



WALDECK SILVA SOUZA

GEOMETRIA PLANA: FUNDAMENTAÇÃO AXIOMÁTICA

Santo André, 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

WALDECK SILVA SOUZA

GEOMETRIA PLANA: FUNDAMENTAÇÃO AXIOMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovic

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre Profissional em
Matemática em Rede Nacional

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO WALDECK SILVA SOUZA,
E ORIENTADO PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVIC.

SANTO ANDRÉ, 2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva Souza, Waldeck
Geometria plana : Fundamentação axiomática / Waldeck Silva
Souza. — 2023.

130 fls. : il.

Orientador: Sinuê Dayan Barbero Lodovic

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,
Santo André, 2023.

1. Geometria plana. I. Dayan Barbero Lodovic, Sinuê. II.
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, 2023. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência do orientador.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, WALDECK SILVA SOUZA realizada em 27 de Junho de 2023:

Prof.(a) ALEXANDRE LYBEROPOULOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) GLEICIANE DA SILVA ARAGÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Prof.(a) RAFAEL DE MATTOS GRISI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

RESUMO

Nossos principais objetivos no presente trabalho são apresentar os sistemas axiomáticos de Birkhoff e de Hilbert, apresentar alguns resultados importantes da geometria neutra, as discussões a cerca do quinto postulado de Euclides bem como as diversas tentativas de sua demonstração a partir dos quatro primeiros postulados, a geometria hiperbólica e contribuir de alguma forma para o ensino de geometria euclidiana, neutra e hiperbólica (estas duas últimas, a título de enriquecimento ou sugestão) no ensino médio.

Damos um importante passo para uma possível demonstração da equivalências do sistema de axiomas de Hilbert e de Birkhoff, a medida que demonstramos que os axiomas de Birkhoff implicam os axiomas de Hilbert e apresentamos uma demonstração quase completa de que os axiomas de Hilbert implicam os axiomas de Birkhoff.

Palavras-chave: Geometria Neutra, Geometria Hiperbólica

ABSTRACT

Our main objectives in the present work are to present the axiomatic systems of Birkhoff and Hilbert, to present some important results of neutral geometry, the discussions about the fifth postulate of Euclid as well as the several attempts of its demonstration from the first four postulates, the hyperbolic geometry and contribute in some way to the teaching of Euclidean, neutral and hyperbolic geometry (the latter two, by way of enrichment or suggestion) in high school.

We take an important step towards a possible demonstration of the equivalence of Hilbert's and Birkhoff's system of axioms, as we demonstrate that Birkhoff's axioms imply Hilbert's axioms and present an almost complete proof that Hilbert's axioms imply Birkhoff's axioms.

Keywords: Neutral Geometry, Hyperbolic Geometry

AGRADECIMENTOS

Deixarei aqui, meus sinceros agradecimentos:

- Primeiramente a Deus, por tudo.
- À minha esposa e meus filhos, pela paciência em todo o percurso, pelas felicitações ao concluir cada etapa, pela força e motivação.
- Ao meu orientador, pelo aprendizado, confiança e por toda a contribuição.
- A todos os professores desse curso, que muito me ensinaram nessa jornada.
- Aos colegas e amigos que torceram muito desde o início.

Meu muito obrigado.

“Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra; poderá ser apenas mais cômoda.”

(Poincaré)

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|--|----|
| Figura 1 | Axioma das paralelas de Birkhoff para a geometria euclidiana | 14 |
| Figura 2 | Congruência de segmentos | 17 |
| Figura 3 | Ângulos $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$ | 18 |
| Figura 4 | Cobrindo os inteiros não negativos | 24 |
| Figura 5 | Cobrindo os inteiros negativos | 24 |
| Figura 6 | Triângulo $\triangle ABC$, com $ AB > AC $ | 26 |
| Figura 7 | Triângulo $\triangle ABC$, com $m(\angle C) > m(\angle B)$ | 27 |
| Figura 8 | Desigualdade triangular | 29 |
| Figura 9 | Existência da paralela | 33 |
| Figura 10 | Unicidade da paralela | 33 |
| Figura 11 | Teorema de Pasch: Caso $C \in r$ | 37 |
| Figura 12 | Barra transversal | 37 |
| Figura 13 | Ângulos alternos internos | 39 |
| Figura 14 | Existência de perpendicular: $P \notin r$ | 41 |
| Figura 15 | Existência de perpendicular: $P \in r$ | 41 |
| Figura 16 | Ângulos opostos pelo vértice | 42 |
| Figura 17 | Ângulo exterior: $m(\angle ACP) > m(\angle A)$ | 43 |
| Figura 18 | Ângulo exterior: $m(\angle ACP) > m(\angle B)$ | 43 |
| Figura 19 | Soma de dois ângulos internos de um triângulo qualquer | 44 |
| Figura 20 | Ponto médio do segmento \overline{AC} | 45 |
| Figura 21 | Teorema de Saccheri-Legendre | 45 |
| Figura 22 | Unicidade da perpendicular | 48 |
| Figura 23 | Princípio elementar de continuidade | 51 |
| Figura 24 | Proposição 2.37 - 1º caso | 53 |
| Figura 25 | Proposição 2.37 - 2º caso | 54 |
| Figura 26 | Proposição 2.37 - 3º caso | 54 |
| Figura 27 | Ptolomeu - duas retas m e n cortadas por uma transversal t | 67 |
| Figura 28 | A suposição de Nasir-Edin | 68 |
| Figura 29 | A tentativa de Nasir-Edin | 69 |
| Figura 30 | Uma tentativa de Legendre | 70 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| Figura 31 | Quadrilátero de Saccheri | 71 |
| Figura 32 | Quadrilátero de Lambert | 72 |
| Figura 33 | Axioma hiperbólico | 77 |
| Figura 34 | Teorema hiperbólico universal | 78 |
| Figura 35 | Ponto e reta no disco de Poincaré | 80 |
| Figura 36 | Ângulo no disco de Poincaré | 81 |
| Figura 37 | m e n , retas paralelas a r por P | 82 |
| Figura 38 | Pontos e retas no semiplano de Poincaré | 82 |
| Figura 39 | Ângulo hiperbólico no semiplano de Poincaré | 83 |
| Figura 40 | s e t , retas paralelas a r por P | 83 |
| Figura 41 | Congruência de triângulos: caso cateto-hipotenusa | 86 |
| Figura 42 | Construção da mediatriz de um segmento | 89 |
| Figura 43 | Geogebra - triângulo equilátero: polígono regular | 90 |
| Figura 44 | Geogebra - triângulo equilátero: número de vértices | 90 |
| Figura 45 | Geogebra - triângulo equilátero: medida do lado | 91 |
| Figura 46 | Geogebra - triângulo equilátero: ponto médio | 92 |
| Figura 47 | Geogebra - triângulo equilátero: malha e eixos | 92 |
| Figura 48 | Geogebra - triângulos equiláteros $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ | 93 |
| Figura 49 | Criando o Disco de Poincaré no Geogebra | 95 |
| Figura 50 | Disco de Poincaré no Geogebra | 95 |
| Figura 51 | Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: inversão | 96 |
| Figura 52 | Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: círculo passando por três pontos | 97 |
| Figura 53 | Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: arco circuncircular | 97 |
| Figura 54 | Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré passando pelos pontos A e B | 98 |
| Figura 55 | Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: diâmetro | 99 |
| Figura 56 | Geogebra - nova ferramenta | 99 |
| Figura 57 | Geogebra - nova ferramenta: reta hiperbólica | 100 |
| Figura 58 | Geogebra - retas paralelas no disco de Poincaré | 101 |
| Figura 59 | A multiplicação no conjunto de pontos de r | 102 |
| Figura 60 | $ OA + OB = OD $ e $ OB + OA = OD' $ | 103 |
| Figura 61 | Associatividade da multiplicação | 104 |
| Figura 62 | Distributiva | 105 |
| Figura 63 | Existência de inverso | 106 |

CONTEÚDO

| | |
|---|----|
| Lista de Figuras | xv |
| Introdução | 1 |
| 1 AXIOMAS DE HILBERT E AXIOMAS DE BIRKHOFF | 3 |
| 1.1 O Método Axiomático e Termos Não-Definidos | 3 |
| 1.2 Axiomas de Hilbert | 4 |
| 1.2.1 Axiomas de incidência | 5 |
| 1.2.2 Axiomas de ordem | 5 |
| 1.2.3 Axiomas de congruência | 6 |
| 1.2.4 Axioma de continuidade | 7 |
| 1.2.5 Axioma de paralelismo | 8 |
| 1.3 Axiomas dos números reais | 8 |
| 1.3.1 O conjunto dos números reais | 8 |
| 1.3.2 Axiomas de corpo | 8 |
| 1.3.3 Axioma de ordem | 9 |
| 1.3.4 Axioma de completude | 10 |
| 1.4 Axiomas de Birkhoff | 10 |
| 1.5 Os axiomas de Birkhoff implicam os axiomas de Hilbert | 14 |
| 1.6 Os axiomas de Hilbert implicam os axiomas de Birkhoff | 20 |
| 2 A GEOMETRIA NEUTRA OU ABSOLUTA | 35 |
| 2.1 Incidência | 35 |
| 2.2 Ordem | 36 |
| 2.3 Demais resultados | 38 |
| 3 O QUINTO POSTULADO, SUA NEGAÇÃO E UMA NOVA GEOMETRIA | 55 |
| 3.1 Euclides e Os Elementos | 56 |
| 3.1.1 Geometria grega pré Euclides | 56 |
| 3.1.2 Euclides | 60 |
| 3.1.3 Os Elementos | 61 |
| 3.2 O V postulado | 65 |
| 3.2.1 História e discussão | 65 |
| 3.2.2 Tentativas de provar o V postulado | 66 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.2.3 | Algumas versões ou equivalências do V Postulado | 72 |
| 3.3 | Geometria hiperbólica: o início de uma nova geometria | 73 |
| 3.3.1 | Criadores da geometria hiperbólica | 74 |
| 3.4 | Elementos de geometria hiperbólica | 76 |
| 3.5 | Modelos para a geometria hiperbólica | 79 |
| 3.5.1 | Disco de Poincaré | 80 |
| 3.5.2 | Semiplano de Poincaré | 81 |
| 4 | ALGUNS RESULTADOS E DEMONSTRAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO | 85 |
| 4.1 | Geometria Neutra | 86 |
| 4.1.1 | Demonstrações em geometria neutra: sugestões de exercícios | 86 |
| 4.1.2 | Construções com régua e compasso | 88 |
| 4.1.3 | Geometria neutra utilizando o Geogebra | 89 |
| 4.1.4 | Exercícios propostos | 91 |
| 4.2 | Geometria Hiperbólica | 93 |
| 4.2.1 | Demonstrações para sala de aula | 93 |
| 4.2.2 | Disco de Poincaré no Geogebra, primeiros passos | 94 |
| 4.3 | Geometria Euclidiana | 101 |
| 4.3.1 | Mostrar a função régua de Birkhoff através dos axiomas de Hilbert | 101 |
| 4.4 | Considerações finais | 106 |
| | Bibliografia | 109 |

INTRODUÇÃO

O presente trabalho está dividido em 4 partes (capítulos). No primeiro capítulo, apresentamos dois sistemas de axiomas para a geometria euclidiana, o de David Hilbert e o de George David Birkhoff. Demonstramos os axiomas de Hilbert como proposições a partir dos axiomas de Birkhoff. A fim de indicar uma possível demonstração da equivalência dos dois sistemas de axiomas demonstramos, com exceção dos postulados da régua e do transferidor, os axiomas de Birkhoff a partir dos axiomas de Hilbert.

No segundo capítulo, apresentamos a geometria neutra bem como alguns dos seus principais resultados. Tais como teorema do ângulo externo, teorema dos ângulos alternos internos, teorema de Legendre, casos de congruência de triângulos, etc.

No terceiro capítulo, apresentamos o quinto postulado de Euclides e algumas das várias tentativas de demonstrá-lo a partir dos quatro primeiros postulados, os precursores de uma nova geometria que surge a partir da negação do quinto postulado e, por fim, apresentamos a geometria hiperbólica e alguns resultados importantes. Ainda no terceiro capítulo, apresentamos dois modelos para a geometria hiperbólica.

Finalizamos com o quarto capítulo, dedicado a professores de matemática e, de certa forma, a alunos do Ensino Médio. O capítulo contribui com alguns resultados relevantes para a sala de aula. Em geometria neutra e geometria hiperbólica, são apresentados algumas sugestões de demonstrações utilizando o método axiomático, algumas construções com régua e compasso e algumas atividades com o Geogebra. Para a geometria euclidiana, apresentamos uma sugestão de demonstração geométrica, a partir dos axiomas de Hilbert, do postulado da função régua de Birkhoff.

Destacamos que tanto geometria neutra como geometria hiperbólica são conteúdos não abordados no Currículo de Matemática da Educação Básica. Assim, este trabalho tem como um de seus objetivos mostrar uma possível abordagem de geometrias não euclidianas, em especial a hiperbólica, para o Ensino Médio.

As principais referências foram [13], [18], [4], [20].

AXIOMAS DE HILBERT E AXIOMAS DE BIRKHOFF

No presente capítulo, apresentamos inicialmente os axiomas de Hilbert, em seguida, os axiomas dos números reais e os axiomas de Birkhoff (visto que Birkhoff faz bijeção dos números reais com os pontos da reta).

O objetivo, além de apresentar os dois sistemas de axiomas, será embasar as demonstrações e argumentos do Capítulo 2. Aqui queremos mostrar também ao leitor, que o sistema de axiomas de Birkhoff implicam o sistema de axiomas de Hilbert, o que é feito na Seção 1.5. Apresentamos o conjunto dos números reais, bem como suas propriedades e axiomas. Finalizamos o capítulo com a Seção 1.6, com uma demonstração quase completa¹ de que os axiomas de Hilbert implicam os axiomas de Birkhoff, visando mostrar o caminho para uma possível demonstração da equivalência dos dois sistemas de axiomas.

1.1 O MÉTODO AXIOMÁTICO E TERMOS NÃO-DEFINIDOS

A estruturação da matemática como uma ciência baseada no raciocínio lógico e no método dedutivo remonta à Grécia Antiga, mais notadamente aos trabalhos de Aristóteles (384-322 a.C.) e Euclides (325-265 a.C.).

O que hoje conhecemos como método axiomático propõe que, fundamentando uma teoria, fixemos alguns pilares cuja validade não se questiona, para que a partir desses possamos, através da lógica, deduzirmos todos os resultados da teoria. Tais pilares são o que hoje denominamos *axiomas*. No livro [9], Euclides compila magistralmente os

1 Não estão completas as demonstrações do Postulado da régua (B.3) e do Postulado do transferidor (B.5).

conhecimentos gregos de geometria a partir de 5 postulados, que, no caso, seriam o seu conjunto base de axiomas.

Os axiomas proporcionam um alicerce sob o qual cada afirmação é suportada, evitando argumentações cíclicas e um processo *ad infinitum* de se tentar justificar uma verdade a partir de outra que também deve ser, então, justificada.

Antes do enunciado dos axiomas, porém, é necessário entre as partes um acordo mútuo entre os membros do discurso do significado das palavras e símbolos usados nesse discurso. Assim sendo, antes mesmo dos axiomas temos aquilo que conhecemos como termos não-definidos, que em geral falam de objetos e relações que são então regulados pelos axiomas. David Hilbert (1862 — 1943), um dos grandes responsáveis pela releitura moderna da obra de Euclides, sobre os termos não-definidos afirmou:

“Um deve ser capaz de dizer a todo momento– ao invés de pontos, linhas retas, e planos – mesas, cadeiras e canecas de cerveja”

[tradução livre de [12], p.208].

Sob esta óptica, nos próximos axiomas, alguns desses termos não-definidos e ali “regulamentados” são:

- ponto;
- reta;
- “está em” ou “é incidente com”;
- “estar entre”;
- “ser congruente”.

1.2 AXIOMAS DE HILBERT

Aqui apresentaremos os cinco grupos de axiomas de Hilbert: axiomas de incidência, axiomas de ordem, axiomas de congruência, axioma de continuidade e o axioma de paralelismo.

1.2.1 Axiomas de incidência

Axioma H. 1. Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P existe uma única reta r que passa por P e Q .

Axioma H. 2. Para toda reta r existe ao menos dois pontos distintos incidentes com r .

Axioma H. 3. Existem três pontos distintos com a propriedade de que não existe reta incidente com os três pontos.

1.2.2 Axiomas de ordem

Definição 1.1. Pontos colineares são aqueles que pertencem a uma mesma reta.

Nos próximos axiomas usamos a notação $A * B * C$ para dizer que os pontos A , B e C são colineares e que o ponto B está entre os pontos A e C .

Axioma H. 4. Se $A * B * C$, então A, B e C são três pontos distintos todos pertencentes a uma mesma reta, e $C * B * A$.

Axioma H. 5. Dados quaisquer dois pontos B e D , existem pontos A, C e E na reta \overleftrightarrow{BD} tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.

Em outras palavras, dados quaisquer dois pontos B e D , existem três pontos na reta que contém B e D tais que um está entre B e D , um tal que B esteja entre o ponto e D , e outro tal que D esteja entre o ponto e B .

Axioma H. 6. Se A, B e C são três pontos distintos colineares, então um e exatamente um deles está entre os outros dois.

Definição 1.2. Sejam os pontos distintos A e B .

- a) Define-se o segmento de reta \overline{AB} (ou simplesmente segmento \overline{AB}) como o conjunto dos pontos A e B e dos pontos X , tais que $A * X * B$. Os pontos A e B são denominados extremidades do segmento \overline{AB} .
- b) Dado o segmento \overline{AB} , definimos a sua medida ou comprimento como a distância entre os pontos A e B e denotamos por $|AB|$ ou simplesmente AB . Neste trabalho utilizaremos, preferencialmente, a notação $|AB|$.

- c) Denotamos por semirreta \overrightarrow{AB} , a semirreta de origem A contendo o ponto B definida como a união dos pontos do segmento \overline{AB} com o conjunto dos pontos X , tais que $A * B * X$.
- d) Dados os pontos A, B e X , tais que $A * B * X$, as semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BX} são chamadas semirretas opostas.

No próximo axioma dizemos que dois pontos A e B estão em lados opostos de uma reta r se o segmento de reta \overline{AB} intersecta r , ou seja, existe um ponto P incidente com r e \overline{AB} simultaneamente. Caso contrário dizemos que A e B estão do mesmo lado de r .

Axioma H. 7 (Separação do Plano). *Para toda reta r e quaisquer três pontos A, B e C fora de r :*

1. *Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*
2. *Se A e B estão em lados opostos de r e B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*

1.2.3 Axiomas de congruência

Definição 1.3. Se dois segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$ possuem a mesma medida, dizemos que são congruentes e denotamos $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

Axioma H. 8. *Se A e B são pontos distintos e se A' é um ponto qualquer, então para cada semirreta r com origem em A' existe um único ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.*

Axioma H. 9. *Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, então $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Além disso, todo segmento de reta é congruente a si mesmo.*

Axioma H. 10. *Se $A * B * C$ e $A' * B' * C'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

Um ângulo é um par de semirretas \overrightarrow{h} e \overrightarrow{k} que têm uma mesma origem Z . Dizemos que Z é o vértice do ângulo $\angle \overrightarrow{h}, \overrightarrow{k}$. É usual denotarmos por $\angle BAC$ o ângulo $\angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Dado o ângulo $\angle BAC$, dizemos que D está no interior de $\angle BAC$ se D está do mesmo lado que B de \overleftrightarrow{AC} e se D está do mesmo lado que C da reta \overleftrightarrow{AB} . Dizemos também que, nesse caso, a semirreta \overrightarrow{AD} está no interior $\angle BAC$.

Definição 1.4. Seja um número natural $n \geq 3$ e os pontos A_1, A_2, \dots, A_n distintos no plano. A_1, A_2, \dots, A_n é um polígono se:

- Não há interseção entre nenhum par de segmentos a não ser nas suas extremidades.
- Nenhum par de segmentos com extremidade em comum pertence a mesma reta.

Chama-se polígono a união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ e o denotamos por polígono $A_1A_2\dots A_n$. Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados vértices do polígono e os segmentos $\overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ são chamados lados do polígono.

Definição 1.5. Um polígono é convexo se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos em relação a cada reta que contém um de seus lados.

Definição 1.6. Um triângulo é um polígono que possui três lados.

Num triângulo de vértice A , indicaremos por $\sphericalangle A$ o ângulo interno com vértice A .

Axioma H. 11. *Dados um ângulo $\sphericalangle BAC$, e dada uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$, então existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ num dado lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle BAC$.*

Axioma H. 12. *Se $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ e $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$, então $\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.*

Axioma H. 13 (LAL). *Se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles são congruentes a dois lados e o ângulo de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes, ou seja, existe uma correspondência entre os lados e os ângulos desses triângulos tais que dois-a-dois esses (lados ou ângulos) sejam congruentes.*

1.2.4 Axioma de continuidade

Axioma H. 14 (Axioma de Dedekind). *Suponha que o conjunto de todos os pontos da reta r seja a união disjunta $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de dois conjuntos não vazios tais que nenhum ponto de um esteja entre dois pontos do outro. Então existe um único ponto O em r tal que um dos subconjuntos é igual a uma semirreta de origem O e o outro subconjunto é igual ao seu complemento.*

1.2.5 *Axioma de paralelismo*

Axioma H. 15. *Para toda reta r e todo ponto P fora de r existe **no máximo uma** reta s por P paralela a r .*

1.3 AXIOMAS DOS NÚMEROS REAIS

Nesta seção, que baseia-se principalmente nas referências [17] e [2], apresentamos os axiomas dos números reais que serão de especial importância para os axiomas de Birkhoff e também para algumas demonstrações das seções 1.5 e 1.6. De modo que em algumas ocasiões torna-se mais prático recorrer a um axioma dos números reais a um axioma de Birkhoff, como por exemplo o Axioma do supremo (R.8).

1.3.1 *O conjunto dos números reais*

O conjunto dos números reais, que costuma ser indicado por \mathbb{R} , possui algumas propriedades que iremos apresentar a seguir. \mathbb{R} é um corpo, isto significa que é munido de duas operações chamadas de adição e multiplicação representadas por $+$ e \cdot , respectivamente. Essas operações obedecem os seis axiomas de corpo descritos em 1.3.2. Além disso, pelo Axioma R.7, \mathbb{R} é um corpo ordenado e pelo Axioma R.8, \mathbb{R} é um corpo completo. O Axioma R.8 diferencia o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais.

1.3.2 *Axiomas de corpo*

Axioma R. 1 (Comutativa). *Dados x e y , números reais quaisquer, então $x + y = y + x$ e $xy = yx$.*

Axioma R. 2 (Associativa). *Dados x, y, z , números reais quaisquer, então $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(yz) = (xy)z$.*

Axioma R. 3 (Distributiva). *Dados x, y, z , números reais quaisquer, então $x(y + z) = xy + xz$.*

Axioma R. 4 (Existência de Identidade). *Existem dois números reais distintos, usualmente denotados por 0 e 1 , tais que para todo x real temos $x + 0 = x$ e $1 \cdot x = x$.*

Axioma R. 5 (Existência de opostos ou simétricos). *Para todo número real x existe um real y tal que $x + y = 0$. Usualmente denotamos $y = -x$.*

Axioma R. 6 (Existência de Inversos). *Para todo real $x \neq 0$ existe y tal que $xy = 1$. Usualmente denotamos $y = x^{-1}$.*

1.3.3 Axioma de ordem

O axioma seguinte garante que \mathbb{R} é um corpo ordenado.

Axioma R. 7. *Existe $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, tal que:*

1. *Se x e y estão em \mathbb{R}^+ , então $x + y$ e xy também estão.*
2. *Para todo real $x \neq 0$, temos $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$, mas não ambos.*
3. *$0 \notin \mathbb{R}^+$*

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ definimos as relações $x > y$ (x maior que y) e $y < x$ (y menor que x) se $(x - y) \in \mathbb{R}^+$. Com tal definição, temos que $<$ é uma relação de ordem em \mathbb{R} e satisfaz as quatro seguintes propriedades:

- O1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.
- O2. Tricotomia: dados os números reais x e y , então ocorre exatamente uma das três alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.
- O3. Monotonicidade da adição: dados x e y , dois números reais, se $x < y$, então $x + z < y + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.
- O4. Monotonicidade da multiplicação: dados x e y , dois números reais, se $x < y$, então $xz < yz$ para todo $z > 0$. No entanto, se $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$.

1.3.4 *Axioma de completude*

Axioma R. 8. *Todo subconjunto S de \mathbb{R} limitado superiormente tem um supremo (menor cota superior); isto é existe um número real b tal que $b = \sup S$.*

Existem outros conjuntos que são corpos ordenados ou corpos completos, como por exemplo o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números complexos, respectivamente. Porém o único conjunto que é um corpo ordenado completo, a menos de isomorfismo, é o conjunto dos números reais. Essa afirmação decorre do teorema a seguir, constante em [19].

Teorema 1.7. *Todo corpo ordenado completo é ordenadamente isomorfo ao corpo dos números reais.*

1.4 AXIOMAS DE BIRKHOFF

A principal referência nesta seção, onde apresentamos os axiomas de Birkhoff para a geometria plana, é [21]. Uma notável característica no sistema de axiomas de Birkhoff é a bijeção entre os números reais e os pontos da reta.

Axioma B. 1. *Se A e B são dois pontos distintos, então existe uma e apenas uma reta passando por ambos os pontos. Denotaremos tal reta por \overleftrightarrow{AB} .*

Axioma B. 2 (Espaço métrico). *Existe uma função $|PQ|$ definida para todo par de pontos P e Q do plano, tal que:*

1. $|PQ| = 0$ se $P = Q$;
2. $|PQ| > 0$ se $P \neq Q$;
3. $|PQ| = |QP|$;
4. (Desigualdade Triangular) $|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C$.

Dizemos que $|PQ|$ é a distância entre os pontos P e Q ou o comprimento do segmento de reta \overline{PQ} .

Observação 1.8. Da desigualdade triangular obtemos facilmente que, para quaisquer A, B, C vale:

$$||AB| - |BC|| \leq |AC| \leq |AB| + |BC|$$

Veremos que, para compatibilização das axiomatizações de Birkhoff e Hilbert, diremos que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ se $|AB| = |CD|$ e que $A * B * C$ se $|AC| = |AB| + |BC|$.

Axioma B. 3. Para toda reta r existe uma bijeção $x : r \rightarrow \mathbb{R}$, denominada **sistema de coordenada** (ou **parametrização**) de r tal que, para todo par de pontos A, B em r , vale:

$$|AB| = |x(A) - x(B)|$$

Dizemos que $x(A)$ é a **coordenada** de A (no sistema de coordenada x).

O Axioma B.3 é também conhecido como Postulado da régua. Cada ponto da reta é associado a um único número real.

Proposição 1.9. Se x e y são dois sistemas de coordenadas para uma reta r então, para todo P em r vale:

- $y(P) = x(P) + k$, ou;
- $y(P) = -x(P) + k$,

onde k é um número real fixado.

Se $y(P) = x(P) + k$ dizemos que y mantém a ordem de x . Caso contrário, dizemos que y inverte a ordem de x .

Demonstração. Sejam y e x dois sistemas de coordenadas para a reta r e, A e B pontos de r , tais que $y(A) = 0$ e $x(B) = 0$. Dado um ponto P qualquer de r , temos quatro casos possíveis:

1. Se $A = B$, então $|AP| = |BP|$ implica $|y(P) - y(A)| = |x(P) - x(B)|$, donde $|y(P)| = |x(P)|$. Assim,

$$y(P) = \begin{cases} x(P), & \text{se } y(P)x(P) > 0; \\ -x(P), & \text{se } y(P)x(P) < 0. \end{cases}$$

Logo, $y(P) = x(P) + k$, ou $y(P) = -x(P) + k$, e $k = 0$.

2. Se $A \neq B$ e $A * P * B$, então $|AB| = |AP| + |PB|$ implica $|AB| = |y(P) - y(A)| + |x(P) - x(B)|$, e assim $|AB| = |y(P)| + |x(P)|$.

Logo,

$$y(P) = \begin{cases} -x(P) \pm |AB|, & \text{se } y(P)x(P) > 0; \\ x(P) \pm |AB|, & \text{se } y(P)x(P) < 0. \end{cases}$$

Assim, fazendo $|AB| = k$, temos

$$y(P) = x(P) + k \text{ ou } y(P) = -x(P) + k.$$

3. Se $A \neq B$ e $A * B * P$, então se $|AP| = |AB| + |BP|$ temos $|y(P) - y(A)| = |AB| + |x(P) - x(B)|$. Logo $|y(P)| = |AB| + |x(P)|$.

