UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO CIÊNCIA EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

BRAULIO LINS DE MEDEIROS MAIA

ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE USANDO JOGOS DE AZAR

Orientador:

Prof. Dr. Ronaldo César Duarte

Natal/RN - 2023

BRAULIO LINS DE MEDEIROS MAIA

Ensino de Análise Combinatória e Probabilidade Usando Jogos de Azar

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Profº. Dr. Ronaldo César Duarte

Natal/RN - 2023

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Maia, Braulio Lins de Medeiros.
Ensino de análise combinatória e probabilidade usando jogos de azar / Braulio Lins de Medeiros Maia. - 2023.
110 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Ronaldo César Duarte.

1. Matemática - Dissertação. 2. Jogos de azar - Dissertação. 3. Probabilidade - Dissertação. 4. Análise combinatória - Dissertação. 5. Ensino de matemática - Dissertação. I. Duarte, Ronaldo César. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

BRAULIO LINS DE MEDEIROS MAIA

Ensino de Análise Combinatória e Probabilidade Usando Jogos de Azar

Comissão Examinadora:

Profª. Dr°. Ronaldo César Duarte (UFRN - Orientador)
Prof°. Dr°. Débora Borges Ferreira (UFRN - Membro interno)
Profª. Dr°. Márcia Maria Alves de Assis (UERN - Membro externo)

Natal/RN - 2023

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai, Neto Maia, que dois dias antes do ENA (Exame Nacional de Admissão para o PROFMAT) faleceu vítima da covid19. Esse trabalho tem muito sobre ele, me mostrou muito cedo valores como honestidade, retidão e respeito pelas pessoas. Assim como transmitiu os primeiros ensinamentos de matemática e também sobre jogos.

Agradeço a minha mãe, Gilda Lins, que sempre me incentivou no caminho dos estudos e fez grandes sacrifícios para me manter no rumo certo.

Agradeço a minha esposa, Cláudia Alves, por ter compreendido minhas horas de dedicação ao estudo da matemática e dedicação ao PROFMAT.

Agradeço aos meus filhos, Ernesto e Lavínia, pelo tempo que deixei de acompanhá-los nas brincadeiras e momentos de diversão.

Agradeço ao meu orientador, prof. Dr. Ronaldo César, por toda ajuda e paciência que teve comigo.

Agradeço a todos os gerentes do banco do brasil da agência de Monte Alegre, em especial a Fabiana Kelly, Gildomar Barros e Rafael Corrêa, que compreenderam e disponibilizaram as folgas das sextas-feiras para que eu pudesse assistir às aulas na UFRN.

Agradeço a diretora do colégio estadual de traíras, Ivoneide, pela a ajuda e compreensão durante o curso. Agradeço aos meus colegas de profissão do Banco como também da escola pela compreensão pelas faltas nos momentos de confraternização durante esses dois anos e meio do curso.

Agradeço aos meus colegas de curso, Débora, Francisco, Marcão, Gleiferson, Gabriel, Fábio, Valdemiro, Cláudio, Alexandre, pelo companheirismo, ajuda com os estudos das disciplinas e pela amizade verdadeira.

Agradeço a todos os professores das disciplinas pela dedicação, empenho e ensinamentos.

Agradeço a equipe da SBM (Sociedade Brasileira da Matemática) por disponibilizar o PROFMAT. Por fim, gostaria de agradecer de forma sincera para todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para que eu estivesse aqui apresentando minha dissertação de mestrado.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus filhos, a minha esposa Cláudia e ao professor Ronaldo Duarte, que me ajudou muito na conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um pouco sobre os jogos de azar e sua importância para o surgimento e desenvolvimento de conceitos importantes da matemática, como é o caso, dos problemas de contagem e probabilidade. Esses conceitos são de grande relevância em diversas áreas do conhecimento humano, servindo a estudos nos campos da computação, estatística, química, biologia, etc. Realizamos um estudo sobre o Jogo do Bicho, sua história, funcionamento e aspectos jurídicos. Logo em seguida, realizamos um estudo bibliográfico sobre o uso dos jogos no ensino da matemática e suas potencialidades didáticas. Analisamos o Jogo do Bicho sob a ótica da matemática, da Análise Combinatória e probabilidade. Fazemos também um estudo sobre outro jogo de azar popular, a Mega-Sena. Visando o uso dos jogos de azar como ferramenta de ensino de matemática, propomos sequências didáticas para o ensino de conceitos de combinatória e probabilidade. Usamos entendimentos mais simples de contagem, como o princípio multiplicativo, e também, introduzimos estudos mais elaborados em exercícios que envolvam combinações com repetição e aplicações da esperança matemática.

PALAVRAS-CHAVE: jogos de azar; probabilidade; Análise Combinatória; ensino de matemática.

Abstract

In this work, we present a little about the game of chance and its importance for the emergence and development of important mathematical concepts, such as this is the case for counting and probability problems. These concepts are of great relevance in several areas of human knowledge, serving studies in the Fields of computing, statistics, chemistry, biology, etc. We carried out a study on the Jogo do Bicho, its history, functioning, and legal aspects. Soon after, we carried out a bibliographical study on the use of games in teaching mathematics and their didactic potential. We analyze the Jogo do Bicho from the perspective of mathematics, Combinatorial Analysis, and Probability. We also do a study on another popular game of chance, the Mega-Sena. Aiming at using games of chance as a tool for teaching mathematics, we propose didactic sequences for teaching concepts of combinatorics and probability. We use simpler understandings of counting, such as the Multiplicative Principle, and also, we introduce more elaborate studies in exercises that involve combinations with repetition and applications of mathematical expectation.

