Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departmento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Uma contribuição para o Ensino de Probabilidade na Educação Básica

Débora Cristina Silva Ramos

Julho/2023

Débora Cristina Silva Ramos

Uma contribuição para o Ensino de Probabilidade na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matematica em Rede Nacional - PROFMAT - CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora

Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos

Natal-RN

Julho/2023

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Ramos, Débora Cristina Silva.
Uma contribuição para o ensino de probabilidade na educação básica / Débora Cristina Silva Ramos. - 2023.
85 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, RN, 2023.
Orientação: Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos.

1. Probabilidade - Dissertação. 2. Educação básica - Dissertação. 3. Espaço amostral - Dissertação. I. Campos, Viviane Simioli Medeiros. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 519.2(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação sob o título *Mestre em Matemática* apresentada por Débora Cristina Silva Ramos e aceita pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos
Orientadora
DMAT – Departamento de Matemática
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Ronaldo Cesar Duarte
Examinador
DMAT – Departamento de Matemática
UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima
Examinador
UAMat - Unidade Acadêmica de Matemática
UFCG - Universidade Federal de Campina Grande

Natal-RN, 03 de julho de 2023.

Dedico este trabalho aos meus pais, Ana e José; aos meus irmãos, Janaína, Thiago e Daniel e aos meus sobrinhos, Pedro e Felipe, pelo apoio incondicional, pela força e por acreditarem no meu potencial.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido mais uma oportunidade de cursar o PROFMAT e por ter me sustentado até aqui.

Aos meus pais, Ana e José, por todo o apoio e por terem investido em minha educação. A toda a minha família, em especial, aos meus irmãos Janaína, Thiago e Daniel, e aos meus sobrinhos, Pedro e Felipe, por acreditarem no meu potencial e pelo apoio incondicional.

À minha orientadora, Viviane Simioli, por ter acreditado em mim mais uma vez, por toda a paciência, dedicação, compreensão, ensinamento e pela ajuda na definição do tema deste trabalho.

Aos meus amigos da turma do PROFMAT 2017.1, em especial a João Marcelo, Edvan, PC, Lucemário, Jaques e Paulo. Aos meus amigos da turma do PROFMAT 2021.1, em especial a Marcos, Gleiferson, Gabriel, Bráulio, Júnior, Francisco, Fábio, Cláudio, Alexandre, Gilderlan, Jonaldo, Antônia, Woslley e Ítalo. Aos meus amigos da turma do PROFMAT de 2022.1 aos quais tive o prazer de conhecer, em especial ao Adriano, Rodrigo, Assis e Ricardo. Aos meus amigos de profissão Luciana Brandão, Rayane, João Cláudio, Cristina, Helô, Manoel e Miguel. A minha amiga de infância, Isabella Larice. Aos meus amigos da graduação, em especial a Ruan, Bob, Pedro e Sara. Aos amigos Alexandre, Hebert, Luciano e Lininha. A toda a equipe da E.M. Prof. Alberto Nicácio da Costa Barbosa, da E. E. Prof. Otto de Brito Guerra, da E. E. Int. Ubaldo Bezerra de Melo e da E. M. Profa. Maria Bernadete Barbosa.

Ao corpo docente: prof. dr. Paulo Roberto, profa. dra. Débora, prof. dr. Fagner, prof. dr. Ronaldo Freire, prof. dr. Marcelo, profa. dra. Gabriela, prof. dr. André Gustavo e prof. dr. Carlos Gomes. Aos membros da comissão examinadora, prof. dr. Ronaldo Cesar e prof. dr. Romildo. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Lembre-se de que todos os modelos estão errados; a questão prática é quão errados eles devem ser para não serem úteis.

George Box

Uma contribuição para o Ensino de Probabilidade na Educação Básica

Autor: Débora Cristina Silva Ramos

Orientador(a): Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos

Resumo

Nesse trabalho, apresentamos uma proposta de ensino de Probabilidade para a Educação Básica, visando contribuir com a prática docente em sala de aula. Para tanto, foi realizada uma descrição sobre a construção histórica e definição conceitual da função de probabilidade e oportunizamos aos professores propostas didáticas a partir da elaboração de oficinas e atividades. A motivação da escolha do tema foi que, embora conste nos documentos que orientam o ensino no país, o ensino de Probabilidade não ocorre de maneira efetiva na Educação Básica, muitas vezes porque os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental não se sentem preparados ou não tiveram formação para isso e os livros didáticos são muitas vezes de qualidade insatisfatória.

Palavras-chave: Probabilidade, Educação Básica, Espaço Amostral.

A contribution to the Teaching of Probability in Basic Education

Author: Débora Cristina Silva Ramos

Supervisor: Profa. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos

Abstract

In this work, we present a proposal for teaching Probability in Basic Education, aiming to contribute to the teaching practice in the classroom. For this purpose, we provided a description of the historical construction and conceptual definition of probability function, and we offered teachers didactic proposals through the development of workshops and activities. The motivation behind choosing this topic is that, despite being included in the documents guiding education in the country, the teaching of Probability is not effectively happening in Basic Education, often because elementary school teachers do not feel prepared or have not received adequate training for it, and the textbooks are frequently of unsatisfactory quality.

Keywords: Probability, Basic Education, Sample Space.

Lista de figuras

Sumário

1 Introdução

Nas décadas de 60/70 houve um movimento internacional demominado Matemática Moderna [1], no qual a Matemática era compreendida apenas como *lógica*, ou seja, aproximava a Matemática escolar da Matemática avançada, tornando o ensino cada vez mais complexo e distante da realidade dos alunos, principalmente dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O ensino se resumia às abstrações internas da Matemática, dando ênfase somente à teoria e essa ideia atingiu também os livros didáticos. Esses fatores contribuíram para que os elaboradores do currículo, nessa época, solicitassem uma reforma pedagógica em caráter de urgência, incluindo a pesquisa de materiais atualizados e também a necessidade de novos métodos de ensino.

Foi em 1980 que o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dos Estados Unidos, mudou esse quadro através do documento *Agenda para Ação*. Este enfatizava a importância da resolução de problemas bem como a compreensão da relevância de aspectos sociais e antropológicos na aprendizagem da Matemática, desencadeando novas discussões para renovarem os currículos. Assim, as propostas criadas em diferentes países no período de 1980 a 1995, caminharam para um objetivo comum e, em relação à probabilidade, destacaram a

> [...] importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no **ensino fundamental**, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos. (BRASIL, 1997, p. 21)

A Probabilidade, bem como a Estatística e a Análise Combinatória, passaram então a integrar os documentos oficiais que norteiam o ensino aqui no Brasil, os PCNs e a BNCC.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), de modo geral, é um conjunto de dire-

[1] O Movimento da Matemática Moderna poderá ser caracterizado como forte mudança no ensino de matemática visto que os professores e demais profissionais da área educacional, sendo eles dos níveis básicos e das universidades, encontravam-se insatisfeitos com o modelo que vinha sendo adotado. Fonte: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2846

trizes elaborado para orientar os educadores por meio da normatização de alguns aspectos fundamentais concernentes a cada disciplina.[2] Os PCNs de Matemática

> [...] têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros. Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. (BRASIL, 1998, p. 15)

> [...] apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las. São apontadas as possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os Temas Transversais. (BRASIL, 1998, p. 16)

Já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.[3].

Na BNCC de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística).

Na tabela abaixo,

---

[2]Fonte: https://www.cpt.com.br/pcn/pcn-parametros-curriculares-nacionais-documento-completo-atualizado-e-interativo

[3]Fonte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Figura 1: Probabilidade: Objetos de Conhecimento e Habilidades do Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS INICIAIS MATEMÁTICA		
UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
1º ANO		
Probabilidade	Noção de acaso	(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
2º ano		
Probabilidade	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano	(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
3º ano		
Probabilidade	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral	(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4º ano		
Probabilidade	Análise de chances de eventos aleatórios	(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
5º ano		
Probabilidade	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios	(EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
	Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis	(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Fonte: BNCC (Brasil, 2018).

Figura 2: Probabilidade: Objetos de Conhecimento e Habilidades do Anos Finais do Ensino Fundamental.

ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS MATEMÁTICA		
UNIDADES TEMÁTICAS	**OBJETOS DE CONHECIMENTO**	**HABILIDADES**
6º ANO		
Probabilidade	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º ano		
Probabilidade	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
8º ano		
Probabilidade	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9º ano		
Probabilidade	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018).

Figura 3: Probabilidade: Objetos de Conhecimento e Habilidades do Ensino Médio.

ENSINO MÉDIO MATEMÁTICA	
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS NO ENSINO MÉDIO: COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES	**HABILIDADES**
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3	
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
	(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5	
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018).

As Unidades Temáticas da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, na BNCC, foram aprovadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e homologada pelo MEC em dezembro de 2017. Já as Unidades Temáticas do Ensino Médio foram aprovada pelo CNE em dezembro de 2018. Uma vez homologado pelo MEC, o documento entrou em vigor, e as instituições de ensino tiveram até o ano de 2022 para se adequar à BNCC.[4] Mesmo com o surgimento da BNCC, os PCNs não se tornaram absoletos, visto que permanecem como documentos orientadores.

Este trabalho teve como motivação minha experiência como professora dos Anos Finais do Ensino Fundamental, na E. M. Prof$^{\underline{o}}$ Alberto Nicácio da Costa Barbosa e do Ensino Médio, na E. E. Int. Ubaldo Bezerra de Melo, ambas localizadas no município de Ceará-Mirim/RN.

Com o objetivo de iniciar o estudo de probabilidade com minha turma do 6$^{\underline{o}}$ ano, perguntei aos alunos quais deles já haviam tido aulas sobre esse assunto em algumas das séries anteriores. A resposta foi unânime: "Nunca tivemos aula e nunca ouvimos falar sobre

[4]Fonte: https://anglosolucaoeducacional.com.br/breve-historico-da-bncc-e-de-sua-base-legislativa/

Probabilidade, professora". Intrigada com a resposta deles, sabendo que existe um documento que exige o ensino deste conteúdo nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental desde 2017, fui perguntar a alguns professores desta etapa de ensino se eles incluíam Probabilidade no planejamento e, para minha surpresa, a resposta foi negativa. A justificativa que eles proferiram foi de que os alunos possuíam uma base *fraca* e que muitos deles chegavam ao 5º ano não alfabetizados e então, por isso, deveriam focar na alfabetização deles.

Nessa minha turma de 6º ano, por exemplo, haviam alunos não alfabetizados, entretanto, estes aprenderam de maneira satisfatória os conceitos de probabilidade indicados para àquela série. Minha estratégia foi revisar de maneira breve os conceitos das séries anteriores para que a turma entendesse os conceitos indicados para a série vigente.

> É fundamental **não subestimar** a capacidade dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. (BRASIL, 1997, p. 29)

O que pude perceber nessas conversas é que os professores mais antigos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental investem todo o tempo que têm para ensinar Matemática no que eles consideram como "base", ou seja, nas quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão), pois julgam que, aprendendo estas operações, os alunos obterão sucesso nos demais conteúdos das séries posteriores. Este pensamento é pautado na ideia de que a Matemática se resume apenas a calcular e a aplicações de fórmulas dos Anos Finais do Ensino Fundamental em diante. Outros professores dos Anos Iniciais, que possuem formação recente, ministram e aplicam atividades lúdicas e/ou jogos matemáticos abrangendo Números e Operações, Espaço e Forma e Grandezas e Medidas, excluindo Probabilidade e Estatística. Mesmo que existam documentos oficiais orientadores e norteadores, segundo Brasil (1997, p.21), "é importante salientar que ainda hoje nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com os conjuntos nas séries iniciais, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais" e

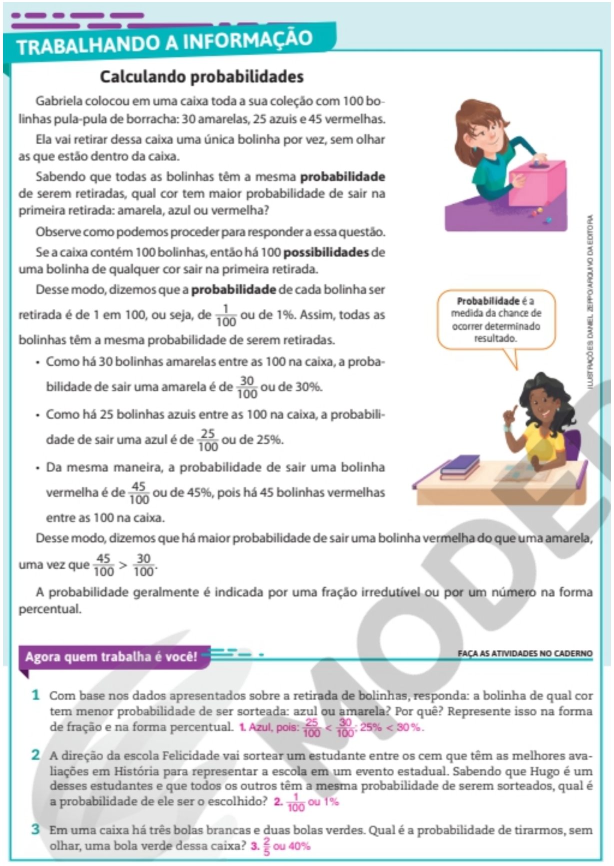
> as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho. (BRASIL, 1997, p. 22)

Porém, essa não é a única dificuldade que o ensino da Matemática enfrenta. Os professores dos Anos Iniciais com os quais conversei alegaram que o tema Probabilidade não estava incluso na formação acadêmica deles. De fato, segundo Brasil (1997, p. 22) “parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada”.

Analisando a Estrutura Curricular do curso presencial de Licenciatura de Pedagogia da UFRN mais atualizada, que entrou em vigor no período letivo de 2018.1 até os dias atuais, no que diz respeito às disciplinas referentes ao ensino da Matemática denominadas por *Ensino da Matemática I*, com carga de 60 horas e *Ensino da Matemática II*, com carga horária de 60 horas, a ementa destes componentes curriculares não abordam o ensino de Probabilidade, conforme o Anexo A.

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, a dificuldade no aprendizado de probabilidade também tem relação com os livros didáticos que, por sua vez, apresentam os conceitos teóricos de forma reduzida, dando mais ênfase às fórmulas prontas. Os capítulos deste conteúdo possuem, no máximo, duas páginas, contando com as atividades. A imagem seguinte mostra a seção do livro didático referente à Probabilidade, da edição mais recente. No entanto, as escolas da prefeitura de Ceará-Mirim, até o momento, ainda utilizam a 9ª edição da mesma coleção, de 2018.

Figura 4: Probabilidade e o livro didático.



TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Calculando probabilidades

Gabriela colocou em uma caixa toda a sua coleção com 100 bolinhas pula-pula de borracha: 30 amarelas, 25 azuis e 45 vermelhas.

Ela vai retirar dessa caixa uma única bolinha por vez, sem olhar as que estão dentro da caixa.

Sabendo que todas as bolinhas têm a mesma **probabilidade** de serem retiradas, qual cor tem maior probabilidade de sair na primeira retirada: amarela, azul ou vermelha?

Observe como podemos proceder para responder a essa questão.

Se a caixa contém 100 bolinhas, então há 100 **possibilidades** de uma bolinha de qualquer cor sair na primeira retirada.

Desse modo, dizemos que a **probabilidade** de cada bolinha ser retirada é de 1 em 100, ou seja, de $\frac{1}{100}$ ou de 1%. Assim, todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem retiradas.

- Como há 30 bolinhas amarelas entre as 100 na caixa, a probabilidade de sair uma amarela é de $\frac{30}{100}$ ou de 30%.
- Como há 25 bolinhas azuis entre as 100 na caixa, a probabilidade de sair uma azul é de $\frac{25}{100}$ ou de 25%.
- Da mesma maneira, a probabilidade de sair uma bolinha vermelha é de $\frac{45}{100}$ ou de 45%, pois há 45 bolinhas vermelhas entre as 100 na caixa.

Desse modo, dizemos que há maior probabilidade de sair uma bolinha vermelha do que uma amarela, uma vez que $\frac{45}{100} > \frac{30}{100}$.

A probabilidade geralmente é indicada por uma fração irredutível ou por um número na forma percentual.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Com base nos dados apresentados sobre a retirada de bolinhas, responda: a bolinha de qual cor tem menor probabilidade de ser sorteada: azul ou amarela? Por quê? Represente isso na forma de fração e na forma percentual. 1. Azul, pois: $\frac{25}{100} < \frac{30}{100}$; 25% < 30%.