Portanto,

$$y(P) = \begin{cases} x(P) \pm |AB|, & \text{se } y(P)x(P) > 0; \\ -x(P) \pm |AB|, & \text{se } y(P)x(P) < 0. \end{cases}$$

Tomando $|AB| = |k|$, temos $k = \pm |AB|$. Assim,

$$y(P) = x(P) + k \text{ ou } y(P) = -x(P) + k.$$

4. Se $A \neq B$ e $P * A * B$ a demonstração segue de maneira análoga ao item anterior.

Finalmente, concluímos que em todos os casos temos $y(P) = x(P) + k$ ou $y(P) = -x(P) + k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. \square

Teorema 1.10 (Teorema de colocação da régua). *Dada uma reta r e dois pontos quaisquer A e B de r . Então r tem um sistema de coordenadas no qual a coordenada de A é 0 e a coordenada de B é positiva.*

Demonstração. Seja f um sistema de coordenadas qualquer para r . Seja $a = f(A)$ e, para todo ponto P de r , seja $g(P) = f(P) - a$. Então, g é um sistema de coordenadas para r e $g(A) = 0$. Se $g(B) > 0$, então g é o sistema procurado. Se $g(B) < 0$, tome $h(P) = -g(P)$ para todo $P \in r$. Então h é o sistema procurado. \square

Em outras palavras, o Teorema 1.10 garante que podemos escolher qualquer ponto da reta para associar ao número real 0, bem como escolher o sentido positivo.

É fácil ver que $A * B * C$ se e somente se A, B e C são colineares e vale $x(A) < x(B) < x(C)$ ou $x(A) > x(B) > x(C)$, onde x é um sistema de coordenada para a reta que contém A, B e C .

Axioma B. 4. Se r é uma reta qualquer do plano \mathbb{P} , existem dois subconjuntos não vazios de \mathbb{P} , HP_1 e HP_2 , denominados **semiplanos**, tais que:

1. (União disjunta) O plano \mathbb{P} é a união disjunta de r , HP_1 e HP_2 .
2. (Convexidade) Se P e Q estão no mesmo semiplano, então o segmento \overline{PQ} está contido nesse mesmo semiplano;
3. Se P e Q estão em semiplanos opostos, então o segmento \overline{PQ} contém um único ponto de r .

Axioma B. 5 (Medida de Ângulos). Para cada ângulo $\angle \vec{h}, \vec{k}$ existe um número real $(\angle \vec{h}, \vec{k})^{rad}$ no intervalo $[0, \pi]$, chamado **medida** (em radianos) do ângulo, tal que:

1. Se \vec{h} e \vec{k} são a mesma semirreta, a sua medida é 0; se elas são semirretas opostas sua medida é π ;
2. a soma da medida de um ângulo com a de seu suplementar é π ;
3. se \vec{j} está no interior do ângulo $\angle \vec{h}, \vec{k}$, então $(\angle \vec{h}, \vec{j})^{rad} + (\angle \vec{j}, \vec{k})^{rad} = (\angle \vec{h}, \vec{k})^{rad}$
4. se uma semirreta \vec{k} com origem em Z está na reta r , então em cada semiplano limitado por r , existe uma bijeção entre o conjunto de semirretas \vec{j} com origem Z e os números reais α em $(0, \pi)$ de tal maneira que α é igual à medida $(\angle \vec{j}, \vec{k})^{rad}$ do ângulo $\angle \vec{j}, \vec{k}$; e
5. nas condições do item (4), se a semirreta \vec{j} é determinada por \overrightarrow{ZP} , onde P é um ponto de \vec{j} , então o ângulo α depende continuamente de P , isto é, se P' é uma variável ponto e α' seu ângulo correspondente, então $(\alpha - \alpha') \rightarrow 0$ a medida que $|PP'| \rightarrow 0$.

Tal axioma é, em analogia ao teorema de colocação da régua, conhecido também como axioma do transferidor, pois nos permite a medida de qualquer ângulo.

Diremos que dois ângulos são congruentes se eles têm mesma medida. Se os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ têm medidas iguais, denotamos $m(\angle A) = m(\angle B)$.

Axioma B. 6 (LAL). Se os dois lados e o ângulo interno entre eles de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados e o ângulo interno de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes. Isto é, os demais lados e ângulos são também congruentes.

- Axioma B. 7.**
- (Euclidiano) Dada uma reta qualquer e um ponto fora dela, existe uma única reta por tal ponto que nunca intersecta a reta dada.
 - (Hiperbólico) Existe uma reta e um ponto fora dela tais que, por tal ponto, passam ao menos duas retas que não intersectam a reta dada.



Figura 1: Axioma das paralelas de Birkhoff para a geometria euclidiana

1.5 OS AXIOMAS DE BIRKHOFF IMPLICAM OS AXIOMAS DE HILBERT

Mostraremos nesta seção que os axiomas de Birkhoff implicam os axiomas de Hilbert. Os resultados desta seção tem dois objetivos. O primeiro seria mostrar a primeira metade da equivalência dos axiomas de Birkhoff e dos axiomas de Hilbert. Em segundo, nos permitir estruturar a geometria neutra a partir dos Axiomas de Birkhoff de modo a podermos utilizar os axiomas de Hilbert quando assim for mais conveniente.

Proposição 1.11 (H1). Para todo ponto P e todo ponto Q distinto de P existe um única reta r que passa por P e Q .

Demonstração. Por B.1 temos que se P e Q são dois pontos distintos, então existe uma única reta, denotada por \overleftrightarrow{PQ} , passando por ambos os pontos. Logo B.1 \implies H.1. \square

Proposição 1.12 (H2). Para toda reta r existe ao menos dois pontos distintos incidente com r .

Demonstração. Pelo Axioma B.3, para toda reta r existe uma bijeção entre seus pontos e os números reais. Daí, como existem pelo menos dois números reais (por exemplo 0 e 1), temos que pelo menos dois pontos são insidentes a reta r . Portanto, B.3 \implies H.2. \square

Proposição 1.13 (H3). *Existem três pontos distintos com a propriedade de que não existe reta incidente com os três pontos.*

Demonstração. Pelo Axioma B.4, uma reta r qualquer do plano \mathbb{P} divide-o em dois subconjuntos não-vazios HP_1 e HP_2 , denominados semiplanos. Como ambos os semiplanos são não-vazios, existe ao menos um ponto em cada um dos semiplanos determinados por r . Pela proposição 1.12, a reta r possui pelo menos dois pontos distintos, A e B . Seja C um ponto fora de r insidente a um dos semiplanos determinados por r . Assim, a reta r que contém A e B não contém C . Se existisse uma reta s contendo os pontos A, B, C pelo Axioma B.1 teríamos que $s = r$ e, assim, C estaria em r , o que contradiz nossa hipótese inicial. \square

Proposição 1.14 (H4). *Sejam A, B e C três pontos colineares. Se $A * B * C$ então $C * B * A$*

Demonstração. Sejam os pontos A, B e C , tal que $A * B * C$. Se $|AB| + |BC| = |AC|$ então, como a distância entre pontos é uma propriedade simétrica, $|CB| + |BA| = |CA|$.

Observe que se os números x, y e z são as coordenadas dos pontos A, B e C , respectivamente, então y está entre x e z , ou seja, $x < y < z$ ou $z < y < x$. Neste caso escrevemos $x - y - z$. \square

Proposição 1.15 (H5). *Dados quaisquer dois pontos B e D , existem pontos A, C e E na reta \overleftrightarrow{BD} tais que $A * B * D$, $B * C * D$ e $B * D * E$.*

Demonstração. Sejam, f um sistema de coordenadas para a reta \overleftrightarrow{BD} e x e y as coordenadas dos pontos B e D , respectivamente. Suponha $x < y$.

Daí, pela bijeção dos pontos da reta \overleftrightarrow{BD} com os números reais, basta tomar A, C , e E em \overleftrightarrow{BD} , tais que:

1. $A = f^{-1}(x - 1)$;
2. $C = f^{-1}\left(\frac{x+y}{2}\right)$;
3. $E = f^{-1}(y + 1)$

Assim, de (1) temos que $A * B * D$ pois $x - 1 < x < y$; de (2), temos $B * C * D$, pois como $x < y$, então $2x < x + y < 2y \implies x < \frac{x+y}{2} < y$; de (3), temos $B * D * E$, pois $x < y < y + 1$. \square

Proposição 1.16 (H6). *Se A, B e C são três pontos colineares distintos, então um e exatamente um deles está entre os outros dois.*

Demonstração. Seja f um sistema de coordenadas para a reta que contém os pontos A, B e C e sejam os números x, y e z suas coordenadas, respectivamente. Como um dos números x, y, z está entre os outros dois, então o ponto correspondente A, B ou C está entre os outros dois.

Poderíamos também obter esse resultado sem a utilização de um sistema de coordenadas. Observe. Suponha $A * B * C$, assim precisamos provar que não é válida nenhuma das condições $B * A * C$ e $A * C * B$. Se $B * A * C$, então $|BA| + |AC| = |BC|$ (1). Mas, por hipótese, temos que $|AB| + |BC| = |AC|$ (2). Somando (1) e (2) temos $|BA| + |AC| + |AB| + |BC| = |BC| + |AC|$ ou $2|AB| = 0 \Rightarrow |AB| = 0$. Mas $|AB| = 0$ é absurdo, pois $A \neq B$. De modo análogo, podemos mostrar que as condições $A * B * C$ e $A * C * B$ não são válidas. \square

Proposição 1.17 (Separação do Plano (H7)). *Para toda reta r e quaisquer três pontos A, B e C fora de r :*

1. *Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*
2. *Se A e B estão em lados opostos de r e B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .*

Demonstração. Pelo Axioma B.4, r divide o plano \mathbb{P} em dois semiplanos, HP_1 e HP_2 , de modo que \mathbb{P} é a união disjunta de r, HP_1 e HP_2 . Estar do mesmo lado de r significa estar no mesmo semiplano, HP_1 ou HP_2 . Estar em lados opostos de r , significa estar em semiplanos diferentes, isto é, não estar num mesmo semiplano. Assim, temos que:

1. Se A e B estão no mesmo semiplano e, B e C estão no mesmo semiplano, então, pelo Axioma B.4(2), \overline{AB} está contido no mesmo semiplano e \overline{BC} está contido no mesmo semiplano. Assim, B está no mesmo semiplano que A , mas B também está no mesmo semiplano que C , então A, B e C estão no mesmo semiplano. Portanto, A e C estão num mesmo semiplano determinado por r (mesmo lado de r).
2. Se A e B estão em semiplanos diferentes e, B e C estão em semiplanos diferentes, então tanto A quanto C não estão no mesmo semiplano que B . Como são apenas dois semiplanos determinados por r no plano \mathbb{P} , então A e C devem estar no

mesmo semiplano (pelo Axioma B.4(2), \overline{AC} não intersecta r , logo A e C estão do mesmo lado de r).

□

Proposição 1.18 (H8). *Se A e B são pontos distintos e se A' é um ponto qualquer, então cada semirreta r com origem em A' existe um único ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.*

Demonstração. Seja o segmento \overline{AB} de medida $|AB|$ e a reta $\overleftrightarrow{A'C}$. Pelo Teorema 1.10, podemos estabelecer um sistema de coordenadas f para a reta $\overleftrightarrow{A'C}$ de modo que $f(A') = 0$ e $f(C) > 0$ (ver figura 2). O número $|A'C|$ na figura é a coordenada do ponto C . Se B' é um ponto da semirreta $\overrightarrow{A'C}$, então $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ se, e somente, se $f(B') = |AB|$. Existe um único ponto $f^{-1}(|AB|)$ ², portanto existe um único ponto B' . □



Figura 2: Congruência de segmentos

Proposição 1.19 (H9). *Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, então $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Além disso, todo segmento de reta é congruente a si mesmo.*

Demonstração. Temos $|CD| = |AB|$ e $|EF| = |AB|$. Pela transitividade dos números reais, $|CD| = |EF|$, o que significa que $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. E pela reflexividade dos números reais, temos que $|AB| = |AB|$, o que significa que, $\overline{AB} \cong \overline{AB}$. □

Proposição 1.20 (H10). *Se $A * B * C$ e $A' * B' * C'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

Demonstração. $A * B * C$, então $|AB| + |BC| = |AC|$; $A' * B' * C'$, então $|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \implies |AB| = |A'B'|$; $\overline{BC} \cong \overline{B'C'} \implies |B'C'| = |BC|$. Assim, $|AB| + |BC| = |A'B'| + |B'C'|$. Daí $|AC| = |A'C'|$, o que implica $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. □

² $AB = |AB|$ representa a medida do segmento \overline{AB} conforme definição 1.2.

Proposição 1.21 (H11). *Dado um ângulo $\angle BAC$, e dada uma semirreta $\overrightarrow{A'B'}$, então existe uma única semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ num dado lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.*

Demonstração. Considere o ângulo $\angle BAC$ que denotaremos por $\angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, de medida $\alpha \in (0, \pi)$ e a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. Pelo Axioma B.5(4), em cada semiplano limitado por $\overleftrightarrow{A'B'}$ existe uma bijeção entre os números reais α em $(0, \pi)$ e o conjunto de semirretas \overrightarrow{k} com origem em A' . Assim, existe uma única semirreta \overrightarrow{k} com origem em A' , num dado semiplano determinado por $\overleftrightarrow{A'B'}$, tal que a medida $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{k})^{rad} = \alpha$. Tome C' , um ponto de \overrightarrow{k} diferente da origem. Assim, $\angle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \cong \angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, ou seja, $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$. □

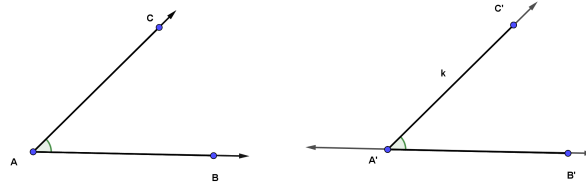


Figura 3: Ângulos $\angle BAC$ e $\angle B'A'C'$

Proposição 1.22 (H12). *Se $\angle A \cong \angle B$ e $\angle B \cong \angle C$, então $\angle A \cong \angle C$. Além disso, todo ângulo é congruente a si mesmo.*

Demonstração. Sejam os ângulos $\angle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$, $\angle \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BG}$ e $\angle \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CI}$, que denotaremos por $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente. E sejam $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, as medidas dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, respectivamente e $\angle A \cong \angle B$ e $\angle B \cong \angle C$, isto é $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$. Pela transitividade dos números reais, temos que se $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$, então $\alpha = \gamma$. Logo, $\angle A \cong \angle C$. Além disso, pela propriedade reflexiva dos números reais $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$ e $\gamma = \gamma$, temos $\angle A \cong \angle A$, $\angle B \cong \angle B$ e $\angle C \cong \angle C$. □

Proposição 1.23 (H13). *Se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles são congruentes a dois lados e o ângulo de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Pelo Axioma B.6, se dois lados e o ângulo interno entre eles de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados e ao ângulo interno de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes. Logo $B.6 \implies H.13$. □

Proposição 1.24 (Axioma de Dedekind (H14)). *Suponha que o conjunto de todos os pontos da reta r seja a união disjunta $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de dois conjuntos não vazios tais que nenhum ponto de um esteja entre dois pontos do outro. Então existe um único ponto O em r tal que um dos subconjuntos é igual a uma semirreta de origem O e o outro subconjunto é igual ao seu complemento.*

Demonstração. Vamos mostrar que o conjunto dos números reais satisfaz a proposição (Axioma de Dedekind). Para isso, vamos mostrar que o Axioma do supremo (H.8) implica no Axioma de Dedekind (H.14). Inicialmente mostraremos que o axioma de Dedekind vale na reta real \mathbb{R} .

Sejam Σ_1 e Σ_2 dois subconjuntos de \mathbb{R} com as seguintes propriedades:

- (i) Σ_1 e Σ_2 são ambos não vazios;
- (ii) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \mathbb{R}$;
- (iii) Σ_1 e Σ_2 são disjuntos;
- (iv) nenhum elemento de um conjunto está entre dois elementos do outro conjunto.

Queremos mostrar que todo elemento de um conjunto é menor que todo elemento do outro e que existe um elemento que separa os dois conjuntos. Primeiramente, vamos mostrar que um dos conjuntos é limitado superiormente. Como Σ_1 e Σ_2 são ambos não vazios, sejam $a \in \Sigma_1$ e $b \in \Sigma_2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $a < b$. Temos, assim, que b é cota superior de Σ_1 , pois, caso contrário, existiria $c \in \Sigma_1$ com $c > b$. Se isso ocorresse, no entanto, teríamos que b seria um elemento de Σ_2 entre dois elementos de Σ_1 , o que contradiz (iv).

Suponha então Σ_1 o conjunto limitado superiormente. Pelo axioma do supremo (R.8), Σ_1 possui um supremo em \mathbb{R} . Seja $b = \sup \Sigma_1$. Então todo número real $x > b$ não pertence a Σ_1 . Mas, todo elemento de \mathbb{R} ou pertence a Σ_1 ou pertence a Σ_2 , pois $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \mathbb{R}$ e $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Assim:

- Se $b \in \Sigma_1$, então Σ_2 é o conjunto de todos os números reais $y > b$.
- Se $b \notin \Sigma_1$, então Σ_2 é o conjunto de todas as cotas superiores de Σ_1 , isto é, todos números reais $y \geq b$.

Logo,

$$\Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}; x < b\} \text{ e } \Sigma_2 = \{y \in \mathbb{R}; y \geq b\} \text{ ou } \Sigma_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \text{ e } \Sigma_2 = \{y \in \mathbb{R}; y > b\}.$$

Note, finalmente, que a validade do Axioma de Dedekind em retas é, agora, consequência imediata da bijeção que estas têm com o conjunto dos números reais. \square

Proposição 1.25 (H15). *Para toda reta r e todo ponto P fora de r existe **no máximo uma** reta s por P paralela a r .*

Demonstração. O Axioma B.7 garante a existência de uma única reta s passando por P e paralela a r . Portanto, B.7 \implies H.15. \square

1.6 OS AXIOMAS DE HILBERT IMPLICAM OS AXIOMAS DE BIRKHOFF

Nesta seção mostraremos, com exceção dos postulados da régua e do transferidor, que os axiomas de Hilbert implicam os axiomas de Birkhoff.

Proposição 1.26 (B1). *Se A e B são dois pontos distintos, então existe uma e apenas uma reta, que denotaremos por \overleftrightarrow{AB} , passando por ambos os pontos.*

Demonstração. Pelo Axioma H.1, para todo ponto A e todo ponto B distinto de A , existe uma única reta r que passa por A e B . Portanto, H.1 \implies B.1. \square

Faremos, no que se segue, uma inversão na ordem de justificativa dos axiomas de Birkhoff, uma vez que a função distância facilita a obtenção dos demais resultados. Desse modo, começamos justificando o Axioma B.3 (axioma da régua).

Completaremos, antes de mais nada, a demonstração da equivalência entre os axiomas de Dedekind e do supremo já iniciada pela Proposição 1.24.

Dada uma reta qualquer r , precisamos estabelecer uma ordem para seus pontos para que então o axioma do supremo possa, nela, ser devidamente enunciado.

Sejam A e B dois pontos distintos de uma reta r . Definiremos em r uma ordem $<$, de modo que $A < B$.

Dados dois pontos $C, D \in r$, intuitivamente, olhamos para a reta de modo que B esteja à direita de A , e, caso D esteja à direita de C dizemos que $C < D$.

Formalmente, tal afirmação é mais delicada para ser definida. Caso A, B, C, D sejam quatro pontos distintos de r , dizemos que $C < D$ caso uma das hipóteses abaixo se verifiquem:

- $C * A * B$ e $(A * D * B$ ou $A * B * D)$;
- $A * C * B$ e $A * B * D$;
- $C * A * B, D * A * B$ e $C * D * A$;
- $A * C * B, A * D * B$ e $A * C * D$;
- $A * B * C, A * B * D$ e $A * C * D$.

Além disso, se C e D são pontos distintos de r , mas A, B, C, D não são quatro pontos distintos de r , $C < D$ se:

- $C = A$ e $D = B$;
- $C = A$ e $(A * D * B$ ou $A * B * D)$;
- $D = B$ e $(C * A * B$ ou $A * C * B)$;
- $D = A$ e $C * A * B$;
- $C = B$ e $A * B * D$.

Deixamos a cargo do leitor interessado a verificação de que tal relação é, de fato, uma relação de ordem em r .

Proposição 1.27. *O axioma de Dedekind H.14 implica o axioma do supremo R.8.*

Demonstração. Seja C um conjunto de r limitado superiormente que possui uma cota superior. Tome Σ_2 o conjunto formado por todo x de r tal que $x > c$ pra todo $c \in C$ e seja Σ_1 o seu complementar. Vamos mostrar que Σ_1 e Σ_2 , assim construídos, satisfazem as quatro propriedades do axioma de Dedekind (H.14):

1. Σ_1 e Σ_2 são ambos não vazios, pois C tem uma cota superior, isso garante que Σ_2 é não vazio. Como Σ_1 contém C , Σ_1 é não vazio.
2. $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \mathbb{R}$, pois Σ_1 é complementar de Σ_2 .
3. Σ_1 e Σ_2 são disjuntos, pois Σ_1 e Σ_2 são complementares.
4. Nenhum elemento de um conjunto está entre dois elementos do outro. Pois como Σ_2 é o conjunto de todas as cotas superiores de C , então se dois números a e b

distintos são cotas superiores de C , qualquer número entre a e b também é cota superior. O que significa que Σ_2 é necessariamente convexo, isto é, se Σ_2 contém os extremos de um intervalo, então contém o intervalo inteiro. Assim, não existe um elemento de Σ_1 entre dois elementos de Σ_2 . Dados dois elementos de Σ_1 , isto é, dois elementos que não são cotas superiores de C , não existe nenhum elemento entre eles que seja cota superior de C . Se assim não o fosse, um dos extremos teria de ser cota superior de C .

Então, existe um elemento b que separa Σ_1 e Σ_2 , isto é $b \geq x$ para todo $x \in \Sigma_1$ e $b \leq y$ para todo $y \in \Sigma_2$.

Vamos mostrar que b é o supremo de C . Isto é, devemos mostrar que b é cota superior de C e que não existe nenhuma cota superior menor que b . Como $b \geq x$ para todo $x \in \Sigma_1$ e $C \subset \Sigma_1$ temos que b é, de fato, cota superior de C . Resta-nos mostrar que b é a menor cota superior de C .

Temos duas possibilidades para b : $b \in \Sigma_1$ ou $b \in \Sigma_2$.

Caso $b \in \Sigma_1$, temos $b \geq x$ para todo $x \in \Sigma_1$, mas $b \notin \Sigma_2$, ou seja, não vale que $b > c$ para todo elemento de C . Como $C \subset \Sigma_1$, temos que $b = c$ pra algum $c \in C$. Nesse caso, é fácil ver que b é máximo de C , pois $b \geq c$ para todo $c \in C$ e $b \in C$. Logo não existe cota superior de C menor que b .

Caso $b \in \Sigma_2$ temos $b > x$ para todo $x \in \Sigma_1$. Se existisse b' cota superior de C menor que b , teríamos que $b' \in \Sigma_1$. Com $b' < b$, não vale que $b' \geq x$ para todo $x \in \Sigma_1$, ou seja, existe $b'' \in \Sigma_1$ tal que $b'' > b'$. Como $b'' \in \Sigma_1$, temos $b'' \notin \Sigma_2$ e, portanto não vale $b'' > x$ para todo $x \in C$, ou seja, existe $c \in C$ tal que $c \geq b''$. Logo existe $c > b'$ o que contradiz b' ser cota superior de C .

□

A demonstração do próximo teorema, a partir dos axiomas de Hilbert, é feita em [15, p. 22, 23].

Teorema 1.28 (Teorema dos ângulos externos). *Um ângulo externo de um triângulo é maior do que cada um dos dois ângulos internos não adjacentes.*

A proposição a seguir, apesar de ser o décimo resultado deduzido por Euclides em (9), sua demonstração é mais delicada do que aparenta à primeira vista. Sua demonstração é consequência do Teorema do Ângulo Externo conforme Greenberg em [13, p. 121].

Proposição 1.29 (Ponto médio). *Todo segmento \overline{AB} admite um único ponto médio M , ou seja, M tal que $A * M * B$ e $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.*

Proposição 1.30 (B3). *Para toda reta r existe uma bijeção $x : r \rightarrow \mathbb{R}$, denominada sistema de coordenada (ou parametrização) de r tal que, para todo par de pontos A, B em r , vale:*

$$|AB| = |x(A) - x(B)|$$

Dizemos que $x(A)$ é a coordenada de A (no sistema de coordenada x).

Observação 1.31. *Notamos que a próxima demonstração é apenas um esboço da prova desse resultado, uma vez que vários detalhes foram deixados a cargo do leitor.*

Para termos um sistema de coordenadas x preservando distâncias é necessário antes de mais nada fixar no plano (de Hilbert) uma distância. Assim, precisamos fixar um segmento \overline{PQ} de comprimento unitário. Sugerimos no que se segue, um possível caminho para demonstrar esta proposição, sem a utilização do axioma das paralelas. Começamos construindo uma $x : r \rightarrow \mathbb{R}$ para, então, mostrar que ela satisfaz as propriedades do Axioma B.2. Tal construção será realizada em duas etapas.

Primeiro, construiremos uma bijeção \tilde{x} entre subconjuntos densos \tilde{r} e $\tilde{\mathbb{R}}$ de r e \mathbb{R} , respectivamente.

Observação 1.32. *Dizemos que um conjunto $\tilde{r} \subset r$ é denso em r se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $P \in r$, existe um ponto $\tilde{P} \in \tilde{r}$ tal que \tilde{P} está no segmento $\overline{AB} \subset r$ de ponto médio P e comprimento 2ε . Uma definição análoga vale pra \mathbb{R} .*

Segundo, construímos a bijeção $x : r \rightarrow \mathbb{R}$ cuja restrição a \tilde{r} é igual a \tilde{x} .

Para simplificar a construção de \tilde{x} , no entanto, olharemos para sua inversa $\tilde{y} : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{r}$.

Tomaremos $\tilde{\mathbb{R}}$ o conjunto das frações com denominador inteiro do tipo 2^n para n natural, ou seja,

$$\tilde{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}; a \in \mathbb{Z}, b = 2^n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vamos agora construir \tilde{y} .

1. Vamos definir \tilde{y} em $\mathbb{Z} \subset \tilde{\mathbb{R}}$.

Para associar cada número inteiro a um ponto da reta, primeiramente associamos um ponto O qualquer de r , a que denominamos origem de r , ao número 0. Em seguida, pelo Axioma H.8 existe P_1 em r tal que $\overline{OP_1} \cong \overline{PQ}$. Definimos $\tilde{y}(P_1) = 1$. Assim, o número 1 está associado ao ponto $P_1 \in r$, que está a uma unidade de distância do ponto O , no que chamamos sentido positivo de r .

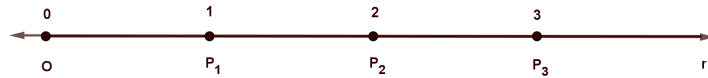


Figura 4: Cobrindo os inteiros não negativos

O Axioma H.8 garante a existência de um único ponto P_2 na reta r (ver figura 4), que dista uma unidade de P_1 no sentido positivo de r . O ponto P_2 associamos ao número inteiro 2 e, de modo análogo, o número inteiro 3 se associa ao ponto $P_3 \in r$ a uma unidade de distância de P_2 no sentido positivo de r . Repetindo o processo, associamos todos os números inteiros positivos aos pontos P_1, P_2, P_3, \dots



Figura 5: Cobrindo os inteiros negativos

Na semirreta oposta à $\overrightarrow{OP_1}$, analogamente aos números inteiros positivos, associamos os números inteiros negativos (figura 5). O número -1 estará associado ao ponto P_{-1} a uma unidade de distância de O no sentido negativo de r . O número -2 estará associado ao ponto P_{-2} a uma unidade de P_{-1} no sentido negativo de r . Continuando o processo, associamos todos os números inteiros negativos a pontos da reta r .

2. Vamos definir \tilde{y} nos demais pontos de $\tilde{\mathbb{R}}$.

Seja, assim, $P_n = \tilde{y}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Se $P_{(2n+1)/2}$ é o ponto médio de $\overline{P_n P_{(n+1)}}$, definimos $\tilde{y}((2n+1)/2) = P_{(2n+1)/2}$. Assim, cobrimos todas as frações do tipo $(a/2)$ com $a \in \mathbb{Z}$.

Definimos \tilde{y} em $\tilde{\mathbb{R}}$ de maneira indutiva em $n \in \mathbb{N}$:

Para $a \in \mathbb{Z}$, seja $P_{(2a+1)/2^n}$ o ponto médio de $\overline{P_{a/2^{(n-1)}}P_{(a+1)/2^{(n-1)}}}$. Defina $\tilde{y}((2a+1)/2^n) = P_{(2a+1)/2^n}$.

De posse de $\tilde{x} = \tilde{y}^{-1}$, vamos construir $x : r \rightarrow \mathbb{R}$.

Ainda usando a notação apresentada na construção de \tilde{y} , temos que

$$\tilde{r} = \left\{ P_{a/b} \in r; a \in \mathbb{Z}, b = 2^n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Considere em r a ordem utilizada no argumento antes da Proposição 1.27 com $A = O$ e $B = P_1$.