KEYWORDS : game of chance; probability; combinatorial analysis; mathematics teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A história dos jogos de azar remonta há milhares de anos, com evidências em civilizações antigas como Egito, Grécia, Roma e China. Os jogos de azar evoluíram ao longo do tempo, incluindo uma introdução de cartas e dados, e a popularização de roleta e bingo.

Com a chegada da tecnologia, os jogos de azar também evoluíram para incluir jogos online. Além disso, a globalização permitiu que as apostas fossem feitas em toda parte, aumentando a popularidade e acesso por todos aos jogos.

Ao longo do tempo, as regulamentações dos jogos de azar também mudaram, com alguns países proibindo ou restringindo o jogo, enquanto outros permitem a exploração de cassinos, casas de bingo e loterias. A indústria dos jogos continua a crescer e se desenvolver, tornando-se uma das mais lucrativas e influentes do mundo.

Muitos são os que defendem a legalização dos jogos de azar, os entusiastas da ideia, alegam que os jogos tratam do entretenimento dos adeptos, movimentam o mercado de trabalho, regulariza uma parcela de trabalhadores informais e ainda servem como uma forma de receita para os governos, pela incidência de impostos e tributos às casas de apostas.

Mas também há os que não desejam esta legalização, mostrando efeitos negativos à sociedade, como: problemas de saúde relacionados ao vício, dependência financeira, fraude, lavagem de dinheiro dentre outros fatores.

Os “jogos de azar”, segundo a lei de contravenções penais de 1941, é o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusiva ou principalmente da sorte e na maioria das situações, os jogadores têm mais chances de derrota do que vitória. Então, de maneira alguma, esse trabalho incentiva tal prática, visto que são ilegais e do ponto de vista da matemática, com expectativa de ganho negativa. A despeito de ser proibido, o Jogo do Bicho é praticado em alguns lugares.

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar e discutir as técnicas de contagem e probabilidade usando dois jogos de azar populares no Brasil e principalmente nas periferias do nosso país – o Jogo do Bicho e a Mega-Sena. Nesse texto, daremos maior ênfase ao Jogo do Bicho. Queremos aqui mostrar com o apelo lúdico do jogo problemas envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem, combinações, permutações, probabilidades, esperança matemática.

Muitas vezes se faz necessário temas do convívio do aluno para preencher o distanciamento de alguns autores e livros didáticos com relação às realidades diversas e locais. Nesse contexto, poderíamos utilizar o artifício de um jogo de azar como ferramenta didática para introduzir conceitos de matemática em alguns temas e áreas, vindo a contribuir com a proximidade e confiança sobre um assunto cuja maioria dos estudantes sentem dificuldade em matemática básica, que é o caso, da Análise Combinatória e da probabilidade.

Assim, como comentado por Kátia Smole, Maria Diniz, Neide Pessoa e Cristiane Ishihara em seu livro sobre Jogos de Matemática, a utilização de jogos no ensino da matemática é antigo e tem grande potencial didático e de aprendizagem, permitindo alterar o modelo tradicional de ensino.

> *O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais são estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (SMOLE, 2008, p. 9).*

Também, na própria Lei de Diretrizes e Bases (LDB), no seu art. 26 trata da complementação dos currículos visando características locais:

> *os currículos da Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características*

> *regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 1996).*

Deste modo, é importante na qualidade de professor, nos municiarmos de alternativas eficazes para o aprendizado do aluno. E o jogo é uma boa maneira de complementarmos o ensino de matérias que são vistas como de difícil compreensão por parte dos alunos, quais sejam, Análise Combinatória e probabilidade.

Assim, essa pesquisa tem por objetivo geral fazer um estudo das probabilidades presentes em dois jogos de azar, o Jogo do Bicho e a Mega-Sena e apresentar sequências didáticas que utizam esses jogos para o ensino de probabilidade e Análise Combinatória. Dessa forma elaboramos duas sequências didáticas, uma usando a Mega-Sena e destinada a alunos do ensino básico e outra usando o Jogo do Bicho, destinado a um curso de extensão para a comunidade adulta.

Realizamos uma pesquisa bibliográfica, na literatura e nos trabalhos do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), sobre os jogos de azar. Usamos alguns desses trabalhos como suporte para embasarmos nossas ideias e sustentar a hipótese de aprendizado através de conhecimentos populares e temas da convivência do estudante. Podemos citar do PROFMAT, por exemplo, " A probabilidade aplicada aos jogos de azar", de Rafael Thé Bonifácio de Andrade, UFPB, onde o autor fala da probabilidade em alguns jogos como: Pôquer, Blackjack, Roleta e investiga as possibilidades de ocorrência, cita os fatos históricos e como se joga cada um deles. Outro que usamos como material de pesquisa e apoio no âmbito do PROFMAT foi o trabalho de José William de Souza Prado, "Noções de probabilidade por meio de jogos de azar", da Universidade Federal de Feira de Santana, ele trouxe jogos das loterias oficiais como Mega-Sena e Loto-Fácil e também jogos como roleta. São muitos os trabalhos na literatura que falam sobre os jogos de azar e o próprio surgimento das noções de probabilidade está intimamente relacionado com estudo sobre os jogos.

Fizemos um estudo bibliográfico sobre as potencialidades do uso dos jogos como ferramenta didática em publicações que tratam do tema, em especial nos trabalhos do PROFMAT. Elaboramos duas sequências didáticas: a primeira sequência didática, voltada para o ensino médio, usando a Mega-Sena e a segunda, destinada a um curso de extensão para adultos, explorando o Jogo do Bicho.