2 A direção da escola Felicidade vai sortear um estudante entre os cem que têm as melhores avaliações em História para representar a escola em um evento estadual. Sabendo que Hugo é um desses estudantes e que todos os outros têm a mesma probabilidade de serem sorteados, qual é a probabilidade de ele ser o escolhido? 2. $\frac{1}{100}$ ou 1%

3 Em uma caixa há três bolas brancas e duas bolas verdes. Qual é a probabilidade de tirarmos, sem olhar, uma bola verde dessa caixa? 3. $\frac{2}{5}$ ou 40%

Fonte: Livro Matemática Bianchini, 10ª ed., São Paulo, 2022, ed. Moderna, 6º ano

E assim, o professor justifica a importância de decorar estas fórmulas para mais tarde aplicá-las nos exercícios propostos que, nos livros didáticos, em sua grande maioria, exigem apenas um resultado final baseado em um valor numérico em forma de fração ou em forma de porcentagem.

Em algumas instituições de Ensino Médio, que ainda não adotaram o modelo integral de ensino, o coordenador/suporte pedagógico geralmente é um pedagogo, e é ele quem orienta os professores de todas as disciplinas, inclusive matemática. No entanto, na minha avaliação, isso vem prejudicando o planejamento e o trabalho dos professores e, consequentemente afetando a aprendizagem dos alunos. Os coordenadores pedagogos comumente pressionam os docentes a selecionarem aqueles conteúdos em que a contextualização possa ser aplicada. No entanto, eles não possuem conhecimento sobre o que de fato é contextualização e o fazem de maneira equivocada.

> Outra distorção perceptível refere-se a uma interpretação equivocada da idéia de "cotidiano", ou seja, trabalha-se apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Desse modo, muitos conteúdos importantes são descartados

> ou porque se julga, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos, ou porque não fazem parte de sua "realidade", ou seja, não há uma aplicação prática imediata. Essa postura leva ao empobrecimento do trabalho, produzindo efeito contrário ao de enriquecer o processo ensino-aprendizagem. (BRASIL, 1997, p. 23)

Vista na contramão da contextualização, a abstração Matemática, que extrai a essência de um conceito, removendo qualquer dependência com o mundo real, não é trabalhada nas aulas de probabilidade e o aluno perde a oportunidade de fazer generalizações, de identificar situações semelhantes.

> A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2018, p. 265)

Outra questão preocupante é que Probabilidade, quando visto na escola, é considerado um dos conteúdos mais difíceis por grande parte dos alunos que atingem o Ensino Médio, eles chegam a esta etapa carregados de vícios ensinados. Muitos professores limitam-se apenas a aplicar fórmulas em exercícios que forçam a contextualização, sem se importarem com os conceitos que precedem ou justificam aquela fórmula. Com isso, meus alunos erram constantemente questões que envolvem Probabilidade e consideram esta disciplina uma das mais difíceis dentre as questões mais cobradas pelo ENEM. Os alunos não são ensinados ao longo da Educação Básica que a resolução de uma questão de Probabilidade pode envolver várias etapas, precisando assim de um raciocínio lógico e não da aplicação direta de uma única fórmula.

Assim, nosso objetivo neste trabalho é mostrar que a Probabilidade, assim como consta nos documentos oficiais, pode ser ensinada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, que sim, os alunos são capazes de entender, ao longo do ensino básico, conceitos matemáticos gradativamente abstratos e que com uma base conceitual sólida, é possível resolver problemas considerados difíceis, como o Paradoxo de Monty Hall. Para cumprir esse objetivo, criamos atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, com base nas habilidades descritas na BNCC, para as duas últimas etapas da educação básica: Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Dividimos esse trabalho em 4 capítulos. No Capítulo 2 abordamos o contexto histórico da Probabilidade, bem como as definições que utilizamos na elaboração das atividades.

Nos Capítulos 3, 4 e 5, apresentamos as atividades elaboradas para o ensino de Probabilidade na Educação Básica.

2 Fundamentação Teórica

As referências utilizadas neste capítulo foram Morgado et al. (1991), OBMEP (2023?b), PEREIRA, GOMES et al. (2015), PEREIRA e CAMPOS (2006) e Pereira et al. (2020).

Probabilidade é a área da matemática que estuda os fenômenos aleatórios. Mas o que são fenômenos aleatórios? Na natureza existem dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios.

- **Fenômenos Determinísticos:** são aqueles que repetidos sob as mesmas condições conduzem ao mesmo resultado. Por exemplo, o gelo começa a se transformar em água na forma líquida quando sua temperatura é igual a 0 °C (sob pressão de 1 atmosfera)[5], e sabemos também que o ponto de ebulição da água é 100 °C. Outro exemplo é o movimento de queda livre no qual os objetos abandonados a uma certa altura são acelerados pela gravidade em direção ao solo. [6].
- **Fenômenos Aleatórios:** são aqueles que realizados sob as mesmas condições não conduzem necessariamente ao mesmo resultado, por exemplo, a determinação da vida útil de um componente eletrônico, a previsão do tempo e o crescimento econômico.

A fundamentação teórica do estudo da Probabilidade tem como base a função probabilidade, que mede a chance de um resultado do experimento aleatório acontecer. Mas, antes de apresentarmos a definição da função probabilidade, precisamos definir seu domínio e para tal começamos com a definição de espaço amostral.

Definição 2.1 *O **espaço amostral** é um conjunto que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotamos o espaço amostral pela letra Ω e cada um de seus elementos pela letra ω.*

[5]https://www.todamateria.com.br/ponto-de-fusao-e-ponto-de-ebulicao/
[6]Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/queda-livre.htm

Exemplo 2.1 Por exemplo, ao lançarmos um dado, um espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Cada elemento ω do espaço amostral é chamado de **evento elementar**. De maneira geral, um *evento* é um subconjunto qualquer do espaço amostral.

Exemplo 2.2 Se $\Omega = \{1, 2, 3\}$ é o espaço amostral de um determinado experimento aleatório, então

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}$$

é o conjunto de todos os eventos de Ω.

Neste trabalho, vamos considerar Ω finito e o domínio da função probabilidade como sendo o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω. Em outras palavras, estamos admitindo que o domínio da função probabilidade é o **conjunto das partes** de Ω. Assim, a probabilidade mede todos os possíveis eventos e não apenas um resultado do experimento. Por exemplo, ao jogarmos um dado, podemos não estar interessados na chance de ocorrer um determinado resultado, por exemplo, *sair o número* 6: $\{6\}$, mas sim na chance de ocorrer o evento *sair um número par* e nesse caso precisamos ter como medir o evento $\{2, 4, 6\}$.

2.1 Definição Clássica de Laplace

Pierre Simon Laplace (1749-1827), matemático francês, foi considerado o primeiro a incluir oficialmente o estudo da probabilidade em seu trabalho. Sua obra, denominada *Theórie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica da Probabilidade), de 1812, foi responsável pela evolução do estudo da probabilidade, na época. Assim,

> Pierre Simon Laplace (1749-1827) encerra um ciclo da história das probabilidades anterior ao século XX. A sua obra *Theorie Analytique des Probabilités* (1891) concentra os avanços conseguidos à época e marca patamar no desenvolvimento do cálculo das probabilidades. A contribuição é tão forte que alguns aspectos "clássicos" do conceito de probabilidade tendem a ficar associados ao seu nome. É o caso do conceito de equipossibilidade (princípio da indiferença) na medida em que Laplace definiu a probabilidade como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos igualmente possíveis". (ALMEIDA, 2005, p. 14-15)

O que Almeida chamou de equipossibilidade (ou equiprobabilidade) é a propriedade atribuída aos espaços amostrais nos quais os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer.

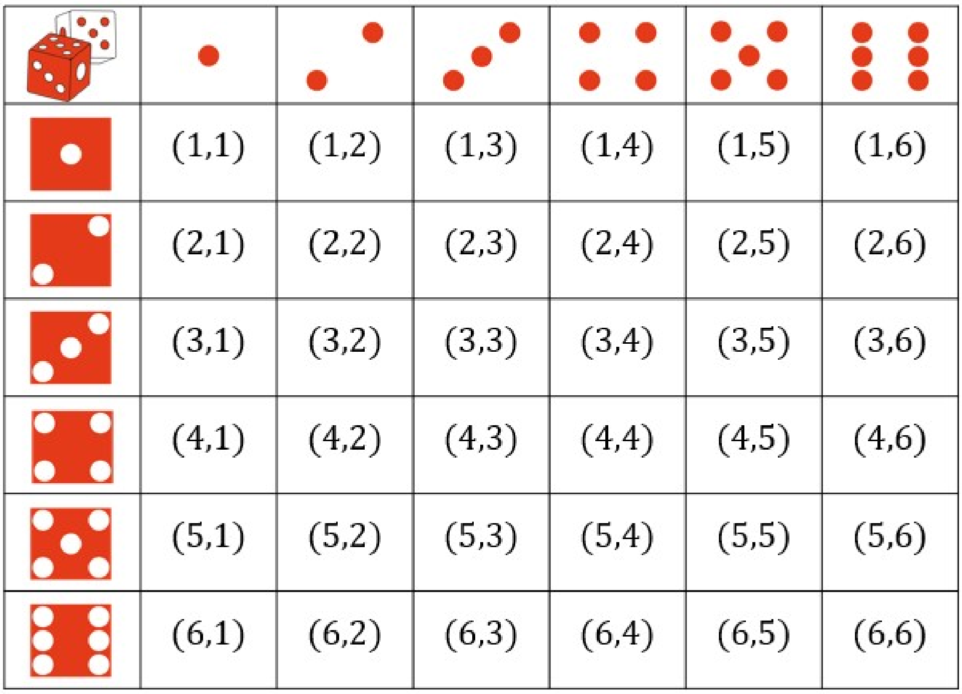
Definição 2.2 *Seja A um evento do espaço amostral finito e equiprovável $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. A probabilidade do evento A ocorrer é, segundo Laplace, o quociente:*

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.3: Dois dados são jogados simultaneamente. Calcular a probabilidade de que o maior dos dois números seja maior ou igual a 3.

Primeiramente, vamos escrever o espaço amostral do lançamento de dois dados. Construindo uma tabela com os números do 1º dado na primeira coluna e com os números do 2° dado na primeira linha, obtemos cada elemento do espaço amostral, ou seja, pares ordenados nos quais o primeiro número representa o resultado do 1º dado e o segundo número representa o resultado do 2º dado.

Figura 5: Lançamento de dois dados.



Fonte: autoria própria

Feito isto, os pares tais que o maior dentre os dois números obtidos é maior ou igual a três estão destacados na imagem a seguir.

Figura 6: Lançamento de dois dados distintos.

			(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
			(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: autoria própria

Portanto, o número daqueles nos quais o máximo é maior ou igual a 3 é 32 e a probabilidade procurada $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$.

A definição de probabilidade comumente encontrada em livros didáticos é a Clássica de Laplace, e sua fórmula é bastante aplicada em questões de exames seletivos, como por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). No entanto, a pesquisa realizada em Pereira et al. (2020), mostra que na maioria dos textos analisados, a hipótese de equiprobabilidade não é nem ao menos mencionada, como por exemplo, em Pereira et al. (2020), Seção 5.8.

2.2 Definição Frequentista

Jacques Bernoulli (1654-1705), matemático suíço, foi o responsável pelo surgimento da probabilidade na visão frequentista. Seu interesse e estudos acerca da Teoria da Probabilidade o levou a escrever a *Ars Conjectandi* (A Arte da Conjectura), em 1713, a qual aborda questões de probabilidade através problemas cívicos, morais e econômicos. Segundo Zindel (2018), Bernouli elaborou sua teoria ao imaginar um jarro repleto com 3 mil bolas brancas e 2 mil bolas pretas de onde ele retirou um número crescente de bolas, anotando com cuidado a cor de cada bola antes de devolvê-la. A retirada de um número crescente de bolas do jarro deu uma aproximação cada vez melhor da proporção entre brancas e pretas. Ele chegou a conclusão que seriam necessárias 25550 repetições para se obter a proporção $3:2$ com um erro de 2% no resultado.

Para Bernouli, isso seria uma certeza moral, ou seja, a certeza como uma questão prática, em vez da certeza absoluta, segundo Zindel (2018).

Este problema hipotético elaborado por Bernoulli acerca do jarro de pedras é considerado pela maioria dos estudiosos como a primeira tentativa de medição da incerteza e contribuiu para o estudo da probabilidade sob uma nova perspectiva onde o conceito probabilistico é definido a partir dos experimentos, surgindo assim a abordagem frequentista.

A intuição nos leva a acreditar que após um número muito grande de repetições do experimento, a frequência relativa (razão entre a quantidade de vezes em que um dado evento ocorre sobre a quantidade de vezes em que o experimento foi realizado) se aproxima de um valor constante. Ou seja, se n_A é o número de vezes em que evento A ocorreu nas n repetições do experimento, então a razão

$$f_{n,A} = \frac{n_A}{n}$$

tende a uma constante p que é, pela definição frequentista, a probabilidade do evento A ocorrer.

Embora não se fale muito sobre essa definição de probabilidade nos livros de Matemática, na Estatística ela é de fundamental importância, pois nem sempre podemos calcular a probabilidade de certos eventos, mas podemos observar a **frequência** com que esses fatos ocorrem. Podemos assim, estimar valores para questionamentos do tipo:

- Qual a probabilidade de um avião cair?
- Qual a probabilidade de que um carro seja roubado?
- Qual é a probabilidade de que um estudante, entrando numa universidade, termine seu curso?

A definição frequentista foi utilizada por muitos anos sem que o sentido do limite fosse explicitado, o que a tornava uma definição imprecisa. Foi com a formalização axiomática de Kolmogorov em 1934, que a noção intuitiva de probabilidade, como frequencia relativa para um grande número de repetições, tornou-se um conceito matemático rigoroso, segundo MAGALHÃES e NASCIMENTO (2006).

2.3 Definição Axiomática

Definição 2.3 *Seja Ω o espaço amostral. Uma função P definida para todos os subconjuntos de Ω é chamada probabilidade se satisfaz os axiomas de Kolmogorov:*

1) $0 \leq P(A) \leq 1$, *para todo evento* $A \subset \Omega$*;*
2) $P(\Omega) = 1$*;*
3) *Se A e B são eventos disjuntos, então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*.*

A partir desses axiomas, é possível demonstrar com rigor matemático diversas propriedades da função probabilidade.

2.3.1 Propriedades importantes da função probabilidade

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Demonstração: Os eventos A e A^C formam uma partição de Ω e, portanto, pelo item 3 da definição axiomática, temos

$$P(\Omega) = P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C);$$

que, com o auxílio do item 1 da definição axiomática, vem

$$1 = P(A) + P(A^C) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^C).$$

2. **$P(\emptyset) = 0$.**

Demonstração: Temos que $\emptyset = \Omega^C$, assim, pela propriedade 1:

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

3. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração: Se $A \subset B$ então o evento B pode ser escrito da seguinte maneira

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C) = A \cup (B \cap A^C).$$

Então, como a união é disjunta, vem

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^C) \geq P(A),$$

uma vez que, pelo item 1 da definição axiomática, $P(B \cap A^C) \geq 0$.

4. $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

Demonstração: Vamos escrever $A \cup B$ como a seguinte união disjunta:

$$A \cup B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) \cup (A \cap B);$$

dessa forma, segue pelo item 3 da definição axiomática

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^C) + P(B \cap A^C) + P(A \cap B). \tag{2.2}$$

Aplicando o item 2 da definição axiomática nos eventos A e B, suas probabilidades podem ser escritas da seguinte forma:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \text{ e } P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C). \tag{2.3}$$

Temos:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A).$$

2.3.2 Casos Particulares

Esse conjunto de axiomas matemáticos permitiu incluir a probabilidade clássica e a probabilidade frequentista como casos particulares da função Probabilidade.

De fato, a definição de Laplace, dada por (2.1), satisfaz os axiomas de Kolmogorov:

1) $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} \leq \dfrac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$ e, por outro lado, $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} \geq \dfrac{\#\emptyset}{\#\Omega} = 0$.

2) $P(\Omega) = \dfrac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$.

3) $P(A \cup B) = \dfrac{\#(A \cup B)}{\#\Omega}$. Como A e B são disjuntos, então $\#(A \cup B) = \#A + \#B$. Portanto, $P(A \cup B) = \dfrac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \dfrac{\#A}{\#\Omega} + \dfrac{\#B}{\#\Omega} = P(A) + P(B)$.