Seja agora $C \subset \tilde{r}$ limitado superiormente e $C_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos índices dos pontos de C , ou seja

$$C_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{R}; P_q \in C\}.$$

É fácil ver que $C_{\mathbb{R}}$ é limitado superiormente em \mathbb{R} .

Defina

$$x(\sup C) = \sup C_{\mathbb{R}}.$$

Para completar a demonstração deve-se mostrar agora que a função x é, de fato, bijetora. Deve-se portanto, mostrar a sobrejetividade e injetividade de x . Por fim, deve-se mostrar que, para todos $A, B \in r$, a função x satisfaz a igualdade $|AB| = |x(A) - x(B)|$. Deixamos esses detalhes (que não são poucos) a cargo do leitor interessado.

Um caminho alternativo e didaticamente interessante à demonstração acima seria munir os pontos da reta r de operações correspondentes a adição e multiplicação de números reais. Isso é conteúdo clássico de construções com régua e compasso (que podem ser deduzidas a partir dos axiomas de Hilbert). Provaria-se então que r munido dessas operações forma um corpo ordenado completo, sendo, portanto, isomorfo a \mathbb{R} . O viés de tal caminho é que, para definição do produto em r , usualmente usa-se o axioma das paralelas. Assim, não teríamos a equivalência dos axiomas de geometria neutra (todos menos os axiomas das paralelas) de Hilbert e Birkhoff.

Proposição 1.33. *Num triângulo $\triangle ABC$, se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ então $\angle B \cong \angle C$.*

Demonstração. Dado o triângulo $\triangle ABC$, considere a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C, C \leftrightarrow B$. Dessa correspondência temos dois lados e o ângulo entre eles do $\triangle ABC$, respectivamente congruentes a dois lados e o ângulo entre eles do $\triangle ACB$: $\angle A \cong \angle A$, pelo Axioma H.12 e $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, por hipótese. Portanto, pelo

caso LAL, $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ e pela definição de congruência de triângulos, os ângulos correspondentes $\angle B$ e $\angle C$ são congruentes. \square

Segundo (13, p.122) pode-se deduzir dos axiomas de Hilbert os teoremas seguintes que nos permitem medir comprimentos de segmentos e ângulos. Veremos que tais medidas são equivalentes àquelas constantes nos axiomas de Birkhoff.

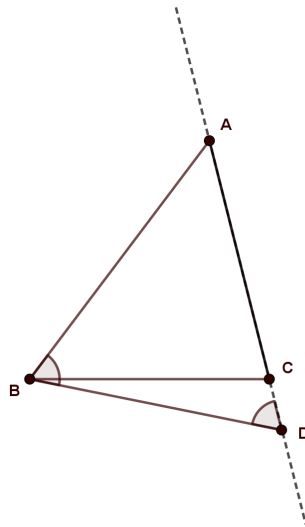


Figura 6: Triângulo $\triangle ABC$, com $|AB| > |AC|$

No que se segue, dizemos que $\overline{AB} < \overline{CD}$ se existe B' com $C * B' * D$ e $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$. Dizemos também que $\angle BAC > \angle B'A'C'$ se existe D no interior do ângulo $\angle BAC$ (lembrar definição apresentada logo após o Axioma H.10) tal que $\angle BAD \cong \angle B'A'C'$.

Observação 1.34. As notações $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\angle BAC > \angle B'A'C'$, quando utilizadas neste trabalho, têm os mesmos significados que $m(\overline{AB}) < m(\overline{CD})$ e $m(\angle BAC) > m(\angle B'A'C')$, respectivamente.

Proposição 1.35. Num triângulo $\triangle ABC$, $\overline{AB} > \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle C > \angle B$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha $\triangle ABC$ com $\overline{AB} > \overline{AC}$. Tome D tal que $A * C * D$ e $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (figura 6). Daí:

- (1) $\angle ABC < \angle ABD$ (C é ponto interno de $\angle ABD$)
- (2) $\angle ABD \cong \angle BCD$ (Proposição 1.33)
- (3) $\angle BDC < \angle ACB$ (Teorema 1.28)

Logo, $\angle ABC < \angle ACB$.

(\Leftarrow) Suponha $\triangle ABC$, com $\angle C > \angle B$.

(1) Se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, pela Proposição 1.33 teríamos $\angle B \cong \angle C$, o que é absurdo pois, por hipótese $\angle C > \angle B$.

(2) Se $\overline{AB} < \overline{AC}$ então, pelo Axioma H.8, existe D tal que $A * B * D$ e $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ (figura 7). Assim:

- $\angle ADC \cong \angle ACD$, pois $\triangle ADC$ é isósceles;
- $\angle ACB < \angle ACD$, pois B é um ponto interno ao ângulo $\angle ACD$;
- $\angle ABC > \angle ADC$, pois $\angle ABC$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle BDC$;

Então, $\angle ABC > \angle ACD > \angle ACB$, o que implica que $\angle B > \angle C$. Mas esse resultado contradiz a hipótese de que $\angle C > \angle B$, logo é absurdo. E portanto, só pode ocorrer $\overline{AB} > \overline{AC}$. \square

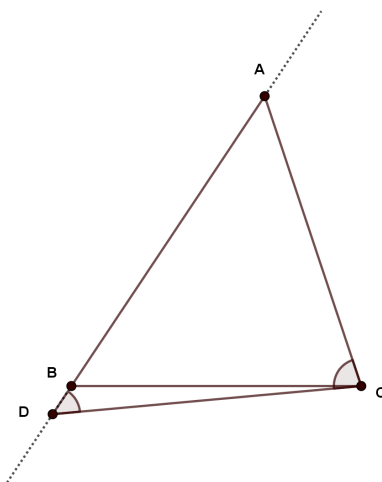


Figura 7: Triângulo $\triangle ABC$, com $m(\angle C) > m(\angle B)$

Observação 1.36. As proposições 1.33 e 1.35 são as proposições 2.24 e 2.25, demonstradas a partir dos axiomas de Hilbert para não ocorrer raciocínio circular.

Proposição 1.37 (B2). Existe uma função $|PQ|$ definida para todo par de pontos P e Q do plano, tal que:

1. $|PQ| = 0$ se $P = Q$;

2. $|PQ| > 0$ se $P \neq Q$;
3. $|PQ| = |QP|$;
4. (Desigualdade Triangular) $|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C$.

Demonstração. Dados dois pontos P e Q do plano e r a reta que contém P e Q . E sejam, pela Proposição 1.30, os números reais α e β associados aos pontos P e Q , num sistema de coordenadas x em r , respectivamente. Então, a medida do segmento \overline{PQ} está associada ao número real $|\alpha - \beta|$. Assim, temos que:

- (1) $P = Q \implies \alpha = \beta \implies |PQ| = |\alpha - \beta| = 0$;
- (2) $P \neq Q \implies \alpha \neq \beta \implies |PQ| = |\alpha - \beta| > 0$;
- (3) $|PQ| = |\alpha - \beta|$ e $|QP| = |\beta - \alpha|$, como $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$, então $|PQ| = |QP|$.
- (4) (Desigualdade triangular) Dados A, B e C , queremos mostrar que $|AC| \leq |AB| + |BC|, \forall A, B, C$.

- Se A, B e C são colineares, então:

$$A * B * C \implies |AC| = |AB| + |BC|;$$

$$A * C * B \implies |AC| + |CB| = |AB| \implies |AC| = |AB| - |CB| < |AB| + |CB|;$$

$$B * A * C \implies |BA| + |AC| = |BC| \implies |AC| = |BC| - |BA| < |BC| + |BA|.$$

- Se A, B e C são não colineares, então são vértices do triângulo $\triangle ABC$. Vamos mostrar que $|AC| < |AB| + |BC|$.

Seja o triângulo $\triangle ABC$, tome D um ponto da semirreta oposta a \overrightarrow{BA} tal que $|BD| = |BC|$ (ver figura 8). Como $A * B * D$, então $|AD| = |AB| + |BD|$. Mas $|BD| = |BC|$, então $|AD| = |AB| + |BC|$. Como o triângulo $\triangle BCD$ é isósceles, temos $\angle DCB \cong \angle ADC$. No triângulo $\triangle DAC$, temos $m(\angle ADC) < m(\angle ACD)$ e pela Proposição 1.35, $|AC| < |AD|$. Logo, $|AC| < |AB| + |BC|$.

□

Proposição 1.38 (B4). *Se r é uma reta qualquer do plano \mathbb{P} , existem dois subconjuntos não vazios de \mathbb{P} , HP_1 e HP_2 , denominados **semiplanos**, tais que:*

1. (União disjunta) O plano \mathbb{P} é a união disjunta de r , HP_1 e HP_2 .
2. (Convexidade) Se P e Q estão no mesmo semiplano, então o segmento \overline{PQ} está contido nesse mesmo semiplano;

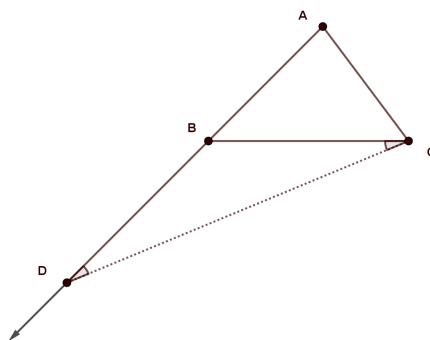


Figura 8: Desigualdade triangular

3. Se P e Q estão em semiplanos opostos, então o segmento \overline{PQ} contém um único ponto de r .

Demonstração. Considere a reta r , num plano \mathbf{P} .

- (1) Pela Proposição 2.2, há um ponto P que não está em r .
- (2) Pelo Axioma H.2, existe um ponto O em r .
- (3) Por H.5, há um ponto Q tal que $Q * O * P$
- (4) Assim, P e Q não estão ambos no mesmo semiplano (estão em lados opostos de r).
- (5) Seja X um ponto distinto de P e Q que não está em r . Se X e Q não estão no mesmo semiplano então, pelo Axioma H.7(2), X e P estão ambos no mesmo semiplano (mesmo lado de r). Portanto, o conjunto de pontos que não estão em r é a união dos semiplanos HP_1 e HP_2 .
- (6) Suponha, por absurdo, que X estivesse em ambos os semiplanos HP_1 e HP_2 . Então, pelo Axioma H.7(1), P e Q também estariam no mesmo semiplano, contrariando a etapa (4). Portanto, HP_1 e HP_2 são disjuntos.

□

Observação 1.39. A Proposição 2.2, citada em 1.38, pode ser demonstrada a partir dos axiomas de Hilbert. Bastando substituir as Proposições 1.11 e 1.13 pelos Axiomas H.1 e H.3, respectivamente.

Justifiquemos agora o “axioma do transferidor”.

Proposição 1.40 (B5). Para cada ângulo $\angle \vec{h}, \vec{k}$ existe um número real $m(\angle \vec{h}, \vec{k})$ no intervalo $[0, \pi]$, chamado **medida** (em radianos) do ângulo, tal que:

1. Se \vec{h} e \vec{k} são a mesma semirreta, a sua medida é 0; se elas são semirretas opostas sua medida é π ;
2. a soma da medida de um ângulo com a de seu suplementar é π ;
3. se \vec{j} está no interior do ângulo $\angle \vec{h}, \vec{k}$, então $m(\angle \vec{h}, \vec{j}) + m(\angle \vec{j}, \vec{k}) = m(\angle \vec{h}, \vec{k})$;
4. se uma semirreta \vec{k} com origem em O está na reta r , então em cada semiplano limitado por r , existe uma bijeção entre o conjunto de semirretas \vec{j} com origem O e os números reais α em $(0, \pi)$ de tal maneira que α é igual à medida $m(\angle \vec{j}, \vec{k})$ do ângulo $\angle \vec{j}, \vec{k}$; e
5. nas condições do item (4), se a semirreta \vec{j} é determinada por \vec{OP} , onde P é um ponto de \vec{j} , então o ângulo α depende continuamente de P , isto é, se P' é uma variável ponto e α' seu ângulo correspondente, então $(\alpha - \alpha') \rightarrow 0$ a medida que $|PP'| \rightarrow 0$.

Um caminho possível para demonstrar a proposição faz uso do Princípio elementar de continuidade (Teorema 2.35) e da existência e unicidade de perpendiculares.

Teorema 1.41 (Princípio elementar de continuidade). Se um segmento tem um de seus pontos no interior de um círculo e outro no seu exterior, então o segmento intersecta o círculo.

A demonstração de tal resultado segue as ideias apresentadas em (13) e é baseada somente nos axiomas de Hilbert.

Proposição 1.42 (IV Postulado de Euclides). Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

Proposição 1.43. Para cada reta r e cada ponto P existe uma reta que passa por P perpendicular a r .

As demonstrações das proposições 1.42 e 1.43, a partir dos axiomas de Hilbert, encontram-se em [13, p. 92] e [13, p. 88, 89], respectivamente.

Teorema 1.44. Para toda reta r e todo ponto P , a perpendicular a r , passando por P , é única.

Demonstração. Ou P está em r , ou P não está em r .

1. Se P está em r : A Proposição 1.42 e o Axioma H.11 garantem que a perpendicular é única.
2. Se P não está em r : Seja s a reta perpendicular a r passando por P . Se s não é única, suponha t outra perpendicular a r passando por P . Seja Q a intersecção das retas r e s , e R a intersecção das retas r e t . Os pontos P , Q e R formam o triângulo $\triangle PQR$. Seja $A \in r$ tal que $Q * R * A$. Daí $\angle Q \cong \angle PRA$ o que, pela Proposição 1.28, é absurdo.

□

Vamos agora construir a função m da Proposição 1.40 que associa a cada ângulo um número real em $[0, \pi]$.

Dada uma reta r e um ponto $O \in r$, seja a circunferência \mathcal{C} com centro O intersecando r nos pontos A e A' tal que $|OA| = |OA'| = 1$. Considere a semicircunferência \mathcal{C}' determinada pela intersecção de \mathcal{C} com um dos semiplanos determinados por r .

Considere o sistema de coordenadas x da reta r tal que $x(O) = 0$ e $x(A) = 1$.

Dado um ponto $P \in \mathcal{C}'$, tome por P uma perpendicular a reta r . Seja Q o ponto de intersecção da perpendicular com r . Defina m por:

$$m(\angle AOP) = \arccos(x^{-1}(Q)).$$

Dado, agora, um ângulo qualquer $\angle X$ existe um único P tal que $\angle AOP \cong \angle X$. Defina, por fim, $m(\angle X) = m(\angle AOP)$.

Definido m , observemos, então, as propriedades da Proposição 1.40:

- (1) Seja P um ponto da semicircunferência \mathcal{C}' . Por tal ponto passa a semirreta \overrightarrow{OP} que, com a semirreta \overrightarrow{OA} , forma o ângulo $\angle POA$. A medida (em radianos) do ângulo $\angle POA$ será o número real associado ao ponto P .
- (2) Se $P = A$, então $m(\angle POA) = m(\angle AOA) = 0$, isto é, o ponto P está associado ao número 0. Se $P = A'$, então $m(\angle POA) = m(\angle A'OA) = \pi$, isto é, o ponto P está associado ao número real π . Observe que:
 Se $P = A$, então \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OA} representam a mesma semirreta.
 Se $P = A'$, então \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OA} são semirretas opostas, pois $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OA'}$ é semirreta oposta a \overrightarrow{OA} .

- (3) Sejam os pontos P e Q de \mathcal{C}' , associados aos números p e q , respectivamente. Se $p + q = \pi$, então $m(\angle POA) + m(\angle QOA) = \pi$ e portanto os ângulos $\angle POA$ e $\angle QOA$ são suplementares.
- (4) Sejam os pontos P e Q de \mathcal{C}' , associados aos números p e q , respectivamente, tal que $p > q$. Da definição de radianos,

$$m(\angle POQ) = \frac{|p - q|}{1} = |p - q|$$

Temos:

- $m(\angle QOA) = |q - 0| = |q| = q$;
 - $m(\angle POA) = |p - 0| = |p| = p$;
 - $m(\angle POQ) = |p - q| = p - q$, logo,
 - $m(\angle POQ) + m(\angle QOA) = p - q + q = p = m(\angle POA)$
- (5) Basta observar que, na construção de m , o sistema de coordenada x é bijetor, a função arccos é bijetora e a “projeção ortogonal” Q de P é única.

Proposição 1.45 (B6). *Se os dois lados e o ângulo interno entre eles de um dado triângulo são congruentes, respectivamente, a dois lados e o ângulo interno de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes. Isto é, os demais lados e ângulos são também congruentes.*

Demonstração. Pelo Axioma H.13, se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles são congruentes a dois lados e o ângulo de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes. Logo, H.13 \implies B.6. □

Proposição 1.46. *Dada uma reta r e um ponto P não pertencente a r , pode-se sempre traçar uma reta s paralela a r passando por P .*

Demonstração. Seja a reta r e o ponto P fora de r . Pode-se traçar a reta t passando pelo ponto P e intersectando r . Pelo Axioma H.11, é possível traçar a reta s passando por P tal que os ângulos correspondentes, determinados pela transversal t e as retas r e s , sejam congruentes. Assim, pelo Teorema 1.28, as retas r e s são paralelas. Pois do contrário, teríamos um triângulo com um ângulo externo congruente a um ângulo interno não adjacente. □

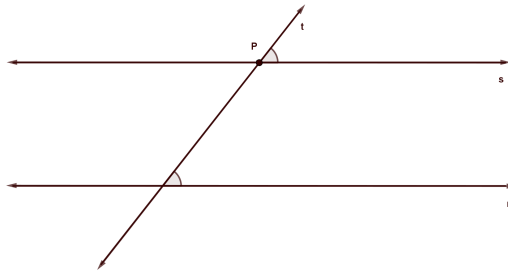


Figura 9: Existência da paralela

Proposição 1.47 (B7). *Dada uma reta qualquer e um ponto fora dela, existe uma única reta por tal ponto que nunca intersecta a reta dada.*

Demonstração. Dada uma reta r e um ponto P fora de r , pelo Axioma H.15, existe no máximo uma reta paralela a r passando pelo ponto P . E pela Proposição 1.46, existe pelo menos uma reta com tal propriedade. Portanto, existe uma única reta s passando por P que não intersecta a reta r . \square

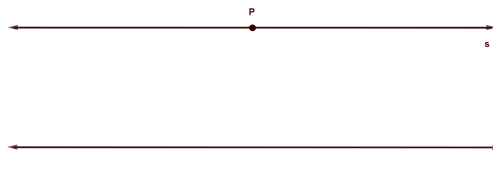


Figura 10: Unicidade da paralela

A GEOMETRIA NEUTRA OU ABSOLUTA

A geometria neutra é a geometria que se obtém a partir dos axiomas de Hilbert, excluindo-se o Axioma das paralelas ou a partir dos axiomas de Birkhoff, também excluindo-se o Axioma das paralelas. Neste capítulo, iremos mostrar alguns resultados importantes da geometria neutra a partir dos axiomas de Birkhoff. Como mostrado no Capítulo 1, os axiomas de Birkhoff implicam os axiomas de Hilbert. Assim, como ferramenta para demonstrar os próximos resultados temos, além dos axiomas de Birkhoff, os axiomas de Hilbert como proposições que foram demonstradas a partir dos axiomas de Birkhoff.

2.1 INCIDÊNCIA

Proposição 2.1. *Duas retas concorrentes se intersectam num único ponto.*

Demonstração. Sejam r e s duas retas distintas e não paralelas. Como r e s não são paralelas, possuem pelo menos um ponto em comum. Vamos mostrar que tal ponto, que chamaremos de P , é único. Considere um outro ponto P' comum às retas r e s . Pelo Axioma B.1, se P e P' fossem distintos, haveria uma única reta que passaria por ambos, e portanto as retas r e s seriam coincidentes. Então, P é o único ponto comum a r e s . □

Proposição 2.2. *Dada uma reta, existe pelo menos um ponto fora dela.*

Demonstração. Da Proposição 1.13(H3), temos que existem três pontos distintos A, B e C não colineares. Qualquer que seja a reta r , pelo menos um desses pontos não pertence a ela, caso contrário teríamos A, B e C colineares.

□

Proposição 2.3. *Dado um ponto, existem ao menos duas retas que o contém.*

Demonstração. Dados dois pontos distintos P e Q , pela Proposição 2.2 existe pelo menos um ponto R fora de \overleftrightarrow{PQ} . Assim, segue que $\overleftrightarrow{PR} \neq \overleftrightarrow{PQ}$ e portanto, por P passam as retas \overleftrightarrow{PR} e \overleftrightarrow{PQ} . □

Proposição 2.4. *Dado um ponto, existe ao menos uma reta que não o contém.*

Demonstração. Dado um ponto P , pela Proposição 2.3 existem ao menos duas retas, r e s passando por P . Tome $Q \neq P$ em r e $R \neq P$ em s . A reta \overleftrightarrow{QR} não contém o ponto P . □

2.2 ORDEM

Teorema 2.5 (Pasch). *Sejam um triângulo $\triangle ABC$ e r uma reta intersectando \overline{AB} num ponto entre A e B . Então r intersecta \overline{AC} ou \overline{BC} . Se C não está em r , então r não intersecta ambos os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} .*

Demonstração. Ou C está em r ou não.

Se C está em r (figura 11), então A e B não estão em r pois, por hipótese, A , B e C são não colineares e r intersecta \overline{AB} entre A e B . Portanto, A e B estão em lados opostos de r .

Se C não está em r , pela Proposição 1.17(H7) (separação do plano), C está do mesmo lado de A ou do mesmo lado de B em relação a r . Se C está do mesmo lado de A em relação a r , logo r intersecta \overline{BC} e não intersecta \overline{AC} . De modo análogo, se C está do mesmo lado de B em relação a r , então r intersecta \overline{AC} e não intersecta \overline{BC} . □

Teorema 2.6 (Barra transversal). *Se X está no interior de $\angle BAC$, então a semirreta \overrightarrow{AX} intersecta \overline{BC} .*

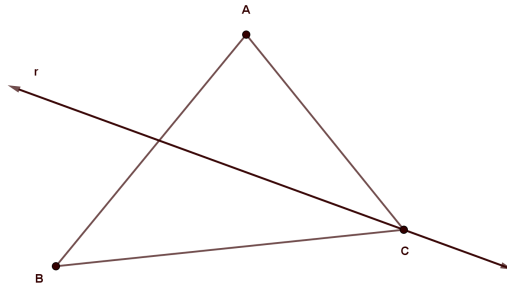


Figura 11: Teorema de Pasch: Caso $C \in r$

Demonstração. Tome D tal que $B * A * D$. $X \notin \overleftrightarrow{DB} = \overleftrightarrow{AB}$ pois X está no interior de $\angle BAC$, logo $\overleftrightarrow{DB} \neq \overleftrightarrow{AX}$. Como A pertence à ambas as retas, então elas são concorrentes e se intersectam em A . O que implica que $\overline{DB} \cap \overleftrightarrow{AX} = A$, visto que $A \in \overline{DB}$. Pelo Teorema 2.5 (Pasch), aplicado no $\triangle BDC$, temos que \overleftrightarrow{AX} intersecta \overline{BC} ou \overline{DC} .

Seja $E \in \overleftrightarrow{AX}$ tal que $E * A * X$ (figura 12). Como B e D estão em lados opostos de \overleftrightarrow{AC} , segue que D e X também estão em lados opostos de \overleftrightarrow{AC} e, portanto, todos os pontos de \overline{DC} estão no lado de \overleftrightarrow{AC} oposto a todos os pontos de \overleftrightarrow{AX} . Portanto, \overleftrightarrow{AX} não cruza \overline{DC} .

Agora devemos mostrar que a semirreta \overrightarrow{AE} , oposta a \overleftrightarrow{AX} , não intersecta \overline{BC} ou \overline{DC} . Basta notar que ambos os segmentos estão em lados opostos a \overrightarrow{AE} em relação à reta \overleftrightarrow{DB} . Assim, a única possibilidade é que \overleftrightarrow{AX} intersecta \overline{BC} . \square

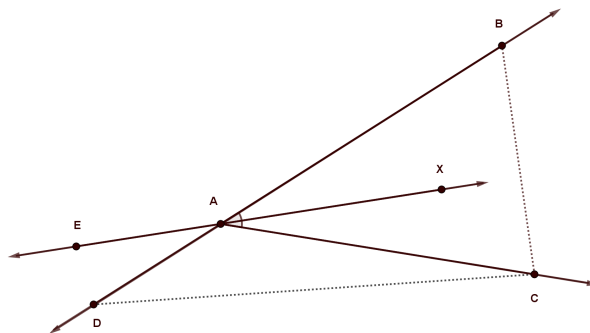


Figura 12: Barra transversal

2.3 DEMAIS RESULTADOS

Definição 2.7. Dizemos que dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é π .

Definição 2.8. Duas semirretas opostas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} formam, com outra semirreta \overrightarrow{AD} , o par de ângulos $\angle BAD$ e $\angle DAC$ que chamamos de par linear.

Proposição 2.9. Se dois ângulos formam um par linear, então a soma de suas medidas é igual a π , ou seja, os ângulos são suplementares.

Demonstração. Sejam as semirretas opostas \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{AB} e a semirreta \overrightarrow{AC} em um dos semiplanos determinados por \overleftrightarrow{BD} , formando o par linear $\angle DAC$ e $\angle CAB$. Vamos mostrar que esses dois ângulos são suplementares.

Pelo Axioma B.5(1), a medida do ângulo $\angle DAB$, como foi construído, é igual a π . Como o ângulo $\angle DAB$ é composto pelos ângulos $\angle DAC$ e $\angle CAB$, devemos ter $m(\angle DAC) + m(\angle CAB) = m(\angle DAB) = \pi$. \square

Proposição 2.10. Suplementos de ângulos congruentes são congruentes.

Demonstração. Considere os ângulos $\angle A$, $\angle A'$, $\angle B$ e $\angle B'$, tais que:

- (1) $\angle A$ é suplementar de $\angle B$;
- (2) $\angle A'$ é suplementar de $\angle B'$;
- (3) $\angle B \cong \angle B'$.

Queremos mostrar que $\angle A \cong \angle A'$, isto é, que $m(\angle A) = m(\angle A')$.

$m(\angle A) + m(\angle B) = \pi$ e $m(\angle A') + m(\angle B') = \pi$, da definição de ângulos suplementares. Mas, $m(\angle B) = m(\angle B')$ pois, por hipótese, $\angle B \cong \angle B'$. Então, $m(\angle A) + m(\angle B) = m(\angle A') + m(\angle B) \implies m(\angle A) = m(\angle A')$. Portanto, pela definição de congruência de ângulos, $\angle A \cong \angle A'$. \square

Definição 2.11. Sejam duas retas r e s e uma terceira reta t concorrente a ambas em B e E , respectivamente. Sejam A e C pontos de r tais que $A * B * C$, e D e F pontos de s tais que $C * D * E$. Suponha que A e C estão do mesmo lado de t . Dizemos que os pares:

- $\angle ABD$ e $\angle BDE$;
- $\angle CBD$ e $\angle BDC$;

são alternos internos.

Teorema 2.12 (Alternos Internos). *Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas.*

Demonstração. Considere as retas r e r' cortadas pela transversal t nos pontos B e B' , respectivamente. Sejam os pontos A e C em r e A' e C' em r' tais que $A * B * C$, $A' * B' * C'$, A e A' estejam do mesmo lado de t , C e C' estejam do mesmo lado de t e, $\angle A'B'B \cong \angle CBB'$ (ver figura 13).

Vamos supor que r e r' se intersectam em um ponto D do mesmo lado que C e C' em relação à t . Pela Proposição 1.18(H8), existe um ponto $E \in \overrightarrow{B'A'}$ tal que $\overline{B'E} \cong \overline{BD}$. Pelo caso LAL, temos $\triangle B'BD \cong \triangle BB'E$. Donde $\angle DB'B \cong \angle EBB'$. Assim, pela Proposição 2.10 e pela Proposição 1.21(H11), $\angle EBB'$ é suplementar de $\angle DBB'$, pois $\angle DB'B$ é suplementar de $\angle EB'B$. Daí, E estaria em r , o que significa que r e r' teriam dois pontos E e D em comum, o que, de acordo com a Proposição 2.1, é impossível. Portanto, as retas r e r' são paralelas. □

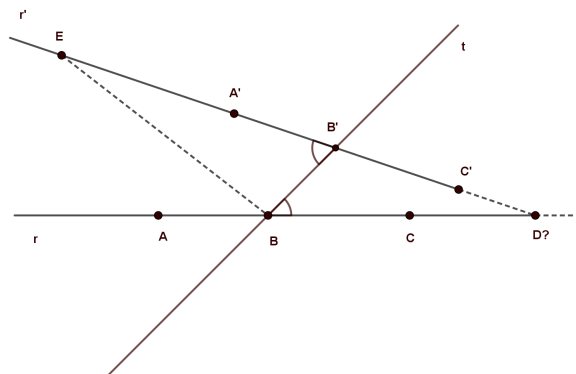


Figura 13: Ângulos alternos internos

Definição 2.13. Um ângulo é dito reto se ele é igual ao seu suplementar. Duas retas que formem um ângulo reto são ditas perpendiculares.

