos exemplos em cada curva a fim de representar com isso tudo aquilo que está sendo feito nas equações trabalhadas, também para melhor compreensão do que está sendo feito em cada curva plana para chegar até aquelas equações que a representarão em função de um único parâmetro  $t$ .

## 2 Preliminares

Na geometria analítica, há o desenvolvimento de conceitos importantes, tornando possível algebrizar os objetos geométricos e descrevê-los por meio de equações, como a equação da reta e a equação da circunferência, além da existência de algumas fórmulas para encontrar a distância entre dois pontos, o ponto médio de um segmento, entre outros.

Iniciaremos nosso trabalho com algumas noções de como surgiu e de como é importante a geometria analítica no geral e também a importância e relevância das parametrizações de curvas planas no estudo da matemática e de todos os outros campos de estudo que direta ou indiretamente façam uso de tal ferramenta no desenvolvimento de seus conceitos. Para isso traremos um breve histórico a fim de percebermos como se utiliza dessa área da matemática nos mais diversos universos de ensino.

### 2.1 Um pouco de história

"A Idade da Pedra durou vários milhares de anos, começando talvez já em 5 milhões a.C. e indo até por volta de 3000 a.C. Num mundo de vastas pastagens e savanas onde abundavam os animais selvagens e as pessoas eram principalmente caçadores e colhedores. Suas vidas eram agrestes e difíceis, de maneira que elas viviam demasiado ocupadas e em permanente agitação para poderem desenvolver tradições científicas. Depois de 3000 a.C. emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China. Essas comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a matemática começam a se desenvolver." Introdução à História da Matemática – Howard Eves. A rotina do homem exigiu a presença da Matemática em todos os momentos através de coisas que nem ao menos se percebe; cálculos são feitos a todo instante. Neste

contexto, Montrezol et al. (2015, sp), destacam que há Matemática na compra do supermercado, no troco, nos dias da semana, na temperatura dos dias, entre outros. Muitas vezes, sem métodos simples de calcular, como a calculadora, o que tornava os modos de contar mais complicados. Para tanto, são as profissões que dependem desta ciência que vêm evoluindo sempre. Historicamente as ideias da Geometria Analítica surgiram da comparação de grandezas curvilíneas com grandezas retilíneas. Os egípcios e os babilônios deram os primeiros passos na geometria por meio do estudo do círculo.

A Geometria como ramo matemático surgiu enquanto atividade empírica dos povos antigos para atender as suas necessidades da época, sendo suas primeiras sistematizações realizadas pelos gregos que muito contribuíram para esse ramo do saber. Platão, Eudoxo e muitos outros deram à Geometria um caráter especial, encarando-a como um ramo de destaque da ciência Matemática. (CARVALHO, 2012, p. 02) Euclides foi quem sistematizou os Elementos, importantes conhecimentos que os estudiosos anteriores criando um caráter axiomático-dedutivo ao conhecimento geométrico da época, destaca o autor supracitado. Muitos foram os que contribuíram para a evolução da geometria: Descartes com a Geometria analítica. Depois da contribuição grega, passa-se a várias outras, que impulsionaram mais o desenvolvimento da Geometria enquanto ramo matemático. Descarte gerou a Geometria Analítica, Poncelet e Chasles, introduzindo novas concepções, que contribuíram para o surgimento da Geometria Projetiva; Cayley introduziu elementos imaginativos às descobertas de Poncelet e Chasles, que foram posteriormente desenvolvidos e unificados por Felix Klein. (PIAGET GARCIA, 1987)

## 2.2 O plano Cartesiano

Para compreender a geometria analítica como um todo, é necessário aprender o que é um plano cartesiano. O plano cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares entre si, ou seja, que formam um ângulo de  $90^\circ$ . Em cada um desses eixos, representamos uma reta numérica com todos os números reais. O eixo vertical é conhecido como eixo das ordenadas ou também como eixo  $y$ . O eixo horizontal é conhecido como eixo das abscissas ou eixo  $x$ . Ao representar qualquer objeto no plano cartesiano, é possível extrair informações algébricas desse objeto, a primeira delas e a mais simples é o ponto.

Todo ponto no plano cartesiano pode ser representado por um par ordenado de acordo com a sua localização em relação a cada um dos eixos. Veja abaixo uma ilustração inicial de um plano cartesiano com os pontos de coordenadas  $A(-3,1)$ ,  $B(3,2)$  e  $C(3,-2)$  como exemplo inicial para que possamos iniciar nossa compreensão.

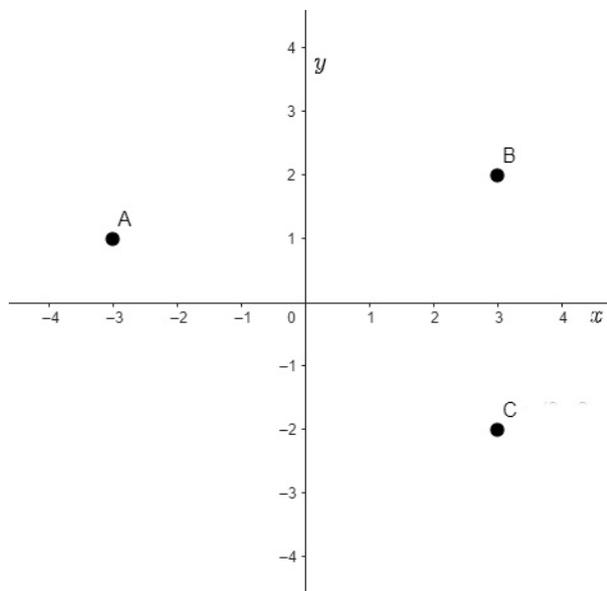


Figura 2.1: Plano Cartesiano

Geometria analítica trata da interface entre geometria e álgebra, ou seja, trata de como resolver problemas da geometria usando álgebra para isso. Logo, vamos inicial-

mente entender como transferir conceitos da geometria para álgebra, um bom exemplo para ilustrar essa ideia inicial é compreender como tomar um ponto e traduzir esse ponto para álgebra, ou seja, transferir esse ponto para coordenadas no plano, que é um dos nossos primeiros conceitos que serão trabalhados em nosso estudo.

O plano cartesiano, como já comentamos, é formado por dois eixos (X e Y) denominados eixo das abscissas (na horizontal) e eixo das ordenadas (na vertical) que são perpendiculares e dividem o plano em quatro partes denominadas "quadrantes". Dizemos que o primeiro quadrante é formado por todos os pontos que possuem as duas coordenadas positivas, que o segundo quadrante é formado pelos pontos que possuem a primeira coordenada negativa e a segunda coordenada positiva, já o terceiro quadrante é formado pelos pontos que possuem as duas coordenadas negativas e por fim, o quarto quadrante é formado pelos pontos que possuem a primeira coordenada positiva e a segunda coordenada negativa. Quando um ponto possui uma das coordenadas igual a zero dizemos que ele está situado sobre um dos eixos, de fato, se ele possui a abscissa igual a zero é por que ele está sobre o eixo das ordenadas, já se um ponto possui a ordenada igual a zero é por que está situado sobre o eixo das abscissas.

**Exemplo 1.** *Vamos identificar no plano cartesiano os pontos de coordenadas  $A(4, -2)$  e  $B(-6, 3)$  justificando o quadrante ao qual cada um deles pertence.*

*Antes de representarmos tais pontos no plano cartesiano, é importante notar que o ponto A tem a primeira coordenada positiva enquanto que a segunda coordenada é negativa, isto significa que ele está situado no quarto quadrante do plano cartesiano, já o ponto B tem a primeira coordenada negativa e a segunda coordenada positiva o que quer dizer que ele está localizado no segundo quadrante do plano. É importante salientar que este exemplo não contempla os casos em que os pontos estão situados nos demais quadrantes do plano.*

Veja na figura abaixo a ilustração do plano cartesiano contendo os dois pontos citados no exemplo demonstrando, de fato, sua localização com relação aos quadrantes.

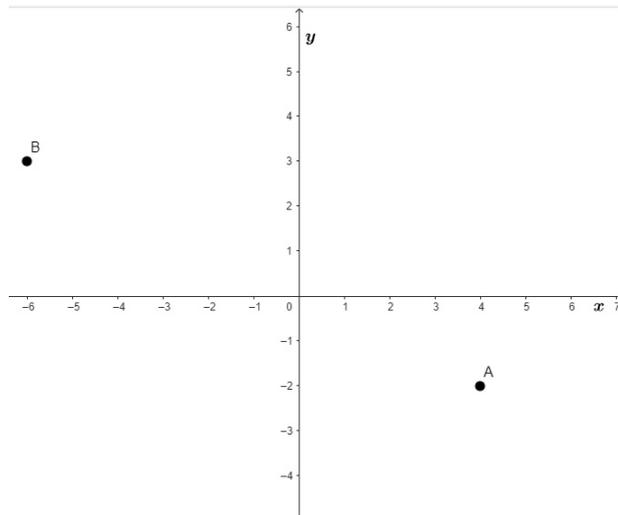


Figura 2.2: Localização de pontos no plano

### 2.3 Distância entre dois pontos no Plano

Consideremos, inicialmente, o plano abaixo com os pontos A e B nele destacados:

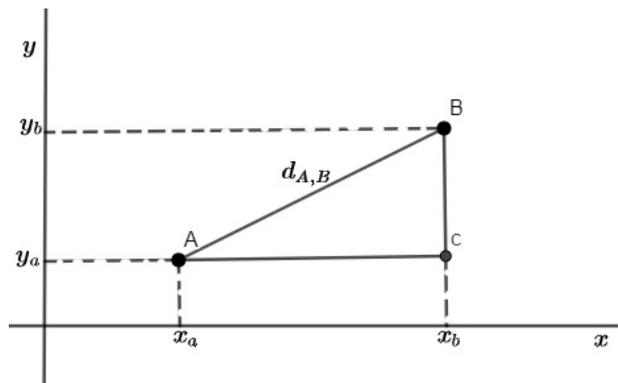


Figura 2.3: Distância entre pontos no plano

Agora que já sabemos um pouco sobre pontos e sua localização no plano cartesiano, falaremos sobre a distância que existe entre dois desses pontos, de coordenadas diferen-

tes, situados no mesmo plano. Em muitas situações, é preciso sabermos calcular tal distância. De modo geral, estamos falando da distância entre dois pontos  $A(x_a, y_a)$  e  $B(x_b, y_b)$ , genericamente denotados desse modo.

Note que o ponto  $C$  denotado na figura forma um triângulo retângulo com os pontos  $A$  e  $B$ , de modo que a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é igual a hipotenusa deste triângulo, logo, podemos aplicar sobre ele o teorema de Pitágoras de modo que vale o seguinte:  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , mas

$$AB = d_{A,B}, \quad AC = |x_b - x_a| \quad \text{e} \quad BC = |y_b - y_a|,$$

isto é,

$$d_{A,B}^2 = |x_b - x_a|^2 + |y_b - y_a|^2$$

donde obtemos a fórmula

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \quad (1)$$

**Exemplo 2.** *Vamos determinar o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 3)$  e  $C(5, -1)$ .*

*Para calcularmos o perímetro deste triângulo devemos conhecer as medidas de seus lados, para isso, vamos calcular as distâncias entre os pontos  $A$  e  $B$ ,  $A$  e  $C$  e por fim entre os pontos  $B$  e  $C$ .*

*Vamos calcular a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ :*

$$d_{A,B} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \text{ u.m}$$

Agora, calcularemos a distância entre os pontos  $A$  e  $C$ :

$$d_{A,C} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ u.m}$$

E, por fim, temos a distância entre os pontos  $B$  e  $C$ :

$$d_{B,C} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ u.m}$$

Temos com isso que o perímetro deve ser dado pela soma entre as distâncias:

$$\text{Perímetro} = d_{A,B} + d_{A,C} + d_{B,C} = (\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 5) = (3\sqrt{5} + 5) \text{ u.m}$$

Como não definimos nenhuma unidade de medida, temos que  $u.m$  representa a unidade de medida utilizada.

## 2.4 Distância entre ponto e reta no plano

Além de sabermos calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, é necessário para o nosso estudo daqui pra frente que saibamos determinar também a distância entre um ponto e uma reta que estejam no mesmo plano, considerando, é claro, que este ponto não pertença a reta em questão, ou seja, que este ponto não esteja sobre a reta, o que de forma óbvia faria tal distância ser nula. Do mesmo modo, é interessante e conveniente que saibamos uma forma para calcular a distância entre duas retas, não coincidentes, situadas no mesmo plano. Esta segunda forma tem ligação direta com a primeira e decorre trivialmente, por este motivo, falaremos de ambas simultaneamente nesse trecho. Enfim, a distância entre um ponto  $P(x_0, y_0)$  e uma reta  $r$  é dada pela distância de  $P$  a sua projeção  $P'$  sobre a mesma reta  $r$ , mas esta é também, a distância

entre a reta  $r$ , já citada, e uma outra reta  $s$ , paralela a  $r$ , e que passa pelo ponto  $P$ .  
 Vejamos no esboço da figura abaixo a primeira situação:

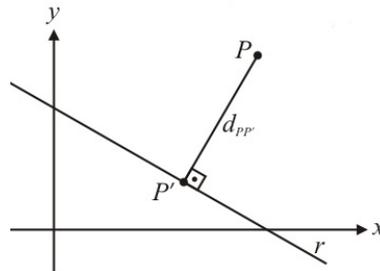


Figura 2.4: Distância entre ponto e reta no plano

A partir desta ideia e, considerando como essencial ao nosso trabalho, podemos calcular a distância  $d(P, r)$  de um ponto  $P$  a uma reta  $r$  usando a fórmula abaixo descrita:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2)$$

E considerando  $s$ , de equação  $ax + by + d = 0$ , uma reta paralela a  $r$  que passa por  $P$ , a distância entre elas é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

É importante lembrar que, duas retas no plano que sejam coincidentes ou concorrentes terão a distância entre elas nula, uma vez que possuem ponto em comum.

A demonstração de tais fórmulas não será feita nesse momento do nosso estudo, de modo que fica a cargo do leitor, usando a ideia de distância entre dois pontos e a noção inicial dada sobre o ponto  $P$  e sua projeção  $P'$  sobre a reta  $r$ . Mas, para melhor fixarmos este conceito vamos ver o exemplo abaixo em que faremos uma aplicação direta desta fórmula.

**Exemplo 3.** *Vamos determinar a que distância está o ponto  $P(-2, 3)$  da reta  $r$  :*

$4x + 3y - 2 = 0$ . Para isso, usamos a fórmula (3) dada acima:

$$d(P, r) = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + (-2)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-8 + 9 - 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}$$

Logo, temos que a distância do ponto  $P$  até a reta  $r$  é  $\frac{1}{5}$  u.m

## 3 Uma noção de curvas planas

### 3.1 Curvas no plano

Nesta parte do nosso trabalho, vamos tentar entender um pouco sobre a noção de curvas em geral, bem como a ideia de curvas no plano. A noção intuitiva de curvas pode se dar a partir dos exemplos mais conhecidos como o de uma reta no  $\mathbb{R}^2$ , ou uma circunferência ou ainda uma parábola. Todas estas curvas são descritas por meio de sua equação cartesiana, a reta  $y - 2x = 2$ , ou a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  ou a parábola  $y - x^2 = 0$  por exemplo, estão definidas por sua equação  $f(x, y) = c$  em que  $f$  é função de  $x$  e  $y$ , e  $c$  é uma constante real. Podemos ver na figura abaixo as representações de dois dos exemplos citados acima.

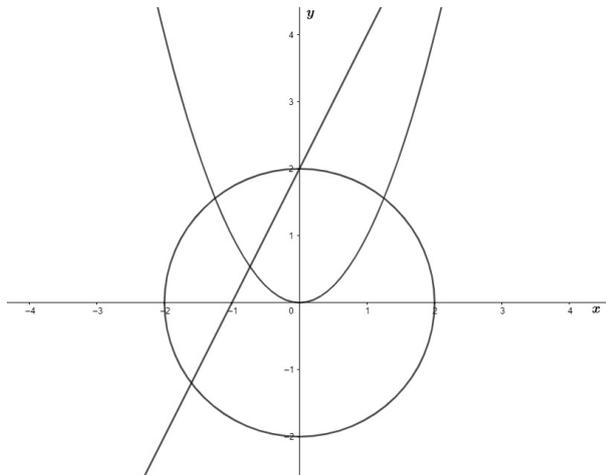


Figura 3.1: Curvas no Plano

**Definição 1.** *Uma curva em  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto de pontos  $\{\zeta : (x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$ .*

Como já vimos anteriormente, a circunferência e a parábola, ambas normalmente de centro na origem dos eixos, são ótimos exemplos de curvas planas para início de entendimento, exemplos clássicos de curva no  $\mathbb{R}^2$ . Entretanto, iremos trabalhar inicialmente

com um exemplo ainda mais simples para melhor compreensão neste ponto do nosso trabalho: a reta e suas equações no plano.

## 3.2 A reta e suas equações

A definição de reta, de modo geral, é dada na maioria das vezes em matemática como um conjunto infinito de pontos alinhados, para nosso caso, alinhados no plano. Esta definição é bem geral, mas partiremos dessa percepção para enunciarmos e demonstrarmos a proposição a seguir, na qual consideraremos conhecidos pelo leitor conceitos básicos, como o cálculo de determinantes por exemplo. Existem outras definições e outras maneiras para se enunciar e demonstrar esta primeira proposição que trabalharemos a seguir, porém, consideramos esta a maneira mais plausível para nosso trabalho, uma vez que não exige do leitor grandes requisitos para seu entendimento.