De maneira análoga, definição da Frequentista satisfaz cada item dos axiomas de Kolmogorov. Sejam n_A o número de vezes que o evento A ocorreu, n_B o número de vezes que o evento B ocorreu e n o número de realizações do experimento:

1) $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ e, por outro lado, $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{0}{n} = 0$.

2) $P(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_\Omega}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$.

3) $P(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{A\cup B}}{n}$. Como A e B são disjuntos, então $n_{A\cup B} = n_A + n_B$.
Portanto, $P(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A + n_B}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B)$.

Para as atividades desenvolvidas nos Capítulos 4 e 5, além da clássica e da frequentista, utilizamos outros dois exemplos de função probabilidade: a probabilidade geométrica e a probabilidade condicional.

O conceito de **probabilidade geométrica** é caracterizado por Wagner (1997) como sendo:

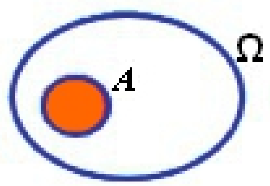
Se tivermos uma região A do plano contida em uma região Ω, admitimos que a probabilidade de um ponto de Ω também pertencer a A é proporcional à área de Ω e não depende da posição que A ocupa em Ω.

Portanto, selecionado ao acaso um ponto de Ω, a probabilidade de que ele pertença a A será o quociente entre a área A e a área total Ω, isto é,

$$P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)}.$$

conforme Figura 7.

Figura 7: Probabilidade Geométrica.



Fonte: autoria própria

Não é difícil provar que a definição de probabilidade geométrica satisfaz os axiomas de Kolmogorov:

1) $P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)} \leq \frac{Area(\Omega)}{Area(\Omega)} = 1$ e, por outro lado, $P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)} \geq 0$.

2) $P(\Omega) = \frac{Area(\Omega)}{Area(\Omega)} = 1$.

3) $P(A \cup B) = \dfrac{Area(A \cup B)}{Area(\Omega)}$. Como A e B são regiões disjuntas, então $Area(A \cup B) = Area(A) + Area(B)$. Portanto, $P(A \cup B) = \dfrac{Area(A \cup B)}{Area(\Omega)} = \dfrac{Area(A)}{Area(\Omega)} + \dfrac{Area(B)}{Area(\Omega)} = P(A) + P(B)$.

Em muitas situações, informações preliminares podem alterar as probabilidades dos eventos, por exemplo, a probabilidade de chover no final da tarde poderia ser diferente se tivéssemos informações adicionais sobre o clima do dia anterior. Essas informações adicionais são levadas em consideração no cálculo da **probabilidade condicional**.

Definição 2.4 *Dados dois eventos A e B, sendo $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado que ocorreu A é dada por*

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

Caso P(A)=0, definimos P(B|A)=P(B).

Fixado um evento A, com $P(A) \neq 0$, a probabilidade condicional $P(\cdot|A)$ satisfaz os axiomas de Kolmogorov. De fato:

1)$P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \leq \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1;$

2)$P(\Omega|A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1;$

3) Dados B e C disjuntos, temos:

$$\begin{aligned} P((B \cup C)|A) &= \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} \\ &= \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)} = P(B|A) + P(C|A). \end{aligned}$$

A função de probabilidade tem uma propriedade que se refere à indiferença no cálculo da probabilidade de um evento A frente à informação da ocorrência de um outro evento B. Essa propriedade, denominada **independência de eventos**, permite muitas vezes separar o experimento em partes mais simples de serem estudadas e, assim, possibilita uma enorme simplificação nos cálculos da probabilidade.

Definição 2.5 *Dois eventos A e B são chamados independentes se*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Uma consequência imediata desta definição é que o vazio ϕ e o espaço amostral Ω são independentes de qualquer outro evento, porque, se A é um evento, então:

$$P(A \cap \phi) = P(\phi) = 0 = P(\phi) \cdot P(A)$$

e

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega).$$

A ideia intuitiva de eventos independentes é melhor representada quando calculamos a sua probabilidade condicional. Sendo A e B eventos independentes, temos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Em palavras: Se A e B são *independentes*, então a probabilidade de A ocorrer *independe* da ocorrência de B.

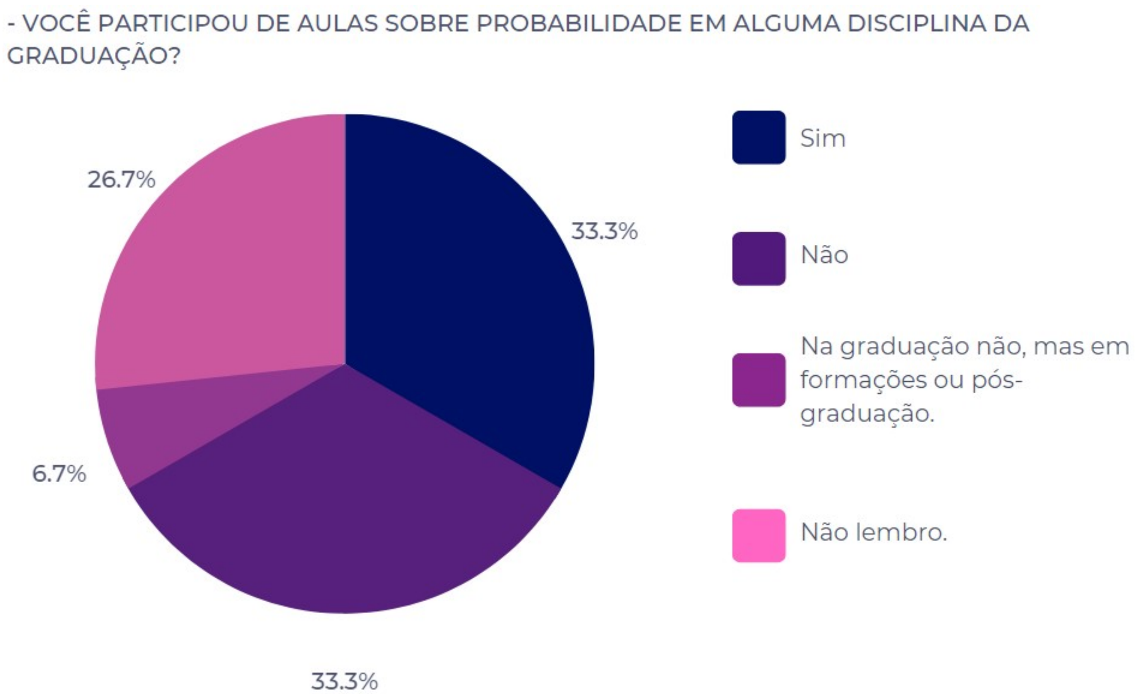
3 A Probabilidade nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

A fim de investigar o motivo pelo qual a maioria dos alunos ingressam nos Anos Finais do Ensino Fundamental sem saber os conceitos necessários para dar continuidade ao estudo de Probabilidade, elaboramos um questionário destinado aos professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, conforme o Apêndice B.

Selecionamos 3 escolas de Ceará-Mirim, uma da zona rural e duas da zona urbana, sendo duas municipais e uma estadual. No total, foram entrevistados 15 professores pedagogos, distribuídos do 1º ao 5º ano. Confira, a seguir, o resultado.

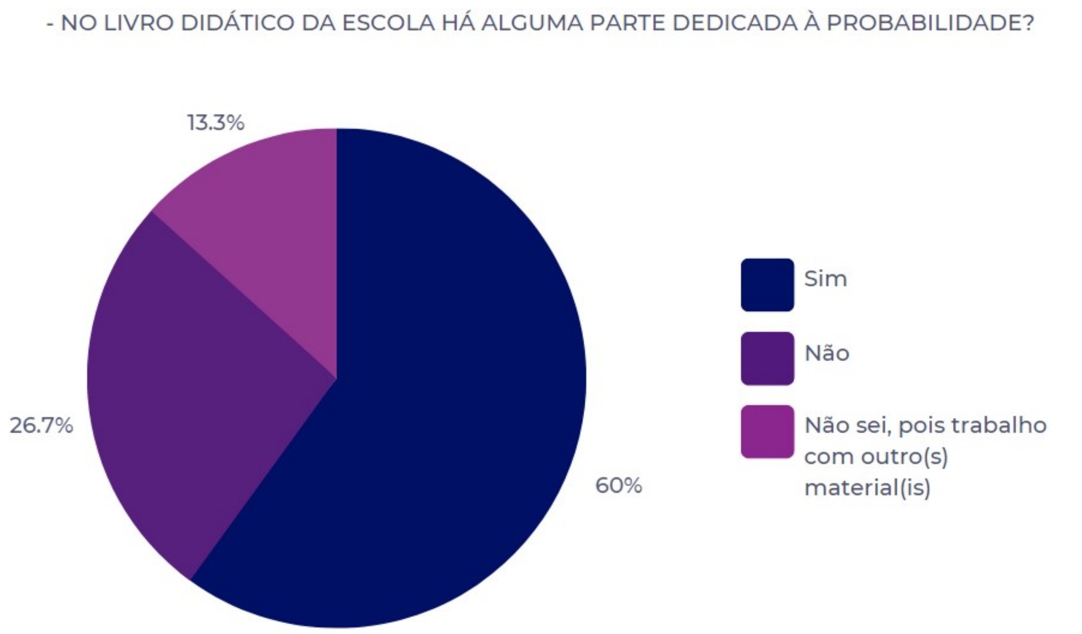
3.1 Resultado do Questionário

Figura 8: Questão 1.



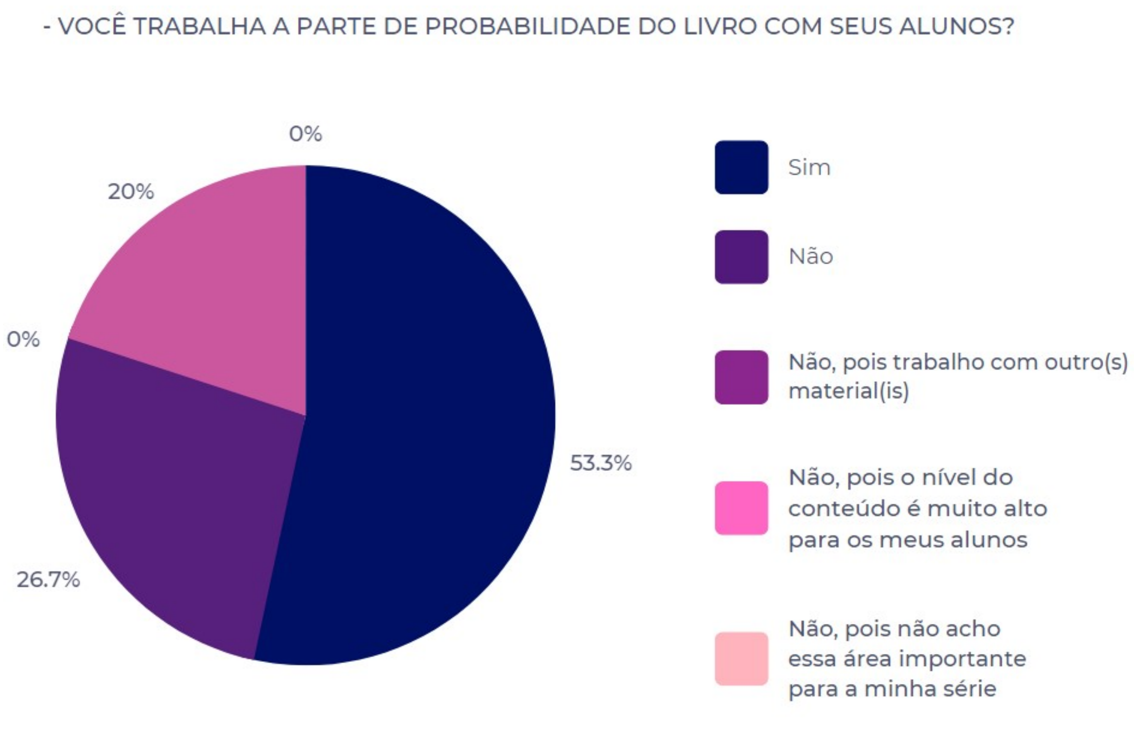
Fonte: autoria própria

Figura 9: Questão 3.



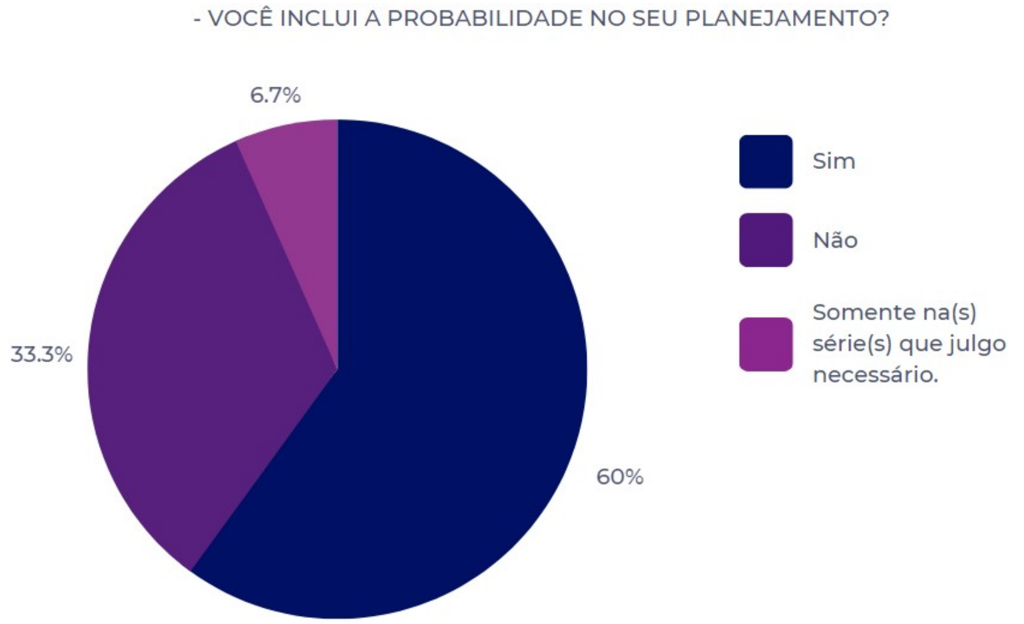
Fonte: autoria própria

Figura 10: Questão 4.



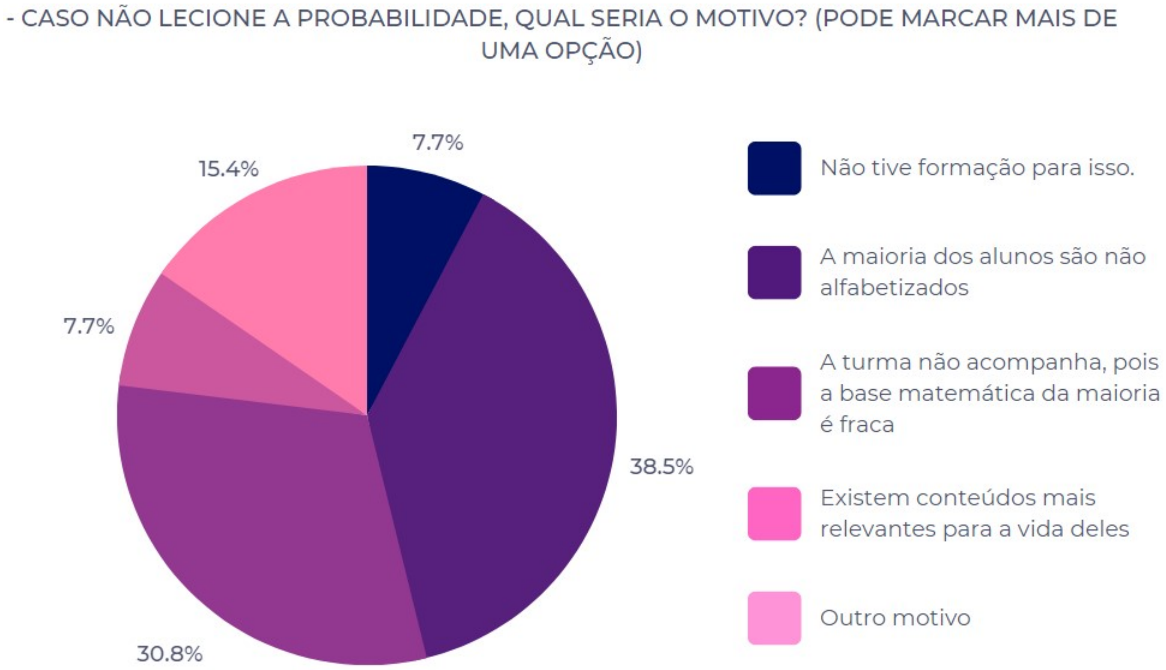
Fonte: autoria própria

Figura 11: Questão 5.