Proposição 2.14. *Um ângulo congruente a um ângulo reto é um ângulo reto.*

Demonstração. Tome o ângulo reto $\angle A$, seu suplementar $\angle B$ e $\angle A'$, tal que $\angle A' \cong \angle A$. Vamos mostrar que $\angle A'$ é um ângulo reto, isto é, que $\angle A'$ é congruente ao seu suplementar.

- (1) $m(\angle A) + m(\angle B) = \pi$, da definição de ângulos suplementares;
- (2) $\angle A \cong \angle B$ pois, pela definição, um ângulo reto é congruente ao seu suplementar;
- (3) $m(\angle A) = m(\angle B)$, da definição de congruência de ângulos;
- (4) $\angle A' \cong \angle A$, por hipótese.

Assim:

Por (4), temos que $m(\angle A') = m(\angle A)$. De (1) e (4), obtemos $m(\angle A') + m(\angle B) = \pi$, o que, pelo Axioma B.5(2), significa que $\angle A'$ e $\angle B$ são suplementares. Por (3), temos $m(\angle A) = m(\angle B)$ e, como $m(\angle A') = m(\angle A)$, então $m(\angle A') = m(\angle B) \implies \angle A' \cong \angle B$. Logo, $\angle A'$ é congruente ao seu suplementar e, portanto, é um ângulo reto. \square

Teorema 2.15 (Existência de Perpendicular). *Para toda reta r e todo ponto P , existe uma perpendicular a r passando por P .*

Demonstração. Primeiro suponha que P não está em r e sejam A e B dois pontos quaisquer de r (Proposição 1.12(H2)). Pela Proposição 1.21(H11), existe uma única semirreta \overrightarrow{AX} no lado oposto de P em relação a r tal que $\angle XAB \cong \angle PAB$ (ver figura 14). Pela Proposição 1.18(H8), existe um ponto P' em \overrightarrow{AX} tal que $\overline{AP'} \cong \overline{AP}$. $\overline{PP'}$ intersecta r em um ponto Q , pela definição de lados opostos de r . Assim, se $Q = A$, então pela definição de perpendicular temos que $\overline{PP'} \perp r$ e se $Q \neq A$, então $\triangle PAQ \cong \triangle P'AQ$ (LAL). E portanto, $\angle PQA \cong \angle P'QA$ (ângulos correspondentes). Então, pela definição de perpendicular, $\overleftrightarrow{PP'} \perp r$.

Agora suponha que P está em r . Como pela Proposição 2.2, existem pontos que não estão em r . Tome A , um desses pontos. Podemos construir (como no caso anterior, em que $P \notin r$) uma reta s perpendicular a r passando por A e obtemos assim um ângulo reto $\angle AP'P$, tal que $P' = r \cap s$ (ver figura 15). Pela Proposição 1.21(H11), existe uma única semirreta \overrightarrow{PB} do mesmo lado que A em relação a r , de modo que $\angle BPP' \cong \angle AP'P$. Pela Proposição 2.14 o ângulo $\angle BPP'$ é reto e daí, como o lado $\overrightarrow{PP'}$ está em r , o lado \overrightarrow{PB} é perpendicular a r . Então, a reta \overleftrightarrow{PB} que contém \overrightarrow{PB} é também perpendicular a r . \square

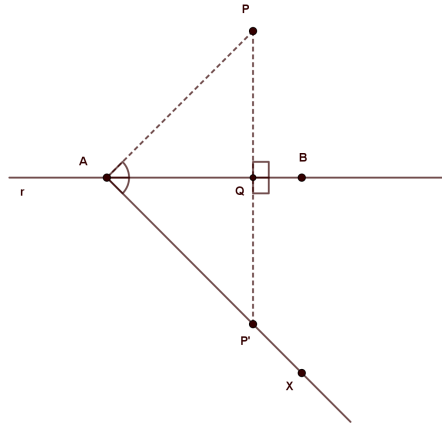


Figura 14: Existência de perpendicular: $P \notin r$

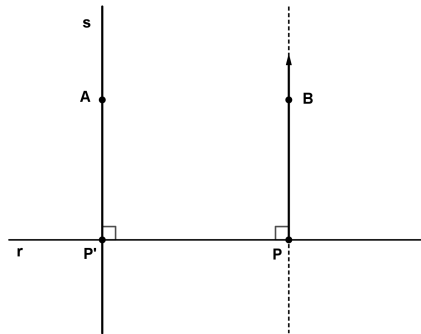


Figura 15: Existência de perpendicular: $P \in r$

Proposição 2.16 (Ângulos Opostos pelo Vértice). *Dois ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes.*

Demonstração. Considere duas retas r e s , concorrentes no ponto B , os pontos A e D em r , um em cada lado de B , os pontos C e E em s , um em cada lado de B (ver figura 16). Vamos mostrar que $\angle ABE \cong \angle CBD$ (o caso $\angle ABC \cong \angle EBD$ é análogo).

- (1) $\angle ABE$ e $\angle EBD$ formam um par linear (por construção);
- (2) $\angle ABE$ e $\angle EBD$ são suplementares (pela Proposição 2.9);
- (3) $m(\angle ABE) + m(\angle EBD) = \pi$ (pela definição de suplementar);
- (4) $\angle EBD$ e $\angle CBD$ formam um par linear (por construção);
- (5) $\angle EBD$ e $\angle CBD$ são suplementares (pela Proposição 2.9);
- (6) $m(\angle EBD) + m(\angle CBD) = \pi$ (pela definição de suplementar).

Assim, de (3) e (6) obtemos $m(\angle ABE) + m(\angle EBD) = m(\angle EBD) + m(\angle CBD) \implies m(\angle ABE) = m(\angle CBD)$ e portanto, $\angle ABE \cong \angle CBD$. \square

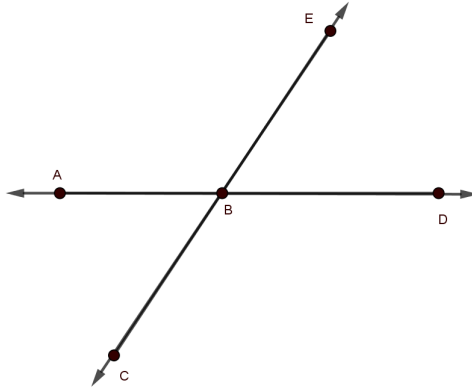


Figura 16: Ângulos opostos pelo vértice

Teorema 2.17 (Ângulo Exterior). *O ângulo exterior de um triângulo é sempre maior que cada ângulo interno não adjacente.*

Demonstração. Dado $\triangle ABC$, um triângulo qualquer. Tome um ponto P em \overrightarrow{BC} tal que $B * C * P$. Denotando por $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$ os ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$, vamos mostrar que $m(\angle ACP) > m(\angle A)$.

Seja Q o ponto médio de \overline{AC} e seja R o ponto da semirreta \overrightarrow{BQ} , tal que $B * Q * R$ e $\overline{QR} \cong \overline{QB}$ (figura 17). Assim, temos:

- (1) $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ e $\overline{BQ} \cong \overline{RQ}$, por construção;
- (2) $\angle BQA \cong \angle RQC$, ângulos opostos pelo vértice;
- (3) $\triangle BQA \cong \triangle RQC$, pelo Axioma B.6(LAL);
- (4) $\angle A \cong \angle QCR$, da congruência $\triangle BQA \cong \triangle RQC$.

E como R é interno ao ângulo $\angle ACP$, aplicando o Axioma B.5(3) aos ângulos $\angle ACP$, $\angle ACR$ e $\angle RCP$, temos que $m(\angle ACP) > m(\angle A)$.

De modo análogo, vamos mostrar que $m(\angle ACP) > m(\angle B)$:
Tome P' na semirreta \overrightarrow{AC} , tal que $A * C * P'$. Daí, $\angle BCP' \cong \angle ACP$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Seja Q' o ponto médio de \overline{BC} e seja R' o ponto da semirreta $\overrightarrow{AQ'}$, tal que $A * Q' * R'$ e $\overline{Q'R'} \cong \overline{Q'A}$ (figura 18). Então:

- (1) $\overline{BQ'} \cong \overline{Q'C}$ e $\overline{AQ'} \cong \overline{R'Q'}$, por construção;
- (2) $\angle BQ'A \cong \angle R'Q'C$, ângulos opostos pelo vértice;
- (3) $\triangle ABQ' \cong \triangle R'CQ'$, pelo Axioma B.6(LAL);
- (4) $\angle B \cong \angle Q'CR'$, da congruência $\triangle ABQ' \cong \triangle R'CQ'$.

E como R' é interno ao ângulo $\angle BCP'$, aplicando o Axioma B.5(3) aos ângulos $\angle BCP'$, $\angle BCR'$ e $\angle R'CP'$, temos que $m(\angle BCP') > m(\angle B)$. Como $\angle BCP' \cong \angle ACP$, então $m(\angle ACP) > m(\angle B)$. □

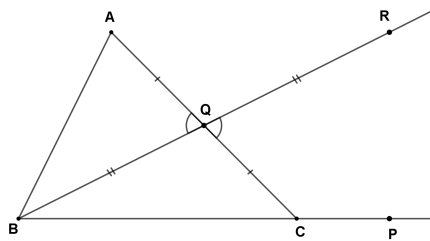


Figura 17: Ângulo exterior: $m(\angle ACP) > m(\angle A)$

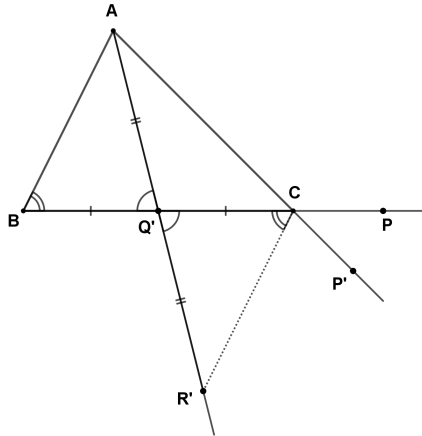


Figura 18: Ângulo exterior: $m(\angle ACP) > m(\angle B)$

Corolário 2.18. *Quaisquer dois ângulos internos de um triângulo (também qualquer) somam menos que π .*

Demonstração. Dado um triângulo ABC e duas retas paralelas r e s conforme a figura 19, vamos mostrar que a soma de quaisquer dois ângulos internos é menor que π .

Pelo Teorema 2.12, $\angle ABC \cong \angle BAD$ e $\angle ACB \cong \angle CAF$. Pela Proposição 2.16, $\angle DAE \cong \angle CAF$. Pelo Axioma B.5(3), $m(\angle BAD) + m(\angle DAE) = m(\angle BAE)$ e $m(\angle BAE) + m(\angle EAG) = \pi$. Como $m(\angle EAG) \neq 0$ (pelo Axioma B.5(1)), $m(\angle BAE) < \pi$. Assim, $m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = m(\angle BAD) + m(\angle DAE) = m(\angle BAE) < \pi$. De modo análogo, podemos mostrar que $m(\angle BAC) + m(\angle ABC) = m(\angle BAC) + m(\angle BAD) = m(\angle CAD) < \pi$ e $m(\angle BAC) + m(\angle ACB) = m(\angle BAC) + m(\angle CAF) = m(\angle BAF) < \pi$. \square

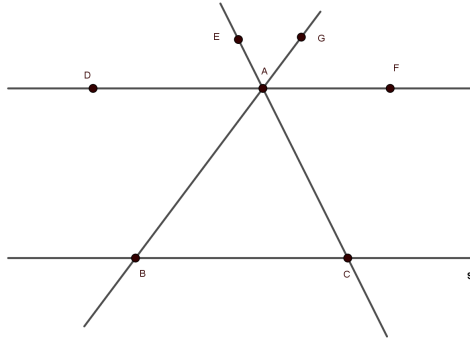


Figura 19: Soma de dois ângulos internos de um triângulo qualquer

Corolário 2.19. *Se um triângulo tem um ângulo reto, então seus outros dois ângulos são agudos.*

Demonstração. Seja o triângulo ABC , retângulo em B e seja o ponto D , de modo que $D * B * C$. Assim, $\angle DBA$ e $\angle ABC$ formam um par linear e, portanto, $\angle DBA$ é reto. Pelo Teorema 2.17, $m(\angle ABD) > m(\angle BCA)$, portanto $m(\angle BCA) < \pi/2$. Analogamente, $m(\angle ABD) > m(\angle BAC)$, portanto $m(\angle BAC) < \pi/2$.

\square

Definição 2.20. Dizemos que B é ponto médio do segmento \overline{AC} se:

- $A * B * C$, e:
- $|AB| = |BC|$.

Proposição 2.21. *Todo segmento admite um único ponto médio.*

Demonstração. Dado o segmento \overline{AC} (ver figura 20). Pelo Axioma B.3, tome um sistema de coordenadas f para a reta \overleftrightarrow{AC} tal que $f(A) = 0$ e $f(C) > 0$.

Se B está entre A e C , então $|AB| = |x - 0| = x$ e $|BC| = |(|AC| - x)| = |AC| - x$. Assim, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ é equivalente a $x = |AC| - x$, ou $2x = |AC|$, ou $x = \frac{|AC|}{2}$. Logo, pela bijeção com \mathbb{R} dada pelo Axioma B.3, existe um único número x e, portanto um único ponto B . □

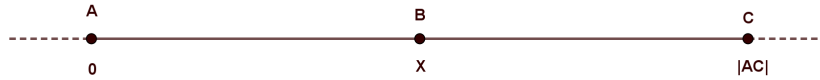


Figura 20: Ponto médio do segmento \overline{AC}

Teorema 2.22 (Saccheri-Legendre). *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a π .*

Demonstração. Suponha o contrário, que a soma dos ângulos internos no triângulo ABC é igual a $\pi + \delta$ (ver figura 21), onde $\delta > 0$. Seja D o ponto médio de \overline{BC} e, o segmento \overline{AD} é prolongado até E , de modo que $\overline{AD} \cong \overline{DE}$. Pelo Teorema 2.16 (ângulos OPV), $\angle BDA \cong \angle CDE$ e pelo caso LAL, $\triangle ABD \cong \triangle ECD$. Assim, são congruentes os dois ângulos marcados como 1 e são congruentes os dois ângulos marcados como 2. Daí os triângulos ABC e AEC possuem soma dos ângulos internos igual a $m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3) + m(\angle 4)$. Como o ângulo $\angle A = \angle 2 + \angle 3$, o triângulo AEC possui um ângulo (A ou E) menor ou igual a metade de $\angle A$ do triângulo original ABC .

Repetindo esse processo indefinidamente, obtemos uma sequência de triângulos, cada um com soma das medidas dos ângulos internos igual a $\pi + \delta$ e com um ângulo interno menor ou igual a $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ do ângulo $\angle A$, do triângulo ABC e portanto, eventualmente menor que δ . Mas isso é absurdo, pois a soma dos outros dois ângulos excederia π , o que contraria o Corolário 2.18. □

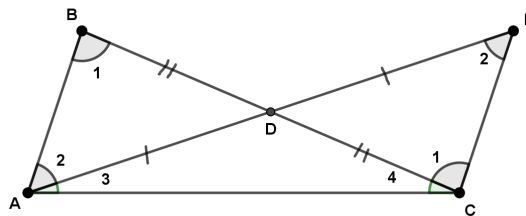


Figura 21: Teorema de Saccheri-Legendre

Corolário 2.23. *A soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a medida do ângulo externo remoto, ou seja, não adjacente a esses ângulos.*

Demonstração. Dados o triângulo $\triangle ABC$, e $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tal que $B * C * D$, vamos mostrar que $m(\angle B) + m(\angle A) \leq m(\angle ACD)$.

- (1) Pelo Axioma B.5(1), $m(\angle BCD) = \pi$;
- (2) por B.5(3), $m(\angle C) + m(\angle ACD) = m(\angle BCD) = \pi$;
- (3) $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) \leq \pi$ (Teorema 2.22).

Portanto, $m(\angle A) + m(\angle B) \leq m(\angle ACD)$. De modo análogo, podemos mostrar que $m(\angle A) + m(\angle C)$ é menor ou igual a medida do ângulo externo remoto, o mesmo valendo para $m(\angle B) + m(\angle C)$. \square

Proposição 2.24. *Num triângulo $\triangle ABC$, se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ então $\angle B \cong \angle C$.*

Demonstração. Dado o triângulo $\triangle ABC$, considere a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C, C \leftrightarrow B$. Dessa correspondência temos dois lados e o ângulo entre eles do $\triangle ABC$, respectivamente congruentes a dois lados e o ângulo entre eles do $\triangle ACB$: $\angle A \cong \angle A$, pela Proposição 1.22 e $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, por hipótese.

Portanto $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ e, pela definição de congruência de triângulos, os ângulos correspondentes $\angle B$ e $\angle C$ são congruentes. \square

Proposição 2.25. *Num triângulo $\triangle ABC$, $|AB| > |AC|$ se, e somente se, $m(\angle C) > m(\angle B)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha $\triangle ABC$ com $|AB| > |AC|$. Tome D tal que $A * C * D$ e $|AB| = |AD|$. Daí:

- (1) $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$ (C é ponto interno de $\angle ABD$)
- (2) $\angle ABD \cong \angle BDC$ (Proposição 2.24)
- (3) $m(\angle BDC) < m(\angle ACB)$ (Teorema 2.17)

Logo, $\angle ABC < \angle ACB$.

(\Leftarrow) Suponha o triângulo $\triangle ABC$, com $m(\angle C) > m(\angle B)$. Vamos mostrar que $|AB| > |AC|$.

- Se $|AB| = |BC|$, então pela Proposição 2.24 teríamos $\angle B \cong \angle C$, o que é absurdo pois, por hipótese $m(\angle C) > m(\angle B)$.

• Se $|AB| < |AC|$, então existe D tal que $A * B * D$ e $|AD| = |AC|$. Assim:

(1) $\angle ADC \cong \angle ACD$, pois $\triangle ADC$ é isósceles;

(2) $m(\angle ACB) < m(\angle ACD)$, pois B é interno ao ângulo $\angle ACD$;

(3) $m(\angle ABC) > m(\angle ADC)$, pois $\angle ABC$ é ângulo externo do triângulo $\triangle BDC$;

Então, $m(\angle ABC) > m(\angle ACD) > m(\angle ACB)$. Daí devemos ter $m(\angle B) > m(\angle C)$. O que é absurdo pois, por hipótese, $m(\angle C) > m(\angle B)$.

Então, só pode ocorrer $|AB| > |AC|$. □

Corolário 2.26 (Hipotenusa). *Num triângulo retângulo os ângulos não retos são agudos e a hipotenusa é sempre maior que os catetos (individualmente).*

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em B . $m(\angle B) = \frac{\pi}{2}$, pois $\triangle ABC$ é retângulo em B . Pelo Teorema 2.22 (Saccheri-Legendre), $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) \leq \pi$, então $m(\angle A) + m(\angle C) \leq \frac{\pi}{2}$. Logo, $m(\angle A) < \frac{\pi}{2}$ e $m(\angle C) < \frac{\pi}{2}$. Como $m(\angle A) < m(\angle B)$ e $m(\angle C) < m(\angle B)$, pela Proposição 2.25 temos que $|AC| > |BC|$ e $|AC| > |BA|$. □

Corolário 2.27 (Triângulo isósceles). *Num triângulo $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ se, e somente se, $\angle B \cong \angle C$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja o triângulo $\triangle ABC$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Então, segue imediatamente da Proposição 2.24 que $\angle B \cong \angle C$.

(\Leftarrow) Seja o triângulo $\triangle ABC$ tal que $\angle B \cong \angle C$. Pela Proposição 2.25, $|AB| > |AC| \iff \angle C > \angle B$ e $|AC| > |AB| \iff \angle B > \angle C$. Logo, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. □

Teorema 2.28 (Unicidade da perpendicular). *Para toda reta r e todo ponto P , a perpendicular a r passando por P , é única.*

Demonstração. Ou P está em r , ou P não está em r .

1. Se P está fora de r (figura 22). Seja s a reta perpendicular a r passando por P . Se s não é única, suponha t outra perpendicular a r passando por P . Seja $r \cap s = Q$ e $r \cap t = R$. Considere o triângulo $\triangle PQR$. Tome $A \in r$ tal que $Q * R * A$. Daí, $\angle PQR \cong \angle PRA$. O que é absurdo, pois contraria o Teorema 2.17.

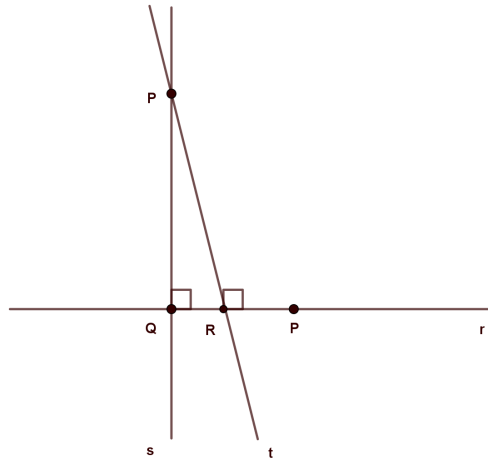


Figura 22: Unicidade da perpendicular

2. Se P está em r . Seja s perpendicular a r passando por P . Tome uma semirreta \vec{k} em r com origem em P . Pelo Axioma B.5(4), existe uma única semirreta \vec{j} com origem em P , em um dos semiplanos determinados por r , de modo que $m(\angle \vec{k}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$. Assim, como \vec{j} é única em um dos semiplanos determinados por r , e está em s , temos que s também é única.

□

Proposição 2.29. Dados P ponto fora da reta r , A em r tal que $\overleftrightarrow{AP} \perp r$, B e C são pontos de r tais que $A * B * C$, então $|PC| > |PB|$.

Demonstração. Seja a reta r , P um ponto fora de r , A, B e C pontos de r tais que $A * B * C$ e $\overleftrightarrow{AP} \perp r$. Tome o ponto B' em r , tal que $B' * A * B * C$ e $|PB'| = |PB|$. Logo, o triângulo $(\triangle PB'B)$ é isósceles.

- (1) Pelo Corolário 2.27, $\angle PB'B \cong \angle PBB'$ ($\triangle PB'B$ é isósceles).
- (2) Pelo Teorema 2.17, $\angle PBB' > \angle PCB'$ ($\angle PBB'$ é ângulo externo de $\triangle PBC$). Logo, no triângulo $\triangle PB'C$, $\angle PB'C > \angle PCB'$.
- (3) Como $\angle PBB' \cong \angle PB'C > \angle PCB'$ então, no triângulo $\triangle PB'C$, temos pela Proposição 2.25 que $|PC| > |PB'| = |PB|$.

□

Teorema 2.30 (ALA). *Se dois ângulos e o lado entre eles de um triângulo são congruentes respectivamente a dois ângulos e o lado entre eles de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$. Seja G em \overline{DE} tal que $\overline{AB} \cong \overline{DG}$, então $\triangle ABC \cong \triangle DGF$ pelo Axioma B.6. Portanto, $\angle BCA \cong \angle GFD$, logo $\angle GFD \cong \angle EFD$. Como estes ângulos são congruentes, então, pelo Axioma B.5, \overrightarrow{GF} coincide com \overrightarrow{EF} . Portanto, G e E representam o mesmo ponto e assim temos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

Teorema 2.31 (LLL). *Se os três lados de um triângulo são congruentes respectivamente aos três lados de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle AEC$ dois triângulos com $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ e seja G a interseção entre os segmentos \overline{BE} e \overline{AC} . Então, $\triangle BCE$ e $\triangle BAE$ são triângulos isósceles, portanto $\angle ABG \cong \angle AEG$ e $\angle CBG \cong \angle CEG$ pelo Corolário 2.27. Então, $\angle ABC \cong \angle AEC$ pelo Axioma B.5. Logo, $\triangle ABC \cong \triangle AEC$ pelo Axioma B.6. \square

Teorema 2.32 (LAA). *Se dois ângulos e o lado não incluso entre eles de um triângulo são congruentes respectivamente a dois ângulos e o lado não incluso de um segundo triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$. Mostremos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Suponha $|BC| > |EF|$ (o caso $|EF| > |BC|$ é análogo). Existe $P \in \overline{BC}$ tal que $\overline{BP} \cong \overline{EF}$. Pelo Axioma B.6, obtemos $\triangle ABP \cong \triangle DEF$. Logo, $\angle APB \cong \angle DFE \cong \angle ACP$. Mas, pelo Teorema 2.17, isso é absurdo pois $\angle APB$ é um ângulo externo do $\triangle APC$. Portanto, o ponto P coincide com C e $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

O próximo teorema faz uso do conceitos de limite, funções contínuas e suas propriedades básicas. Ao leitor interessado em revisar tais ideias sugerimos (2).

Teorema 2.33. *Dados reta r , sistema de coordenadas x em r , e Z ponto fora de r , então:*

1. *A distância $|ZP|$ como função $x(P)$, onde P é ponto de r é uma função contínua, isto é, a função:*

- $$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
- $$x(P) \mapsto |ZP|$$
2. f como descrita acima, admite mínimo no ponto $x(B)$ onde $\overleftrightarrow{ZB} \perp r$, cresce quando P se afasta de B e tende a $+\infty$ quando $x(P) \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração. 1. A continuidade decorre da desigualdade

$$||ZP| - |ZQ|| \leq |PQ|.$$

Onde P e Q são pontos de r . Portanto, $|ZQ| \rightarrow |ZP|$ se $|PQ| \rightarrow 0$

2. Vamos mostrar que $|ZP| \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$
 Seja Q um ponto qualquer fixado de r tal que $|PQ| = k|ZQ|$, onde $k > 1$. Daí, temos, pela desigualdade triangular, que $|ZP| \geq |PQ| - |ZQ| = k|ZQ| - |ZQ| = (k - 1)|ZQ|$ que tende para $+\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$. Além disso, como $|ZP|$ é não negativo, é uma função contínua limitada inferiormente de modo que $|ZP| \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.
3. Seja y_0 o valor mínimo que $|ZP|$ assume para algum $x = x_0$ e y qualquer valor maior que y_0 . Então, pelo menos uma vez em cada lado de x_0 , $|ZP|$ assume o valor y . Logo, existem P_1 e P_2 em r de modo que $\triangle ZP_1P_2$ é isósceles e $\angle P_1 \cong \angle P_2$. Se B é o ponto médio de $\overline{P_1P_2}$, temos que $\triangle ZP_1B \cong \triangle ZP_2B$. Assim, os triângulos são retângulos pois $\angle ZBP_1$ e $\angle ZBP_2$ são congruentes e suplementares e, portanto, \overleftrightarrow{ZB} é perpendicular a r .
4. Vamos mostrar a unicidade do ponto B . Suponha o contrário, que exista o ponto $B' \in r$ tal que \overleftrightarrow{ZB} e $\overleftrightarrow{ZB'}$ sejam ambas perpendiculares a r . Mas as retas \overleftrightarrow{ZB} e $\overleftrightarrow{ZB'}$ se intersectam no ponto Z , o que contraria o Teorema 2.12 (ângulos alternos internos). Logo, $B = B'$.
5. Vamos mostrar que $|ZP|$ cresce quando P se afasta de B , isto é, quando x se afasta de x_0 . Se assim não o fosse, haveria outro par de pontos A e A' a mesma distância de Z e em lados opostos de B , tais que $\overleftrightarrow{ZA} \perp r$ e $\overleftrightarrow{ZA'} \perp r$. Mas, vimos que tais pontos distintos de B não existem.

□

Teorema 2.34 (Teorema do valor intermediário). *Dada a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, se k é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

Demonstração. Vamos provar que $f(a) < k < f(b)$ (o caso $f(b) < k < f(a)$ é análogo)

Seja $S = \{x; x \in [a, b] \text{ e } f(x) \leq k\}$. Assim, temos que $a \in S$, logo S é não vazio e limitado superiormente por b . E pelo axioma de completude, existe $c = \sup S$. Vamos mostrar que $f(c) = k$.

Dado $\epsilon > 0$, da continuidade de f , temos que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ quando $|x - c| < \delta$, isto é $f(x) - \epsilon < f(c) < f(x) + \epsilon$ para todo x no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Daí, existe $a' \in (c - \delta, c]$, pelas propriedades do supremo, tal que $a' \in S$, e então $f(c) < f(a') + \epsilon \leq k + \epsilon$.

Tomando $a'' \in (c, c + \delta)$, temos que $a'' \notin S$. Logo, $k - \epsilon < f(a'') - \epsilon < f(c)$. Logo, para todo $\epsilon > 0$, $k - \epsilon < f(c) < k + \epsilon$, portanto $f(c) = k$ é o único valor possível. \square

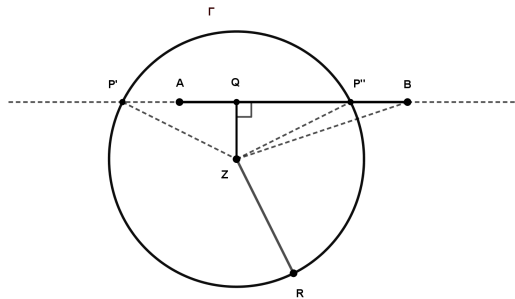


Figura 23: Princípio elementar de continuidade

Teorema 2.35 (Princípio elementar de continuidade). *Se um segmento tem um de seus pontos no interior de um círculo e outro no seu exterior, então o segmento intersecta o círculo.*

Demonstração. Sejam o círculo Γ de centro Z e raio $|ZR| = r$, o segmento $|AB|$ tal que A está no interior do círculo e B está no exterior e x um sistema de coordenadas da reta \overleftrightarrow{AB} orientado de A para B .