Nosso trabalho está distribuído da seguinte forma: no segundo capítulo, discutimos sobre a importância do uso de jogos no ensino de matemática. No terceito capítulo, trazemos a história do Jogo do Bicho, fazemos referências ao funcionamento do jogo e detalhamos seus subjogos, no quarto capítulo, efetuamos um estudo sobre a Análise Combinatória e alguns problemas de contagem. No quinto, trabalhamos com a probabilidade, sua história, conceitos e tratamos alguns problemas iniciais. No sexto capítulo executamos análises detalhadas sobre cada subjogo do Jogo do Bicho sob a ótica da probabilidade e esperança matemática. No final deste trabalho, deixamos uma sugestão de sequência didática que fundamenta o aprendizado de probabilidade e contagem usando o Jogo do Bicho. Fazemos também uma outra sequência com ênfase para o uso da Mega-Sena como recurso educacional capaz de surtir efeito semelhante ao empregado no primeiro caso. Mostramos também, o quão é desfavorável para o jogador apostar em um jogo de forma real e concreta. Servindo para mais uma vez desestimular a prática da aposta em jogos de azar. Deste modo, tratamos os jogos como ferramenta de ensino capaz de ajudar no processo de aprendizagem e formação dos alunos.

Capítulo 2

USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo incluímos algumas discussões sobre a importância dos jogos no ensino da matemática. Queremos aqui demonstrar, por meio de argumentos e pesquisas feitas por vários autores, que o uso do jogo como ferramenta didática contribui significativamente para uma maior motivação e interesse na construção do conhecimento dos alunos.

Buscamos trazer a problemática que envolve a maneira tradicional de ensinar matemática onde os alunos não participam dos problemas elencados nos livros didáticos e muitas vezes desconhecem totalmente o assunto abordado em algumas situações postas nesses livros. Sabemos que no Brasil uma das principais ferramentas para auxiliar os professores em sala de aula é o livro didático, porém, em grande parte, esses livros são resumidos de maneira que consigam entregar uma significativa quantidade de conteúdo em um único exemplar. Desta forma, os problemas abordados ou as situações em que seriam necessárias mais tempo, são deixadas de lado e predomina a objetividade em fazer contas e decorar maneiras de se resolver determinados tipos de questões. É desse jeito que a matemática vem sendo ensinada ao longo dos anos e se mostra, de certa forma, ineficaz e sem atratividade alguma, pois assim, não temos elementos profundos de entendimento que busquem a justificativa de determinada regra valer para tal questão ou outra não se aplicar em determinado tema. Muito embora funcione para alguns, a maior parte dos alunos se sentem desmotivados e com um profundo desinteresse nesse método tradicional de ensino. Junto a isso, vale dizer que a quantidade de aulas semanais é absurdamente baixa, para se ter um resultado satisfatório e progresso no ensino da matemática. Outro ponto que merece destacar é o fato que os professores muitas vezes têm uma jornada exaustiva de trabalho e não destinam tempo necessário para fazer um bom planejamento de sua aula.

O jogo no ensino da matemática desempenha um papel metodológico relevante, os alunos passam a atuar como agentes ativos na construção do próprio conhecimento. É um recurso poderoso e prazeroso que viabiliza a aprendizagem, desenvolve múltiplas habilidades para os estudantes. Algumas destas habilidades são úteis para o convívio em sociedade onde o jogo ensina em diversos aspectos como se comportar diante de uma derrota, por exemplo. O dever de se respeitar as regras impostas pelo jogo e tantos outros ensinamentos que levaremos pelo resto da vida. Como falaram Macedo, Petty e Passos (2005) sobre as habilidades desenvolvidas nos jogos:

> *A criança desenvolve brincadeiras e aprende jogos. Pode também aprender brincadeiras com seus pares ou cultura e, com isso, desenvolve habilidades, sentimentos ou pensamentos. O mesmo ocorre nos jogos: ao aprendê-los, desenvolve o respeito mútuo (modos de se relacionar entre os iguais) o saber compartilhar uma tarefa ou um desafio em um contexto de regras e objetivos, a reciprocidade, as estratégias para o enfrentamento das situações-problemas, os raciocínios. (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005, P10)*

Um outro autor que falou sobre a importância dos jogos no desenvolvimento da criança foi Vygotsky. Ele ressaltou que:

> *o lúdico influencia enormemente o desenvolvimento da criança. É através do jogo que a criança aprende a agir, sua curiosidade é estimulada, adquire iniciativa e autoconfiança, proporciona o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração. (apud CASTRO 2005, p.53)*

Em nosso dia a dia estamos a todo momento aplicando conhecimentos matemáticos, desde a quantidade de horas que dormimos até uma ida ao mercado, passando por uma vasta quantidade de tarefas que incluem habilidades relacionadas à matemática. Adaptar o conteúdo do livro didático à realidade do aluno potencializa o processo de ensino e aprendizagem e desmistifica a ideia do modo abstrato, como sempre foi tratado as aulas de matemática. Através de jogos didáticos, o professor poderá incluir o aluno e envolver os conteúdos de forma mais leve e concreta, oferecendo meios para que o mesmo seja parte ativa no processo. O professor precisa utilizar jogos que levem o aluno a desenvolver o raciocínio crítico e estabelecer relação do jogo com o conteúdo aplicado.