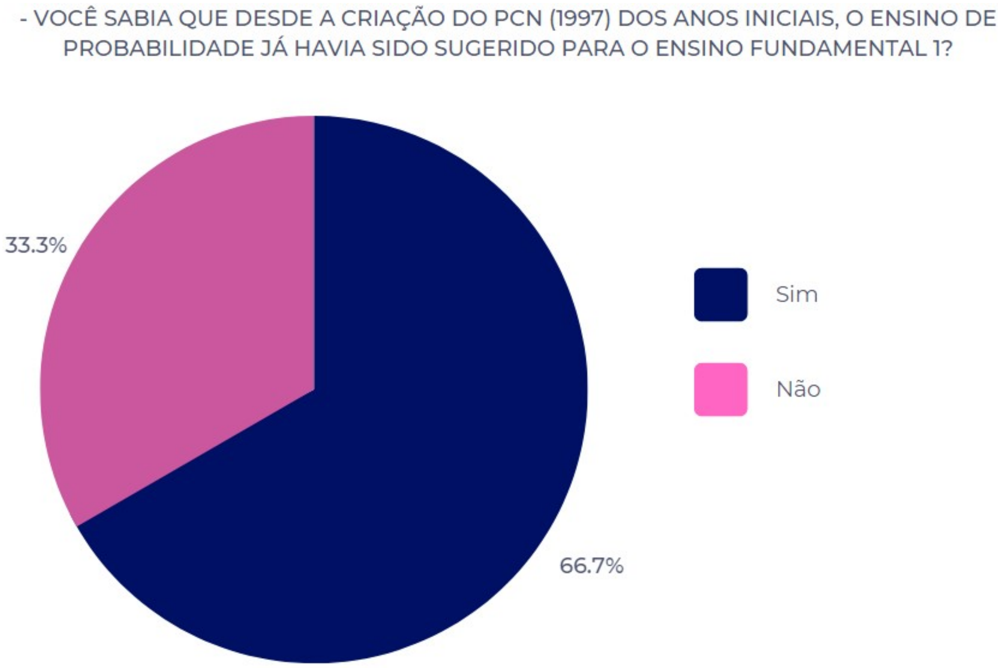
Fonte: autoria própria

Figura 12: Questão 8.



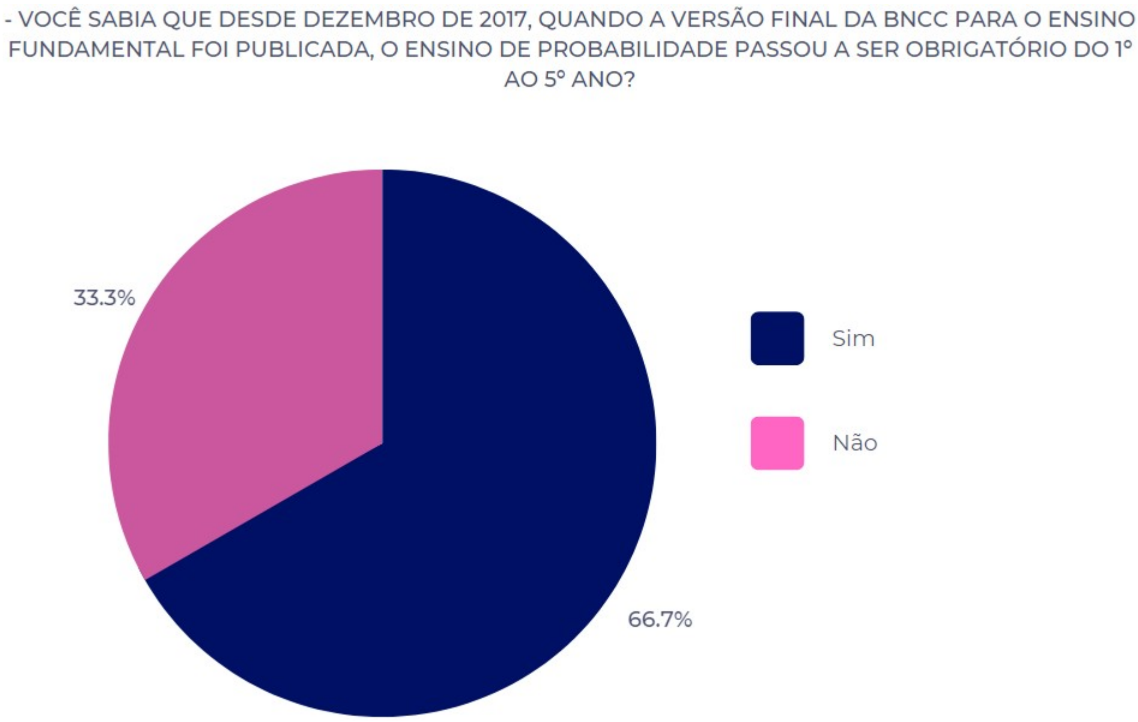
Fonte: autoria própria

Figura 13: Questão 9.



Fonte: autoria própria

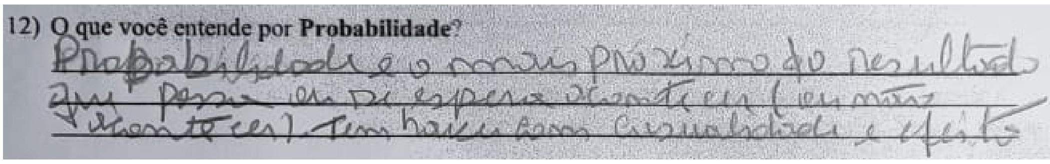
Figura 14: Questão 10.



Fonte: autoria própria

A respeito da pergunta 6) *O que você entende por Probabilidade?*, obtivemos algumas respostas interessantes:

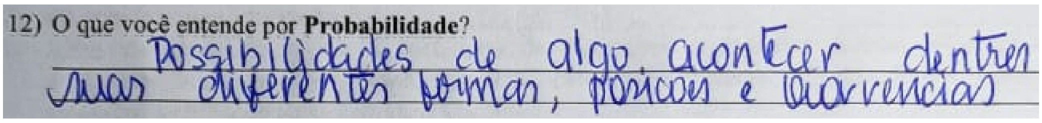
Figura 15: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
Probabilidade é o mais próximo do resultado que possa ou se espera acontecer (ou não acontecer). Tem haver com casualidade e efeito

Fonte: autoria própria

A resposta foi: Probabilidade é o mais próximo do resultado que *possa* ou se espera acontecer (ou não acontecer). Tem a ver com a casualidade e efeito.

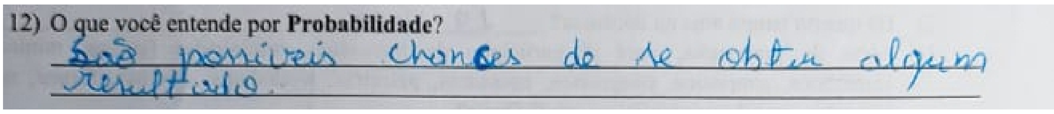
Figura 16: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
Possibilidades de algo acontecer dentre suas diferentes formas, posicões e ocorrencias

Fonte: autoria própria

A resposta foi: Possibilidade de algo acontecer dentre suas diferentes formas, posições e ocorrências.

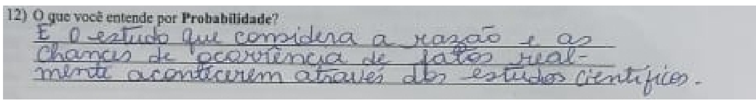
Figura 17: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
São possíveis chances de se obter algum resultado.

Fonte: autoria própria

A resposta foi: São possíveis chances de se obter algum resultado.

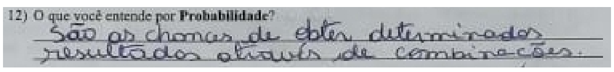
Figura 18: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
É o estudo que considera a razão e as chances de ocorrência de fatos real-mente acontecerem através dos estudos científicos.

Fonte: autoria própria

A resposta foi: É o estudo que considera a razão e as chances de ocorrência de fatos realmente acontecerem através dos estudos científicos.

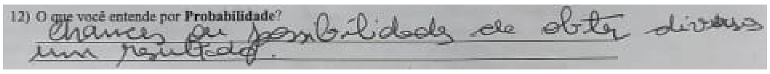
Figura 19: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
São as chances de obter determinados resultados através de combinações.

Fonte: autoria própria

A resposta foi: São as chances de obter determinados resultados através de combinações.

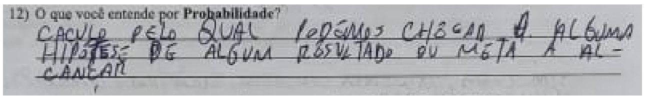
Figura 20: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
Chances ou possibilidade de obter diversos um resultado.

Fonte: autoria própria

A resposta foi: Chances ou possibilidades de diversos resultados.

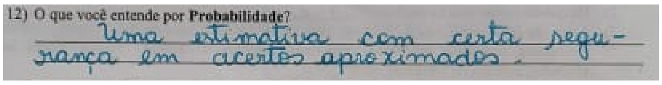
Figura 21: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
CALCULO PELO QUAL PODEMOS CHEGAR A ALGUMA HIPÓTESE DE ALGUM RESULTADO OU META A AL-
CANÇAR

Fonte: autoria própria

A resposta foi: Cálculo pelo qual podemos chegar a alguma hipótese de algum resultado ou meta a alcançar.

Figura 22: Resultado da pesquisa com professores dos anos iniciais.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
Uma estimativa com certa segu-
rança em acertos aproximados.

Fonte: autoria própria

A resposta foi: Uma estimativa com certa segurança em acertos aproximados.

Figura 23: Resultado da pesquisa com professores polivalentes.


12) O que você entende por **Probabilidade**?
O resultado aproximado

Fonte: autoria própria

A resposta foi: O resultado aproximado.

Diante das respostas apresentadas, nota-se que nenhum professor entrevistado define a Probabilidade como a área da Matemática que estuda os fenômenos aleatórios.

3.2 Atividades

Nessa seção, apresentamos uma sugestão de atividade para a introdução do conteúdo de Probabilidade nas turmas do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Todas as questões foram construídas com o objetivo de desenvolver as habilidades que constam na BNCC, descritas na Tabela 1.

Antes de ensinar ao aluno uma fórmula pronta para determinar a probabilidade de um certo evento ocorrer, é importante que o professor, inicialmente, apresente os conceitos e realize experimentos aleatórios para que o o estudante aprenda de maneira intuitiva como construir todas as possibilidades para depois estimar ou calcular a probabilidade do evento ocorrer.

> Este enfoque permite a confrontação dos dois principais pontos de vista quando definimos uma probabilidade: o ponto de vista clássico ou laplaciano e o ponto de vista frequentista. Nestas condições, a construção do conceito pelo aluno é feita de forma a que ele tenha menos possibilidades de mobilizá-los fora do seu domínio de validade, ou seja, com menos possibilidades de que este conceito torne-se um obstáculo para aprendizados futuros no domínio do Cálculo de Probabilidades. (COUTINHO, 2005)

3.2.1 Orientações didáticas

Público Alvo

Alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Recursos

- 2 dados montáveis em EVA, conforme a figura.
- Lápis grafite ou lapiseira, caneta esferográfica.

Figura 24: Dado montável em EVA como recurso didático.

Fonte: https://www.bambinno.com.br/tapete-tatame-eva-infantil-de-atividades-emborrachado-10-pcs/p

Metodologia

- Introduzir tema com exemplo do cotidiano;
- Exposição do conteúdo seguido de explicação do mesmo;
- Atividade impressa para anotar resultados do experimento;
- Lousa e pincel.

Habilidades trabalhadas (segundo a BNCC)

- (EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como "acontecerá com certeza", "talvez aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.
- (EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como "pouco prováveis", "muito prováveis", "improváveis" e "impossíveis".
- (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
- (EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
- (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
- (EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

3.2.2 Proposta de atividades

O dado montável em EVA será utilizado como recurso didático em todas as questões, mesmo que destinadas a diferentes séries. As três primeiras questões, que remetem aos 1º, 2º e 3º anos, foram embasadas nas habilidades EF01MA20, EF02MA21 e EF03MA25.

Nas três primeiras questões, as faces do dado serão enumeradas de 1 a 6.

Questão 1: Ao lançar o dado, quando ele cair, o número 1, na face virada para cima,

a) ( ) acontecerá com certeza.
b) ( ) talvez aconteça.
c) ( ) é impossível de acontecer.

O professor poderá modificar a questão alterando o número desejado na face virada para cima. Por exemplo, o número 7, nesse caso, é **impossível de acontecer**.

Questão 2: Ao lançar o dado, quando ele cair, um número maior que 2, na face virada para cima, é

a) ( ) pouco provável de acontecer.
b) ( ) muito provável de acontecer.
c) ( ) impossível de acontecer.

Um exemplo **pouco provável** de acontecer seria obter um número menor que 3.

Questão 3: Ao lançar o dado, quais são todos os possíveis resultados?

Também é recomendado que o professor pergunte aos alunos exemplos do cotidiano que se encaixem nestas habilidades.

Figura 25: Exemplo de dado enumerado, de EVA, para montar.

Fonte: https://www.bambinno.com.br/tapete-tatame-eva-infantil-de-atividades-emborrachado-10-pcs/p

As questões a seguir, que remetem aos 4º e 5º anos, foram embasadas nas habilidades EF04MA26, EF05MA22 e EF05MA23.

Nas questões 4 e 5, o professor deverá alterar o dado, encaixando 4 faces *pares* e 2 faces *ímpares*, por exemplo.

Questão 4: Lançando o dado, qual resultado tem mais chance de ocorrer: um número par ou um número ímpar?

a) ( ) par.
b) ( ) ímpar.

Questão 5: Ainda sobre a questão anterior, justifique por que você acha que esse evento é o mais provável.

Questão 6: Escreva o espaço amostral do:

a) lançamento de um dado enumerado de 1 a 6:
b) lançamento de 2 dados, ambos enumerados de 1 a 6:

Questão 7: Do experimento aleatório realizado anteriormente, os resultados são igualmente prováveis? Justifique.

Questão 8: Considere os dois experimentos da **questão 6**. Determine a probabilidade de todos os resultados possíveis do

a) lançamento de 1 dado:
b) lançamento de 2 dados:
c) Todos eles têm a mesma chance de ocorrer (são equiprováveis)?

Na próxima questão, o professor deverá construir um dado com duas faces contendo o número 1 e as demais quatro faces com números todos distintos (inclusive distintos do 1).

Questão 9: Ao lançar o dado, todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer? Então esse espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Por quê?

4 A Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Em meus anos de sala de aula no Ensino Médio, constatei que os alunos chegam a essa etapa sem saberem os conceitos de Probabilidade que deveriam ter aprendido no Ensino Fundamental, e os poucos que demonstram algum conhecimento se restringem a aplicação direta de uma fórmula pronta.

Com o objetivo de mudar essa realidade, dando continuidade às atividades propostas no capítulo anterior, desenvolvi atividades práticas em minha turma do 7º ano com o uso do material concreto elaborado em oficina pelos próprios alunos. Os materiais confeccionados serviram de instrumento para a realização de experimentos aleatórios repetidos sucessivamente sob as mesmas condições, pois "ao observarem a freqüência de ocorrência de um acontecimento, ao longo de um grande número de experiências, desenvolvem suas primeiras noções de probabilidade", segundo Brasil (1997, p. 58).

Para as atividades propostas foi necessária uma revisão de temas, como: conjunto, par ordenado, elementos e área do círculo, e reta perpendicular ao plano, conforme o Apêndice D.

4.1 Atividades Desenvolvidas

Nesta seção, apresentamos um plano de aula como sugestão para a o estudo dos temas de Probabilidade: fenômenos aleatórios ou determinísticos e, principalmente, espaço amostral, para turmas do 7º ano, podendo ser aplicado também no 6º ano. Desenvolvemos uma oficina como fator instigante para o aprendizado da matéria.

4.1.1 Orientações Didáticas

Objetivos

- Compreender o conceito de experimentos aleatórios a partir de uma atividade lúdica;
- Compreender o conceito de espaço amostral;
- Identificar todos os elementos de um espaço amostral;
- Compreender o conceito de experimento elementar;

Público Alvo

Alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Recursos

- Cartolina guache branca;
- Lápis grafite ou lapiseira, caneta esferográfica;
- Tinta guache, lápis de cor, giz de cera, caneta hidrográfica;
- Compasso e transferidor 360° (ou semi transferidor de 180°);
- Moedas.