Considere a função contínua:

$$f : [x(A), x(B)] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x(P) \mapsto |ZP|,$$

onde P é um ponto do segmento \overleftrightarrow{AB} .

Como A é ponto interno do círculo, temos $|ZA| \leq r$; e, como

B é ponto externo, $r < |ZB|$.

Então, pelo Teorema do valor intermediário, decorre que existe $a \in [x(A), x(B)]$, tal que $f(a) = r$. Seja, então, $P' = x^{-1}(a)$. Temos que $P' \in \overline{AB}$ e $|ZP'| = r$. Logo P' é um ponto do segmento \overline{AB} que está sobre o círculo Γ .

□

- Teorema 2.36.** 1. Se a distância do centro de um círculo até uma reta é menor que o raio do círculo, então a reta intersecta o círculo em dois pontos.
2. Se a distância do centro de um círculo até uma reta é igual o raio do círculo, então a reta intersecta o círculo em um único ponto. Nesse caso, dizemos que a reta e o círculo são tangentes.
3. Se a distância do centro de um círculo até uma reta é maior que o raio do círculo, então a reta e o círculo têm intersecção vazia.

Demonstração. Considere o círculo Γ de centro Z e raio $|ZQ|$, a reta r e o sistema de coordenadas x para a reta r . Pelo Teorema 2.33, a função contínua

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x(P) \mapsto |ZP|$$

onde $P \in r$, existe $B \in r$ tal que $x(B)$ é ponto mínimo de f e $\overleftrightarrow{ZB} \perp r$ e $|ZP|$ aumenta conforme P se afasta de B . Então temos:

1. $|ZB|$ é a distância de Z até a reta r . Como $|ZP| < |ZQ|$ quando $P = B$, teremos $|ZP| = |ZQ|$ em dois pontos de r , P_1 e P_2 de modo que $P_1 * B * P_2$. Assim, $|ZP_1| = |ZP_2| = |ZQ|$ e portanto, r intersecta o círculo em P_1 e P_2 .
2. Se $|ZB| = |ZQ|$, então B está na circunferência. Logo, temos um ponto de intersecção entre a reta e o círculo, falta mostrar que ele é único. Como f cresce quando P se afasta de B , decorre que para $P \neq B$ temos $|ZP| > |ZQ|$. E, portanto B é o único ponto de r cuja distância a Z é igual ao raio do círculo Γ . Logo, r intersecta o círculo em um único ponto.
3. Se $|ZB| > |ZQ|$, então $|ZP| > |ZQ|$ para todo P de r , pois $|ZB|$ é o valor mínimo de f . Portanto, não existe $P' \in r$ tal que $|ZP'| = |ZQ|$ e daí a reta r não intersecta o círculo.

□

Proposição 2.37. Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, mas $(\angle A) > (\angle D)$, então $|BC| > |EF|$.

Demonstração. Construa na base \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$ um triângulo $\triangle ABC'$ tal que $\triangle ABC' \cong \triangle DEF$. Devemos mostrar que $|BC| > |BC'| \cong |EF|$. Em ambas as figuras, temos $|AC| \cong |AC'| = b$ e $|AB| = c$. Assim, temos três possibilidades, a depender das medidas dos dois ângulos em A . E nos três casos, C' é interno ao ângulo $\angle CAB$.

1º caso: $C' \in \overleftrightarrow{BC}$ (figura 24).

Como B e C' estão do mesmo lado de \overleftrightarrow{AC} , daí $B * C' * C$, então $|BC'| = |EF| < |BC|$.

2º caso: C' é interno ao ângulo $\angle ABC$ (figura 25).

Como $\overleftrightarrow{BC'}$ intersecta \overline{AC} no ponto P e C' está entre B e P . Pelo Teorema 2.17 (ângulo externo) no triângulo $\triangle PCC'$, temos $\angle CC'B > \angle PCC'$. Como $\triangle AC'C$ é isósceles, temos $\angle PCC' \cong \angle AC'C$. Pelo Axioma B.5, temos $m(\angle AC'C) > m(\angle PC'C)$, e pelo Teorema 2.17 (ângulo externo) no triângulo $\triangle CC'B$, temos $m(\angle PC'C) > m(\angle C'CB)$. Isto é, $m(\angle CC'B) > m(\angle PCC') = m(\angle AC'C) > m(\angle PC'C) > m(\angle C'CB)$. Então, pela Proposição 2.25, $|BC| > |BC'| = |EF|$.

3º caso: C é interno ao ângulo $\angle ABC'$ (figura 26).

Nesse caso, \overleftrightarrow{BC} intersecta $\overline{AC'}$ em um ponto Q . Como C' é interno ao ângulo $\angle CAB$, o mesmo ocorre com Q , então Q está entre B e C . Daí, decorre que, pelo Axioma B.5, $m(\angle CC'B) > m(\angle CC'A)$ e $m(\angle C'CA) > m(\angle C'CB)$ e, como $\triangle AC'C$ é isósceles, temos $\angle CC'A \cong \angle C'CA$. Isto é, $m(\angle CC'B) > m(\angle CC'A) = m(\angle C'CA) > m(\angle C'CB)$. Então, pela Proposição 2.25, $|BC| > |BC'| = |EF|$. □

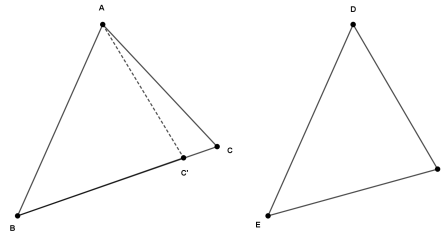


Figura 24: Proposição 2.37 - 1º caso

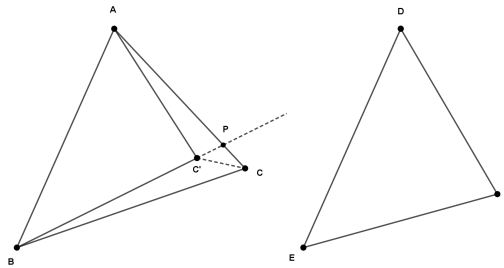


Figura 25: Proposição 2.37 - 2º caso

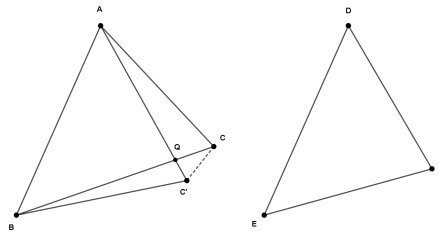


Figura 26: Proposição 2.37 - 3º caso

O QUINTO POSTULADO, SUA NEGAÇÃO E UMA NOVA GEOMETRIA

Neste capítulo falamos sobre Euclides e seu trabalho mais notório “Os Elementos”. Inicialmente, falamos sobre a geometria grega nos tempos de Euclides e como os gregos pensavam e faziam geometria. Também abordaremos as contribuições de Tales, Pitágoras, Aristóteles, Hipócrates e Eudoxo. Sobre Euclides, além dos Elementos, outras obras lhe são atribuídas, algumas foram preservadas e outras foram completamente perdidas.

Ainda neste capítulo, abordaremos a estrutura de “Os Elementos”, uma visão geral sobre cada um dos treze livros que o constituem, em especial o livro 1 o qual nos apresenta a geometria: as definições, postulados, noções comuns e 48 proposições.

A segunda parte deste capítulo trata do quinto postulado de Euclides e as várias tentativas de demonstração. Das tentativas de demonstrar o quinto postulado, alguns dos principais nomes foram Ptolomeu, Proclus, Nasir-Edin, Legendre, Wallis, Saccheri, Clairaut e Lambert.

A terceira parte aborda a geometria hiperbólica, seus precursores, elementos, algumas proposições e teoremas. Finalizamos com dois modelos para a geometria hiperbólica: o disco de Poincaré e o semiplano de Poincaré.

3.1 EUCLIDES E OS ELEMENTOS

3.1.1 *Geometria grega pré Euclides*

Durante o período clássico da Grécia (480 A.C. a 323 A.C.), segundo [7], a geometria dos matemáticos gregos antigos alcançou uma completude e perfeição de metodologia que nenhum outro ramo de seu conhecimento havia alcançado. Os gregos desenvolveram a ideia do método axiomático. Os grandes nomes nesse período foram Tales, Pitágoras, Platão e Aristóteles. Os gregos não foram os criadores da geometria. Eles a estudaram a partir dos antigos egípcios, babilônios e hindus e criaram princípios geométricos primitivos, tomando o que foi descoberto e fizeram avanços cruciais.

Na antiga Babilônia e no Egito, a matemática era cultivada principalmente como uma ferramenta e não levavam a geometria além do que era absolutamente necessário. Já os gregos, tinham uma forte tendência especulativa e desejo de descobrir as razões das coisas. A habilidade de pensar racionalmente e criticamente tornou-se a base do pensamento grego. Geômetras gregos expandiram a gama de domínio da geometria em novos tipos de figuras, curvas, superfícies e sólidos. Mudaram sua metodologia de prova e erro na abordagem de dedução lógica na matemática. Reconheceram que a geometria estuda formas abstratas das quais os objetos físicos são apenas aproximações.

TALES

Tales (635 - 543 A.C.) nasceu em Mileto, astrônomo e filósofo era muito respeitado pelos gregos antigos e nomeado como um dos sete homens sábios da Grécia. É relatado que ele viajou para o Egito. Foi o começo de uma investigação da geometria. Ele foi o primeiro a quem a dedução na matemática é atribuída, por isso ele é considerado o fundador da geometria grega [7].

Há, de acordo com [11], cinco proposições geométricas para as quais ele escreveu provas dedutivas (embora suas provas não tenham sobrevivido):

1. um círculo é dividido ao meio por qualquer diâmetro;
2. ângulos no triângulo opostos a dois lados de comprimentos iguais são iguais ou os ângulos de base dos triângulos isósceles são iguais;
3. ângulos opostos formados por linhas retas que se cruzam são iguais;

4. o ângulo inscrito dentro de um semicírculo é um ângulo reto;
5. se um triângulo tiver dois ângulos e um lado iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro triângulo, então os dois triângulos são iguais.

PITÁGORAS

Pitágoras (582-500 A.C.) nasceu em Samos, Jônia. Mais tarde, afirmam [7, 8], foi para a Itália, então colonizada por gregos e pode ter sido um estudante de Tales. Viajou para a Babilônia e Egito onde fez importantes desenvolvimentos em matemática, astronomia e teoria da música. Foi o primeiro a estabelecer a geometria, também iniciou a ideia de um sistema numérico e criou a escola pitagórica em Crotona na Magna Grécia onde hoje é o sudeste da Itália. Pitágoras é mais conhecido pelo teorema que leva o seu nome, que apesar de ser conhecido pelos babilônios 1000 anos antes, ele pode ter sido o primeiro a demonstrar dedutivamente. Os pitagóricos fizeram a grande descoberta de comprimentos incomensuráveis e números irracionais.

Uma das descobertas mais importantes da escola de Pitágoras, segundo [8], foi o fato de que a diagonal de um quadrado não é um múltiplo racional de seu lado, resultado este que provou a existência de números irracionais. Também mostraram que a diagonal de um quadrado é o lado de outro quadrado com o dobro da área do primeiro. A geometria dos pitagóricos, assim como a egípcia, estava muito preocupada com as áreas.

Pitágoras elevou a matemática ao nível de ciência, apesar de não ter deixado nenhum tratado de matemática. Sabe-se ainda que a aritmética, que era a base do seu sistema filosófico era tão admirada por ele quanto a geometria e ambas estavam intimamente ligadas. Sobre os pitagóricos, ainda podemos destacar que eles mostraram que o plano em torno de um ponto é completamente preenchido por seis triângulos equiláteros, quatro quadrados ou três hexágonos regulares. Provaram que os ângulos internos de um triângulo são iguais a dois ângulos retos e descobriram a construção dos sólidos regulares [8].

PLATÃO

Platão (427 a 347 A.C.), de acordo com [7], foi um filósofo muito estimado pelos gregos, um aluno e amigo próximo de Sócrates e também um dos mais importantes difusores da matemática da Grécia antiga. Estudou matemática com Teodoro em Cirene

e, inspirado por Pitágoras, fundou sua academia em Atenas em 387 A.C. Fez pouco trabalho original real, mas valiosas melhorias na lógica e métodos empregado em geometria. Em particular, ele estava convencido que a geometria era a chave para desvendar os segredos do universo.

Platão tornou-se conhecido como o criador dos matemáticos e sua academia ostentava alguns dos mais proeminentes deles. Muitas das definições nos Elementos de Euclides devem ser atribuídas à escola platônica. Platão acreditava que geometria devia ser realizada apenas com régua e compasso, nunca com instrumentos de medição como uma régua marcada ou um transferidor, porque essas eram ferramentas de um trabalhador e não de um estudioso [7].

Sua crença levou aos três problemas de construção clássicos:

1. trisseccionar um ângulo;
2. construir um cubo com o dobro do volume de um dado cubo;
3. construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado.

Platão exigiu de seus alunos definições precisas, suposições claramente estabelecidas e prova dedutiva lógica. Ele insistiu que as provas geométricas fossem demonstradas apenas com régua e compasso (seria demonstrado, mais de 2200 anos depois, que os três problemas são impossíveis de resolver apenas com régua e compasso).

Vários avanços matemáticos foram feitos por alunos e amigos de Platão. Também se deve a escola platônica avanços como: maior atenção à prova e à metodologia de raciocínio; definições mais precisas, hipóteses claramente estabelecidas e rigor lógico exigido. Além disso, a esfera, os sólidos regulares, o prisma, a pirâmide, o cilindro e o cone se tornaram objetos de estudos/investigação da escola platônica e Menaecmus, um estudante de escola platônica, descobriu as seções cônicas.

ARISTÓTELES

Aristóteles (384-322 A.C.), o maior aluno de Platão, afirma [5], escreveu um tratado sobre métodos de raciocínio usados em provas dedutivas. Foi professor de Alexandre, o Grande, e criador da lógica formal. Na lógica, de acordo com [16], Aristóteles acreditava que argumentos deveriam ser construídos a partir de silogismos. Também listou alguns princípios básicos de argumentação, por exemplo: o princípio da não-contradição que afirma que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo

tempo, e o princípio do terceiro excluído que afirma que uma proposição deve ser verdadeira ou falsa e não há outra possibilidade. Na matemática, destaca-se a distinção que fez entre número e magnitude sendo ambos da mesma categoria a qual chamou *quantidade*, de modo que dividiu-a em duas classes distintas: uma discreta (número) e outra contínua (magnitude). Aristóteles escreveu sobre diversos assuntos, dentre eles Política, Física, Biologia e Ética.

HIPÓCRATES

Hipócrates de Quios (460-380 A.C.), compôs uma obra sobre os elementos da geometria, mais de um século antes dos Elementos de Euclides. A apresentação da geometria como uma cadeia de proposições foi originada por Hipócrates. Também introduziu o uso de letras para designar pontos e retas, estudou e desenvolveu parcialmente o assunto sobre figuras semelhantes. A fama de Hipócrates se baseia principalmente com os estudos da quadratura do círculo. Além disso, foi o responsável pelo primeiro progresso real na solução do problema de duplicação do cubo. Mostrou que era possível reduzir o problema em outro mais simples, encontrar duas proporções médias entre um segmento e outro com o dobro do comprimento. Hipócrates contribuiu muito para a geometria do círculo no estudo desses dois problemas [7, 8].

EUDOXO

Eudoxo de Cnido (408-355 A.C.), também da Escola platônica, aumentou o número de teoremas gerais. Sua reputação baseia-se, principalmente, na sua teoria geral de proporção, numerosos resultados no estudo da seção áurea (divisão de um segmento em média e extrema razão), e a invenção do método de exaustão (que posteriormente foi aperfeiçoado por Arquimedes para calcular áreas curvilíneas, superfícies e volumes). Quanto aos sólidos geométricos, acrescentou muito conhecimento. Provou que os volumes de uma pirâmide e de um cone são exatamente um terço do volume de um prisma e de um cilindro, respectivamente, com bases e alturas iguais. Além disso, sua contribuição, nos estudos dos irracionais, foi uma teoria revisada da proporção aplicável a quantidades comensuráveis ou incommensuráveis (7).

3.1.2 *Euclides*

Muito pouco se sabe sobre a vida de Euclides. De acordo com [16], praticamente tudo o que se sabe sobre ele está contido em algumas frases do resumo de Proclo. Mesmo suas datas (nascimento e morte) e local de nascimento são desconhecidos. Segundo Proclo, ou a partir das suas citações, Euclides teria vivido durante o reinado de Ptolomeu I e teria nascido por volta de 300 A.C. É provável que ele recebera seu treinamento matemático dos alunos de Platão em Atenas. Eves [10] afirma que Euclides também ensinou matemática na Escola de Alexandria (escola criada por Ptolomeu I) e provavelmente teria fundado a Escola Alexandrina de Matemática.

Euclides foi o maior sistematizador de seu tempo. Segundo [7, 8], sua fama sempre se baseou principalmente em seu livro sobre geometria “Os Elementos”, o qual ele construiu a partir de algumas definições e axiomas. Nos seus Elementos, ele demonstrou proposições que antes haviam sido provadas sem muito rigor por seus predecessores e organizou grande parte do trabalho de Eudoxo e completou muito do trabalho de Teeteto. Embora sua fama seja quase exclusivamente devida aos Elementos, várias outras obras são atribuídas a Euclides:

Obras preservadas

- **Dados** - está relacionado com os seis primeiros livros dos Elementos. Parece direcionado aos que estudaram por completo os Elementos e desejam resolver novos problemas. Uma coleção de exercícios avançados, com aplicações da álgebra à geometria numa linguagem puramente geométrica;
- **Phaenomena (Fenômenos)** - geometria esférica e astronomia;
- **Óptica** - um estudo sobre perspectiva, desenvolve a hipótese de que a luz procede do olho, e não do objeto observado (teoria contrária à de Aristóteles);
- **Divisão de figuras** - um tratado sobre a divisão de figuras em partes que terão áreas em uma determinada proporção;

Obras perdidas

- **Locais de superfície** - Uma obra sobre lugares geométricos de superfície;
- **Catoptrica** - contendo proposições em reflexos de espelhos;

- **Sectio Canonis** - uma obra sobre intervalos musicais;
- **Pseudaria (ou falácias)** – Com a finalidade de preparar o leitor contra diversos tipos de falácias possíveis no raciocínio geométrico;
- **Porismas (corolários)** - uma obra de três volumes, provavelmente sobre geometria, sobre os quais houve muita especulação e uma das perdas mais lamentadas. Esta obra poderia conter algo próximo à Geometria Analítica, talvez o que mais se aproximaria da ideia de função. Teria ainda, segundo Pappus, 171 proposições;
- **Seções Cônicas** - em quatro livros que formaram a base da obra de Apolônio sobre seções cônicas.

3.1.3 *Os Elementos*

De acordo com [7], nos Elementos Euclides organizou o conhecimento geométrico desde a época de Tales (600 A.C) até a sua (aproximadamente 300 A.C) em uma estrutura lógica e coerente. Começando com 5 postulados, 23 definições e 9 axiomas, cada resultado poderia ser deduzido com base nos resultados anteriores e/ou nos postulados. Burton [7] afirma que apesar da maioria das definições serem provavelmente de livros anteriores, a genialidade de Euclides é evidenciada no formidável arranjo lógico dos teoremas (465 foram deduzidos nos Elementos), na seleção habilidosa das proposições, no desenvolvimento de provas e na estrutura axiomática. Nos Elementos, como observado por [16], o único padrão de medida é o ângulo reto, para ângulos. Na obra, com exceção de alguns pequenos inteiros, não há números nem medida.

Desde os tempos de Euclides várias cópias d'Os Elementos foram feitas e, novos lemas, emendas e comentários foram adicionados por outros editores. Uma dessas versões, a qual é base para as edições modernas, foi a de Theon de Alexandria de cerca de 700 anos depois de Euclides. Em 1808, foi descoberto no Vaticano um manuscrito de uma versão mais antiga do que a de Theon. A partir de uma comparação detalhada deste manuscrito com vários outros da versão de Theon, os estudiosos reconstruíram uma versão definitiva [16].

Com o passar do tempo, comenta [7] e [18], foi cada vez mais crescente a preocupação dos matemáticos com a axiomatização da geometria. A divisão feita por Euclides na disposição e formulação das proposições foi respeitada durante séculos e sua obra foi modelo para o ensino de geometria nesse período até que Legendre, de uma maneira

mais rigorosa e mais axiomática vai em direção contrária (menos intuitiva). Depois, em 1874, Charles Méray realiza a fusão entre geometria plana e espacial com um conjunto de axiomas diferente do de Legendre. Em 1882, Moritz Pasch apresenta um sistema e em 1884, um sistema completo de axiomas é apresentado por Riccardo de Paolis para a geometria euclidiana.

Mas, foi em 1899 que Hilbert publicou “Fundamentos da Geometria” com axiomática baseada em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano) e axiomas divididos em cinco grupos (incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo). A geometria euclidiana pode ser construída a partir dos cinco grupos de axiomas de Hilbert.

Em 1932, Birkhoff apresenta um sistema de axiomas com 4 postulados. Em 1940 publica com o professor Beatley, desta vez com 5 postulados, o livro “Basic Geometry”. O sistema de axiomas de Birkhoff é equivalente ao de Hilbert, porém é baseado na régua graduada e no transferidor. Birkhoff incorpora os números reais e a ideia de medida, de modo que ângulos e segmentos são medidos com números reais. Birkhoff apresenta sete teoremas básicos e o postulado das paralelas (este, após a teoria do paralelismo).

Estrutura dos Elementos

Os Elementos, composto por 13 livros e um total de 465 proposições, não é dedicado apenas à geometria, mas contém muita teoria dos números e álgebra (geométrica) elementar. A distribuição dos 13 livros da obra, como podemos ver em [9] e conforme detalha [10], é a seguinte:

- **Livro I: Fundamentos de Geometria plana**

Conceitos básicos como ponto, reta, plano e ângulo são descritos e usados para definição (e propriedades) de triângulos, quadriláteros, paralelismo, equivalência de áreas.

- **Livro II: A Geometria de retângulos**

Igualdades de áreas de retângulos e quadrados - resultados sempre expressos na linguagem geométrica.

- **Livro III: A Geometria do círculo**

Apresenta algumas definições e propriedades de círculos.

- **Livro IV: Polígonos regulares em círculos**

Trata de inscrição e circunscrição de polígonos em círculos.

- **Livro V: A Teoria Geral da Magnitudes em proporção**
Trata de razões entre grandezas de mesma natureza.
- **Livro VI: A geometria plana de Figuras semelhantes**
Desenvolve a geometria de figuras semelhantes, com aplicações do livro V
- **Livro VII: Aritmética Básica**
- **Livro VIII: Números em Proporção Contínua**
- **Livro IX: Números em Proporção Contínua; a teoria do par e Números ímpares, números perfeitos**
- **Livro X: Segmentos de reta incomensuráveis**
Trata da teoria dos segmentos de reta incomensuráveis, propriedades e classificação.
- **Livro XI: Fundamentos da Geometria Sólida**
Geometria sólida em três dimensões. Contém seus teoremas mais elementares;
- **Livro XII: Áreas e Volumes; o método de exaustão de Eudoxo**
Trata do cálculo de áreas e de volumes. Contém as relações métricas da pirâmide, prisma, cone, cilindro e esfera.
- **Livro XIII: Os Sólidos Platônicos**
Trata dos polígonos regulares e faz apresentação dos cinco poliedros regulares.

O LIVRO I

O Livro I começa com as definições preliminares, postulados e axiomas. O propósito maior desse livro é provar o teorema de Pitágoras, o que é feito na sua penúltima proposição (I.47).

Definições (algumas das 23):

1. Ponto é aquilo de que nada é parte
2. E linha é comprimento sem largura
3. E extremidades de uma linha são pontos
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura
- ⋮

15. Um círculo é uma linha cujos pontos são equidistantes de um ponto.
 ⋮
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Os cinco Postulados:

1. É possível traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer outro ponto.
(Este postulado garante a existência do segmento)
2. Pode-se prolongar uma linha reta infinitamente.
(Este postulado garante a existência da reta)
3. Um círculo pode ser descrito com qualquer centro e distância.
(Este postulado garante a existência da circunferência)
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma linha reta cruzando duas linhas retas torna os ângulos internos do mesmo lado menores de dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se prolongadas ilimitadamente, se encontram naquele lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Os três primeiros postulados são considerados como postulados de construção pois, de acordo com [16], afirmam a possibilidade de:

1. Desenhar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Estender uma determinada linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e raio.

Noções comuns:

1. Coisas que são iguais à mesma coisa também são iguais entre si.
2. Se iguais forem adicionados a iguais, os todos são iguais.
3. Se de iguais forem subtraídos iguais, as restantes são iguais.
4. Se iguais forem adicionados a desiguais, os todos serão desiguais.
5. Os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. As metades da mesma coisa são iguais entre si.

7. Coisas que coincidem umas com as outras são iguais entre si.
8. O todo é maior que a parte.
9. Duas retas não contém uma área.

As 48 proposições do Livro 1 dos Elementos, que tratam principalmente das propriedades de linhas retas, triângulos e paralelogramos, podem ser agrupados da seguinte forma:

- (1-26) Teoremas fundamentais de construções. Tratam principalmente de propriedades dos triângulos e incluem os três teoremas de congruência. Nenhum resultado aqui faz uso das paralelas.
- (27-32) Teoria das retas paralelas e o teorema da soma dos ângulos internos do triângulo é igual a dois ângulos retos
- (33-45) Paralelogramos e triângulos.
- (46-48) O teorema de Pitágoras.

3.2 O V POSTULADO

3.2.1 *História e discussão*

A definição mais importante no livro 1 é a de que “duas retas l e r são paralelas se não se cruzam, isto é, se nenhum ponto estiver em ambas”. O quinto postulado de Euclides é enunciado da seguinte forma: "se uma linha reta, que intercepta duas retas, forma ângulos internos do mesmo lado, menores que dois ângulos retos, então essas linhas retas, se estendidas indefinidamente, se cruzarão no lado onde os ângulos internos são menores que dois ângulos retos". Esse postulado faz uma afirmação sobre toda a extensão de uma linha reta, uma região que está fora do alcance de observação.

De acordo com [13], o quinto postulado de Euclides, diferentemente dos quatro primeiros que sempre foram aceitos pelos matemáticos, sempre foi muito controverso pois é uma declaração bastante complicada e não tão óbvia. Os dois primeiros postulados derivam de nossas experiências desenhando com régua, e o terceiro, das nossas experiências com compasso. O quarto é menos óbvio, mas deriva de nossas experiências medindo ângulos com transferidor. O quinto postulado, não podemos verificar empiricamente se duas linhas se encontram pois, embora podemos estender os segmentos

cada vez mais, não podemos continuar estendendo-os para sempre para verificar se eles se encontram. Assim, devemos verificar o paralelismo indiretamente usando outros critérios. O critério sugerido por Euclides para verificar se duas retas r e s são paralelas, foi traçar uma reta t transversal passando por r e s em pontos distintos e depois medir os ângulos internos α e β formados em um dos lados da transversal t . Segundo Euclides, se a soma dos ângulos α e β for menor que 180 graus, as retas r e s , se estendidas suficientemente, se encontrariam do mesmo lado de α e β em relação a t .

Segundo [3], devido à natureza questionável do postulado das paralelas, os matemáticos da antiguidade tentaram eliminá-lo, seja provando-o ou substituindo-o por um axioma mais simples e convincente. No entanto, nenhum deles teve sucesso. Os matemáticos mais incomodados com o postulado das paralelas, como comenta [7], questionaram que o mesmo não era simples e auto evidente, como deveria ser um postulado. E que devido a sua complexidade, deveria ser um teorema e não um postulado. De fato, acreditava-se que Euclides não estava totalmente seguro com seu quinto postulado, talvez por isso adiou ao máximo a sua aplicação até que não pudesse avançar sem ela (mais precisamente, na 29ª proposição). Desde a antiguidade, como indica [7], estudou-se se o quinto postulado é dependente dos quatro primeiros, visto que um sistema axiomático, em uma visão clássica, deve ser consistente (um não contradiz o outro), independente (um axioma não deve ser consequência dos outros) e completo (os axiomas devem ser suficientes para desenvolver toda a teoria). Os geômetras queriam demonstrar que o quinto postulado de Euclides era consequência dos quatro primeiros e assim, poderia ser eliminado sem causar nenhuma perda ao desenvolvimento da geometria euclidiana. As inúmeras tentativas de provar tal “dependência”, como veremos a seguir, foram todas fracassadas.