### 3.2.1 Condição de alinhamento de três pontos

**Proposição 1.** *Três pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$  são colineares se, e somente se, o determinante formado por suas coordenadas, na forma abaixo descrita, for nulo, isto é:*

$$A(x_a, y_a), B(x_b, y_b) \text{ e } C(x_c, y_c) \text{ são colineares} \iff \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

*Em outras palavras, diremos que três pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$  pertencem a mesma reta quando o determinante mostrado acima for igual a zero. Deste modo, podemos determinar agora, usando este fato, suas equações no plano.*

**Demonstração:** Para demonstrar esta proposição, inicialmente consideraremos o caso em que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencem a uma reta não paralela aos eixos  $x$  e  $y$ . Pois caso contrário, teriam todos a mesma abscissa,  $x_a = x_b = x_c$  (caso a reta estivesse paralela

ao eixo  $y$ ) ou a mesma ordenada,  $y_a = y_b = y_c$  (caso a reta estivesse paralela ao eixo  $x$ ). Depois usaremos semelhança de triângulos para verificarmos que a razão entre os lados de dois triângulos semelhantes construídos a partir dos pontos dados nos leva a uma equação que coincide com o determinante citado acima e que este mesmo será nulo sempre que estes pontos estiverem alinhados. Vejamos então na figura abaixo o caso a considerar, partindo da nossa hipótese de que os pontos estão sob a mesma linha no plano:

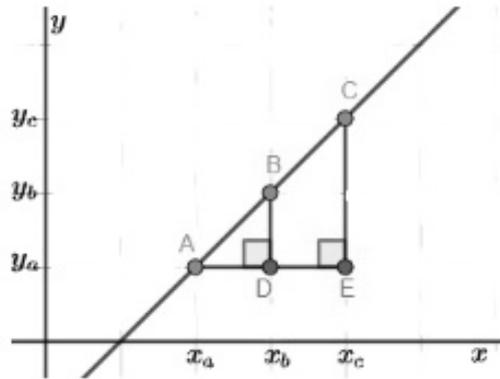


Figura 3.2: Condição de alinhamento de três pontos

Considerando os pontos  $D$  e  $E$  da figura, temos que os triângulos  $\triangle ACE$  e  $\triangle ABD$  são semelhantes, logo vale a razão:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DB}}$$

Mas,  $\overline{AE} = x_c - x_a$ ,  $\overline{AD} = x_b - x_a$ ,  $\overline{EC} = y_c - y_a$  e  $\overline{DB} = y_b - y_a$  pois,  $x_b = x_d$ ,  $x_e = x_c$ ,  $y_a = y_d$  e  $y_e = y_a$ , e além disso,  $x_b - x_a \neq 0$  e  $y_b - y_a \neq 0$ ;

o que nos dá:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DB}} \iff \frac{x_c - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_a}{y_b - y_a}$$

Partindo da última igualdade obtida em nossa conta, podemos multiplicar *meios por*

*extremos* e obteremos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} (x_c - x_a)(y_b - y_a) &= (x_b - x_a)(y_c - y_a) \iff (x_c - x_a)(y_b - y_a) - (x_b - x_a)(y_c - y_a) = 0 \\ \iff x_c y_b - x_c y_a - x_a y_b - x_b y_c + x_b y_a + x_a y_c &= 0 \\ \iff x_c y_b + x_b y_a + x_a y_c - (x_c y_a + x_a y_b + x_b y_c) &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando por  $(-1)$  obtemos

$$x_c y_a + x_a y_b + x_b y_c - (x_c y_b + x_b y_a + x_a y_c) = 0 \quad (4)$$

Seguindo a demonstração, perceba que o determinante formado pelas coordenadas dos pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$  é dado como segue:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = x_c y_a + x_a y_b + x_b y_c - (x_c y_b + x_b y_a + x_a y_c)$$

Para concluir nossa demonstração basta perceber que este determinante é igual a equação (4), que por sua vez é igual a zero, o que nos leva a:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, três pontos  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  e  $C(x_c, y_c)$  que sejam colineares fazem este determinante ser igual a zero, e neste caso, a recíproca é trivialmente verdadeira, isto é, se tal determinante é igual a zero, então os pontos são colineares, como queríamos demonstrar.

### 3.2.2 Equação geral e equação reduzida da reta

Como já vimos na subseção anterior, para três distintos pontos no plano é possível apenas que sejam colineares ou que, caso isto não ocorra, sejam vértices de um triângulo. No primeiro caso estudamos que é necessário que o determinante formado pelas coordenadas desses pontos completados pela coluna de números 1 seja nulo. Vamos perceber agora que, conhecidos dois pontos distintos pertencentes a uma mesma reta, isto é, colineares, poderemos, a partir destes, determinar dois tipos de equações que representam tal reta.

Sejam  $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$  pontos colineares pertencentes a uma reta  $r$ . Vamos encontrar a relação que existe entre as coordenadas de um outro ponto qualquer  $P(x, y)$  também sobre a mesma reta  $r$  do plano com os pontos já citados  $A$  e  $B$ . Para isso usaremos a proposição anterior, ou seja, como sabemos que os pontos  $A, B$  e  $P$  são colineares, podemos afirmar que o determinante abaixo é nulo, isto é,

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A partir desta informação, que é garantia da proposição que provamos anteriormente, podemos agora desenvolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} &= xy_a + x_a y_b + x_b y - (xy_b + x_b y_a + x_a y) \\ \iff xy_a + x_a y_b + x_b y - (xy_b + x_b y_a + x_a y) &= 0 \\ \iff xy_a + x_a y_b + x_b y - xy_b - x_b y_a - x_a y &= 0 \end{aligned}$$

Reagrupando obtemos;

$$\iff x(y_a - y_b) + y(x_b - x_a) + x_a y_b - x_b y_a = 0$$

Chamando de  $a = y_a - y_b$ ;  $b = x_b - x_a$  e  $c = x_a y_b - x_b y_a$  e considerando que não são

simultaneamente iguais a zero os valores de  $a$  e  $b$ , segue a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

Podemos também a partir das equações acima denotadas, escrever a **equação reduzida da reta** apenas isolando o termo  $y$ , assim:

$$ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Como sabemos que  $a = y_b - y_a$  então temos que  $-a = y_b - y_a$ , e do mesmo modo  $c = x_a y_b - x_b y_a$  nos dá que  $-c = x_b y_a - x_a y_b$  e como  $b = x_b - x_a$  segue que:

$$y = mx + n$$

Em que os coeficiente  $m$  e  $n$  são denotados por:  $m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$  e  $n = \frac{x_b y_a - x_a y_b}{x_b - x_a}$

**Exemplo 4.** *Encontre as equações geral e reduzida da reta que passa pelos pontos  $A(1,4)$  e  $B(2,3)$ .*

*Usando a fórmula que desenvolvemos vamos encontrar inicialmente a **equação geral**. Seus coeficientes são:*

$$a = y_a - y_b = 4 - 3 = 1; b = x_b - x_a = 2 - 1 = 1 \text{ e } c = x_a y_b - x_b y_a = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = -5$$

*Logo,*

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow x + y - 5 = 0$$

*Agora, vamos simplesmente isolar o termo  $y$  da equação acima e determinar a **equação reduzida**, assim:*

$$x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -x + 5$$

### 3.3 A Elipse

Nosso objetivo neste tópico é conhecer e estudar a **elipse**, que é uma das cônicas mais conhecidas e estudadas em matemática, passando pela sua definição, equações,

relação notável e exemplo que nos ajude a entender o conceito inicial de cônicas em seu aspecto geral, de forma a facilitar a compreensão de outras cônicas que virão a seguir em nosso estudo.

### 3.3.1 Definição e relação notável

Para iniciarmos nosso entendimento, consideraremos, convenientemente, uma *elipse* que esteja sobre os eixos coordenados  $x$  e  $y$ , mas apresentaremos antes a definição de modo mais geral.

**Definição 2.** *Dados dois pontos no plano  $F_1$  e  $F_2$ , cuja distância entre eles seja  $2c$ , chama-se **elipse** de focos  $F_1$  e  $F_2$ , o conjunto de pontos  $P(x,y)$ , tais que, a soma das distâncias de  $P$  a  $F_1$  e de  $P$  a  $F_2$  seja igual a uma constante que será indicada por  $2a$ . Ou seja,*

$$P \text{ pertence a elipse} \iff PF_1 + PF_2 = 2a$$

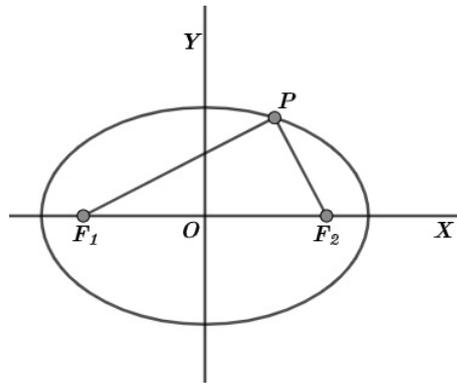


Figura 3.3: Uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$

onde,  $PF_1$  é a distância do ponto  $P$  ao foco  $F_1$  e  $PF_2$  do ponto  $P$  ao foco  $F_2$ .

Para descrevermos a *relação fundamental*, como já comentamos, consideraremos a elipse com seus eixos (Maior e menor) sobre os eixos  $x$  e  $y$  do sistema cartesiano  $OXY$ ,

neste primeiro momento, mais especificamente, com o eixo maior  $A_1A_2$  sobre o eixo  $OX$ , eixo menor  $B_1B_2$  sobre o eixo  $OY$ , e além disso os focos  $F_1$  e  $F_2$  equidistantes da origem dos eixos cartesianos, como na figura abaixo:

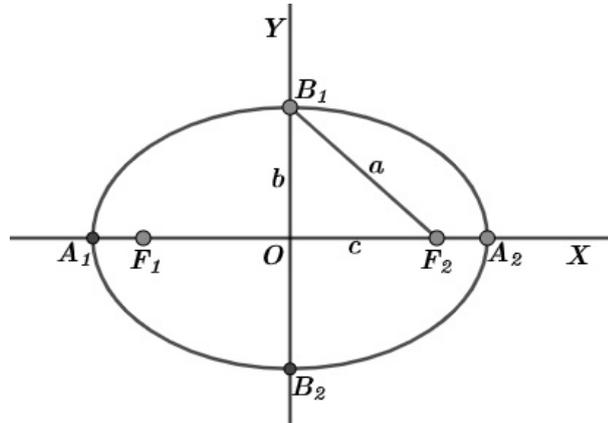


Figura 3.4: Uma elipse com eixos sobre  $OX$  e  $OY$

**Observação 1.** *Perceba que  $A_1A_2 = 2a$ , para elipses como a da figura 3.3.*

De fato, os pontos  $A_1$  e  $A_2$ , além de serem extremos do segmento que define o eixo maior da elipse, pertencem, obviamente, também a ela. Então, pela definição descrita no início deste tópico, é verdade que:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a = A_2F_1 + A_2F_2 \quad (I)$$

e como já sabemos que o eixo maior da elipse está sobre o eixo  $OX$  do plano, podemos considerar as seguintes coordenadas:  $A_1(x_1, 0)$ ,  $A_2(x_2, 0)$ ,  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Usando o conhecimento de distância entre dois pontos no plano já trabalhados aqui e os pontos com as coordenadas acima vemos que:

$$A_1F_1 = d_{A_1, F_1} = \sqrt{(x_1 + c)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_1 + c)^2} = x_1 + c$$

$$A_1F_2 = d_{A_1, F_2} = \sqrt{(x_1 - c)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_1 - c)^2} = x_1 - c$$

$$A_2F_1 = d_{A_2, F_1} = \sqrt{(x_2 + c)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 + c)^2} = x_2 + c$$

$$A_2F_2 = d_{A_2, F_2} = \sqrt{(x_2 - c)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 - c)^2} = x_2 - c$$

Agora, substituindo esses novos valores encontrados na equação (I) observamos que:

$$\begin{aligned}
 A_1F_1 + A_1F_2 &= 2a = A_2F_1 + A_2F_2 \\
 \iff (x_1 + c) + (x_1 - c) &= 2a = (x_2 + c) + (x_2 - c) \\
 \iff x_1 + x_1 + \cancel{c} - \cancel{c} &= 2a = x_2 + x_2 + \cancel{c} - \cancel{c} \\
 \iff 2x_1 = 2a = 2x_2 &\iff x_1 = a = x_2
 \end{aligned}$$

Concluimos que os pontos das extremidades são  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$  e que  $A_1A_2 = 2a$ .

Algo semelhante ocorre com os pontos  $B_1B_2$  da elipse da figura 3.4, cujas distâncias de  $B_1$  e de  $B_2$  até a origem são iguais e denotaremos aqui tal distância por  $b$ , logo, como estão sobre o eixo  $OY$ , obviamente, as coordenadas destes pontos, que representam as extremidades do eixo menor da elipse, são  $B_1(0, b)$  e  $B_2(0, -b)$ , bem como  $B_1B_2 = 2b$ .

Por fim, para descrevermos a chamada **relação fundamental**, consideraremos o triângulo retângulo  $\triangle OB_1F_2$  da figura abaixo:

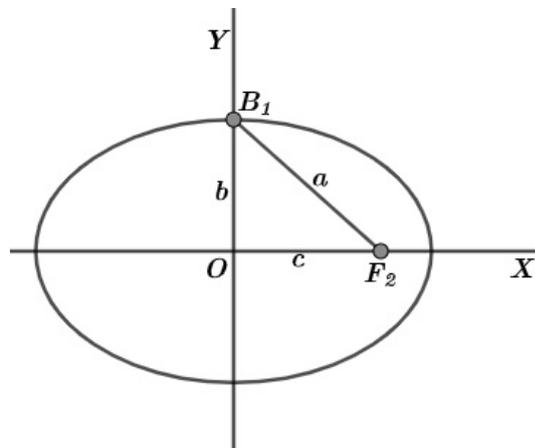


Figura 3.5: Relação fundamental da elipse

Pelo que foi comentado anteriormente sabemos que, por  $B_1$  ser um ponto da elipse, segue que  $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$ , mas  $B_1F_1 = B_1F_2$ , isto é,  $2B_1F_2 = 2a$ , ou seja,  $B_1F_2 = a$  como representado na figura. Basta agora usarmos o teorema de Pitágoras no  $\triangle OB_1F_2$  para obtermos a **relação fundamental**:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

### 3.3.2 Equação da elipse

Considere um sistema cartesiano ortogonal tal que  $A_1A_2 \subset OX$  e  $B_1B_2 \subset OY$ , ou seja, que, na elipse em questão, o eixo maior esteja sobre o  $OX$  e o menor sobre  $OY$ . Considere ainda que os focos sejam  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Vamos deduzir, pela definição conhecida, a **equação reduzida** dessa elipse. Vamos agora as contas, dizemos que um ponto qualquer  $P(x, y)$  pertence a elipse se, somente se,

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\ \Leftrightarrow & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow & \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{y^2} \\ \Leftrightarrow & 2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx \\ \Leftrightarrow & 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \\ \Leftrightarrow & a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - 4xc \\ \Leftrightarrow & (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (a^2 - 4xc)^2 \\ \Leftrightarrow & a^2[(x^2 - 2xc + c^2) + y^2] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\ \Leftrightarrow & a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\ \Leftrightarrow & a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \quad (I) \end{aligned}$$

De acordo com o que vimos e pela relação fundamental descrita na subseção anterior sabemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 = b^2$$

Basta agora, colocando os termos comuns em evidência, substituirmos em (I) que obteremos o seguinte:

$$\Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\iff x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

donde, dividindo tudo por  $a^2b^2 \neq 0$  encontramos a *equação reduzida da elipse* em questão, dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Analogamente, se a elipse tem  $A_1A_2 \subset OY$  e  $B_1B_2 \subset OX$ , ou seja, o eixo maior sobre o  $OY$  e o menor sobre  $OX$ , escrevemos a equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

**Exemplo 5.** Determinar a equação reduzida da elipse cujos focos são  $F_1(-3, 0)$  e  $F_2(3, 0)$  e seu eixo maior mede 10.

Como os focos são  $F_1(-3, 0)$  e  $F_2(3, 0)$  segue que  $c = 3$ , e como o eixo maior mede 10 temos que,

$$2a = 10 \iff a = 5$$

o que nos dá, pela relação fundamental que,

$$a^2 = b^2 + c^2 \iff b^2 = a^2 - c^2 \iff b^2 = 5^2 - 3^2 \iff b^2 = 25 - 9 \iff b^2 = 16$$

Logo, a equação procurada é:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

## 3.4 A Hipérbole

Continuaremos a falar de cônicas iniciando a definição e os elementos da *hipérbole*, que deverá ser um pouco mais simples de compreender, uma vez que já estamos, agora, habituados com alguns conceitos e algumas notações vistas na seção anterior e que serão bastante úteis nesta parte de nosso trabalho.

### 3.4.1 Definição e principais elementos

**Definição 3.** Considere dois pontos distintos  $F_1$  e  $F_2$ , pertencentes a um mesmo plano, e seja  $2c$  a distância entre eles. Chamaremos de *hipérbole* o conjunto de pontos desse

plano tais que a diferença (em módulo) das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é constante e igual a  $2a$  ( $0 < 2a < 2c$ ), ou seja:

$$P \text{ pertence a hipérbole} \iff |PF_1 - PF_2| = 2a$$

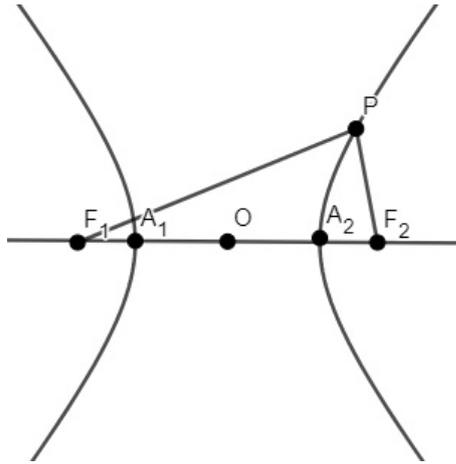


Figura 3.6: Uma hipérbole com focos  $F_1$  e  $F_2$

Devemos perceber que a **hipérbole** possui assim dois chamados **ramos**, onde um é formado pelos pontos  $P$  cuja diferença  $PF_1 - PF_2$  é positiva igual a  $2a$ , e o outro formado pelos pontos em que essa diferença é negativa e igual a  $-2a$ .

