



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**  
**DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**  
**PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA PROFISSIONAL EM REDE**  
**NACIONAL**

**CARLOS ANTÔNIO MARQUES DE SOUSA**

**UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O CÁLCULO DE VOLUMES DE**  
**INTERSEÇÃO ENTRE SÓLIDOS UTILIZANDO A LINGUAGEM PYTHON**

**MOSSORÓ**

**2023**

CARLOS ANTÔNIO MARQUES DE SOUSA

UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O CÁLCULO DE VOLUMES DE  
INTERSEÇÃO ENTRE SÓLIDOS UTILIZANDO A LINGUAGEM PYTHON

Dissertação apresentada ao Programa de  
Mestrado em Matemática Profissional em Rede  
Nacional da Universidade Federal Rural do  
Semiárido (UFERSA) como requisito para a  
obtenção do grau de Mestre em Matemática.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Antônia Joci-  
vânia Pinheiro

Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Li-  
nhares da Silva

MOSSORÓ

2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

SOUS      Sousa, Carlos Antônio Marques de .  
Aa          Uma abordagem metodológica para o cálculo de  
volumes de interseção entre sólidos utilizando a  
linguagem Python / Carlos Antônio Marques de  
Sousa. - 2023.  
112 f. : il.

Orientadora: Antônia Jocivania Pinheiro.  
Coorientador: Paulo César Linhares da Silva.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em  
--Selecione um Curso ou Programa--, 2023.

1. Resolução de problemas. 2. Geometria  
Espacial . 3. Python. I. Pinheiro, Antônia  
Jocivania, orient. II. Silva, Paulo César  
Linhares da, co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade  
com AACR2 e os dados fornecidos pelo autor(a).  
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência  
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva  
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

CARLOS ANTÔNIO MARQUES DE SOUSA

UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O CÁLCULO DE VOLUMES DE  
INTERSEÇÃO ENTRE SÓLIDOS UTILIZANDO A LINGUAGEM PYTHON

Dissertação apresentada ao Programa de  
Mestrado em Matemática Profissional em Rede  
Nacional da Universidade Federal Rural do  
Semiárido (UFERSA) como requisito para a  
obtenção do grau de Mestre em Matemática.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Profa. Dra. Antônia Jocivania Pinheiro (Orientadora)  
Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA)

---

Prof. Dr. Paulo César Linhares da  
Silva (Coorientador)  
Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA)

---

Profa. Dra. Maria Joseane Felipe Guedes  
Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA)

---

Prof. Dr. Valdicleis da Silva Costa  
Universidade Federal do Vale do São Francisco  
(UNIVASF)

À minha mãe, seus esforços permitiram que eu conseguisse conquistar sonhos. À minha esposa, companheira de valor inestimável e participante de todos os meus méritos. Filha, sua vida é uma motivação inigualável para eu continuar todos os dias.

## AGRADECIMENTOS

A Deus que nos permitiu alcançar mais este sonho, que me fez compreender que as dificuldades até aqui foram oportunidades de aperfeiçoamento.

A professora Doutora Antônia Jocivânia Pinheiro e ao professor Doutor Paulo César Linhares da Silva por orientarem a minha Dissertação e por seus ensinamentos que foram muito valiosos nessa trajetória e suas brilhantes e assertivas contribuições.

A minha família, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo, compreenderam a necessidade de mais dedicação a esse projeto e foram insentivadores constantes nos momentos mais difíceis!

Aos colegas de turma, companheiros valiosos nas dificuldades que enfrentamos ao longo deste mestrado e que se revelaram inspirações notáveis em suas histórias e particularidades.

Aos colegas de viagem: Paulo André, Wemerson e Alan. Nessas horas que enfrentamos de Fortaleza à Mossoró tivemos a oportunidade de compartilhar experiências e conhecimentos, momentos valiosos de estudos e risadas.

Agradeço a todos os professores por sua conduta compromissada, tratamento acolhedor e respeito, palavras de incentivo e inspiração. Tenho orgulho de ter sido aluno de cada um, espero honrar seus ensinamentos e alcançar o grau de competência que testemunhei nesse breve período que convivemos.

E à Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo financiamento da pesquisa de mestrado por meio da bolsa de fomento.

“Se as pessoas não acreditam que a matemática é simples, é só porque elas não percebem como complicada a vida é.”

(Jonh von Neumann)

## RESUMO

Nesse trabalho, apresentamos o problema do estudo do volume da região de intersecção entre sólidos como um problema motivador para aprendizagem de Geometria Espacial, trabalhando com a metodologia da resolução de problemas e utilizando a linguagem Python como ferramenta auxiliar. Os sólidos geométricos abordados são: o cilindro, o cone, a esfera, o prisma de base hexagonal e a pirâmide. Além de obter funções que permitem determinar os volumes procurados e construir o gráfico destas funções utilizando a linguagem Python, também é realizado um estudo sobre os valores máximos dessas funções de forma analítica e utilizando a linguagem de programação. Para o cilindro, a esfera e o prisma foi observado que, da forma que o problema foi abordado e por suas simetrias, o valor máximo das funções é igual ao volume dos sólidos. Para o cone e a pirâmide, são determinadas expressões proporcionais ao volume dos sólidos, que permitem encontrar esse valores máximos de forma analítica, porém a linguagem de programação permite calcular esses valores máximos. São feitas comparações entre os dois métodos apresentados e os erros percentuais em relação aos dois métodos em todos os casos são menores que 1%, atestando a confiabilidade do uso da linguagem de Python como ferramenta de estudo de problemas da Geometria Espacial. O problema abordado é um recurso didático que envolve vários conhecimentos e pode ser uma ferramenta para o ensino dos tópicos apresentados no trabalho.

**Palavras-chave:** Resolução de problemas; Geometria Espacial; Python.



## ABSTRACT

In this work, we present the problem of studying the volume of the intersection region between solids as a motivating problem for learning Spatial Geometry, working with the problem-solving methodology and using Python as an auxiliary tool. The geometric solids covered are: cylinder, cone, sphere, hexagonal prism and pyramid. In addition to obtaining functions that allow us to determine the volumes sought and construct the graph of these functions using Python language, a study is also carried out on the maximum values of these functions analytically and using the programming language. For the cylinder, sphere, and prism it was observed that, due to the way the problem is approached and its symmetries, the maximum value of the functions is equal to the volume of solids. For the cone and pyramid, expressions proportional to the volume of solids are determined that allow these maximum values to be found analytically, but programming language allows these maximum values to be calculated. Comparisons are made between the two methods presented and the percentage errors in relation to both methods in all cases are less than 1%, attesting to the reliability of using the Python language as a tool for studying problems in Spatial Geometry. The problem addressed is a didactic resource that involves several knowledge areas and can be a tool for teaching topics presented in this work.

**Keywords:** Problems solving; Spatial Geometry; Python.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ponto $A$ , reta $\overleftrightarrow{BC}$ , plano $\alpha$ e polígono HIJKLM. . . . .	25
Figura 2 – Nomeação de um ângulo $\hat{A}BC$ utilizando os pontos sobre seus lados e uma letra grega $\alpha$ para sua medida . . . . .	25
Figura 3 – Triângulos semelhantes . . . . .	26
Figura 4 – Triângulos isósceles $ABC$ . . . . .	27
Figura 5 – Triângulos isósceles $ABC$ com altura $AH$ . . . . .	27
Figura 6 – Triângulo retângulo $ABC$ de altura $h$ . . . . .	28
Figura 7 – Triângulo $ABC$ de altura $h$ . . . . .	28
Figura 8 – Esfera de raio $R$ e centro $A$ . . . . .	29
Figura 9 – Cone duplo de raio da base $R$ e altura $h$ e eixo $e$ . . . . .	30
Figura 10 – Cilindro de raio da base $R$ , altura $h$ e eixo $e$ . . . . .	30
Figura 11 – Prisma de bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ e altura $h$ . . . . .	31
Figura 12 – Pirâmide de base $ABCDE$ , vértice $V$ e altura $h$ . . . . .	32
Figura 13 – Prisma particionado em tetraedros . . . . .	34
Figura 14 – Pirâmide particionado em tetraedros . . . . .	35
Figura 15 – O volume Cilindro a partir do volume do paralelepípedo . . . . .	36
Figura 16 – O volume do Cone a partir do volume da pirâmide . . . . .	36
Figura 17 – O volume da Esfera . . . . .	37
Figura 18 – Tronco de pirâmide obtido da secção da pirâmide $VABCDE$ . . . . .	38
Figura 19 – Tronco de cone obtido da rotação do trapézio $ABCD$ sobre o lado $BC$ , sendo $h = BC$ , $r = BD$ e $R = AC$ . . . . .	39
Figura 20 – Calota Esférica . . . . .	40
Figura 21 – Cilindros $C_1$ e $C_2$ . . . . .	42
Figura 22 – Bases do cilindros $C_1$ e $C_2$ . . . . .	42
Figura 23 – Bases dos cilindros $C_1$ e $C_2$ em relação ao intervalo de $2R$ a $4R$ . . . . .	44
Figura 24 – Cones $C_1$ e $C_2$ . . . . .	46
Figura 25 – Secção dos cones $C_1$ e $C_2$ . . . . .	46
Figura 26 – Triângulos $PV_2Q$ e $QV_1P$ . . . . .	46
Figura 27 – Cones $C_1$ e $C_2$ quando $H < x \leq 2H$ . . . . .	48
Figura 28 – Cones $C_1$ e $C_2$ quando $H < x \leq 2H$ destacando o deslocamento de $C_2$ . . . . .	48
Figura 29 – Secção da interseção dos cones $C_1$ e $C_2$ . . . . .	49

Figura 30 – Esferas $E_1$ e $E_2$ se intersectando na origem do plano $xyz$ . . . . .	51
Figura 31 – Esferas $E_1$ e $E_2$ formando uma região de interseção . . . . .	52
Figura 32 – Secção pelo plano $\alpha$ das Esferas $E_1$ e $E_2$ quando $x < R$ . . . . .	52
Figura 33 – Interseção das esferas $E_1$ e $E_2$ quando $x \geq 2R$ . . . . .	53
Figura 34 – Prismas $P_1$ e $P_2$ de bases hexagonais . . . . .	55
Figura 35 – Hexágonos $H_1$ e $H_2$ . . . . .	55
Figura 36 – Hexágonos $H_1$ e $H_2$ com destaque para o triângulo $B'F'A'$ . . . . .	56
Figura 37 – Hexágonos $H_1$ e $H_2$ com destaque para o hexágono $BAFF'A'B'$ . . . . .	57
Figura 38 – Hexágonos $H_1$ e $H_2$ com destaque para o hexágono $C'D'E'EDC$ . . . . .	58
Figura 39 – Hexágonos $H_1$ e $H_2$ com destaque para o losângulo $GDG'D'$ . . . . .	58
Figura 40 – interseção dos volumes das pirâmides $P_1$ e $P_2$ . . . . .	60
Figura 41 – Triângulos resutantes da secção das pirâmides . . . . .	60
Figura 42 – Interseção dos volumes das pirâmides $P_1$ e $P_2$ para $H \leq x \leq 2H$ . . . . .	62
Figura 43 – Secção lateral das pirâmides $P_r$ e $P_s$ . . . . .	62
Figura 44 – A integral como a medida da área abaixo de uma curva . . . . .	64
Figura 45 – A integral como a medida da área abaixo de uma curva: soma inferior . . . . .	65
Figura 46 – A integral como a medida da área abaixo de uma curva: soma superior . . . . .	66
Figura 47 – Função que gera a esfera por rotação em torno do eixo $x$ . . . . .	67
Figura 48 – Função que gera o cone por rotação em torno do eixo $x$ . . . . .	68
Figura 49 – Função que gera o cilindro por rotação em torno do eixo $x$ . . . . .	69
Figura 50 – Função que gera a calota esférica por rotação em torno do eixo $x$ . . . . .	70
Figura 51 – Função que gera o tronco de cone por rotação em torno do eixo $x$ . . . . .	71
Figura 52 – Região $R$ e sólido $T$ gerado a partir da rotação da região $R$ em torno do eixo $x$ . . . . .	72
Figura 53 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de $f$ e $g$ . . . . .	73
Figura 54 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de $g$ e $f$ . . . . .	74
Figura 55 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de $g$ e $f$ . . . . .	75
Figura 56 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de $g$ e $f$ . . . . .	75
Figura 57 – Vista superior dos Cilindros $C_1$ e $C_2$ . . . . .	77
Figura 58 – Vista tridimensional dos Cilindros $C_1$ e $C_2$ . . . . .	77
Figura 59 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de $g$ e $f$ para os cilindros . . . . .	78
Figura 60 – Prismas $P_1$ e $P_2$ . . . . .	79
Figura 61 – Aproximação dos Prismas $P_1$ e $P_2$ com $0 \leq d \leq a$ . . . . .	80

Figura 62 – Aproximação dos Prismas $P_1$ e $P_2$ com $a < d \leq 2a$ . . . . .	80
Figura 63 – Afastamento dos Prismas $P_1$ e $P_2$ com $2a < d \leq 3a$ . . . . .	81
Figura 64 – Afastamento dos Prismas $P_1$ e $P_2$ com $3a < d \leq 4a$ . . . . .	81
Figura 65 – Interseção dos volumes das p Pirâmides $P_1$ e $P_2$ . . . . .	81
Figura 66 – Interseção dos volumes das Pirâmides $P_1$ e $P_2$ para $H \leq x \leq 2H$ . . . . .	82
Figura 67 – Gráfico da função do volume de inteserção entre os cilindros . . . . .	85
Figura 68 – Gráfico da função do volume de interseção entre os cones . . . . .	86
Figura 69 – Gráfico da função do volume de interseção entre as esferas . . . . .	88
Figura 70 – Gráfico da função do volume de interseção entre os prismas de base hexagonal	89
Figura 71 – Gráfico da função do volume de interseção entre as pirâmides . . . . .	90

## LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1	– Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre os cilindros . . .	84
Algoritmo 2	– Algoritmo para gerar o gráfico de uma função $f$ . . . . .	84
Algoritmo 3	– Algoritmo para encontrar o valor máximo de uma função $f$ . . . . .	85
Algoritmo 4	– Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre os cones . . . .	86
Algoritmo 5	– Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre as esferas . . .	87
Algoritmo 6	– Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre prismas de base hexagonal . . . . .	89
Algoritmo 7	– Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre as pirâmides . .	90
Algoritmo 8	– Função $A(x)$ referente ao cilindro . . . . .	92
Algoritmo 9	– Algoritmo para calcular o volume computacionalmente . . . . .	93

## LISTA DE CÓDIGOS-FONTE

Código-fonte 1	–	Código-fonte que gera o gráfico da região de interseção entre os cilindros	101
Código-fonte 2	–	Máximo da interseção entre os cilindros . . . . .	101
Código-fonte 3	–	Máximo da interseção entre os cones . . . . .	102
Código-fonte 4	–	Máximo da interseção entre as esferas . . . . .	102
Código-fonte 5	–	Máximo da interseção entre os prismas . . . . .	102
Código-fonte 6	–	Máximo da interseção entre as pirâmides . . . . .	102
Código-fonte 7	–	Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre os cones	103
Código-fonte 8	–	Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre as esferas	104
Código-fonte 9	–	Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre os prismas	104
Código-fonte 10	–	Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre as pirâmides . . . . .	106
Código-fonte 11	–	Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre cilindros .	107
Código-fonte 12	–	Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre os cones .	108
Código-fonte 13	–	Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre as esferas	109
Código-fonte 14	–	Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre os prismas	110
Código-fonte 15	–	Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre as pirâmides	111
Código-fonte 16	–	Código para calcular o volume do sólido de revolução da Seção 6.2 .	112

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC	<i>Base Nacional Comum Curricular</i>
ENEM	<i>Exame Nacional do Ensino Médio</i>
OBFEP	<i>Olimpíada Brasileira de Física das Escolas Públicas</i>
OBMEP	<i>Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas</i>
OBQ	<i>Olimpíada Brasileira de Química</i>
PISA	<i>Programa Internacional de Avaliação de Alunos</i>

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
2	A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS . . . . .	20
3	GEOMETRIA ESPACIAL: UM BREVE HISTÓRICO . . . . .	22
4	DEFINIÇÕES E TEOREMAS IMPORTANTES . . . . .	25
5	FUNÇÃO QUE EXPRIME O VOLUME DA REGIÃO DE INTERSEÇÃO ENTRE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS . . . . .	41
5.1	Sólidos de revolução . . . . .	41
5.1.1	<i>O Cilindro</i> . . . . .	41
5.1.2	<i>O Cone</i> . . . . .	45
5.1.3	<i>A Esfera</i> . . . . .	51
5.2	Poliedros . . . . .	54
5.2.1	<i>Prismas</i> . . . . .	54
5.2.2	<i>Pirâmides</i> . . . . .	59
6	AS EXPRESSÕES DE VOLUME COM O USO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL . . . . .	64
6.1	A integral de uma função . . . . .	64
6.2	Volume do sólido formado pela rotação da região compreendida entre duas funções usando integral . . . . .	71
6.3	Gerando as fórmulas dos volumes com Cálculo Diferencial e Integral . . . . .	72
6.3.1	<i>Volume da região de interseção entre Esferas</i> . . . . .	72
6.3.2	<i>Volume da região de interseção entre Cones</i> . . . . .	74
6.3.3	<i>Volume da região de interseção entre Cilindros</i> . . . . .	76
6.3.4	<i>Volume da região de interseção entre prismas</i> . . . . .	79
6.3.5	<i>Volume da região de interseção entre pirâmides</i> . . . . .	81
7	O USO DA LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON . . . . .	83
7.1	Criando o gráfico das funções da interseção de volumes . . . . .	83
7.1.1	<i>Gráfico do volume da interseção entre os cilindros</i> . . . . .	84
7.1.2	<i>Gráfico do volume da interseção entre os cones</i> . . . . .	86
7.1.3	<i>Gráfico do volume de interseção entre as esferas</i> . . . . .	87
7.1.4	<i>Gráfico do volume da interseção entre os prismas de base hexagonal</i> . . . . .	88



7.1.5	<i>Gráfico do volume da interseção entre as pirâmides</i> . . . . .	90
7.2	<b>Retrospectiva e Análise da Solução</b> . . . . .	91
7.3	<b>Método para calcular o volume de sólidos sem a função Volume</b> . . . . .	92
7.3.1	<i>Cálculo do volume da interseção entre cilindros</i> . . . . .	92
7.3.2	<i>Cálculo do volume da interseção entre Cones</i> . . . . .	93
7.3.3	<i>Cálculo do volume da interseção entre Esferas</i> . . . . .	93
7.3.4	<i>Cálculo do volume da interseção entre Prismas</i> . . . . .	93
7.3.5	<i>Cálculo do volume da interseção entre Pirâmides</i> . . . . .	94
7.3.6	<i>Usando Python para calcular o volume de um sólido de revolução</i> . . . . .	94
8	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	96
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	97
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	99
	<b>APÊNDICE A</b> – Comandos e Bibliotecas do Python . . . . .	99
	<b>APÊNDICE B</b> – Código-fontes em Python . . . . .	101
	<b>APÊNDICE C</b> – Código de cores em hexadecimal que podem ser usadas no Python para colorir gráficos . . . . .	113

## 1 INTRODUÇÃO

As dificuldades com o ensino de matemática são uma realidade na educação brasileira. Conforme o *Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA)* mais recente, no ano de 2018, 68,1% dos estudantes brasileiros de 15 anos não tem nível adequado de conhecimento em matemática (BRASIL, 2019), repercutindo nas etapas posteriores de aprendizagem.

Juntamente com esse fato, têm-se novas diretrizes educacionais que surgem com a implantação da *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*, em 2017, refletidas em uma educação baseada em competências e habilidades e por áreas de conhecimento, consolidando o que vinham seguindo os educadores. O que era estabelecido através do *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)* nos planejamentos pedagógicos conforme mostrado em Deleprani (2012).

Na BNCC, quando falado na aprendizagem de matemática, é mencionado diversas vezes o objetivo de sanar problemas sejam estes de cunho especificamente matemático ou que tenham aplicação na vida cotidiana do aluno, como pode se observar em BRASIL (2018, p.533), “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.”, sendo essa a competência específica 3 entre cinco competências previstas no documento.

No mesmo documento são feitas diversas referências a relação entre matemática e as tecnologias e, em uma das habilidades específicas, é feita a menção da programação como instrumento de aprendizagem como está em BRASIL (2018, p.541) “Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.”

Considerando o que é previsto pela BNCC e a necessidade de pluralidade nas formas de ensino, a metodologia de resolução de problemas atende bem o que se propõe em termos de ensino na aprendizagem matemática. Além disso, a metodologia pode ser facilmente integrável ao uso de tecnologias, uma demanda extramente atual para preparação para o trabalho e até mesmo compreensão e análise das situações da vida cotidiana.

O problema abordado no desenvolvimento do trabalho será o seguinte: Dados dois sólidos geométricos iguais que se aproximam por um eixo  $x$ , de maneira que um passará pelo outro completamente, formando uma região de intersecção, qual será o comportamento do volume dessa região a medida que eles se aproximam até passarem um pelo outro completamente? A *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)* já propôs problemas

semelhantes a esse em provas dos anos de 2009, 2013, 2018 e 2019.

Sendo assim, o objetivo geral desse trabalho é expor a análise de um problema matemático integrando o raciocínio lógico dedutivo e o uso de linguagem de programação Python como forma de aprendizagem utilizando a metodologia de resolução de problemas. Os conteúdos abordados, de acordo com a classificação da própria BNCC, será álgebra e geometria, proporcionando uma interrelação entre esses dois tópicos que por vezes são abordados de formas separadas.

Como objetivos específicos a serem alcançados tem-se:

1. Determinar uma equação para a região de intersecção de sólidos geométricos congruentes;
2. Construir gráficos que representem o comportamento dessas regiões de intersecção a partir de um parâmetro de aproximação;
3. Descrever as ferramentas matemáticas e tecnológicas utilizadas no processo, pelo viés da metodologia de resolução de problemas.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 trata um pouco sobre a metodologia de resolução de problemas, trazendo comentários de alguns dos seus principais expoentes e ideias centrais; No Capítulo 3 é feito um breve histórico do desenvolvimento da geometria, destacando a geometria espacial e fazendo menção de alguns dos principais contribuintes.

No Capítulo 4 são apresentadas as principais definições e teoremas matemáticos que auxiliarão no desenvolvimento dos capítulos seguintes; No Capítulo 5 serão discutidas as ideias centrais e soluções da resolução do problema apresentado que se relaciona com o conteúdo geometria espacial de forma analítica e feita uma discussão sucinta sobre os valores máximos das funções obtidas.

No Capítulo 6 são apresentados métodos do Cálculo diferencial e integral para o cálculo do volume das regiões de intersecção com a aplicação para todos os sólidos apresentados no trabalho.

No Capítulo 7 é apresentado o uso da linguagem Python como ferramenta auxiliar na conclusão da resolução do problema, apresentando o gráfico das funções geradas e comparando os valores máximos obtidos por meio da linguagem com os obtidos de forma analítica. Depois é realizada uma retrospectiva da solução do problema e analisado os resultados obtidos. É apresentado, também, um método para calcular os volumes das regiões de intersecção utilizando a linguagem Python diretamente.

Por fim, no Capítulo 8 têm-se as considerações finais do trabalho e apresentadas possibilidades para trabalhos futuros.

## 2 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A metodologia de resolução de problemas é perfeitamente aplicável ao ensino de matemática, pois contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo do estudante. Essa metodologia tem como um dos seus principais expoentes o matemático húngaro George Polya (1887 - 1985), que em sua obra, *A arte de resolver problemas*, defende estratégias para a resolução de problemas e os muitos benefícios que pode-se obter na aprendizagem através desse recurso didático.

É dito em Polya (1978, p.26) a respeito das etapas para se resolver um problema

Para agrupar convenientemente as indagações e sugestões da nossa lista, distinguiremos quatro fases de trabalho. Primeiro, temos que compreender o problema, temos que perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Polya, descreve os passos de maneira genérica acreditando que se aplique a todo e qualquer problema matemático. Fica evidente em sua obra que o objetivo central é que o estudante aprimore sua habilidade através da prática contínua que o professor, nas suas atribuições, forneça de maneira equilibrada auxílio ao educando, de forma que este tenha uma parte de trabalho significativa na resolução dos problemas propostos até o seu devido amadurecimento.

Outro aspecto que é importante ressaltar é caracterização de um problema segundo Paiva e Sá (2017, p. 5) “ O “EXERCÍCIO” é uma atividade de adestramento no uso de algum conhecimento matemática prévio, como aplicação imediata de uma fórmula.” enquanto que “O “PROBLEMA”, necessariamente, envolve invenção e/ou investigação, possibilitando o desenvolvimento da criatividade e do raciocínio lógico.”.

Em outras palavras, para que determinada situação matemática se trate de um problema deve ser uma situação que provoque a reflexão sobre quais procedimentos utilizar para resolvê-la e não necessariamente uma mera aplicação de alguma fórmula ou conhecimento cumulativo que pode ser deduzido imediatamente a partir do enunciado.

As olimpíadas científicas como OBMEP, *Olimpíada Brasileira de Física das Escolas Públicas (OBFEP)* e *Olimpíada Brasileira de Química (OBQ)* tem ajudado a difundir uma aprendizagem pelo aprofundamento do conhecimento científico através da resolução de problemas (SACCARDO; LIBÓRIO, 2020) que, não necessariamente, precisam ser ligados a

prática, mas podem ser situações curiosas, fictícias que aprimorem a criatividade e a curiosidade dos alunos.

É certo que muitas questões de olimpíadas científicas têm graus de dificuldades que os alunos não estão acostumados a enfrentar na sua vida escolar, até mesmo porque uma das principais propostas das questões é serem desafiadoras. Mas, quando utilizadas como recurso em sala de aula, como tópico de discussão, essas questões agregam diversos tipos de conteúdos que pode ser trabalhados quando naturalmente surgirem ao longo de sua resolução. Em suma, questões de olimpíadas científicas ou que tenham esse viés agregam quando pretende aplicar a metodologia de resolução de problemas.

Quanto ao uso de tecnologias para a resolução de problemas, pode-se perceber que aprender o uso das tecnologias é uma demanda crescente para a educação. De acordo com Ribeiro e Paz (2012, p. 13-14)

Nossas salas de aula atualmente possuem um modelo estático e restrito onde alunos e professores vivem numa realidade presa a livros didáticos e salas de aulas puramente expositivas. Esse modelo de aprendizagem está comprovadamente ultrapassado, pois nossa sociedade precisa estar preparada para um futuro tecnológico e digital.

Sendo que os problemas do futuro envolvem as novas tecnologias, deve-se possibilitar uma inserção destas no processo de ensino aprendizagem. Em particular, o uso de uma linguagem de programação facilitará o aprimoramento do pensamento lógico-matemática e o desenvolvimento de um senso de organização e criatividade.

Para Scaico *et al.* (2013, p.2)

Aprender a programar é extremamente importante. O desenvolvimento de algoritmos é o eixo central para todas as áreas relacionadas com a Computação, todavia, não deveria ser objeto de interesse apenas de estudantes de Computação. Inúmeros fatores apontam a relevância de desenvolver nos estudantes em idade escolar competências para a programação de computador.

É reforçado aqui, o uso de uma linguagem de programação como ferramenta para aprendizagem e possível ferramenta para o futuro do educando que, não necessariamente, trabalhará na carreira de ciência e tecnologia, mas deverá conhecer tais ferramentas para o exercício da cidadania e para a vida em sociedade.

### 3 GEOMETRIA ESPACIAL: UM BREVE HISTÓRICO

O desenvolvimento da matemática se deu em vários momentos e civilizações diferentes ao longo da história da humanidade. Mesmo que o conceito matemático mais primitivo que foi desenvolvido foi a contagem, a geometria também caminhou de maneira bastante significativa no desenvolvimento das sociedades antigas e atual.

Segundo Soares (2012), papiros que foram encontrados e ajudaram nas primeiras traduções da língua egípcia, continham problemas matemáticos, totalizando 110 problemas, com 26 de natureza geométrica e dentre eles, alguns sobre volumes de grãos, mostrando o quanto o conhecimento matemático era importante para essa civilização.

Uma fotografia clara quanto aos conhecimentos em geometria espacial da época é retratada através das famosas construções arquitetônicas, as pirâmides. Dentre os problemas de geometria espacial que os egípcios eram capazes de resolver, podemos destacar que eles sabiam calcular os volumes de cilindros retos e de troncos de pirâmides de base quadrada, ainda de acordo com Soares (2012). Conforme Boyer e Merzbach (2019, p. 34)

Como os egípcios chegaram a esses resultados não se sabe. Uma origem empírica para a regra sobre o volume da pirâmide parece ser possível, mas não para o do tronco. Para esse, uma base teórica é mais provável; sugeriu-se que os egípcios tenham procedido nesse caso como nos do triângulo isósceles e do trapézio — podem, mentalmente, ter decomposto o tronco em paralelepípedos, prismas e pirâmides. Substituindo as pirâmides e prismas por blocos retangulares iguais, um agrupamento plausível dos blocos leva à fórmula egípcia.

Os babilônios também foram importantes para o desenvolvimento da matemática e, particularmente, da geometria. A ideia de se dividir uma circunferência em 360 partes, sendo cada uma delas 1 grau da medida de um ângulo provêm dessa civilização. Porém, com o tempo, essas duas sociedades antigas, egípcia e babilônica, que exploravam e valorizavam o aspecto mais prático da matemática, declinaram e deram lugar a sociedade grega.

Muitos dos contribuintes para as ideias mais formais da matemática no mundo antigo vêm da Grécia. O aspecto mais dedutivo, característica principal da matemática atual, foi desenvolvido pelos gregos. Podem ser citados dentre outros os Matemáticos:

1. Tales de Mileto (625 a.C. - 546 a.C.), grande matemática que contribuiu significativamente para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo como base para as demonstrações matemáticas;

2. Pitágoras de Samos (570 a.C. - 496 a.C.), foi capaz de construir uma sociedade em que a ideia dos números e da matemática estavam relacionadas com absolutamente tudo, inclusive com suas crenças quanto ao místico;
3. Elclides de Alexandria (323 a.C. - 385 a.C.), compilou uma das maiores obras da antiguidade, com todo o conhecimento matemático conhecido até aquele momento, difundindo ideias, por meio da obra *Os elementos*, muito importantes e fundamentaram a forma de se pensar matemática até os dias atuais.
4. Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) grande gênio da antiguidade. Teve ideias inovadoras que se mostraram serem precursoras do Cálculo Integral, deu contribuições para determinar a área de superfícies e o volume de diversos sólidos geométricos.

De acordo com (BOYER; MERZBACH, 2019, p. 105)

Arquimedes pediu que sobre seu túmulo fosse esculpida uma representação de uma esfera inscrita em um cilindro circular reto cuja altura é igual ao seu diâmetro, pois ele tinha descoberto, e demonstrado, que a razão dos volumes do cilindro e da esfera é igual à razão das áreas, isto é, três para dois. Essa propriedade, que Arquimedes descobriu após sua Quadratura da parábola, era, diz ele, desconhecida dos geômetras que o precederam. Tinha-se pensado outrora que os egípcios sabiam achar a área de um hemisfério; mas Arquimedes parece agora o primeiro a saber e a demonstrar que a área da esfera é simplesmente quatro vezes a área de um círculo máximo seu.

Pode-se perceber o grande interesse de Arquimedes pelo volume de sólidos diversos.