3.2.2 Tentativas de provar o V postulado

Ainda de acordo com [7], entre os matemáticos que tentaram derivar o quinto postulado (mudando seu status de postulado para teorema) a partir dos quatro primeiros, ou substituí-lo por postulados supostamente mais evidentes, não obtiveram êxito. Pois, no caso das tentativas de substituição, os postulados substitutos eram equivalentes ao postulado das paralelas. Nas tentativas de demonstrá-lo como um teorema, cada tentativa baseava-se em alguma suposição equivalente ao postulado das paralelas.

Entre aqueles que tentaram, sem sucesso, estabelecer uma prova, destacaremos aqui as tentativas de Proclus, Saccheri, Wallis, Clairaut, Lambert e Legendre, de acordo com [4] e [13].

Ptolomeu (366 - 283 a.C.)

Proclus, como conta [4], afirma que Ptolomeu escreveu em um de seus livros que o v postulado, por ser um teorema difícil, deveria ser retirado completamente da relação de postulados, e ele (Ptolomeu) se propôs a demonstrá-lo. Proclus não reproduziu a prova de Ptolomeu, mas de acordo com seus comentários pode-se deduzir que ela seria algo como vemos em [4, pgs. 18,19] e que adaptaremos aqui.

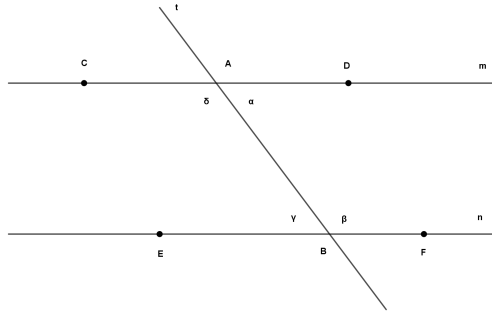


Figura 27: Ptolomeu - duas retas m e n cortadas por uma transversal t

Ptolomeu primeiramente considerou duas retas m e n cortadas por uma transversal t formando os ângulos α , β , γ e δ como na figura 27, A e B os pontos de intersecção de t com m e n , respectivamente, C e D pontos de m tal que $C * A * D$, E e F pontos de n tais que $E * B * F$.

Se $\alpha + \beta = 180^\circ \implies \gamma + \delta = 180^\circ$ e daí $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$. O que significa que a figura $P_{\gamma\delta}$ formada por \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BE} é congruente a figura $P_{\alpha\beta}$ formada por \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BF} . Daí, se m e n se intersectam em um dos lados da transversal t então, pela congruência das duas figuras, elas também se intersectam do outro lado de t . Mas isso é absurdo, pois teríamos duas retas distintas m e n que se intersectam em dois pontos.

Após esse resultado, Ptolomeu tentou demonstrar o V Postulado:

Suponha m e n , duas retas paralelas cortadas pela transversal t (figura 27). Assim, segue que as figuras $P_{\gamma\delta}$ e $P_{\alpha\beta}$ são congruentes pois não pode haver diferença entre o paralelismo de m e n de um lado para o outro de t . Daí, Ptolomeu concluiu que $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$. Porém isso só é válido se confirmado a congruência entre as duas

figuras $P_{\gamma\delta}$ e $P_{\alpha\beta}$. Ptolomeu errou ao assumir que o paralelismo de m e n implica a congruência das duas figuras, o que ocorre apenas na geometria euclidiana. Ptolomeu, assim, assumia aquilo que queria demonstrar (sem perceber, fazia uso indireto do V Postulado).

Proclus (410 - 485 d.C.)

A tentativa de Proclus consistiu em tentar provar que dadas r e s duas retas paralelas, e supondo que uma reta t intersecta r num ponto P , então t intersecta s também. Mas Proclus utiliza na sua tentativa de prova argumentos que dependem do postulado das paralelas, o que torna sua demonstração um argumento circular.

Nasir-Edin (1021 - 1274)

Nasir-Edin foi, como afirma [4], um astrônomo e matemático persa que escreveu um tratado sobre o V Postulado de Euclides, sendo também editor de uma versão dos Elementos de Euclides em árabe. Nasir-Edin supõe sem demonstrar a validade da seguinte afirmação:

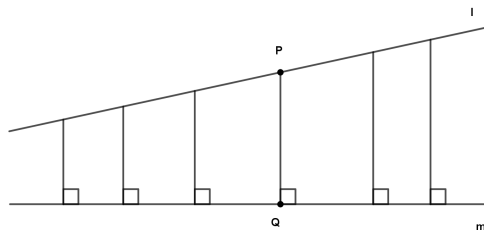


Figura 28: A suposição de Nasir-Edin

Sejam l e m duas retas, P e Q dois pontos tais que $P \in l$ e $Q \in m$ e \overline{PQ} é perpendicular a m e forma um ângulo agudo com l . Então as perpendiculares baixadas de l até m , do mesmo lado do ângulo agudo, são menores do que \overline{PQ} e as do outro lado são maiores que \overline{PQ} . (Figura 28).

Posteriormente, ele faz uso desse axioma para tentar demonstrar o V Postulado da seguinte forma (aqui faremos uma adaptação da demonstração de [4, pg. 21]):

Ele considerou o quadrilátero $PQRS$ (figura 29) cujos ângulos internos $\angle Q$ e $\angle R$ são retos e $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$. A seguir, supõe que $\angle P$ fosse agudo, deduzindo que $PQ > SR$,

chegando portanto em um absurdo de acordo com o axioma anterior. De modo similar $\angle P$ também não poderia ser obtuso.



Figura 29: A tentativa de Nasir-Edin

Porém, nesse argumento que faz uso descuidado do axioma anterior, como destaca [4], ele usa (sem perceber) que se $\angle P$ é agudo implica que $\angle S$ deve ser obtuso. O argumento de Nasir-Edin segue que $PQRS$ possui os quatro ângulos internos retos e os lados opostos congruentes, sendo assim um retângulo. Traçando uma diagonal, obtém-se dois triângulos retângulos congruentes cuja soma dos três ângulos internos resulta 180° . Esse resultado implicaria a validação do V Postulado.

Legendre (1752 - 1833)

Greenberg [13] cita que Legendre estava tão obcecado no postulado das paralelas que, durante 29 anos, publicou várias tentativas de prová-lo, em diferentes edições de seu "Elementos de Geometria". Aqui mostraremos uma delas (ver figura 30):

Dada uma reta s e A um ponto fora de s . Trace o segmento \overline{AB} perpendicular a s , com $B \in s$. Seja a reta r perpendicular a \overleftrightarrow{AB} passando por A . Então, $r \parallel s$ pois ambas são perpendiculares a reta \overleftrightarrow{AB} . Seja k uma reta distinta de r e \overleftrightarrow{AB} passando por A , devemos mostrar que k intersecta s . Seja \overrightarrow{AP} em k entre \overleftrightarrow{AB} e uma semirreta em r com origem em A . No outro lado de \overleftrightarrow{AB} , em relação a P , existe um ponto P' tal que $\angle BAP' \cong \angle BAP$. Então, B é um ponto interno ao ângulo $\angle PAP'$. Temos que s deve intersectar um dos lados de $\angle PAP'$, pois s passa por B . Assim, temos dois casos possíveis:

1. s intersecta o lado \overrightarrow{AP} .
Então s intersecta k , pois $\overrightarrow{AP} \in k$.

2. s intersecta o lado $\overrightarrow{AP'}$.

Seja C o ponto onde s intersecta $\overrightarrow{AP'}$, e D o único ponto de \overrightarrow{AP} tal que $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Assim, pelo caso (LAL) temos $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ e portanto $\angle ABD$ é reto, o que significa que D está em s (e também em k). Portanto, k deve intersectar s (no ponto D).

Porém, como lembra [13], esse argumento de Legendre possui declarações que não podem ser provadas partindo apenas dos quatro primeiros postulados de Euclides. Observe que essa tentativa de prova de Legendre se assemelha à tentativa de Proclus, no sentido de tentar mostrar que se uma reta intersecta uma de duas retas paralelas, então também intersectaria a outra.

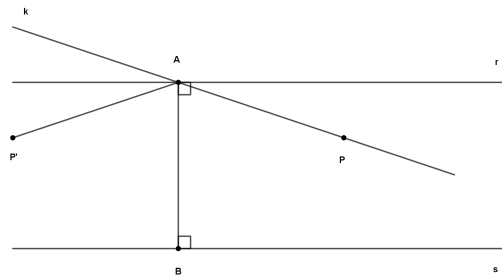


Figura 30: Uma tentativa de Legendre

John Wallis (1616 - 1703)

Wallis desiste de tentar provar o V postulado a partir dos quatro primeiros e propõe um axioma alternativo que considera ser mais plausível que o postulado de Euclides: "Sobre um segmento é sempre possível construir um triângulo semelhante a um triângulo dado". Segundo [13], o que na realidade Wallis acaba por demonstrar é a equivalência entre o seu axioma e o v postulado de Euclides.

Saccheri (1667 - 1733)

O padre jesuíta Girolamo Saccheri, conta [13], publicou em 1733 um pequeno livro antes de morrer, intitulado "Euclidis ab omni naevo vindicatus" (Euclides livre de todos os defeitos). Saccheri, em sua tentativa, usou um argumento de redução ao absurdo, onde assumia a negação do quinto postulado e tentou deduzir uma contradição. Ele estudou certos quadriláteros, conhecidos posteriormente como Quadriláteros de Saccheri (ver

figura 31), que se caracterizam por possuírem os lados adjacentes à base congruentes e os ângulos adjacentes à base, retos. Nesses quadriláteros, três casos são possíveis:

- (1) Os ângulos superiores são retos;
- (2) os ângulos superiores são obtusos;
- (3) os ângulos superiores são agudos.

Saccheri tentou mostrar que os dois últimos casos levavam a uma contradição para assim provar que o primeiro caso era o único possível, o que é o caso da geometria euclidiana. Ele obteve sucesso ao provar que o caso dos ângulos obtusos levavam a um absurdo, pois a soma dos ângulos internos do quadrilátero excederia 360° , o que contradiz o Teorema 2.22.

Porém, Saccheri não conseguiu mostrar que o caso dos ângulos agudos levava a um absurdo, embora tenha conseguido deduzir muitos resultados estranhos. O que conseguiu foi provar algumas equivalências ao quinto postulado (todos os quadriláteros de Saccheri são retângulos).

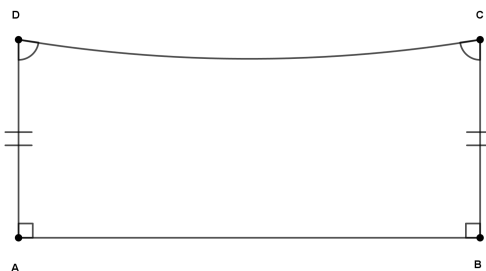


Figura 31: Quadrilátero de Saccheri

Clairaut (1713 - 1765)

Assim como Wallis, o geômetra francês Alexis Claude Clairaut, não tentou provar o v postulado. Clairaut substituiu o v postulado por outro axioma (**existem retângulos**) em seu texto *Elements de geometrie* de 1741. Ele argumentava que, diferentemente do v postulado onde não poderíamos ir até o infinito para verificar se duas retas paralelas se encontram ou não, seria mais plausível mostrar a existência de um retângulo tal qual afirmava Saccheri. Mas o axioma de Clairaut também se mostra equivalente ao v postulado e não pode ser provado na geometria neutra, apenas pode-se provar que ambos são logicamente equivalentes, como ressalta [13].

Lambert (1728 - 1777)

Johann Heinrich Lambert, como cita [13], estudou os quadriláteros que hoje são conhecidos como Quadriláteros de Lambert (figura 32) caracterizados por possuírem pelo menos três ângulos retos. Artmann [3] afirma que Lambert deve ter pensado em uma geometria que poderia ser derivada da hipótese do ângulo agudo de Saccheri, e afirma que Lambert escreveu um artigo sobre a teoria das retas paralelas, mas que foi publicado apenas em 1786, postumamente.

Tantas foram as tentativas de provar o V Postulado que, segundo [13], em 1763 Georg H. Klügel (1739 - 1832) apresentou uma tese de doutorado que consistia em analisar 28 tentativas de demonstrar o postulado das paralelas, mostrando as falhas em cada uma delas e concluindo que nenhuma era satisfatória.

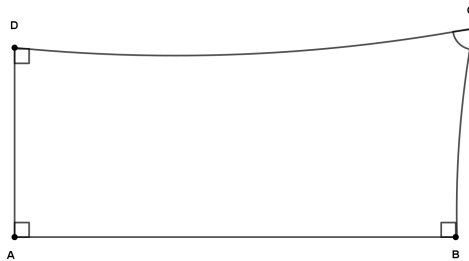


Figura 32: Quadrilátero de Lambert

3.2.3 Algumas versões ou equivalências do V Postulado

Aqui vamos citar, de acordo com [14] e [13], alguns resultados equivalentes ao V Postulado de Euclides resultantes das inúmeras tentativas de demonstrá-lo.

1. (Postulado de Playfair ou Postulado das paralelas) Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.
2. (Hilbert-Birkhoff) Para toda reta r e todo ponto P fora de r , existe no máximo uma reta s passando por P paralela a r .
3. Se uma reta intersecta uma de duas retas paralelas, então ela também intersecta a outra.

4. (Recíproca do Teorema dos ângulos alternos internos) Se duas retas paralelas são intersectadas por uma transversal, então a transversal forma ângulos alternos internos congruentes com as paralelas.
5. A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° .
6. (Wallis) Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, existe $\triangle DEF$ semelhante (mas não congruente) a $\triangle ABC$.
7. (Clairaut) Existem retângulos.
8. Se duas retas r e s são paralelas e t é perpendicular a r , então t também é perpendicular a s .
9. As retas paralelas são equidistantes.
10. Se as retas r, s, m e n são tais que r e s são paralelas, m é perpendicular a r e n é perpendicular a s , então ou $m = n$ ou m e n são paralelas.
11. A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° .
12. (Axioma de Farkas Bolyai) Por quaisquer três pontos não colineares é sempre possível traçar uma circunferência.
13. A linha formada pelos pontos equidistantes a uma reta dada e do mesmo lado desta, é uma reta.
14. Dado um ângulo, por um ponto situado em seu interior pode-se sempre traçar uma reta passando por esse ponto e que intersecta ambas as semirretas que formam o ângulo dado.
15. Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

3.3 GEOMETRIA HIPERBÓLICA: O INÍCIO DE UMA NOVA GEOMETRIA

Das geometrias não-euclidianas, aqui trataremos da geometria hiperbólica que, assim como a geometria de Euclides, resulta dos axiomas da geometria neutra com o acréscimo de um postulado de retas paralelas. Daremos uma breve introdução sobre os principais precursores das geometrias não-euclidianas e dos criadores da geometria hiperbólica. Em seguida, mostraremos os axiomas e alguns dos principais teoremas e proposições e finalizamos com dois modelos para geometria hiperbólica: o disco de Poincaré e o semiplano de Poincaré.

3.3.1 Criadores da geometria hiperbólica

As geometrias não-euclidianas surgem das tentativas de provar o V Postulado de Euclides. E os principais precursores, segundo [4], foram Ptolomeu, Proclus, Nasir-Edin, Wallis, Saccheri e Lambert, cujas tentativas de provar o Postulado das Paralelas mencionamos em 3.2.2.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Embora tenha sido o primeiro a entender claramente a possibilidade da existência de uma geometria diferente da de Euclides, Gauss guardava para si suas descobertas relacionadas ao quinto postulado, tanto que poucas delas foram tornadas públicas durante sua vida. Ele estava convicto que haviam sido em vão as tentativas de Saccheri, Legendre, Lambert e Farkas Bolyai (seu amigo pessoal) de demonstrar o Postulado das Paralelas [4, 5].

No final da primeira década do século XIX, Gauss ainda estava tentando provar o quinto postulado por redução ao absurdo, assim como havia tentado Saccheri e Lambert e cujas obras eram de seu conhecimento. Gauss começa a desenvolver as ideias e formular teoremas da nova geometria na segunda década daquele século. A atitude de Gauss em não divulgar suas descobertas é compreensível pois naquele tempo a Igreja Romana havia assimilado a filosofia de Kant, e a Geometria Euclidiana estava na base da explicação do universo e qualquer conhecimento que contrariasse a doutrina da Igreja poderia sofrer as consequências [4].

János Bolyai (1802 - 1860)

Janos era filho de Farkas Bolyai, amigo pessoal de Gauss. Farkas Bolyai e Gauss tornaram-se amigos quando estudaram em Göttingen e é quase certo que discutiam sobre problemas referentes à teoria das paralelas. Essa discussão continuou por correspondência após deixarem a universidade e ambos estavam tentando provar o quinto postulado, como mostra uma carta de Gauss destinada a Bolyai. Em 1804, convencido que havia provado o quinto postulado, Bolyai envia suas ideias a Gauss, mas este mostrou que havia um erro em sua prova.

Em dezembro de 1802, nascia Janos Bolyai. Janos estudou matemática com seu pai e, ainda muito jovem, interessou-se pela teoria das paralelas. Estudou na Royal

College para engenheiros em Viena de 1818 a 1822. Ele ficou tão obcecado pelo postulado paralelo das paralelas que seu pai escreveu para ele suplicando que deixa-se esse problema de lado.

Janos, no entanto, persistiu tentando provar o quinto postulado substituindo-o por uma afirmação contrária e por volta de 1820, seus esforços começam a render resultados, como afirma [4], “de uma natureza especial”. Acabou chegando à conclusão de que o postulado é independente dos outros da geometria e que uma geometria diferente, porém consistente, pode ser construídas em sua negação e então escreveu para seu pai em 3 de novembro de 1823 “eu criei um novo mundo diferente, do nada”.

Da negação do quinto postulado, duas hipóteses eram possíveis: Por um ponto não pertencente a uma reta, ou não passa nenhuma ou passam mais de uma reta paralela à reta dada. O primeiro caso não pode ocorrer pois a existência de tais paralelas é consequência dos quatro primeiros postulados. No segundo caso, como observou Bolyai, a existência de duas retas paralelas implica a existência de infinitas outras retas paralelas. E desta observação seguem os resultados que constituem o cerne da nova geometria.

Seu pai responde a sua carta sugerindo que publique seu trabalho como apêndice de seu livro *Tentamen* e que o fizesse o mais rápido possível, o que só ocorreu em 1832. Antes de publicar sua obra, Farkas envia uma cópia do trabalho de seu filho para Gauss para saber a sua opinião.

Em resposta, Gauss lhe escreve uma carta onde inicia louvando o trabalho do filho do amigo mas afirma que já era de seu conhecimento as descobertas e resultados de Janos e que havia trabalhado naquilo nos últimos 30 ou 35 anos. Finalizando a carta com “(...) *super feliz que tenha sido o filho de um amigo que passou à minha frente de forma tão extraordinária*”.

Janos, ao ler o conteúdo da carta a qual seu pai lhe enviara uma cópia, fica desapontado em saber que outro havia feito as mesmas descobertas possivelmente antes dele e até suspeitou que seu pai houvesse confidenciado parte do seu trabalho a Gauss e que este poderia ter se apropriado do mesmo. Janos Bolyai continuou suas investigações apesar de nada mais publicar até o fim de sua vida e, em 1848, ele toma conhecimento dos trabalhos de Lobachevsky [4].

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856)

Lobachevsky, de acordo com [1], é considerado o maior matemático russo do seu tempo. Formou-se na Universidade de Kasan em 1813, onde estudou sob grandes dificuldades financeiras, vindo mais tarde tornar-se professor e reitor da instituição. Lobachevsky também acreditava na existência de uma prova do postulado das paralelas. Segundo [4], ele estava tentando provar o quinto postulado, como sugere uma cópia de suas notas de aula de 1815 a 1817.

Em 1829 (dois anos antes da publicação do apêndice de Bolyai), apesar de três anos antes ter divulgado uma demonstração rigorosa do teorema das paralelas, Lobachevsky publica um artigo onde assumia um postulado que era uma negação do v postulado de Euclides: “em um ponto fora de uma reta, incidem duas retas que não a intersectam”. Daí, surgiria a que seria apontada como Geometria de Lobachevsky onde, além de ser possível traçar mais de uma reta paralela a uma reta passando por um ponto fora da reta dada, a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor que dois retos [4].

Entre 1835 e 1855, conta [1], ele divulgou e desenvolveu essa nova geometria, a qual denominava “Geometria imaginária”, em três livros escritos em várias línguas. Apenas em 1848, Farkas Bolyai, e mais tarde seu filho Janos através dele, tomou conhecimento do trabalho de Lobachevsky. Segundo alguns autores, como afirma [4], este conhecimento chegou até Gauss apenas em 1841. Em carta escrita a Schumacher, em 1846, Gauss afirmava estar lendo novamente o “Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parellellinien” talvez o livro mais importante de Lobachevsky. Afirmava ainda que os resultados apresentados no livro – apesar de reconhecer seu mérito – já eram de seu conhecimento, porém as demonstrações eram feitas por métodos totalmente diferentes dos seus.

3.4 ELEMENTOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Esta seção é baseada principalmente nas referências [13], [1] e [6]. A Geometria Hiperbólica assume todos os axiomas da Geometria Neutra com o acréscimo do seguinte axioma das paralelas:

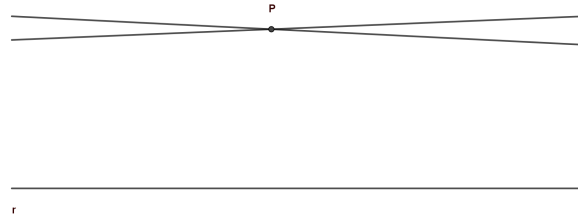


Figura 33: Axioma hiperbólico

Axioma 3.1. (Axioma Hiperbólico) Existe uma reta r e um ponto P , fora de r , tal que pelo menos duas retas distintas paralelas a r passem por P .

Lema 3.1. Na geometria hiperbólica, não existem retângulos.

Demonstração. A existência de retângulos implica o postulado das paralelas de Hilbert e, portanto, a negação do Axioma Hiperbólico. \square

Teorema 3.2. (Teorema Hiperbólico Universal) Para toda reta r e para todo ponto P que não está em r , passa por P ao menos duas retas distintas paralelas a r .

Demonstração. Sejam a reta r e o ponto P , fora de r .

- (1) Tome $Q \in r$, tal que \overline{PQ} seja a perpendicular baixada de P à reta r .
- (2) Tome s , perpendicular a \overline{PQ} passando por P .
- (3) Tome R um ponto de r , diferente de Q , e seja t uma reta perpendicular a r passando por R .
- (4) Seja $S \in t$, tal que \overleftrightarrow{SP} é perpendicular a t (figura 34).

Daí, temos que t é transversal a \overleftrightarrow{SP} e a r formando ângulos alternos internos congruentes (retos) e, pelo Teorema 2.12, \overleftrightarrow{SP} e r são paralelas. Analogamente, \overleftrightarrow{PQ} é transversal a r e s formando ângulos alternos internos congruentes (retos) logo, r e s são paralelas (Teorema 2.12). Portanto, as retas \overleftrightarrow{SP} e s são ambas paralelas a r . Caso seja assumido $\overleftrightarrow{SP} = s$, então S estaria em s , o que implicaria $PQRS$ ser um retângulo o que, pelo Lema 3.1, é absurdo. \square

Corolário 3.3. Por cada reta l e cada ponto P não em l , existem infinitas retas paralelas a l passando por P .

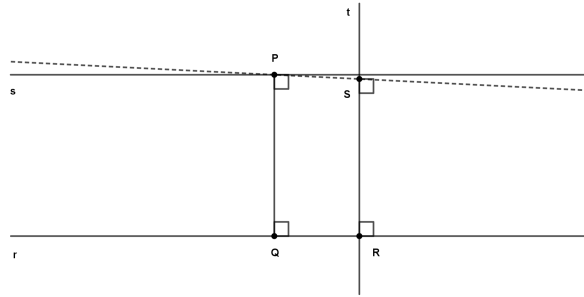


Figura 34: Teorema hiperbólico universal

Demonstração. Basta, na demonstração anterior, variar o ponto R . □

Teorema 3.4. *O ângulo de um quadrilátero de Lambert¹ é sempre agudo.*

Demonstração. Seja $ABCD$, um quadrilátero de Lambert com os ângulos $\angle B$, $\angle C$ e $\angle D$ retos.

- (1) Marque o ponto P na semirreta \overrightarrow{BC} de modo que $\overline{CP} \cong \overline{BC}$.
- (2) Trace o segmento \overline{PQ} , tal que $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ e $\overline{PQ} \cong \overline{BA}$.
- (3) Trace os segmentos \overline{AC} , \overline{CQ} e \overline{DQ} .

Assim, temos $\triangle QPC \cong \triangle ABC$ (LAL), o que implica $\triangle QCD \cong \triangle ACD$. Mas isso significa que o ângulo $\angle CDQ$ é reto e, portanto, A, D e Q são colineares. $ABPQ$, assim construído, é um quadrilátero de Saccheri. Donde, o ângulo $\angle BAD$ é agudo. Daí o resultado. □

Teorema 3.5. *A soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.*

Demonstração. Considere o triângulo retângulo ABC , sendo $\angle B$ o ângulo reto. Do Corolário 2.18, temos que a soma de dois ângulos de um triângulo qualquer é menor que π (dois ângulos retos). Como $\angle B$ é reto, então $\angle A$ e $\angle C$ são ambos agudos (Corolário 2.19).

- (1) Trace o segmento \overline{AD} , tal que $\angle DAC \cong \angle ACB$.
- (2) Seja M o ponto médio de \overline{AC} e, $P \in \overline{BC}$ tal que \overline{MP} seja a perpendicular baixada de M ao lado \overline{BC} .

¹ O quarto ângulo de um quadrilátero de Lambert.

(3) Defina o ponto Q na semirreta \overrightarrow{AD} , tal que $\overline{AQ} \cong \overline{PC}$.

Assim, os triângulos AQM e CPM são congruentes (ALA). O que significa que o ângulo $\angle MQA$ é reto e $P * M * Q$. Portanto, $ABPQ$ é um quadrilátero de Lambert cujos ângulos retos são $\angle B$, $\angle P$ e $\angle Q$ e, pelo Teorema 3.4, o ângulo $\angle BAQ$, que é igual a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo ABC , é agudo. Logo, os ângulos do triângulo retângulo ABC somam menos que dois ângulos retos. \square

Teorema 3.6. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre menor que dois ângulos retos.*

Demonstração. Considere $\triangle ABC$, um triângulo qualquer e \overline{BC} o maior lado. Traçando a altura \overline{AD} em relação ao maior lado do triângulo, obtemos dois triângulos retângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$, de modo que $m(\angle A) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$.

No triângulo retângulo $\triangle ABD$, temos:

$$m(\angle B) + 90^\circ + m(\angle BAD) < 180^\circ \implies m(\angle B) + m(\angle BAD) < 90^\circ.$$

No triângulo retângulo $\triangle ADC$, temos:

$$m(\angle CAD) + 90^\circ + m(\angle C) < 180^\circ \implies m(\angle CAD) + m(\angle C) < 90^\circ.$$

Assim, no triângulo ABC , temos:

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = (m(\angle BAD) + m(\angle DAC)) + m(\angle B) + m(\angle C) < 180^\circ. \quad \square$$

Corolário 3.7. *A soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é menor que quatro ângulos retos.*

Demonstração. Dado $ABCD$, um quadrilátero convexo qualquer, podemos traçar uma diagonal, obtendo assim dois triângulos. Como a soma dos ângulos de cada um dos triângulos obtidos é menor do que dois ângulos retos (teorema anterior), logo, a soma dos ângulos do quadrilátero $ABCD$ é menor do que quatro ângulos retos. \square

3.5 MODELOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Apresentaremos a seguir dois modelos para a geometria hiperbólica: o disco de Poincaré e o semiplano de Poincaré. Um modelo é um conjunto de relações e objetos

definidos de modo a corresponder aos termos primitivos do sistema axiomático hiperbólico, atribuindo-lhes significado e que satisfaça todos os axiomas. Um modelo não é um plano hiperbólico e nem o sistema axiomático e sim uma interpretação do plano. Os modelos aqui apresentados são construídos dentro da geometria euclidiana bem como os termos primitivos ponto, reta e plano. Assim os axiomas da geometria hiperbólica, nos modelos, são verificados a partir dos axiomas e teoremas da geometria euclidiana. O que significa que, a geometria hiperbólica é consistente apenas se o mesmo ocorre na geometria euclidiana.

3.5.1 Disco de Poincaré

Considere, no plano euclidiano, o círculo Γ de centro O , raio $r = 1$ e seja \mathcal{C} a sua circunferência. O plano \mathbb{D}^2 , é a região limitada por Γ , excluindo-se a circunferência \mathcal{C} . O plano \mathbb{D}^2 pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}.$$

enquanto \mathcal{C} pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}.$$

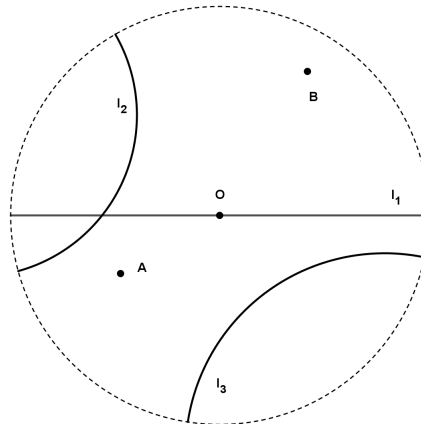


Figura 35: Ponto e reta no disco de Poincaré

- **Ponto hiperbólico**
São os pontos do plano euclidiano que são internos a \mathcal{C} .
- **Reta hiperbólica**
Existem dois tipos de reta nesse modelo:

1. Interseção de \mathbb{D}^2 com a reta do plano euclidiano que passa por O . Isto é, qualquer diâmetro aberto² de Γ .
2. Interseção de \mathbb{D}^2 com uma circunferência ortogonal³ a \mathcal{C} .