Para obtermos, um pouco mais a frente, a equação da hipérbole na forma mais simples, consideraremos, convenientemente, seus focos sobre o eixo horizontal  $OX$ , de modo que teremos estes denotados por  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ , isto é, a uma mesma distância  $c$  da origem dos eixos cartesianos.

Quando  $PF_1 - PF_2 = 2a$  (Positivo) diremos que  $P$  está no **ramo direito** da hipérbole, do mesmo modo, quando  $PF_1 - PF_2 = -2a$  (Negativo) diremos que  $P$  está no **ramo esquerdo** da mesma. Os dois ramos da hipérbole considerada nesse momento serão simétricos em relação ao eixo  $OY$  sendo que se um ponto  $P$  está no ramo esquerdo teremos seu simétrico  $P'$ , em relação a  $OY$ , pertencente ao ramo esquerdo.

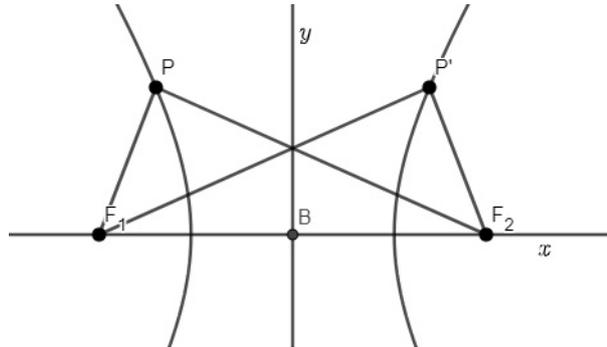


Figura 3.7: Pontos simétricos da hipérbole

Os principais *elementos da hipérbole*, boa parte representados na figura 3.8 abaixo, são:

- os focos  $F_1$  e  $F_2$
- o centro  $O$
- o eixo real  $A_1A_2$
- o eixo imaginário  $B_1B_2$
- a distância focal  $2c$
- a medida do eixo real  $2a$
- a medida do eixo imaginário  $2b$
- a excentricidade  $\frac{c}{a}$
- as assíntotas  $\pm \frac{b}{a}$

Perceba, pela figura a seguir, que existe uma *relação notável* entre  $a$ ,  $b$  e  $c$ , basta que apliquemos o teorema de pitágoras ao triângulo retângulo  $\triangle OB_1A_2$  que obteremos o seguinte:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Esta equação será de muita utilidade para a continuação do nosso estudo relacionado a hipérbole.

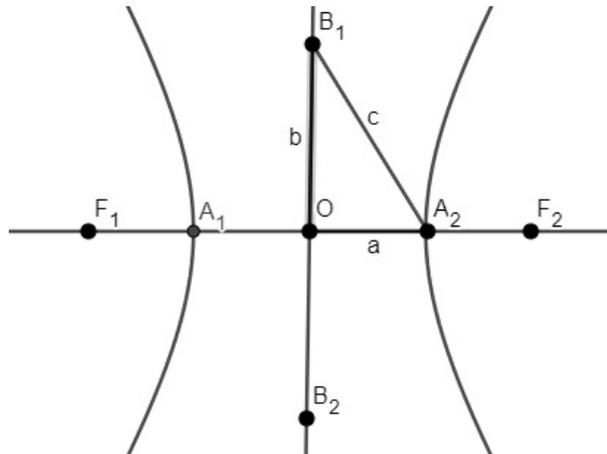


Figura 3.8: Elementos da hipérbole

### 3.4.2 Equação da hipérbole

Considere um sistema cartesiano ortogonal de modo que  $A_1A_2 \subset OX$  e  $B_1B_2 \subset OY$  e os pontos  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$ . Nestas condições, encontraremos **a equação reduzida da hipérbole** através da definição dada, ou seja, diremos que um ponto  $P(x, y)$  é ponto da hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$  se, somente se,  $|PF_1 - PF_2| = 2a$ , isto é:

$$\Leftrightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

elevando ambos os membros ao quadrado temos que;

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 4cx = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando, novamente, ambos os membros ao quadrado temos que;

$$\Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\iff c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 + a^4$$

colocando  $x^2$  em evidência no primeiro membro e  $a^2$  em evidência no segundo membro temos finalmente que;

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 + a^2)$$

mas, pelo que foi visto anteriormente, pela relação notável vale que:

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ ou seja, } c^2 - a^2 = b^2$$

usando essas últimas relações, segue

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 + a^2) \iff x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

E finalmente encontramos a **equação reduzida da hipérbole** em questão, dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para o caso em que os eixos considerados, real e imaginário, estão, respectivamente sobre os eixos  $OY$  e  $OX$ , isto é,  $A_1A_2 \subset OY$  e  $B_1B_2 \subset OX$ , podemos, de modo análogo ao que fizemos, deduzir a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

**Exemplo 6.** *Determinar a equação de uma hipérbole com eixo real sobre  $OY$  de medida 6 e distância focal 10.*

*Como a distância focal é 10, temos que;  $2c = 10 \iff c = 5$ . Além disso, se o eixo real mede 6 segue que;  $2a = 6 \iff a = 3$ .*

*Agora, usando a relação notável percebemos que;*

$$b^2 = c^2 - a^2 \iff b^2 = 5^2 - 3^2 \iff b^2 = 25 - 9 \iff b^2 = 16.$$

*Finalmente, sabemos que o eixo real dessa hipérbole está sobre  $OY$ , logo sua equação é do tipo:*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

*como  $b^2 = 16$ . e  $a^2 = 9$ . segue a equação procurada:*

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

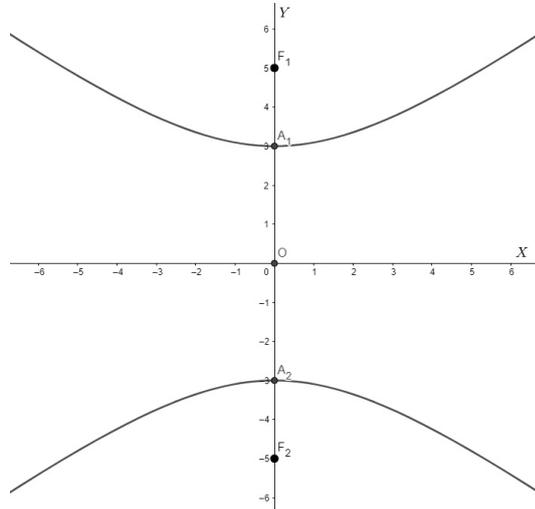


Figura 3.9: Hipérbole de focos  $F_1(0, 5)$  e  $F_2(0, -5)$

Falaremos, a seguir, de outra curva plana bastante usual no estudo de geometria analítica e muito conhecida desde o ensino básico.

## 3.5 A parábola

### 3.5.1 Definição e principais elementos

**Definição 4.** *Dados um ponto  $F$  e uma reta  $d$ , pertencentes a um plano  $\alpha$ , com  $F \notin d$ , seja  $p$  a distância entre  $F$  e  $d$ . Chamamos de Parábola o conjunto de pontos do plano  $\alpha$  que estão a mesma distância de  $F$  e de  $d$ , isto é,*

$$\text{Parábola} = \{P \in \alpha \mid PF = Pd\}.$$

Diremos que  $F$  é o *foco*,  $d$  é a *reta diretriz*,  $p$  é o *parâmetro* e  $V$  o *vértice* dessa parábola. Além disso, a reta que contém o vértice e o foco será denominada *eixo de simetria* da parábola. Veremos a seguir, que existem algumas equações que representam a parábola de acordo com a posição da reta diretriz em relação ao foco, que pode estar

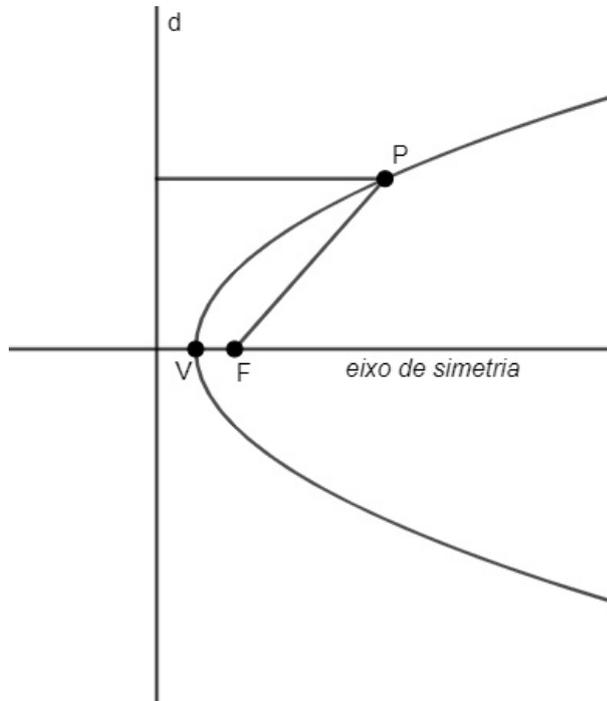


Figura 3.10: Parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$

à direita, acima, à esquerda ou abaixo de  $d$  o que modificará algum detalhe no modo como escrevemos sua equação.

### 3.5.2 Equação reduzida da parábola

Considere um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e o eixo das abscissas contendo o foco. Temos, então, evidentemente que:

- o foco é  $F(\frac{p}{2}, 0)$ ;
- a diretriz  $d$  tem equação  $x = -\frac{p}{2}$ .

Deste modo, chamaremos de equação reduzida da parábola a equação dada por  $P(x, y)$ , ponto genérico da curva, tal que,

$$P \in \text{parábola} \iff PF = PP'$$

em que  $P'(-\frac{p}{2}, y)$  é o ponto da diretriz  $d$  em que o segmento  $\overline{PP'}$  é perpendicular a mesma. (veja na figura abaixo).

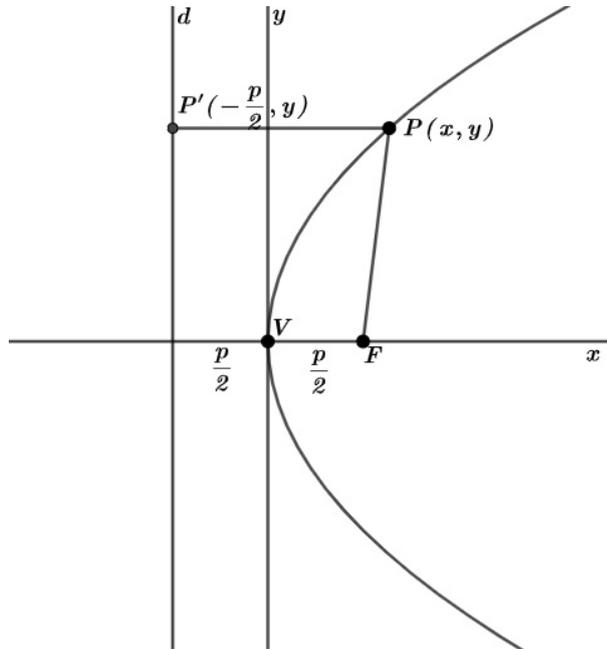


Figura 3.11: Parábola de parâmetro  $p$

Com isso, de  $\iff PF = PP'$ , segue de forma imediata que:

$$\iff \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

elevando ambos os membros ao quadrado teremos que:

$$\iff \left(\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\iff x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$\iff \cancel{x^2} - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \cancel{x^2} + px + \frac{p^2}{4}$$

o que nos leva finalmente a equação:

$$y^2 = 2px$$

Perceba que consideramos, para encontrar esta equação, a parábola como da *figura 3.11* em que o foco encontra-se à direita da reta diretriz. No caso em que o foco está à esquerda da reta diretriz, de forma análoga ao que fizemos, podemos encontrar a

equação:

$$y^2 = -2px$$

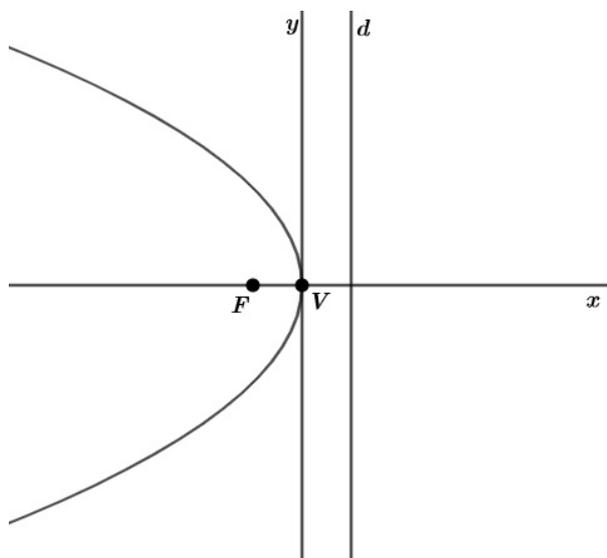


Figura 3.12: Parábola com vértice na origem e foco à esquerda da diretriz

Ainda relacionado a este tipo de equação, a parábola que apresenta vértice na origem e foco no eixo das ordenadas e acima da reta diretriz (cujo gráfico será representado a seguir), que é o caso mais simples a ser analisado, terá, novamente de modo análogo ao que foi feito anteriormente, uma equação do tipo:

$$x^2 = 2py$$

enquanto que a parábola que apresenta vértice na origem e foco no eixo das ordenadas e abaixo da reta diretriz terá uma equação do tipo:

$$x^2 = -2py$$

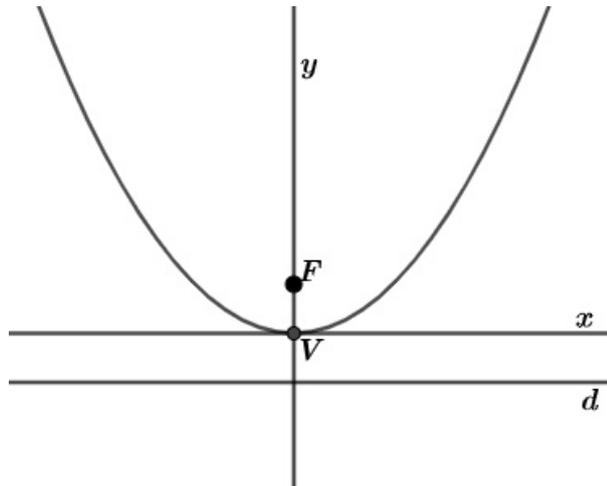


Figura 3.13: Parábola com vértice na origem e foco acima da diretriz

**Exemplo 7.** *Encontrar a equação de uma parábola com parâmetro  $p = 2$ , vértice na origem e foco no eixo  $x$ .*

*Consideraremos os dois casos, isto é, quando a parábola tiver foco à direita da reta diretriz e quando ela tiver foco à esquerda da reta diretriz.*

**1º caso: Foco à direita da diretriz**

*Neste caso, a equação é do tipo  $y^2 = 2px$ , como o parâmetro dado é  $p = 2$  temos :*

$$y^2 = 4x$$

**2º caso: Foco à esquerda da diretriz**

*Agora, a equação é do tipo  $y^2 = -2px$ , como o parâmetro dado é  $p = 2$  temos :*

$$y^2 = -4x$$

Existem também os casos em que o vértice e o foco da parábola não estão sobre os eixos coordenados, no entanto, trataremos mais a frente das chamadas *translações de eixos* que nos trará novas perspectivas quanto às equações trabalhadas nesta seção.

## 4 Parametrização de Curvas Planas

Para continuação de nossa abordagem neste momento em que iremos, de fato, introduzir a ideia de curvas planas parametrizadas, precisaremos conhecer um pouco da noção de *parâmetros* e *coordenadas polares*, por esse motivo, dedicaremos uma breve subseção para cada um desses assuntos na qual introduziremos tais conceitos de forma resumida mas condizente com aquilo que será necessário para o entendimento do que trataremos mais a frente relacionado a esta questão.

### 4.1 Parâmetro e parametrização

Do dicionário, *parâmetro* é o padrão, regra ou princípio por intermédio do qual se estabelece uma relação ou comparação entre termos. Em matemática, dizemos que é uma variável de caráter secundário, cuja finalidade é especificar os objetos de um conjunto ou de uma família. Vamos nesta parte de nosso trabalho falar um pouco sobre esta ideia de parâmetros, entendendo o que significa e como utilizar as parametrizações de curvas na geometria de modo geral.

Embora seja um termo bastante utilizado em matemática, como já foi dito, *parâmetros* são também encontrados em áreas como Física, informática e na educação de modo geral. Quem nunca ouviu falar dos *parâmetros curriculares nacionais* por exemplo, que são referências ou padrões de qualidade que são aplicados no Ensino Fundamental no Brasil, com o objetivo de potenciar o processo de criação da cidadania e também do aumento da equidade de direitos dos cidadãos. Na física, quando uma fórmula possui uma ou mais variáveis, o *parâmetro* é uma grandeza constante fixa. Na informática, o *parâmetro* é o valor atribuído pelo utilizador através de uma função específica. O *parâmetro* é introduzido ou definido com o objetivo de fazer a modificação ou ajustamento de um determinado comando. Em muitos casos, quando um parâmetro não é

definido pelo utilizador, o programa escolhe um. Na linguagem de programação, os *parâmetros* são aquilo que está entre os parênteses nos métodos e funções, sendo muitas vezes usado como sinónimo de argumento.