Duração

Quatro aulas.

Metodologia

- Apresentação do contexto histórico do conteúdo;
- Revisão de conteúdos pré-requisitos;
- Exposição do conteúdo seguido de explicação;
- Atividade impressa para anotar resultados do experimento;
- Lousa, pincel, computador e data-show.

Habilidades trabalhadas (segundo a BNCC)

- (EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

- (EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do $1^{\underline{o}}$ quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

4.1.2 Aplicação da Atividade

A atividade, na prática, se resume a lançar uma moeda e soltar uma vareta, e foi aplicada em quatro aulas:

Aula 1

Na primeira etapa, explanei, com o auxílio da lousa e da multimídia, o contexto histórico da Teoria da Probabilidade e do surgimento dos primeiros jogos de azar a fim de instigar a curiosidade dos alunos, pois, segundo Chaquiam (2017) "a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula".

Na segunda etapa, demonstrei na lousa e/ou multimídia os conteúdos que são pré-requisitos, conforme o apêndice D.

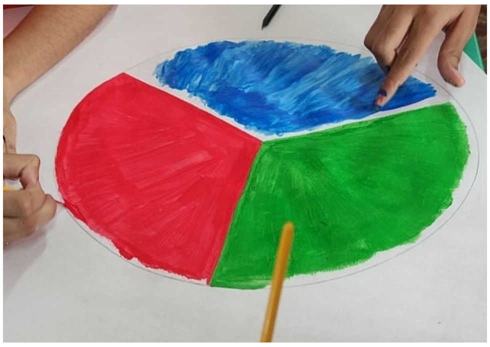
Na terceira etapa, dividi a turma em dois grupos (preferencialmente, com a mesma quantidade de alunos em cada grupo): o Grupo 1 ficou responsável pelo experimento *lançar uma moeda* e o Grupo 2 ficou responsável pelo experimento *soltar uma vareta*. Para o experimento soltar uma vareta foi necessário a confecção de uma roleta dividida em três partes iguais, cada uma de uma cor.

Na quarta etapa, entreguei uma moeda para cada um dos integrantes do Grupo 1 e o material necessário para a construção da roleta para cada participante do Grupo 2, inclusive as varetas.

Figura 26: Construindo o círculo com o compasso.

Fonte: Próprio autor

Figura 27: Confecção da roleta de 3 cores.

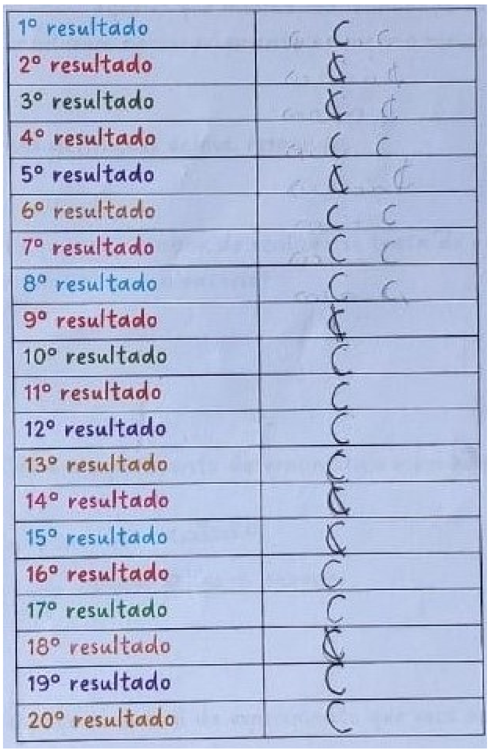


Fonte: Próprio autor

Aula 2

Agora, na Aula 2, na quinta etapa, os alunos receberam as atividades impressas (ver anexo), realizaram os respectivos experimentos e anotaram os resultados na tabela.

Figura 28: Resultado dos alunos - Lançamento de moedas.



Fonte: Próprio autor

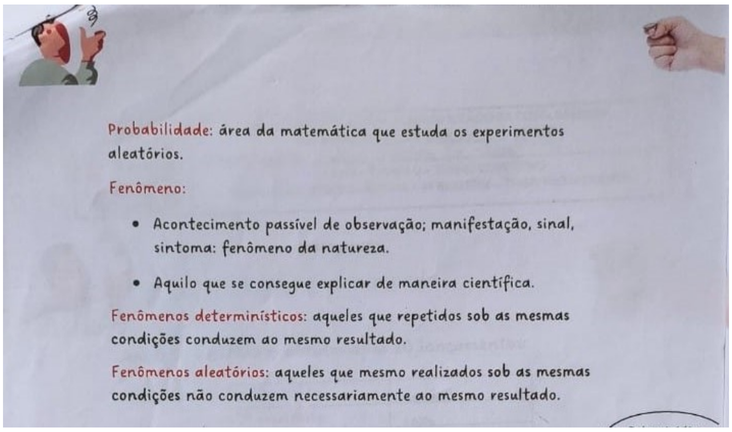
Figura 29: Resultado dos alunos - Soltando a vareta.

1º resultado	vermelho
2º resultado	azul
3º resultado	vermelho
4º resultado	amarelo
5º resultado	vermelho
6º resultado	azul
7º resultado	vermelho
8º resultado	amarelo
9º resultado	vermelho
10º resultado	azul
11º resultado	vermelho
12º resultado	vermelho
13º resultado	vermelho
14º resultado	vermelho
15º resultado	vermelho
16º resultado	amarelo
17º resultado	amarelo
18º resultado	vermelho
19º resultado	azul
20º resultado	amarelo

Fonte: Próprio autor

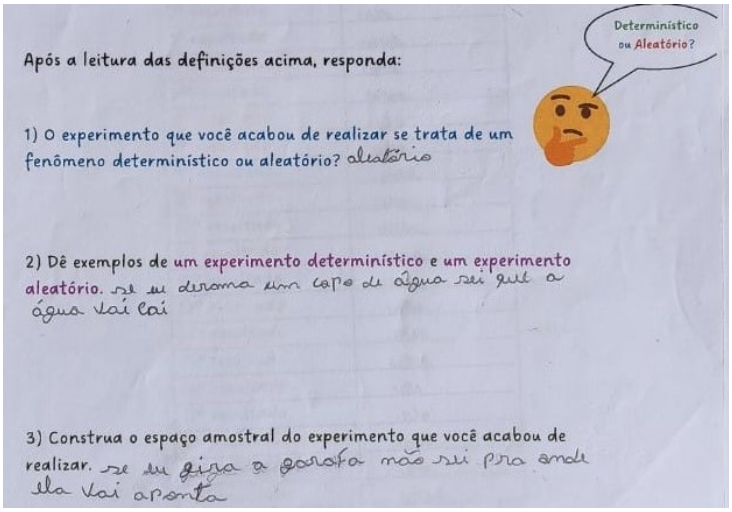
Na atividade impressa, além da tabela, constam as definições de Probabilidade, fenômenos determinísticos e aleatórios, espaço amostral e um questionário a ser respondido pelos alunos. Na sexta etapa, expliquei esses conceitos para, na sequência, os alunos responderem as questões.

Figura 30: Exemplo dos conceitos inseridos na 2ª parte da 1ª atividade impressa.



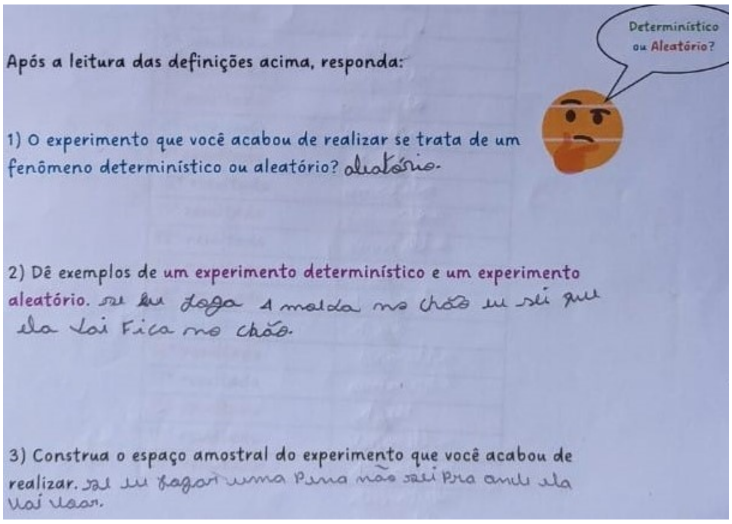
Fonte: Próprio autor

Figura 31: Resolução dos alunos.



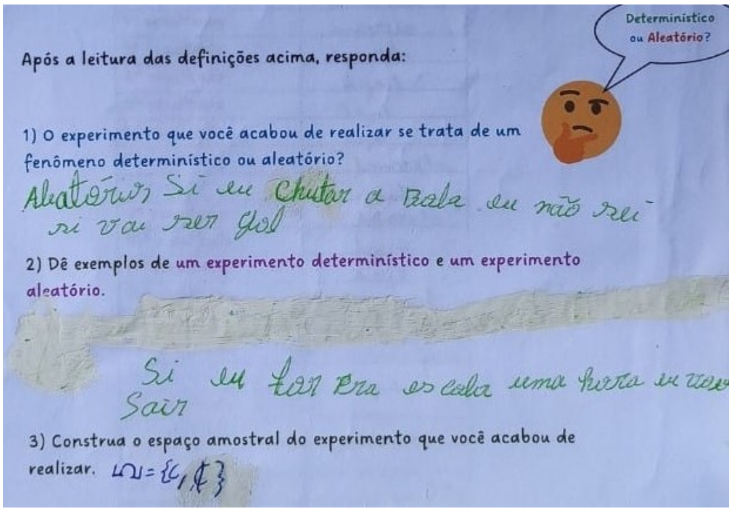
Fonte: Próprio autor

Figura 32: Resolução dos alunos.



Fonte: Próprio autor

Figura 33: Resolução dos alunos.



Fonte: Próprio autor

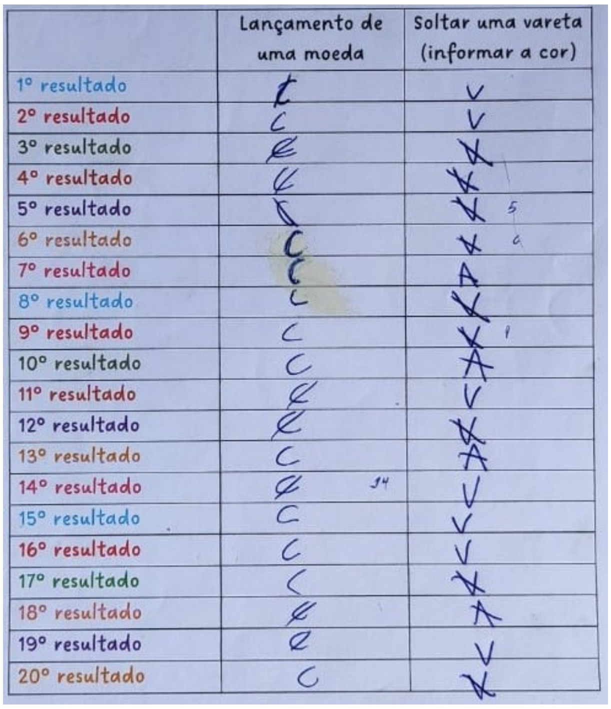
Na sétima etapa, a turma se dividiu em duplas, e cada uma delas foi formada da seguinte forma: um aluno que ficou responsável pelo lançamento da moeda e um aluno que ficou responsável por soltar a vareta. Feito isto, cada dupla realizou o experimento *lançar a moeda* **e** *soltar a vareta.*

Figura 34: Experimento aleatório: lançar a moeda **e** soltar a vareta.

Fonte: Próprio autor

Na oitava etapa, os alunos anotaram o resultado de cada realização do experimento em uma tabela, agora com duas colunas.

Figura 35: Resultados do experimento aleatório: lançar uma moeda e soltar uma vareta.



	Lançamento de uma moeda	Soltar uma vareta (informar a cor)
1º resultado	t	V
2º resultado	C	V
3º resultado	C	V
4º resultado	C	V
5º resultado	C	V 5
6º resultado	C	V a
7º resultado	C	A
8º resultado	C	V
9º resultado	C	V
10º resultado	C	A
11º resultado	C	V
12º resultado	C	V
13º resultado	C	A
14º resultado	C 14	V
15º resultado	C	V
16º resultado	C	V
17º resultado	C	V
18º resultado	C	A
19º resultado	C	V
20º resultado	C	V

Fonte: Próprio autor

Figura 36: Resultados do experimento aleatório: lançar uma moeda e soltar uma vareta.

	Lançamento de uma moeda	Soltar uma vareta (informar a cor)
1º resultado	c	~~A~~
2º resultado	~~c~~	~~A~~
3º resultado	c	A
4º resultado	~~c~~	V
5º resultado	c	~~A~~
6º resultado	c	V
7º resultado	~~c~~	A
8º resultado	~~c~~	~~A~~
9º resultado	~~c~~	~~A~~
10º resultado	c	A
11º resultado	~~c~~	~~A~~
12º resultado	~~c~~	A
13º resultado	~~c~~	~~A~~
14º resultado	~~c~~	A
15º resultado	~~c~~	V
16º resultado	C	~~A~~
17º resultado	c	~~A~~
18º resultado	C	V
19º resultado	~~c~~	A
20º resultado	~~c~~	~~A~~

Fonte: Próprio autor

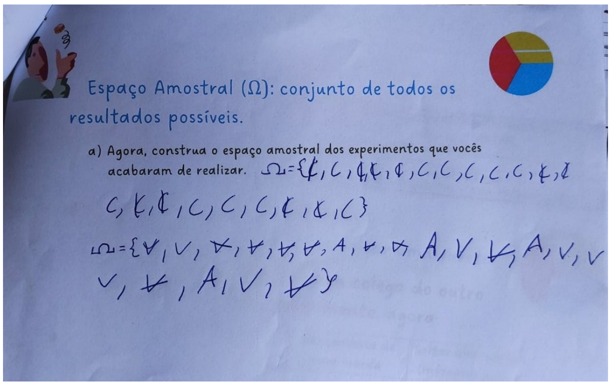
Figura 37: Resultados do experimento aleatório: lançar uma moeda e soltar uma vareta.

	Lançamento de uma moeda	Soltar uma vareta (informar a cor)
1º resultado	Cara	Azul
2º resultado	Coroa	Azul
3º resultado	Conoa	vende
4º resultado	Coroa	venmelho
5º resultado	Cara	vende
6º resultado	Cona	vende
7º resultado	Cara	Azul
8º resultado	Cara	vende
9º resultado	Coroa	venmelho
10º resultado	Coroa	vendo
11º resultado	Cara	vende
12º resultado	Cora	Azul
13º resultado	Cono	venmelho
14º resultado	Conoa	Azul
15º resultado	Conoa	Azul
16º resultado	Conoa	Azul
17º resultado	Cona	venmelho
18º resultado	Cora	Azul
19º resultado	Conoa	vende
20º resultado	Cona	Azul

Fonte: Próprio autor

Na nona etapa, cada dupla anotou o espaço amostral do experimento. Nesta etapa, os alunos tiveram dificuldade em registrar os resultados observados.

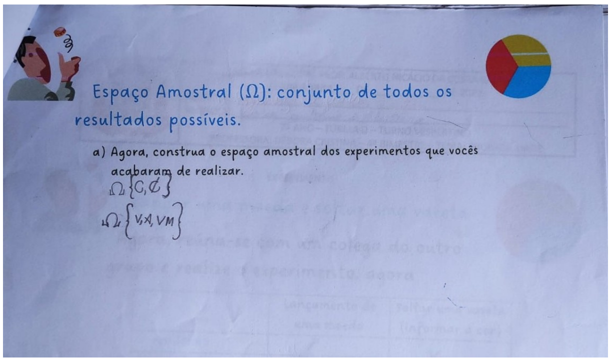
Figura 38: Resolução da dupla.



Fonte: Próprio autor

A dupla respondeu o item de forma incorreta. Nesta resposta os alunos tiveram dificuldade em registrar os possíveis resultados do experimento. Eles construíram dois espaços amostrais, um com os resultados do lançamento da moeda e o outro com as cores obtidas soltando a vareta.