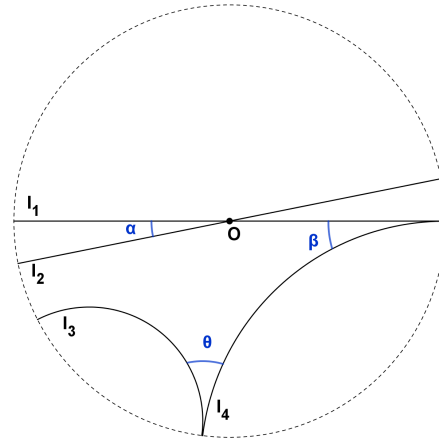


Figura 36: Ângulo no disco de Poincaré

- **Ângulo hiperbólico**

Dadas duas semirretas hiperbólicas de mesma origem, definimos o ângulo entre elas como o ângulo entre suas retas tangentes no ponto de interseção. Assim, os ângulos podem ser formados por:

1. dois diâmetros abertos de Γ ;
2. duas retas hiperbólicas que não são diâmetros abertos de Γ ;
3. duas retas hiperbólicas, sendo apenas uma delas um diâmetro aberto de Γ .

- **Retas paralelas**

A definição de retas paralelas é a mesma da geometria euclidiana: retas que não possuem ponto em comum.

3.5.2 *Semiplano de Poincaré*

O semiplano de Poincaré, que denotamos por \mathbb{H}^2 , pode ser expresso como

- 2 Conjunto de pontos de um diâmetro excluindo-se os pontos que pertencem a circunferência
- 3 Dois círculos ortogonais se intersectam de modo que suas retas tangentes formam ângulos retos nos pontos de interseção

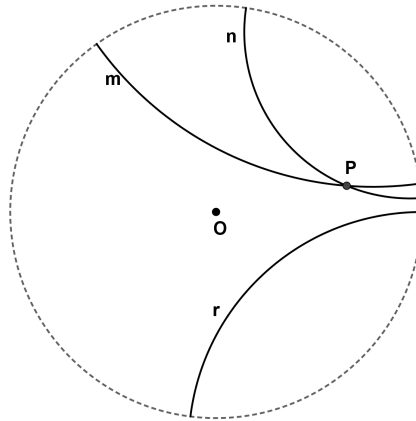


Figura 37: m e n , retas paralelas a r por P .

$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. Em outras palavras, o plano \mathbb{H}^2 é o semiplano superior excluindo-se o eixo x .

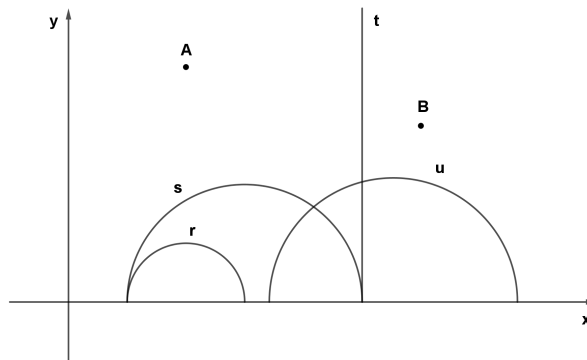


Figura 38: Pontos e retas no semiplano de Poincaré

- **Ponto hiperbólico**

São os pontos do plano euclidiano que estão acima do eixo x .

- **Reta hiperbólica**

Assim como no modelo do disco, neste também existem dois tipos de retas:

1. Interseção de \mathbb{H}^2 com semicircunferências com centro no eixo x .
2. Interseção de \mathbb{H}^2 e retas perpendiculares ao eixo x

- **Ângulo hiperbólico**

A noção de ângulo neste modelo é a mesma do modelo do disco. Isto é, dadas

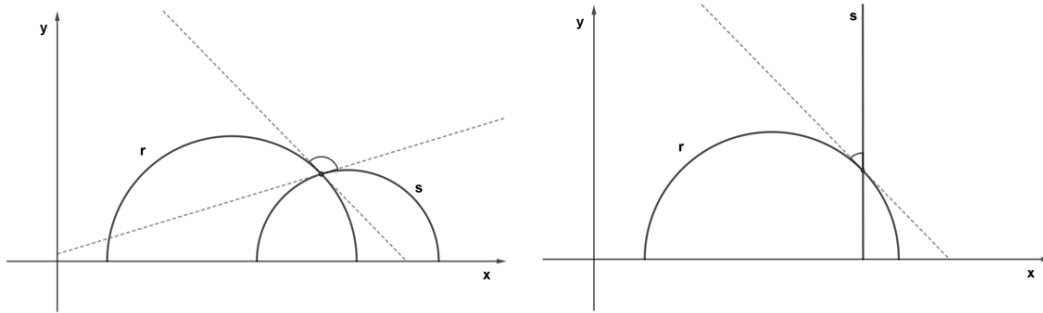


Figura 39: Ângulo hiperbólico no semiplano de Poincaré

duas semirretas hiperbólicas de mesma origem, definimos o ângulo entre elas como o ângulo entre suas retas tangentes no ponto de interseção. No plano \mathbb{H}^2 , os ângulos podem ser formados por:

1. Duas retas hiperbólicas que são interseções de \mathbb{H}^2 e circunferências com centros no eixo x .
2. Uma reta que é interseção de \mathbb{H}^2 com uma circunferência com centro no eixo x e, uma reta que é interseção de \mathbb{H}^2 com uma reta perpendicular ao eixo x .

• **Retas paralelas**

Neste modelo, tal qual no anterior, a noção de retas paralelas é a mesma da geometria euclidiana: duas retas que não possuem nenhum ponto em comum.

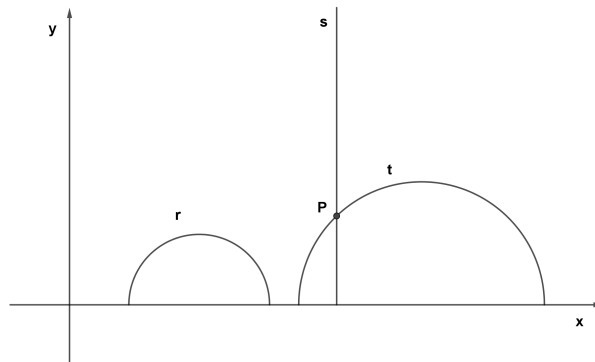


Figura 40: s e t , retas paralelas a r por P .

ALGUNS RESULTADOS E DEMONSTRAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Esse capítulo foi concebido com objetivo de contribuir de alguma forma com o professor de matemática do Ensino Médio, em especial com a geometria axiomática. Apresentamos aqui algumas demonstrações, sugestões e exercícios envolvendo a geometria neutra bem como construções com régua e compasso e algumas atividades no software Geogebra.

Como sugerimos uma possível abordagem às geometrias não-euclidianas, especificamente à geometria hiperbólica, apresentamos duas sugestões de demonstrações que julgamos que podem ser assimilados pelo aluno do Ensino Médio sem maiores dificuldades. Para ilustrar e melhor visualizar o modelo do disco de Poincaré, apresentamos uma atividade com o software Geogebra para a construção do plano \mathbb{D}^2 , construção de retas hiperbólicas, retas paralelas no plano \mathbb{D}^2 e ferramentas para a geometria hiperbólica no Geogebra.

Na geometria euclidiana, apresentamos uma demonstração alternativa da proposição 1.30, isto é, mostrar a função régua de Birkhoff a partir dos axiomas de Hilbert. Nessa sugestão para o Ensino Médio, utilizamos os axiomas de Hilbert e alguns importantes conceitos geométricos.

4.1 GEOMETRIA NEUTRA

4.1.1 Demonstrações em geometria neutra: sugestões de exercícios

Exercício 1. Demonstrar o seguinte teorema:

Se o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em $\angle A$, então $m(\angle B) + m(\angle C) \leq 90^\circ$.

Solução:

Esse resultado é um corolário do Teorema de Legendre. Dado um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em A , pelo Teorema de Legendre,

$$m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) \leq 180^\circ$$

Como $\angle A$ é reto, temos:

$$90^\circ + m(\angle B) + m(\angle C) \leq 180^\circ \implies m(\angle B) + m(\angle C) \leq 90^\circ$$

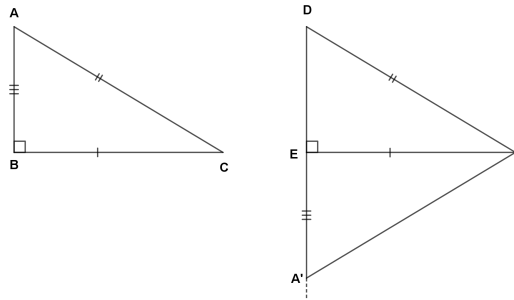


Figura 41: Congruência de triângulos: caso cateto-hipotenusa

Exercício 2. Demonstrar a proposição:

Dois triângulos retângulos são congruentes se, a hipotenusa e o cateto de um são congruentes, respectivamente, a hipotenusa e a um cateto do outro.

Solução:

Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ retângulos em B e E , respectivamente (figura 41) e sejam $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

- (1) Pelo Axioma H.8, existe um único ponto A' na semirreta oposta à \overrightarrow{ED} tal que $\overline{AB} \cong \overline{EA'}$;

(2) os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'EF$ são congruentes pelo caso *LAL*:

- (L) $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, por hipótese;
- (A) $\angle ABC \cong \angle A'EF$, pela Proposição 2.9, os ângulos $\angle DEF$ e $\angle A'EF$ são suplementares. Como $m(\angle DEF) = 90^\circ$, temos que $m(\angle A'EF) = 90^\circ$;
- (L) $\overline{AB} \cong \overline{EA'}$, por construção.

(3) da congruência $\triangle ABC \cong \triangle A'EF$, decorre que $\overline{AC} \cong \overline{A'F}$, o que significa que $\triangle FDA'$ é isósceles. Daí temos $\angle FDE \cong \angle EA'F \cong \angle CAB$.

Então, pelo caso *LAA*, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\angle FDE \cong \angle CAB$.

Exercício 3. Demonstre o seguinte teorema:

Seja \overline{AB} uma corda da circunferência \mathcal{C} de centro O . Prove que a mediatriz de \overline{AB} passa pelo centro O de \mathcal{C} .

Solução:

Dada a circunferência \mathcal{C} de centro O e os pontos A e B que pertencem à \mathcal{C} .

1. Se o segmento \overline{AB} é um diâmetro de \mathcal{C} , então O é ponto médio de \overline{AB} e a mediatriz passará por O , pela definição de mediatriz.
2. Se \overline{AB} não é diâmetro de \mathcal{C} , então o triângulo $\triangle OAB$ é isósceles: $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ e $\angle A \cong \angle B$. Seja o ponto M ponto médio de \overline{AB} , os triângulos $\triangle OAM$ e $\triangle OBM$ são congruentes pelo caso *LLL*. Os ângulos congruentes $\angle AMO$ e $\angle BMO$ são suplementares, logo são ambos retos. Assim, \overleftrightarrow{OM} é mediatriz de \overline{AB} .

Exercício 4. Considere um triângulo equilátero ABC em que P, Q e R são pontos médios dos seus lados, respectivamente. Mostre que o triângulo PQR é equilátero.

Observação 4.1. *Aqui, é importante observar que na Geometria Neutra, triângulo equilátero possui os três lados e os três ângulos congruentes porém não se pode afirmar que cada ângulo mede 60° . Pois pelo Teorema de Legendre (2.22), a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor ou igual a 180° .*

Solução:

Dado o triângulo equilátero $\triangle ABC$ e sejam P, Q e R os pontos médios dos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente. Pelo caso *LAL*, temos que $\triangle APR \cong \triangle BQP \cong \triangle CRQ$ e $\overline{PR} \cong \overline{QP} \cong \overline{RQ}$. Portanto, o triângulo $\triangle PQR$ é equilátero.

4.1.2 *Construções com régua e compasso*

Definição 4.2. Dado um segmento \overline{AB} e M o seu ponto médio, a mediatriz de \overline{AB} é a reta perpendicular ao segmento \overline{AB} passando por M .

Exercício 5. Construir a mediatriz de um segmento com régua e compasso.

Solução:

- **1º passo:** Marque dois pontos distintos A e B e trace o segmento \overline{AB} ;
- **2º passo:** abra o compasso de modo que a abertura seja maior que a metade do segmento \overline{AB} ;
- **3º passo:** com a ponta seca do compasso em A trace o arco conforme mostrado na figura 42;
- **4º passo:** com a mesma medida de abertura do compasso, com a ponta seca em B trace o arco conforme a figura 42;
- **5º passo:** os dois arcos se intersectam nos pontos P e Q , trace a reta \overleftrightarrow{PQ}

A reta \overleftrightarrow{PQ} intersecta \overline{AB} perpendicularmente em M , seu ponto médio. Observe que obtemos tanto a mediatriz quanto o ponto médio do segmento \overline{AB} .

Exercício 6. Construir com régua e compasso a mediatriz do exercício 3.

Solução:

- (1) Marque o ponto O ;
- (2) com a ponta seca do compasso em O , trace uma circunferência qualquer com raio $r > 0$;
- (3) marque dois pontos distintos A e B na circunferência;
- (4) trace o segmento \overline{AB} ;
- (5) trace a mediatriz de \overline{AB} conforme mostrado no exercício 3;

Realizando as etapas corretamente, deve-se obter a mediatriz do segmento \overline{AB} passando pelo ponto O , centro da circunferência.

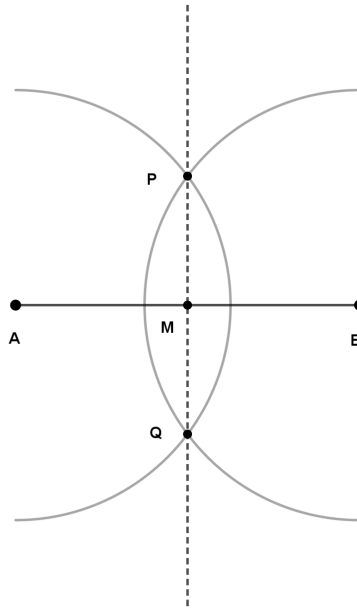


Figura 42: Construção da mediatriz de um segmento

4.1.3 Geometria neutra utilizando o Geogebra

Exercício 7. Ilustrar no Geogebra o exercício 4.

Solução:

Faça conforme descrito nos passos a seguir:

- (1) Abra o software Geogebra;
- (2) na barra de ferramentas, selecione a opção “**polígono regular**” (figura 43);
- (3) marque os pontos A e B no plano e digite 3 quando a opção “**vértices**” for exibida (figura 44) e o triângulo equilátero $\triangle ABC$ será construído automaticamente;
- (4) clique com o botão direito do mouse no segmento \overline{AB} e selecione “**propriedades**”;
- (5) na opção “**exibir rótulo**”, selecione “**valor**” para que a medida do segmento \overline{AB} fique visível (figura 45), repita o processo nos segmentos \overline{BC} e \overline{AC} ;
- (6) na barra de ferramentas selecione “**ponto médio ou centro**” (figura 46) e selecione os pontos A e B , B e C , C e A , para determinar os pontos médios D , E e F dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente;

- (7) na barra de ferramenta, selecione “**polígono**” e clique nos pontos D , E e F para que seja traçado o triângulo $\triangle DEF$;
- (8) repita os passos (4) e (5) nos segmentos \overline{DE} , \overline{EF} e \overline{FD} para que suas medidas fiquem visíveis.
- (9) clique com o botão direito do mouse fora do triângulo e desmarque as opções “**eixos**” e “**malha**” (figura 47).

Observe que os dois triângulos construídos são equiláteros e a medida do lado do triângulo $\triangle DEF$ é igual à metade da medida do lado do triângulo $\triangle ABC$. Essa relação será mantida mesmo se houver “deslocamento” do ponto A ou B (com A , B e C não colineares).

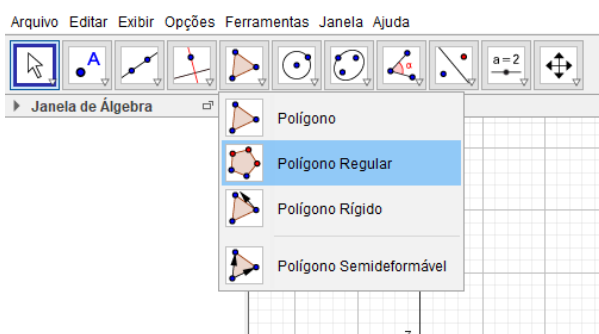


Figura 43: Geogebra - triângulo equilátero: polígono regular

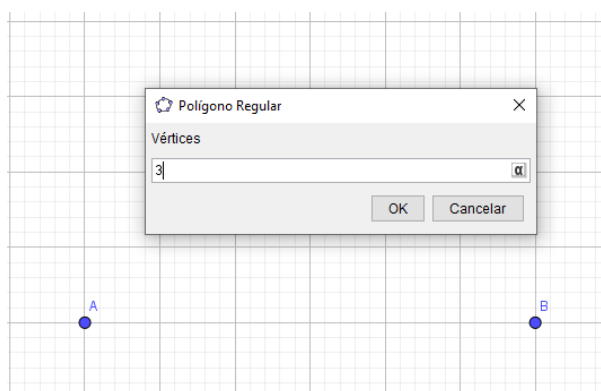


Figura 44: Geogebra - triângulo equilátero: número de vértices

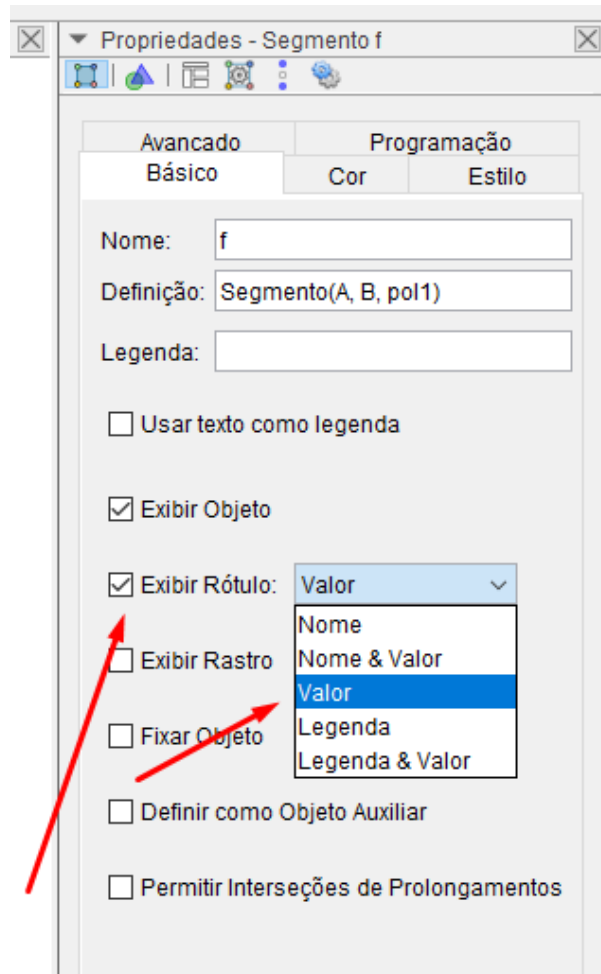


Figura 45: Geogebra - triângulo equilátero: medida do lado

4.1.4 Exercícios propostos

Exercício 8. Demonstrar a proposição:

Se dois segmentos \overline{AH} e \overline{RB} se bisseccionam¹ no ponto F , então $\triangle FAB \cong \triangle FHR$.

Sugestão:

Use a Proposição 2.16 (ângulos OPV) e o caso LAL de congruência de triângulos.

Exercício 9. Demonstre a proposição:

Se dois segmentos \overline{AC} e \overline{BD} se bisseccionam, então $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

¹ Dois segmentos se bisseccionam quando a interseção é o ponto médio de ambos

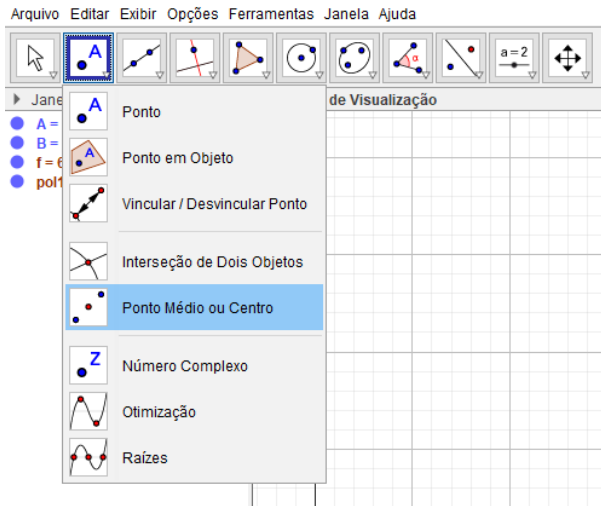


Figura 46: Geogebra - triângulo equilátero: ponto médio

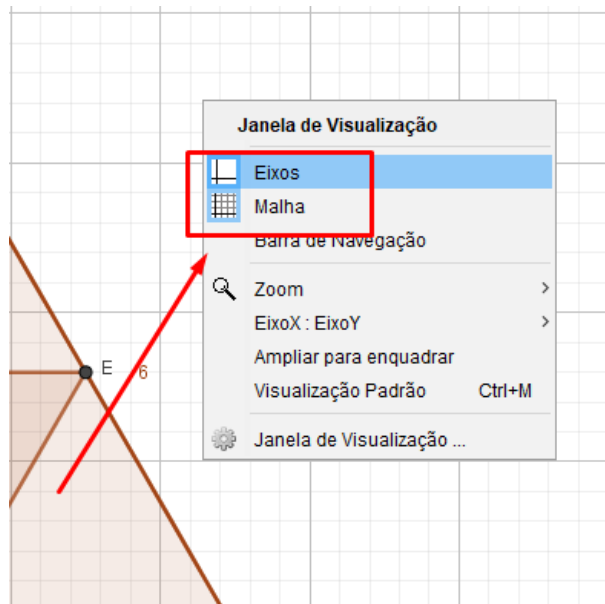


Figura 47: Geogebra - triângulo equilátero: malha e eixos

Sugestão:

Seja M o ponto de interseção e ponto médio dos segmentos \overline{AC} e \overline{BD} . Como feito no caso anterior, mostre que os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle CMD$ são congruentes e daí decorre $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.

De modo análogo, da congruência dos triângulos $\triangle BMC$ e $\triangle DMA$ decorre que $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

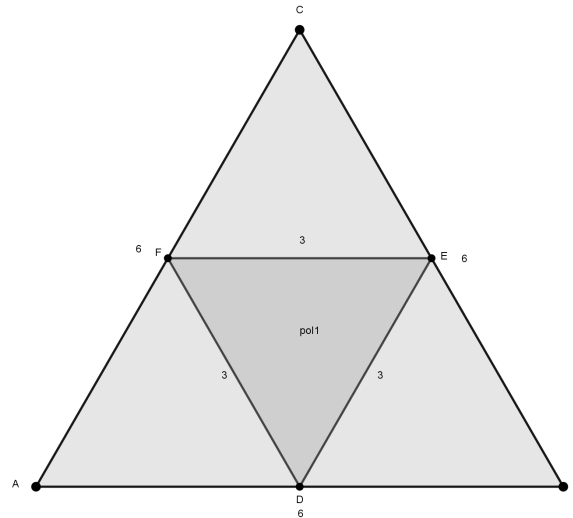


Figura 48: Geogebra - triângulos equiláteros $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$

4.2 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

4.2.1 Demonstrações para sala de aula

A seguir apresentamos, como sugestão, a demonstração de dois importantes resultados da geometria hiperbólica.

Exercício 10. Demonstre o seguinte teorema:

Se dois triângulos são semelhantes, então eles são congruentes. (Em outras palavras, AAA é um critério válido para congruência de triângulos.)

Solução:

Sejam dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$. Vamos supor que os lados correspondentes não são congruentes e que $|DE| > |AB|$. Seja $P \in \overline{DE}$, tal que $\overline{AB} \cong \overline{DP}$. Então, deve existir um ponto Q na semirreta \overrightarrow{DF} , tal que $\overline{AC} \cong \overline{DQ}$.

- Se $|DQ| < |DF|$, da congruência $\triangle ABC \cong \triangle DPQ$ e dos ângulos correspondentes dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ temos que $\angle E \cong \angle DPQ$, $\angle F \cong \angle PQD$. O que significa que a soma dos ângulos internos do quadrilátero convexo $PEFQ$ é igual a 360° (quatro retos), o que pelo Corolário 3.7 é impossível.

- Se $|DQ| = |DF|$, então $Q = F$. E como $\angle EFD \cong \angle PQD$, devemos ter $P = E$. O que é uma contradição, pois $|DE| > |AB| = |DP|$.
- Se $|DQ| > |DF|$, teríamos o triângulo $\triangle GQF$ sendo o ponto G a interseção dos segmentos \overline{PQ} e \overline{EF} . Como $\angle PQD \cong \angle EFD$, o triângulo $\triangle GQF$ possui um ângulo externo congruente a um ângulo interno não adjacente contrariando o Teorema 2.17.

Exercício 11. Demonstre a seguinte proposição:

Se duas retas admitem uma perpendicular comum, então elas não se intersectam e a perpendicular é única.

Solução (Baseado em [1, p. 81,82]):

Suponha a reta t perpendicular às retas r e s . Pelo Teorema 2.12, as retas r e s são paralelas. Sejam A e B os pontos de interseção de t com as retas r e s , respectivamente. Queremos mostrar que t é a única perpendicular comum das retas r e s . Vamos supor o contrário, que existe outra reta u perpendicular a r e s , e sejam A' e B' os pontos de interseção de u com r e s , respectivamente. Ou as retas t e u se intersectam, ou não.

Se as t e u se intersectam num ponto P , então teríamos passando por P duas retas perpendiculares à uma mesma reta, o que contraria o Teorema 2.28.

Se u é paralela a t , então o quadrilátero $ABB'A'$ é retângulo, ou seja um quadrilátero cujas medidas dos ângulos internos somam 360° o que é uma contradição do Lema 3.1.

Logo, não existe outra perpendicular comum às retas r e s .

4.2.2 Disco de Poincaré no Geogebra, primeiros passos

Aqui iremos descrever as atividades propostas para a geometria hiperbólica no software Geogebra. Iremos apresentar passo a passo a construção do disco, as ferramentas que utilizaremos para criar cada elemento do disco, a criação de novas ferramentas e construção de retas paralelas no disco.

Atividade 1: Criando o disco de Poincaré no Geogebra

(1) Abra o Geogebra e, na barra de ferramentas, selecione “**círculo: centro e raio**”;

- (2) crie o ponto A na origem do plano cartesiano, digite 1 no campo “raio” e clique em OK;
- (3) clique com o botão direito do mouse no ponto A , clique em “renomear”, renomeie o ponto A para O ;
- (4) clique com o botão direito do mouse no círculo, clique em “propriedades”, clique em “estilo” e selecione linha tracejada (figura 49).
- (5) clique com o botão direito do mouse na malha do plano e desmarque as opções “eixos” e “malha” para ocultar ambos (figura 50).