5. Apolônio de Perga (262 a.C. - 190 a.C) matemático que deu contribuições importantes para o estudo das secções cônicas: parábola, hipérbole, elipse e circunferência. Foi concorrente de Arquimedes e também deu algumas contribuições para a geometria espacial conforme (BOYER; MERZBACH, 2019, p. 112)

Fizeram-se na antiguidade alusões ainda a outras obras de Apolônio, inclusive uma sobre Comparação entre dodecaedro e icosaedro. Nela, o autor dava uma demonstração do teorema (conhecido talvez por Aristeu) que diz estarem as faces pentagonais planas de um dodecaedro à mesma distância do centro da esfera circunscrita que as faces triangulares de um icosaedro inscrito na mesma esfera. O teorema principal no espúrio livro XIV de *Os elementos* decorre imediatamente da proposição de Apolônio.

Conforme Oliveira e Nogueira (2007) existiam três problemas que não poderiam ser resolvidos com régua e compasso: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo. O primeiro problema, de geometria espacial, surgiu quando para dar fim à uma epidemia em Atenas, o oráculo de Delfos recomendou que se fizesse um altar ao deus Apolo com o dobro do volume de um já existente. Porém, tal problema não poderia ser resolvido, pois para



fazê-lo era necessário construir um segmento de comprimento  $\sqrt[3]{2}$ , impossível de se realizar com régua e compasso. Como está relatado com mais precisão em Boyer e Merzbach (2019, p.65)

Diz-se que uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Os atenienses, ao que se diz, obedientemente dobraram as dimensões do altar, mas isto não adiantou para afastar a peste. É claro, o altar tivera seu volume multiplicado por oito e não por dois. Essa, diz a lenda, foi a origem do problema da “duplicação do cubo”, que a partir daí foi geralmente designado como “problema deliano” — dada a aresta de um cubo, construir apenas com régua e compasso a aresta de um segundo cubo, que tenha o dobro do volume do primeiro.

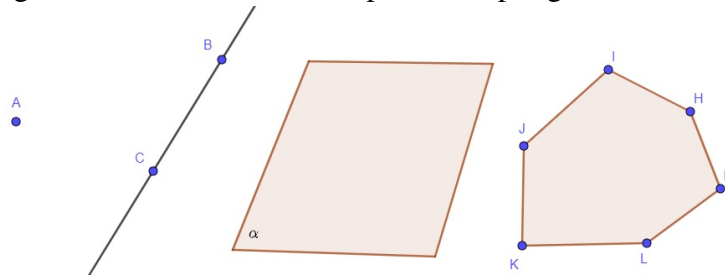
Vários avanços aconteceram na renascença que ajudaram na algebrização da matemática acompanhada das contribuições indianas por meio de seus matemáticos. Porém, com respeito a geometria e marca a matemática nessa época, posterior a idade antiga, é o desenvolvimento do Cálculo integral e diferencial por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Esses dois matemáticos, de maneira independente, criaram uma das mais valiosas ferramentas da matemática moderna.

Porém, Bonaventura Cavalieri, com seu conceito de indivisíveis e seu teorema sobre o volume de sólidos pode ser destacado aqui. Como pode ser constatado em (PINTO *et al.*, 2008), Cavallieri recebeu influência para sua teoria da atmosfera científica que era presente na época, mesmo assim, não é de se ignorar que sua contribuição com seu famoso princípio facilitou o cálculo de volumes de sólidos a partir de outros.

#### 4 DEFINIÇÕES E TEOREMAS IMPORTANTES

Para iniciar essa seção é importante convencionar uma notação para os elementos apresentados. Um ponto será nomeado utilizando letras maiúsculas do alfabeto (A, B, C, ..., Z). Uma reta pode ser nomeada utilizando letras minúsculas do alfabeto (a, ..., r, s, t, ..., z) ou a partir de dois pontos que pertençam a ela. Uma semirreta será representada por seu ponto extremo e um ponto pertencente a ela e um segmento de reta será nomeada a partir de seus dois pontos extremos sendo a medida desse segmento  $AB$ , representado da seguinte forma:  $\overline{AB}$ . Um plano será nomeado utilizando letras minúsculas do alfabeto grego ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , etc). Um polígono será nomeado tomando os seus vértices na direção anti-horária da ordem em que aparecem na figura.

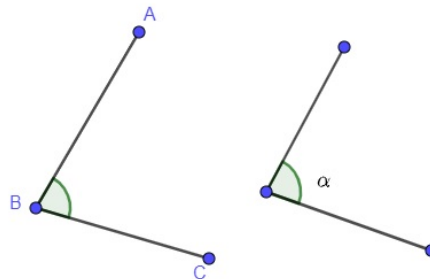
Figura 1 – Ponto A, reta  $\overleftrightarrow{BC}$ , plano  $\alpha$  e polígono HIJKLM.



Fonte: O autor (2023).

De forma semelhante, um ângulo pode ser nomeado tomando pontos sobre os seus lados e vértice e indicados na ordem anti-horária, ou mesmo ter apenas a sua medida indicada por uma letra grega minúscula, isso é exemplificado na figura a seguir.

Figura 2 – Nomeação de um ângulo  $\hat{ABC}$  utilizando os pontos sobre seus lados e uma letra grega  $\alpha$  para sua medida



Fonte: O autor (2023).

Fixadas algumas das notações vamos estudar agora alguns teoremas e definições importantes para embasar os próximos capítulos. Alguns conceitos de geometria plana serão aceitos como já conhecidos.

**Definição 4.0.1** Um triângulo é chamado de isósceles quando dois de seus lados possui mesma medida(são congruentes). Os dois lados congruentes são os lados do triângulo e o terceiro lado é chamado de base do triângulo.

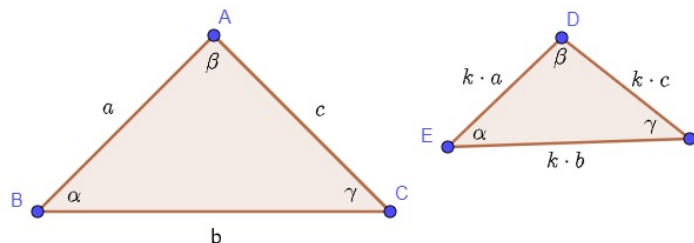
**Definição 4.0.2** Diz-se que dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes quando possuem lados correspondentes de mesma medida e ângulos correspondentes também de mesma medida.

Existem três situações chamadas de casos em que pode se verificar se dois triângulos são congruentes de forma simplificada:

1. Caso lado-lado-lado (LLL): Se for verificado que os dois triângulos possuem os três lados correspondentes congruentes, então eles são congruentes entre si.
2. Caso lado-ângulo-lado (LAL): Se for verificado que os dois triângulos tem dois lados correspondentes congruentes entre si e os ângulos compreendidos entre esses lados correspondentes também congruentes, então os dois triângulos são congruentes.
3. Caso ângulo-lado-ângulo (ALA): Se for verificado que dois ângulos correspondentes são congruentes e os lados compreendidos entre eles também forem congruentes, então os triângulos são congruentes.

**Definição 4.0.3** Diz-se que dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes quando possuem seus lados correspondentes proporcionais, ou seja, existe um número  $k \in \mathbb{R}$  tal que para todo lado  $l$  de  $ABC$  e o lado corresponde  $l'$  de  $DEF$  então  $l = k \cdot l'$  e, além disso, ângulos correspondentes terão a mesma medida.

Figura 3 – Triângulos semelhantes



Fonte: O autor (2023).

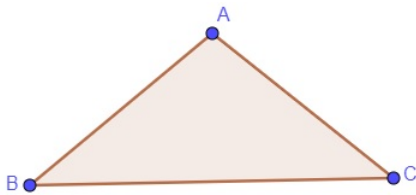
Como a congruência, a semelhança de triângulos possuem casos que simplificam a verificação se dois triângulos são semelhantes:

1. Caso ângulo-ângulo (AA): Se for verificado que os triângulos tem ângulos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes.
2. Caso lado-lado-lado (LLL): Se for verificado que os triângulos tem todos os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.
3. Caso lado-ângulo-lado (LAL): Se for verificado que os triângulos tem dois lados correspondente proporcionais e que os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

**Teorema 4.0.1** *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

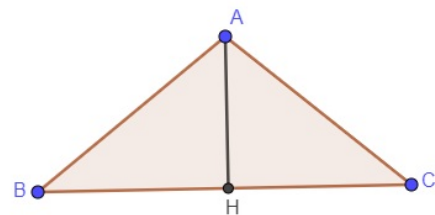
**Prova:** Seja um triângulo isósceles  $ABC$  de base  $BC$ . Baixada a altura cujo o pé é o ponto  $H$ , temos os triângulos  $ABH$  e  $AHC$ . Como na Figura 5.

Figura 4 – Triângulos isósceles  $ABC$ .



Fonte: O autor (2023).

Figura 5 – Triângulos isósceles  $ABC$  com altura  $AH$ .

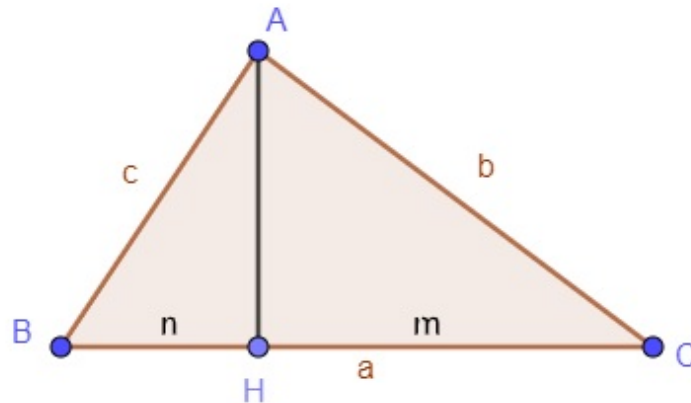


Fonte: O autor (2023).

Realizando a verificação da congruência do triângulo  $ABC$  com o próprio triângulo  $ABC$ . Pelo caso de congruência lado-lado-lado temos que o lado  $AB$  é congruente com o lado  $AC$ , o lado  $AC$  é congruente com lado  $AB$  e o lado  $BC$  é congruente a si mesmo. Logo os ângulos  $\hat{A}BC$  e  $\hat{B}CA$  são congruentes. ■

**Teorema 4.0.2 (Teorema de Pitágoras)** *Dado um triângulo retângulo  $ABC$ , cuja a hipotenusa mede  $a$  e catetos medem  $b$  e  $c$  então  $a^2 = b^2 + c^2$ .*

**Prova:** Seja o triângulo  $ABC$  com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Sejam também  $m$  a projeção de  $b$  sobre  $a$ ,  $n$  a projeção de  $c$  sobre  $a$  e  $h$  o comprimento da altura de  $ABC$  e cujo o pé é o ponto  $H$  referente ao lado  $a$ , hipotenusa do triângulo. É fato que  $a = m + n$ . Tem-se que os triângulos  $ABH$  e  $ABC$  são semelhantes pois os ângulos  $\hat{B}HA$  e  $\hat{C}AB$  são congruentes (ambos retos) e o ângulo  $\hat{A}BC$  é comum. Por isso, segue a relação  $\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$  que consequentemente nos fornece  $c^2 = a \cdot n$ . Da mesma forma, os triângulos  $ABC$  e  $AHC$  são semelhantes pois os ângulos  $\hat{C}AB$  e

Figura 6 – Triângulo retângulo  $ABC$  de altura  $h$ .

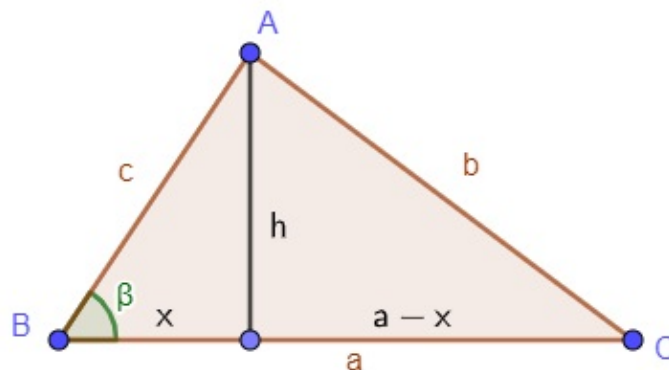
Fonte: O autor (2023).

$A\hat{H}C$  são congruentes (ambos retos) e o ângulo  $B\hat{C}A$  é comum. Por isso, temos a relação  $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$  que nos dá  $b^2 = a \cdot m$ . Por fim, temos que

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2.$$

■

**Teorema 4.0.3 (Lei dos Cossenos)** *Dado um triângulo qualquer  $ABC$  de lados medindo  $a$ ,  $b$  e  $c$  e seja  $\alpha$  o ângulo entre os lados  $b$  e  $c$ ,  $\beta$  o ângulo entre os lados  $a$  e  $c$  e  $\gamma$  o ângulo entre os lados  $a$  e  $b$  então  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ ,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$  e  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .*

Figura 7 – Triângulo  $ABC$  de altura  $h$ .

Fonte: O autor (2023).

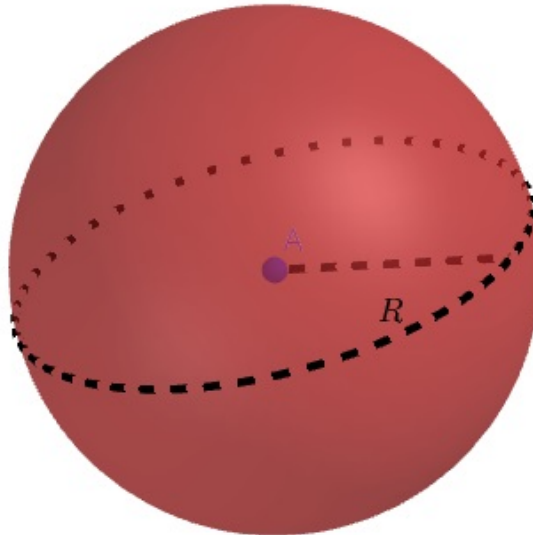
**Prova:** Considere um triângulo  $ABC$  cuja a medida dos lados são  $a$ ,  $b$  e  $c$  e seja  $\beta$  o ângulo entre os lados de medidas  $a$  e  $c$ . Para os demais casos basta repetir o mesmo processo. Seja  $x$  a projeção de  $c$  sobre o lado  $a$ . Pelo teorema de Pitágoras tem-se que  $c^2 = x^2 + h^2$  e

$b^2 = (x - a)^2 + h^2 = x^2 - 2ax + a^2 + h^2$ . Subtraindo as equações anteriores, temos que  $b^2 - c^2 = a^2 - 2ax$ , mas  $x = c \cdot \cos \beta$ , logo  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ . ■

Serão definidos os sólidos geométricos: esfera, cone, cilindro, prisma e pirâmide, objetos chaves das demonstrações que se seguem. Para uma leitura mais aprofundada acerca desses e de outros sólidos é recomendável consultar Neto (2013).

**Definição 4.0.4** *Dado um comprimento  $R$  e um ponto  $O$  do espaço, o conjunto dos pontos que estão a uma distância menor ou igual a  $R$  de  $O$  é chamado Esfera.*

Figura 8 – Esfera de raio  $R$  e centro  $A$ .

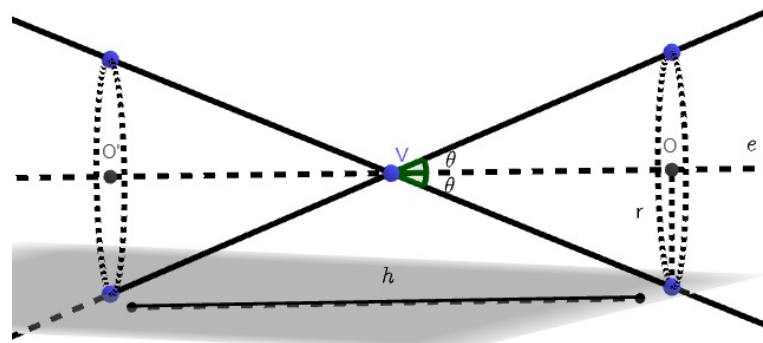


Fonte: O autor (2023).

Temos que a projeção de uma esfera no plano é chamada de círculo, ou seja, o conjunto de pontos do plano que estão a uma distância  $d \leq R$  de  $O^*$  (Projeção de  $O$  sobre o plano). Outra coisa interessante sobre a esfera é que ela possui infinitas simetrias. Se ela for dividida por um plano passando pelo seu centro, os dois sólidos formados são simétricos em relação a esse plano. Em relação ao seu centro, todos os pontos de sua superfície são simétricos por rotação.

**Definição 4.0.5** *Dados uma reta  $e$ , um ângulo agudo  $\theta$  e um ponto  $V \in e$ , o cone (de revolução) de eixo  $e$ , vértice  $V$  e abertura  $2\theta$  é o conjunto dos pontos  $A$  do espaço, tais que a reta  $AV$  forma um ângulo  $\theta$  com a reta  $e$ .*

Figura 9 – Cone duplo de raio da base  $R$  e altura  $h$  e eixo  $e$ .



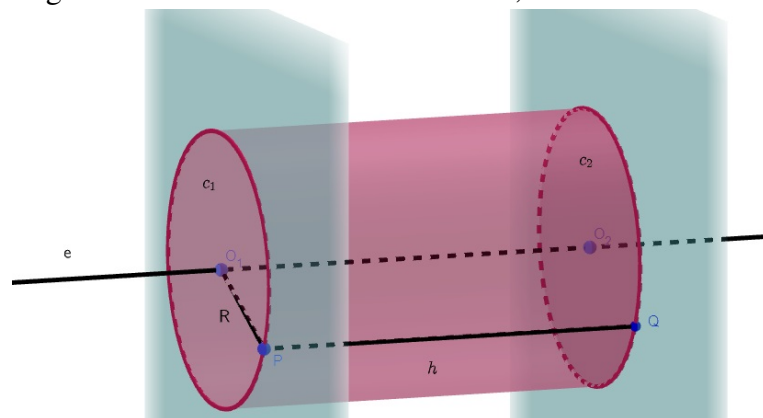
Fonte: O autor (2023).

A definição, como apresentada na Figura 9, descreve o sólido de revolução cone duplo, mas tomando apenas um dos dois semi-espacos determinados pelos vértices e contendo pontos do cone temos um cone simples de cada lado. Traçando um plano perpendicular ao eixo  $e$  e que não contenha o vértice, a interseção com o cone gera um círculo chamado de base do cone. A distância entre o vértice  $V$  e a base do cone é chamada altura  $h$  do cone.

**Definição 4.0.6** *Dados, no espaço, um real positivo  $R$  e uma reta  $e$ , o cilindro (de revolução) de eixo  $e$  e raio  $R$ , é o conjunto dos pontos  $P$  do espaço, os quais estão a distância  $d \leq R$  da reta  $e$ .*

Traçando planos paralelos entre si e perpendiculares a reta  $e$ , obtêm-se dois círculos  $c_1$  e  $c_2$  de raio  $R$ , denominadas bases do cilindro. Tem-se que toda reta  $PQ$ , paralela a reta  $e$ , é uma geratriz do cilindro desde que  $P \in c_1$  e  $Q \in c_2$ . A distância entre os planos  $c_1$  e  $c_2$  é a altura do cilindro  $h$ .

Figura 10 – Cilindro de raio da base  $R$ , altura  $h$  e eixo  $e$ .

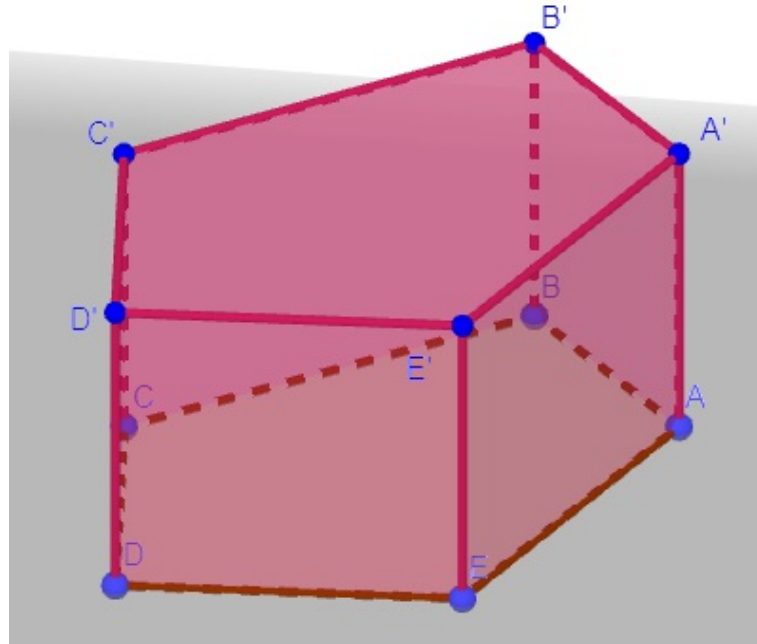


Fonte: O autor (2023).

**Definição 4.0.7** *Sejam dados polígonos  $A_1A_2\dots A_n$  e  $A'_1A'_2\dots A'_n$  situados em planos paralelos e tais que as retas  $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$  sejam também paralelas. Então, é imediato que, para*

$1 \leq i \leq n$  (com a convenção de que  $A_{n+1} = A_1$ ), o quadrilátero  $A_i A_{i+1} A'_i A'_{i+1}$  é um paralelogramo e que os polígonos  $A_1 A_2 \dots A_n$  e  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  são congruentes. O prisma de bases  $A_1 A_2 \dots A_n$  e  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  é a porção limitada do espaço, delimitadas pelos polígonos  $A_1 A_2 \dots A_n$  e  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  e pelos paralelogramos  $A_i A_{i+1} A'_i A'_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

Figura 11 – Prisma de bases  $ABCDE$  e  $A'B'C'D'E'$  e altura  $h$ .



Fonte: O autor (2023).

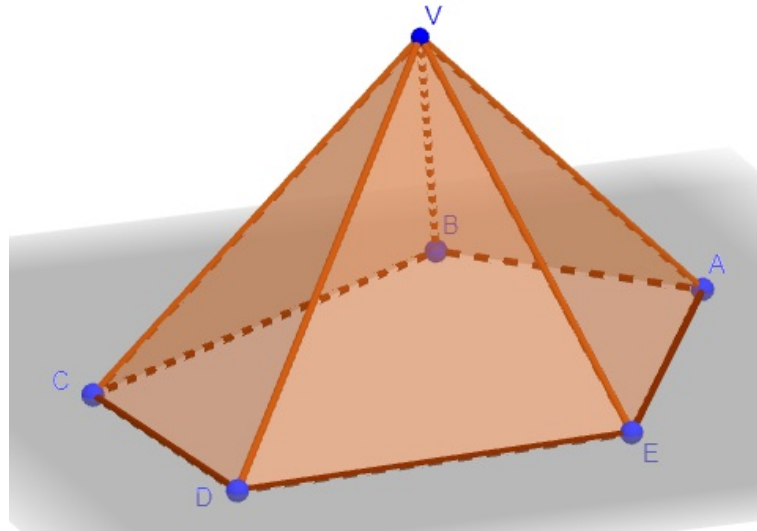
Quando o prisma for tal que os segmentos  $A_i A'_i$  para  $1 \leq i \leq n$  forem todos perpendiculares aos planos das bases, o prisma será chamado prisma reto. A distância entre os planos será a altura  $h$  do prisma. A Figura 11 é um exemplo de prisma.

**Definição 4.0.8** Dados um polígono convexo  $A_1 A_2 \dots A_n$  e um ponto  $V$  não pertencente ao plano  $A_1 A_2 \dots A_n$  definimos a pirâmide de  $VA_1 A_2 \dots A_n$ , de vértice  $V$  e base  $A_1 A_2 \dots A_n$ , como a porção limitada do espaço, delimitada por  $A_1 A_2 \dots A_n$  e pelos triângulos  $VA_i A_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq n$ , com a convenção de que  $A_{i+1} = A_1$ .

A distância entre o vértice  $V$  da pirâmide e o plano da base é a altura  $h$  da pirâmide. Se o vértice  $V$  equidistar dos vértices da base, a pirâmide será chamada pirâmide reta. Na Figura 12 têm-se um exemplo de pirâmide.



Figura 12 – Pirâmide de base  $ABCDE$ , vértice  $V$  e altura  $h$ .



Fonte: O autor (2023).

**Teorema 4.0.4 (Princípio de Cavalieri)** *Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).*

Esse princípio foi escrito conforme está no livro do ensino médio MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES (IEZZI *et al.*, 2001). A demonstração deste teorema foge dos objetivos deste trabalho, porém será considerado para demonstração de teoremas posteriores.

No próximo teorema será provado o volume do paralelepípedo reto retângulo que é um prisma reto de base retangular. Tal prova ajuda na demonstração do volume do cilindro.

**Teorema 4.0.5** *Dado um paralelepípedo reto retângulo  $P$  de altura  $h$  e área da base  $A_b$ , seu volume será dado por  $V = A_b \cdot h$ .*

**Prova:** Seja  $P$  um paralelepípedo de altura  $h$  e área da base  $A_b$ , essa demonstração será dividida em casos:

1.  $P$  é um paralelepípedo reto retângulo, cujas as arestas têm comprimentos  $a, b, c \in \mathbb{N}$ : particionando  $P$  em  $abc$  cubos de aresta 1, considerando que tais cubos tenham volume 1 e que a soma dos volumes desses cubos é o volume do paralelepípedo  $P$  tem-se que

$$V_P = abc = A_b h.$$

2.  $P$  é um paralelepípedo reto retângulo cujas as arestas têm comprimentos  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ : sejam  $a = \frac{m}{q}$ ,  $b = \frac{n}{q}$  e  $c = \frac{p}{q}$ , com  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ . Faça uma pilha de  $q^3$  cópias de  $P$ , de modo a

obter paralelepípedos reto retângulos  $Q$  de arestas  $m, n$  e  $p$ . O Item 1, permite afirmar que

$$q^3 V_P = V_Q = mnp,$$

dessa maneira,

$$V_P = \frac{mnp}{q^3} = A_b h.$$

3.  $P$  é um paralelepípedo reto retângulo cujas arestas têm comprimentos  $a, b, c \in \mathbb{R}$ : sejam  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  e  $(c_n)_{n \geq 1}$  sequências de números racionais tais que  $a_n < a$ ,  $b_n < b$  e  $c_n < c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  e  $c_n \rightarrow c$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Seja, ainda,  $P_n$  um paralelepípedo reto retângulo contido em  $P$  e com arestas de comprimentos  $a_n, b_n$  e  $c_n$ . O Item 2 e considerando que o volume de  $P_n$  está contido em  $P$ , logo é menor que ou igual ao volume de  $P$ , é possível afirmar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$V_P \geq V_{P_n} = a_n b_n c_n.$$

Mas, como tal desigualdade é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_n b_n c_n \rightarrow abc$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , fazendo  $n$  crescer arbitrariamente em tal desigualdade obtemos  $V_P \geq abc$ . Finalmente, utilizando as sequências  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $(b_n)_{n \geq 1}$  e  $(c_n)_{n \geq 1}$  de números racionais tais que  $a_n > a$ ,  $b_n > b$  e  $c_n > c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  e  $c_n \rightarrow c$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , conclui-se que  $V_P \leq abc$ . Portanto,  $V_P = abc = A_b h$ .

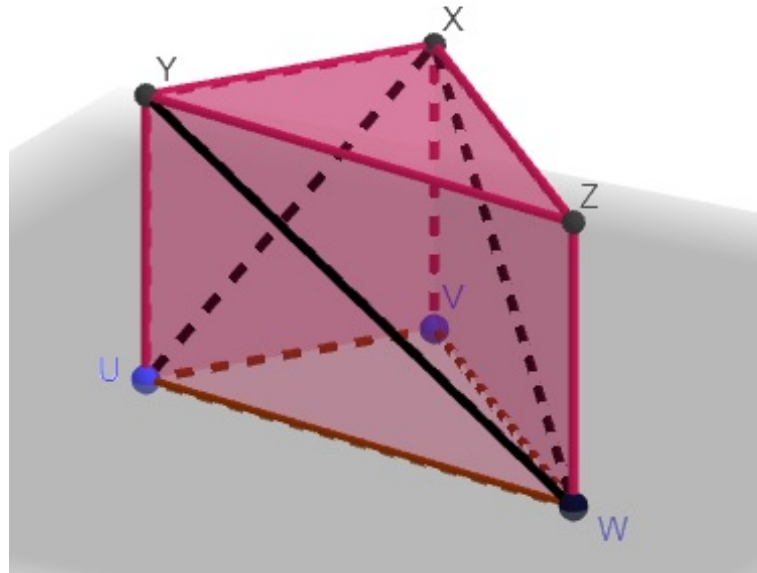
Para provar o volume de um prisma basta utilizar o princípio de Cavalieri (Teorema 4.0.4) sendo o sólido  $S$  um paralelepípedo e  $S'$  um prisma ambos com altura  $h$  e área da base  $A_b$ , e cujas as bases estão contidas no mesmo plano  $\alpha$  e no mesmo semiespaço determinado por  $\alpha$ . Supondo que para todo plano  $\beta$  paralelo a  $\alpha$ , a interseção de  $\beta$  com os dois sólidos formam figuras planas congruentes as bases e, portanto de mesma área. Pelo princípio de Cavalieri o volume do prisma é  $V_P = A_b h$ . ■

**Teorema 4.0.6** *Dada uma pirâmide  $P^*$  de altura  $h$  e área da base  $A_b$  temos que seu volume será dado por  $V = A_b \cdot h$ .*

**Prova:** Para essa demonstração, será provada a validade da afirmação para um tetraedro (pirâmide de base triangular), depois ela será estendida para uma pirâmide de base qualquer. Sejam  $UVWX$  os vértices de um tetraedro  $T$  e o triângulo  $UVW$  a base desse tetraedro cuja área denotaremos por  $A_b$ . Construa pontos  $Y$  e  $Z$  tais que  $UVXY$  e  $VWZX$  sejam paralelogramos.

Então  $UY$  e  $WZ$  são paralelos e iguais a  $VX$ , de sorte que  $UWZY$  também é paralelogramo. É imediato que o  $UVWYXZ$  é um prisma triangular de bases  $UVW$  e  $XYZ$  e altura  $h$ , sendo  $V_T$  seu volume, tem-se que  $V_T = A_b h$ .

Figura 13 – Prisma particionado em tetraedros



Fonte: O autor (2023).

Agora, particionando o prisma nos tetraedros, conforme a Figura 13,  $UVWX$ ,  $UWXY$  e  $WXYZ$ , é necessário mostrar que esses tetraedros têm volumes iguais para que se confirme que

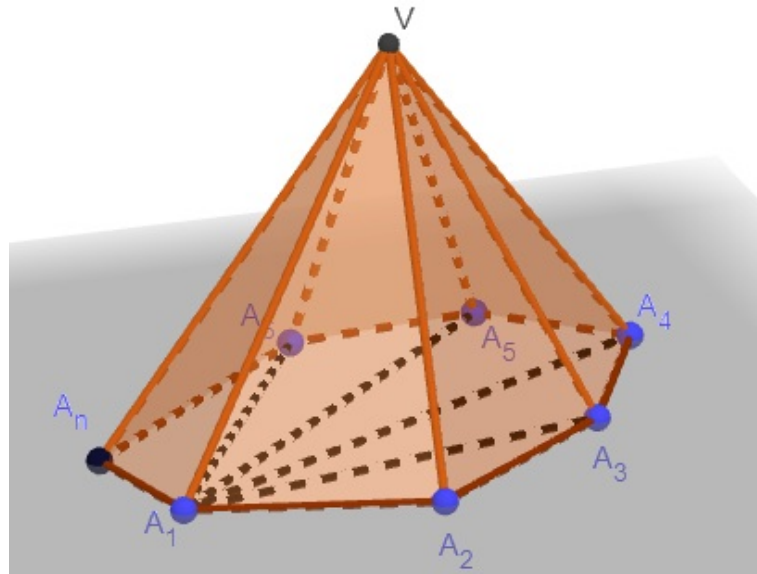
$$3V_T = V_{UVWX} + V_{UWXY} + V_{WXYZ} = V = A_b h.$$

Para isso, temos que:

1. Como  $UVXY$  paralelogramo, temos que as áreas de  $UVX$  e  $UXY$  são iguais. Além disso, sendo as alturas de  $WUVX$  e  $WUXY$  traçadas a partir de  $W$  são iguais, então os prismas  $WUVX$  e  $WUXY$  tem mesmo volume.
2. Como  $UWZY$  é um paralelogramo, temos que as áreas de  $UWY$  e  $WYZ$  são iguais. Além disso, como  $UWXY$  e  $WXYZ$  têm alturas iguais a partir de  $X$  concluímos que os volumes de  $XUWY$  e  $XWYZ$  são iguais.