Com isso, vamos entender também um pouco sobre parametrização de modo geral, novamente do dicionário: *Parametrização é o processo de decisão e definição dos parâmetros necessários para uma especificação completa ou relevante de um modelo ou objeto geométrico.* Algumas vezes, pode somente envolver a identificação de certos parâmetros ou variáveis. Se, por exemplo, o modelo é de uma turbina eólica com um interesse particular na eficiência de geração de energia, então os parâmetros de interesse irão incluir o número, comprimento e passo entre as lâminas (pás).

Mais frequentemente, parametrização é um processo matemático envolvendo a identificação de um conjunto completo de coordenadas efetivas ou graus de liberdade do sistema, processo ou modelo. Parametrização de uma linha, superfície ou volume, por exemplo, implica a identificação de um conjunto de coordenadas que permite unicamente identificar qualquer ponto (sobre a linha, superfície, ou volume) com uma lista ordenada de números. Cada uma das coordenadas pode ser definida parametricamente na forma de uma curva paramétrica (unidimensional) ou uma equação paramétrica (mais de duas dimensões). Criar parametrizações no sistema de consignano.

No comércio o processo de *parametrização* é uma das etapas que compõem a liberação aduaneira de mercadorias importadas. É essencial na nacionalização de um produto de origem estrangeira, para que possa circular sem problemas em território nacional. Para empresas que importam — ou que querem começar a importar — mercadorias, entender como funciona o processo de parametrização é essencial. Especialmente porque ele pode ser a diferença entre ter o produto em mãos no prazo e regularizado. Além disso, impacta nos impostos, tributos e taxas cobradas para que seja legalmente co-

mercializado no Brasil.

Faremos parametrizações de de curvas no plano conhecidas e amplamente trabalhadas como elipse, parábola e hipérbole, bem como de outras um pouco menos abordada como é o caso das cicloides e epicloides. Para isso precisamos dessa primeira noção de o que é e como podemos fazer tais parametrizações de modo geral, para que daqui em diante possamos especificar mais nosso trabalho e estreitar os conceitos e conhecimentos sobre este tema que muito será abordado.

## 4.2 Coordenadas polares

A princípio, falaremos, de modo geral, da definição de coordenadas polares e de como escrevê-las, com o conceito e alguns exemplos que ajudem na compreensão da ideia, sendo que faremos após isso uma relação importante entre *coordenadas polares* e *coordenadas cartesianas* identificando como passar de um tipo para o outro e estipulando suas principais características e diferenças.

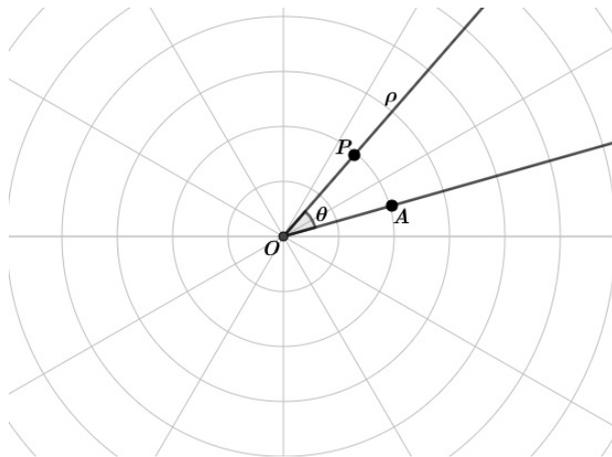


Figura 4.1: Sistema de coordenadas polares

**Definição 5.** Um sistema de coordenadas polares  $O\rho\theta$  no plano é formado por um ponto  $O$  (pólo), de uma semirreta  $OA$ , com origem em  $O$ , denominado eixo polar e de

uma unidade de comprimento usada para medir a distância de  $O$  a um ponto qualquer do plano.

De início, a compreensão pode parecer um pouco difícil, isso por conta da frequência com a qual usamos as coordenadas cartesianas e não as coordenadas polares, muito por conta de estarmos habituados com esse tipo de sistema gera a princípio, normalmente, uma certa dificuldade. Vimos, na figura dada acima, um exemplo em que as coordenadas do ponto são dois valores  $\rho$  e  $\theta$ , sendo  $\rho$  a distância de  $P$  até a origem  $O$ , e  $\theta$  a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta  $OP$ .

**Exemplo 8.** *Expresse as coordenadas polares do ponto  $P_1$  abaixo:*

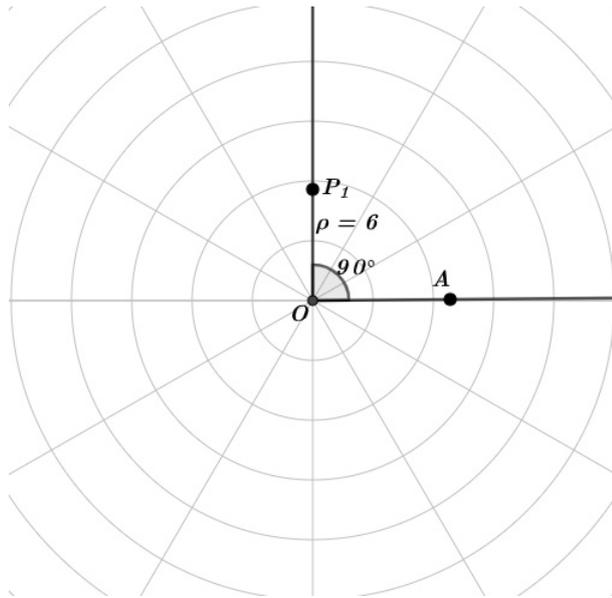


Figura 4.2: Coordenadas polares de  $P_1$

Como vemos na figura referente a este exemplo, a distância do ponto  $P_1$  até a origem é  $\rho = 6$  e a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta  $OP_1$  é  $\theta = 90^\circ$ , logo as coordenadas polares do ponto são dadas por:

$$P_1 = (\rho, \theta) = (6, 90^\circ) \text{ com } \theta \text{ expresso em graus;}$$

ou, se preferirmos,

$$P_1 = (\rho, \theta) = \left(6, \frac{\pi}{2}\right) \text{ com } \theta \text{ expresso em radianos.}$$

Vamos, agora, ver a relação entre *coordenadas polares* e *coordenadas cartesianas* de um mesmo ponto  $P$ . Para isto devemos considerar a mesma origem  $O$  (*pólo*) de ambos os sistemas de eixos e a reta  $OX$  coincidente com o eixo polar  $OA$ , neste caso teremos as seguintes relações, de acordo com a figura:

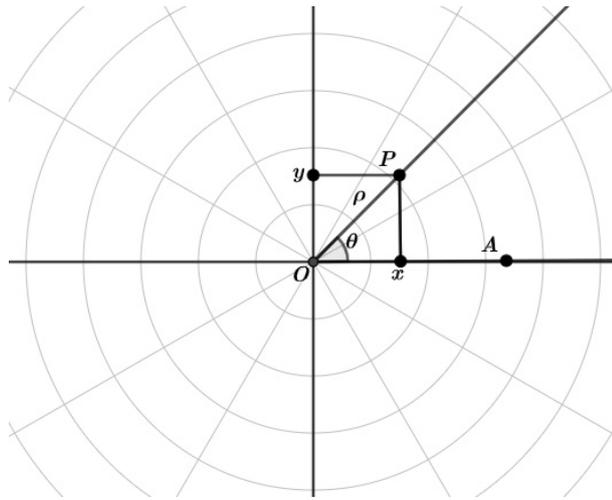


Figura 4.3: Relação entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas

$$\frac{x}{\rho} = \cos \theta \Rightarrow x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{y}{\rho} = \sin \theta \Rightarrow y = \rho \sin \theta$$

Onde  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , e também valem as seguintes relações

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Lembrando que para todos os pontos acima estamos considerando o triângulo retângulo  $OPx$  formado sobre o plano na figura anterior. Vejamos mais um exemplo, agora usando a ideia de relação entre esses tipos de coordenadas abordados, entendendo como podemos passar de coordenadas polares para coordenadas cartesianas e vice-versa além de aprender como escrever a equação polar da reta que passa por pontos do plano.

**Exemplo 9.** Considere os pontos  $P_1 = (5, \frac{\pi}{2})$  e  $P_2(2, \pi)$  dados em coordenadas polares. Vamos determinar as coordenadas cartesianas dos pontos e a equação polar da reta que passa por  $P_1$  e  $P_2$ .

Vamos inicialmente encontrar as coordenadas cartesianas do ponto  $P_1(x_1, y_1)$ :

De  $x_1 = \rho \cos \theta$  temos que  $x_1 = 5 \cos \frac{\pi}{2}$  e conseqüentemente  $x_1 = 0$

De  $y_1 = \rho \sin \theta$  segue que  $y_1 = 5 \sin \frac{\pi}{2}$  e então  $y_1 = 5$

Com isso temos que as coordenadas cartesianas do ponto são  $P_1(0, 5)$ . Analogamente encontramos as coordenadas cartesianas do ponto  $P_2(x_2, y_2)$ :

De  $x_2 = \rho \cos \theta$  tem-se  $x_2 = 2 \cos \pi$ , e daí  $x_2 = -2$ .

E de  $y_2 = \rho \sin \theta \Rightarrow y_2 = 2 \sin \pi$ , resultando em  $y_2 = 0$ .

Isto nos mostra que as coordenadas cartesianas do ponto são  $P_2(-2, 0)$ .

Para encontrarmos a equação polar da reta que passa por  $P_1$  e  $P_2$  vamos primeiro encontrar a reta  $r$  no plano que passa pelos pontos em coordenadas cartesianas, isto é:

$$r : y - 5 = \frac{5}{2}(x - 0) \quad \text{ou resumidamente} \quad r : 2y - 5x = 10$$

Agora, uma vez que conhecemos esta equação, vamos passar os valores de  $x$  e  $y$  para  $\rho \cos \theta$  e  $\rho \sin \theta$ , respectivamente, para obtermos:

$$r : 2y - 5x = 10 \quad \Rightarrow \quad r : 2\rho \sin \theta - 5\rho \cos \theta = 10$$

E daí

$$r : \rho(\theta) = \frac{10}{2 \sin \theta - 5 \cos \theta}$$

que é a equação que procurávamos em que temos  $\rho$  dado em função do ângulo  $\theta$ .

**Exemplo 10.** Vamos determinar a equação no sistema ortogonal de coordenadas car-

tesianas  $OXY$ , do lugar geométrico definido pela equação polar  $\rho = 3$ .

Para resolvermos este exemplo basta lembrarmos que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

que representa uma circunferência de centro na origem dos eixos e raio igual a três unidades.

**Exemplo 11.** Para o círculo de equação cartesiana  $(x - 5)^2 + y^2 = 25$ , inicialmente vamos desenvolver a potência  $(x - 5)^2$ :

$$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25$$

Fornecendo a equação cartesiana  $x^2 + y^2 - 10x = 0$ . Como sabemos que  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , substituindo, segue que

$$\rho^2 - 10x = 0$$

do mesmo modo, como sabemos que  $x = \rho \cos \theta$ , substituindo novamente tem-se

$$\rho^2 - 10\rho \cos \theta = 0$$

e desde que  $\rho \neq 0$ , obtemos a equação polar

$$\rho(\theta) = 10 \cos \theta$$

Com este exemplo, encerramos nossa abordagem inicial sobre coordenadas polares, passando por sua relação com as coordenadas cartesianas e algumas aplicações relacionadas a este tópico. Introduziremos, a seguir, algumas parametrizações de curvas no

plano iniciando com a ideia de parametrização de reta.

### 4.3 Parametrização de uma reta

A geometria analítica estuda as formas geométricas do ponto de vista da álgebra, usando de equações para estudar o comportamento e os elementos destas formas geométricas. A reta é uma dessas formas e a primeira que estudaremos nessa parte do nosso trabalho com foco na sua equação paramétrica, mas com a noção de que existem outras representações para esta figura.

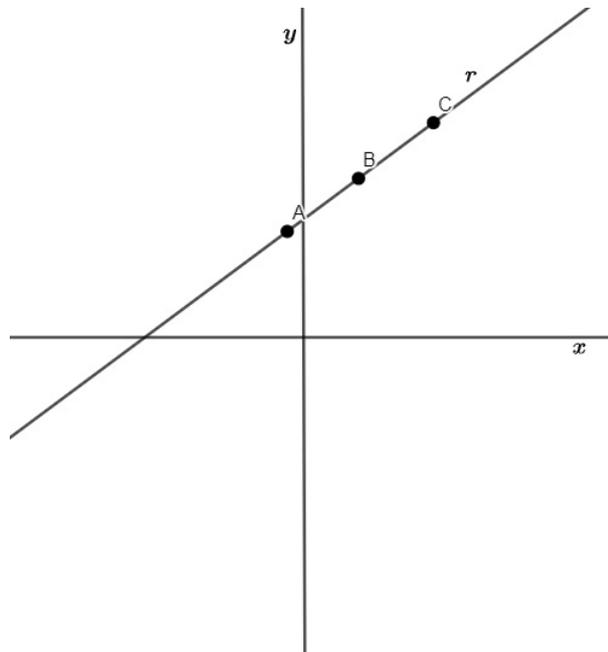


Figura 4.4: Parametrização da reta

Iremos analisar e escrever *equações paramétricas (ou parametrizações)* para a reta. Estes tipos de equações não são muito utilizadas, e muitas vezes, se quer são apresentadas aos alunos de nível médio, o que pode ser visto como uma grande falha na área nesse nível, uma vez que até na física são bastante utilizadas quando se estuda no ensino médio as equações do movimento de corpos enquanto que na matemática

não há, muitas vezes, tanta ênfase nesse assunto.

### 4.3.1 Equações paramétricas da reta

Escrever equações paramétricas para a reta é expressar essas equações através de suas coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  de um ponto qualquer dessa reta em função de apenas uma variável, a variável  $t$ , que denominaremos *parâmetro*.

A equação paramétrica da reta é uma forma, dentre as várias, de se representar a reta de forma algébrica, vamos entender como aplicar esta representação através da definição, inicialmente, depois também através de exemplos, percebendo que em determinadas situações é muito mais interessante usarmos esse tipo de equação que, de certa forma, facilita o desenvolvimento de outros processos da resolução do problema.

**Definição 6.** *Diremos que uma reta  $r$ , no plano, será chamada de parametrizada quando estiver na forma:*

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

*em que as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada ponto dessa reta estão escritas em função do parâmetro  $t$  através das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , que são funções do primeiro grau .*

Veja, a seguir, alguns exemplos para melhor ilustrarmos esta definição e sua aplicação em equações da reta no plano.

**Exemplo 12.** *Vamos escrever as equações paramétricas da reta  $3x + 4y - 15 = 0$ .*

*Inicialmente, isolamos a variável  $x$  na equação geral  $3x + 4y - 15 = 0$ ,*

$$x = -\frac{4}{3}y + 5$$

Fazendo ajustes na expressão, teremos

$$x = -\frac{4}{3}y + 4 + 1 \Rightarrow x = 4\left(-\frac{y}{3} + 1\right) + 1$$

e por fim, faremos  $t = -\frac{y}{3} + 1$ , que será nosso parâmetro, logo,

$$x = 4t + 1 \quad \text{ou} \quad x(t) = 4t + 1$$

que é nossa primeira equação da parametrização desta reta. Para encontrar a segunda basta fazermos o que segue: Seja  $t = -\frac{y}{3} + 1$ , daí tem-se  $\frac{y}{3} = 1 - t$ , que fornece

$$y(t) = 3 - 3t$$

concluindo então a parametrização através das equações  $\begin{cases} x(t) = 4t + 1 \\ y(t) = -3t + 3 \end{cases}$ .

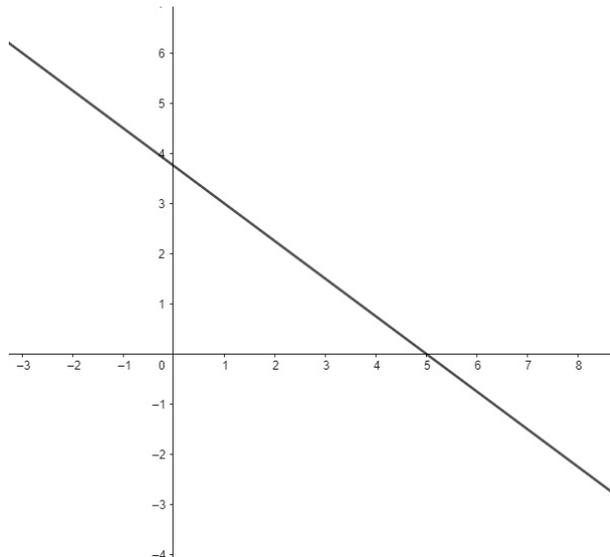


Figura 4.5: Reta  $3x + 4y - 15 = 0$

Veja no gráfico acima a representação da reta que decorre dessas equações.

**Exemplo 13.** Obter a equação geral da reta parametrizada a por  $r$ : 
$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = t + 2 \end{cases} .$$

Inicialmente, devemos isolar o parâmetro  $t$  em qualquer uma das equações  $x(t)$  e  $y(t)$  dadas. Vamos usar a segunda: De  $y(t) = t + 2$ , segue que  $t = y - 2$ . Agora vamos substituir na outra equação, o valor obtido

$$x(t) = 2t - 1 \Rightarrow x = 2(y - 2) - 1 \Rightarrow x = 2y - 5$$

e assim,

$$x - 2y + 5 = 0$$

logo, concluímos com isso, que a equação geral da reta que procurávamos é dada por :

$$r : x - 2y + 5 = 0.$$

Vejamos na ilustração a seguir sua representação no plano pelo gráfico abaixo.