Um grande desafio enfrentado pelo professor é o bloqueio que alguns alunos apresentam para a compreensão e o desenvolvimento esperado entre a faixa etária e as habilidades apontadas para aquele nível de desenvolvimento, nessa situação a utilização de jogos contribui de forma significativa para o desenvolvimento do aluno, a esse respeito, Borin (1996) afirma:

> *Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes positivas frente a seus processos de aprendizagem. (apud* GROENWALD, *et al., 2023, p.1)*

Comumente ouvimos as pessoas falarem sobre a dificuldade que têm com temas relacionados à Matemática, relatos como este são reflexo da forma mecânica como ensino de matemática ocorreu durante anos na escola regular. Atualmente, há uma abertura e a possibilidade de adaptar o currículo à realidade vivida pelo aluno, de forma, a valorizar o conhecimento do educando, que se apropria do mesmo para aplicá-lo a sua realidade, transformando o conhecimento matemático em ferramenta para desenvolver a leitura, compreender e transformar o meio em que vive.

A utilização de jogos, pelo professor de matemática, ressignifica o ensino e estimula a participação dos alunos durante as aulas, promovendo interação entre os envolvidos e uma melhor compreensão do conteúdo apresentado pelo professor.

Com o advento da pandemia do Covid-19 a escola apropriou-se do uso da tecnologia, não foi fácil, mas barreiras foram quebradas e em meio a falta de estrutura das instituições, foi necessário a inclusão das tecnologias ao ambiente escolar, fato que facilita a utilização de jogos, visto que, são recursos que oferecem atrativos e estimulam os alunos em sala de aula, os quais na maioria das vezes já fazem uso e passam a se interessar e participar das aulas. Nesse processo, a inclusão de jogos matemáticos é um grande recurso facilitador e auxiliar, promove a aprendizagem tornando o ambiente escolar mais atrativo e inclusivo:

> *Ensinar por meio de jogos é um caminho para o educador desenvolver aulas mais interessantes, descontraídas e dinâmicas, podendo competir em igualdade de condições com os inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola, despertando ou estimulando sua vontade de frequentar com assiduidade a sala de aula e incentivando seu envolvimento nas atividades, sendo agente no processo de ensino e aprendizagem, já que aprende e se diverte, simultaneamente.(SILVA, 2004, p.26).*

A utilização de jogos em sala de aula pode ser considerado um bom recurso pedagógico e muito eficiente para a construção dos saberes matemáticos, pois trabalha diversos aspectos, entre eles: o desenvolvimento intelectual, a construção e aprimoramento das relações sociais e o caráter lúdico. Esses aspectos despertam o interesse da maioria dos alunos, facilitam a aprendizagem e tornam as aulas mais prazerosas.

A importância dos jogos no ensino da matemática está consolidada e se mostra extremamente eficaz na apropriação dos conteúdos abordados. Os jogos também servem para que o professor possa analisar a desenvoltura do aluno em situações de grupo, ajuda a desenvolver o raciocínio lógico, estimula a criatividade, o pensamento independente e a capacidade de resolver problemas. Desta forma, usaremos os jogos como ferramenta de grande utilidade, já demonstrada em diversas produções acadêmicas, trazendo maior robustez no aprendizado de conceitos matemáticos.

2.1 Sequência didática

Uma Sequência didática pode ser considerada como um conjunto de seqüências de atividades progressivas, planificadas, guiadas ou por um tema, ou por um objetivo geral. As sequências didáticas são planejadas e desenvolvidas para a realização de determinados objetivos educacionais, com inicio e fim conhecidos tanto pelos professores, quanto pelos alunos (ZABALA, 1998).

O termo Sequência Didática, surgiu no Brasil nos documentos oficiais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs publicados em 1998) de língua portuguesa, como ”projetos”e ”atividades sequenciadas”(MACHADO; CRISTOVÃO, 2006). Esse recurso didático-metodológico se popularizou e hoje é utilizado, por exemplo, no ensino de matemática.

Para Oliveira(2001), os principais objetivos de uma sequência didática são: conduzir os discentes a uma reflexão e apreensão acerca do ensino proposto na sequência didática; Almejar que estes conhecimentos adquiridos sejam levados à vida dos estudantes e não somente no momento da aula ou da avaliação; Organizar as intensões pedagógicas através de temas, objetivos, conteúdo que atendam as necessidades do projeto didático, dos professores e dos alunos; Organizar as intensões pedagógicas de tal forma que garanta a transversalidade de seus conteúdos temas e objetivos e preparar técnica e academicamente o professor, tornando-o capaz de fomentar e propiciar a construção dos conhecimentos específicos com o grupo alunos sob sua responsabilidade, posto que seja fundamental que se procure, através de pesquisas, ter conhecimentos prévios que ultrapassem o sensu comum, o óbvio (OLIVEIRA, 2001, p. 74).

Levando em conta a importância dos jogos de azar no aprendizado e desenvolvimento da Análise Combinatória e Probabilidade, e considerando os problemas legais e morais que envolvem o Jogo do Bicho, propomos, no capítulo 7, duas sugestões de sequências didáticas. A primeira utiliza um jogo de azar amplamente conhecido que é a Mega-Sena, voltado para o ensino básico. A outra proposta terá do Jogo do Bicho como objeto de estudo, que destinamos para um curso de extensão em probabilidade e terá um público adulto como público-alvo.