Isso prova a validade da demonstração para um tetraedro. Para estendê-la para uma pirâmide  $P^*$  qualquer de  $k$  vértices, basta dividir tal pirâmide em  $k - 1$  tetraedros, conforme a Figura 14, a partir de um dos vértices da base. Todos os tetraedros terão a mesma altura. Logo,

Figura 14 – Pirâmide particionado em tetraedros



Fonte: O autor (2023).

$$V_{P^*} = \frac{1}{3}A_{b_1}h + \frac{1}{3}A_{b_2}h + \dots + \frac{1}{3}A_{b_{k-1}}h = \frac{1}{3}h(A_{b_1} + A_{b_2} + \dots + A_{b_{k-1}})$$

como  $A_b = A_{b_1} + A_{b_2} + \dots + A_{b_{k-1}}$  segue que  $A_{P^*} = \frac{1}{3}A_b h$ . ■

**Teorema 4.0.7** *Dado um cilindro circular reto  $C$ , com raio da base  $r$  e altura  $h$ , seu volume  $V$  é dado por  $V = \pi r^2 h$ .*

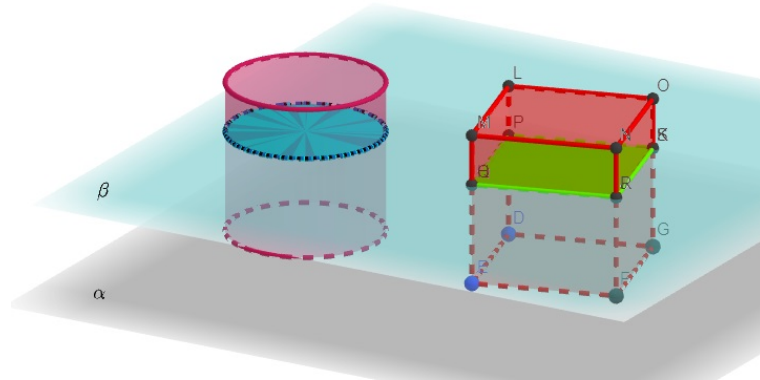
**Prova:** Para provar o volume do cilindro, considere um prisma  $C$  de altura  $h$  e raio da base  $r$ , e um paralelepípedo  $P$  de mesma altura e cuja a base tem a mesma área da base do cilindro, ambos sobre um plano  $\alpha$  e contidos no mesmo semiespaço determinado pelo plano  $\alpha$ .

Considere um plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$  e que intersecta o cilindro  $C$  e o paralelepípedo  $P$  conforme a Figura 15. Os intersecções formadas são congruentes as bases, portanto, têm mesma área. Devido a isso, pelo princípio de Cavalieri (Teorema 4.0.4) os sólidos tem mesmo volume. Ou veja, o volume  $V$  do cilindro  $C$  é

$$V = A_b h = \pi r^2 h.$$

■

Figura 15 – O volume Cilindro a partir do volume do paralelepípedo

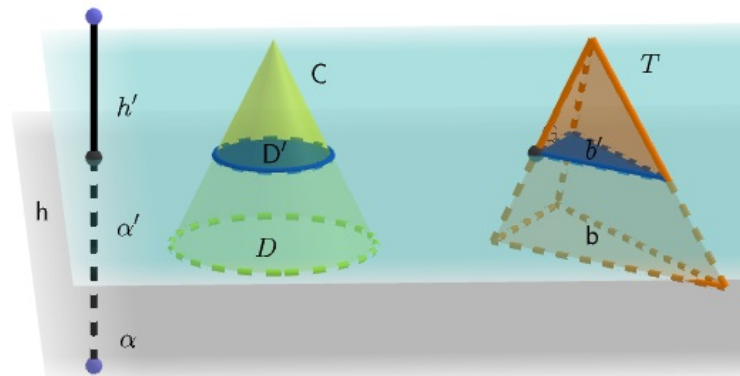


Fonte: O autor (2023).

**Teorema 4.0.8** O volume  $V$  de um cone circular de raio  $r$  e altura  $h$  é igual a  $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ .

**Prova:** Seja  $T$  um tetraedro de mesma altura  $h$  que  $C$ , cuja a base  $b$  é um triângulo de área igual à área do disco  $D$ , base do cone, e tal que  $b$  e  $D$  estejam contidas em um mesmo plano  $\alpha$ , com  $C$  e  $T$  contidos em um mesmo semiespaço, dos que  $\alpha$  determina.

Figura 16 – O volume do Cone a partir do volume da pirâmide



Fonte: O autor (2023).

Se  $\alpha'$  é um plano paralelo a  $\alpha$  conforme a Figura 16, a igualdade das alturas do cone e do tetraedro garante que  $T \cup \alpha' \neq \emptyset$ , e só se,  $C \cup \alpha' \neq \emptyset$ . Nesse caso, seja  $h'$  a distância do vértice do cone a  $\alpha'$ ,  $C \cup \alpha' = D'$  e  $T \cup \alpha' = b'$ , segue que,

$$\frac{A_b}{A'_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \frac{A'_{D'}}{A_D},$$

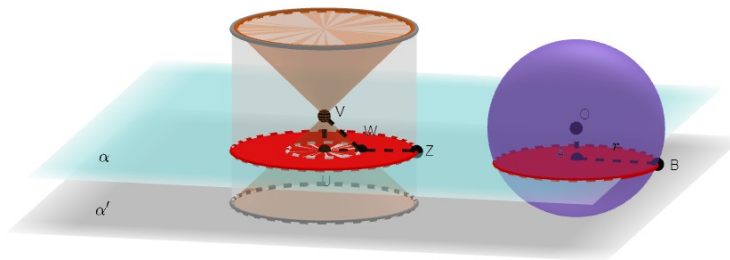
onde  $r'$  é raio de  $D'$ . Mas como  $A_b = A_D$  segue daí que  $A'_b = A'_{D'}$ . Portanto, pelo princípio de Cavalieri (Teorema 4.0.4), temos

$$V_C = V_T = \frac{1}{3}A_b h = \frac{1}{3}A_{D'} h = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \quad \blacksquare$$

**Teorema 4.0.9** Dada uma esfera  $E$  de raio  $r$ , seu volume  $V$  é dado por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

**Prova:** Seja  $C$  um cilindro sólido de altura  $2r$ , tendo por bases dois círculos de raio  $r$ . Inscreva em  $C$  dois cones sólidos, ambos de altura  $r$  e tendo por bases as bases do cilindro; então, o vértice dos cones coincide com o centro do quadrado. Por fim, seja  $S$  o sólido formado pela porção do cilindro exterior à união dos cones.

Figura 17 – O volume da Esfera



Fonte: O autor (2023).

Sejam  $\alpha$  o plano de uma das bases do cilindro e  $E$  a esfera de centro  $O$  e raio  $r$ , tangente a  $\alpha$  e situada, em relação a  $\alpha$ , no mesmo semiespaço de  $C$  conforme a Figura 17.

Sejam  $\alpha'$  um plano paralelo a  $\alpha$ , contido no mesmo semiespaço, em relação a  $\alpha$ , que  $S$  e  $E$ , e situado a distância  $d$  do ponto  $O$ , com  $d < r$ . Como  $C$  tem altura igual ao diâmetro de  $E$ , segue que  $\alpha'$  intersecta  $S$ , se, e somente se, intersecta  $E$ . Sendo esse o caso, temos que  $\alpha'$  secciona  $S$  segundo uma coroa circular de raios  $UW = d$  e  $UZ = r$ , enquanto que secciona  $E$  em um disco de centro  $A$  e raio  $AB = \sqrt{r^2 - d^2}$ . Logo, as áreas de tais seções são sempre iguais, de forma que, pelo princípio de Cavalieri (Teorema 4.0.4)  $S$  e  $E$  têm volumes iguais.

Por fim, como o volume de  $S$  é a diferença entre os volumes do cilindro sólido  $C$  e da união dos dois cones de vértice  $V$  tem-se

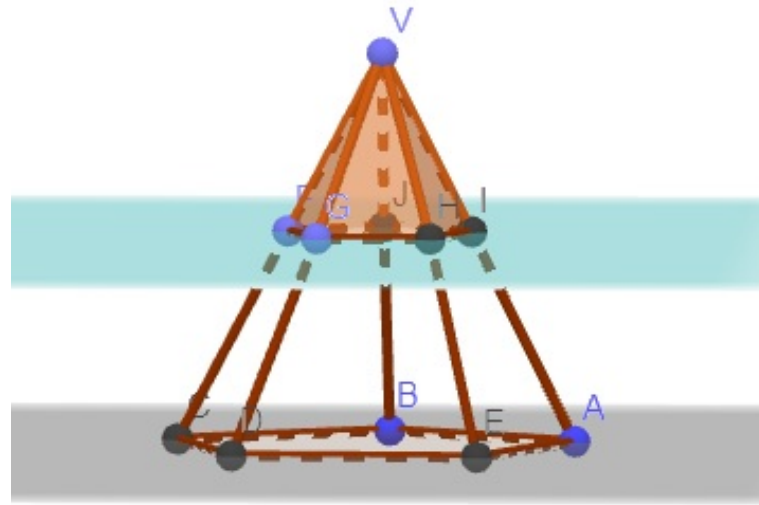
$$V_E = V_C - 2V_{cone} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

■

O próximo teorema diz respeito ao volume de um tronco de pirâmide, sólido obtido quando um plano paralelo a sua base secciona a pirâmide em uma determinada altura  $h$ . A parte do sólido que não contém o vértice é o tronco de cone.

**Teorema 4.0.10** O volume  $V$  de um tronco de pirâmide de altura  $h$ , área da base maior  $A_B$  e área da base menor  $A_b$  é  $V = \frac{h}{3}(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b)$ .

Figura 18 – Tronco de pirâmide obtido da secção da pirâmide  $VABCDE$



Fonte: O autor (2022).

**Prova:** Seja a pirâmide  $VABCDE$  de altura  $H$  e os planos  $\alpha$  e  $\beta$  os planos da base da pirâmide e o que secciona a pirâmide, respectivamente, como na Figura 18. A secção divide a pirâmide em uma pirâmide menor  $VFGHIJ$  de altura  $H^*$  e um tronco de pirâmide  $T_p$  de altura  $h$ . Como a base de  $VABCDE$  é semelhante a  $VFGHIJ$ , pois o plano  $\beta$  é paralelo ao plano  $\alpha$ , portanto, todas as faces laterais são cortadas por segmentos paralelos as bases, dessa forma, as faces laterais da pirâmide  $VABCDE$  são semelhantes as faces laterais e correspondentes da pirâmide  $VFGHIJ$ , pelo caso AA, que implica que suas bases são semelhantes. Considere que  $H = H^* + h$  e que o volume do tronco  $V_T$  será dado por  $V_T = V_{VABCDE} - V_{VFGHIJ}$ . Segue que

$$V_T = \frac{1}{3}HA_B - \frac{1}{3}H^*A_b, \quad (4.1)$$

mas como as pirâmides tem bases semelhantes então  $\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{H^*}\right)^2$ , mas  $\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H^*+h}{H^*}\right)^2$  e disto vem que  $\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} = \frac{H^*+h}{H^*}$  que por fim nos fornece que  $H^* = \frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}$ . Substituindo essa última expressão na Equação 4.1 e organizando a equação

$$V_T = \frac{1}{3} \left( \frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}-\sqrt{A_b}}(A_B - A_b) + A_B h \right) = \frac{1}{3}h(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b). \quad (4.2)$$

■

O tronco de cone é um sólido obtido a partir da secção do cone por um plano, sendo o tronco de cone a parte seccionada que não contém o vértice. No próximo teorema será demonstrado como obter seu volume.

**Teorema 4.0.11** O volume  $V$  de um tronco de cone de altura  $h$ , raio da base maior  $R$  e raio da base menor  $r$  é  $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ .

**Prova:** Considere cone reto  $C$  de altura  $H$  e raio da base  $R$  com a base pertence a um plano  $\alpha$  e seccionado por um plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ . Observe que o plano  $\beta$  divide o cone  $C$  em um cone menor  $C'$  de altura  $h'$  e raio da base  $r$  e um tronco de cone  $T$ , como na Figura 19, de altura  $h$ . Observe que  $h' = H - h$  e que

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h} \Rightarrow H = \frac{Rh}{R-r}.$$

Sendo o volume do tronco de cone igual a diferença entre os volumes dos dois cones ,tem-se que

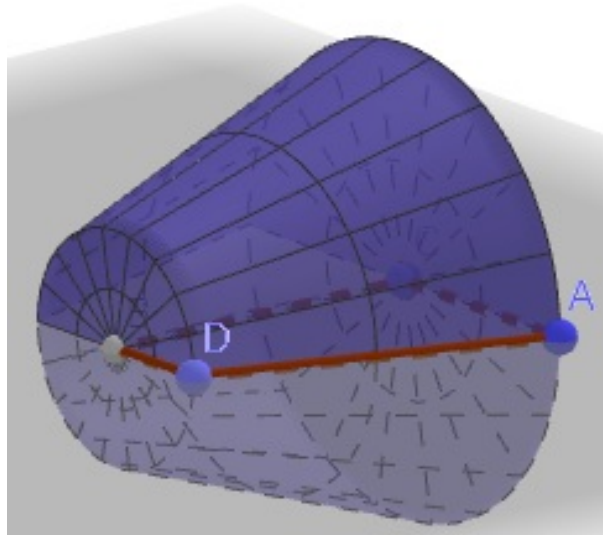
$$V_T = V_C - V_{C'} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h' = \frac{1}{3}\pi \frac{R^3 h}{R-r} - \frac{1}{3}\pi r^2 \left( \frac{Rh - Rh + rh}{R-r} \right),$$

E segue que

$$V_T = \frac{1}{3}\pi \frac{h}{R-r} (R^3 - r^3) = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

■

Figura 19 – Tronco de cone obtido da rotação do trapézio ABCD sobre o lado BC, sendo  $h = BC$ ,  $r = BD$  e  $R = AC$ .



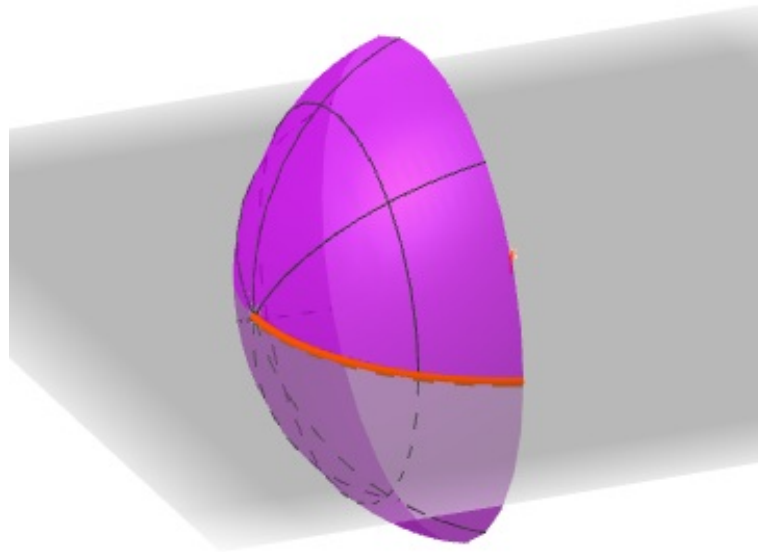
Fonte: O autor (2022).

A calota esférica é um sólido gerado pela secção da esfera por um plano. O próximo teorema demonstrará como se obter o seu volume.

**Teorema 4.0.12** Dado  $R$  o raio de uma esfera  $E$  e  $h$  a altura de uma calota esférica  $C$  temos que o volume  $V_c$  da calota esférica é  $V_c = \pi h^2 R - \frac{\pi h^3}{3}$ .



Figura 20 – Calota Esférica



Fonte: O autor (2022).

**Prova:** Para a prova desse teorema considere a Figura 17. Considere somente uma certa altura  $h$  que será suficiente para obtermos uma calota, como na Figura 20, tomando por base a esfera da figura mencionada. Pelo princípio de Cavalieri já se sabe que os volumes da região interior ao cilindro  $C'$  e exterior ao cilindro e da esfera são iguais. Agora considere o tronco de cone de altura  $h$  e raios  $R$  e  $r$  e o cilindro de altura  $h$  e raio da base  $R$ . O volume da calota será dado por

$$V_c = \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

Mas, considerando o cone, temos que  $\frac{R}{r} = \frac{R}{R-h}$  e isso nos fornece que  $r = R - h$ . Dessa maneira,

$$\begin{aligned} V_c &= \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R(R-h) + (R-h)^2) = \\ &= \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{3} \pi h^2 R - \frac{1}{3} \pi h (R^2 - 2Rh + h^2) = \\ &= \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{1}{3} \pi h^2 R - \frac{1}{3} \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi h^2 R - \frac{1}{3} \pi h^3 \end{aligned}$$

E chega-se então a

$$V_c = \pi h^2 R - \frac{1}{3} \pi h^3. \quad \blacksquare$$

## 5 FUNÇÃO QUE EXPRIME O VOLUME DA REGIÃO DE INTERSEÇÃO ENTRE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Neste capítulo vamos resolver o problema proposto na introdução: dados dois sólidos geométricos iguais que se aproximam por um eixo  $x$ , de maneira que um passará pelo outro completamente, formando uma região de interseção, qual será o comportamento do volume dessa região a medida que os sólidos se aproximam até passarem um pelo outro completamente? Para a metodologia da resolução de problemas deve-se, inicialmente, compreender o problema e traçar um plano de execução.

A melhor forma de visualizar o comportamento da região de interseção é utilizar a forma gráfica, mas para isso, precisamos relacionar as variáveis, o deslocamento dos sólidos e seus volumes. Com a função determinada seguiremos para a próxima etapa: traçar os gráficos.

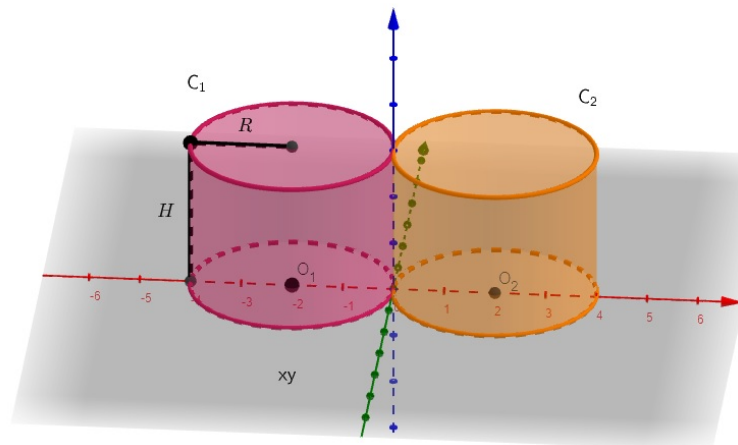
Nesse capítulo será discutido como obter uma função que determina o volume da região de interseção entre sólidos geométricos congruentes. À primeira vista, não se sabe qual o tipo de função que será obtida. Dessa forma, construí-la é uma parte importante do processo. Começaremos pelos sólidos de revolução pelo fato de que esses sólidos terem maior simetria. Posteriormente, analisaremos o caso em que os sólidos são pirâmides.

### 5.1 Sólidos de revolução

Nessa seção será tratado da construção da função para os sólidos de revolução: Cilindro, Cone e Esfera. Para o Cilindro será considerada sua altura paralela ao eixo  $z$ , sendo a aproximação dos cilindros em um direção paralela ao plano  $xy$  e para o Cone a Esfera, a altura será considerada coincidente com o eixo  $x$  e o centro pertencente ao eixo  $x$ , respectivamente, sendo a aproximação dos sólidos por meio do eixo  $x$ .

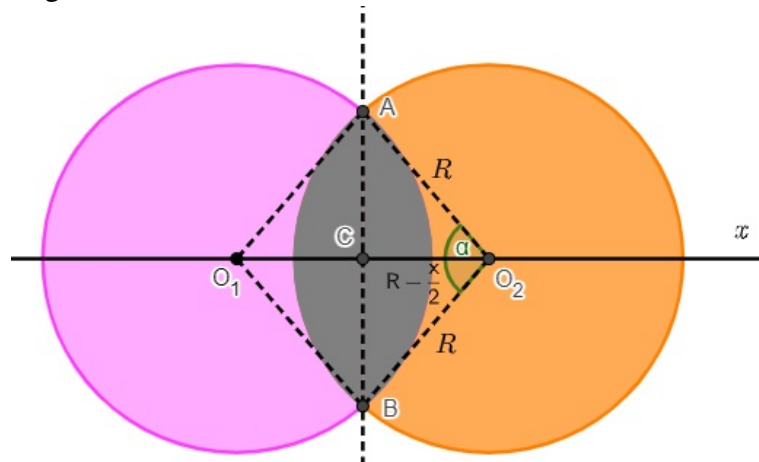
#### 5.1.1 O Cilindro

Considere um sistema de coordenadas cartesianas  $xyz$  e dois Cilindros  $C_1$  e  $C_2$  circulares retos com suas bases pertencentes ao plano  $xy$ , raio da base  $R$  e altura  $H$ . Por simplicidade, e sem perda de generalidade, suponhamos que o centro das bases, que estão sobre o eixo  $xy$ , pertence ao eixo  $x$  do plano e que as bases se intersectam na origem do sistema de coordenadas. Sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros dos Cilindros  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, e  $x$  o deslocamento do centro  $O_2$  sobre o eixo  $x$ .

Figura 21 – Cilindros  $C_1$  e  $C_2$ 

Fonte: O autor (2023).

Em um primeiro momento, será analisado quando a medida  $x$  do deslocamento do ponto  $O_2$  na direção de  $C_1$  sobre o eixo  $x$  é um valor entre 0 e  $2R$ . Considerando a Figura 21, observa-se que o fator que influenciará o volume da região de interseção entre os dois sólidos será a área de interseção entre as duas bases. Então é suficiente analisar essa área de interseção.

Figura 22 – Bases dos cilindros  $C_1$  e  $C_2$ 

Fonte: O autor (2023).

Como mostrado na Figura 22, área de interseção é a destacada em cinza. Para determinar sua área é preciso, levando em consideração que metade dela pertencente a cada um dos círculos bases dos cilindros, calcular a área do setor circular e subtrair a área do triângulo. Por exemplo, na base do Cilindro  $C_2$ , determina-se a área do setor  $\widehat{AB}$  e depois subtrai-se a área do triângulo  $ABO_2$ .

Sendo as figuras claramente simétricas, é suficiente determinar a área de metade da interseção e posteriormente multiplicar por dois. A área do triângulo é dada pela expressão  $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$ . Já a área do setor circular, considerando o ângulo  $\alpha$ , o ângulo compreendido entre

os dois raios que determinam o setor circular, medido em radianos, é dada pela expressão  $A_s = \frac{R^2 \cdot \alpha}{2}$ . Olhando novamente para a Figura 22, é possível observar que  $h = R - \frac{x}{2}$ , sendo o  $x$  o deslocamento do centro  $O_2$  na direção de  $O_1$  e que  $\alpha$  variará conforme  $x$  variar, portanto, é necessário escrevê-lo em função de  $x$ .

Como o triângulo  $AO_1O_2$  é isósceles, pois seus lados  $AO_1$  e  $O_2A$  são iguais a  $R$  então a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é perpendicular ao eixo  $x$  pois coincide com a altura de  $AO_1O_2$ . Sendo assim, o triângulo  $ACO_2$  é retângulo e é possível determinar a medida do lado  $AC$  usando o teorema de Pitágoras.

Pelo Teorema de Pitágoras  $(O_2A)^2 = (AC)^2 + (CO_2)^2$ , mas  $O_2A = R$  e  $CO_2 = R - \frac{x}{2}$ , dessa forma,  $AC = \frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2}$ , sendo essa metade da base  $b$  do triângulo  $ABO_2$ . Com a medida de  $AC$  pode-se determinar também a medida  $\alpha$  em função de  $x$ . Tomando o triângulo  $ACO_2$ , percebe-se que  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{O_2A} = \frac{\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2}}{R}$  e por fim, obtém-se que  $\alpha = 2\arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right)$ .

Fazendo as devidas substituições nas expressões de  $A_t$  e  $A_s$ , pode-se determinar a medida a área de interseção  $A_{int}$ . Segue que a metade de  $A_{int}$  é

$$\frac{A_{int}}{2} = A_s - A_t = \frac{R^2 \cdot 2\arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right)}{2} - \frac{\sqrt{4xR-x^2} \cdot \left(R - \frac{x}{2}\right)}{2}.$$

Organizando um pouco a equação, obtém-se

$$\frac{A_{int}}{2} = R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR-x^2} \cdot (2R-x)}{4}. \quad (5.1)$$

Deve-se por fim, tomar o dobro da expressão encontrada. A equação, portanto é

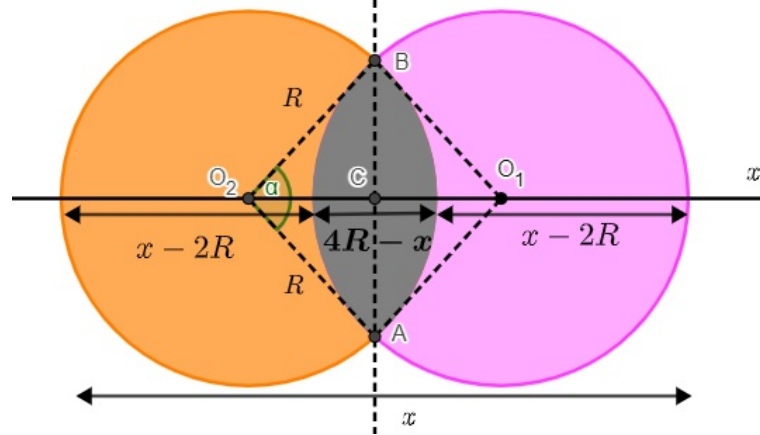
$$A_{int} = 2R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR-x^2} \cdot (2R-x)}{2}.$$

O volume da região de interseção  $V_{int}$ , para o intervalo 0 a  $2R$ , pode ser obtido através da expressão  $V_{int} = A_{int} \cdot H$ . Para mostrar isso, basta usar o princípio de Cavallieri de forma semelhante à usada para demonstrar o volume do cilindro. O volume da região de interseção será; dessa maneira

$$V_{int} = 2H \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR-x^2} \cdot (2R-x)}{4} \right). \quad (5.2)$$

Para o intervalo de  $2R$  a  $4R$ , considere a seguinte figura.

Figura 23 – Bases dos cilindros  $C_1$  e  $C_2$  em relação ao intervalo de  $2R$  a  $4R$ .



Fonte: O autor (2023).

É possível observar que, para determinar a região de interseção entre as bases dos cilindros, deve se proceder como anteriormente, ou seja, a área de interseção corresponderá a área do setor circular  $\widehat{AB}$  menos a área do triângulo  $BO_2A$ . A altura do triângulo é o segmento  $O_2C$  e sua base o segmento  $AB$ . Pela Figura 23, a medida de  $O_2C$  é igual a  $\frac{x}{2} - R$ , sendo um dos lados do triângulo retângulo  $BO_2C$ , dessa maneira é possível calcular a medida de  $BC$  que corresponde a metade da base do triângulo  $BO_2A$ .

Pelo teorema de Pitágoras,  $(BO_2)^2 = (O_2C)^2 + (CB)^2$ , segue que  $R^2 = (\frac{x}{2} - R)^2 + (CB)^2$ , e conclui-se que  $CB = \frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2}$ . Como esse é a metade do valor de  $AB$ , a área  $A_t$  do triângulo é dada por  $A_t = \frac{(\frac{x}{2}-R) \cdot \sqrt{4xR-x^2}}{2}$ . Quanto a área do setor circular deve-se determinar o valor de  $\alpha$ , e novamente recorrendo a Figura 23, percebe-se que  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BC}{BO_2} = \frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}$  e conseqüentemente  $\alpha = 2\arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right)$ .

Tendo os valores da base e da altura do triângulo  $BO_2C$  e o ângulo  $\alpha$  referente ao setor  $\widehat{AB}$ , pode-se seguir com o cálculo da área região de interseção  $A_{int}$  das bases dos Cilindros  $C_1$  e  $C_2$ . Assim,

$$A_{int} = A_s - A_t = \frac{2R^2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right)}{2} - \frac{(\frac{x}{2}-R) \cdot \sqrt{4xR-x^2}}{2}.$$

Organizando um pouco a equação obtém-se

$$A_{int} = R^2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right) - \frac{(x-2R) \cdot \sqrt{4xR-x^2}}{4}. \quad (5.3)$$

Sendo a Equação 5.3 a equação que exprime a área da região de interseção entre as

bases dos Cilindros  $C_1$  e  $C_2$  no intervalo  $2R \leq x \leq 4R$  segue que o volume  $V_{int}$  da interseção entre os Cones  $C_1$  e  $C_2$  nesse mesmo intervalo será dado pelo dobro da área encontrada multiplicado pelo altura, ou seja, pela equação que seguinte:

$$V_{int} = 2H \cdot \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR-x^2} \cdot (x-2R)}{4} \right). \quad (5.4)$$

Por fim, a função que determina o volume da região de interseção dos Cilindros  $C_1$  e  $C_2$  é definida em duas partes. Essa função é

$$V_{int} = \begin{cases} 2H \cdot \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR-x^2} \cdot (2R-x)}{4} \right), & \text{se } 0 \leq x \leq 2R. \\ 2H \cdot \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR-x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR-x^2} \cdot (x-2R)}{4} \right), & \text{se } 2R < x \leq 4R. \end{cases} \quad (5.5)$$

O volume máximo da interseção entre os sólidos acontecerá quando os sólidos coincidirem e esse valor será determinado calculando o volume do cilindro. Neste caso, o volume máximo  $V_{max}$  é dado por  $V_{max} = \pi R^2 H$ . Note que, se  $x = 2R$  na Equação 5.5, o valor encontrado será exatamente o valor de  $V_{max}$ .

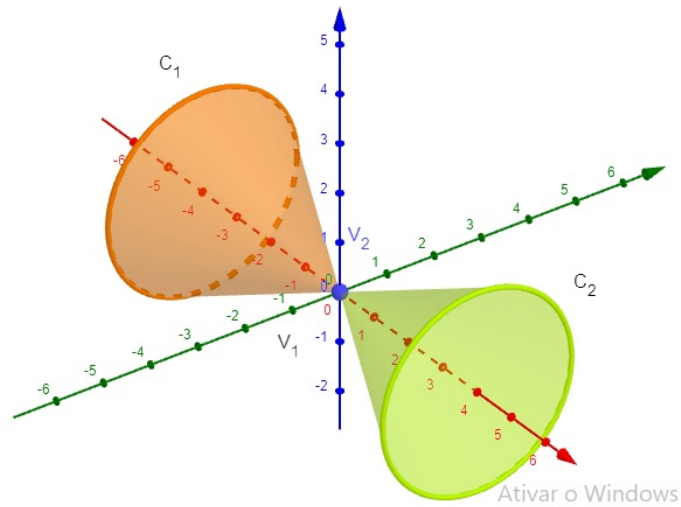
### 5.1.2 O Cone

Inicialmente, seja um sistema de coordenadas cartesianas  $xyz$  e sejam dois Cones  $C_1$  e  $C_2$  de mesmo raio da base  $R$  e altura  $H$  com seus eixos sobre o eixo  $x$ . Suponha que os cones têm seus vértices  $V_1$  e  $V_2$  inicialmente coincidindo. Suponha também que o Cone  $C_1$  se desloca sobre o eixo  $x$  na direção de  $C_2$  uma distância  $x$ , como na Figura 24. Será tomado, para referência de deslocamento, o vértice do Cone  $C_1$ .