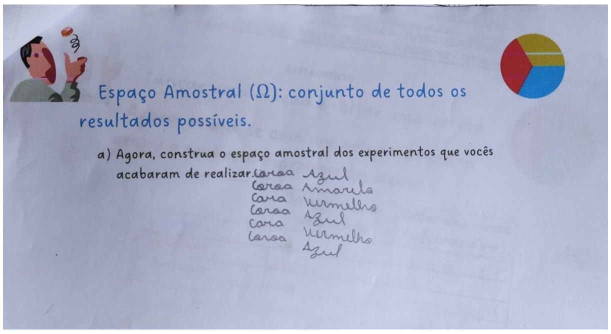
Figura 39: Resolução da dupla.



Fonte: Próprio autor

A reposta dada pela dupla mostra que eles consideraram a questão como se estivessem realizado dois experimentos. Assim concluímos que os alunos não entenderam que em um único experimento podem ser utilizado dois objetos para um único evento.

Figura 40: Resolução da dupla.



Fonte: Próprio autor

A resposta dada pela dupla está incompleta, mas é perceptível que eles entenderam que se tratava de um único experimento. Entretanto, esqueceram de escrever o símbolo Ω juntamente com a notação de conjuntos e de par ordenado.

Os erros nas respostas ilustram de forma indelével que está havendo algum problema entre o observar e o registrar. Essa falta de comunicação entre estas duas habilidades impossibilitam qualquer estudo da probabilidade, uma vez que probabilidade nada mais é que uma função que vai medir a chance do evento ocorrer. Se não conseguimos expressar os eventos, não tem como medir sua chance de ocorrência.

5 A Probabilidade no Ensino Médio

As referências utilizadas neste capítulo foram Mlodinow (2008, p. 43), OBMEP (2023?a), SAVANT (1990) e SAVANT (1996).

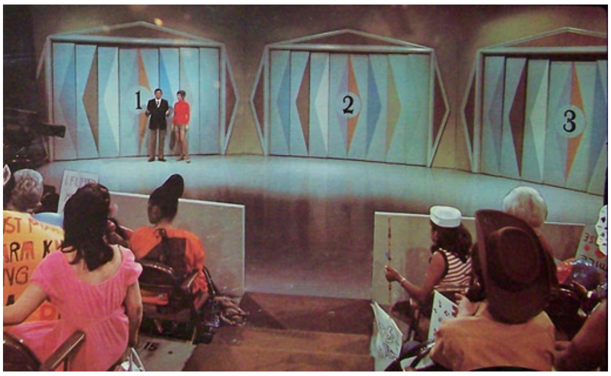
Nosso objetivo nesse capítulo é mostrar que, se os conceitos de Probabilidade forem trabalhados desde os anos iniciais, ao chegar no Ensino Médio, o aluno será capaz de resolver problemas intrigantes como o Paradoxo de Monty Hall. Verá que não se trata da aplicação direta de uma fórmula, mas sim de um raciocínio construído a partir do conceito básico e abstrato, de **espaço amostral**.

5.1 Entendendo o Paradoxo de Monty Hall

Em um jogo de programa de televisão, o participante deve escolher uma de três portas disponíveis, sabendo que uma delas esconde um carro e as outras duas escondem, cada uma, um bode. Após o convidado escolher uma das portas e ela permanecer fechada, o apresentador, ciente de todos os itens que possuem atrás das portas, abre uma das outras duas que contém um bode. Prontamente, pergunta ao jogador se ele vai optar por trocar ou permanecer com a porta escolhida. Neste problema, a dúvida que paira é a seguinte: o jogador possuiria mais chance de ganhar o prêmio realizando a troca? Fazer isso seria mais vantajoso? Então, qual a probabilidade de o participante acertar a porta na qual o veículo se encontra?

Esta pergunta surgiu no famoso programa de auditório televisivo *Let's Make a Deal* (Vamos fazer um negócio?), transmitida entre os anos de 1963 a 1971, nos Estados Unidos, cujo apresentador era o Monte Halparin, comumente conhecido como Monty Hall.

Figura 41: Programa Let´s Make a Deal.

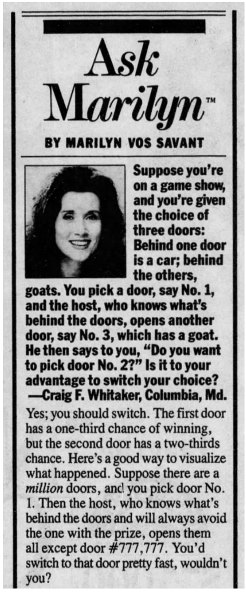


FONTE: https://devlinsangle.blogspot.com/2017/10/monty-hall-may-now-rest-in-peace-but.html

O problema intrigou vários especialistas da área e inclusive os induziu ao erro porque a tendência é que, em geral, as pessoas assumam que não há diferença entre ambas as escolhas, todas levarão ao mesmo resultado: 50% de chance. Depois de aberta uma porta que contém o bode, que a mudança de porta não influenciará no resultado, já que, como se tratam apenas de duas portas, a possibilidade de vitória, claramente, é de 50%. Ou seja, optam por não mudar de ideia devido a esta conclusão precipitada e aumentam a chance de saírem sem o prêmio. O que é considerado contraditório é acreditar que, trocando de porta, as chances de acertar o prêmio dobrarão.

O problema se tornou destaque após setembro de 1990, mais de 25 anos após a primeira transmissão do programa *Let's make a deal* quando a colunista Marylin Vos Savant, em seu espaço na revista *Parade Magazine*, afirmou que seria mais vantajoso para o candidato trocar de porta, pois assim sua chance de conquistar o prêmio aumentaria para, aproximadamente, 66%. A matéria foi tão extraordinária que se tornou capa do The New York Times no mesmo mês divulgação na revista. Essa solução se tornou problemática entre os matemáticos experientes da época, que entraram em contato com Marylin alegando que não concordavam com sua resposta absurda. Com muita sabedoria e sensatez, Marylin buscou ajuda de profissionais da educação que atuavam em Escolas de Ensino Médio e propôs que estes desafiassem seus alunos, em sala de aula, a resolverem o problema e, como ela esperava, praticamente 100% dos estudantes chegaram a mesma conclusão que ela, validando sua constatação. Mais tarde, toda essa história é contada por *Savant* em *The power of logical thinking* (SAVANT, 1996). Nela, vos Savant explica ainda as suas hipóteses e raciocínio.

Figura 42: Marilyn Vos Savant.



Ask Marilyn™

BY MARILYN VOS SAVANT

Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you, "Do you want to pick door No. 2?" Is it to your advantage to switch your choice?
—Craig F. Whitaker, Columbia, Md.

Yes; you should switch. The first door has a one-third chance of winning, but the second door has a two-thirds chance. Here's a good way to visualize what happened. Suppose there are a *million* doors, and you pick door No. 1. Then the host, who knows what's behind the doors and will always avoid the one with the prize, opens them all except door #777,777. You'd switch to that door pretty fast, wouldn't you?

Fonte: https://www.newspapers.com/clip/87196585/the-monty-hall-problem/

5.2 Atividades Desenvolvidas

A escolha do Paradoxo de Monty Hall como atividade para os estudantes do Ensino Médio foi feita não apenas por se tratar de um problema intrigante, mas principalmente por não termos encontrado nas inúmeras soluções disponíveis, alguma que fosse desenvolvida a partir da construção do espaço amostral. A solução apresentada se baseia inicialmente no conceito de espaço amostral, mas percorre vários outros temas de Probabilidade listados pela BNCC para essa etapa de ensino, como: Probabilidade de Laplace, equiprobabilidade, eventos independentes e Probabilidade Condicional, além de abordar também o Princípio Fundamental da Contagem. Assim, os alunos aprenderão o tema de forma lúdica e divertida, sendo guiados passo a passo a aplicarem os conceitos teóricos previamente estudados em um problema desafiador.

5.2.1 Orientações Didáticas

Público Alvo

Alunos do Ensino Médio.

Recursos

- Projetor multimídia;

- Lousa e pincel;
- Lápis grafite ou lapiseira, caneta esferográfica;
- Atividades impressas.

Duração

Quatro aulas.

Metodologia

- Revisar temas anteriores;
- Introduzir tema com o contexto histórico e exemplo do cotidiano;
- Exposição do conteúdo seguido de explicação;
- Atividade impressa para anotar resultados do experimento e do problema;
- Lousa e pincel.

Habilidades trabalhadas (segundo a BNCC)

- (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
- (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

5.2.2 Aplicação da Atividade

Esta atividade foi aplicada em uma turma da 1ª série do Ensino Médio e dividida em quatro momentos:

1º) Relembrar conceitos de probabilidade das séries anteriores;

2º) Atividade: Escrever espaço amostral do lançamento de um dado e de uma moeda simultaneamente, com o objetivo de entenderem o conceito de espaço amostral;

3º) Apresentar o Problema de Monty Hall;

4º) Atividade: escrever o espaço amostral do Problema de Monty Hall e, a partir daí, inferir sua solução.

Primeiro Momento - Aula 1

Como a maioria da turma não se lembrou ou afirmou não ter tido contato com Probabilidade nas séries anteriores, relembrei, através das definições e de vários exemplos, os conceitos necessários para o desenvolvimento da atividade:

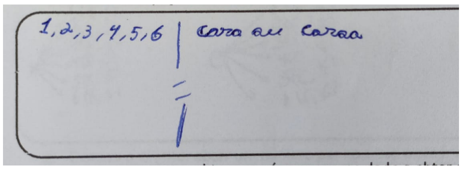
- fenômenos determinísticos e aleatórios;
- definição de Probabilidade;
- espaço amostral;
- eventos;
- espaços amostrais equiprováveis;
- probabilidade Clássica de Laplace;
- notação matemática;
- par ordenado.

Feito isto, foi solicitado que os alunos também apresentassem seus exemplos.

Segundo Momento - Aula 2

Nesse segundo momento, foram entregues atividades impressas para cada aluno e foram distribuídas moedas e dados sobre uma mesa, a fim de que eles descrevessem o espaço amostral do lançamento simultâneo de uma moeda e um dado.

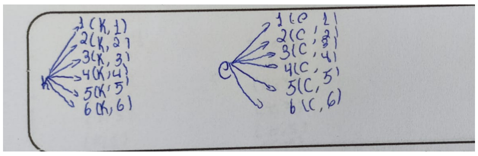
Figura 43: Resolução dos alunos: escrever o espaço amostral do lançamento de um dado e de uma moeda.



Fonte: autoria própria

A reposta dada pelo aluno mostra que ele considera a questão como se estivessem sendo realizados dois experimentos. Assim concluímos que o aluno não entendeu que em um único experimento podem ser utilizados dois objetos para um único evento.

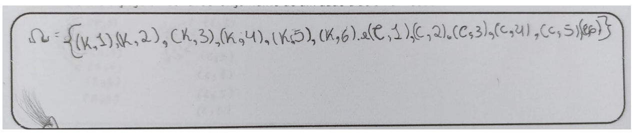
Figura 44: Resolução dos alunos: escrever o espaço amostral do lançamento de um dado e de uma moeda.



Fonte: autoria própria

A resposta dada pelo aluno mostra que ele entendeu que em um único experimento podem ser utilizados dois objetos para um único evento e escreveu todo o espaço amostral de maneira correta, embora não tenha utilizado a notação matemática de conjuntos.

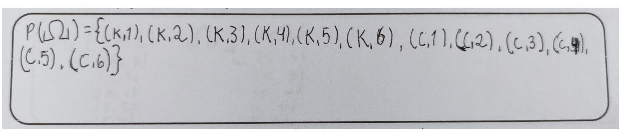
Figura 45: Resolução dos alunos: escrever o espaço amostral do lançamento de um dado e de uma moeda.



Fonte: autoria própria

A resposta dada pelo aluno mostra que ele entendeu que em um único experimento podem ser utilizados dois objetos para um único evento e escreveu todo o respaço amostral de maneira correta, utilizado corretamente a notação matemática de conjuntos.

Figura 46: Resolução dos alunos: escrever o espaço amostral do lançamento de um dado e de uma moeda.



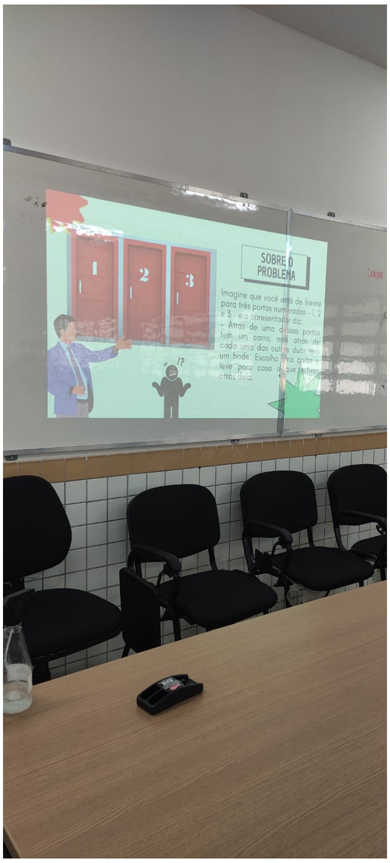
Fonte: autoria própria

Nessa resposta, o aluno confundiu o Ω com a probabilidade de Ω, escrevendo $P(\Omega)$ como a representação do conjunto de todos os resultados possíveis. No entanto, escreveu corretamente cada um dos elementos de Ω.

Terceiro Momento - Aula 3 - Apresentando o problema de Monty Hall

No terceiro momento, foram ministrados os conceitos de eventos independentes e de probabilidade condicional, para auxiliar no cálculo da probabilidade do Problema de Monty Hall. Na sequência foi apresentado aos alunos o Problema de Monty Hall e seu contexto histórico.

Figura 47: Apresentação do Problema de Monty Hall.



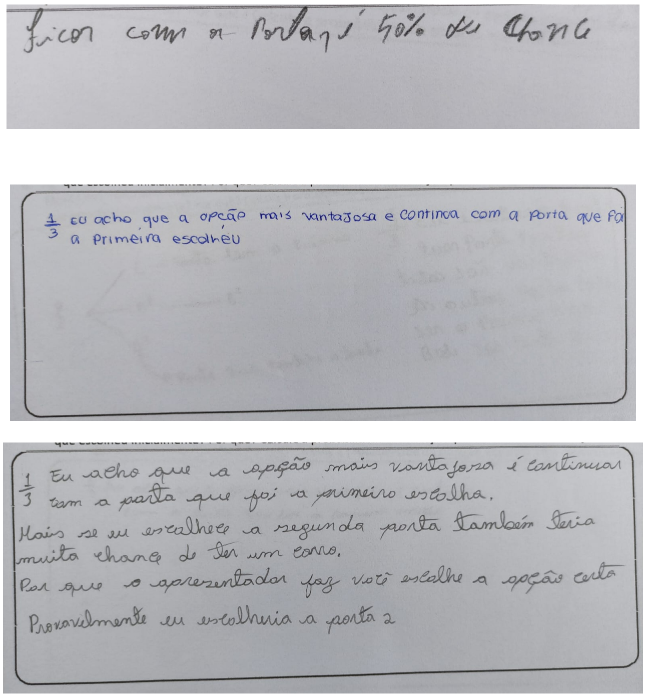
Fonte: autoria própria

Após isso, foi solicitado que os alunos respondessem se era mais vantajoso permanecer com a porta selecionada inicialmente ou se era mais vantajoso trocar de opção. A sala ficou bem dividida, uns responderam que era melhor permanecer com a porta do início, outros acharam mais vantajoso trocar.