No ensino médio, poderemos amadurecer ideias mais profundas sobre temas que envolvam maiores complexidades éticas e morais, como são os casos dos jogos de azar. Tentaremos relacionar os conteúdos aplicados com o cotidiano para uma melhor compreensão e participação. A própria Base Nacional Comum Curricular(BNCC) (BRASIL, 2017) diz:

> *No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2017, p 471).*

O Jogo do Bicho é tratado aqui somente como um mecanismo didático para o ensino de conceitos de contagem e probabilidade. Como o Jogo do Bicho é proibido, considerado um jogo de azar, uma contravenção penal, a sua utilização, fora do contexto escolar, será desestimulada e somente será usado no âmbito de aprendizagem de Análise Combinatória e probabilidade. Demonstramos a desvantagem em termos matemáticos que seus praticantes sofrem com relação à banca, enfatizando assim o desencorajamento pela prática do jogo.

Capítulo 3

O JOGO DO BICHO

Nesse capítulo, apresentamos o jogo de azar conhecido como Jogo do Bicho. Começamos expondo, resumidamente, a história do jogo. Depois trazemos suas regras, subjogos, seus aspectos gerais e nomenclaturas. As principais referências usadas na construção desse capítulo foram os livros (OXALÁ,2007) e (SALDANHA, 1986). Outras fontes de pesquisa foram materiais da internet, onde se buscou imagens e figuras dos jogos como também nos subsidiou com alguns esclarecimentos sobre os jogos, por exemplo (AGUIAR, 2023) e (CÉSAR, 2022).

3.1 História do Jogo do Bicho

Segundo Saldanha (1986), desde os primórdios da humanidade, a necessidade de relativizar os problemas e as dificuldades humanas sempre se fizeram presentes com o intuito de mascarar e até mesmo de amenizar as dificuldades do cotidianos e proporcionar ao povo momentos de descontração. Assim, acontecia no Império Romano, em épocas de crise, em que o povo lotava as arenas do Coliseu para participar ou prestigiar batalhas travadas entre escravos que eram treinados para matar ou morrer. É a política do pão e circo que, provavelmente, tenha contribuído com os ideais do Barão Drummond, criador do Jogo do Bicho, e alavancado um projeto audacioso e lucrativo que fundamentara a prática do Jogo do Bicho e que em dias atuais ainda é uma ferramenta que atende aos objetivos propostos inicialmente.

O Jogo do Bicho foi criado no ano de 1890, no Rio de Janeiro, quando o conselho de intendência municipal do Rio de Janeiro aceitou uma petição feita pelo Barão João

Baptista Vianna Drummond, o Barão de Drummond, solicitando a permissão para comercializar o jogo. A primeira extração do Jogo do Bicho ocorreu em Julho de 1892.

O Barão foi um industrial bem-sucedido e progressista apaixonado, promoveu o povoamento local, transformando uma área pouco povoada, no bairro de Vila Izabel, zona norte do Rio de Janeiro, em 1873. Neste, numa área de 30 hectares, fundou um Jardim Zoológico, abrigando diversas espécies nativas e estrangeiras que o Barão usava para ministrar suas aulas sobre zoologia nacional.

O Barão, por ser amigo do imperador, recebia ajuda da corte para custear as despesas do Zoológico, essa ajuda acabou com o fim da monarquia em 1889. Nessas circunstâncias, sem o subsídio governamental, o negócio passou a ter prejuízos constantes e chegou à iminência da falência por volta de 1892. O Barão, então, teve a ideia do jogo e passou a vender ingressos para o "Zoo" com a foto de animais impressos.

Eram vinte e cinco animais e cada animal representava um número do 1 ao 25. No início de cada dia, antes que abrisse a bilheteria, o próprio Barão escolhia um dos quadros de animais e guardava em uma caixa de madeira. No fim do dia, precisamente às 15 horas, abria-se a caixa e quem tivesse com a numeração do animal escolhido ganharia, como prêmio, vinte vezes o valor do ingresso. Na imagem abaixo pode ser visto o ingresso utilizado para a entrada no zoológico:

Figura 3.1: Ingresso para o zoológico

Fonte: https://bnldata.com.br

A ideia logo se desvinculou do ingresso e os prêmios das apostas passaram a ser feitos em dinheiro, agradando a população. O jogo se expandiu de forma rápida, saindo dos muros do Zoológico e se espalhando por toda cidade do Rio de Janeiro e posteriormente, pelo Brasil. De início, o Barão no seu Zoológico, depois pequenos comerciantes bancavam o jogo e, em seguida, pessoas se dedicaram exclusivamente a essa atividade - os banqueiros do Jogo do Bicho.

Com grandes lucros advindo do jogo, esses banqueiros começaram a se infiltrar em outras áreas da sociedade como o carnaval e o futebol, muitos deles sendo padrinhos de escolas de samba famosas e clubes do futebol carioca bastante conhecidos. Um dos banqueiros de maior destaque e bem sucedido foi o advogado Dr. Castor de Andrade, que patrocinou o Bangu, time de futebol quase campeão brasileiro de 1985 e duas vezes campeão carioca. Sob seu comando também estava a escola de samba Mocidade Independente de Padre Miguel que foi campeã do grupo especial várias vezes. Outros bicheiros famosos se envolveram com as causas sociais para tentar, de certa forma, legitimar o Jogo do Bicho, foi o caso do capitão Guimarães que foi presidente da escola de samba de Unidos de Vila Isabel.

Originado na periferia, o jogo guardava em si alguns fatores, como o valor das apostas: no Jogo do Bicho pode-se apostar qualquer valor, diferente de outros jogos oficiais, cujos preços são fixos por jogo. Outro fator preponderante é a facilidade de se fazer o jogo, sendo colhido por apontadores espalhados por toda cidade, além de que sempre ocorreu uma certa misticidade com relação a sonhos e palpites intuitivos. Dessa forma, o Jogo do Bicho se propagou de forma brusca agradando principalmente a classe trabalhadora, com menor poder aquisitivo, tornando o jogo popular e chegando a todas as regiões do país.