Deve ser observado que, como os sólidos tomados são simétricos, então pode-se utilizar essas simetrias para determinar a forma da região de interseção entre os dois sólidos. Quando essa variação  $x$  é tal que  $0 \leq x \leq H$ , temos a situação como na Figura 25.

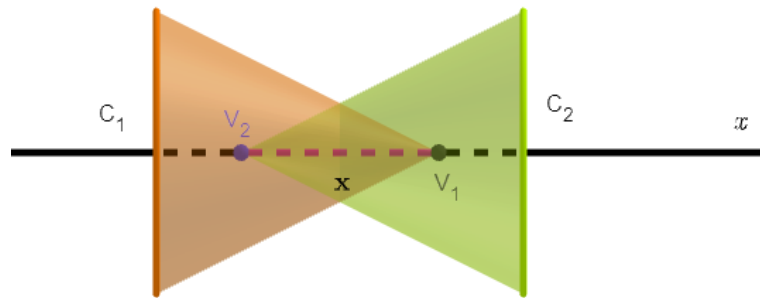
A região de interseção entre os dois cones é a justaposição entre dois Cones menores  $C'_1$  e  $C'_2$  e usando a secção lateral da figura determinada por um plano  $\alpha$ , perpendicular ao eixo  $x$ , pode-se concluir que eles são congruentes. Pela Figura 26, é possível perceber que o comprimento da base dos triângulos resultantes da secção dos Cones  $C_1$  e  $C_2$  é  $2R$ , pois corresponde ao diâmetro da base desses Cones e a base dos triângulos resultantes da secção dos Cones  $C'_1$  e  $C'_2$  é  $2r$ , sendo  $r$  o raio da base desses dois Cones. Será usada semelhança de triângulos para determinar  $r$  em função de  $R$  e  $H$ , isso será feito nos próximos parágrafos.

Figura 24 – Cones  $C_1$  e  $C_2$



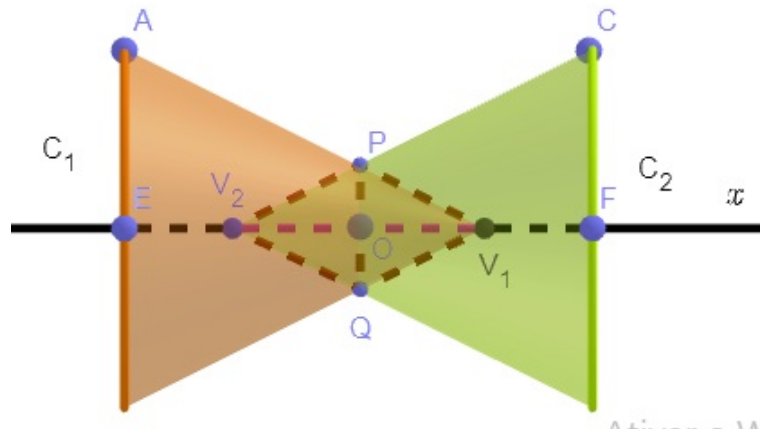
Fonte: O autor (2022).

Figura 25 – Secção dos cones  $C_1$  e  $C_2$



Fonte: O autor (2022).

Figura 26 – Triângulos  $PV_2Q$  e  $QV_1P$



Fonte: O autor (2022).

Considerando os pontos  $P$  e  $Q$ , intersecções das geratrizes dos dois cones, conforme a Figura 26, temos que o eixo  $x$  é a bissetriz dos ângulos  $QV_2P$  e  $PV_1Q$ , que são congruentes. Têm-se que os triângulos  $PV_2V_1$  e  $V_2QV_1$  são isósceles, pois os ângulos da base são congruentes

entre si pelo caso de congruência ÂNGULO - LADO - ÂNGULO, dado que o ângulo  $PV_2V_1$  é congruente ao ângulo  $V_1V_2Q$ , o lado  $V_2V_1$  é comum aos dois triângulos e o ângulo  $V_2V_1P$  é congruente ao ângulo  $QV_1V_2$ .

Dessa forma,  $PQ$  que possui medida  $2r$ , é perpendicular ao eixo  $x$ , pois é o segmento suporte das alturas dos triângulos  $PV_2V_1$  e  $V_2QV_1$ , e portanto paralelo aos lados dos triângulos maiores de medida  $2R$ . Aplicando a semelhança entre os triângulos  $AEV_1$  e  $POV_1$ , teremos a relação

$$\frac{H}{\frac{x}{2}} = \frac{R}{r},$$

que resulta na expressão

$$r = \frac{R \cdot x}{2H}.$$

O volume procurado é o da junção dos cones pequenos, resultado da interseção dos cones  $C_1$  e  $C_2$ . O volume de um cone pode ser expresso por  $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ , como  $h = \frac{x}{2}$  e  $r = \frac{R \cdot x}{2H}$ , logo o volume  $V_{int}$  da interseção das regiões é

$$V_{int} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\left(\frac{Rx}{2H}\right)^2 \cdot \frac{x}{2}}{3},$$

que fornece, por fim,

$$V_{int} = \frac{R^2 \cdot \pi}{12H^2} \cdot x^3.$$

A equação final, que modela a interseção entre as regiões dos dois cone em função do deslocamento  $x$  tal que  $0 \leq x \leq H$  é uma função cúbica.

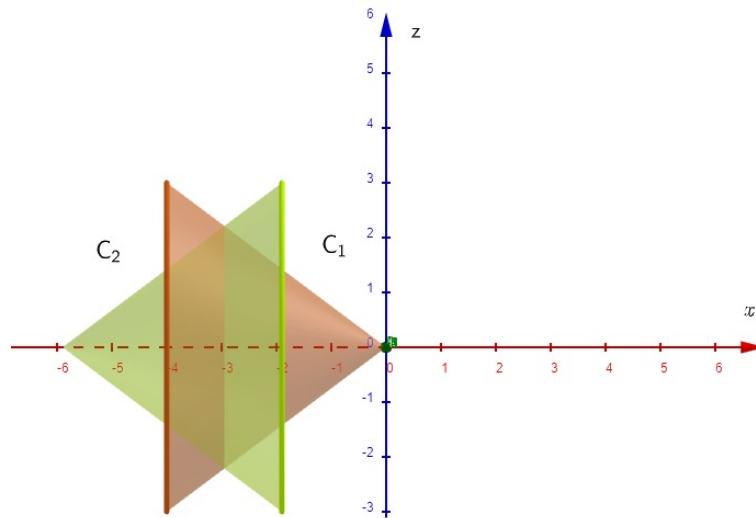
Considerando a Figura 27 quando a aproximação  $x$  entre os cones  $C_1$  e  $C_2$  é tal que  $H < x \leq 2H$ . Será tomada a secção desse sólido para determinar o formato da interseção nesse intervalo.

Ao se observar a figura percebemos que a interseção dos sólidos será a justaposição de dois troncos de cone. Afirmarmos que a altura do tronco de cone é metade da diferença entre a altura  $H$  e a medida  $a$ .

Esse deslocamento corresponde a altura do cone mais um comprimento  $a$  do cone que atravessa a base do cone  $C_2$  como pode-se observar na Figura 28. O argumento para mostrar

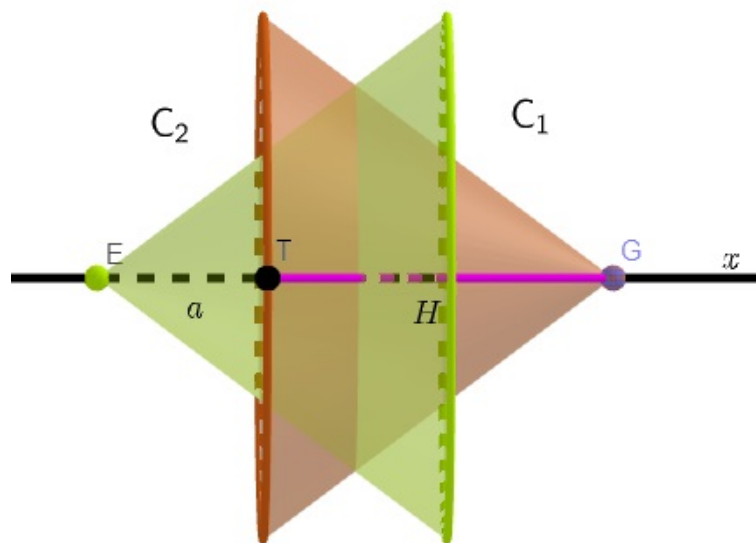


Figura 27 – Cones  $C_1$  e  $C_2$  quando  $H < x \leq 2H$



Fonte: O autor (2022).

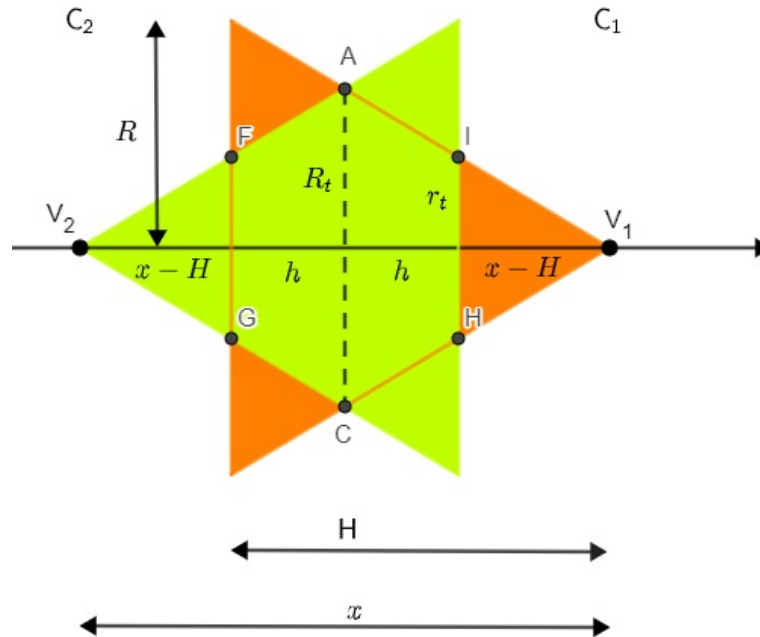
Figura 28 – Cones  $C_1$  e  $C_2$  quando  $H < x \leq 2H$  destacando o deslocamento de  $C_2$



Fonte: O autor (2023).

que os dois troncos justapostos são congruentes é o mesmo utilizado para mostrar que os cones  $C'_1$  e  $C'_2$  são congruentes.

Para determinar o volume dos troncos de cones precisamos determinar o raio  $R_t$  maior do tronco de cone e o raio  $r_t$  menor do tronco de cone. Têm-se que  $R_t = \frac{AC}{2}$ , pois está sendo considerado o tronco de cone cuja a secção é a o trapézio  $FGCA$ . Olhando para o triângulo  $V_2AC$ , semelhante ao triângulo que corresponde a secção relativa ao cone  $C_2$  então temos que  $\frac{R_t}{R} = \frac{H+a}{H}$ , onde  $a$  é a altura do triângulo  $V_2GF$ . Obtem-se, dessa forma que  $R_t = R \frac{(H+a)}{2H}$ . Quanto

Figura 29 – Secção da interseção dos cones  $C_1$  e  $C_2$ 

Fonte: O autor (2022).

a  $r_t$ , como a base do cone  $C_1$  é paralela a base do cone  $C_2$  segue que o triângulo  $V_2GF$  é semelhante ao triângulo formado pela secção de  $C_1$ . Disto concluiu-se que  $\frac{R}{r_t} = \frac{H}{a}$ . Portanto  $r_t = \frac{R \cdot a}{H}$ .

O volume da região de interseção será dado por duas vezes o volume de um tronco de cone. Nesse caso, a altura do tronco de cone  $h_t$  corresponderá a  $\frac{H-a}{2}$  e com isso tem-se que o volume  $V_i$  da região de interseção é tal que

$$V_{int} = \frac{\pi h_t}{3} (R_t^2 + R_t r_t + r_t^2)$$

Fazendo as devidas substituições temos que

$$V_{int} = \frac{\pi \frac{H-a}{2}}{3} \left( \frac{R^2 (H+a)^2}{4H^2} + \frac{Ra}{H} R \frac{(H+a)}{2H} + \frac{R^2 a^2}{H^2} \right),$$

resolvendo a expressão,

$$V_{int} = \frac{\pi R^2}{24H^2} (H^3 + 3H^2 a + 3Ha^2 - 7a^3),$$

Mas, como deseja-se fazer com que o volume da interseção fique em função do deslocamento  $x$ , deve-se substituir  $a = x - H$ , pois sabemos que o deslocamento  $x = a + H$ , obtendo a função do volume

$$V_{int} = \frac{\pi R^2}{24H^2} (8H^3 - 24H^2 x + 24Hx^2 - 7x^3).$$

Tal função foi calculada considerando apenas metade da região de interseção entre os dois cones  $C_1$  e  $C_2$ , cujo o formato é um tronco de cone. Para calcular o volume da região inteira deve-se tomar o dobro da expressão encontrada, ou seja,

$$V_{int} = \frac{\pi R^2}{12H^2} (8H^3 - 24H^2x + 24Hx^2 - 7x^3).$$

A expressão completa para a função volume é

$$V_{int} = \begin{cases} \frac{\pi R^2}{12H^2} \cdot x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq H. \\ \frac{\pi R^2}{12H^2} (8H^3 - 24H^2x + 24Hx^2 - 7x^3), & \text{se } H < x \leq 2H. \end{cases}$$

Como a função é definida por partes deve-se comparar as duas partes da função. Suponhamos que  $\frac{R^2\pi}{12H^2}x^3$  é menor que  $\frac{R^2\pi}{12H^2}(8H^3 - 24H^2x + 24Hx^2 - 7x^3)$ , para algum valor de  $x$ , ou seja,

$$\frac{R^2\pi}{12H^2}(8H^3 - 24H^2x + 24Hx^2 - 7x^3) - \frac{R^2\pi}{12H^2}x^3 > 0.$$

Isso nos leva a desigualdade  $(H - x)^3 > 0$  que nos faz concluir que para todo valor  $x$  menor que  $H$  é válida a desigualdade e como a primeira função está definida apenas no intervalo  $0 \leq x \leq H$  então o valor máximo deve ser obtido a partir da segunda função.

Observando a segunda função com o objetivo de obter o ponto de máximo, percebe que é suficiente obter o ponto de máximo do polinômio  $8H^3 - 24H^2x + 24Hx^2 - 7x^3$ , que é uma equação polinomial cúbica, cujo o ponto de máximo não é simples de ser encontrado.

Para resolver esse problema recorreremos ao que está em Ramos (2019) e teremos que, se a função polinomial é da forma  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  então os candidatos a pontos de máximo ou mínimo será os obtidos através da expressão  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ . Dessa maneira, substituindo os valores teremos

$$x = \frac{-24H \pm \sqrt{(24H)^2 - 3(-7)(-24H^2)}}{3(-7)}.$$

Organizando a equação,

$$x = \frac{-8H \pm 2\sqrt{2}H}{-7}.$$

Considerando  $\sqrt{2} = 1,41$  obtemos  $x_1 = 0,74H$  e  $x_2 = 1,54H$ . Como o valor deve ser maior que  $H$ , pois a segunda função já está definida a partir desse valor, então o valor de  $x$  que fornece

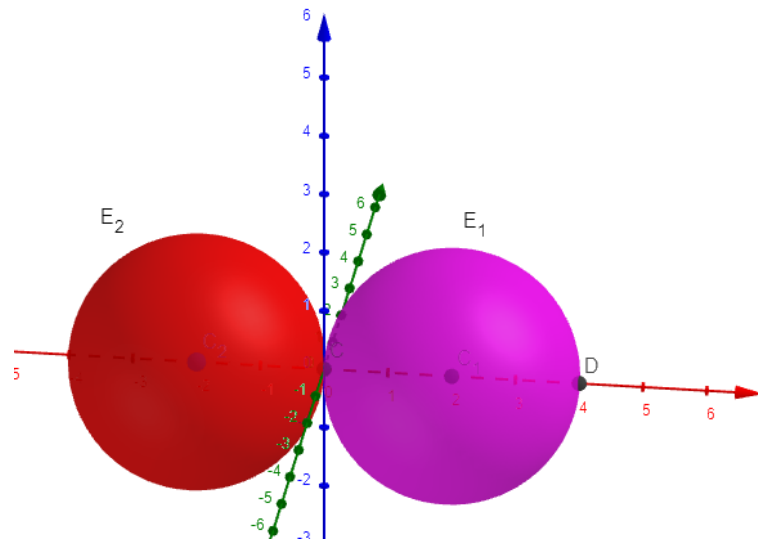
o valor máximo da função é  $1,54H$ . Substituindo na função tem-se que o valor máximo será  $V_{max} = 0,598 \frac{\pi R^2 H}{3}$ .

A próxima subseção terá como objetivo encontrar uma expressão para a região de interseção entre duas esferas nas mesmas condições dos cones  $C_1$  e  $C_2$ .

### 5.1.3 A Esfera

Sejam duas Esferas  $E_1$  e  $E_2$ , ambas tendo raio de medida  $R$  e centros  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente. Tais esferas se intersectam na origem em sistema de coordenadas cartesianas  $xyz$  como na Figura 30 e possuem seus centros sobre o eixo  $x$ . A Esfera  $E_1$  se desloca  $x$  unidades sobre o eixo  $x$  na direção da Esfera  $E_2$  e formam uma região de interseção entre os volumes dos dois sólidos como na Figura 31.

Figura 30 – Esferas  $E_1$  e  $E_2$  se intersectando na origem do plano  $xyz$

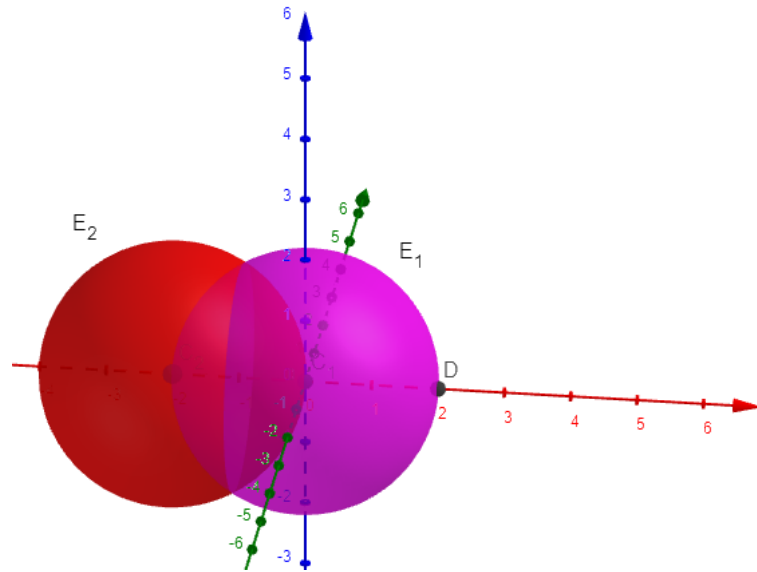


Fonte: O autor (2022).

De forma semelhante ao realizado com o cone, seja considerado a secção das esferas  $E_1$  e  $E_2$  por um plano  $\alpha$  perpendicular ao eixo  $x$ , como mostrado na Figura 32 e considerando  $B_1$  e  $B_2$  os pontos de interseção entre os arcos formados na secção de  $E_1$  e  $E_2$  por  $\alpha$ . Será mostrada a existência de duas equações para o volume da região de interseção, uma para o intervalo  $0 \leq x \leq 2R$  e outra para o intervalo  $2R < x \leq 4R$ .

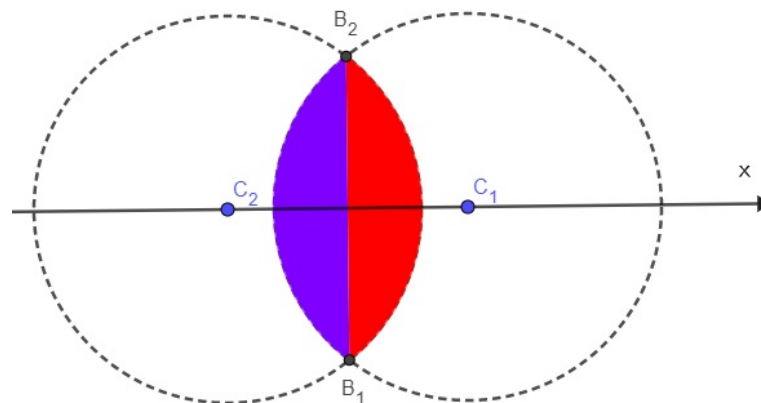
Para situação em que  $0 \leq x \leq 2R$  tem-se que a interseção  $I$  das esferas  $E_1$  e  $E_2$  tem o formato da justaposição de duas calotas esféricas. Sendo assim, é suficiente, dada a simetria das figuras, determinar o volume de uma calota em função de  $x$  e multiplicar por dois este resultado.

Figura 31 – Esferas  $E_1$  e  $E_2$  formando uma região de interseção



Fonte: O autor (2022).

Figura 32 – Secção pelo plano  $\alpha$  das Esferas  $E_1$  e  $E_2$  quando  $x < R$



Fonte: O autor (2022).

O volume dessa região de interseção, considerando o volume de uma calota esférica dada pelo Teorema 4.0.12 e  $r = R$  e  $h = \frac{x}{2}$ , portanto, é dada pela expressão, sendo essa a metade da região de interseção

$$V_I = \frac{\pi x^2 R}{4} - \frac{1}{24} \pi x^3.$$

Para a região de interseção inteira temos a expressão

$$V_I = \frac{\pi x^2 R}{2} - \frac{1}{12} \pi x^3. \quad (5.6)$$

No entanto, quando  $2R \leq x \leq 4R$  temos que a expressão para o volume da região de

interseção entre as duas esferas é

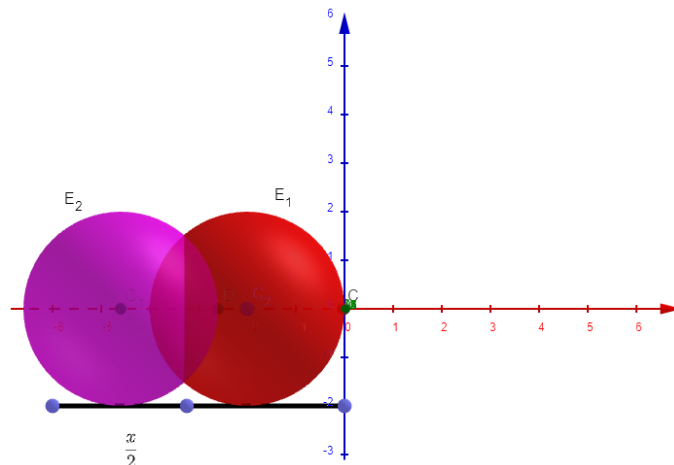
$$V_I = \frac{\pi x^3}{12} - \frac{\pi x^2 R}{2} + \frac{8\pi R^3}{3}. \quad (5.7)$$

Obtêm-se essa equação quando  $x \geq 2R$  pois forma-se calotas fora da região de interseção cuja altura corresponde a  $2R - \frac{x}{2}$  como na Figura 33, dessa maneira o volume  $V_I$  região de interseção será o resultado do dobro do volume da esfera menos o volume das calotas fora da região de interseção, ou seja,

$$V_I = \frac{8\pi R^3}{3} - \left( \frac{\pi x^2 R}{2} - \frac{1}{12} \pi x^3 \right),$$

resultando na Equação 5.7.

Figura 33 – Interseção das esferas  $E_1$  e  $E_2$  quando  $x \geq 2R$ .



Fonte: O autor (2022).

A função do volume da interseção entre os sólidos é

$$V_{int} = \begin{cases} \frac{\pi R}{2} x^2 - \frac{\pi}{12} x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq 2R. \\ \frac{\pi}{12} x^3 - \frac{\pi R}{2} x^2 + \frac{8\pi R^3}{3}, & \text{se } 2R \leq x \leq 4R. \end{cases}$$

Notadamente, as expressões 5.6 e 5.7, assim como as fórmulas obtidas para o cone, são equações cúbicas. Quando analisadas, pode-se observar que as raízes são obtidas quando  $x = 0$  e  $x = 4R$ , para cada uma das expressões, respectivamente, nos intervalos determinados. Quanto ao volume máximo  $V_{max}$  da interseção entre os sólidos ocorrerá quando eles coincidirem completamente, dessa forma, para determiná-lo basta tomar  $x = 2R$  e então obteremos o volume de uma esfera, ou seja,  $V_{max} = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

## 5.2 Poliedros

Nesta seção serão determinadas as funções para a região de interseção entre poliedros de mesma maneira como foi feito para os sólidos de revolução na seção anterior. Mas precisamente, serão contemplados dois tipos de poliedros: prismas e pirâmides. Para os prismas serão consideradas que uma das duas bases pertençam ao plano  $xy$ , suas alturas sejam paralelas ao eixo  $z$  e a aproximação dos sólidos ocorre perpendicularmente a suas alturas. Quanto as pirâmides, será considerado que suas alturas estão sobre o o eixo  $x$  e que a aproximação dos sólidos acontecem nesse eixo.

### 5.2.1 Prismas

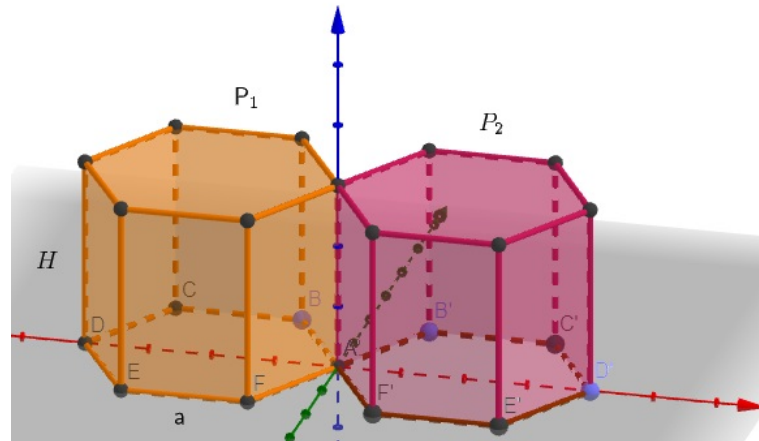
Nesta seção será tratado do problema de encontrar uma função que expresse o volume da região de interseção entre dois prismas congruentes com uma das bases pertencente ao plano  $xy$  e de altura  $H$ , paralela ao eixo  $z$ . Considerando a aproximação desses dois sólidos de forma perpendicular a altura de ambos, o volume da interseção dependerá da área da interseção entre as bases. Dessa forma, dependendo de que polígono se escolha para a base do prisma, serão obtidas diversas situações. Portanto, para uma discussão não muito extensa, nesta seção será abordado o caso do prisma de base hexagonal.

Sejam dois Prismas  $P_1$  e  $P_2$  com bases hexagonais regulares de lado  $a$  com uma dessas bases pertencentes ao plano  $xy$  e a altura  $H$ , paralela ao eixo  $z$ . Inicialmente, como na Figura 34, os dois Prismas  $P_1$  e  $P_2$  estão com uma de suas aresta coincidindo com o eixo  $z$ . Façamos a aproximação do prisma  $P_2$  ao Prisma  $P_1$ , fixo na sua posição, por meio do eixo  $x$  e seja  $x$  a medida do deslocamento de  $P_2$  em direção a  $P_1$ .

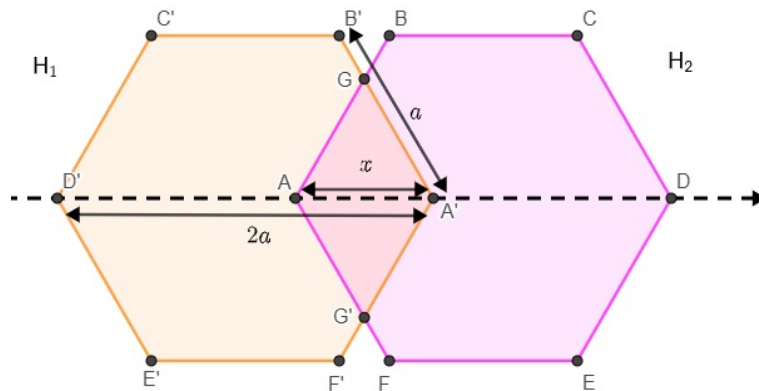
De forma semelhante ao que acontece com o cilindro, o volume de interseção entre os dois prismas dependerá da área da interseção  $A_{int}$  dos prismas. É válido dizer que a análise do caso em que a base é hexagonal é apenas uma das muitas possibilidades que podem ser exploradas. Mas, considerando esse caso específico, sejam os hexágonos regulares  $H_1$  e  $H_2$  de lados medindo  $a$ , bases dos prismas  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente.

Como mostrado na Figura 35, o ponto  $A$ , vértice do hexágono  $H_2$ , percorrerá um comprimento de  $2a$  até coincidir com o ponto  $D'$ , vértice do prisma  $H_1$ . Até que os dois hexágonos coincidam a região de interseção variará de forma diferente em 2 casos:

1. Até o ponto  $B$ , vértice do hexágono  $H_2$ , coincidir com o ponto  $B'$ , vértice do hexágono  $H_1$ ,

Figura 34 – Prismas  $P_1$  e  $P_2$  de bases hexagonais

Fonte: O autor (2023).

Figura 35 – Hexágonos  $H_1$  e  $H_2$ 

Fonte: O autor (2023).

a região de interseção será um losângulo  $A'GAG'$ , conforme a Figura 35.

Nesse primeiro caso, o comprimento  $x$  do deslocamento do hexágono  $H_2$  será de 0 a  $a$ .

Pode-se verificar isso considerando apenas o triângulo  $B'F'A'$ , quando  $B'$  e  $B$  coincidirem.