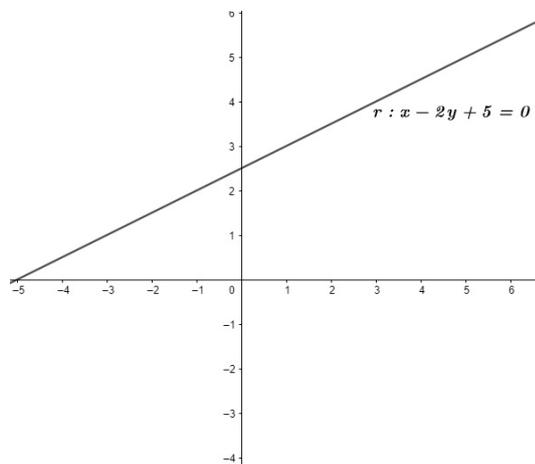


Figura 4.6: Reta  $x - 2y + 5 = 0$

**Exemplo 14.** Transformar a equação geral da reta  $s : y - 3x - 1 = 0$  numa equação parametrizada.

Vamos, inicialmente, escolher umas das variáveis  $x$  ou  $y$  para escrevê-la em função

do parâmetro  $t$ . Observando a equação dada no problema, temos, por comodidade, que a melhor opção é escolher a variável  $y$ , portanto, podemos fazer:

$$y(t) = 3t + 4$$

lembrando que esta função de  $y$  sobre  $t$  pode ser qualquer função desde que seja do primeiro grau. Agora, basta substituir o valor encontrado em  $y$  na equação  $y = 3x + 1$  para encontrarmos a função de  $x$  sobre o parâmetro  $t$ , isto é,

$$3t + 4 = 3x + 1 \Rightarrow x(t) = t + 1,$$

logo, as equações paramétricas de  $s : y - 3x - 1 = 0$  são  $s : \begin{cases} x(t) = t + 1 \\ y(t) = 3t + 4 \end{cases}$ .

E para finalizarmos esta parte, vejamos abaixo a representação gráfica dessa reta:

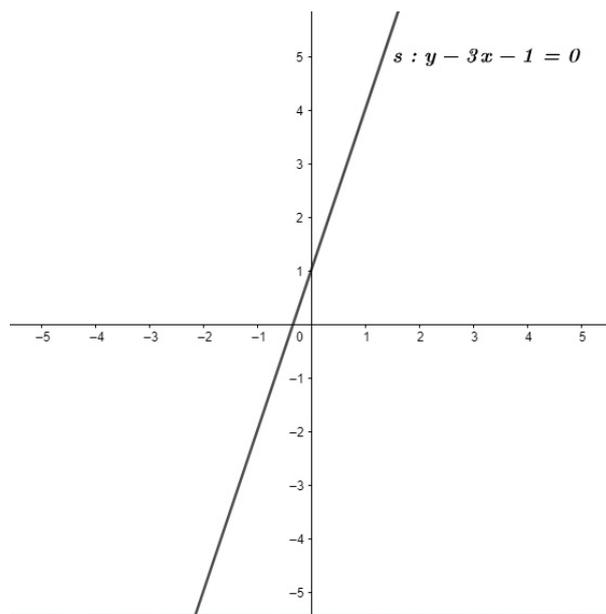


Figura 4.7: Reta  $y - 3x - 1 = 0$

Vejamos agora a respeito do processo de parametrização de outra curva plana muito importante para a geometria analítica: O círculo.

## 4.4 Parametrização de um círculo

Sejam  $C : x^2 + y^2 = r^2$  um círculo de centro na origem e raio  $r > 0$  e  $t$  a medida, em radianos, de um ângulo  $\widehat{P_0OP}$  onde  $O$  é a origem do sistema.

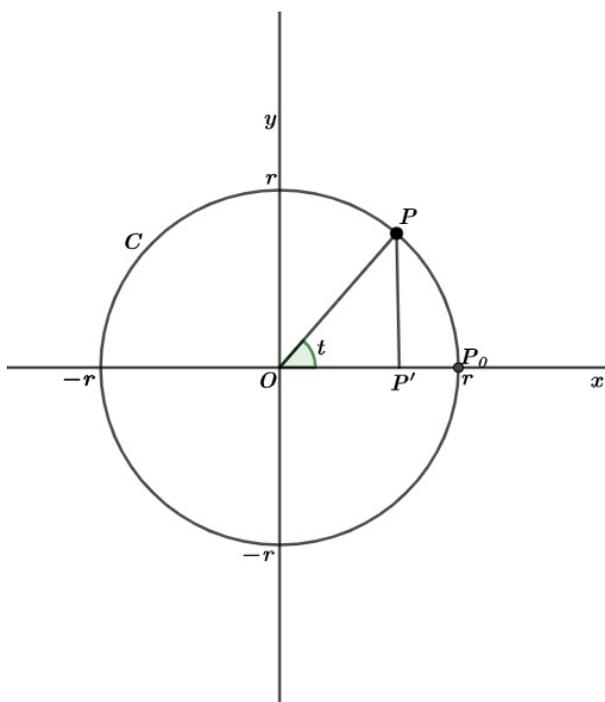


Figura 4.8: Parametrização de um círculo

Como o triângulo  $OPP'$  é retângulo em  $P'$  segue que  $x = x(t) = r \cos t$  e  $y = y(t) = r \sin t$ , fazendo  $t$  percorrer os valores  $[0, 2\pi]$  obtemos os pontos do círculo.

**Definição 7.** *Seja  $\zeta$  uma curva plana. Dizemos que uma aplicação  $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é uma parametrização de  $\zeta$ , se sua imagem  $\alpha(D)$  coincide com  $\zeta$ , ou seja, se  $\zeta = \{(x(t), y(t)) | t \in D\}$  onde  $D$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . A imagem  $\alpha(D) \subset \mathbb{R}^2$  é também chamada traço de  $\alpha$ .*

Considerando a definição dada e  $t$  percorrendo todos os valores reais, isto é equivalente a percorrermos o círculo infinitas vezes, ou seja, dar infinitas voltas, logo, uma

possibilidade de parametrização para o círculo  $C$  é:

$$C: \begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Perceba que todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , nos dá que

$$x(t) = r \cos (at + b) \quad \text{e} \quad y(t) = r \sin (at + b)$$

também são parametrizações para o círculo  $C$ , uma vez que:

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 (at + b) + r^2 \sin^2 (at + b)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 [\cos^2 (at + b) + \sin^2 (at + b)]$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

pois como sabemos  $\cos^2 (at + b) + \sin^2 (at + b) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e conforme  $t$  percorre todos os valores em  $\left[ \frac{-b}{a}, \frac{2\pi - b}{a} \right]$  o ponto  $P(r \cos (at + b), r \sin (at + b))$ , percorre todos os pontos do círculo.

#### 4.4.1 Parametrização do círculo em sistema transladado

Considere agora  $C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  um círculo cujo centro é dado pelo ponto  $(x_0, y_0)$  e o raio seja  $r > 0$ .

Obtemos um sistema de eixos  $\bar{X} \bar{O} \bar{Y}$  através de uma translação do sistema original de eixos  $XOY$ , onde  $\bar{O} = (x_0, y_0)$  é o centro do círculo  $C$  considerado. Temos então a equação cartesiana  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$  pois neste sistema o círculo  $C$  tem raio  $r > 0$  e centro na origem  $\bar{O}$ .

Agora, sendo  $\bar{x} = r \cos t$  e  $\bar{y} = r \sin t$  com  $t \in \mathbb{R}$  vejamos as equações paramétricas

de  $C$  em  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  representadas a seguir para todo  $t$  real através das sentenças:

$$C : \begin{cases} x(t) = x_0 + \bar{x} = x_0 + r \cos t \\ y(t) = y_0 + \bar{y} = y_0 + r \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Graficamente, o esboço que segue demonstra uma perspectiva de como funciona o sistema de eixos transladados que acabamos de comentar.

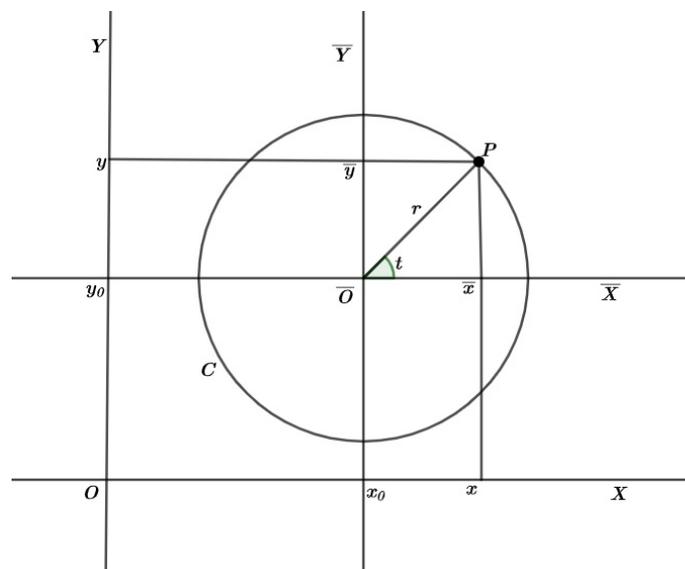


Figura 4.9: Círculo em sistema de eixos transladado

**Exemplo 15.** *Parametrizar o círculo cuja equação é dada por  $C : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ .*

*Vamos completar quadrados na equação que representa o círculo  $C$ :*

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 12 + 4 + 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$$

*logo, temos que a equação do círculo  $C$  pode ser escrita da seguinte forma:*

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2,$$

*segue deste modo que o círculo  $C$  tem centro  $(2, 3)$  e raio  $r = 5$ , pelo que vimos, uma*

parametrização para este círculo é então:

$$C : \begin{cases} x(t) = 2 + 5 \cos t \\ y(t) = 3 + 5 \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

e também

$$C : \begin{cases} x(t) = 2 + 5 \sin t \\ y(t) = 3 + 5 \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

onde esta segunda percorre o círculo  $C$  no sentido horário, enquanto a primeira parametrização dada percorrerá no sentido anti-horário.

#### 4.5 Parametrização de uma elipse

Seja  $\varepsilon : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  uma elipse de centro  $(x_0, y_0)$ . Considere o círculo  $C : \alpha^2 + \beta^2 = 1$  de centro na origem e raio igual a 1. Como sabemos que

$$(x, y) \in \varepsilon \iff (\alpha, \beta) \in C \text{ com } \alpha = \frac{x - x_0}{a} \text{ e } \beta = \frac{y - y_0}{b}$$

e além disso, vimos que, as seguintes equações são parametrizações de  $C$

$$C : \begin{cases} \alpha(t) = \cos t \\ \beta(t) = \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

bem como,

$$C : \begin{cases} \alpha(t) = \sin t \\ \beta(t) = \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Com isto, obtemos as possíveis parametrizações de  $\varepsilon$  dadas por:

$$\varepsilon: \begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \cos t \\ \frac{y - y_0}{b} = \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon: \begin{cases} x(t) = x_0 + a \cos t \\ y(t) = y_0 + b \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

ou também as equações,

$$\varepsilon: \begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \sin t \\ \frac{y - y_0}{b} = \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon: \begin{cases} x(t) = x_0 + a \sin t \\ y(t) = y_0 + b \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

#### 4.5.1 Significado geométrico do parâmetro $t$

Considere os círculos  $C_a : x^2 + y^2 = a^2$ , de centro na origem e raio  $a$ , e  $C_b : x^2 + y^2 = b^2$  de centro na origem e raio  $b$ . Agora, para cada  $t \in \mathbb{R}$  considere os pontos  $P_a = (a \cos t, a \sin t)$  pertencente a  $C_a$ , e  $P_b = (b \cos t, b \sin t)$  pertencente a  $C_b$ , tais que os vetores  $\overrightarrow{OP_a}$  e  $\overrightarrow{OP_b}$  fazem um ângulo  $t$ , no sentido positivo, com o eixo  $X$ , como na figura.

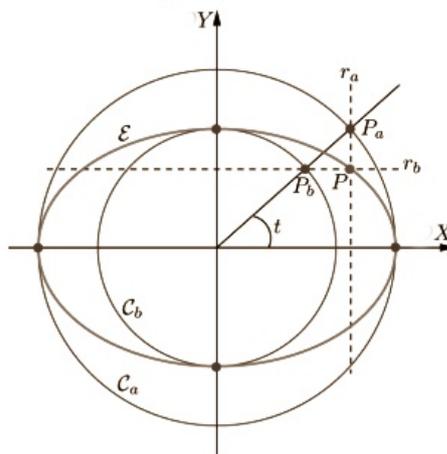


Figura 4.10: Parametrização da Elipse (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

A interseção da reta  $r_a : x = a \cos t$ , paralela ao eixo  $Y$  que passa pelo ponto  $P_a$ , com a reta  $r_b : y = b \sin t$ , paralela ao eixo  $X$  e que passa pelo ponto  $P_b$  nos dá o ponto  $P = (a \cos t, b \sin t)$  pertencente à elipse  $\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**Exemplo 16.** *Parametrize a elipse  $\varepsilon : x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -1$*

*Vamos completar quadrados na equação dada:*

$$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 16y + 16 = -1 + 1 + 16$$

$$(x - 1)^2 + (2y - 4)^2 = 16$$

$$(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 16$$

$$\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4^2} + \frac{(y - 2)^2}{2^2} = 1$$

Vemos então que a elipse  $\varepsilon$  tem centro no ponto  $(1, 2)$  e reta focal  $y = 2$ , bem como eixos  $a = 4$  e  $b = 2$ . Com isso, pelo que foi visto, as parametrizações são:

$$\varepsilon : \begin{cases} x(t) = 1 + 4 \cos t \\ y(t) = 2 + 2 \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

e também as equações

$$\varepsilon : \begin{cases} x(t) = 1 + 4 \sin t \\ y(t) = 2 + 2 \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

## 4.6 Parametrização de uma hipérbole

Nesta seção falaremos da parametrização de uma hipérbole usando as funções **seno hiperbólico** (*sinh*) e **cosseno hiperbólico** (*cosh*) que são funções análogas às fun-

ções trigonométricas, mas que tem a propriedade de gerar a hipérbole. Vamos defini-las da seguinte maneira:  $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  e  $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

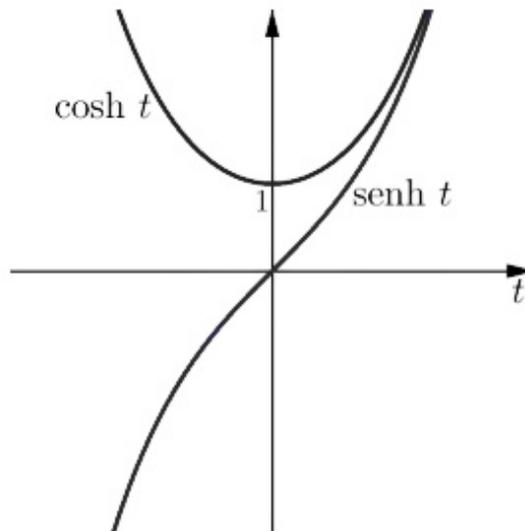


Figura 4.11: Gráficos de  $\cosh$  e  $\sinh$  (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

Considere a hipérbole  $H : x^2 - y^2 = 1$  equilátera ( $a = b = 1$ ) de centro na origem e reta focal sobre o eixo  $X$ .

Sejam  $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  e  $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , respectivamente, as funções **seno hiperbólico** e **co seno hiperbólico** como definidas anteriormente. Os pontos  $(\cosh t, \sinh t)$  e  $(-\cosh t, \sinh t)$  pertencem a hipérbole  $H$ , de fato,

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Além disso, variando  $t \in \mathbb{R}$ , vemos que  $x = \pm \cosh t$  percorre todos os valores em  $[-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$ , e  $y = \sinh t$  percorre todos os valores reais. Logo,

$$\begin{cases} x(t) = \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização para o ramo  $H_+$  de  $H$  que intercecta o semi-eixo positivo  $OX$  enquanto que,

$$\begin{cases} x(t) = -\cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização para o ramo  $H_-$  de  $H$  que intercecta o semi-eixo negativo  $OX$ .