Desde o início, o Jogo do Bicho foi tratado com repressão pelas autoridades, com o argumento de que se apresentava como uma espécie de jogo viciante, que atentava às boas práticas e aos bons costumes. A primeira medida proibitiva ocorreu ainda com o Barão de Drummond, com a proibição, pela polícia, da realização do sorteio do animal do dia no Zoológico, forçando o jogo a adotar o sorteio da loteria, relacionando as dezenas sorteadas na casa oficial às adotadas no jogo. Mais tarde, com a proibição das loterias e rifas de qualquer natureza, em 1910, o jogo passou a ser relacionado a renda da alfândega, que era noticiada nos jornais diariamente.

Por ser um jogo popular e de fácil acesso, se expandiu rapidamente e logo chamou a atenção de representantes da sociedade que o consideravam nocivo aos bons costumes, tanto é que, sua proibição, como já dito, ocorreu desde seu início e foi tratada especificamente nos anos 40, com a Lei de Contravenções Penais que entrou em vigor em 3 de outubro de 1941, na ocasião, cassinos e apostas esportivas também passaram a ser ilegais por serem considerados jogos de azar.

No decorrer da história, alguns decretos e leis versaram a respeito das apostas e sobre a legalização do jogo: o decreto-lei n°6259 de 10 de fevereiro de 1944, em seu artigo 58 é um deles, e diz:

> *... é contravenção penal...*
> *Art. 58. Realizar o denominado "jôgo do bicho", em que um dos participantes, considerado comprador ou ponto, entrega certa quantia com a indicação de combinações de algarismos ou nome de animais, a que correspondem números, ao outro participante, considerado o vendedor ou banqueiro, que se obriga mediante qualquer sorteio ao pagamento de prêmios em dinheiro.*
> *1º Incorrerão nas penas estabelecidas para vendedores ou banqueiros:*
>
> a) *os que servirem de intermediários na efetuação do jôgo;*
>
> b) *os que transportarem, conduzirem, possuirern, tiverem sob sua guarda ou poder, fabricarern, darem, cederem, trocarem, guardarem em qualquer parte, listas com indicações*

do jôgo ou material próprio para a contravenção, bem como de qualquer forma contribuírem para a sua confecção, utilização, curso ou emprêgo, seja qual for a sua espécie ou quantidade;

c) *os que procederem à apuração de listas ou à organização de mapas relativos ao movimento do jôgo;*

d) *os que por qualquer modo promoverem ou facilitarem a realização do jôgo.*

2º Consideram-se idôneos para a prova do ato contravencional quaisquer listas com indicações claras ou disfarçadas, uma vez que a perícia revele se destinarem à perpetração do jôgo do bicho. (BRASIL, 1944)

Note que, pela primeira vez, o Jogo do Bicho é citado de forma explicita, e ainda mais, proibindo todos os envolvidos no jogo sob pena de reclusão inafiançável. Em 1946, o então presidente Eurico Gaspar Dutra, assinou um decreto proibindo os jogos de azar no Brasil. Desde então se busca uma discussão sobre o tema a fim de elencar todos os pontos favoráveis e contrários à legalização dos jogos no país. Abaixo, estão os links respectivos dos seguintes leis e decretos que tratam da proibição do Jogo do Bicho ao longo da história: decreto 2321/1910, decreto 3.688/1941, decreto 6.259/1944, decreto 9.215/1946 e lei 5.250/ 1967 .

Tabela 3.1: Lei e Decretos sobre a probição do Jogo do Bicho

Leis e Dec.
https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=DPL&numero=2321&ano=1910&ato=7d30TRq5UMNRVT160
https://legis.senado.leg.br/norma/528775
https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=DEL&numero=6259&ano=1944&ato=d410zY61EMVpnT4cf
https://legislacao.presidencia.gov.br/atos/?tipo=DEL&numero=9215&ano=1946&ato=2190zYE5UeFR1Ta36
https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-5250-9-fevereiro-1967-359026-norma-pl.html

Fonte: Elaborada pelo autor

Do ponto de vista dos empregos formais, tributos, impostos e até sobre a ótica do turismo, os que defendem a liberação acreditam que nós já estamos muito atrasados comparando com o resto do mundo. Segundo Camargo (2020), em seu artigo sobre jogos de azar no Brasil, dentre os 193 países integrantes da ONU, o Brasil faz parte dos 37 que não legalizaram os jogos de azar, mas ainda assim arrecada cerca de 12 bilhões anuais com a loteria e estima-se que esse valor poderia chegar a 50 bilhões, com a sua legalização. Nos últimos anos, ocorreram várias tentativas de regularização dos jogos de azar no Brasil. No congresso, tramitam algumas matérias que tratam sobre a liberação dos jogos, são elas: PL 442/1991, PL 186/2014, PL 595/2015, PL 2.648/2019, PL 4.495/2020.

Tabela 3.2: Projetos de Lei sobre os Jogos de Azar

PL	
442/1991	https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/fichadetramitacao?idProposicao=15460
186/2014	https://www25.senado.leg.br/web/atividade/materias/-/materia/117805
595/2015	https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/fichadetramitacao?idProposicao=964482
2.648/2019	https://www25.senado.leg.br/web/atividade/materias/-/materia/136605
4.495/2020.	https://www25.senado.leg.br/web/atividade/materias/-/materia/144605

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Funcionamento do Jogo do Bicho.