Tem-se que o triângulo  $B'F'A'$  é isósceles de forma que os lados  $B'A'$  e  $A'F'$  são iguais

a  $a$  e o ângulo  $\alpha = 120^\circ$  pois é um dos ângulos internos do hexágono  $H_1$ . Pela Lei dos

cossenos temos que

$$(B'F')^2 = (B'A')^2 + (A'F')^2 - 2 \cdot B'A' \cdot A'F' \cdot \cos 120^\circ.$$

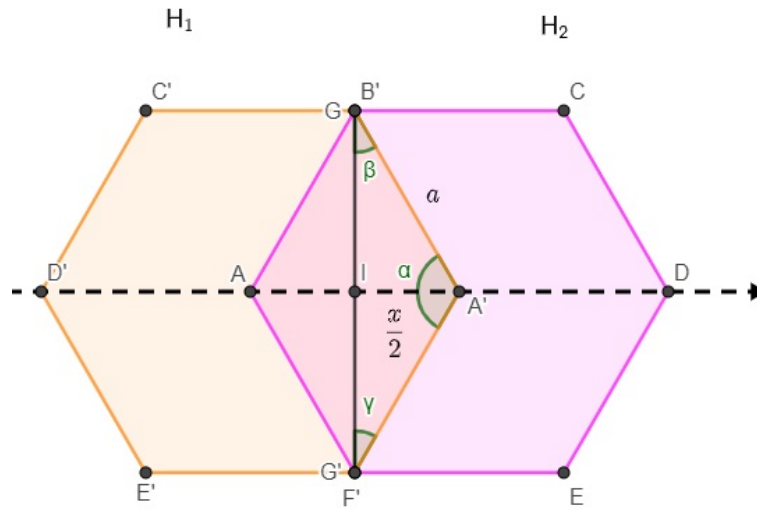
Mas,

$$(B'F')^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right).$$

E concluí-se que  $B'F' = a\sqrt{3}$ . O segmento  $IA'$  é a altura do triângulo  $B'A'F'$  e pelo



Figura 36 – Hexágonos  $H_1$  e  $H_2$  com destaque para o triângulo  $B'F'A'$



Fonte: O autor (2023).

teorema de Pitágoras

$$(B'A')^2 = (IA')^2 + (B'I)^2.$$

Como  $B'A' = a$  e  $B'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  então  $IA' = \frac{a}{2}$ , ou seja,  $x = a$  como afirmado anteriormente. Em uma posição intermediária, como se pode observar na Figura 35, a região de interseção será um losângulo semelhante ao losângulo  $B'AF'A'$ . Para mostrar isso, é suficiente considerar os triângulos  $GG'A'$  e  $B'F'A'$ . Têm-se que os pares de ângulos  $G'\hat{A}G$  e  $F'\hat{A}'B'$ ,  $A'\hat{G}G'$  e  $A'\hat{B}'F'$  e  $GG'A'$  e  $B'\hat{F}'A'$  são congruentes, o primeiro par por corresponder ao ângulo interno do hexágono e os dois outros pares pelo fato do segmento  $GG'$  ser paralelo ao segmento  $B'F'$ .

Por estes fatos, considerando que a base e altura do triângulo  $B'F'A'$  sejam  $a\sqrt{3}$  e  $\frac{a}{2}$  e o triângulo  $GG'A'$  a altura é igual a  $\frac{x}{2}$  e a base  $b$  não é conhecida, temos a relação de semelhança

$$\frac{a\sqrt{3}}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

Segue que  $b = x\sqrt{3}$ . A área do triângulo  $GG'A'$  é igual a

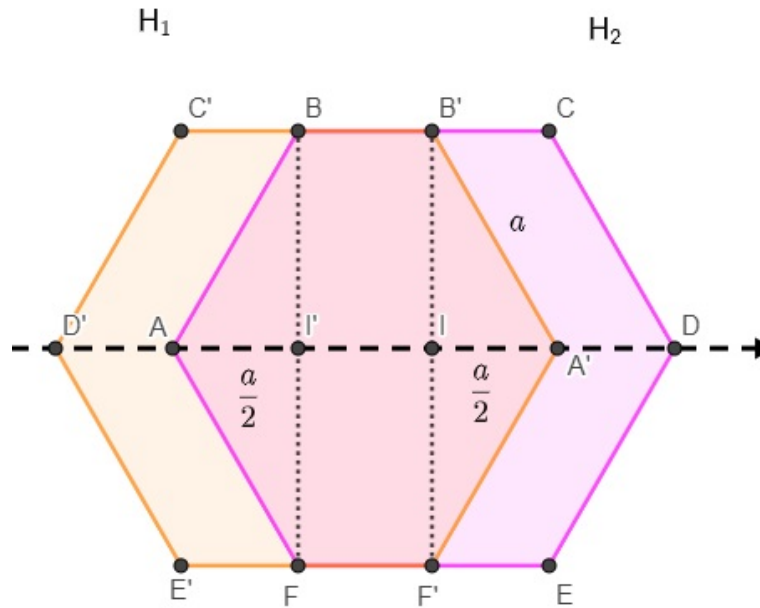
$$A_{GG'A'} = \frac{x\sqrt{3} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}. \tag{5.8}$$

Pela simetria da figura, a Equação 5.8 fornece apenas metade da região de interseção,

então, para o intervalo  $0 \leq x \leq a$ , a área da interseção dos hexágonos é dada por  $\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$  e o volume da interseção entre os prismas é  $V_{int} = H \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ .

2. Após o ponto  $B$  coincidir com o ponto  $B'$  e até o ponto  $B$  coincidir com o ponto  $C'$ , vértice do hexágono  $H_1$ , a região de interseção será um hexágono  $BAFF'A'B'$ .

Figura 37 – Hexágonos  $H_1$  e  $H_2$  com destaque para o hexágono  $BAFF'A'B'$



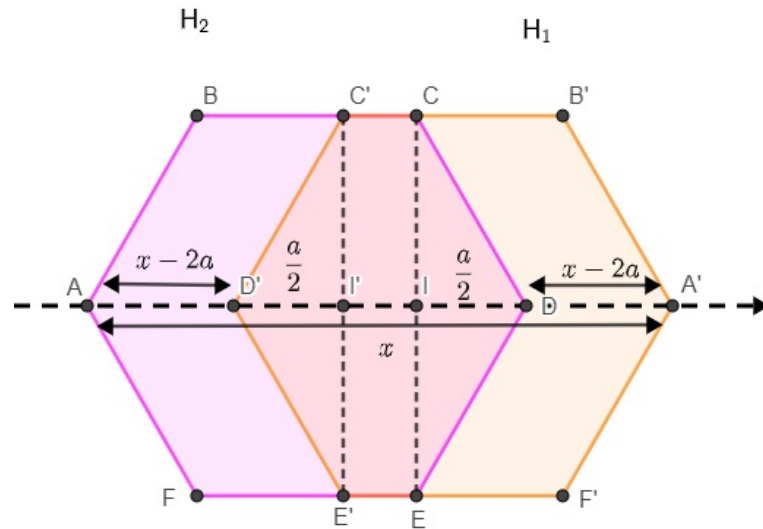
Fonte: O autor (2023).

Conforme a Figura 37, tem-se que a área é justaposição entre os triângulos  $BAF$  e  $F'A'B'$  e o retângulo  $B'BFF'$  e a única dessa três figuras que tem área variável é o retângulo pois os triângulos tem área  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ . Como  $AA' = x$ , a área do retângulo  $B'BFF'$  será igual a  $(a\sqrt{3})(x - a)$ . A área da região de interseção entre os hexágonos será o resultado da soma da área do retângulo com a área dos dois triângulos, ou seja,  $x \cdot a\sqrt{3} - a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , e isso é igual a  $x \cdot a\sqrt{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ . Portanto, a função que calcula o volume da região de interseção entre os prismas de base hexagonal  $P_1$  e  $P_2$  no intervalo  $a < x \leq 2a$  é  $V_{int} = H \cdot \left( \frac{1\sqrt{3}}{2}a^2 - x \cdot a\sqrt{3} \right)$ .

Depois que os dois hexágonos coincidem o hexágono  $H_2$  passará por  $H_1$  e é necessário outras funções para determinar a área da região de interseção nesse caso. Duas situações deverão ser consideradas:

1. Depois que os ponto  $B$  e  $C'$  coincidem até o momento em que o ponto  $C$  e  $C'$  coincidem. Como pode ser observado na Figura 39, a região de interseção é um hexágono  $C'D'E'EDC$  resultado da justaposição dos triângulos  $C'D'E'$  e  $EDC$  e o retângulo  $CC'E'E$ , que é a única parte do hexágono  $C'D'E'EDC$  que tem a área variável. A medida da área de cada um dos

Figura 38 – Hexágonos  $H_1$  e  $H_2$  com destaque para o hexágono  $C'D'E'EDC$

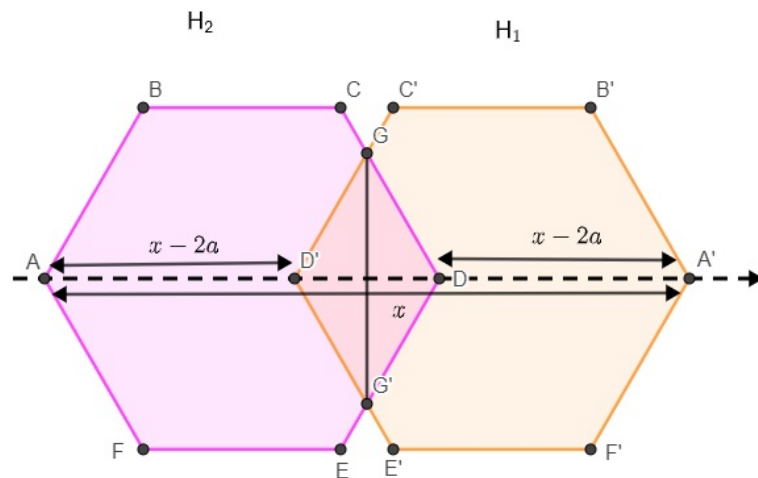


Fonte: O autor (2023).

dois triângulos é  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  e a área do retângulo depende do comprimento de  $II'$ . Mas, temos que  $II' = x - ((x - 2a) + (x - 2a) + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = 3a - x$ . Sendo assim, a área do retângulo  $CC'E'E$  é igual a  $(3a - x)(a\sqrt{3})$ . Dessa maneira, a função que permite calcular a área de interseção dos hexágonos  $H_1$  e  $H_2$  no intervalo  $2a < x \leq 3a$  é  $(3a - x)(a\sqrt{3}) + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$  e segue que o volume da interseção entre os dois prismas  $P_1$  e  $P_2$  nesse mesmo intervalo é  $V_{int} = H \cdot ((3a - x)(a\sqrt{3}) + \frac{a^2\sqrt{3}}{2})$ .

- Depois que o ponto  $C$  e  $C'$  coincidem até que os pontos  $D$  e  $D'$  coincidem a área de interseção será um losângulo  $G'DG'D'$ .

Figura 39 – Hexágonos  $H_1$  e  $H_2$  com destaque para o losângulo  $G'DG'D'$



Fonte: O autor (2023).

Para calcular a área do losângulo é suficiente considerar a área do triângulo  $GG'D$ , que

tem área igual a metade da área do losângulo. A base de  $GG'D$  é igual a metade de  $D'D = x - (x - 2a + x - 2a) = 4a - x$ , ou seja, a altura de  $GG'D$  é igual a  $\frac{4a-x}{2}$ . Quanto a base do triângulo temos que, como ele é semelhante a ao triângulo  $DCE$  pelo caso ângulo-ângulo, já que  $CE$  e  $GG'$  são paralelas temos a relação de semelhança,

$$\frac{CE}{GG'} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{4a-x}{2}}.$$

Como  $CE = a\sqrt{3}$  e  $GG'$  corresponde a altura do triângulo  $DCE$  então tem-se que a altura de  $DCE$  é igual a  $\sqrt{3} \cdot (4a - x)$  e a área desse triângulo é dada pela expressão  $\frac{\sqrt{3}(4a-x)^2}{4}$ . Sabe-se, porém que essa deve-se considerar o dobro dessa expressão para determinar a área do losângulo, desta maneira, a expressão para a área o losângulo  $GBG'B'$  é  $\frac{\sqrt{3}(4a-x)^2}{2}$  e o volume da região de interseção entre os prismas  $P_1$  e  $P_2$  no intervalo  $3a < x \leq 4a$  é dada por  $V_{int} = H \cdot \left(\frac{\sqrt{3}(4a-x)^2}{2}\right)$ .

Em resumo a função que determinar o volume da região de interseção dos dois prismas  $P_1$  e  $P_2$  completamente é

$$V(x) = \begin{cases} H \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ H \cdot \left(x \cdot a\sqrt{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right), & \text{se } a \leq x \leq 2a \\ H \cdot \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}a^2 - x \cdot a\sqrt{3}\right), & \text{se } 2a \leq x \leq 3a \\ H \cdot \frac{\sqrt{3}(4a-x)^2}{2}, & \text{se } 3a \leq x \leq 4a. \end{cases}$$

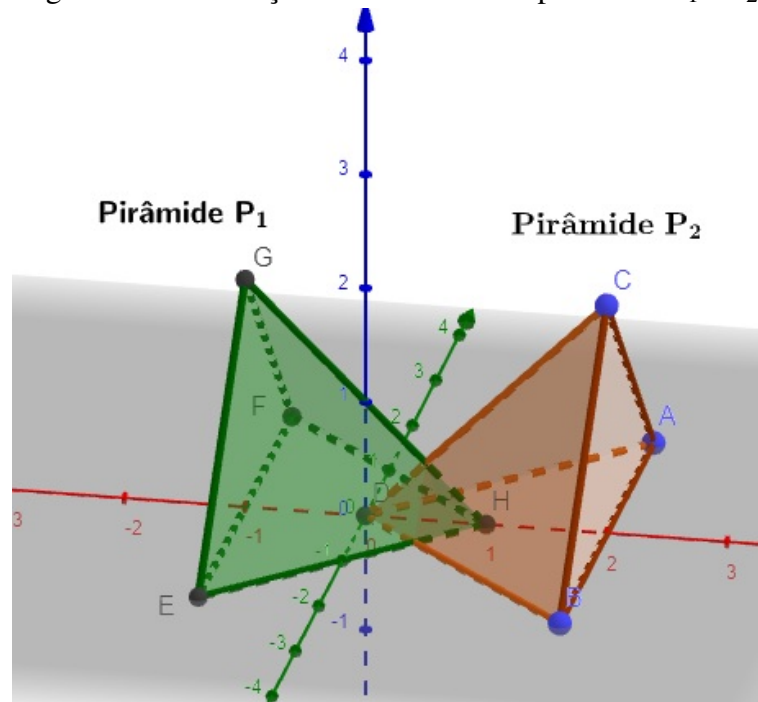
Em relação ao máximo da função, visualmente é perceptível que ocorre quando os dois sólidos coincidem, ou seja, o valor máximo para o volume  $V_{max}$  da interseção entre os sólidos é o volume do sólido apresentado, neste caso  $V(2a) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$ .

### 5.2.2 Pirâmides

Nesta seção objetiva-se tratar, para as pirâmides, construir expressões para o volume de uma região de interseção  $I$  de dois sólidos congruentes que se aproximam a partir de um eixo que coincida com a altura do sólido.

A análise do problema para outros poliedros pode se mostrar bastante complexa, por isso, optou-se por abordar a pirâmide que é uma figura frequentemente estudada no ensino médio. Considerando a Figura 40, onde, por simplicidade, são destacadas duas Pirâmide  $P_1$  e  $P_2$ , de base triangular reta, sendo que todas as conclusões aqui obtidas podem ser generalizadas para pirâmides de base qualquer.

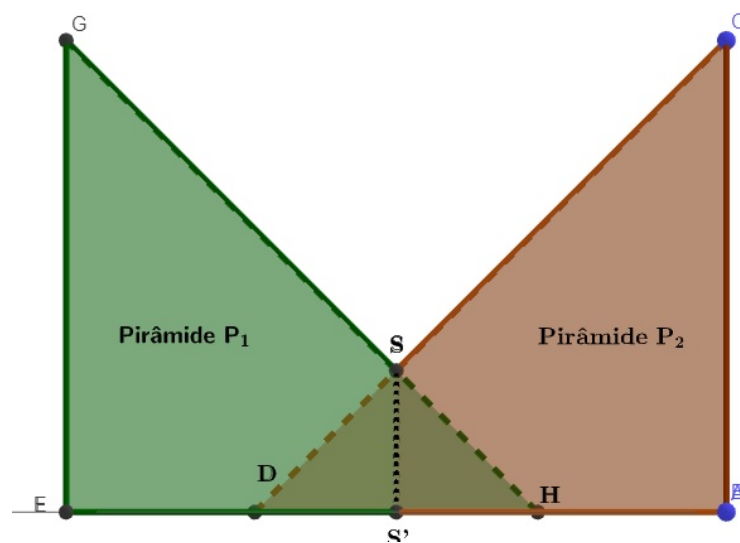
Figura 40 – interseção dos volumes das pirâmides  $P_1$  e  $P_2$



Fonte: O autor (2022).

As pirâmides se aproximam pelo eixo  $x$  do sistema de coordenadas que coincidem com a altura de ambas, sendo que as duas pirâmides são congruentes. O deslocamento  $x$  da Pirâmide  $P_1$  em direção a Pirâmide  $P_2$  terá variação  $0 \leq x \leq 2H$  onde  $H$  é a medida da altura da pirâmide. Seja traçado um plano que contenha os vértices das pirâmides e o ponto de interseção  $S$  entre as arestas  $GH$  e  $CD$  das duas pirâmides.

Figura 41 – Triângulos resultantes da secção das pirâmides



Fonte: O autor (2022).

É possível perceber, conforme a Figura 41, que sendo  $D$ , o vértice da Pirâmide  $P_1$ ,

$H$ , o vértice da Pirâmide  $P_2$ ,  $S$  o ponto de interseção entre as arestas das duas pirâmides e  $S'$  o pé da perpendicular baixada de  $S$  sobre o segmento  $DH$ , temos que os triângulos  $SDS'$  e  $SHS'$  são congruentes, pela caso *ALA* pois como os triângulos são retângulos  $S'\hat{S}D$  é congruente a  $H\hat{S}S'$ , o lado  $SS'$  é comum aos dois triângulos e os ângulos  $D\hat{S}'S$  e  $S\hat{S}'H$ , ambos retos, são congruentes.

Pelo Teorema de Tales já temos a garantia que as bases das pirâmides formadas na interseção dos dois sólidos são semelhantes as bases das Pirâmides  $P_1$  e  $P_2$  e com a congruência dos triângulos, é evidenciado que não somente as bases são congruentes mas as alturas também. Em outras palavras, a região de interseção dos volumes, pelo menos no intervalo  $0 \leq x \leq H$ , é a justaposição de duas pirâmides congruentes por meio de suas bases.

Temos que o volume da pirâmide depende da área da sua base e da sua altura. Considerando a Pirâmide  $P'_1$  da região de interseção temos que seu volume será dado por  $V = \frac{A_B \cdot x}{3}$ , onde  $x$  é o deslocamento do vértice  $D$ . Considerando a semelhança da base de  $P'_1$  com a base de  $P_1$  temos que  $A_b = A_B \left(\frac{x}{H}\right)^2$ , onde  $A_B$  é a área da base de  $P_1$  e  $H$  é a altura de  $P_1$ . Substituindo na expressão do volume, e levando em conta que as mesmas observações funcionam para a Pirâmide  $P_2$  e sua região de interseção  $P'_2$  então tem-se que o volume da região de interseção no intervalo  $0 \leq x \leq H$  é

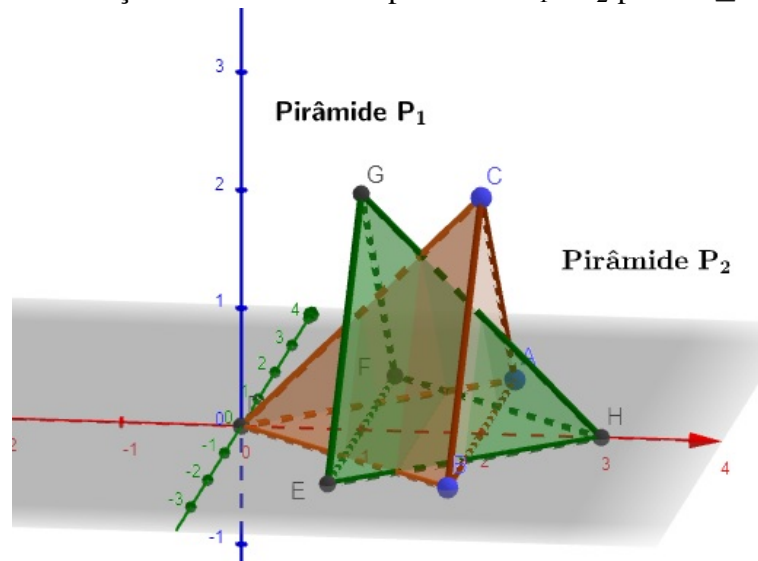
$$V_I = \frac{A_B \cdot x^3}{12H^2}. \quad (5.9)$$

Para o intervalo de  $H < x \leq 2H$ , a região de interseção será a justaposição de dois troncos de pirâmide. Sendo assim, será necessário definir uma outra função que permita calcular o volume dessa região de interseção  $I$ .

A Figura 42 ilustra o que foi comentado até aqui com respeito a região de interseção das pirâmides no intervalo  $H < x \leq 2H$ . O volume  $V$  de um tronco de pirâmide é dado pela expressão  $\frac{h}{3}(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b)$  que depende da altura  $h$  do tronco de pirâmide, da área da base maior  $A_B$  e da área da base menor  $A_b$  do tronco de cone. Considerando a interseção das arestas da Pirâmide  $P_1$  com a Pirâmide  $P_2$  e traçando planos paralelos a base passando por esses pontos de interseção, têm-se a formação de Pirâmides  $P_s$  e  $P_r$ .

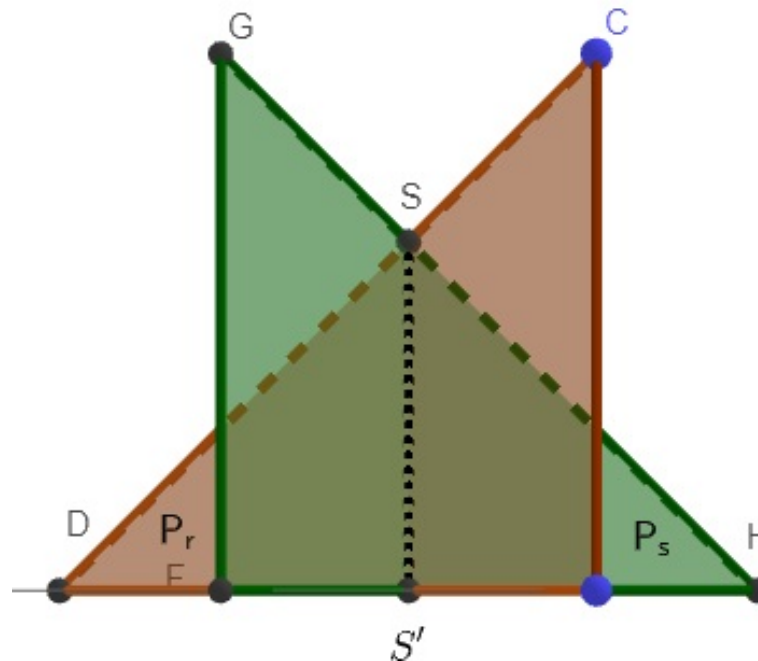
A Pirâmide  $P_r$  e a Pirâmide  $P'_1$ , cuja a secção é o triângulo  $SDS'$ , são semelhantes a Pirâmide  $P_1$ , pelo caso *AA*, já que o ângulo em  $\hat{D}$  é comum e as bases das pirâmides são perpendiculares ao plano, portanto, segue as relações,  $\frac{A_s}{A_B} = \left(\frac{x-H}{H}\right)^2$ , onde  $A_s$ ,  $A_B$ ,  $x$  e  $H$  são, respectivamente, a área da base da Pirâmide  $P_s$ , a área da base da Pirâmide  $P_1$ , o deslocamento e

Figura 42 – Interseção dos volumes das pirâmides  $P_1$  e  $P_2$  para  $H \leq x \leq 2H$ .



Fonte: O autor (2022).

Figura 43 – Secção lateral das pirâmides  $P_r$  e  $P_s$



Fonte: O autor (2022).

a altura da Pirâmide  $P_1$ .

A pirâmide  $P'_1$  de mesma maneira que  $P_r$  segue a seguinte propriedade, como consequência da semelhança,  $\frac{A'_B}{A_B} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$ . Disto segue que

$$A_r = A_B \frac{(x-H)^2}{H^2},$$

e

$$A'_B = A_B \frac{x^2}{4H^2}.$$

Têm-se com isso, as duas bases do tronco de cone e analisando a Figura 43 temos que a altura  $h$  do tronco de cone é tal que  $h = \frac{x}{2} - (x - H) = \frac{2H - x}{2}$ . Segue que o volume do tronco de cone procurado é

$$V(x) = \frac{2H - x}{6} (A_r + \sqrt{A_r A'_B + A'_B}),$$

fazendo as devidas substituições,

$$V(x) = \frac{2H - x}{6} \left( A_B \frac{(x - H)^2}{H^2} + \sqrt{A_B \frac{(x - H)^2}{H^2} A_B \frac{x^2}{4H^2} + A_B \frac{x^2}{4H^2}} \right),$$

simplificando a expressão obtemos

$$V(x) = \frac{A_B}{24H^2} (8H^3 + 24Hx^2 - 24H^2x - 7x^3).$$

Considerando a simetria da figura e como foi calculado o volume para apenas metade da interseção, o volume final é dobro do que foi determinado para o tronco de cone, logo o volume  $V_i$  da região de interseção é dado por

$$V_i(x) = \frac{A_B}{12H^2} (8H^3 + 24Hx^2 - 24H^2x - 7x^3).$$

Dessa maneira a função  $V_i$  que expressa o volume da interseção entre as pirâmides  $P_1$  e  $P_2$  é função definida por partes

$$V_i(x) = \begin{cases} \frac{A_B \cdot x^3}{12H^2} & \text{se } 0 \leq x \leq H. \\ \frac{A_B}{12H^2} (8H^3 + 24Hx^2 - 24H^2x - 7x^3) & \text{se } H < x \leq 2H. \end{cases}$$

Com respeito ao valor máximo dessa função, deve-se observar que para chegar a esse valor máximo é suficiente calcular o valor máximo da função polinomial  $8H^3 + 24Hx^2 - 24xH^2 - 7x^3$ . Porém, esse polinômio já teve seu máximo calculado, pois é o mesmo que aparece na função do cone. Dessa forma, o valor de  $x$  que fornece o valor máximo da função volume de interseção é  $1,54H$  e substituindo na função obtemos  $V_{max} = 0,598 \frac{A_B H}{3}$ .

No Capítulo 7 será calculado o valor de máximo de cada uma das funções de interseção dos sólidos até agora através da linguagem de programação Python. Serão utilizadas as expressões para os máximos das funções para comparação dos resultados.



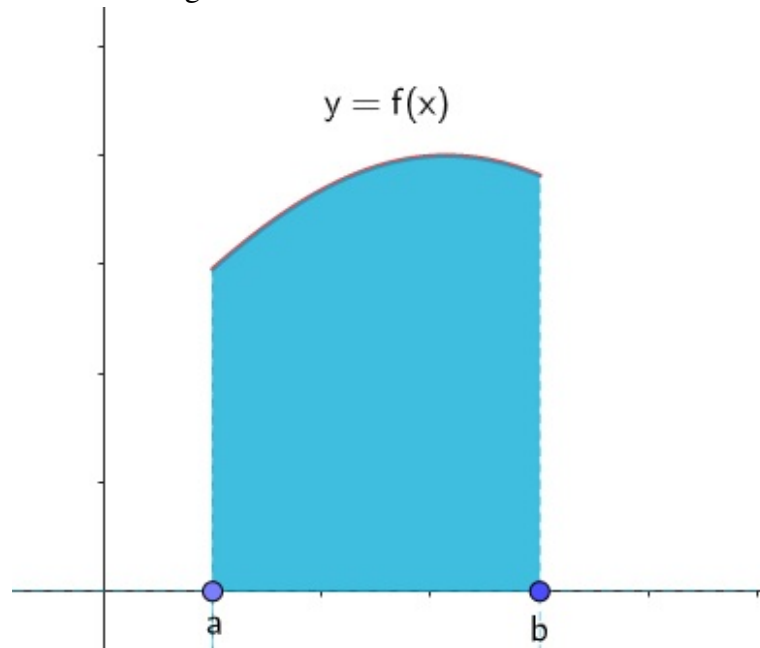
## 6 AS EXPRESSÕES DE VOLUME COM O USO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste capítulo serão apresentados os métodos do cálculo diferencial e integral como ferramentas para encontrar as expressões dos volumes já determinadas no capítulo anterior. Pode-se utilizar esse capítulo como uma extensão das ideias já desenvolvidas, para um maior aprofundamento e estudo das aplicações do cálculo diferencial e integral à geometria espacial.

### 6.1 A integral de uma função

A integral de uma função  $f$  surge da necessidade de obter a área compreendida entre o gráfico de  $f$ , o eixo  $x$  e duas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$  com  $a < b$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Para o que será apresentado, temos as hipóteses: a função  $f$  é contínua e positiva no dado intervalo e de forma semelhante a da Figura 44.

Figura 44 – A integral como a medida da área abaixo de uma curva



Fonte: O autor (2022).

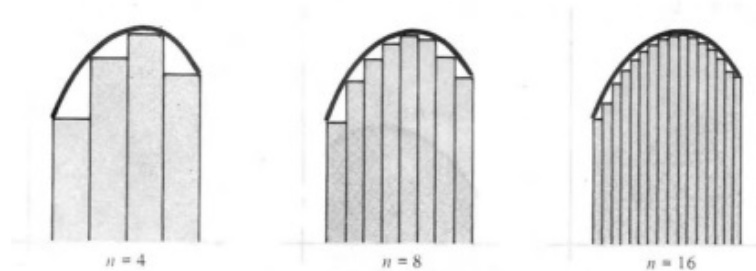
Para determinar a área abaixo da curva considere um natural  $n$  e uma partição  $P = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  do intervalo fechado  $[a, b]$  em que a função  $f$  é contínua. Para  $1 \leq i \leq n$  seja  $m_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que  $f(m_i)$  é o valor mínimo da função no intervalo. Dessa forma, para cada  $i$  considere que o comprimento do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  é  $\frac{b-a}{n}$  e podem-se ser construídos retângulos de altura  $f(m_i)$  e base  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ . O somatório desses retângulos é uma aproximação por falta da área abaixo do gráfico de  $f$ , ou conhecida também como soma inferior. Quando o

número de partições  $n$  cresce, a soma das áreas dos retângulos tende a área debaixo da curva, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(m_i) \Delta x_i = \text{Área abaixo do gráfico de } f. \quad (6.1)$$

Isso pode ser representado pela figura a seguir.

Figura 45 – A integral como a medida da área abaixo de uma curva: soma inferior



Fonte: SIMMONS (1999, p. 256).

De forma análoga, considere uma partição  $P = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ , com  $n$  natural, do intervalo fechado  $[a, b]$  em que a função  $f$  é contínua. Para  $1 \leq i \leq n$  seja  $M_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que  $f(M_i)$  é o valor máximo da função no intervalo. Dessa forma, para cada  $i$  considere que o comprimento do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  é  $\frac{b-a}{n}$  e podem-se ser construídos retângulos de altura  $f(M_i)$  e base  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ . O somatório desses retângulos é uma aproximação por excesso da área abaixo do gráfico de  $f$ , ou conhecida também como soma superior. Quando o número de partições  $n$  cresce, a soma das áreas dos retângulos tende a área debaixo da curva, ou seja,

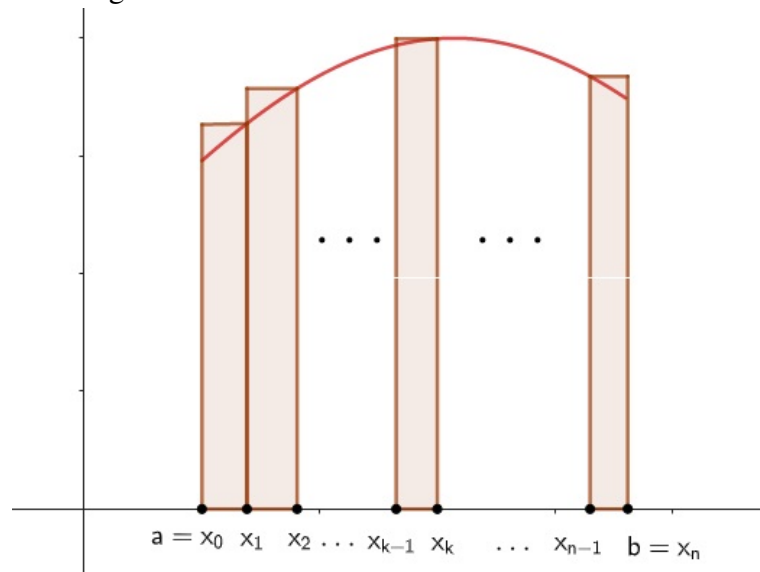
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(M_i) \Delta x_i = \text{Área abaixo do gráfico de } f. \quad (6.2)$$

O valor para o qual os dois somatórios 6.2 e 6.1 é a "integral de  $a$  até  $b$  da função  $f(x)$   $dx$ " e é denotada da seguinte maneira:  $\int_a^b f(x) dx$ . A Figura 46 representa essa aproximação.