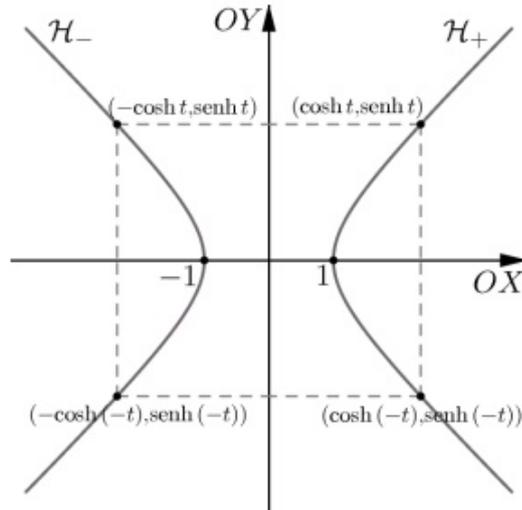


Figura 4.12: Gráfico de  $H = H_+ \cup H_-$  (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

Agora veremos o caso em que a hipérbole  $H: \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  tem centro  $(x_0, y_0)$  fora da origem dos eixos e reta focal paralela ao eixo  $x$ . Inicialmente, considere  $H_0 : \alpha^2 - \beta^2 = 1$  uma hipérbole nas condições trabalhadas um pouco antes em nosso trabalho. Note que um ponto  $P$  pertence à hipérbole  $H$  se, e somente se, o ponto  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{b}\right)$  pertence à hipérbole  $H_0$ , isto é,

$$P \in H \iff \left(\frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{b}\right) \in H_0$$

e como foi visto, um pouco antes neste trabalho, as parametrizações para  $H_0$  são:

$$H_0 : \begin{cases} x(t) = \pm \cosh t \\ y(t) = \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

com isto, obtemos que as parametrizações para  $H$  são:

$$H : \begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \pm \cosh t \\ \frac{y - y_0}{b} = \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

ou seja, temos as seguintes equações paramétricas para a hipérbole:

$$H : \begin{cases} x(t) = x_0 \pm a \cosh t \\ y(t) = y_0 + b \sinh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

De forma análoga, se considerarmos a elipse  $H: \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$  de centro  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $Y$ , podemos verificar que as equações paramétricas desta hipérbole são as seguintes:

$$H : \begin{cases} x(t) = x_0 + b \sinh t \\ y(t) = y_0 \pm a \cosh t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

**Observação 2.** *É possível obter a parametrização dessa mesma curva plana através das funções trigonométricas, entretanto, não falaremos desse tipo de equações paramétricas para a hipérbole neste trabalho, mas deixamos a sugestão de aprofundamento para o leitor.*

**Exemplo 17.** *Vamos parametrizar a hipérbole  $H : x^2 - 4y^2 + 2x - 8y = 7$ .*

*Inicialmente vamos completar quadrado e identificar os elementos dessa hipérbole:*

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 + 2x - 8y &= 7 \\ \iff x^2 + 2x + 1 - 4(y^2 + 2y + 1) &= 7 + 1 - 4 \\ \iff (x + 1)^2 - 4(y + 1)^2 &= 4 \\ \iff \frac{(x + 1)^2}{4} - (y + 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

*Com isso, temos que o centro dessa hipérbole é no ponto  $(-1, -1)$ , a reta focal é  $y = -1$  paralela ao eixo  $X$ ,  $a = 2$  e  $b = 1$ . Logo, pelo que verificamos, uma parametrização para  $H$  é :*

$$H : \begin{cases} x(t) = \pm a \cosh t - 1 \\ y(t) = b \sinh t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

## 4.7 Parametrização de uma parábola

Nesta seção do trabalho falaremos um pouco sobre a parametrização de uma parábola, usando para isso o caso mais conhecido dentre os citados na seção 3.5 onde discutimos alguns outros tipos de equações desta curva plana. Consideraremos então a parábola  $P$  de equação cartesiana dada por  $P : (x - a)^2 = k(y - b)$  em que o ponto  $(a, b)$  é o vértice dessa parábola e sua reta focal é paralela ao eixo  $Y$ .

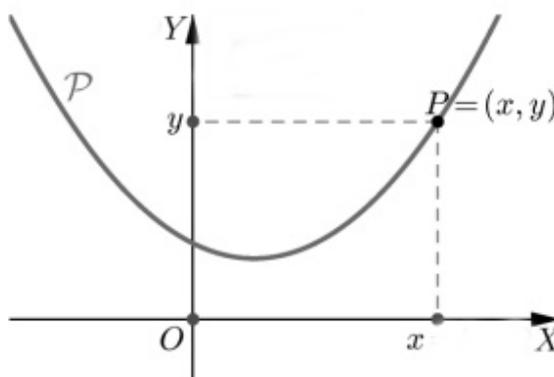


Figura 4.13: Gráfico de  $P : (x - a)^2 = k(y - b)$

Para encontrarmos uma parametrização para uma parábola desse tipo, vamos expressar a variável que se apresenta em primeiro grau (neste caso a variável  $y$ ) como dependente da variável que se apresenta em segundo grau (neste caso a variável  $x$ ), como segue abaixo:

$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= k(y - b) \\ \iff y - b &= \frac{1}{k}(x - a)^2 \\ \iff y &= \frac{1}{k}(x - a)^2 + b.\end{aligned}$$

Desta forma, escolhemos o parâmetro  $t$  como sendo  $x - a$ , assim:

$$x - a = t \iff x = t + a$$

e agora, escrevemos a variável  $y$  em função de  $t$  da seguinte forma:

$$y = \frac{1}{k}(x - a)^2 + b \iff y = \frac{1}{k}t^2 + b.$$

Com tudo isso, segue que a parábola  $P$  pode ser parametrizada do seguinte modo:

$$P : \begin{cases} x(t) = t + a \\ y(t) = \frac{1}{k}t^2 + b \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

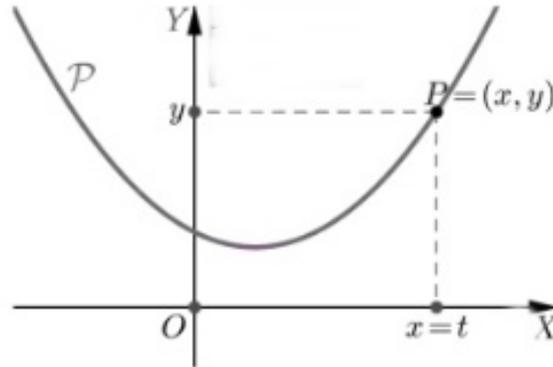


Figura 4.14: Parametrização da parábola  $P: (x - a)^2 = k(y - b)$

**Exemplo 18.** Vejamos a parametrização da seguinte parábola  $P : y^2 - 2x + 4y = 0$ .

Inicialmente vamos completar quadrados para encontrarmos o vértice e a reta focal de  $P$ :

$$y^2 - 2x + 4y = 0$$

$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4$$

$$(y + 2)^2 = 2(x + 2)$$

segue então que  $P$  é uma parábola de vértice  $V = (-2, -2)$  e reta focal  $y = -2$  paralela ao eixo  $X$ . Então, como  $x = \frac{(y + 2)^2}{2} - 2$ , temos a parametrização:

$$P : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2} - 2 \\ y(t) = t - 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

que traz as equações paramétricas para a parábola  $P$  considerada no problema.

Nesta seção obteremos a parametrização de outras curvas planas que não são tão usuais, mas que nem por isso são menos importantes para o nosso estudo. Veremos

aqui como encontrar equações paramétricas para tais curvas usando as relações trigonométricas básicas e verificando que condições um ponto deve satisfazer para pertencer a determinada curva.

## 4.8 A Epiciclóide

Para iniciar nossa abordagem com outras curvas planas, vamos falar um pouco sobre a Epiciclóide, que teve suas primeiras ideias desenvolvidas pelo matemático grego Hiparco (190a.c-120a.c) em sua teoria astronômica dos epiciclos. Esta curva consiste na trajetória de um ponto fixo a uma circunferência de raio  $r$  que rola exteriormente, sem deslizar, sobre uma outra circunferência exterior de um círculo fixo de raio  $R$ .

**Definição 8.** *Sejam dois círculos,  $\Gamma$  e  $C$ , de raios  $R$  e  $r$ , respectivamente, tais que  $\Gamma$  e  $C$  se tocam apenas no ponto  $P$  e os pontos de  $C$ , diferentes de  $P$ , estão no exterior de  $\Gamma$ . Denominamos **epiciclóide** o lugar geométrico descrito por  $P$  quando  $C$  rola sobre  $\Gamma$ , sem deslizar.*

Considere  $\Gamma$  com centro na origem,  $C$  com centro no ponto  $(R+r, 0)$  e que a posição inicial de  $P$  seja  $P_1(R, 0)$  como na figura 4.15 que está a seguir.

Vamos descrever as coordenadas de  $P$  em termos de um parâmetro. Para isso, note que as posições de  $Q$  e  $B$  variam de acordo com a medida do ângulo  $t$  denotado.

Quando  $Q$  está entre  $O$  e  $B$  temos:

$$x = |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M|$$

$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|$$

Como,

$$|OB| = (R+r) \cos \theta, \quad |OD| = (R+r) \sin \theta \text{ e,}$$

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2B} - \widehat{AO_2B} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - t = \frac{\pi}{2} - (\theta + t)$$

vale, no triângulo retângulo  $PNO_2$  que:

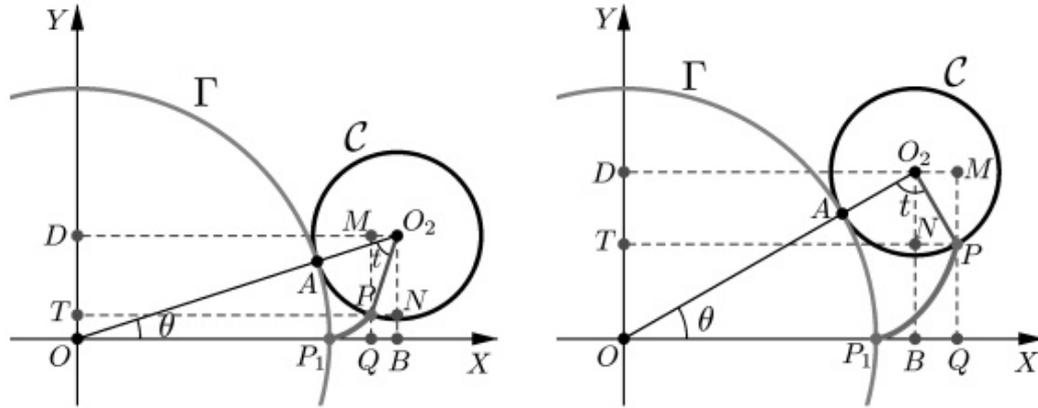


Figura 4.15: Ponto  $P$  descrevendo uma epicloide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

$$|O_2M| = r \sin(\widehat{NO_2P}) = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \cos(\theta + t)$$

$$|O_2N| = r \cos(\widehat{NO_2P}) = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + t)\right) = r \sin(\theta + t)$$

e portanto, substituindo temos que,

$$x = (R + r) \cos \theta - r \cos(\theta + t) \text{ e,}$$

$$y = (R + r) \sin \theta - r \sin(\theta + t)$$

Como  $x$  e  $y$  devem estar em função de um único parâmetro, note que o arco  $AP$  é igual ao arco  $P_1A$ , isto nos dá que,  $rt = R\theta$ , isto é,  $t = \frac{R\theta}{r}$ . Logo,

$$x = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right) \text{ e,}$$

$$y = (R + r) \sin \theta - r \sin\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) = (R + r) \sin \theta - r \sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)$$

Para o caso em que  $B$  está entre  $O$  e  $Q$  temos no triângulo  $NPO_2$  da figura anterior que.

$$\widehat{NO_2P} = t - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (\theta + t) - \frac{\pi}{2}$$

logo,

$$|O_2M| = r \sin\left((\theta + t) - \frac{\pi}{2}\right) = -r \cos(\theta + t)$$

$$|O_2N| = r \cos\left((\theta + t) - \frac{\pi}{2}\right) = r \sin(\theta + t)$$

de modo que,

$$x = |OQ| = |OB| + |QB| = |OB| + |O_2M|$$

$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|$$

ou seja, obteremos as mesmas equações paramétricas do caso descrito anteriormente.

Com isso, de fato, podemos concluir que as equações paramétricas da epicicloide são:

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos \theta - r \cos \left( \left( \frac{R + r}{r} \right) \theta \right) \\ y(t) = (R + r) \sin \theta - r \sin \left( \left( \frac{R + r}{r} \right) \theta \right) \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R}$$

Note que, se  $C$  percorre um arco de  $\Gamma$  de comprimento igual a  $2\pi r$ , o ponto  $P$  volta a tocar  $\Gamma$ . Logo, se  $\frac{R}{r} = n$  com  $n$  natural, então o ponto  $P$  toca  $\Gamma$   $n$  vezes e a  $n$ -ésima vez coincide com sua posição inicial. Para perceber isto, observe que o comprimento de  $\Gamma$  contém  $n$  vezes o comprimento de  $C$ , assim,  $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$ .

## 4.9 Cardióide

Esta curva é um caso particular da epicicloide trabalhada na seção anterior. Podemos defini-la da seguinte forma:

**Definição 9.** *O cardióide é uma epicicloide cujos raios de  $\Gamma$  e  $C$  são iguais, isto é, ocorre quando o raio das circunferências usadas na definição da epicicloide são iguais ( $r = R$ ).*

Isto faz com que  $\theta = t$ , e nos dá que as equações paramétricas provenientes da epicicloide:

$$\begin{cases} x(t) = 2r \cos \theta - r \cos 2\theta \\ y(t) = 2r \sin \theta - r \sin 2\theta \end{cases} ; \theta \in \mathbb{R}$$

A cardioide é uma curva matemática que tem sua forma semelhante ao símbolo usualmente denotado para representar um coração, por este motivo, recebe o nome derivado do grego "*kardia* = coração + *eidos* = forma". Vejamos na representação da figura a seguir.

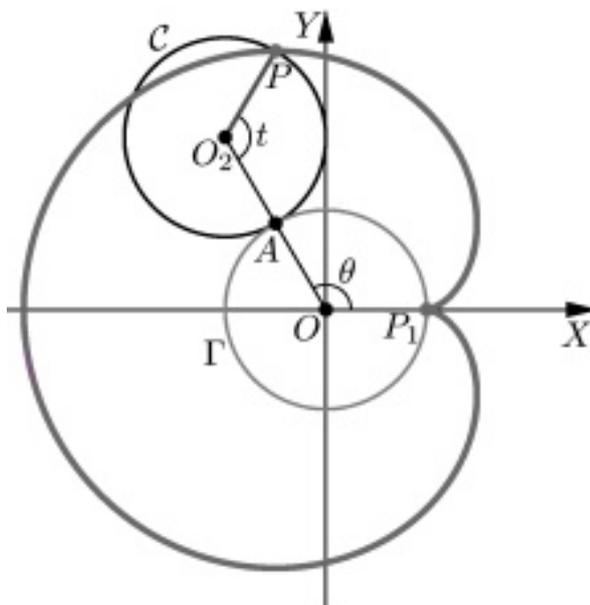


Figura 4.16: A cardioide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

#### 4.10 A curva de Agnesi

Vamos começar essa parte encontrando a parametrização para a curva chamada "**Curva de Agnesi**". Esta curva foi estudada por Agnesi - Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), matemática italiana - em 1748 no seu livro *Instituzioni analitiche*, daí o nome. Em alguns livros, é denominada de "bruxa de Agnesi", devido a uma má tradução de John Colson (matemático inglês).

**Definição 10.** *Considere um círculo  $C$  de raio  $r$  tangente a duas retas paralelas  $s_1$  e  $s_2$  no plano. Sejam  $O$  e  $A$  os pontos de tangência de  $C$  com  $s_1$  e  $s_2$  respectivamente.*

Vamos traçar de  $O$  uma semi-reta em direção a  $s_2$  e denotar  $R$  e  $Q$  os pontos de interseção dessa semi-reta com  $C$  e  $s_2$  respectivamente. Traçaremos o segmento  $QD$  perpendicular a  $s_1$ , e a reta  $s$  paralela a  $s_1$  passando por  $R$ . Seja o ponto  $P$  de interseção de  $s$  com  $QD$ . Os pontos  $P$  obtidos deste modo, traçando todas as semi-retas que partem de  $O$  e intersectam  $C$  descrevem a **Curva de Agnesi**.

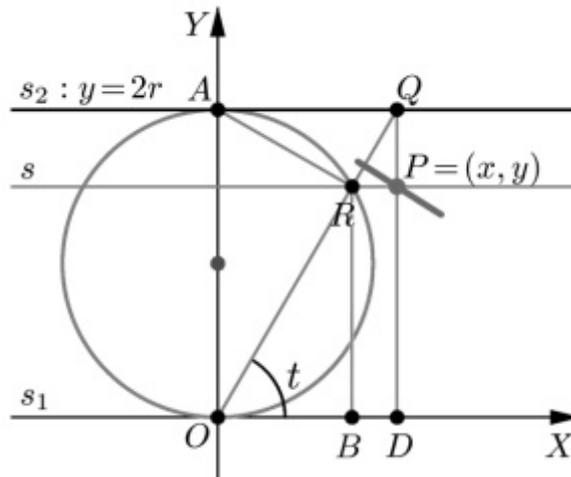


Figura 4.17: Construção da curva de Agnesi (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

Vejam agora, como obter as equações paramétricas da curva de Agnesi. Para isso, vamos admitir que  $s_1$  seja o eixo  $X$ ,  $s_2: y = 2r$ ,  $O$  seja a origem do sistema de eixos cartesianos e  $A = (0, 2r)$ . Devemos encontrar  $P(x, y)$  em função de um parâmetro.

Sendo  $t$  o ângulo  $\widehat{DOQ}$  obtemos:

$$x = |OD| = |OQ| \cos t \text{ e } y = |RB| = |OR| \sin t \text{ (I)}$$

onde  $B$  é a projeção de  $R$  sobre o eixo  $X$ . Deste modo, perceba que os triângulos  $ORA$  (inscrito em um semicírculo de  $C$ ) e  $ODQ$  são retângulos, onde  $\widehat{ORA}$  é ângulo reto no primeiro e  $\widehat{OAR}$  é  $t$ , logo  $|OR| = 2r \sin t$ . No triângulo  $ODQ$ , temos:

$$|QD| = 2r, \text{ ou seja, } |OQ| \sin t = 2r, \text{ o que nos dá, } |OQ| = \frac{2r}{\sin t}.$$

Substituindo em (I) temos:

$$x = |OD| = \frac{2r \cos t}{\sin t} = 2r \cot t \text{ e } y = |RB| = 2r \sin^2 t,$$

donde segue que as equações paramétricas para a curva de Agnesi são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = 2r \cot t \\ y(t) = 2r \sin^2 t \end{cases} ; t \in (0, \pi)$$

e seu traço é mostrado a seguir:

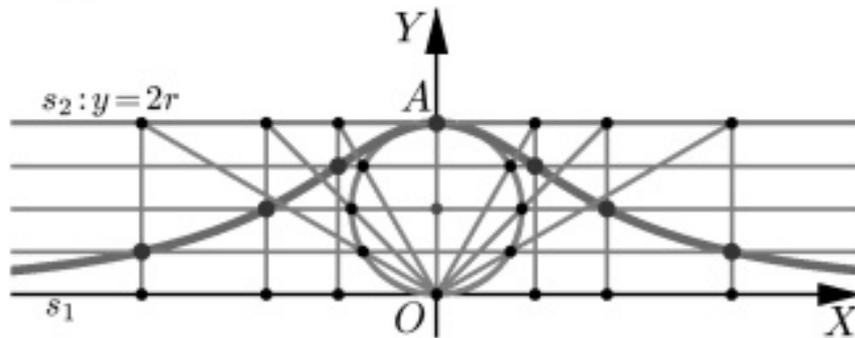


Figura 4.18: A curva de Agnesi (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

## 4.11 A Ciclóide

Veremos aqui, nesta seção, como obter as equações paramétricas da cicloide, curva percebida pela primeira vez por *Charles Bovelles* - Matemático e filósofo francês (1479-1566) - que referiu-se a ela ligando-a com o problema da quadratura do círculo em um trabalho de geometria publicado em Paris em 1501.