Existem vinte e cinco bichos em sequência, do número 01 ao 25, cada animal tem quatro dezenas associadas subsequentes, logo, no total, são 100 dezenas. O avestruz é o primeiro bicho e suas dezenas são 01, 02, 03 e 04. A vaca, é o último, e suas dezenas são 97, 98, 99 e 00. No quadro abaixo, estão detalhados todos os bichos e suas respectivas dezenas relacionadas ao Jogo do Bicho:

Tabela 3.3: Bichos e suas dezenas

BICHO	DEZENAS
01- Avestruz	01, 02, 03, 04
02- Águia	05, 06, 07, 08
03- Burro	09, 10, 11, 12
04-Borboleta	13, 14, 15, 16
05- Cachorro	17, 18, 19, 20
06- Cabra	21, 22, 23, 24
07- Carneiro	25, 26, 27, 28

08- Camelo	29, 30, 31, 32
09- Cobra	33, 34, 35, 36
10- Coelho	37, 38, 39, 40
11- Cavalo	41, 42, 43, 44
12- Elefante	45, 46, 47, 48
13- Galo	49, 50, 51, 52
14- Gato	53, 54, 55, 56
15- Jacaré	57, 58, 59, 60
16- Leão	61, 62, 63, 64
17- Macaco	65, 66, 67, 68
18- Porco	69, 70, 71, 72
19- Pavão	73, 74, 75, 76
20- Peru	77, 78, 79, 80
21- Touro	81, 82, 83, 84
22- Tigre	85, 86, 87, 88
23- Urso	89, 90, 91, 92
24- Veado	93, 94, 95, 96
25- Vaca	97, 98, 99, 00

Fonte: Elaborada pelo autor

Os sorteios do Jogo do Bicho são realizados de forma diversa, dependendo da região do país. Alguns lugares adotam a loteria oficial, outros trabalham com loterias clandestinas e há aqueles que trabalham com sorteios públicos e transmitidos via rádios e internet. O importante é a garantia da lisura dos sorteios e a confiança no recebimento do valor do prêmio mediante vitória.

Normalmente são feitas três corridas (sorteios) principais durante o dia. As apostas são feitas por apontadores, cambistas, que ficam espalhados pela cidade, em bancas fixas ou em movimento a procura de seus clientes, os apostadores. Como existem centenas, quiçá milhares de bancas de apostas espalhadas pelo Brasil, com uma certa variação de valores dos prêmios e nomenclaturas, adotaremos como exemplo neste trabalho, os valores dos prêmios e métodos empregados em uma cidade fictícia, que chamaremos de São Fernando. No que segue, u.m. denotará uma unidade monetária fixada.

As apostas são feitas em talonários de papel em duas vias, ficando uma com o cambista e a outra entregue como recibo do jogo para o apostador. No recibo, tem a frase “vale o que está escrito” essa frase é símbolo da confiança e garantia do pagamento do prêmio por parte do banqueiro e vem sendo utilizada deste a popularização do jogo. Existem ainda, no bilhete, a numeração do talonário, data e a assinatura do apontador, assim como, o jogo em si.

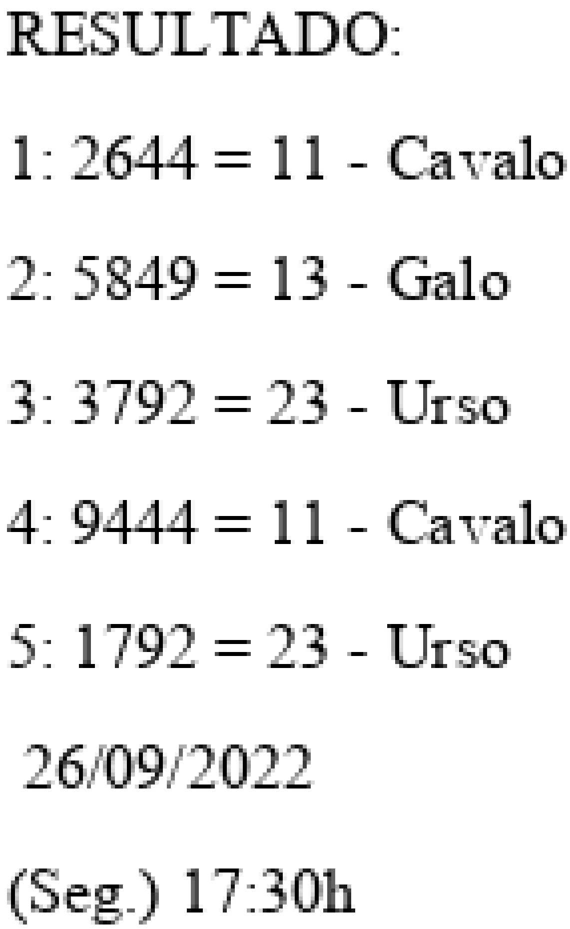
Atualmente, em alguns lugares mais sofisticados, existem maquinetas com aplicativos que substituem os talões que já fornecem os resultados, valores à pagar e são ligados à internet. Com o avanço da tecnologia bancária em celulares, as transações via pix e transferências bancárias entraram também no radar do jogo, pix, mobile e internet banking e com a ampla utilização de aplicativos de conversas e redes sociais, muitos jogos são feitos sem a necessidade da presença física do apostador e apontadores. Ainda, pelo uso da tecnologia, evita-se a necessidade de, momentos antes do sorteio, os cambistas se reunirem na banca para entregar seus talões e fazerem os acertos dos valores a pagar ou receber, em caso de premiação.