Será enunciado aqui o Teorema Fundamental do Cálculo sem sua demonstração que pode ser consultada em Neto (2012).

**Teorema 6.1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma integral indefinida de  $f$  então  $F$  é derivável no intervalo  $[a, b]$  com  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .*

Figura 46 – A integral como a medida da área abaixo de uma curva: soma superior



Fonte: O autor (2022).

Considerando que foi apresentado o conceito de integral de forma básica é recomendável consultar (NETO, 2012) para mais detalhes sobre a teoria. A seguir, será apresentado o método para calcular o volume de um sólido de revolução e alguns exemplos. Inicialmente será apresentado o teorema que fundamenta o método.

**Teorema 6.1.2** *Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva e derivável, com derivada contínua. Se  $[c, d] \subset (a, b)$  e  $S$  denota o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo das abscissas, então*

$$V(S) = \pi \int_c^d f(x)^2 dx.$$

**Prova:** Para  $u$  e  $v \in [c, d]$  e  $r > 0$ , seja  $C(u, v; r)$  o cilindro sólido de raio  $r$ , tendo por bases os discos centrados em  $(u, 0)$  e  $(v, 0)$  e perpendiculares ao eixo das abscissas. Considere números reais  $c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d$ , tais que  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$  seja igual a  $\frac{d-c}{n}$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Se

$$m_i = \min\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad e \quad M_i = \max\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

temos

$$\bigcup_{i=1}^n C(x_{i-1}, x_i; m_i) \subset S \subset \bigcup_{i=1}^n C(x_{i-1}, x_i; M_i)$$

Portanto, segue que

$$\sum_{i=1}^n V(C(x_{i-1}, x_i; m_i)) \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^n V(C(x_{i-1}, x_i; M_i))$$

ou, ainda,

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \Delta x_i \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \Delta x_i.$$

Agora, observe que o primeiro e o terceiro membros das desigualdades acima são respectivamente iguais às somas inferior e superior, em relação à partição  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , da restrição da função  $\pi f^2$  ao intervalo  $[c, d]$ . Portanto, fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\pi \int_c^d f(x)^2 dx \leq V(S) \leq \pi \int_c^d f(x)^2 dx$$

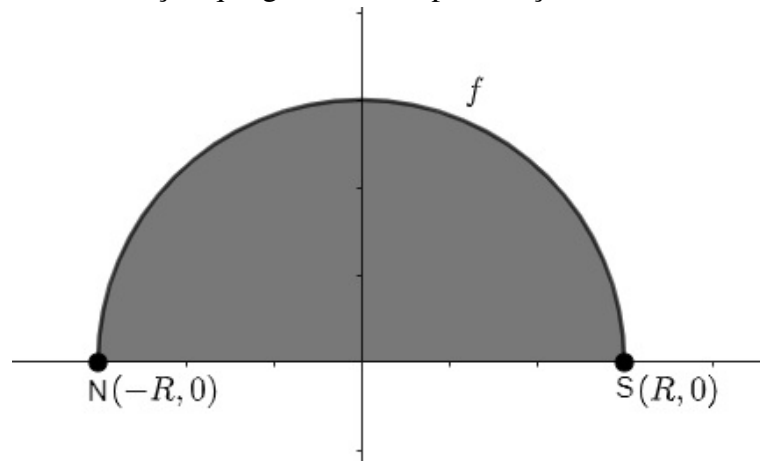
e, daí, segue a igualdade do enunciado. ■

Seguem alguns exemplos da aplicação do teorema.

### 1. VOLUME DA ESFERA USANDO INTEGRAL

Seja  $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ , de sorte que o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo das abscissas seja uma bola fechada  $\bar{\mathbb{B}}$ , de raio  $R$ , menos dois pontos antípodos  $N$  e  $S$ .

Figura 47 – Função que gera a esfera por rotação em torno do eixo  $x$



Fonte: O autor (2023).

Agora, para  $0 < \varepsilon < R$ , seja  $\bar{\mathbb{B}}_{[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]}$  a interseção de  $\bar{\mathbb{B}}$  com a região delimitada pelos planos perpendiculares ao eixo das abscissas nos pontos  $(-R + \varepsilon, 0)$  e  $(R - \varepsilon, 0)$ . Como

$$\bar{\mathbb{B}} \setminus \{N, S\} = \bigcup_{0 < \varepsilon < R} \bar{\mathbb{B}}_{[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]}$$

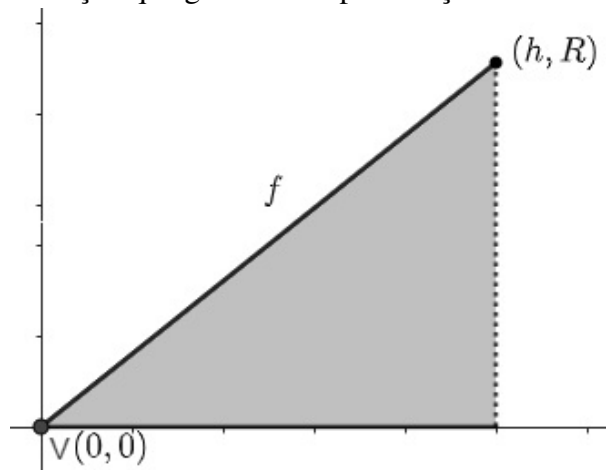
e  $\bar{\mathbb{B}}_{[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]} \subset \bar{\mathbb{B}}_{[-R+\varepsilon', R-\varepsilon']}$  para  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ , segue do resultado do teorema 6.1.2 e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned}
 V(\bar{\mathbb{B}}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V(\bar{\mathbb{B}}_{[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]}) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} (R^2 - x^2) dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} = \frac{4}{3} \pi R^3.
 \end{aligned}$$

## 2. VOLUME DO CONE USANDO INTEGRAL

Seja  $f : (0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \frac{R}{h}x$  tal que o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo das abscissas seja um cone  $C$  de raio da base  $R$  e altura  $h$  menos o ponto  $V(0, 0)$ .

Figura 48 – Função que gera o cone por rotação em torno do eixo  $x$



Fonte: O autor (2023).

Agora para  $0 < \varepsilon < h$ , seja  $C_{[\varepsilon, h]}$  a região delimitada pela interseção de  $C$  e os planos perpendiculares ao eixo das abscissas nos pontos  $(\varepsilon, 0)$ . Como

$$C \setminus \{V\} = \bigcup_{0 < \varepsilon < h} C_{[\varepsilon, h]}$$

e  $C_{[\varepsilon, h]} \subset C_{[\varepsilon', h]}$  para  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ , segue do resultado do Teorema 6.1.2 e do Teorema Fundamental do Cálculo que

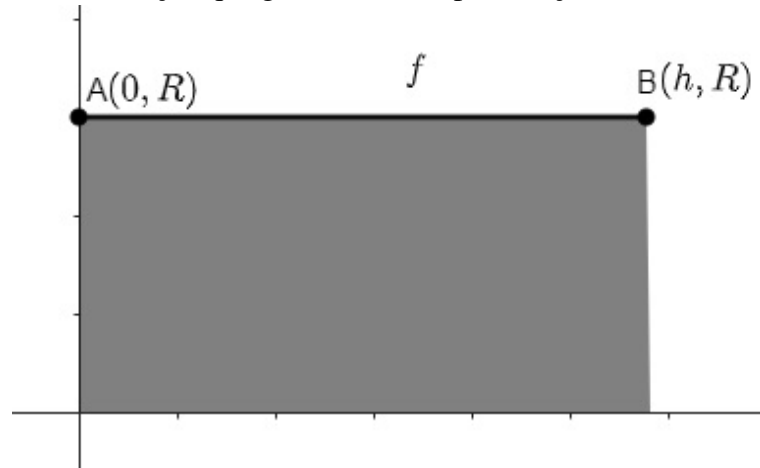
$$V(C) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V(C_{[\varepsilon, h]}),$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \int_{\varepsilon}^h \left( \frac{R^2}{h^2} x^2 \right) dx, \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{\varepsilon}^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h.
\end{aligned}$$

### 3. VOLUME DO CILINDRO USANDO INTEGRAL

Seja  $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = R$  tal que o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo das abscissas seja um cilindro  $C_i$  de raio da base  $R$  e altura  $h$ .

Figura 49 – Função que gera o cilindro por rotação em torno do eixo  $x$ .



Fonte: O autor (2023).

Segue do resultado do Teorema 6.1.2 e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$V(C_i) = \pi \int_0^h R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_0^h = \pi R^2 h.$$

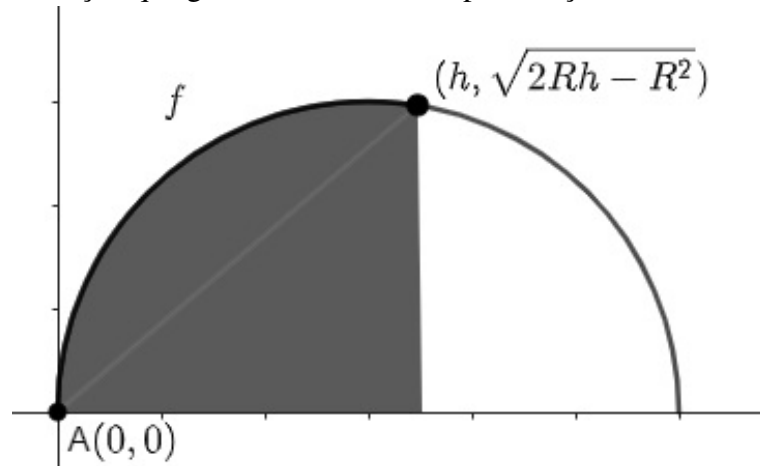
### 4. VOLUME DA CALOTA ESFÉRICA USANDO INTEGRAL

Seja  $f : (0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \sqrt{2Rx - R^2}$ , de sorte que o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo das abscissas seja uma calota esférica  $C_E$ , de raio  $r$ , altura  $h$  e pertencente a Esfera  $E$  de raio  $R$  menos um ponto  $A(0, 0)$ .

Agora, para  $0 < \varepsilon < R$ , seja  $(C_E)_{[\varepsilon, h]}$  a interseção de  $C_E$  com a região delimitada pelos planos perpendiculares ao eixo das abscissas nos pontos  $(\varepsilon, 0)$ . Como

$$C_E \setminus \{A\} = \bigcup_{0 < \varepsilon < R} (C_E)_{[\varepsilon, h]}$$

Figura 50 – Função que gera a calota esférica por rotação em torno do eixo  $x$ .



Fonte: O autor (2023).

e  $(C_E)_{[\varepsilon,0]} \subset (C_E)_{[\varepsilon',h]}$  para  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ , segue do resultado do Teorema 6.1.2 e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned} V(C_E) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V((C_E)_{[\varepsilon,h]}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \int_{\varepsilon}^h (2Rx - R^2) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \pi \left( Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\varepsilon}^h = \pi Rh^2 - \pi \frac{h^3}{3}. \end{aligned}$$

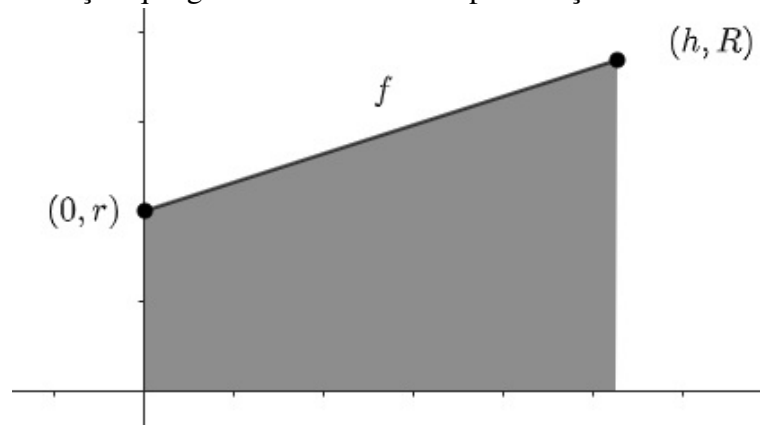
## 5. VOLUME DO TRONCO DE CONE USANDO INTEGRAL

Seja  $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $f(x) = \frac{R-r}{h}x + r$ , de sorte que o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de  $f$  em torno do eixo das abscissas seja um tronco de cone  $T_C$ , de raio menor  $r$ , raio maior  $R$  e altura  $h$ .

Segue do resultado do Teorema 6.1.2 e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned} V(T_C) &= \pi \int_0^h \left( \frac{(R-r)^2}{h^2} x^2 + 2 \frac{R-r}{h} rx + r^2 \right) dx \\ &= \pi \left( \frac{(R-r)^2}{h^2} \frac{x^3}{3} + 2 \frac{R-r}{h} r \frac{x^2}{2} + r^2 x \right) \Big|_0^h = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$

Figura 51 – Função que gera o tronco de cone por rotação em torno do eixo  $x$



Fonte: O autor (2023).

Na próxima seção é apresentado o método para calcular o volume do sólido de revolução gerado pela região compreendida pelo gráfico de duas funções no plano e em seguida é apresentado um exemplo.

## 6.2 Volume do sólido formado pela rotação da região compreendida entre duas funções usando integral

Para gerar um sólido geométrico de revolução com o uso de integrais de forma que ele tenha algum furo ou parte de sua forma não preenchida é necessário que haja uma função  $f$  que defina o sólido completamente a partir de sua área compreendida entre o gráfico da função e o eixo  $x$  e uma função  $g$  cujo a área abaixo do gráfico e acima do eixo  $x$  defina a área que precisa ser retirada, sendo  $f \geq g$  para todo  $x$  no intervalo entre os dois pontos de interseção dos gráficos.

Portanto, sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f \geq g$  para todo  $x \in (a, b)$ . O volume do sólido de revolução gerado pelo gráfico das funções  $f$  e  $g$  é dado por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx.$$

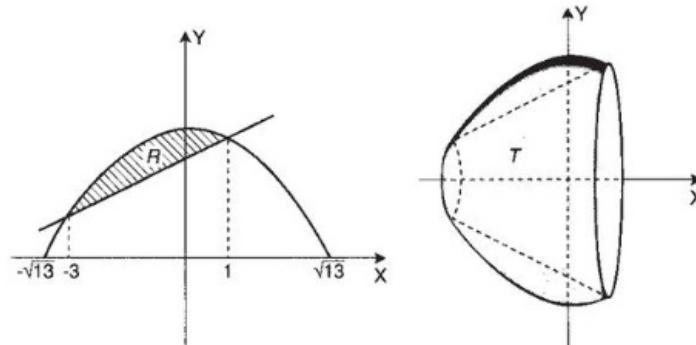
**Exemplo:** Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos  $x$ , da região limitada pela parábola  $y = \frac{1}{4}(13 - x^2)$  e pela reta  $y = \frac{1}{2}(x + 5)$ . Abaixo temos a região  $R$ , área compreendida entre os gráficos da parábola e da reta e o sólido  $T$  gerado a partir da rotação de  $R$ .

Tem-se que

$$\begin{aligned} & \pi \int_{-3}^1 \left( \left[ \frac{1}{4}(13 - x^2) \right]^2 - \left[ \frac{1}{2}(x + 5) \right]^2 \right) dx = \\ & = \pi \int_{-3}^1 \left( \frac{1}{16}(169 - 26x^2 + x^4) - \frac{1}{4}(x^2 + 10x + 25) \right) dx = \end{aligned}$$



Figura 52 – Região  $R$  e sólido  $T$  gerado a partir da rotação da região  $R$  em torno do eixo  $x$



Fonte: (FLEMMING; GONÇALVES, 2016)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{16} \int_{-3}^1 (69 - 40x - 30x^2 + x^4) dx \\
 &= \frac{\pi}{16} \left( 69x - 20x^2 - 10x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-3}^1 = \\
 &= \frac{\pi}{16} \left( 69 - 20 - 10 + \frac{1}{5} + 207 + 180 - 270 + \frac{243}{5} \right) = \\
 &= \frac{1024\pi}{80} = 12,8\pi u.v. = 40,213 u.v.
 \end{aligned}$$

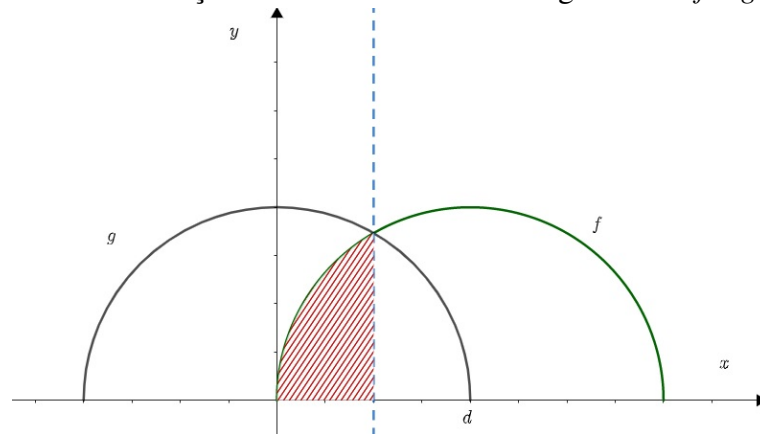
### 6.3 Gerando as fórmulas dos volumes com Cálculo Diferencial e Integral

Nesta seção, com o uso do Cálculo, serão deduzidas as expressões dos volumes dos sólidos gerados a partir das regiões de interseção que já foram obtidas no Capítulo 5. Serão explorados os sólidos de revolução, considerando que o caso do prisma e da pirâmide pode ser relacionados, por meio do princípio de Cavallieri, com o cilindro e o cone, respectivamente.

#### 6.3.1 Volume da região de interseção entre Esferas

Considere duas funções  $g$  e  $f$  que têm como gráfico duas semicircunferências  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente. A circunferência  $C_1$  se desloca em direção à semicircunferência  $C_2$  cuja a função que a determina é  $f : (0, 2R) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2xR}$ , ou seja, a semicircunferência tem centro  $(R, 0)$  e raio  $R$ . Considere que  $C_1$  está centrada inicialmente no ponto  $(-R, 0)$  e tem raio  $R$  e se desloca no sentido positivo do eixo uma distância  $d$ , tal que  $0 \leq d \leq 2R$ . Esse deslocamento está representado na Figura 53.

Figura 53 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de  $f$  e  $g$



Fonte: O autor (2023).

Como o deslocamento de  $C_1$  é  $d$  tem-se que, pela simetria da figura, que é suficiente considerar a área abaixo do gráfico de  $f$  no intervalo de 0 a  $\frac{d}{2}$  para determinar o volume do sólido gerado pela região de interseção destacada e após isso, deve ser multiplicada por 2 para que seja determinada a região de interseção inteiramente. Portanto, a integral que deve ser resolvida é

$$2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}} (\sqrt{-x^2 + 2xR})^2 dx.$$

Resolvendo a integral temos

$$2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^3}{3} + x^2R \right) \Big|_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}}.$$

Obtém-se então

$$-\frac{\pi}{12}d^3 + \frac{\pi}{2}d^2R.$$

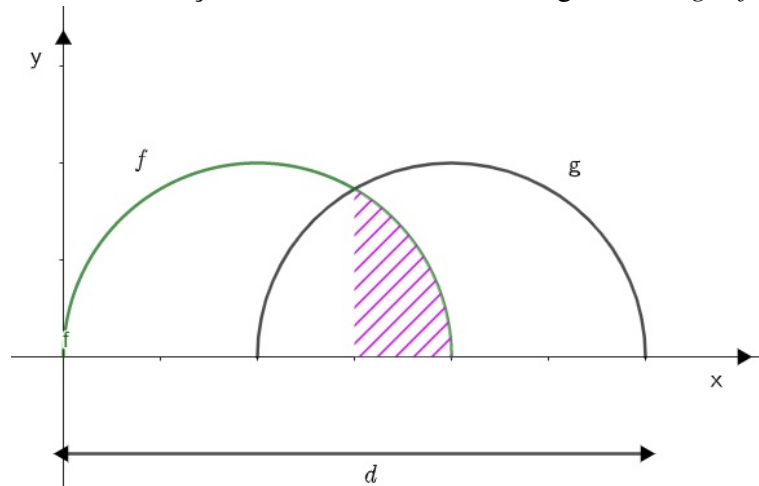
Para  $2R < d \leq 4R$ , a mesma função  $f$  será integrada, porém o intervalo de integração será alterado. Observando a Figura 54, pela simetria da figura, o novo intervalo de integração é de  $\frac{d}{2}$  a  $2R$ .

Dessa maneira, temos a integral

$$2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{d}{2}}^{2R-\varepsilon} (\sqrt{-x^2 + 2xR})^2 dx.$$

Resolvendo a integral tem-se

$$2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -\frac{x^3}{3} + x^2R \right) \Big|_{\frac{d}{2}}^{2R-\varepsilon}.$$

Figura 54 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de  $g$  e  $f$ 

Fonte: O autor (2023).

E por fim, o volume da região de interseção é igual a

$$\frac{8\pi R^3}{3} + \frac{\pi}{12}d^3 - \frac{\pi}{2}d^2R.$$

Com a pequena diferença de o deslocamento ter sido denominado  $d$  ao invés de  $x$  as equações encontradas aqui correspondem a exatamente as encontradas na Subseção 5.1.3 como se pretendia.

### 6.3.2 Volume da região de interseção entre Cones

Considere duas funções  $f$  e  $g$  tais que  $f : (0, H] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f(x) = \frac{R}{H}x$  e  $g : [d - H, d] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g(x) = -\frac{R}{H}(x - d)$ , ambas quando rotacionadas em torno do eixo  $x$  resultam em cones  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, com seus vértices inicialmente na origem, altura  $H$  e raio  $R$ . Consideremos que  $C_2$  se desloca uma distância  $d$  no sentido positivo em direção a  $C_1$  como na Figura 55.

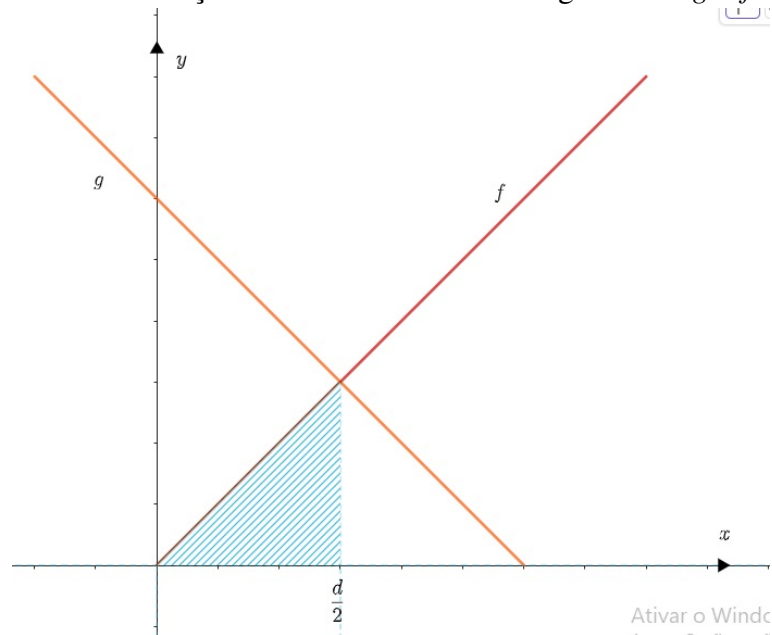
Pela simetria da figura, a integral será da função  $f$  no intervalo de 0 a  $\frac{d}{2}$  e multiplicaremos por 2 o resultado da integral para obtermos a região de interseção inteira. Portanto, temos que

$$2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}} \left( \frac{R}{H}x \right)^2 dx.$$

Resolvendo a integral

$$2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \right|_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}},$$

Figura 55 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de  $g$  e  $f$



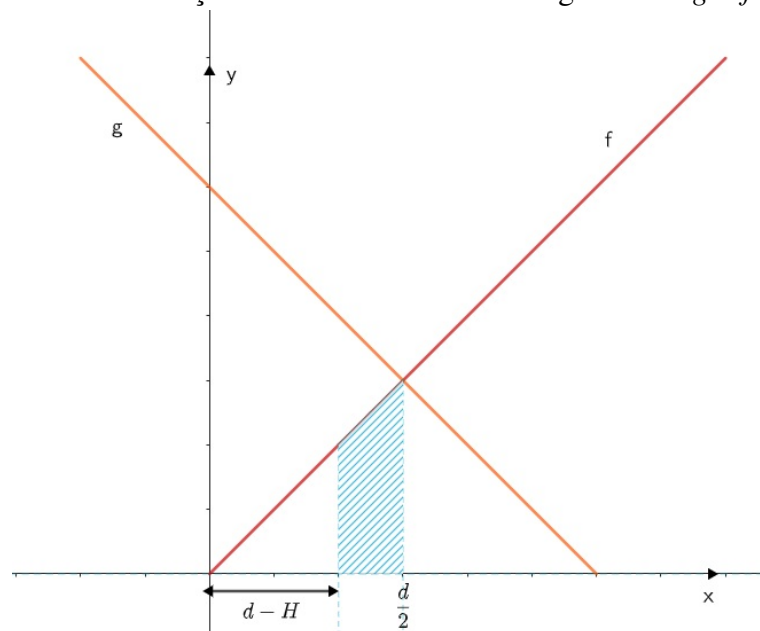
Fonte: O autor (2023).

que por fim, resulta em

$$\frac{\pi R^2}{12H^2} d^3.$$

Considerando agora  $H < d \leq 2H$ , teremos um novo intervalo de integração para obter o volume da região de interseção. Consideremos a Figura 56.

Figura 56 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de  $g$  e  $f$



Fonte: O autor (2023).

Pela simetria da figura, a integral será da função  $f$  no intervalo de  $d - H$  a  $\frac{d}{2}$  e

multiplicaremos por 2 o resultado da integral para obtermos a região de interseção inteira. Portanto, temos que

$$2\pi \int_{d-H}^{\frac{d}{2}} \left( \frac{R}{H}x \right)^2 dx.$$

Resolvendo a integral

$$2\pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{d-H}^{\frac{d}{2}},$$

que por fim, resulta em

$$\frac{\pi R^2}{12H^2} (8H^3 - 24H^2d + 24Hd^2 - 7d^3).$$

De forma semelhante ao que aconteceu com a interseção das esferas, por meio do Cálculo, obtivemos as mesmas expressões da Seção 5.1.2 com a única diferença de termos utilizado  $d$  para denotar o deslocamento da função  $g$ .

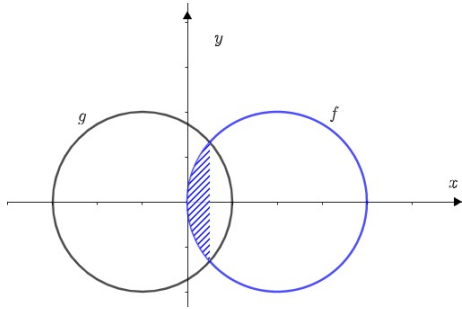
### 6.3.3 Volume da região de interseção entre Cilindros

Para encontrar o volume da região de interseção entre cilindros será utilizado o método das secções transversais da qual temos que dado um sólido geométrico  $S$  sobre um dos eixos, digamos o eixo  $x$ , e considerando um dado intervalo  $(a, b) \subset x$  é possível calcular o volume desse sólido, limitado por dois planos perpendiculares a  $x$  passando por  $a$  e  $b$  por meio da integral  $\int_a^b A(x) dx$  onde  $A(x)$  corresponde a função da área da secção transversal do sólido  $S$  determinada por qualquer plano perpendicular a  $x$ . A demonstração desse método pode ser encontrada em Andrade *et al.* (2013).

Considere dois cilindros  $C_1$  e  $C_2$  com alturas  $H$  paralelas ao eixo  $z$  com raio  $R$  e centros em  $(-R, 0)$  e  $(R, 0)$ , respectivamente. O cilindro  $C_1$  se desloca uma distância  $d$  em direção ao cilindro  $C_2$ . Na Figura 57 temos representada a vista superior do sólido, que nos permite concluir que inicialmente o intervalo de integração será de 0 a  $\frac{d}{2}$ , devido a simetria da figura, e na Figura 58 temos a representação da vista tridimensional. Quando calculado o volume, será multiplicado por 2 para determinar integralmente o volume do sólido.

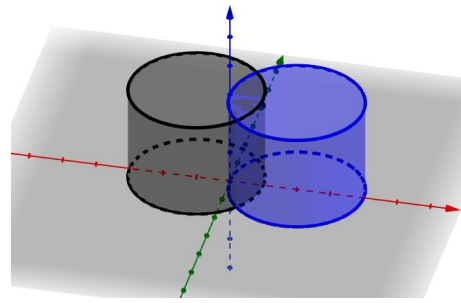
Sendo assim resta determinar a função  $A(x)$ . Observemos que ao realizar uma secção transversal do cilindro por meio de um plano perpendicular ao eixo  $x$  a figura formada será um retângulo de altura  $H$  e sua base será a uma corda da circunferência  $C_2$ . O comprimento de tal

Figura 57 – Vista superior dos Cilindros  $C_1$  e  $C_2$



Fonte: O autor (2023).

Figura 58 – Vista tridimensional dos Cilindros  $C_1$  e  $C_2$



Fonte: O autor (2023).

corda pode ser determinada quando isolamos o  $y$  na equação da circunferência e obtemos as funções  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2xR}$  e  $g(x) = -\sqrt{-x^2 + 2xR}$  que determinam a parte superior e inferior da circunferência em relação ao eixo  $x$ .