**Definição 11.** Chama-se *ciclóide* uma curva plana descrita por um ponto de uma circunferência que rola, sem deslizamento, sobre uma reta. Esse ponto é chamado de gerador, a circunferência de geradora, e a reta de diretriz da cicloide. Em outras palavras, sejam  $C$  um círculo de raio  $r$ ,  $s$  uma reta e  $P$  um ponto de  $C$ . Denominamos cicloide à curva descrita pelo ponto  $P$  quando  $C$  rola sobre a reta  $s$ , sem deslizar.

Para encontrar as equações paramétricas da cicloide consideraremos que a reta  $s$  é o eixo  $X$ , o círculo  $C$  inicia o movimento com centro no ponto  $(0, r)$ , o ponto  $P$  coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento. Traçamos dois círculos:  $C_1$ , representando  $C$  em sua posição inicial, e  $C_2$  representando  $C$  após ter rolado alguns instantes.

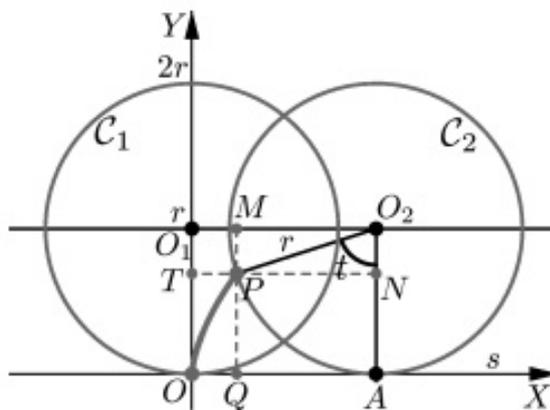


Figura 4.19: Construção da Cicloide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

Na figura, sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros de  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente,  $P(x, y)$  o ponto da cicloide em  $C_2$ ,  $A$  o ponto em que  $C_2$  toca o eixo  $X$ ,  $Q(x, 0)$  e  $T(0, y)$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $X$  e  $Y$ ,  $M$  e  $N$  as projeções ortogonais de  $P$  sobre  $O_2O_1$  e  $O_2A$  e, finalmente,  $t$  a medida do ângulo  $\widehat{AO_2P}$  tomada em radianos.

Perceba que  $OA$  tem o mesmo comprimento que o arco menor  $AP$  sobre  $C_2$  e consiste dos pontos que já fizeram contato com a reta  $s$ .

Como  $t$  é a medida de  $\widehat{AO_2P}$ , o comprimento do arco de  $C_2$  de  $A$  e  $P$  que já fez contato com  $s$  é  $rt$ , logo  $|OA| = rt$ .

O sinal de  $\sin t$  e  $\cos t$  nos intervalos  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ,  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$  e  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  nos dá que as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $P$  são determinadas por meio das seguintes relações:

$$x = |OQ| = |OA| - |QA| = |OA| - |O_2M| = rt - r \sin t ,$$

$$y = |OT| = |OO_1| - |TO_1| = r - |O_2N| = r - r \cos t.$$

Assim, temos as equações paramétricas da cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = rt - r \sin t \\ y(t) = r - r \cos t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Vejamos como obter a cicloide pelo movimento feito na sequência de figuras abaixo.

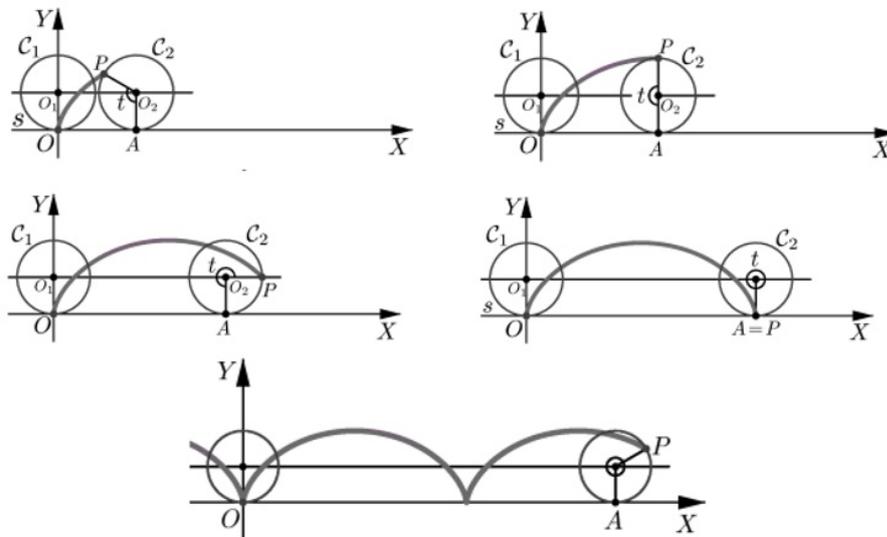


Figura 4.20: A Cicloide (figura retirada do livro "Geometria Analítica", SBM, Coleção PROFMAT)

## 5 Outras abordagens

### 5.1 Parametrização de curvas algébricas

Um outro contexto onde a parametrização de curvas aparece, é quando estudamos raízes de polinômios em duas variáveis. Isso ocorre quando tem-se uma equação polinomial  $f = 0$ , e nos questionamos se essa equação está bem determinada pela curva, que é o que consideramos como o lugar das soluções da equação polinomial. Mais precisamente, temos

**Definição 12.** *Uma curva algébrica plana é o lugar dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem a equação polinomial*

$$f(X, Y) = 0$$

onde  $f$  é um polinômio, em duas variáveis, não constante.

**Observação 3.** *Perceba que pela definição acima, as cônicas vistas anteriormente são naturalmente curvas algébricas planas.*

**Exemplo 19.** *Cissóide de Diócles - Algumas curvas algébricas são especialmente importantes por serem usadas em problemas relativamente importantes na Matemática, este é o caso da Cissóide de Diócles, que podemos definir como lugar dos pés das retas normais traçadas do vértice de uma parábola às suas retas tangentes. Mais precisamente temos: Dada uma parábola de equação*

$$X^2 = -4aY \quad \text{ou} \quad Y = -\frac{1}{4a}X^2$$

a tangente num ponto  $(x_0, y_0)$  é descrita por

$$2x_0(X - x_0) = -4a(Y - y_0) \quad (5)$$

ou alternativamente

$$Y = -\frac{x_0}{2a}X + \left(y_0 + \frac{1}{2a}x_0^2\right)$$

Como a reta normal traçada da origem é perpendicular à reta tangente, então sua equação é

$$Y = \frac{2a}{x_0}X \quad \text{ou} \quad -2aX + x_0Y = 0 \quad (6)$$

Substituindo em (5) e usando o fato de  $x_0^2 = -4ay_0$ , temos as coordenadas da interseção entre as retas normal e tangente

$$X = \frac{x_0^3}{8a^2 + 2x_0^2}, \quad \text{e} \quad Y = \frac{ax_0^2}{4a^2 + x_0^2}$$

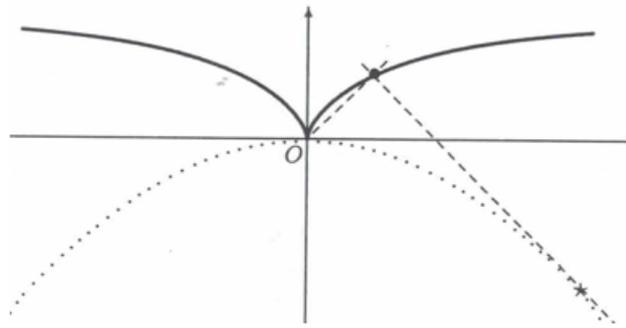


Figura 5.1: Cissóide de Diócles - Figura retirada do livro Introdução às curvas algébricas planas, Israel Vainsencher.

Se isolarmos  $x_0$  na expressão (6), temos  $x_0 = 2a\frac{X}{Y}$  e substituindo em (5) fazendo

as devidas alterações vamos chegar na expressão

$$aX^2 - Y(Y^2 + X^2) = 0$$

Usando coordenadas polares  $X = r \cos(\theta)$  e  $Y = r \sin(\theta)$  na expressão acima, chegamos em

$$r = a \cos(\theta) \cot(\theta) \tag{7}$$

que é a parametrização da Cissóide em sua forma polar.

As curvas planas podem ser estudadas tanto no contexto algébrico quanto no contexto da geometria diferencial, em ambos a parametrização é de fundamental importância para entendermos sua natureza. Nesse sentido, a Geometria Analítica é o ponto de partida para o estudo das curvas em Geometria diferencial e na Geometria algébrica, o que faz com que o estudo de parametrização de curvas se torne ainda mais útil.

## 5.2 Curvas regulares e Comprimento de arco

No contexto da Geometria Diferencial, o estudo de curvas regulares é a base para a teoria da geometria de superfícies. Nesse sentido, abordaremos alguns tópicos básicos sobre curvas planas parametrizadas regulares.

**Definição 13.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto. Uma aplicação diferenciável*

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

*é dita uma curva plana parametrizada diferenciável. O conjunto-imagem de  $\alpha$ , isto é,  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ , é dito, então, o **traço** de  $\alpha$ . Em coordenadas cartesianas,  $\alpha$  se expressa*

como

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I$$

em que  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são funções diferenciáveis de  $t$ , cujas derivadas indicaremos por  $x'$ ,  $y'$  respectivamente. O vetor

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)), \quad t \in I,$$

é chamado o vetor tangente (ou vetor velocidade) de  $\alpha$  em  $t$ . Diz-se, então, que  $\alpha$  é **regular**, quando  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

**Observação 4.** Para ser mais preciso, a velocidade escalar de uma curva  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é dada pela norma do vetor velocidade  $\alpha'(t_0)$ , ou seja

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

**Exemplo 20.** Uma reta no plano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ , que passa pelo ponto  $(a_1, a_2)$  pode ser representada da seguinte forma paramétrica

$$\alpha(t) = (a_1 + b_1t, a_2 + b_2t)$$

Se calcularmos a sua velocidade escalar teremos  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ , que é uma constante, o que está de acordo com a nossa noção intuitiva de uma reta.

Como vários outros exemplos foram apresentados nas seções anteriores, não vamos repeti-los agora abordando novamente suas parametrizações, iremos apenas introduzir alguns conceitos relacionados a curvas diferenciáveis, uma vez que o estudo de parametrizações para este tipo de curva é essencial para o desenvolvimento da teoria de curvas no espaço euclidiano.

**Definição 14.** *Seja uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada, definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , e seja  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável. Podemos então considerar uma nova curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por*

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t))$$

*A curva  $\beta$  é uma curva parametrizada diferenciável, e chamamos  $\beta$  de uma reparametrização de  $\alpha$ .*

Usando a regra da cadeia, temos que o vetor velocidade de  $\beta$  é dado por

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$$

E a velocidade escalar de  $\beta$  é

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| |h'(t)|$$

**Definição 15.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana parametrizada regular. Definimos o comprimento de arco da curva  $\alpha$ , a função  $L_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds, \quad t_0 \in I$$

Note que, usando o Teorema fundamental do Cálculo

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$$

E assim, dizemos que uma curva  $\alpha$  está **parametrizada pelo comprimento de arco** se  $L'_\alpha(t) = 1$

**Exemplo 21.** *O comprimento de arco do círculo*

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

é dado  $L_\alpha(t) = Rt$ , tomando  $t_0 = 0$ . Se considerarmos, em particular  $I = [0, 2\pi]$ , então teremos  $L_\alpha = 2\pi R$ , e se dermos  $k$  voltas em torno da origem,  $L_\alpha(t) = 2k\pi R$ .

**Exemplo 22.** *Consideremos a curva parametrizada por*

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

*O traço de  $\alpha$  descreve uma espiral, e o seu comprimento de arco é dado então por*

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(s)\| ds = \sqrt{2}(1 - e^{-s}).$$

*Como a curva não está parametrizada pelo comprimento de arco, é possível fazer uma reparametrização de tal modo a obtermos uma nova  $\beta$  que esteja parametrizada pelo comprimento de arco, basta definir*

$$\beta(s) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \left(\cos \ln \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin \ln \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

*onde  $\beta : [0, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*

Embora não iremos nos aprofundar em temáticas da Geometria diferencial, vale a pena acrescentarmos a noção de **referencial de Frenet**, para que faça sentido o uso das duas definições feitas acima.

Considerando uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , parametrizada pelo comprimento de arco, e

regular, temos o vetor tangente

$$T(s) = \alpha'(s)$$

de onde naturalmente,  $T(s) = (x'(s), y'(s))$ , e podemos então definir um novo vetor, que seja ortogonal a  $T$  ao longo da curva  $\alpha$ , e fazemos isso definindo

$$N(s) = (-y'(s), x'(s))$$

que definimos como vetor **Normal** à curva  $\alpha$ . Daí, temos

**Definição 16.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial  $\{T(s), N(s)\}$  é chamado de **referencial de Frenet** da curva  $\alpha$ .*

O referencial de Frenet é importante aqui, justamente porque através deles, podemos definir a noção de *curvatura* de uma curva, um dos principais elementos relacionado ao estudo de curvas planas regulares. Isso funciona da seguinte forma: Os vetores  $T$  e  $N$  são ortogonais e assim servem para gerar o espaço  $\mathbb{R}^2$ , fazendo algumas contas chegamos que  $T(s)$  é perpendicular a  $T'(s)$ , e assim  $T'(s)$  é paralelo a  $N(s)$ , como a relação é para cada  $s$ , existe então uma função  $k(s)$  tal que

$$T'(s) = k(s)N(s) \tag{8}$$

e a função  $k(s)$  é chamada de **curvatura** de  $\alpha$  em  $s \in I$ . Podemos também definir  $k(s)$  como

$$k(s) = -\langle N'(s), T(s) \rangle \tag{9}$$

e  $k$  é sempre diferenciável quando  $\alpha$  é diferenciável.

Na seção a seguir, faremos algum uso das noções de vetor tangente, vetor normal e curvatura apenas para exemplificar o contexto que segue após o estudo de parametri-

zação de curvas planas.

### 5.3 Teorema fundamental das curvas planas

O resultado que faremos a seguir é de grande importância, pois mostra que a curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano. De forma precisa, temos

**Teorema 1.** *(Teorema fundamental das curvas planas) Dada uma função diferenciável  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma curva plana regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , cuja curvatura é  $k(s)$ .*

*Demonstração.* Considere a função

$$h(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds$$

Onde  $s_0$  é fixado. Fixando um ponto  $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vamos definir a seguinte curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , dada por

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \cos(h(s) + \lambda) ds \\ y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \sin(h(s) + \lambda) ds \end{aligned}$$

Verifiquemos que esta curva, assim definida, está parametrizada pelo comprimento de arco.

$$\alpha'(s) = (x'(s), y'(s)) = (\cos(h(s) + \lambda), \sin(h(s) + \lambda))$$

Daí

$$\alpha''(s) = (x''(s), y''(s)) = (-\sin(h(s) + \lambda), \cos(h(s) + \lambda))$$

Temos então  $|\alpha'(s)| = 1$ , daí a curva está parametrizada pelo comprimento de arco. Como o referencial de Frenet  $T, N$  é dado por  $T = \alpha'$  e  $N = \alpha''$ , segue então que a curvatura de  $\alpha$  é

$$\langle T'(s), N(s) \rangle = h'(s)$$

Pois

$$\begin{aligned} \langle T'(s), N(s) \rangle &= \langle (-\sin(h(s) + \lambda)h'(s), \cos(h(s) + \lambda)h'(s)), (-\sin(h(s) + \lambda), \cos(h(s) + \lambda)) \rangle \\ &= h'(s) (\sin^2(h(s) + \lambda) + \cos^2(h(s) + \lambda)) \\ &= k(s) \end{aligned}$$

como queríamos. □

**Observação 5.** *A curva  $\alpha(s)$  é única quando fixamos*

$$\alpha(s_0) = p_0 \quad e \quad \alpha'(s_0) = v_0, \quad \text{com } v_0 \text{ um vetor unitário do plano.}$$

*Pois segue das equações de Frenet que*

$$(x'', y'') = k(-y', x')$$

*ou seja,  $x(s)$  e  $y(s)$  satisfazem as equações*

$$x'' = -ky'$$

$$y'' = -kx'$$

**Exemplo 23.** *Seja  $\alpha(s)$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco cujo traço*

é uma reta. Então, a curvatura é identicamente nula. De fato, seja

$$\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes e  $a^2 + b^2 = 1$ . Como  $T(s) = \alpha'(s)$  é constante, temos que  $T'(s) = 0$  e, portanto,  $k(s) = 0$  para todo  $s \in I$ . Como já era de se esperar, uma reta não se curva, daí naturalmente sua curvatura teria que ser nula em todo ponto.