Quarto Momento - Aula 4

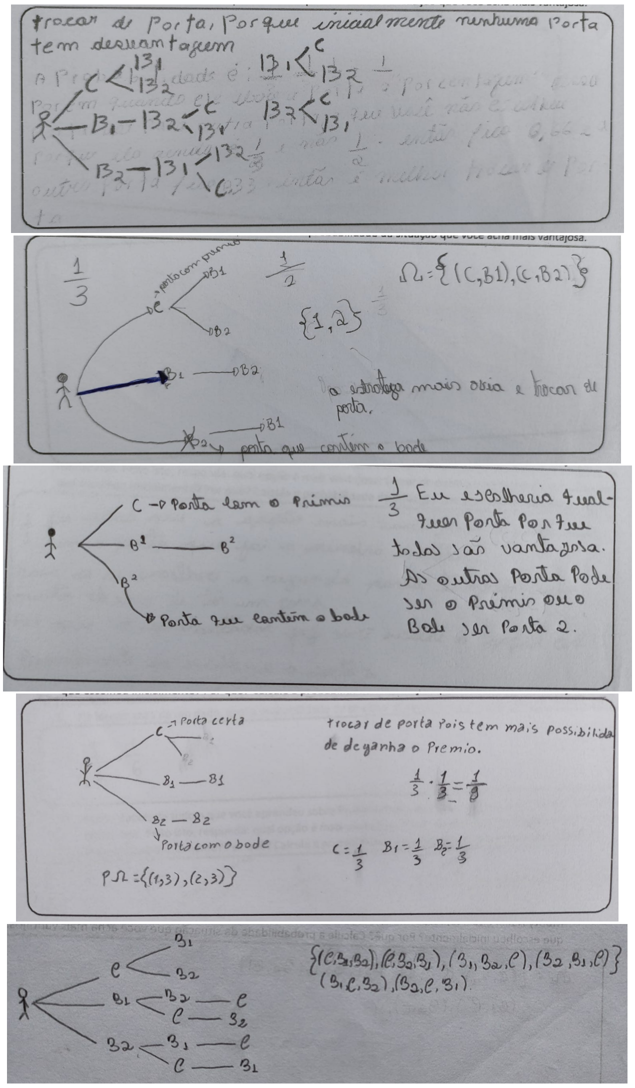
Nessa aula, foram entregues atividades impressas para que os alunos escrevessem o espaço amostral e calculassem a probabilidade da situação mais vantajosa no Problema de Monty Hall: permanecer com a porta escolhida inicialmente ou trocar de porta. Temos a seguir alguns dos resultados obtidos por eles:

Figura 48: Não tentaram escrever o espaço amostral.



Fonte: autoria própria

Figura 49: Escreveram o espaço amostral e não calcularam a probabilidade.



Fonte: autoria própria

5.3 Uma solução para o Paradoxo de Monty Hall com a visualização do Espaço Amostral

Muitas vezes, o que induz os estudantes ao erro ao tentar resolver o problema de Monty Hall é simplesmente não escrever o espaço amostral ou dar preferência somente a tentar aplicar todos os dados em uma fórmula. Diante disso, vamos destrinchar cada elemento do espaço amostral deste desafio. Suponha que C, E_1 e E_2 representem a **escolha da porta premiada**, a **primeira porta que contém um bode** e a **segunda porta que contém um bode**, respectivamente. Por exemplo, se um participante escolheu a porta premiada C (sem saber), o apresentador abriu a segunda porta que contém um bode

E_2 e o convidado decidiu alterar sua escolha, optando pela porta restante E_1, então a configuração desta escolha será representada da seguinte maneira:

$$(C, E_2, E_1)$$

Agora, já ciente de como funciona o problema de Monty Hall, vamos construir o **espaço amostral**.

- **1ª possibilidade:** O participante escolhe a porta premiada C. Vamos chamar de A o evento que contém todas as configurações onde a porta premiada C foi a escolhida. Escolhida essa primeira porta, o apresentador tem 2 opções: abrir a porta E_1 ou a porta E_2. Aberta essa segunda porta, o participante terá 2 opções: permanecer com a sua primeira escolha ou optar pela porta que ainda não foi aberta pelo apresentador. Pelo *Princípio Fundamental da Contagem*, temos que este evento possui $2 \times 2 = 4$ elementos:
$$A = \{(C, E_1, C), (C, E_1, E_2), (C, E_2, C), (C, E_2, E_1)\}$$

- **2ª possibilidade:** O participante escolhe a porta E_1. Vamos chamar de B o evento que contém todas as configurações onde a porta E_1 foi a escolhida. Escolhida essa porta, o apresentador terá apenas 1 opção: abrir a porta E_2. Aberta essa segunda porta, o participante terá 2 opções: permanecer com sua primeira escolha ou optar pela porta que ainda não foi aberta pelo apresentador. Pelo *Princípio Fundamental da Contagem*, temos que este evento possui $1 \times 2 = 2$ elementos:
$$B = \{(E_1, E_2, E_1), (E_1, E_2, C)\}$$

- **3ª possibilidade:** O participante escolhe a porta E_2. Vamos chamar de D o evento que contém todas as configurações onde a porta E_2 foi a escolhida. Escolhida essa porta, o apresentador terá apenas 1 opção: abrir a porta E_1. Aberta essa segunda porta, o participante terá 2 opções: permanecer com sua primeira escolha ou optar pela porta que ainda não foi aberta pelo apresentador. Pelo *Princípio Fundamental da Contagem*, temos que este evento possui $1 \times 2 = 2$ elementos. Ou seja,
$$D = \{(E_2, E_1, E_2), (E_2, E_1, C)\}$$

Assim, o **espaço amostral** do problema de Monty Hall, representado pela letra Ω, é a união destes três conjuntos disjuntos:

$$\begin{aligned}\Omega \quad = \quad & \{(C, E_1, C), (C, E_2, C), (C, E_1, E_2), (C, E_2, E_1), \\ & (E_1, E_2, E_1), (E_1, E_2, C), (E_2, E_1, E_2), (E_2, E_1, C)\}\end{aligned}$$

Como A, B e D são disjuntos, então

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Como a probabilidade do participante escolher qualquer uma das portas C, E_1 ou E_2, inicialmente, é a mesma, então $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/3$ e $P(D) = 1/3$, ou seja,

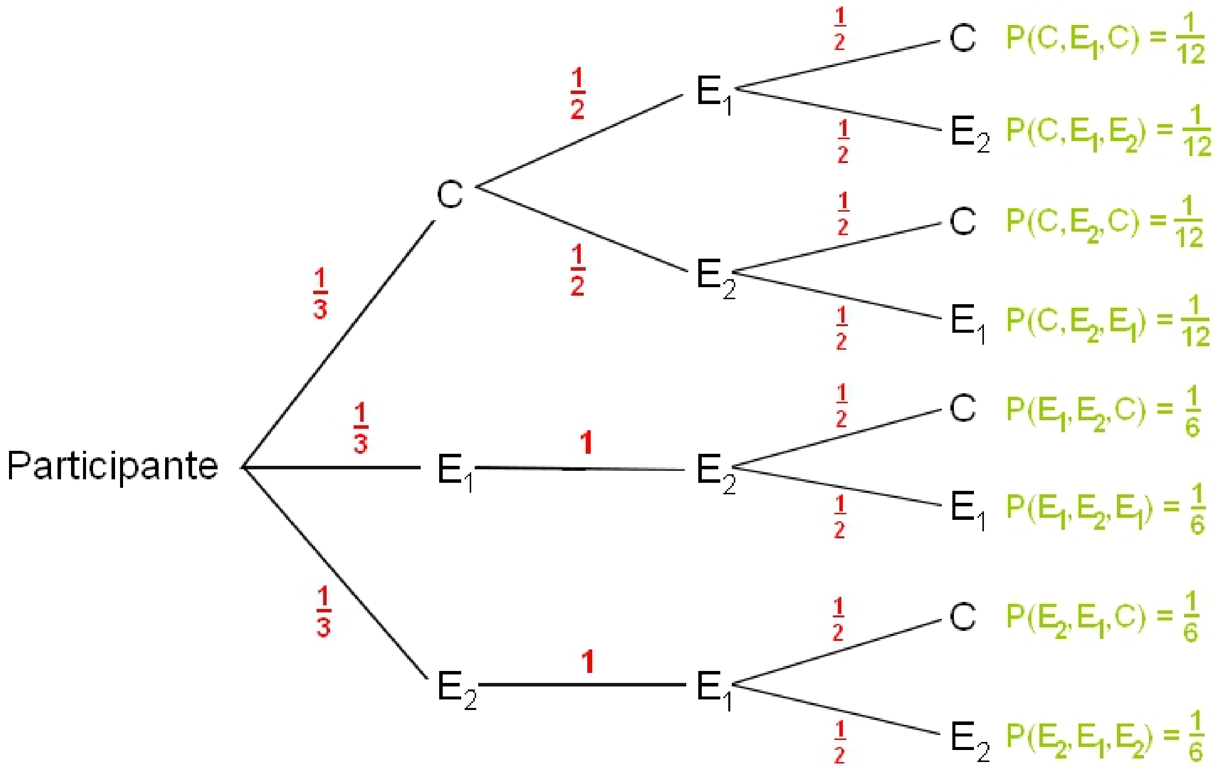
$$\begin{aligned} P(\{(C, E_1, C), (C, E_2, C), (C, E_1, E_2), (C, E_2, E_1)\}) &= \tfrac{1}{3} \\ P(\{(E_1, E_2, E_1), (E_1, E_2, C)\}) &= \tfrac{1}{3} \\ P(\{(E_2, E_1, E_2), (E_2, E_1, C)\}) &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} P(C, E_1, C) &= 1/12 \\ P(C, E_2, C) &= 1/12 \\ P(C, E_1, E_2) &= 1/12 \\ P(C, E_2, E_1) &= 1/12 \\ P(E_1, E_2, E_1) &= 1/6 \\ P(E_1, E_2, C) &= 1/6 \\ P(E_2, E_1, E_2) &= 1/6 \\ P(E_2, E_1, C) &= 1/6 \end{aligned}$$

Sem muito rigor, como vocês puderam perceber acima, colocamos a trina de cada evento elementar apenas entre um par de parêntese. Para uma melhor visualização, podemos escrever todo o espaço amostral e a probabilidade de cada evento elementar com o auxílio de um diagrama de árvore:

Figura 50: Diagrama de árvore do Problema de Monty Hall.



Fonte: autoria própria

É notável que o espaço amostral do Problema de Monty Hall é **não equiprovável**.

O objetivo é calcular a probabilidade de sucesso e, para isso, vamos selecionar todos os ternos cujo último elemento é C. Vamos chamar este evento de G, ou seja, o conjunto de todas as possibilidades em que o participante **ganhou** o prêmio. Temos

$$G = \{(C, E_1, C), (C, E_2, C), (E_1, E_2, C), (E_2, E_1, C)\}$$

Feito isto, vamos chamar de T o conjunto de todos os eventos em que o participante trocou de porta pois, calculando a probabilidade em que o participante *ganhou, dado que trocou de porta*, ficará fácil achar a probabilidade em que este *perdeu, dado que trocou de porta* e avaliar se era mais vantajoso permanecer ou trocar de opção. A princípio, vamos descobrir a chance de **ganhar, dado que trocou de porta**. Temos

$$T = \{(C, E_1, E_2), (C, E_2, E_1), (E_1, E_2, C), (E_2, E_1, C)\}$$

e

$$G \cap T = \{(E_1, E_2, C), (E_2, E_1, C)\}.$$

Temos que

$$P(G) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \tag{5.1}$$

$$P(T) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \tag{5.2}$$

e

$$P(G \cap T) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \tag{5.3}$$

Substituindo (5.1), (5.2) e (5.3) na fórmula da probabilidade condicional, teremos

$$P(G|T) = \frac{P(G \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Portanto, o participante possui maior vantagem se trocar de porta.

Ao apresentar esta alternativa para a resolução do Problema de Monty Hall escrevendo o espaço amostral, os alunos puderam compreender de maneira mais clara porque é mais vantajoso trocar de porta, pois inicialmente a intuição os levou ao erro ao pensarem que a probabilidade passava de $\frac{1}{3}$ para $\frac{1}{2}$, recorrendo apenas a uma comprovação numérica e ignorando conceitos básicos importantes, como escrever os elementos do espaço amostral e escrever os elementos do evento.

6 Considerações finais

Considerando que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê o ensino de Probabilidade em todas as séries da Educação Básica, é de fundamental importância que os planos de aula sejam revistos e atualizados, uma vez que, como demonstrado no questionário e nas atividades aplicadas, continuam abordando de maneira superficial os temas de Probabilidade.

Fica como proposta que Probabilidade seja um tema estudado na graduação de Pedagogia da UFRN e o desenvolvimento de oficinas de Probabilidade para os Anos Iniciais como formação continuada em parceria com a Secretaria Municipal de Educação Básica (SMEB) de Ceará-Mirim.

A partir das oficinas aplicadas, pude perceber que os alunos gostaram de se sentir desafiados a resolver problemas e se mostraram mais interessados em aprender o conteúdo. Se os alunos tivessem tido contato com a Probabilidade desde os anos iniciais, começando com o conceito de fenômenos aleatórios e evoluindo ano a ano até o conceito de função de probabilidade, este conteúdo não seria considerado um dos mais difíceis no Ensino Médio.

Também fica como proposta a inclusão do ensino de probabilidade condicional no Ensino Médio, pois através da atividade de Monty Hall, pude introduzir este conteúdo, considerado complexo, de forma leve. Ademais, não é raro aparecer questões de probabilidade condicional no ENEM.

Referências

ALMEIDA, A. B. d. O problema epistemológico da probabilidade e a contribuição de karl popper para o respectivo debate. *Universidade Nova Lisboa*, 2005.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Primeiro e segundo ciclos*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Terceiro e quarto ciclos*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.

CHAQUIAM, M. Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula. *Belém: Sbem-pa*, 2017.

COUTINHO, C. Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização ea simulação de situações aleatórias com cabri. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 7, n. 2, p. 185–199, 2005.

MAGALHÃES; NASCIMENTO, M. Probabilidade e variáveis aleatórias. Edusp, 2006.

MLODINOW, L. O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2008.

MORGADO, A. C. de O. et al. Análise combinatória e probabilidade. *Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro*, 1991.

OBMEP, E. C. *O Problema de Monty Hall.* 2023? Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/probabilidades-o-problema-de-monty-hal/>. Acesso em: 01 jul 2023.

OBMEP, E. C. *Probabilidade Frequencial.* 2023? Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br.in/blog/sala-de-estudos-probabilidade-sala-4/>. Acesso em: 01 jul 2023.

PEREIRA, A.; GOMES, C. et al. Introdução à análise combinatória e probabilidade. Editora Ciência Moderna, 2015.

PEREIRA, A. G. C.; CAMPOS, V. S. M. Análise combinatória e probabilidade: interdisciplinar. EDUFRN Editora da UFRN, Natal, RN, 2006.

PEREIRA, A. G. C. et al. Algumas reflexões sobre a definição de probabilidade. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 15, n. 1, p. 1–22, 2020.

SAVANT, M. V. Asks marilyn. *Parade, 9 de setembro*, 1990.

SAVANT, M. V. The power of logical thinking: Easy lessons in the art of reasoning... and hard facts about its absence in our lives. *New York: Griffin Edition*, 1996.

WAGNER, E. Probabilidade geométrica. *Revista do Professor de Matemática*, v. 34, p. 28–35, 1997.

ZINDEL, M. L. Tomada de decisão e risco: A contribuição dos matemáticos e estatísticos. *Estatística e Sociedade*, n. 5, 2018.

APÊNDICE A – Atividade do Ensino Fundamental 2

ESCOLA MUNICIPAL PROF. ALBERTO NICÁCIO DA COSTA BARBOSA.
CEARÁ-MIRIM, ___ DE ____________ DE 2022.
ALUNO(A): ____
7º ANO – TURMA D – TURNO VESPERTINO
PROFESSORA: DÉBORA CRISTINA – 4º BIMESTRE – TEMA: PROBABILIDADE

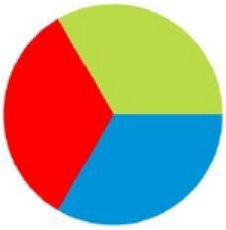
EXPERIMENTO

Lançar uma moeda

Anote os resultados obtidos após 20 lançamentos:

1° resultado	
2° resultado	
3° resultado	
4° resultado	
5° resultado	
6° resultado	
7° resultado	
8° resultado	
9° resultado	
10° resultado	
11° resultado	
12° resultado	
13° resultado	
14° resultado	
15° resultado	
16° resultado	
17° resultado	
18° resultado	
19° resultado	
20° resultado	

ESCOLA MUNICIPAL PROF. ALBERTO NICÁCIO DA COSTA BARBOSA.
CEARÁ-MIRIM, ___ DE _____________ DE 2022.
ALUNO(A): ____
7º ANO – TURMA D – TURNO VESPERTINO
PROFESSORA: DÉBORA CRISTINA – 4º BIMESTRE – TEMA: PROBABILIDADE



EXPERIMENTO

Soltar

uma vareta

Anote os resultados obtidos após 20 lançamentos:

1º resultado	
2º resultado	
3º resultado	
4º resultado	
5º resultado	
6º resultado	
7º resultado	
8º resultado	
9º resultado	
10º resultado	
11º resultado	
12º resultado	
13º resultado	
14º resultado	
15º resultado	
16º resultado	
17º resultado	
18º resultado	
19º resultado	
20º resultado	

Probabilidade: área da matemática que estuda os experimentos aleatórios.

Fenômeno:

- Acontecimento passível de observação; manifestação, sinal, sintoma: fenômeno da natureza.
- Aquilo que se consegue explicar de maneira científica.