Assim, o comprimento da corda, base do retângulo, é  $2\sqrt{-x^2 + 2xR}$  e dessa forma  $A(x) = 2\sqrt{-x^2 + 2xR}H$ . A integral que deve-se resolver é

$$2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}} 2H \sqrt{-x^2 + 2xR} dx.$$

Resolvendo a integral tem-se

$$4H \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} R^2 \arcsen \left( \frac{x-R}{R} \right) + \frac{1}{2} (x-R) \sqrt{2xR - x^2} \right) \Big|_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}}.$$

Considerando o intervalo de integração e que o limite abaixo deve ser multiplicado por  $2H$ , obtêm-se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( R^2 \arcsen \left( \frac{d-2R}{2R} \right) + \left( \frac{d-2R}{2} \right) \frac{\sqrt{4dR - d^2}}{2} - R^2 \arcsen \left( \frac{\varepsilon-R}{R} \right) - (\varepsilon-R) \sqrt{2\varepsilon R - \varepsilon^2} \right).$$

Considere que a diferença dos arcossenos será tal que

$$\arcsen x - \arcsen y = \arcsen(x \cdot \sqrt{1-y^2} - y \cdot \sqrt{1-x^2}),$$

com isso,

$$R^2 \arcsen \left( \frac{d-2R}{2R} \right) - R^2 \arcsen \left( \frac{\varepsilon-R}{R} \right) =$$

$$R^2 \arcsen \left( \frac{d-2R}{2R} \cdot \frac{\sqrt{-\varepsilon^2 + 2R\varepsilon}}{R} - \frac{\varepsilon-R}{R} \cdot \frac{\sqrt{-d^2 + 4Rd}}{2R} \right),$$

fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a expressão resultará em

$$R^2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{4Rd - d^2}}{2R}\right).$$

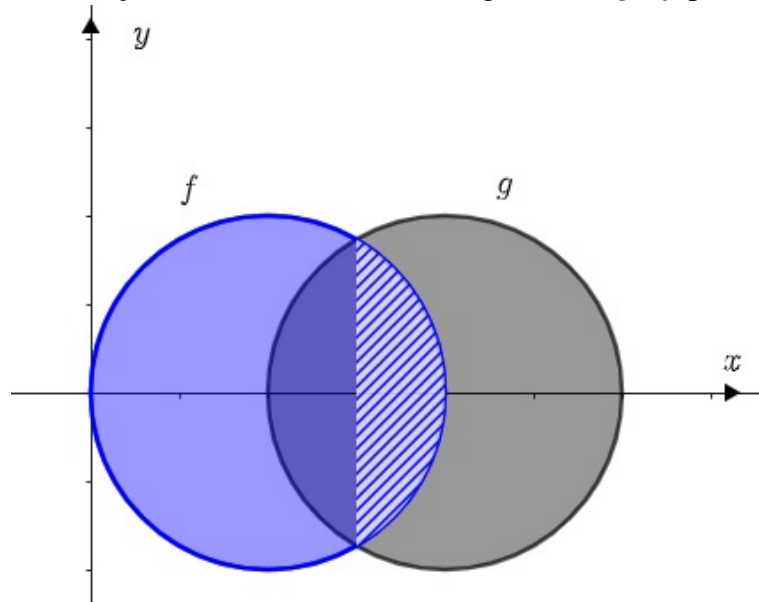
Dessa maneira, o volume da integral no intervalo de 0 a  $\frac{d}{2}$  é

$$2H \cdot \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4dR - d^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4dR - d^2} \cdot (2R - d)}{4} \right).$$

Com a única diferença de ter o deslocamento de  $C_1$  em direção a  $C_2$ , a equação obtida é a mesma Equação 5.5.

Agora, para o deslocamento  $d$  superando o valor de  $2R$  e sabendo que a função que deve ser integrada é  $A(x) = 2H\sqrt{2xR - x^2}$  consideremos a Figura 21.

Figura 59 – Interseção entre as áreas abaixo do gráfico de  $g$  e  $f$  para os cilindros



Fonte: O autor (2023).

O intervalo de integração será de  $\frac{d}{2}$  a  $2R$  e a integral será, considerando que devemos dobrar a área,

$$2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{d}{2}}^{2R-\varepsilon} 2H\sqrt{2xR - x^2} dx.$$

Do cálculo do intervalo anterior sabemos que a integral é

$$4H \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} R^2 \arcsen\left(\frac{x-R}{R}\right) - \frac{1}{2} (x-R) \sqrt{2xR - x^2} \right) \Big|_{\frac{d}{2}}^{2R-\varepsilon}.$$

Realizando as substituições dos intervalos o volume da região de interseção será

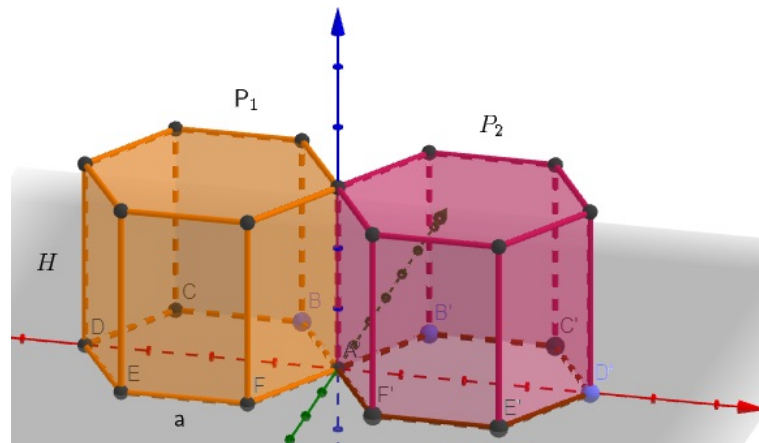
$$2H \cdot \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4dR - d^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4dR - d^2} \cdot (d - 2R)}{4} \right).$$

Da mesma forma que com o intervalo anterior, a equação coincide com Equação 5.5 como se pretendia.

#### 6.3.4 Volume da região de interseção entre prismas

Será considerado para efeito de cálculos dois prismas  $P_1$  e  $P_2$  de bases hexagonais, com uma delas pertencente ao plano  $xy$  e alturas  $H$  paralelas ao eixo  $z$ , um de seus vértices da base coincide com a origem do plano cartesiano como na Figura 60. O prisma  $P_1$  se desloca ao longo do eixo  $x$  uma distância  $d$  em direção prisma  $P_2$ .

Figura 60 – Prismas  $P_1$  e  $P_2$



Fonte: O autor (2023).

Serão utilizados os valores determinados na Subsecção 5.2.1 de forma que o método para encontrar as expressões do volume da região de interseção entre os prismas será o método das secções transversais. Para o primeiro intervalo  $0 \leq d \leq a$  como indicado na Figura 61, temos que o comprimento obtido quando seccionamos o hexágono por um plano perpendicular a  $x$  tem comprimento  $x\sqrt{3}$  e sendo assim  $A(x) = Hx\sqrt{3}$ . O intervalo de integração será de 0 a  $\frac{d}{2}$  para  $\frac{x}{2}$ , sendo necessário realizar uma mudança de variável e mantermos o intervalo de integração. Assim, seja  $\frac{x}{2} = p$ , segue que  $x = 2p$  e consequentemente  $A(x) = 2pH\sqrt{3}$ . Dessa maneira temos

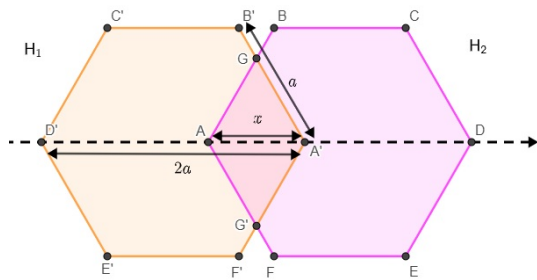
$$2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}} 2pH\sqrt{3} dp = 2H \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p^2 \sqrt{3} \Big|_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}} = \frac{d^2 \sqrt{3}}{2} H.$$

Tal expressão coincide com encontrada na Subsecção 5.2.1 como se esperava.

Para o intervalo de  $a$  até  $2a$ , deve-se levar em conta que o tamanho do segmento obtido é fixo e igual a  $a\sqrt{3}$ . Dessa forma,  $A(x) = a\sqrt{3}H$  e o intervalo de integração será de  $\frac{d}{2}$  a  $\frac{d}{2}$  e então duplicaremos o resultado da integral para obter o volume completamente. Porém

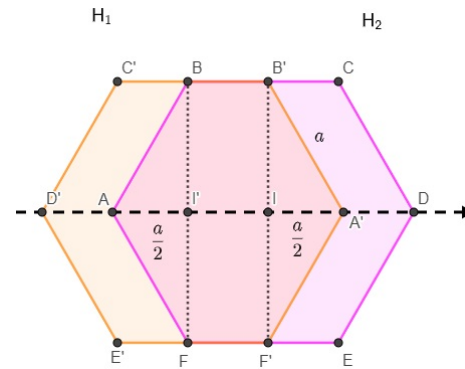


Figura 61 – Aproximação dos Prismas  $P_1$  e  $P_2$  com  $0 \leq d \leq a$



Fonte: O autor (2023).

Figura 62 – Aproximação dos Prismas  $P_1$  e  $P_2$  com  $a < d \leq 2a$



Fonte: O autor (2023).

deve-se levar em conta que estará se obtendo o volume a região retangular apenas, como pode ser observado na Figura 62, portanto, deve se somar ao volume máximo referente a função obtida anteriormente que é igual a  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$ . Resolvendo a integral temos

$$2 \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}} a\sqrt{3}H dx = 2Ha\sqrt{3}x \Big|_{\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}} = H(d \cdot a\sqrt{3} - a^2\sqrt{3}).$$

Por fim, adicionando o valor  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$ , o valor do volume da região de interseção entre os prismas será  $H(d \cdot a\sqrt{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2})$ . Novamente, o valor coincide com o já obtido.

Analisando agora o intervalo  $2a < d \leq 3a$ , percebe-se que a região de interseção é semelhante a anterior, no intervalo  $a < d \leq 2a$ . Dessa maneira, a única alteração que será feita é a mudança no intervalo de integração que agora será de  $\frac{d}{2}$  até  $\frac{3a}{2}$  como pode se observar na Figura 63.

A integral que deve ser resolvida é

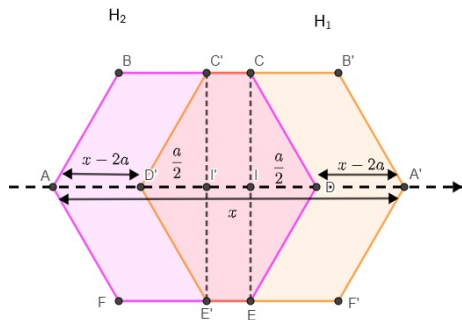
$$2 \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{3a}{2}} a\sqrt{3}H dx = 2Ha\sqrt{3}x \Big|_{\frac{d}{2}}^{\frac{3a}{2}} = H(3a^2\sqrt{3} - ad\sqrt{3}),$$

e adicionando  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}H$  referente ao volume que também compõe o sólidos temos que o resultado final é  $H(\frac{7}{2}a^2\sqrt{3} - d \cdot a\sqrt{3})$ .

Por fim, no intervalo  $3a < d \leq 4a$ , conforme podemos observar na Figura 64, a função  $A(x)$  é semelhante a usada no intervalo  $0 \leq d \leq a$  com as alterações: como a medida que  $x$  cresce a área decresce, chegando a 0 quando  $x = 2a$ , dessa maneira  $A(x) = H\sqrt{3}(2a - x)$  do intervalo de integração será de  $\frac{d}{2}$  a  $2a$  para  $\frac{x}{2}$  como no primeiro intervalo, portanto, será feita a mesma mudança de variáveis, ou seja,  $x = 2p$  e  $A(x) = H\sqrt{3}(2a - 2p)$ . Resolvendo a integral

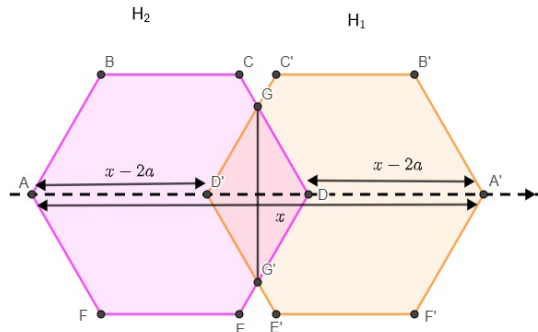
$$2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{d}{2}}^{2a-\varepsilon} H\sqrt{3}(2a - 2p) dp = 2H \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2ap - p^2) \sqrt{3} \Big|_{\frac{d}{2}}^{2a-\varepsilon} = H \frac{\sqrt{3}(4a - d)^2}{2}.$$

Figura 63 – Afastamento dos Prismas  $P_1$  e  $P_2$  com  $2a < d \leq 3a$



Fonte: O autor (2023).

Figura 64 – Afastamento dos Prismas  $P_1$  e  $P_2$  com  $3a < d \leq 4a$



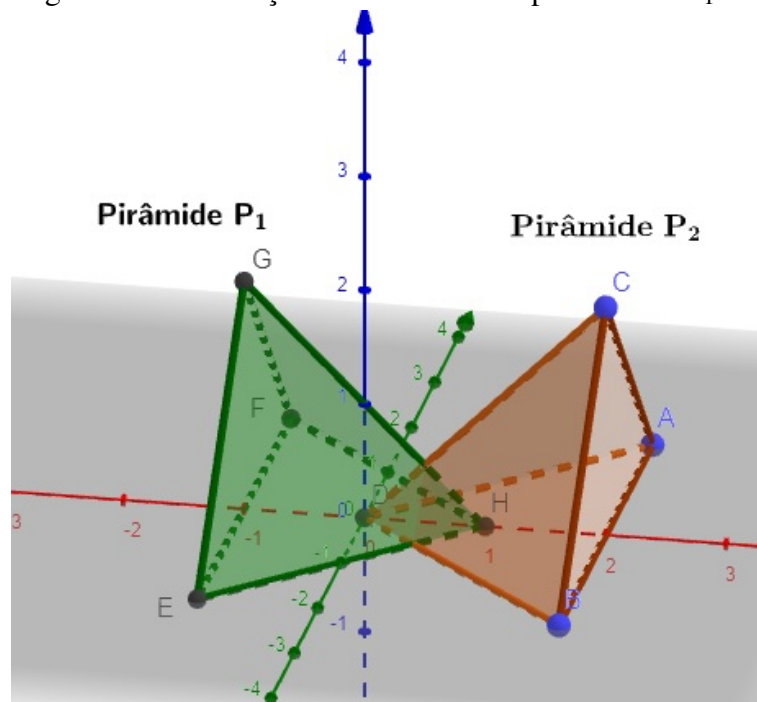
Fonte: O autor (2023).

As duas últimas equações obtidas coincidem com as já determinadas na Subsecção 5.2.1 como se pretendia.

### 6.3.5 Volume da região de interseção entre pirâmides

Considere duas pirâmides  $P_1$  e  $P_2$  com altura  $H$  coincidindo com o eixo  $x$ , área da base  $A_b$  e vértices na origem localizadas em semiplanos opostos em relação ao eixo  $x$ . A pirâmide  $P_1$  se desloca um comprimento  $d$  em direção a pirâmide  $P_2$  como na Figura 65.

Figura 65 – Interseção dos volumes das p Pirâmides  $P_1$  e  $P_2$



Fonte: O autor (2022).

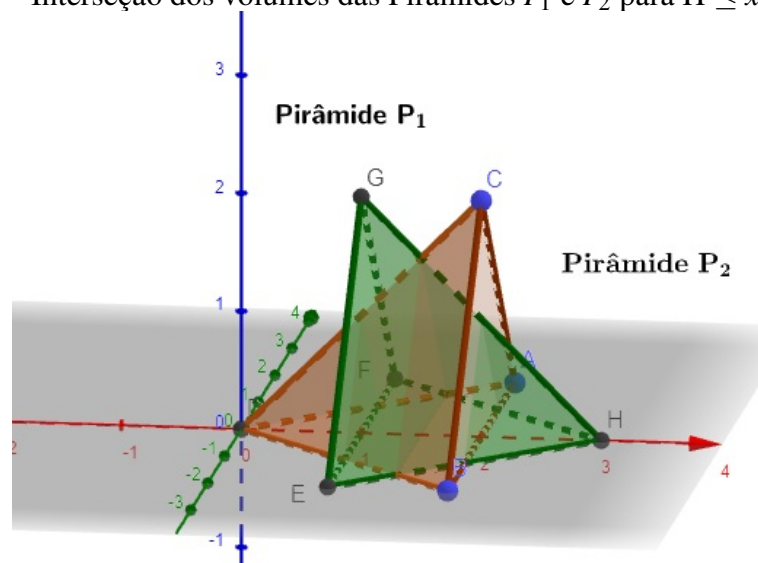
Será usado o método das secções transversais para calcular o volume da região de interseção. Para determinar a área da região de interseção utilizaremos o que já foi desenvolvido

na Seção 5.2.2 que apresenta a área da secção transversal é igual  $A(x) = \frac{A_B}{H^2}x^2$  e o intervalo de integração será de 0 a  $\frac{d}{2}$ . Sendo assim, a integral que deve ser resolvida é

$$2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{d}{2}} \frac{A_B}{H^2} x^2 dx = \frac{A_B}{12H^2} d^3.$$

A equação acima coincide com a Equação 5.9, obtida anteriormente. Agora, com a mesma equação da secção transversal da pirâmide  $A(x)$  pretendemos determinar a expressão para o volume da região de interseção quando  $d$  supera o valor de  $H$ . Observe a Figura 66.

Figura 66 – Interseção dos volumes das Pirâmides  $P_1$  e  $P_2$  para  $H \leq x \leq 2H$ .



Fonte: O autor (2022).

Considerando a simetria da figura temos que o intervalo de integração será de  $d - H$  a  $\frac{d}{2}$ . Resolvendo a integral temos

$$2 \int_{d-H}^{\frac{d}{2}} \frac{A_B}{H^2} x^2 dx = \frac{A_B}{12H^2} (8H^3 + 24Hd^2 - 24H^2d - 7d^3).$$

Essa equação coincide com equação desenvolvida na Subseção 5.2.2 com a única diferença do deslocamento ter sido denotado por  $d$ . Com o caso das pirâmides concluísse essa secção mostrando, com as ferramentas do Cálculo, como obter as expressões para o volume das regiões de interseção entre sólidos. Tais aplicações podem ser trabalhadas com alunos de graduação, utilizando a metodologia de resolução de problemas e os capítulos que seguem como complementação das aplicações. É notável que as funções integradas foram de fácil manipulação, mas que propiciaram resultados interessantes para o problema abordado.

## 7 O USO DA LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON

A aprendizagem de uma linguagem de programação contribui para o desenvolvimento do pensamento algorítmico e tem se tornado uma demanda cada vez maior para pessoas que desejem ingressar na área de tecnologia. Entre todas as linguagens de programação que são amplamente utilizadas com diversos fins, algumas com objetivos pedagógicos, a linguagem de programação Python é a que tem a melhor curva de aprendizagem. Considerada uma linguagem de alto nível por ser uma das linguagens que mais se aproxima da linguagem humana, a linguagem Python é facilmente utilizável.

Existem diversas plataformas em que se pode programar em Python, algumas delas são on-line como Jupyter e Google Colaboratory. Outras plataformas podem ser baixadas no computador possibilitando a programação sem o uso da internet. Essa versatilidade de recursos é útil para uma aplicação pedagógica da linguagem de programação.

### 7.1 Criando o gráfico das funções da interseção de volumes

Tomando as funções construídas ao longo do Capítulo 5, serão apresentados, nessa seção, os algoritmos necessários para que seja possível visualizar os gráficos que relacionam o deslocamento  $x$  dos sólidos com o volume das intersecções, sendo essa ainda uma parte da etapa de execução segundo a metodologia de resolução de problemas.

Sendo essa a parte final da resolução do problema proposta e que integra a metodologia de resolução de problemas com o uso da tecnologia, essa é a etapa do desenvolvimento que cabe a sensibilidade do professor. Muitos alunos podem não ter qualquer familiaridade com a tecnologia e, muito provavelmente, menos ainda com uma linguagem de programação. Então cabe aqui reservar um tempo para um letramento para as ferramentas utilizadas.

Nesta seção serão apresentados os algoritmos que podem ser implementados em qualquer linguagem de programação. A implementação dos algoritmos em Python está disponível nos Apêndices. Para o cálculo do erro percentual relativo  $E_r$  entre o método computacional e analítico do cálculo dos volumes para cada um dos sólidos será realizada a divisão entre a diferença entre os resultados obtidos computacionalmente e analiticamente e o valor obtido analiticamente.

### 7.1.1 Gráfico do volume da interseção entre os cilindros

O algoritmo a seguir, quando implementado em alguma linguagem de programação, é a função  $f$  que fornece o volume da região de interseção entre os cilindros.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre os cilindros

---

**Entrada:** real:  $H, R, x$

**Saída:** Volume em função de  $x$

**início**

se  $0 \leq x \leq 2R$  então

$$v_1 = 2H \cdot \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR - x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR - x^2} \cdot (2R - x)}{4} \right)$$

retorna  $v_1$

senão

$$v_2 = 2H \cdot \left( R^2 \cdot \arcsen\left(\frac{\sqrt{4xR - x^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4xR - x^2} \cdot (x - 2R)}{4} \right)$$

retorna  $v_2$

**fim**

**fim**

---

O Algoritmo 2 pode ser usado para gerar o gráfico de uma função  $f$ . O gráfico da função definida pelo Algoritmo 1 foi gerado com o uso da linguagem Python e o código está disponível no Anexo B.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo para gerar o gráfico de uma função  $f$

---

**Entrada:** função  $f$ , intervalo

**Saída:** Gráfico da função  $f$

**início**

Plote o plano cartesiano;

**para cada** valor no intervalo **faça**

Calcule  $f$  para valor;

Crie pares de números  $P$  formados por valor e  $f$  para valor;

Plote no plano cartesiano o ponto cujas coordenadas são  $P$

**fim**

**fim**

---

Quando o código é rodado, o programa pede para inserir os valores de  $R$  e  $H$ . Inserindo os valores  $R = 3$  e  $H = 4$ , obtêm-se como resultado o gráfico da Figura 67.

Figura 67 – Gráfico da função do volume de interseção entre os cilindros



Fonte: O autor (2022).

Para determinar o valor máximo da função pode-se utilizar o seguinte algoritmo:

---

**Algoritmo 3:** Algoritmo para encontrar o valor máximo de uma função  $f$

---

**Entrada:** Intervalo, função

**Saída:** Valor máximo da função  $f$

**início**

**para**  $valor1$ ,  $valor2$  no Intervalo **faça**

    Compare  $valor1$  com  $valor2$ ;

**se**  $f(valor1) < f(valor2)$  **então**

      | **retorna**  $f(valor2)$

**senão**

      | **retorna**  $f(valor1)$

**fim**

**fim**

**fim**

---

Implementando o código, podemos verificar o valor máximo da função, dessa maneira é possível comparar o valor máximo da função volume obtido computacionalmente com o volume do cilindro, que analiticamente, é o valor máximo da função. Quando executado o código nessas condições, com  $R = 3$  e  $H = 4$ , obtém-se que 6,0 de  $x$  para qual obtemos  $f(x) = 113,094$ , valor máximo de  $f$ . Valor esse, bem próximo do obtido pela expressão do volume que é igual a 113,097, no qual representa um erro percentual de apenas 0,02%.

### 7.1.2 Gráfico do volume da interseção entre os cones

Para o volume da região de interseção entre os cones têm-se o Algoritmo 4 abaixo. Para gerar o gráfico dessa função pode-se implementar o Algoritmo 2. A implementação do algoritmo em Python está disponível no Apêndice B.

---

#### Algoritmo 4: Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre os cones

---

**Entrada:** real:  $H, R, x$

**Saída:** Volume em função de  $x$

**início**

se  $0 \leq x \leq H$  então

$$v_1 = \frac{\pi R^2}{12H^2} x^3$$

retorna  $v_1$

senão

$$v_2 = \frac{\pi R^2}{12H^2} (8H^3 - 24H^2x + 24Hx^2 - 7x^3)$$

retorna  $v_2$

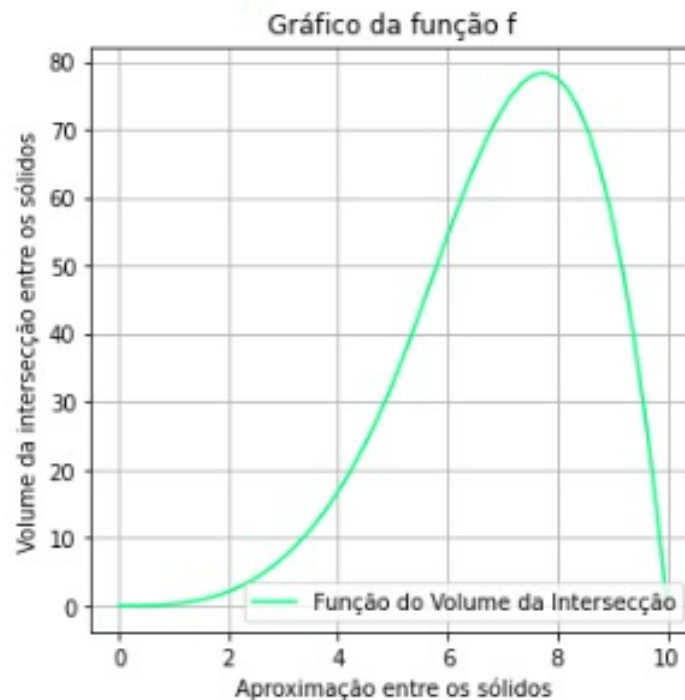
**fim**

**fim**

---

Será gerado pelo código, o gráfico a seguir ao atribuir  $R = 5$  e  $H = 5$ .

Figura 68 – Gráfico da função do volume de interseção entre os cones



Fonte: O autor (2022).

O máximo da função de interseção entre os cones, será discutido levando em conta o que foi feito referente à função de interseção entre os cilindros. Porém, o valor obtida analiticamente que fornece o máximo dessa função é  $V_{max} = 0,598 \frac{\pi r^2 H}{3}$ , que será inserida no código.

Os resultados obtidos quando  $R = 5$  e  $H = 5$  são, para o volume obtido a partir do código, 78,309, enquanto que usando a fórmula obtida analiticamente, temos o valor 78, isso representa um erro percentual em relação ao valor obtido analiticamente de apenas 0,4%.

### 7.1.3 Gráfico do volume de interseção entre as esferas

O Algoritmo 5, apresentado a seguir, define a função do volume de interseção entre esferas. O código implementado em Python, que também gera o gráfico da função, está disponível no Apêndice B para a função volume de interseção da Esfera.

---

**Algoritmo 5:** Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre as esferas

---

**Entrada:** real:  $R, x$

**Saída:** Volume em função de  $x$

**início**

se  $0 \leq x \leq 2R$  então

$$v_1 = \frac{\pi R}{2}x^2 - \frac{\pi}{12}x^3$$

retorna  $v_1$

senão

$$v_2 = \frac{\pi}{12}x^3 - \frac{\pi R}{2}x^2 + \frac{8\pi R^3}{3}$$

retorna  $v_2$

**fim**

**fim**

---

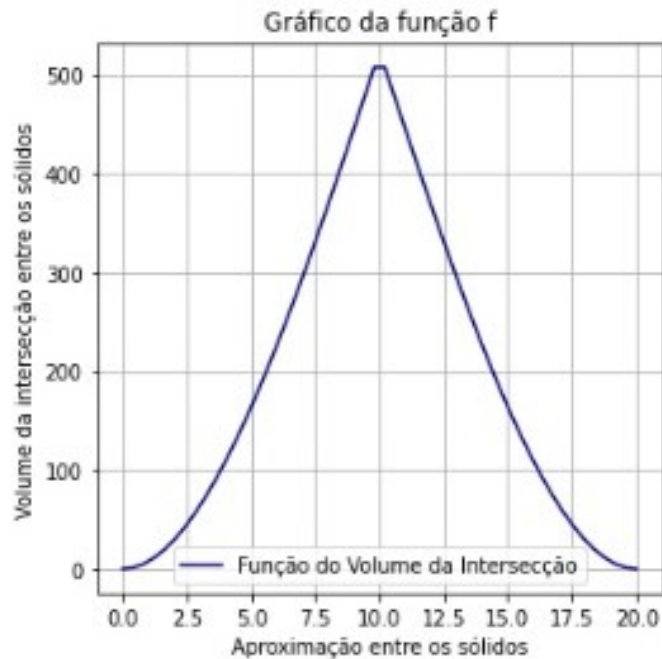
Inserindo, para o raio, o valor 5, depois de executado, o Código em Python, retornará o gráfico da Figura 69.

Como esperado, devido à simetria da esfera, o gráfico é simétrico e o seu ponto de máximo coincide com o momento em que as duas esferas convergem. Como já foi feito para o cilindro e para o cone, é possível calcular o valor máximo do volume de interseção, que corresponde ao volume da esfera, por meio do código em Python que consta no Apêndice B.

Implementando o código tem-se como retorno os valores 523,583 para o máximo, obtido computacionalmente, e 523,599, analiticamente, ou seja, entre os dois valores existe um



Figura 69 – Gráfico da função do volume de interseção entre as esferas



Fonte: O autor (2022).

erro percentual igual a 0,003% em relação ao valor obtido através da expressão analítica.

#### 7.1.4 Gráfico do volume da interseção entre os prismas de base hexagonal

Aqui temos o gráfico da região de interseção entre dois prismas de base hexagonal. As variáveis a serem consideradas são  $a$ , o lado do hexágono e  $H$ , a altura do prisma. Ao inserir os valores  $a = 6$  e  $H = 5$  no Algoritmo 6, é definida a função do volume de interseção entre os prismas. Tem-se, como resultado da implementação do Algoritmo 2, o gráfico mostrado na Figura 70.

O máximo da função do volume da interseção entre os prismas, como já foi falado na Seção 5.2, que tratava sobre a expressão analítica da função, será alcançado quando  $V_{max} = \frac{3a^2\sqrt{3}H}{2}$ . Usando o código-fonte que está no Apêndice B podemos comparar os valores obtidos através do código com o obtido analiticamente.

Utilizando o código obtemos os valores 467,641, computacionalmente, e 467,654, analiticamente, inserindo os valores  $a = 6$  e  $R = 5$ . Isso representando um erro percentual, em relação à expressão analítica, de somente 0,002%.

---

**Algoritmo 6:** Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre prismas de base hexagonal

---

**Entrada:** real:  $a, H, x$

**Saída:** Volume em função de  $x$

**início**

**se**  $0 \leq x \leq a$  **então**

$$v_1 = H \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} x^3$$

**retorna**  $v_1$

**senão**

**se**  $a \leq x \leq 2a$  **então**

$$v_2 = H \cdot \left( x \cdot a \sqrt{3} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \right)$$

**retorna**  $v_2$

**senão**

**se**  $2a \leq x \leq 3a$  **então**

$$v_3 = H \cdot \left( \frac{7\sqrt{3}}{2} a^2 - x \cdot a \sqrt{3} \right)$$

**retorna**  $v_3$

**senão**

$$v_4 = H \cdot \frac{\sqrt{3}(4a - x)^2}{2}$$

**retorna**  $v_4$

**fim**

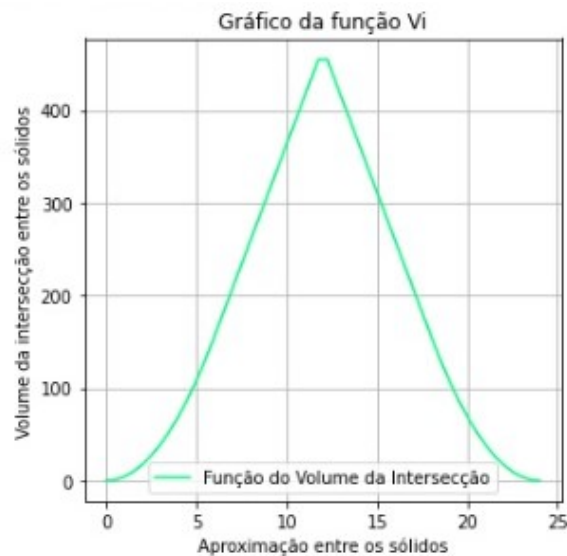
**fim**

**fim**

**fim**

---

Figura 70 – Gráfico da função do volume de interseção entre os prismas de base hexagonal



Fonte: O autor (2022).

### 7.1.5 Gráfico do volume da interseção entre as pirâmides

O último gráfico a ser gerado é o da região de interseção das pirâmides. O algoritmo que define a função está a seguir. Implementando-o juntamente com o algoritmo que gera o gráfico temos como resultado o gráfico da Figura 71.