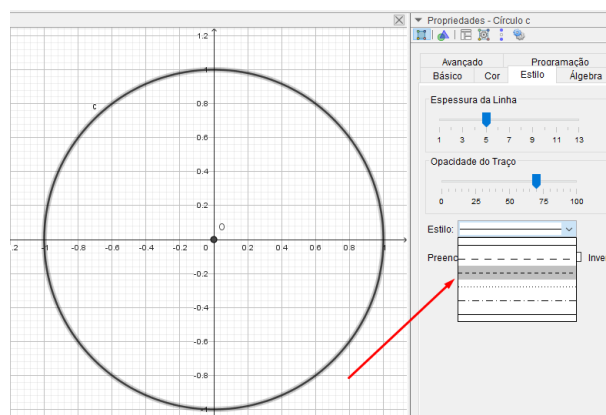


Figura 49: Criando o Disco de Poincaré no Geogebra

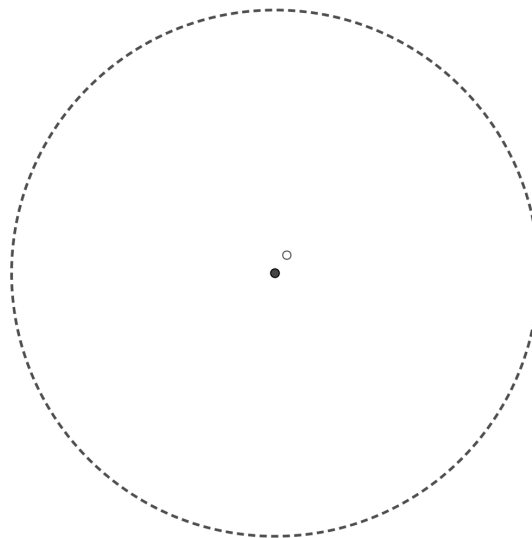


Figura 50: Disco de Poincaré no Geogebra

Atividade 2: Reta hiperbólica passando por dois pontos

No disco criado anteriormente, siga os seguintes passos:

- (1) Na barra de ferramentas, selecione a opção “**ponto**”;
- (2) marque dois pontos distintos A e B na região interna do círculo;
- (3) selecione na barra de ferramnetas a opção “**inversão**” (figura 51) e, em seguida, clique no ponto A e depois na borda do círculo para que seja determinado o ponto A' que é a inversão do ponto A ;

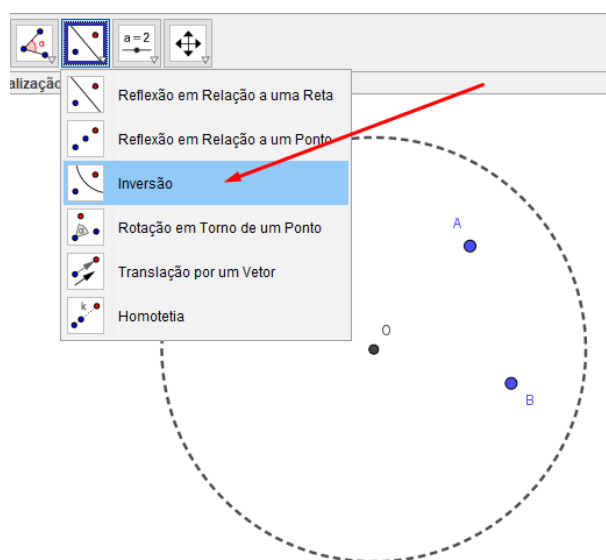


Figura 51: Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: inversão

- (4) selecione na barra de ferramentas a opção “**círculo definido por três pontos**” e em seguida clique nos pontos A , B e A' para que seja criado o círculo que passa pelos pontos selecionados (figura 52);
- (5) na barra de ferramentas, selecione a opção “**interseção de dois objetos**” e em seguida clique em um círculo e depois no outro para determinar os pontos de interseção C e D ;
- (6) selecione a opção “**arco cuncircular**” (figura 53) na barra de ferramentas, clique nos pontos C , A e D e em seguida clique na tecla “**esc**”;

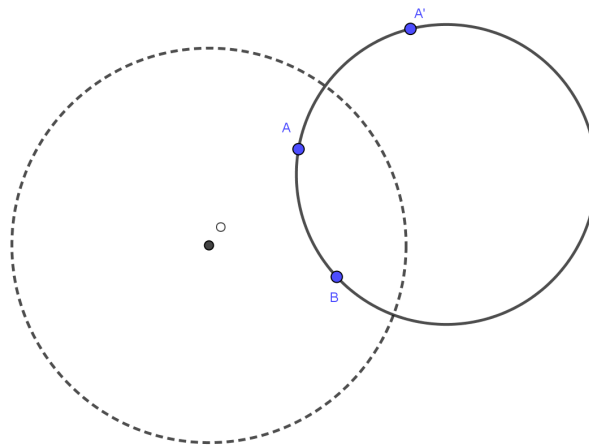


Figura 52: Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: círculo passando por três pontos

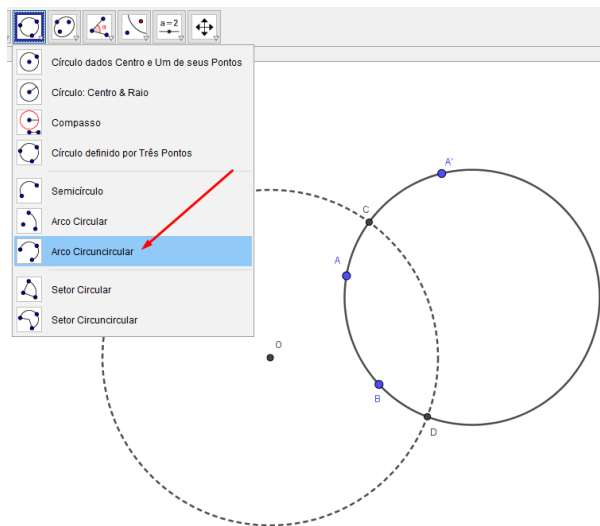


Figura 53: Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: arco circuncircular

(7) clique com o botão direito do mouse na borda do segundo círculo e desmarque a opção “**exibir objeto**”, faça o mesmo com os pontos A' , C e D .

Assim, temos a reta hiperbólica que passa pelos pontos A e B (figura 54).

Importante observar que se um dos dois pontos for o centro O do disco ou se os pontos A , B e O forem colineares (figura 55). Basta fazer o seguinte:

- (1) Selecionar a ferramenta “**reta**”;
- (2) clicar nos pontos A e B para que seja traçada a reta r que passará por O ;

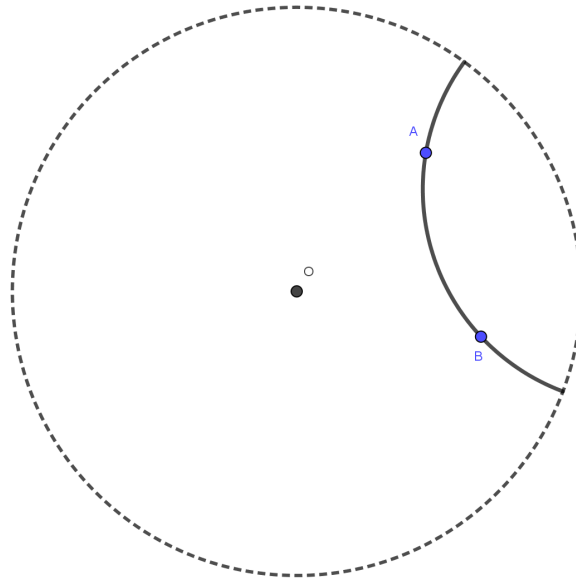


Figura 54: Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré passando pelos pontos A e B

- (3) selecione a ferramenta “**interseção de dois objetos**” e clique na reta r e na borda do disco para que sejam traçados os dois pontos que são interseções da reta r com o disco;
- (4) selecione a ferramenta “**segmento**” e clique nos dois pontos de r localizados na borda do disco para que seja traçado o segmento que é diâmetro do disco;
- (5) selecione a reta r com o botão direito do mouse, desmarque a opção “**exibir objeto**”;
- (6) faça o mesmo com os pontos do diâmetro localizados na borda do disco.

Atividade 3: Criar uma nova ferramenta no Geogebra

Vejamos como criar uma ferramenta no Geogebra para facilitar a construção de uma reta hiperbólica no disco de Poincaré. Utilize o disco criado na atividade anterior e siga os seguintes comandos:

- (1) Clique em “**ferramentas**” e depois em “**criar uma nova ferramenta**”;
- (2) no campo “**objetos finais**” selecione “**arco e: ArcoCircunCircular(C,A,D)**” (figura 56);

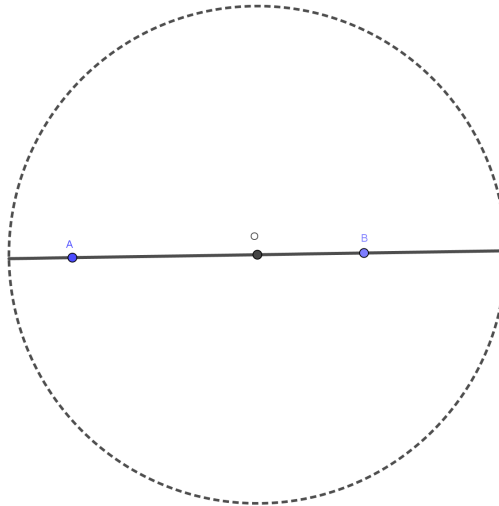


Figura 55: Geogebra - Reta hiperbólica no disco de Poincaré: diâmetro

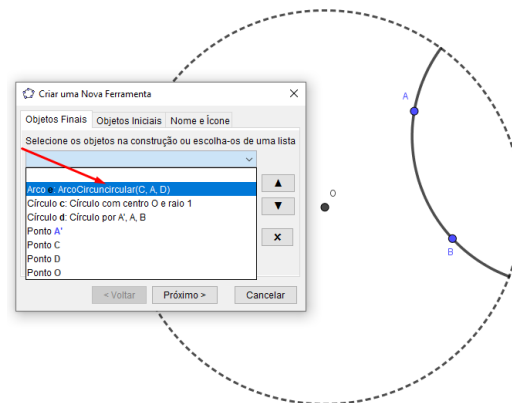


Figura 56: Geogebra - nova ferramenta

- (3) no campo “**objetos iniciais**”, selecione “**ponto A**”, “**ponto B**” e “**Círculo c: Círculo com centro O e raio 1**”, obs: para desmarcar algum item, selecione com o mouse e depois clique no “**x**”;
- (4) no campo “**nome e ícone**” digite o nome da nova ferramenta, por exemplo “**Reta Hiperbólica dados dois pontos**” (figura 57);
- (5) no campo “**ajuda da ferramenta**”, digite “**selecione dois pontos**” (figura 57);
- (6) clique em “**Concluído**”.

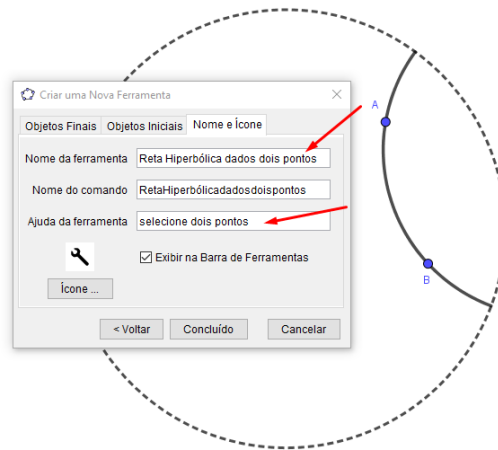


Figura 57: Geogebra - nova ferramenta: reta hiperbólica

A nova ferramenta está criada e o ícone já estará visível na barra de ferramentas. Para traçar uma reta hiperbólica no disco bastará marcar dois pontos no interior do disco, seleccionar a ferramenta criada, clicar nos dois pontos e em seguida na borda pontilhada do disco. Esta ferramenta pode traçar os dois tipos de reta hiperbólica no disco de Poincaré.

Atividade 4: Retas paralelas

- (1) Com exceção do disco e do ponto O , exclua todos os outros elementos do plano;
- (2) selecione a ferramenta “**ponto**” e trace os pontos A e B no interior do disco;
- (3) selecione a ferramenta criada anteriormente “**Reta Hiperbólica dados dois pontos**”, clique nos pontos A e B e, em seguida, na borda do disco para que seja traçada a reta hiperbólica l_1 ;
- (4) selecione a ferramenta “**ponto**” e trace os pontos D e E no interior do disco e repita o passo (3) para traçar a reta hiperbólica l_2 passando pelos pontos D e E , observando que l_1 e l_2 não se intersectem (figura 58).

Os pontos A , B , C e D podem ser “movimentados” com o mouse fazendo, assim, que as retas l_1 e l_2 “mudem” de posição.

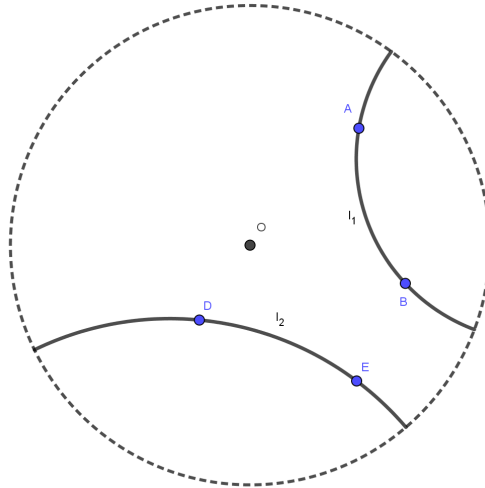


Figura 58: Geogebra - retas paralelas no disco de Poincaré

4.3 GEOMETRIA EUCLIDIANA

Nesta seção, propomos como exercício uma demonstração geométrica da função régua de Birkhoff a partir dos axiomas de Hilbert. Dada uma reta r , sugerimos os seguintes passos: mostrar que o conjunto de pontos de r : é um conjunto ordenado, é um conjunto completo, é munido das operações de adição e multiplicação e, finalmente, mostrar que possui estrutura de corpo, isto é que satisfaz os Axiomas R.1, R.2, R.3, R.4, R.5 e R.6. Daí, se os pontos da reta r é um corpo ordenado completo, então, pelo Teorema 1.7, deve haver uma bijeção entre os pontos de r e os elementos de \mathbb{R} .

4.3.1 *Mostrar a função régua de Birkhoff através dos axiomas de Hilbert*

Propomos a seguir uma sequência de exercícios, em sua maioria resolvidos, para esta demonstração.

Exercício 12 (Resolvido). Mostre que os pontos da reta r formam um conjunto ordenado.

Solução:

Seja a reta r e, P_r o conjunto de todos os pontos de r .

- Sejam os pontos O e A pertencentes a r , tal que $A \neq O$;

- Considere o ponto A à direita de O (ver Capítulo 1, argumento após a demonstração da Proposição 1.26);
- Dado um ponto $B \in r$, dizemos que B está à direita de O se $O * B * A$ ou $O * A * B$

Exercício 13 (Resolvido). Mostre que P_r é um conjunto completo.

Solução:

Pelo Axioma de Dedekind (H.14), a reta r é completa. Logo, P_r é um conjunto completo.

Exercício 14 (Resolvido). Mostre que a adição e a multiplicação estão definidas em P_r .

Solução:

- Associe o ponto O ao número real 0 e dado um ponto $P \in r$, P será associado ao número real $|OP|$ (medida do segmento \overline{OP}).
- Sejam os pontos distintos B e C em r à direita de O . Pelo Axioma H.8, existe um único ponto D na semirreta \overrightarrow{OA} , tal que $\overline{OB} \cong \overline{OC}$. Assim, temos que $OB + OC = OD$.
- Trace a semirreta \overrightarrow{OT} , com $O \notin r$ (figura 59). Defina os pontos A em r , B em \overrightarrow{OT} e P em \overrightarrow{OT} de modo que $OP = 1$. Trace o segmento \overline{PA} . Defina o ponto $X \in r$, tal que $\overleftrightarrow{PA} \parallel \overleftrightarrow{BX}$. Assim temos a seguinte relação

$$\frac{OA}{1} = \frac{OX}{OB}$$

Portanto, $OX = OA \cdot OB$

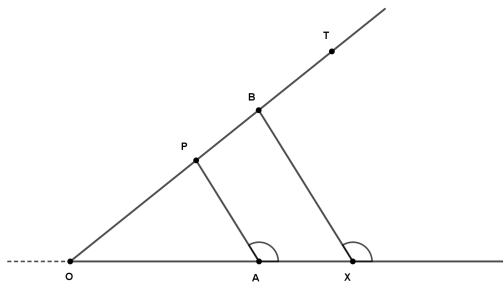


Figura 59: A multiplicação no conjunto de pontos de r

Exercício 15. Mostre que P_r satisfaz o Axioma R.1 (Comutatividade).

- **Adição:** Dada a reta r e os pontos O , A e B pertencentes a r , tal que o ponto O seja associado ao número real 0 e os pontos A e B associados aos números reais $|OA|$ e $|OB|$, respectivamente (figura 60). Vamos supor $|OA| < |OB|$, isto é $O * A * B$. Como vimos no exercício 14, existe um ponto D na semirreta \overrightarrow{OA} tal que $|OA| + |OB| = |OD|$. Do mesmo modo, existe um ponto D' , na semirreta \overrightarrow{OA} tal que $|OB| + |OA| = |OD'|$. Agora devemos mostrar que $D = D'$. Observe que $O * A * D$ e $D' * B * O$ e, por construção, $|OA| = |D'B|$ e $|AD| = |BO|$. Daí, pelo Axioma H.4, temos que $|OD| = |D'O|$, ou seja $|OD| = |OD'|$. O que significa que $D = D'$, e então $|OA| + |OB| = |OB| + |OA|$.
- **Multiplicação (Sugestão):** Ver demonstração constante em [22, p. 424, 425].

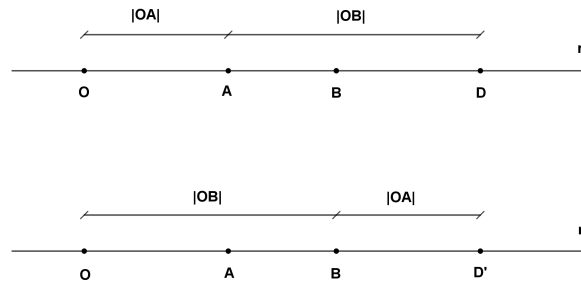


Figura 60: $|OA| + |OB| = |OD|$ e $|OB| + |OA| = |OD'|$

Exercício 16. Mostre que P_r satisfaz o Axioma R.2 (Associatividade).

- **Adição:** Aqui, sugerimos a utilização dos Axiomas H.8, H.9 e H.10, além da lei comutativa da adição demonstrada no exercício anterior.
- **Multiplicação (Resolvido):** Apresentamos, como sugestão, uma adaptação da demonstração disponível em [22]:

Considere \overrightarrow{Or} e \overrightarrow{Os} duas semirretas perpendiculares com origem em O .

- (1) Marcamos os pontos E e B na semirreta \overrightarrow{Or} e os pontos A e C na semirreta \overrightarrow{Os} . Sejam os números reais 1 , b , a e c associados aos pontos E , B , A e C , respectivamente.
- (2) Traçamos uma paralela a \overline{AE} passando por B , que intersecta \overrightarrow{Os} no ponto P_1 associado ao número real ab (figura 61).
- (3) Em seguida, traçamos uma paralela a \overline{CE} passando por B , que intersecta \overrightarrow{Os} no ponto P_2 associado ao número real cb . Observe que, pelo Axioma H.8,

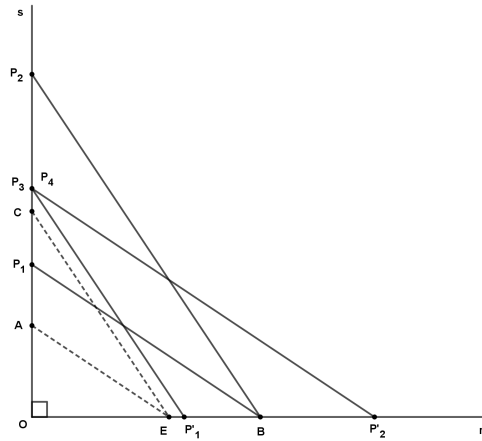


Figura 61: Associatividade da multiplicação

podemos construir segmentos congruentes a $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ na semirreta \vec{Or} a partir de O .

- (4) Marcamos o ponto P'_1 na semirreta \vec{Or} tal que $\overline{OP'_1} \cong \overline{OP_1}$, isto é, $|OP'_1| = |OP_1| = ab$.
- (5) Traçamos a paralela a \overline{CE} passando por P'_1 , intersectando \vec{Os} no ponto P_3 associado ao número real $c(ab)$.
- (6) Marcamos o ponto P'_2 na semirreta \vec{Or} tal que $\overline{OP'_2} \cong \overline{OP_2}$, isto é, $|OP'_2| = |OP_2| = cb$.
- (7) Traçamos a paralela a \overline{AE} passando por P'_2 , intersectando \vec{Os} no ponto P_4 associado ao número real $a(cb)$.

Daí, $a(bc) = a(cb) = c(ab) = (ab)c$.

Exercício 17 (Resolvido). Mostre que P_r satisfaz o Axioma R.3 (Distributiva).

Solução:

Faremos aqui, uma adaptação da demonstração disponível em [22, p. 426].

Considere \vec{Or} e \vec{Os} duas semirretas perpendiculares com origem em O e, os pontos C, E e B pertencentes a \vec{Or} tal que $O * C * E * B$ e seja o ponto A pertencente a \vec{Os} . Sejam os números reais positivos $a, c, 1$, e b associados aos pontos A, C, E , e B , respectivamente e o número 0 , associado ao ponto O .

- (1) Marque o ponto P_1 em \vec{Or} de modo que $|OP_1| = |OB| + |OC|$, isto é, $|OP_1| = b + c$.

- (2) Marque os pontos P_2, P_3 e P_4 em \vec{Os} de modo que esses pontos sejam associados aos produtos ac, ab e $a(b+c)$, respectivamente (figura 62). Esses produtos são obtidos como vimos nos exercícios anteriores. Observe que temos três retas $\overleftrightarrow{P_2C}$, $\overleftrightarrow{P_3B}$ e $\overleftrightarrow{P_4P_1}$ paralelas a \overleftrightarrow{AE} .

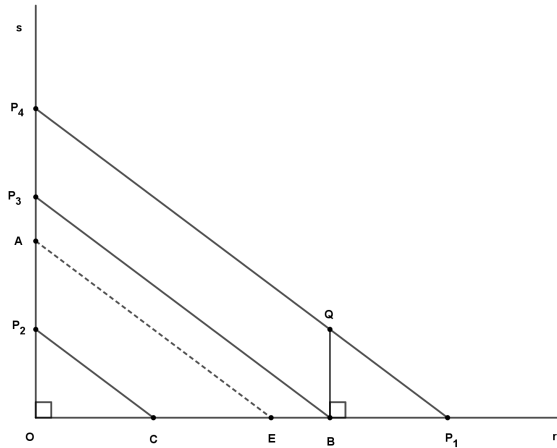


Figura 62: Distributiva

- (3) Trace a paralela a \vec{Os} passando por B e intersectando $\overleftrightarrow{P_4P_1}$ no ponto Q .
- (4) Pelo caso ALA, temos $\triangle P_2OC \cong \triangle QBP_1$. Então, $|OP_2| = |BQ|$.
- (5) No paralelogramo P_4P_3BQ , temos $\overline{P_3P_4} \cong \overline{BQ}$, ou seja $|P_3P_4| = |BQ|$, pois são lados opostos². Então, na semirreta \vec{Os} temos $\overline{OP_2} \cong \overline{P_3P_4}$, ou seja $|OP_2| = |P_3P_4|$. O que significa que $ab + ac = a(b+c)$.

Exercício 18. Mostre que P_r satisfaz o Axioma R.4 (Identidade ou elemento neutro).

- **(Adição):** Deve-se mostrar que a adição do ponto O com P , um ponto qualquer de r , resulta em P .
- **(Multiplicação):** Deve-se mostrar que existe $E \in r$, tal que a multiplicação do ponto E com P , um ponto qualquer de r , resulta em P .

Exercício 19. Mostre que P_r satisfaz o Axioma R.5 (Existência de opostos ou simétricos).

² É importante que a demonstração, ou algum comentário a respeito, dessa propriedade do paralelogramo seja feita previamente.

Sugestão:

Mostre que dado um ponto P na semirreta \vec{Or} , existe um ponto P' na semirreta oposta a \vec{Or} , tal que $P + P' = O$.

Exercício 20 (resolvido). Mostre que P_r satisfaz o Axioma R.6 (Existência de inversos).

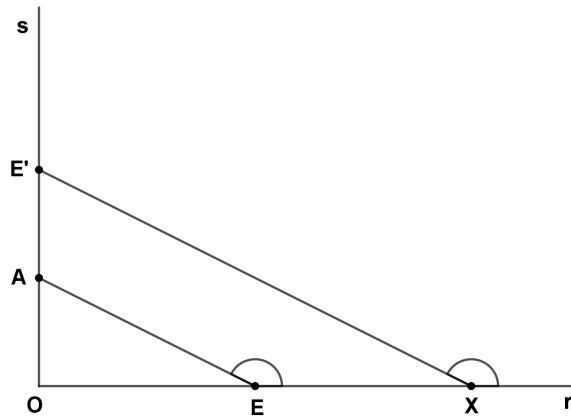


Figura 63: Existência de inverso

Solução:

Considere duas semirretas \vec{Or} e \vec{Os} , formando um ângulo menor que 180° , os pontos E e X em \vec{Or} e os pontos A e E' em \vec{Os} de modo que $O * A * E'$, $O * E * X$ e $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{E'X}$. Sejam os pontos E , X , A e E' associados aos números reais 1 , x , a e 1 , respectivamente. Da semelhança dos triângulos $\triangle OEA$ e $\triangle OXE'$, temos a seguinte relação:

$$\frac{OA}{OE'} = \frac{OE}{OX} \implies \frac{OA}{1} = \frac{1}{OX} \implies OX \cdot OA = 1$$

Assim, o ponto X é o inverso do ponto A , uma vez que o produto $OX \cdot OA$ é igual ao ponto E associado ao número real 1 .

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos dois sistemas de axiomas para a geometria euclidiana: Axiomas de Hilbert e Axiomas de Birkhoff. Para demonstrar os resultados da geometria neutra constantes no capítulo 2, observamos que em alguns casos os axiomas de Hilbert eram de fato mais práticos e em outros casos, os axiomas de Birkhoff. Daí, optamos por

demonstrar a equivalência dos dois sistemas de axiomas para compatibilizar o uso de axiomas tanto de um sistema quanto de outro³. Conforme já mencionado no Capítulo 1, essa demonstração foi proposta em duas etapas:

1. mostrar que os axiomas de Birkhoff implicam os axiomas de Hilbert.
2. mostrar que os axiomas de Hilbert implicam os axiomas de Birkhoff.

Essa demonstração, mesmo não completa (pois algumas etapas das demonstrações do postulado da régua e do postulado do transferidor, deixamos a cargo do leitor interessado) muito contribui para o trabalho.

Apresentamos o conceito de geometrias não euclidianas e uma breve introdução à geometria hiperbólica. A parte final do trabalho foi concebida com o objetivo de levar alguns conceitos e resultados das geometrias neutra, hiperbólica e euclidiana ao aluno do ensino médio, ou pelo menos que possam esses resultados estar ao seu alcance.

Por fim, este trabalho fornece algumas opções de desenvolvimentos futuros, como: geometria hiperbólica, geometria euclidiana axiomática no ensino médio, geometria neutra, a completude da reta e as várias versões do axioma de completude, as tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides, as várias versões e equivalências do quinto postulado.

³ ressaltamos que, por não estar completa a demonstração da equivalência, optamos pelos axiomas de Birkhoff ou os axiomas de Hilbert que deduzimos a partir dos axiomas de Birkhoff, para as demonstrações dos resultados da geometria neutra no Capítulo 2

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDRADE, Plácido: *Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de Poincaré*. SBM, 2013
- [2] APOSTOL, Tom M.: *Calculus, Volume 1*. John Wiley & Sons, 1967
- [3] ARTMANN, Benno: *Euclid — the creation of mathematics*. Springer Science & Business Media, 1999
- [4] BARBOSA, João Lucas M.: *Geometria hiperbólica*. IMPA, 2007
- [5] BOYER, Carl B. ; MERZBACH, Uta C.: *História da matemática*. Editora Blucher, 2019
- [6] BRANNAN, David A. ; ESPLEN, Matthew F. ; GRAY, Jeremy J.: *Geometry*. Cambridge University Press, 2012
- [7] BURTON, David M.: *The History of Mathematics: An Introduction*. McGrawHill, 2006
- [8] CAJORI, Florian: *A history of mathematics*. American Mathematical Soc., 1999
- [9] EUCLIDES: *Os elementos - tradução de Irineu Bicudo*. Unesp, 2009
- [10] EVES, Howard: *An introduction to the history of mathematics*. Saunders College Publishing, 1990
- [11] GOW, James: *A short history of Greek mathematics*. Cambridge University Press, 2010
- [12] GRATTAN-GUINNESS, I.: *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940: Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*. Princeton University Press, 2011. – URL <https://books.google.com.br/books?id=LcCx9MR0pbUC>. – ISBN 9781400824045
- [13] GREENBERG, Marvin J.: *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history*. H. W. Freeman, 2007

- [14] HARTSHORNE, Robin: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer-verlag, 2000
- [15] HILBERT, David: *The foundations of geometry*. Open court publishing Company, 1902
- [16] KATZ, Victor J.: *A history of mathematics - an introduction*. Pearson, 2009
- [17] LIMA, Elon L.: *Análise Real Volume 1*. Impa, 2007
- [18] MOISE, Edwin E.: *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Addison-Wesley, 1990
- [19] MONTEIRO, Luiz Henrique J.: *Elementos de álgebra*. Livro Tecnico e Cientifico, 1978
- [20] RAMSAY, Arlan ; RICHTMYER, Robert D.: *Introduction to hyperbolic geometry*. Springer, 1985
- [21] REZENDE, Eliane Quelho F. ; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim d.: *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Unicamp, 2008
- [22] ROTHE, Franz: *Old and New Topics in Geometry - Volume 1*. Litprime, 2022