Fenômenos determinísticos: aqueles que repetidos sob as mesmas condições conduzem ao mesmo resultado.

Fenômenos aleatórios: aqueles que mesmo realizados sob as mesmas condições não conduzem necessariamente ao mesmo resultado.

Após a leitura das definições acima, responda:

1) O experimento que você acabou de realizar se trata de um fenômeno determinístico ou aleatório?

2) Dê exemplos de um experimento determinístico e um experimento aleatório.

3) Construa o espaço amostral do experimento que você acabou de realizar.

APÊNDICE B – Questionário

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROFMAT

Este questionário foi elaborado com o objetivo de investigar o ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental 1. Os resultados obtidos serão utilizados apenas para fins acadêmicos (dissertação de Mestrado). Está dividido em duas partes:

- Parte I: Formação do Professor
- Parte II: Atuação do Professor

Este documento é anônimo e confidencial e as respostas serão utilizadas exclusivamente para fins científicos. A sua resposta, pessoal e sincera, é muito importante.

CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NAS ESCOLAS

Sobre a formação do professor

1) Em sua formação superior, você obteve alguma aula sobre **Probabilidade** em alguma disciplina voltada para a Matemática?
( ) Sim. Na disciplina ____________________________.
( ) Não.
( ) Na graduação não, mas em outras formações ou pós-graduação.
( ) Não lembro.

Sobre a atuação do professor

2) Em qual(is) série(s) você leciona?
( ) 1º ano.
( ) 2º ano.
( ) 3º ano.
( ) 4º ano.
( ) 5º ano.

3) No livro didático da escola há alguma parte dedicada à **Probabilidade**?
( ) Sim.
( ) Não.
( ) Não sei, pois trabalho com outro(s) material(is).

4) Você trabalha a parte de **Probabilidade** do livro com seus alunos?
( ) Sim.
( ) Não.
( ) Não, pois trabalho com outro(s) material(is).
( ) Não, pois o nível do conteúdo é muito alto para os meus alunos.
( ) Não, pois não acho essa área importante para a minha série.

5) Você inclui a **Probabilidade** no seu planejamento?
( ) Sim.
( ) Não.
( ) Só nas séries que eu julgo ser necessário, são elas:____________________________________

6) O que você entende por **Probabilidade**?
____
____
____
____
____

7) Cite algumas situações do seu cotidiano que envolva a ideia de **Probabilidade**.
____
____
____
____
____
____

8) Caso não lecione a **Probabilidade**, qual seria o motivo? (pode marcar mais de uma opção)
( ) não tive formação para isso.
( ) a maioria dos alunos são não-alfabetizados.
( ) a turma não acompanha, pois a base da maioria é fraca.
( ) existem conteúdos mais relevantes para a vida deles.
( ) outro:______________________________

9) Você sabia que desde a criação do PCN (1997) dos Anos Iniciais, o ensino de **Probabilidade** já havia sido sugerido para o Ensino Fundamental 1?
( ) Sim.
( ) Não.

10) Você sabia que desde dezembro de 2017, quando a versão final da BNCC para o Ensino Fundamental foi publicada, o ensino de **Probabilidade** passou a ser obrigatório do 1º ao 5º ano?
( ) Sim.
( ) Não.

APÊNDICE C – Atividade do Ensino Médio

	ESCOLA ESTADUAL INTERVENTOR UBALDO BEZERRA DE MELO. **CEARÁ-MIRIM, ____ DE ______________ DE 2023.** **ALUNO(A):** ____ **ANO:** ___ **TURMA:** ___ **PROFª:** *Débora Cristina.* **TURNO:** *Matutino.* **DISCIPLINA:** *Matemática.*
1ª ATIVIDADE DE PROBABILIDADE	

1. Escreva o espaço amostral do lançamento de um dado e de uma moeda.

2. Escreva o evento: obter um número par no dado e obter coroa na moeda.

3. Qual a probabilidade de resultar um número par no dado e resultar coroa na moeda?

4. Ao lançar uma moeda e um dado, qual a probabilidade de se obter o resultado (cara, 5)? Esses eventos são independentes?

5. No lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter o número 4 dado que saiu um número par?

6. Agora, depois de tudo o que você aprendeu sobre Probabilidade, escreva o espaço amostral do Problema de Monty Hall. Feito isto, responda: qual opção é mais vantajosa: trocar de porta ou permanecer com a mesma que escolheu inicialmente? Por quê? Calcule a probabilidade da situação que você acha mais vantajosa.

APÊNDICE D – Fundamentação teórica do Ensino Fundamental 2

Noção de Conjunto

Para que o aluno compreenda e realize a atividade com sucesso, é necessário que ele já tenha aprendido Conjuntos e Par Ordenado em algum(a) da(s) série(s) anterior(es).

Em relação a conjunto, é importante que a turma se lembre de algumas noções importantes de teoria de conjuntos. Caso essa não recorde, se faz necessário que o professor revise o tema antes de por a atividade em prática.

É essencial relembrar, principalmente, o que são: Conjunto, Elemento e Descrição pela citação dos elementos. Segue abaixo uma sugestão de material teórico para o docente reproduzir em suas aulas.

Primeiramente, perguntar aos alunos o que vem à mente deles quando falamos sobre onjuntos e explicar, de maneira geral, que conjunto não necessita de definição e pode ser ensinado, matematicamente falando, como "uma reunião de objetos ou elementos matemáticos em número, infinito ou finito, sendo a pertença definida por uma quantidade determinada"[7] (fazendo uso da definição disponível em um dicionário, por exemplo) e solicitar aos alunos exemplos de conjuntos.

Também se faz necessário falar sobre elemento que, assim como conjunto, também não precisa de definição. Entretanto, o professor fica livre para também buscar uma definição sobre este tema em um dicionário e explicar que elemento nada mais é o que constrói um conjunto e pedir que a turma descreva os elementos dos conjuntos que usaram como exemplo no parágrafo anterior. Com isso, relembrar que,no geral, um conjunto é representado por letras maiúsculas $A, B, C, D, ...$ e, os elementos, por letras minúsculas $a, b, c, d, ...$.

No caso da atividade, acrescentar que em probabilidade, comumente o conjunto do Espaço Amostral é representado pela letra Ω e os elementos, pela letra ω, por exemplo:

[7]disponível em dicio.com.br/conjunto

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...\}$$

Por fim, argumentar acerca da Descrição pela citação dos elementos, ou seja, dado um conjunto e listado seus elementos, devemos denotá-lo escrevendo seus elementos entre chaves, sendo esses separados por vírgula.

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$$

Donde A é o conjunto dos números naturais pares.

Par Ordenado

Uma vez que na atividade prática haverá um momento em que a turma formará duplas, e que cada integrante da dupla ficará responsável por um experimento aleatório diferente, se faz necessário falar sobre par ordenado antes de executar essa tarefa; caso a turma já tenha uma noção sobre este tema, é interessante que ainda assim o professor o revise brevemente.

É interessante perguntar aos alunos o que eles entendem por par. Um par nada mais é que um conjunto constituído por apenas dois elementos. Com isso, basta apresentar a definição e inserir alguns exemplos.

Definição: Dado um elemento a e um elemento b, sendo a o primeiro elemento e b o segundo, surge um terceiro elemento (a, b), que nada mais é que o par ordenado.

Notação Matemática

Aqui, vamos limitar a notação matemática somente ao caso em que podemos substituir palavras que representam conjuntos e elementos por letras do alfabeto ou até mesmo símbolos que, de maneira lógica, simplifique e organize os registros, além de evitar a ambiguidade.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda, em vez de o estudante escrever $CARA$, ele pode simplesmente representar este elemento com a letra C e indicar $COROA$ com a letra K, por exemplo.

Outro exemplo a ser utilizado é quando a atividade envolve várias cores. Se o problema envolver uma urna com bolinhas de cores vermelhas, verdes, amarelas e azuis, por exemplo, o aluno pode representar essas cores por V_1, V_2, A_1 e A_2, respectivamente.

O estudante fica livre para abreviar e facilitar seus registros através de notação matemática, utilizando-se de símbolos ou letras.

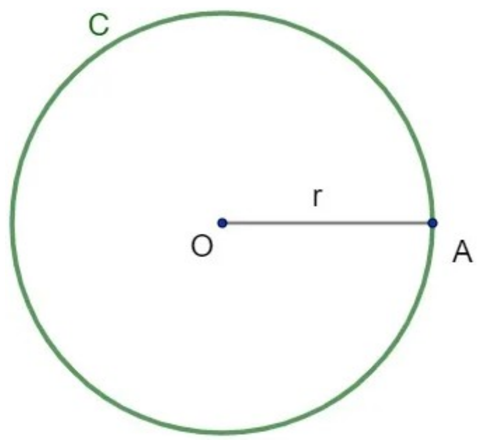
Elementos e Área do Círculo

Tendo em vista que um dos experimentos envolve uma "roleta", os alunos terão que construir um círculo em uma cartolina e, para isso, é importante apresentar os conceitos sobre essa figura geométrica ou revisá-las.

Aqui não vamos aprender calcular a área do círculo usando fórmulas, uma vez que esse objeto de conhecimento só será apresentado a eles no 8º ano do Ensino Fundamental, segundo a BNCC. O intuito é que o estudante tenha noção de como dividir o círculo em áreas equivalentes (ou seja, usando seus conhecimentos sobre fração ou porcentagem, por exemplo). É esperado que o discente já tenha aprendido os seguintes objetos de conhecimento: ângulos: noção de usos e medidas e a circunferência como lugar geométrico, cujas habilidades são determinar medidas da abertura de ângulos por meio de um transferidor e construir circunferência utilizando compasso, respectivamente.

Primeiramente, o professor deve definir os elementos da circunferência. Dado um ponto fixo O, a circunferência C é a união de todos os pontos equidistantes a esse, que, por sua vez, é o centro desta circunferência, e a distância desse ponto fixo a qualquer ponto da circunferência, desde que não nula, é denominado como o raio r da circunferência.

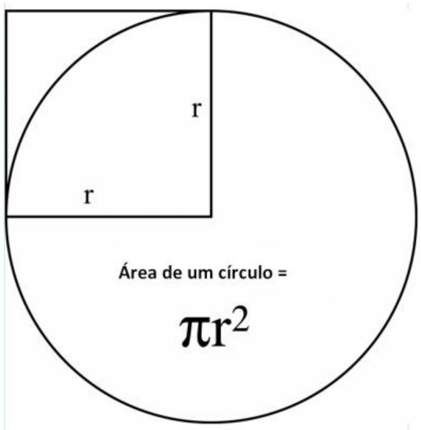
Figura 51: Elementos de uma circunferência



Fonte: Circunferência - Brasil Escola

Círculo nada mais é que a região (área) limitada por uma circunferência, ou seja, a distância do centro da circunferência até qualquer ponto do círculo é sempre menor ou igual ao comprimento do raio.

Figura 52: Círculo



Fonte: https://orcamentos.eu/calculo-da-area-de-um-circulo/

Probabilidade Geométrica

Como uma das atividades envolve áreas de setor circular, é necessário discorrer um pouco sobre Probabilidade Geométrica.

O professor Eduardo Wagner, mestre em matemática pelo IMPA, cita na 34ª edição da Revista do Professor de Matemática - RPM um exemplo que possibilita introduzir este conceito de maneira mais intuitiva.

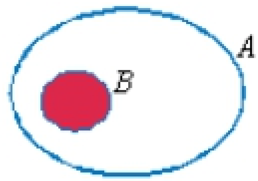
Neste exemplo, um atirador decide brincar de tiro-ao-alvo e, para dificultar o jogo e se auto desafiar, ele venda seus olhos. O alvo, por sua vez, é circular e possui 50 cm de raio, e existe, em seu centro, um disco de 10 cm de raio. Sabendo que o altirador alcançou o alvo, qual a probalidade de que ele tenha alcançado o círculo central?

Considerando que seja proveitoso introduzir o tema com este problema, o professor pode instigar seus alunos a compartilharem suas soluções e estratégias. Como nessa situação é inviável enumerar os casos favoráveis e os casos possíveis, levando em consideração que o atirador está sem enxergar nenhuma localização mais vantajosa no alvo para acertá-lo, a probabilidade só pode ser a razão entre as área do disco e a área do alvo. Logo, a resposta do problema seria 4%.

Conceituando probabilidade geométrica, temos que, dada uma região no B, no plano, inserida na região A, assumimos que a probabilidade de um ponto em A também pertencer a B independe da localização em que esta se encontra naquela

Figura 53: Probabilidade Geométrica

$$p = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}$$

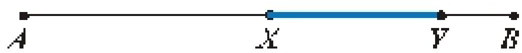


Fonte: Wagner - RPM 34

Também ainda dentro deste tema temos a probabilidade envolvendo pontos e retas. Sejam X e Y pontos (não idênticos) pertencentes a um segmento de reta com extremos A e B, assumimos que a probabilidade de selecionar um ponto pertencente a AB que também pertença a XY, contido em AB, é proporcional ao comprimento de XY e independe da posição onde os pontos X e Y estão em AB. Assim, escolhendo um ponto qualquer que esteja em AB, a probabilidade de que ele também esteja em XY será a razão abaixo:

Figura 54: Probabilidade Geométrica

$$p = \frac{\text{comprimento de } XY}{\text{comprimento de } AB}$$



Fonte: Wagner - RPM 34

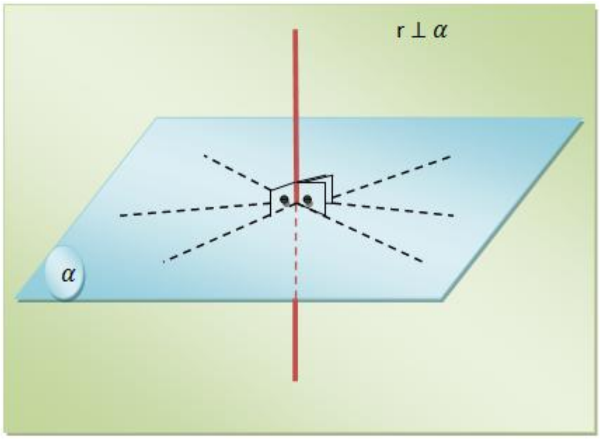
Reta Perpendicular ao Plano

Levando em consideração que em um dos experimentos o aluno deverá soltar uma vareta, onde uma de suas pontas deverá estar sobre o centro de uma pequena roleta - também a fim de que seja justo o resultado da cor sobre a qual o objeto caiu - é necessário explicar ao aluno o conceito de reta perpendicular ao plano, donde a vareta representa a reta e, o círculo, o plano.

Pela definição, uma reta é considerada perpendicular a um plano se, e somente se, essa reta e esse plano possuem um ponto em comum, de modo que essa reta seja perpendicular a todas as retas do plano que passam por este mesmo ponto. Matematicamente falando,

Quando uma reta r é perpendicular a um plano α, significa que ela obtém um ângulo de 90º (ângulo reto) com qualquer outra reta pertencente a este plano.

Figura 55: Reta perpendicular ao plano



Fonte: Perpendicularismo - Colégio Web

Tendo isso em mente, o professor pode realizar uma breve revisão sobre estes objetos caso a turma não lembre de algum.

ANEXO A – Matriz Curricular 2018 - Pedagogia da UFRN - Ensino de Matemática I e II

Ensino da Matemática I - Obrigatória - Ementa/Descrição - 60h

- Metodologias e recursos auxiliares ao planejamento, avaliação, ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental com crianças, jovens e adultos.
- Linguagem matemática e seu emprego em diferentes práticas sociais.
- Sistemas de numeração, números e operações no campo dos números naturais.
- Tratamento da Informação: coleta, organização, comunicação e interpretação de dados.
- Planejamento e práticas pedagógicas na Educação Infantil, na Educação de Jovens e Adultos e em contextos não escolares. [8]

Ensino de Matemática II - Obrigatória - Ementa/Descrição - 60h

- Metodologias e recursos auxiliares ao planejamento, avaliação, ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Infantil, nos anos iniciais do Ensino Fundamental com crianças, jovens e adultos.
- Linguagem matemática e seu emprego em diferentes práticas sociais.
- Números e operações no campo dos racionais absolutos.
- Formas geométricas planas e tridimensionais.

[8] Fonte: https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/relatorio_curriculo.jsf

- Organização espacial: representação, interpretação, localização e movimento de objetos no espaço.
- Simetria.
- Grandezas e Medidas.
- Planejamento e práticas pedagógicas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. [9]

[9] Fonte: https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/relatorio_curriculo.jsf