---

#### Algoritmo 7: Algoritmo para o cálculo do volume de interseção entre as pirâmides

---

**Entrada:** real:  $A_B, H, x$

**Saída:** Volume em função de  $x$

**início**

se  $0 \leq x \leq H$  então

$$v_1 = \frac{A_B \cdot x^3}{12H^2}$$

retorna  $v_1$

senão

$$v_2 = \frac{A_B}{12H^2} (8H^3 + 24Hx^2 - 24H^2x - 7x^3)$$

retorna  $v_2$

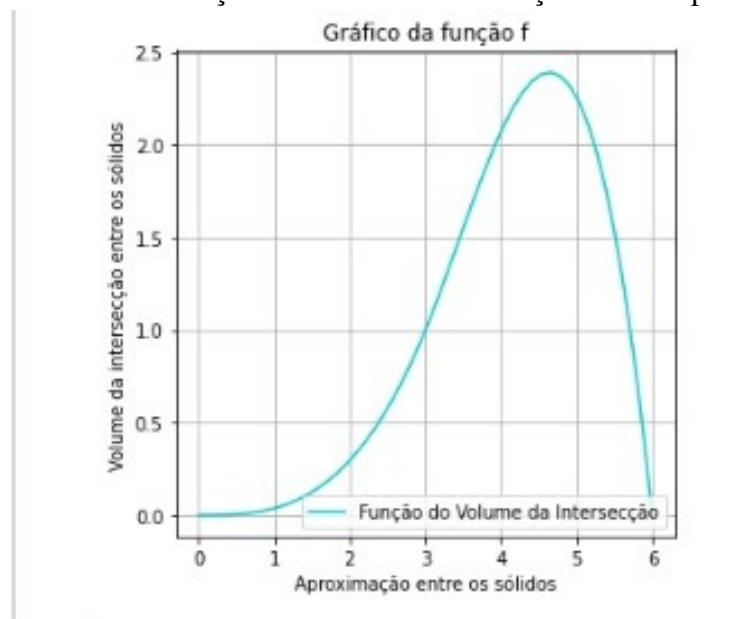
fim

**fim**

---

Inserindo como valores de entrada  $H = 3$  e  $A_B = 4$ , correspondendo, respectivamente, a altura das pirâmides e a área da base, após rodar o programa será obtido o gráfico da função volume de interseção das pirâmides.

Figura 71 – Gráfico da função do volume de interseção entre as pirâmides



Fonte: O autor (2022).

É perceptível que o gráfico da Figura 71 é semelhante ao gráfico da Figura 68, ou seja, se forem tomados cones com áreas da base iguais aos de pirâmides dadas, serão gerados volumes de interseção iguais de acordo com os parâmetros necessários para se obter os gráficos.

O valor máximo da função obtido analiticamente é  $V_{max} = 0,598 \cdot \frac{A_B H}{3}$ . Utilizando o código-fonte disponível no Apêndice B pode-se determinar o máximo, como já discutido para os casos anteriores e a última linha de código permite apresentar o volume máximo da função a partir da expressão obtida analiticamente. Para  $H = 3$  e  $A_B = 4$  os valores obtidos são 2,393, a partir do método computacional e 2,388, por meio da função obtida analiticamente, ou seja, tem-se um erro percentual de meramente 0,2%.

## 7.2 Retrospectiva e Análise da Solução

Nessa última etapa, é verificada a solução apresentada para o problema proposto. Para resolver o problema, primeiro, foi usado o raciocínio dedutivo para verificar que sólidos eram formados nas regiões de interseção entre os sólidos e definidos intervalos para que o volume dessas regiões de interseção com o comprimento da aproximação dos sólidos. Obtidas as funções que relacionam o volume das regiões de interseção com a aproximação entre os sólidos, a próxima etapa é escrever o código e inserir essas funções na linguagem Python.

Gerados os gráficos que representam os volumes das regiões de interseção é possível analisar o comportamento desse volume ao longo do deslocamento dos sólidos. Para os gráficos que representam as regiões de interseção entre os cones e as pirâmides, a principal observação é que o volume máximo da região de interseção acontece quando as figuras já estão se afastando. Quanto ao cilindro, à esfera e ao prisma, como esperado devido a sua simetria, o seu valor máximo acontece quando os dois sólidos coincidem. São utilizadas para resolução desse problema diversas ferramentas matemáticas, como semelhança de figuras planas, volumes de sólidos geométricos e funções, e por fim tecnológica, a linguagem de programação Python, que certamente enriquece o conhecimento dos estudantes.

Por fim, são discutidos também, de forma analítica e por meio do uso da linguagem Python, os valores máximos das funções encontradas que determinam os volumes das regiões de interseção e são observados erros percentuais menores que 1% em relação aos valores obtidos pelas fórmulas analíticas, mostrando que o uso da tecnologia é confiável mas que deve haver visão crítica quanto aos resultados obtidos.

### 7.3 Método para calcular o volume de sólidos sem a função Volume

Nesta seção a linguagem Python será utilizada para calcular o volume dos sólidos diretamente, ou seja, sem obter uma expressão do volume. Para isso, utilizaremos as ideias desenvolvidas na Seção 6.1 onde compreende-se que a integral é o limite no infinito das somas  $f(x_i)\Delta x_i$  para uma partição  $P = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  de um intervalo  $(a, b)$  em que  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ . Utilizaremos também as funções obtidas na Seção 6.3 para cada sólido e fixaremos o  $n = 1000$ .

#### 7.3.1 Cálculo do volume da interseção entre cilindros

Para determinar o volume do cilindro a partir do código, serão adotados os valores  $R = 1$  e  $H = 2$ . Foi definida a função  $A(x)$  que representa a área da secção transversal e serão escolhidos dois deslocamentos  $d$ , pois para cada um serão comparados com os obtidos a partir das funções obtidas analiticamente, para o primeiro intervalo, seja  $d = 1,5$  e para o segundo  $d = 3,5$ .

O algoritmo para função  $A(x)$  referente ao cilindro é o que segue.

---

**Algoritmo 8:** Função  $A(x)$  referente ao cilindro

---

**Entrada:** real  $x, H, R$

**Saída:** O valor da função  $A(x)$

**início**

$$A(x) = 2H\sqrt{-x^2 + 2xR}$$

**retorna**  $A(x)$

**fim**

---

Após, definir a função  $A(x)$  utiliza-se o algoritmo a seguir para calcular o somatório que gerará o valor do volume aproximadamente. Considerando intervalos predeterminados e o estudo na construção do problema.

Para os valores  $R = 1$  e  $H = 2$  e para  $d = 1,5$ , com o uso da equação, obtida analiticamente, encontramos o volume igual a 4,304 e com o uso do código encontramos 4,301, enquanto que para  $d = 2,5$ , com o uso da equação, encontramos 4,304 e com o uso do código 4,301, que representa um erro percentual de 0,07% para os dois casos.

Considerando que os demais códigos podem ser construídos a partir dos dois algoritmos anteriores e está no Apêndice B então os comentários que seguem sobre os outros casos

---

**Algoritmo 9:** Algoritmo para calcular o volume computacionalmente
 

---

**Entrada:**  $A(x)$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ **Saída:** Volume**início**     $deltax = \frac{b-a}{n}$ ;     $soma = 0$ ;     $t = a$ ;    **para**  $i$  no intervalo  $[a, b]$  **faça**         $t = t + deltax$ ;         $soma = soma + A(t) \cdot deltax$     **fim**     $Volume = 2 \cdot soma$  ;    **retorna**  $Volume$ **fim**


---

 serão baseados na implementação dos códigos em Python.
**7.3.2 Cálculo do volume da interseção entre Cones**

Considerando  $R = 1$  e  $H = 2$ , para calcular o volume da região de interseção entre os cones consideraremos dois valores para o deslocamento,  $d = 1$  pertencente ao intervalo  $0 \leq d \leq H$  e  $d = 3$  pertencente ao intervalo  $H < d \leq 2H$ . Utilizando as equações obtidas para  $d = 1$  obtemos 0,065 e para  $d = 3$  obtemos 1,243, por outro utilizando o código disponível no Apêndice B obtemos os valores 0,065 e 1,243, respectivamente, representando o erro percentual de 0%.

**7.3.3 Cálculo do volume da interseção entre Esferas**

Consideremos para efeito de cálculos o raio  $R = 1$ . Para comparação dos cálculos utilizando a equação do volume das regiões de interseção entre esferas e com o uso do Código que está no Apêndice B, sejam os valores de deslocamento  $d = 1,5$  referente ao intervalo  $0 \leq d \leq 2R$  e  $d = 2,5$  referente ao intervalo  $2R < d \leq 4R$ . Em ambos os casos, o resultado do cálculo analítico resultam no valor 2,65 enquanto que computacionalmente obtém-se, de mesmo modo, o valor 2,65, ou seja, uma erro percentual de 0%.

**7.3.4 Cálculo do volume da interseção entre Prismas**

Para o cálculo do volume da região de interseção entre prismas consideremos  $a = 1$  e  $H = 2$ . Utilizaremos os valores  $d = 0,5, 1,5, 2,5$  e  $3,5$  cada um correspondente a um intervalo

dos que foram considerados para construção das equações analíticas dos volumes das interseções. Para  $d = 0,5$  pela equação encontramos o valor 0,433 e com o uso do código disponível no Apêndice B encontramos o valor 0,432, para o valor  $d = 1,5$  pela equação encontramos o valor 3,464 e por meio do código, 3,464, para o valor  $d = 2,5$  encontramos o valor, usando a equação, 3,464 e com o código 3,464, e, por fim, para o valor  $d = 3,5$ , utilizando a equação encontramos o valor 0,433 e com o uso do código o valor encontrado é 0,432. Todos os valores encontrados por meio do código possuem um erro inferior a 0,3% em relação aos valores obtidos analiticamente.

### 7.3.5 *Cálculo do volume da interseção entre Pirâmides*

Seja  $R = 1$  e  $A_B = 1$  o valor do raio e da área da base das pirâmides que faremos a verificação e comparação dos valores dos volumes de interseção. Considere os valores  $d = 0,5$  que é menor que o valor da altura e  $d = 1,5$ , valor maior do que da altura das pirâmides. Determinando o volume da região de interseção analiticamente teremos para  $d = 0,5$  e posteriormente,  $d = 1,5$ , os volumes são iguais a 0,010 e 0,197, respectivamente. Quando calculados por meio do código que está no Apêndice B apresentam os valores 0,010 e 0,197, representando um erro de 0% para o número de algarismos considerados.

Como pode-se observar o método computacional de calcular os volumes das regiões de interseção tem uma boa precisão em comparação com o método analítico, fornecendo respostas razoavelmente satisfatórias para o problema.

Existem no Python bibliotecas que permitem realizar os cálculos para o volume de sólidos de revolução obtidos através da área entre os gráficos de duas funções. A subseção que segue traz a solução do problema apresentado na Seção 6.2.

### 7.3.6 *Usando Python para calcular o volume de um sólido de revolução*

Para mostrar como é possível resolver um problema que envolva o volume de um sólido de revolução por meio da linguagem Python será utilizado o mesmo problema do Seção 6.2. O código disponibilizado no Apêndice B resolve o problema.

De forma algorítmica o método para se resolver esse problema não se diferente dos anteriores. No entanto deve-se considerar que a função  $A(x)$  deste problema será  $\pi(f(x)^2 - g(x)^2)$  por se tratar de um sólido obtido por revolução. E depois de definidas as duas funções  $f$  e  $g$  definimos a função  $V$  que é a função que fornece o volume do sólido de revolução gerada pela rotação da região entre os dois gráficos, de  $f$  e  $g$ , em torno do eixo  $x$ , conforme a Seção 6.2.

Por fim, tendo como resultado o valor 40,212, por meio da implementação do código que resolve o problema na linguagem Python, valor muito próximo do encontrado analiticamente.



## 8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, tivemos como objetivo expor a análise de um problema matemático integrando o raciocínio lógico dedutivo e o uso da linguagem de Programação Python como forma de aprendizagem utilizando a metodologia de resolução de problemas.

Para isso, determinamos analiticamente funções que representam o volume de interseção para cada um dos tipos de sólidos congruentes considerados. Posteriormente, utilizamos a linguagem de programação Python para gerar os gráficos das funções dos volumes de interseção e determinar os valores máximos a partir do parâmetro de aproximação  $x$ . Por último, ao longo do processo, utilizando a metodologia de resolução de problemas para direcionar as etapas de resolução, conseguimos descrever as ferramentas analíticas e computacionais, alcançando dessa maneira os três objetivos específicos e o objetivo geral do trabalho.

Para a parte analítica do trabalho, foram utilizadas diversos teoremas da geometria espacial e plana, permitindo a análise dos sólidos geométricos e a determinação das funções dos volumes de interseção. A parte computacional do trabalho foi dividida entre a produção dos pseudocódigos, no corpo do texto, e os códigos em Python, disponibilizados nos Apêndices. Também, foram explorados os métodos do Cálculo diferencial e integral para resolução do problema e códigos em Python que não necessitavam do cálculo da função do volume de interseção para determinar o volume a partir do parâmetro  $x$  de aproximação.

O trabalho apresenta uma aproximação dos sólidos por meio de uma translação, porém se essa aproximação dos sólidos fosse realizada por meio de uma rotação, como seria o comportamento dessa região de interseção? Haveria uma expressão ou um conjunto de expressões que permitissem calcular a região de interseção conforme a variação desse ângulo de aproximação? Esses são alguns questionamentos que pode-se tentar responder em um trabalho futuro.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, S. A. G. d. *et al.* A pirâmide e seu volume. Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- BRASIL, M. D. E. D. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: jan. 2023.
- BRASIL, M. D. E. D. **Ministério da Educação avalia resultados do PISA e apresenta ações para melhoria da educação brasileira**. 2019. Disponível em: <<https://www.gov.br/pt-br/noticias/educacao-e-pesquisa/2019/12/ministerio-da-educacaoavalia-resultado-do-pisa-2018>>. Acesso em: jan. 2023.
- DELEPRANI, M. **As provas de matemática do Enem: conteúdos, dificuldades e influências para o currículo do ensino médio**. Tese (Doutorado) — Universidade do Grande Rio, 2012.
- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Calculo A**. [S.l.: s.n.], 2016.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. Matemática: ciência e aplicações. Atual, 2001.
- NETO, A. Tópicos de matemática elementar: Introdução à análise, v. 3. **Rio de Janeiro: SBM**, 2012.
- NETO, A. C. M. Geometria, coleção profmat. **Rio De Janeiro: SBM, 1o Edição**, v. 6, 2013.
- OLIVEIRA, A. C. de; NOGUEIRA, A. C. Os três problemas clássicos da matemática grega. 2007.
- PAIVA, A. M. S. de; SÁ, I. P. de. Raciocínio lógico e resolução de problemas: contribuições para a práxis pedagógica. **Cadernos de Educação Básica**, v. 2, n. 2, 2017.
- PINTO, A. *et al.* A teoria dos indivisíveis: uma contribuição do padre bonaventura cavalieri. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.
- POLYA, G. A arte de resolver problemas. **Rio de Janeiro: interciência**, v. 2, p. 12, 1978.
- RAMOS, S. R. d. S. Máximos e mínimos: Uma proposta para o cálculo em funções cúbicas sem o uso de derivadas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2019.
- RIBEIRO, F. M.; PAZ, M. G. O ensino da matemática por meio de novas tecnologias. **Revista Modelos-FACOS/CNEC, Osório, Ano**, v. 2, p. 1–10, 2012.
- SACCARDO, M. de L.; LIBÓRIO, D. B. L. Aplicação da metodologia de resolução de problemas em questões da obmep. In: **ENGENHARIAS, EXATAS E TECNOLOGIAS**. [S.l.: s.n.], 2020.
- SCAICO, P. D.; LIMA, A. A. de; AZEVEDO, S.; SILVA, J. B. B. da; RAPOSO, E. H.; ALENCAR, Y.; MENDES, J. P.; SCAICO, A. *et al.* Ensino de programação no ensino médio: Uma abordagem orientada ao design com a linguagem scratch. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 21, n. 02, p. 92, 2013.

SIMMONS, G. **Cálculo com Geometria Analítica, 2ª Edição, Vol. 1 e 2.** [S.l.]: Editora Makron Books do Brasil, 1999.

SOARES, J. F. **Um breve olhar sobre a história da matemática.** 2. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

## APÊNDICE A – COMANDOS E BIBLIOTECAS DO PYTHON

FUNÇÃO/BIBLIOTECA/COMANDO	DESCRIÇÃO
<code>==</code>	Operador de comparação entre objetos no Python.
<code>def</code>	Função utilizada para definir funções no Python.
<code>for</code>	É uma estrutura de controle utilizada para executar um bloco de código repetidamente.
<code>if...elif...else</code>	É uma estrutura de decisão do Python. Dada uma certa condição inicial ser verdadeira ou falsa, o programa pode executar diferentes blocos de código.
<code>import</code>	Função que permite importar bibliotecas ou funções do Python.
<code>in</code>	Expressão utilizada para verificar se determinado valor consta em uma sequência.
<code>init_printing(pretty_print = True)</code>	Essa expressão é uma chamada de função da biblioteca Sympy. É utilizada para retorna funções matemáticas de forma legível e esteticamente agradável.
<code>input</code>	Função utilizada para inserir dados com o o código em execução.
<code>Integral(V(x),(x,-3,1).doit()</code>	Função da biblioteca Sympy que calcula a integral de uma função tendo como entradas a variável e os extremos do intervalo de integração.
<code>matplotlib</code>	Biblioteca do Python que permite criar gráficos para chamar suas funções utiliza-se plt antecedendo o seu nome.
<code>np.linspace</code>	Função da biblioteca Numpy que permite criar uma sequência de números igualmente espaçados em um determinado intervalo.

numpy	Biblioteca do Python que permite utilizar diversas funções matemáticas. Para chamar as funções dessa biblioteca antecedemos o nome delas por np.
plt.figure	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para criação de gráficos e visualização de dados.
plt.grid	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para criar grades em um gráfico.
plt.legend	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para criar a legenda de um gráfico.
plt.plot	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para criar gráficos ligando os pontos definidos pela função.
plt.show	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para exibir o gráfico da função criada no Python.
plt.title	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para inserir um título no gráfico.
plt.xlabel	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para exibir uma legenda no eixo $x$ do gráfico.
plt.ylabel	Função da biblioteca Matplotlib utilizada para exibir uma legenda no eixo $y$ do gráfico.
print	Função do Python que permiti imprimir uma mensagem ou valores de saída em um terminal.
return	É uma instrução no Python que diz para retornar um valor específico quando uma função definida é chamada.
round	Função do Python que arredonda um determinado valor para uma quantidade específica de casas definidas na função.
symbol	Função da biblioteca Sympy, utilizada para realizar operações matemática de forma simbólica.
sympy	Biblioteca do Python própria para cálculos matemáticos simbólicos.

## APÊNDICE B – CÓDIGO-FONTES EM PYTHON

Código-fonte 1 – Código-fonte que gera o gráfico da região de interseção entre os cilindros

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # Definindo os valores das variaveis R e H
4 R = float(input('Insira um valor para R: '))
5 H = float(input('insira um valor para H: '))
6 #Funcao do volume definido por partes
7 def f(x):
8     if x <= 2*R:
9         V_1 = 2*H*((R**2)*np.arcsin(np.sqrt(4*x*R -x**2)/(2*R))
10              -(np.sqrt(4*x*R -x**2)*(2*R - x))/4)
11         return V_1
12     else:
13         V_2 = 2*H*((R**2)*np.arcsin(np.sqrt(4*x*R -x**2)/(2*R))
14              -(np.sqrt(4*x*R -x**2)*(x - 2*R))/4)
15         return V_2
16 # Construindo o grafico da funcao volume da interseccao
17 x = np.linspace(0,4*R)
18 y = [f(i) for i in x]
19 plt.figure(figsize=(5,5))
20 plt.title('Grafico da funcao f')
21 plt.plot(x,y, color = '#00FF7F', label = 'Funcao do Volume
22         da Interseccao')
23 plt.xlabel('Aproximacao entre os solidos')
24 plt.ylabel('Volume da interseccao entre os solidos')
25 plt.grid()
26 plt.legend()
27 plt.show()

```

## Código-fonte 2 – Máximo da interseção entre os cilindros

```

1 for c in x:
2     if f(c) == max(y):
3         print(round(c,3))
4         print(round(f(c),3))
5 print(np.pi*(R**2)*H))

```

## Código-fonte 3 – Máximo da interseção entre os cones

```

1 for c in x:
2     if f(c) == max(y):
3         print(round(c,3))
4         print(round(f(c),3))
5 print(0.598*(round((np.pi*R*H)/3,3))

```

## Código-fonte 4 – Máximo da interseção entre as esferas

```

1 for c in x:
2     if f(c) == max(y):
3         print(round(c,3))
4         print(round(f(c),3))
5 print(round((4/3)*(np.pi*R**3),3))

```

## Código-fonte 5 – Máximo da interseção entre os prismas

```

1 for c in x:
2     if f(c) == max(y):
3         print(round(c,3))
4         print(round(f(c),3))
5 print(round((1/2)*(3*(a**2)*np.sqrt(3)*H),3))

```

## Código-fonte 6 – Máximo da interseção entre as pirâmides

```

1 for c in x:
2     if f(c) == max(y):
3         print(round(c,3))
4         print(round(f(c),3))
5 print(round(0.598*(A_B*H/3,3))

```

Código-fonte 7 – Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre os cones

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # Definindo os valores das variaveis R e H
4 R = float(input('insira um valor para R: '))
5 H = float(input('insira um valor para H: '))
6 #Funcao do volume definido por partes
7 def f(x):
8     if x <= H:
9         V_1 = ((np.pi)*(R**2)*(x**3))/(12*H**2)
10        return V_1
11    else:
12        V_2 = (((np.pi)*R**2)/(12*H**2))*(8*(H**3) - (24*x*(H
13            **2)) + 24*(x**2)*H - 7*x**3)
14        return V_2
15 #Construindo o grafico da funcao volume da interseccao
16 x = np.linspace(0,2*H)
17 y = [f(i) for i in x]
18 plt.figure(figsize=(5,5))
19 plt.title('Grafico da funcao f')
20 plt.plot(x,y, color = '#00FF7F', label = 'Funcao do Volume
21     da Interseccao')
22 plt.xlabel('Aproximacao entre os solidos')
23 plt.ylabel('Volume da interseccao entre os solidos')
24 plt.grid()

```



```

23 plt.legend()
24 plt.show()

```

Código-fonte 8 – Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre as esferas

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # Definindo o valor da variavel R
4 R = int(input('insirir um valor para R: '))
5 #Funcao do volume definido por partes
6 def f(x):
7     if x <= 2*R:
8         V_1 = (((np.pi)*R*(x**2))/2) - ((np.pi*x**3)/12)
9         return V_1
10    else:
11        V_2 = ((8*np.pi*R**3)/3) - (((np.pi)*R*(x**2))/2) - ((
12            np.pi*x**3)/12))
13        return V_2
14 #Construindo o grafico da funcao volume da interseccao
15 x = np.linspace(0,4*R)
16 y = [f(i) for i in x]
17 plt.figure(figsize=(5,10))
18 plt.title('Gr f ico da fun o f')
19 plt.plot(x,y, color = '#00008B', label = 'Fun o do
20     Volume da interse o ')
21 plt.xlabel('Aproxima o entre os s lidos')
22 plt.ylabel('Volume da interse o entre os s lidos')
23 plt.grid()
24 plt.legend()
25 plt.show()

```

Código-fonte 9 – Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre os prismas

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 #Definindo os valores das variaveis a e H
4 a = float(input('Insira um valor para a: '))
5 H = float(input('Insira um valor para H: '))
6 #Funcao do volume definida por partes
7 def f(x):
8     if x<=a:
9         V_1 = H*((x**2)*np.sqrt(3))/2
10        return V_1
11    elif x >a and x <= 2*a:
12        V_2 = H*(x*a*np.sqrt(3)-((a**2)*np.sqrt(3))/2)
13        return V_2
14    elif x > 2*a and x <= 3*a:
15        V_3 = H*((3*a-x)*(a*np.sqrt(3)) + ((a**2)*np.sqrt(3))
16              /2)
17        return V_3
18    else:
19        V_4 = H*(np.sqrt(3)*(4*a-x)**2)/2
20        return V_4
21 #Construindo o grafico da funcao de interseccao
22 x = np.linspace(0,4*a)
23 y = [f(i) for i in x]
24 plt.figure(figsize=(5,5))
25 plt.title('Grafico da funcao Vi')
26 plt.plot(x,y, color = '#00FF7F', label = 'Funcao do Volume
27         da interseccao')
28 plt.xlabel('Aproximacao entre os solidos')
29 plt.ylabel('Volume da interseccao entre os solidos')
30 plt.grid()
31 plt.legend()
32 plt.show()

```

## Código-fonte 10 – Código-fonte que gera o gráfico da função de interseção entre as pirâmides

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # Definindo os valores das variaveis A_B e H
4 H = int(input('insira um valor para H: '))
5 A_B = int(input('insira o valor da rea da base: '))
6 #Funcao do volume definido por partes
7 def f(x):
8     if x <= H:
9         V_1 = (A_B*(x**3))/(12*(H**2))
10        return V_1
11    else:
12        V_2 = (A_B/(12*H**2))*(8*(H**3) + (24*H*x**2) - (24*x*H
13            **2) - 7*x**3)
14        return V_2
15 #Construindo o grafico da funcao volume da interseccao
16 x = np.linspace(0,2*H)
17 y = [f(i) for i in x]
18 plt.figure(figsize=(5,10))
19 plt.title('Gr fico da fun o f')
20 plt.plot(x,y, color = '#00CED1', label = 'Fun o do
21     Volume da interse o')
22 plt.xlabel('Aproxima o entre os s lidos')
23 plt.ylabel('Volume da interse o entre os s lidos')
24 plt.grid()
25 plt.legend()
26 plt.show()

```

## Código-fonte 11 – Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre cilindros

```
1 import numpy as np
2 # Definindo os valores das variáveis R e H
3 R = float(input('Insira um valor para R: '))
4 H = float(input('Insira um valor para H: '))
5 #Funcao A(x)
6 def f(x):
7     v = 2*H*np.sqrt(-x**2+2*x*R)
8     return v
9 #variaveis
10 d = float(input('Insira o deslocamento do Cilindro: '))
11 if d <= 2*R:
12     a=0
13     b=d/2
14 else:
15     a=d/2
16     b = 2*R
17 n = int(input('determine o número de partes do
18     intervalo: '))
19 deltax = (b-a)/n
20 #integral por meio do somatorio
21 soma = 0
22 t = a
23 for i in range(1,n):
24     t = t + deltax
25     soma = soma + (f(t))*deltax
26 V =2*soma
27 print(round(V,3))
```

## Código-fonte 12 – Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre os cones

```
1 import numpy as np
2 # Definindo os valores das variaveis R e H
3 R = float(input('insira um valor para R: '))
4 H = float(input('insira um valor para H: '))
5 #Funcao gerado do Cone
6 def f(x):
7     v = (R/H)*x
8     return v
9 #variaveis
10 d = float(input('Insira o deslocamento do Cone:'))
11 if 0 <= d <= H:
12     a=0
13     b=d/2
14 else:
15     a = d-H
16     b = d/2
17 n = int(input('determine o n mero de parti es do
18     intervalo: '))
19 deltax = (b-a)/n
20 #integral por meio do somatorio
21 soma = 0
22 t = a
23 for i in range(1,n):
24     t = t + deltax
25     soma = soma + (f(t)**2)*deltax
26 V = 2*np.pi*soma
27 print(round(V,3))
```

## Código-fonte 13 – Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre as esferas

```
1 import numpy as np
2 # Definindo o valor da variável R
3 R = int(input('insira um valor para R: '))
4 #Funcao geradora da Esfera
5 def f(x):
6     v = np.sqrt(2*x*R-x**2)
7     return v
8 #variaveis
9 d = float(input('Insira o deslocamento da Esfera: '))
10 if 0 <= d <= 2*R:
11     a = 0
12     b = d/2
13 else:
14     a = d/2
15     b = 2*R
16
17 n = int(input('determine o número de partes do
18     intervalo: '))
19 deltax = (b-a)/n
20 #integral por meio do somatorio
21 soma = 0
22 t = a
23 for i in range(1,n):
24     t = t + deltax
25     soma = soma + (f(t)**2)*deltax
26 V = 2*np.pi*soma
27 print(round(V,3))
```

## Código-fonte 14 – Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre os prismas

```

1 import numpy as np
2 #Definindo os valores das variaveis a e H
3 a = float(input('Insira um valor para a: '))
4 H = float(input('Insira um valor para H: '))
5 d = float(input('Insira o deslocamento do Prisma: '))
6 #Funcao A(x)
7 def f(x):
8     if d<=a:
9         V_1 = 2*H*np.sqrt(3)*x
10        return V_1
11    elif a < d <= 3*a:
12        V_2 = H*a*np.sqrt(3)
13        return V_2
14    else:
15        V_4 = 2*H*np.sqrt(3)*(2*a-x)
16        return V_4
17 #variaveis
18 if d<=a:
19     c= 0
20     b= d/2
21 elif a < d <= 2*a:
22     c = a/2
23     b = d/2
24 elif 2*a < d <= 3*a:
25     c = d/2
26     b = 3*a/2
27 else:
28     c = d/2
29     b = 2*a
30
31 n = int(input('determine o n mero de parti es do

```

```

    intervalo: '))
32 deltax = (b-c)/n
33
34 #integral por meio do somatorio
35 soma = 0
36 t = c
37 for i in range(1,n):
38     t = t + deltax
39     soma = soma + (f(t))*deltax
40 V = 2*soma
41 if a < d <=3*a:
42     print(round(V+(H*np.sqrt(3)*a**2)/2,3))
43 else:
44     print(round(V,6))

```

Código-fonte 15 – Código-fonte para o cálculo do volume da interseção entre as pirâmides

```

1 import numpy as np
2 # Definindo os valores das variáveis R e A_B
3 H = int(input('insira um valor para H: '))
4 A_B = int(input('insira o valor da área da base: '))
5 #Funcao A(x):
6 def f(x):
7     v = (A_B/H**2)*x**2
8 #variaveis
9 d = float(input('Insira o deslocamento da Pirâmide: '))
10 if 0 <= d <= H:
11     a = 0
12     b = d/2
13 else:
14     a = d-H
15     b = d/2

```



```

16 n = int(input('determine o n mero de parti es do
    intervalo: '))
17 deltax = (b-a)/n
18 #integral por meio do somatorio
19 soma = 0
20 t = a
21 for i in range(1,n):
22     t = t + deltax
23     soma = soma + (f(t))*deltax
24 V = 2*soma
25 print(round(V,3))

```

Código-fonte 16 – Código para calcular o volume do sólido de revolução da Seção 6.2

```

1 from sympy import *
2 import numpy as np
3 init_printing(pretty_print = True)
4 x = Symbol('x')
5 # Definindo as fun es f(x) e g(x)
6 def f(x):
7     return (1/4)*(13-x**2)
8 def g(x):
9     return (1/2)*(x+5)
10 #Definindo a expressao do volume
11 def V(x):
12     return np.pi*(f(x)**2 - g(x)**2)
13 #Calculando o volume
14 Integral(V(x),(x,-3,1)).doit()

```

**APÊNDICE C – CÓDIGO DE CORES EM HEXADECIMAL QUE PODEM SER  
USADAS NO PYTHON PARA COLORIR GRÁFICOS**

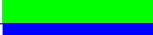


<b>Cor</b>	<b>Código</b>	<b>Exemplo</b>
Preto	000000	
Branco	FFFFFF	
Vermelho	FF0000	
Verde	00FF00	
Azul	0000FF	
Amarelo	FFFF00	
Roxo	800080	
Cinza	808080	
Laranja	FFA500	
Marrom	A52A2A	
Rosa	FFC0CB	
Turquesa	40E0D0	
Azul claro	ADD8E6	
Verde claro	90EE90	
Roxo claro	E6E6FA	
Ciano	00FFFF	
Azul escuro	000080	
Verde escuro	006400	
Marrom claro	D2B48C	
Cinza claro	D3D3D3	
Cinza escuro	A9A9A9	
Azul royal	4169E1	
Coral	FF7F50	
Tomate	FF4500	
Verde	008000	
Magenta	FF00FF	
Gold	FFD700	

Tabela 1 – Códigos que podem ser inseridos para mudar a cor do gráfico da função