**Exemplo 24.** Consideremos a curva

$$\alpha(s) = (a + b \cos \frac{s}{b}, c + b \sin \frac{s}{b}), \quad s \in \mathbb{R}, \quad b > 0,$$

cujo traço é uma circunferência de centro  $(a, c)$  e raio  $b$ . Neste caso,

$$T(s) = (-\sin \frac{s}{b}, \cos \frac{s}{b}), \quad \text{com } T'(s) = (-\frac{1}{b} \cos \frac{s}{b}, -\frac{1}{b} \sin \frac{s}{b})$$

$$N(s) = (-\cos \frac{s}{b}, -\sin \frac{s}{b}).$$

Logo,

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \frac{1}{b}.$$

logo, sua curvatura em cada ponto é o inverso do raio.

## 5.4 Parametrização de Curvas e o Plano Complexo

Nesta seção abordaremos um pouco sobre a parametrização de curvas no plano complexo, basicamente falaremos como são definidas tais curvas e veremos alguns exemplos com suas respectivas equações paramétricas no plano complexo.

Vamos definir uma curva parametrizada cujo traço está contido no plano complexo

$\mathbb{C}$ . Para isso, consideramos  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  e tomando valores em  $\mathbb{C}$ , dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

onde  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais. Denominamos *parametrização da curva* que pode ser interpretada como função vetorial bidimensional.

É importante observar que não existe uma parametrização única para um contorno  $C$  (ou  $\alpha$ ) de um tal curva. Por exemplo, para uma circunferência de raio  $R$  e centro na origem temos as seguintes parametrizações:

$$(I) \quad z(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(II) \quad z(t) = Re^{2\pi it}, 0 \leq t \leq 1$$

$$(III) \quad z(t) = Re^{\pi i \frac{t}{2}}, 0 \leq t \leq 4$$

Perceba que se tomarmos  $t = 2\pi$  na equação (I),  $t = 1$  na equação (II) e  $t = 4$  na equação (III) estaremos nos referindo ao mesmo ponto, o que mostra, efetivamente, que são três parametrizações distintas para a mesma curva.

**Definição 17.** *O traço da curva  $z$  é o conjunto imagem  $z(I) \in \mathbb{C}$ . A curva  $z$  é contínua, se as funções  $x$  e  $y$  são funções contínuas em  $I$ . Além disso, se  $x$  e  $y$  são funções  $n$ -vezes diferenciáveis em  $I$ , temos que  $z$  é  $n$ -vezes diferenciável em  $I$  e*

$$z^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) + iy^{(k)}(t)$$

. O vetor velocidade da curva  $z$  em  $t \in I$  é  $z'(t)$ .

**Observação 6.** *A velocidade escalar é dada pelo módulo  $|z'(t)|$  de  $z'(t)$ . Em analogia com a definição de curvas planas, dizemos que  $z$  é regular, se  $|z'(t)| \neq 0$ , para todo  $t \in I$ , e que  $z$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se  $|z'(t)| = 1$ , para todo*

$t \in I$ .

Daremos agora alguns exemplos de curvas parametrizadas em  $\mathbb{C}$ .

1. Reta

Seja  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação dada por  $z(t) = z_0 + tw$ , com  $z_0, w \in \mathbb{C}$  e  $w \neq 0$ . A curva  $z$  é regular e seu traço é uma reta.

2. Círculo

Considere  $z : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação definida por  $z(t) = re^{it}$  onde  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ . A curva  $z$  é regular e seu traço é um círculo de raio  $r$  e centro na origem.

3. Espiral de Arquimedes

Seja  $z : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação dada por  $z(t) = ate^{it}$  onde  $a \in \mathbb{R}$ . A curva  $z$  é regular e seu traço é denominado espiral de Arquimedes.

**Definição 18.** Dizemos que a curva é simples se  $a \leq t < s \leq b$  implicar em  $z(t) \neq z(s)$ , a menos que  $t = a$  e  $s = b$ . Dizemos que a curva é fechada se  $z(a) = z(b)$ .

**Observação 7.** Em outras palavras, uma curva simples não tem auto-interseção, isto é, o seu traço não passa por um mesmo ponto duas vezes.

Com esta ideia podemos dizer que uma curva como o círculo é uma curva fechada considerada *simples* enquanto que uma curva como o cardióide, pode ser considerada uma curva fechada *não simples*.

**Exemplo 25.**  $z(t) = \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi]$ , representa o círculo unitário centrado na origem. Esta curva é simples e fechada.

**Exemplo 26.** O cardióide  $z(\theta) = \left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right)e^{i\theta} = \left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right) \cos \theta + i\left(\frac{1}{2} + \cos \theta\right) \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , é exemplo de uma curva fechada que não é simples.

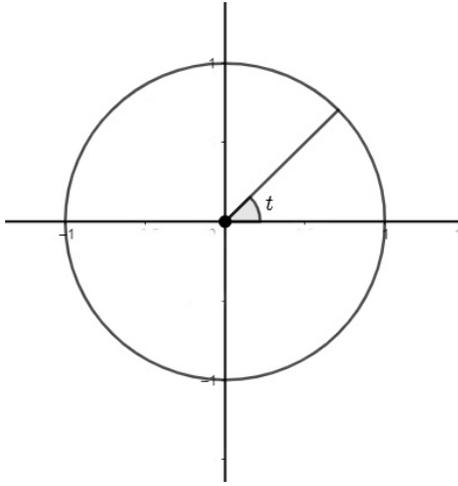


Figura 5.2: Círculo: Curva fechada simples

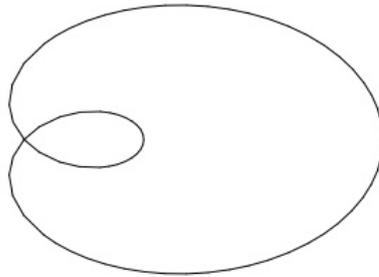


Figura 5.3: Cardioide: Curva fechada não simples

A ideia de curvas simples e não simples é particularmente importante na teoria de Variáveis Complexas, onde tem-se como um dos principais objetivos, o estudo da teoria integral através de regiões no plano complexo. Para tal, o uso das parametrizações de curvas é de vital importância, já que as curvas descrevem regiões dentro do plano complexo que são de grande exploração nessa teoria.

Para finalizar essa seção faremos aqui alguns resultados pertinentes, que fazem uso das definições feitas dentro desse contexto.

Suponha que  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Definimos os campos tangente e normal,  $T$  e  $N$ , respectivamente, por

$$T(t) = z'(t)$$

$$N(t) = iz'(t) = iT(t)$$

. Identificando  $T$  e  $N$  com vetores de  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $\{T, N\}$  é uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^2$ , uma vez que  $N$  é obtido por uma rotação de  $T$  por um ângulo  $\frac{\pi}{2}$ , no sentido anti-horário.

A reta tangente à curva  $z$  em  $t \in I$  é a reta que passa por  $z(t)$  e é paralela a  $z'(t)$ . Essa reta é o traço da curva  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$w(s) = z(t) + sz'(t).$$

A reta normal à curva  $z$  em  $t \in I$  é a reta que passa por  $z(t)$  e é paralela a  $iz'(t)$ . Essa reta é o traço da curva  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$w(s) = z(t) + isz'(t).$$

Como  $T(t)$  é um número complexo unitário, temos que sua derivada  $T'(t)$  é ortogonal a  $T(t)$ , isto é, existe uma função real  $k : I \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que

$$T'(t) = k(t)N(t) = k(t)iT(t).$$

A função  $k$  é chamada curvatura de  $z$ . A equação acima pode ser reescrita como

$$z''(t) = ik(t)z'(t),$$

que é a equação de Frenet de  $z$ . No caso em que  $z$  é uma curva regular, mas não está necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco, o campo tangente  $T$  é dado por  $T(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$  e, portanto, vale um resultado, que é equivalente a Equação de Frenet de  $z$ .

**Proposição 2.** *Seja  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva regular. Então*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z'}{|z'|} \right) = ik(t)z'(t)$$

*Demonstração.* É uma consequência direta da equação de Frenet para uma reparametrização de  $z$ , pelo comprimento de arco. De fato, pois

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{z'}{|z'|} \right) = \frac{z''|z'| - z'|z'|'}{|z'|^2} = z''(t) = ik(t)z'(t)$$

uma vez que  $|z'| = 1$ . □

Para conseguirmos uma expressão para  $k$ , em função de  $z(t)$ , vamos lembrar que, se  $r = x + iy$  e  $w = u + iv$ , então podemos escrever

$$r\bar{w} = xu + yv + i(yu - xv)$$

Como  $\mathbb{C}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , podemos definir o produto escalar real entre  $r$  e  $w$  por

$$\langle r, w \rangle = \operatorname{Re}(r\bar{w})$$

É claro que  $\langle r, iw \rangle = \operatorname{Im}(r\bar{w})$  e  $\langle r, iw \rangle = -\langle ir, w \rangle$ . Podemos agora calcular a função curvatura de  $z$ .

**Proposição 3.** *Seja  $z : I \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva regular. Então a curvatura de  $z$  é dada por*

$$k(t) = -\frac{\text{Im}(z'(t)\bar{z}''(t))}{|z'(t)|^3}$$

*Demonstração.* Considere  $T$  o campo tangente de  $z$ , que é dado por  $T(t) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$ .

Pela proposição anterior, temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right) = ik(t)z'(t) = k(t)|z'(t)|N(t).$$

Visto que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t),$$

temos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t)|z'(t)|N(t).$$

Daí

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t)T(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t)|z'(t)|N(t)$$

Tomando o produto interno em ambos os lados por  $N(t)$  e levando em consideração que  $T$  e  $N$  são ortonormais, ficamos com

$$\frac{1}{|z'(t)|^2} \langle z''(t), N(t) \rangle = k(t)|z'(t)|$$

usando o fato de  $N(t) = i \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$ , temos então que a curvatura  $k(t)$ , satisfaz

$$k(t) = \frac{1}{|z'(t)|^2} \langle z''(t), i \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \rangle = \frac{1}{|z'(t)|^3} \langle z''(t), iz'(t) \rangle$$

Notando que  $\langle z''(t), iz'(t) \rangle = \text{Im}(z''(t)\overline{z'(t)}) = -\text{Im}(\overline{z''(t)}z'(t))$ , finalmente chegamos

na expressão

$$k(t) = \frac{-\operatorname{Im}(\overline{z''(t)}z'(t))}{|z'(t)|^3}$$

□

Os resultados provados acima foram feitos apenas a título de "curiosidade", ou aplicação de alguns conceitos definidos anteriormente, com a mera intenção de deixar um sabor sobre o que pode vir a seguir. Como o trabalho não tem a finalidade de explorar a parte de diferenciabilidade, maiores detalhes podem ser encontrados em referências sobre geometria diferencial de curvas e superfícies.

## 5.5 A Hélice Circular: Uma noção de curvas no espaço

No cotidiano nos deparamos diariamente com Hélices, por exemplo: a parte metálica dos saca-rolhas, o acabamento de engrenagens da engenharia automotiva, roscas de um modo geral, molas, os parafusos, fios de nylon, agulhas e miçangas. Também é possível observá-las na Biologia no estudo do DNA entre outras coisas que usualmente observamos e que podemos perceber claramente a presença desse tipo de curva. . Veremos que esta importante curva pode ser parametrizada, por isto, embora nosso trabalho seja sobre parametrização de curvas planas, abriremos este espaço para mostrar um pouco da Hélice Circular que é uma curva do espaço.

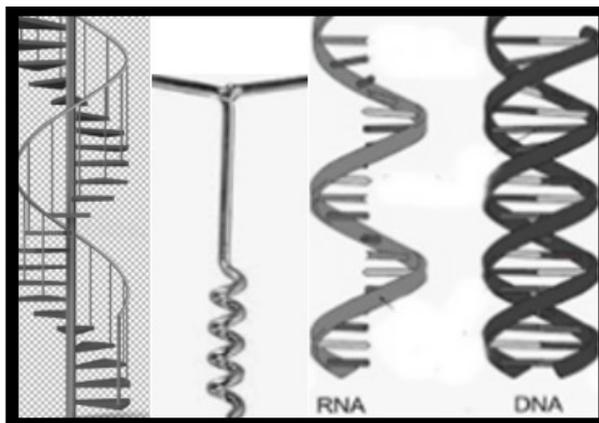


Figura 5.4: A Hélice Circular no cotidiano (figura retirada da internet)

A grosso modo, a Hélice é uma curva do espaço descrita pelo movimento de um ponto ao redor de um eixo, ao mesmo tempo em que se eleva. Vamos agora, defini-la de modo mais completo entendendo de fato seu comportamento no espaço e como representá-la através de suas equações.:

**Definição 19.** *Seja a curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, bt)$  com  $r$  e  $b$  constantes positivas. A medida que o parâmetro  $t$  cresce, também cresce o valor de  $z = bt$ , logo, o ponto  $(x, y, z)$  move-se para cima. Porém a medida que  $t$  cresce, o ponto*

$(x, y, z)$  também move-se em uma trajetória diretamente acima do círculo  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  no plano  $xy$ . A combinação desses movimentos para cima e circular produz uma curva com formato de saca-rolhas que se enrola num cilindro circular reto de raio  $r$  centrado no eixo  $z$ .

Logo, de acordo com a própria definição temos que a hélice circular tem as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \\ z(t) = bt \end{cases} ; r, b \text{ constantes positivas e } t \in \mathbb{R}.$$

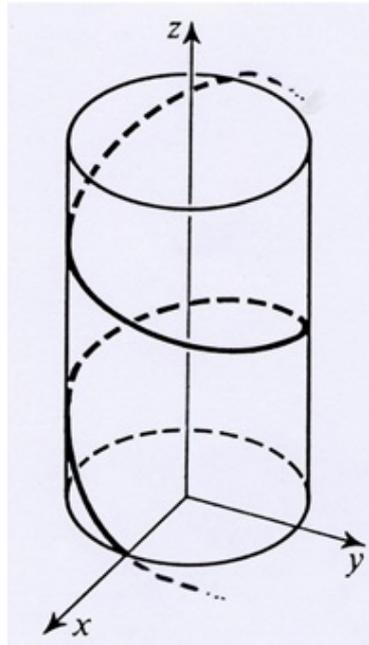


Figura 5.5: A Hélice Circular (figura retirada da internet)

As curvas no espaço podem ser pensadas como uma generalização natural (em uma dimensão a mais) das curvas planas estudadas ao longo do nosso trabalho. Para ser mais preciso, as curvas planas são apresentadas de forma inicial para se ter uma noção mais adiante de curvas em espaços com dimensões maiores (caminhos em  $\mathbb{R}^n$ ).

## 6 Conclusão

Vimos aqui, que as principais curvas planas (Reta, Circunferência, parábola, elipse e hipérbole) são, de maneira simples, expressas por suas equações paramétricas através de conhecimentos básicos que podem sim ser amplamente explorados durante o processo de ensino da educação básica.

A partir da definição, e de alguns exemplos, de cada uma das curvas citadas durante o processo, foi possível mostrar como relacionar as equações paramétricas de cada uma delas com suas equações gerais e com aplicações envolvendo suas principais características. Assim, ao mesmo tempo em que operamos com as ideias principais do trabalho desenvolvemos também a melhor forma com a qual pode-se apresentar este tipo de assunto para os alunos da base da nossa educação.

Trabalhamos com as parametrizações de curvas planas não muito utilizadas nos cursos básicos de geometria, nos quais muitas vezes se quer chegamos a citá-las. Fizemos uma breve introdução dos principais elementos de geometria diferencial de curvas planas, mas sem a pretensão de aprofundar o assunto. Isto a fim de despertar, não apenas a importância dessas curvas, mas também a curiosidade e vontade de conhecer melhor e aprofundar ainda mais o conhecimento acerca do conteúdo de modo geral.

Finalmente, devemos enfatizar que desenvolver as formas paramétricas das equações de curvas planas indispensáveis para a geometria de modo geral foi nosso principal foco durante todo esse processo, não deixando de lado que um dos objetivos secundários a este foi o de estabelecer a importância de se trabalhar com as ideias e os conceitos aqui abordados com os discentes da educação básica, uma vez que nessa área deixa-se bastante a desejar em livros didáticos direcionados a tal.

## Referências

- [1] JORGE, KATIA, LHAYLLA, *Geometria Analítica*, SBM, Coleção PROFMAT, 1ª Edição. Rio de Janeiro (2013).
- [2] CHARLES, *Geometria Analítica*, Ed. Globo Livros, 8ª Edição (1985).
- [3] ELON L., *Coordenadas no plano*, Editora SBM, Rio de Janeiro (1992)
- [4] ELON L., *Coordenadas no Espaço*, Editora SBM, Rio de Janeiro (1993)
- [5] ELON L., *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Editora SBM, 2ª Edição, Rio de Janeiro (2011)
- [6] MARCUS V., *Geometria Analítica*, Editora XAOCUBO, 1ª Edição, Rio de Janeiro (2014)
- [7] GUIDORIZZI, H. L., *Um curso de Cálculo*, vol. 1: Grupo Gen-LTC, 2000
- [8] STEWART, J., *Cálculo, Volume II*, 6ª edição, Cengage Learning, 2009.
- [9] VENCESLAU, A. W. N., *Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT: São Cristóvão- SE, 2015.
- [10] TRINDADE A. B., *Curvas planas parametrizadas*, Trabalho de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT: São Cristóvão- SE, 2018.
- [11] SANTOS, W., ALENCAR, H., *Geometria Diferencial das curvas planas*, 24º Colóquio Brasileiro de Matemática, publicações matemáticas - IMPA, Rio de Janeiro (2003).

- [12] TENENBLAT K., *Introdução à Geometria Diferencial*, Editora Blucher, São paulo, 2008.
- [13] VAINSENER, I., *Introdução às curvas algébricas planas - Coleção matemática universitária, SBM, Rio de janeiro (2005)*.