Figura 3.2: Exemplo de talão

Fonte: Elaborada pelo autor

O sorteio é feito usando um globo de bingo, desses usados nas loterias oficiais, com dez bolas numeradas de zero a nove, são retiradas, com reposição, quatro bolas, formando o milhar correspondente ao primeiro prêmio, na sequência são retiradas mais quatro bolas, com reposição, formando assim o resultado do segundo prêmio do sorteio, seguindo nessa ordem até que se retire as quatro bolas correspondentes ao resultado do quinto prêmio do jogo. O sorteio do jogo é transmitido pelo rádio e tem seu resultado amplamente divulgado pelos cambistas, populares e inclusive por grupos de whatsapp feitos exclusivamente para esse fim. O resultado de uma extração do jogo ocorre da seguinte forma:

Figura 3.3: Simulação de uma extração


RESULTADO:

1: 2644 = 11 - Cavalo

2: 5849 = 13 - Galo

3: 3792 = 23 - Urso

4: 9444 = 11 - Cavalo

5: 1792 = 23 - Urso

26/09/2022

(Seg.) 17:30h

Fonte: Elaborada pelo autor

A dezena de cada prêmio indica qual o bicho sorteado, de acordo com a tabela 2.3. Nesta reprodução de uma extração tivemos como resultado no 1° prêmio (cabeça) o cavalo, 2° prêmio - galo, 3° prêmio - urso, 4° prêmio - cavalo e no 5° prêmio – urso. Existem diferentes possibilidades de apostas no Jogo do Bicho: podemos fazer um jogo no grupo, escolhendo um dos bichos, podemos jogar na dezena, na centena, no milhar, no terno, no duque de grupo, combinado, dentre outros. Na próxima seção mostramos as várias possibilidades de jogos.

Os jogos podem ser realizados na cabeça (1° prêmio) ou do 1° ao 5° prêmios. Para cada jogo, há chances distintas de vitória e por isso a remuneração varia de acordo com o valor e o tipo de jogo escolhidos. No entanto, optamos por apresentar apenas alguns jogos mais relevantes, de modo que possamos abordar a parte matemática com maior ênfase, que é o principal objetivo aqui.

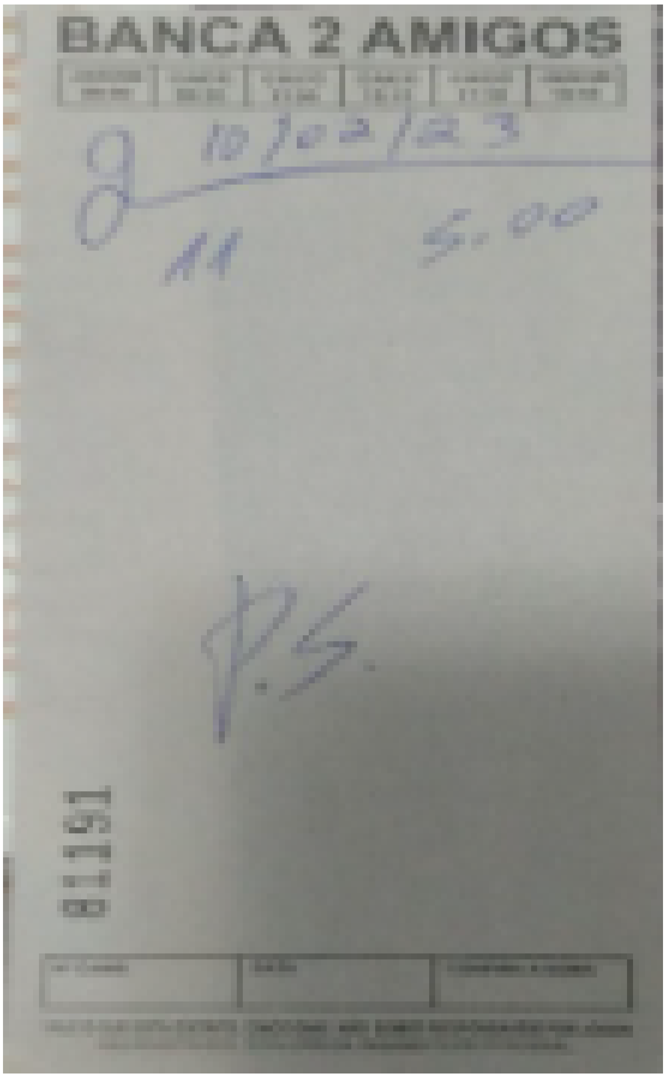
3.3 Jogos do Jogo do Bicho

3.3.1 Grupo:

No grupo, você pode escolher dentre os vinte e cinco bichos, saindo uma das dezenas do bicho escolhido, no primeiro prêmio, ganha-se vinte vezes o valor apostado. Essa aposta é a mais simples e foi também a originária do jogo. Também pode-se apostar do primeiro ao quinto prêmios. Desse modo, o valor apostado é dividido por cinco e cada prêmio valerá de forma individual por um quinto do aporte inicial.

Pegando o resultado apresentado anteriormente como exemplo, digamos que a aposta foi dez u.m. no cavalo (11) do 1° ao 5°, como o resultado foi dois cavalos, o valor do prêmio será determinado assim, pegamos os dez u.m., dividimos por cinco (cinco prêmios), depois multiplicamos a quantidade de vezes em que o cavalo apareceu por vinte, como obtivemos dois cavalos, o valor da premiação seria de 40 u.m. A forma de representar o grupo no bilhete é um “G”.

Figura 3.4: Grupo

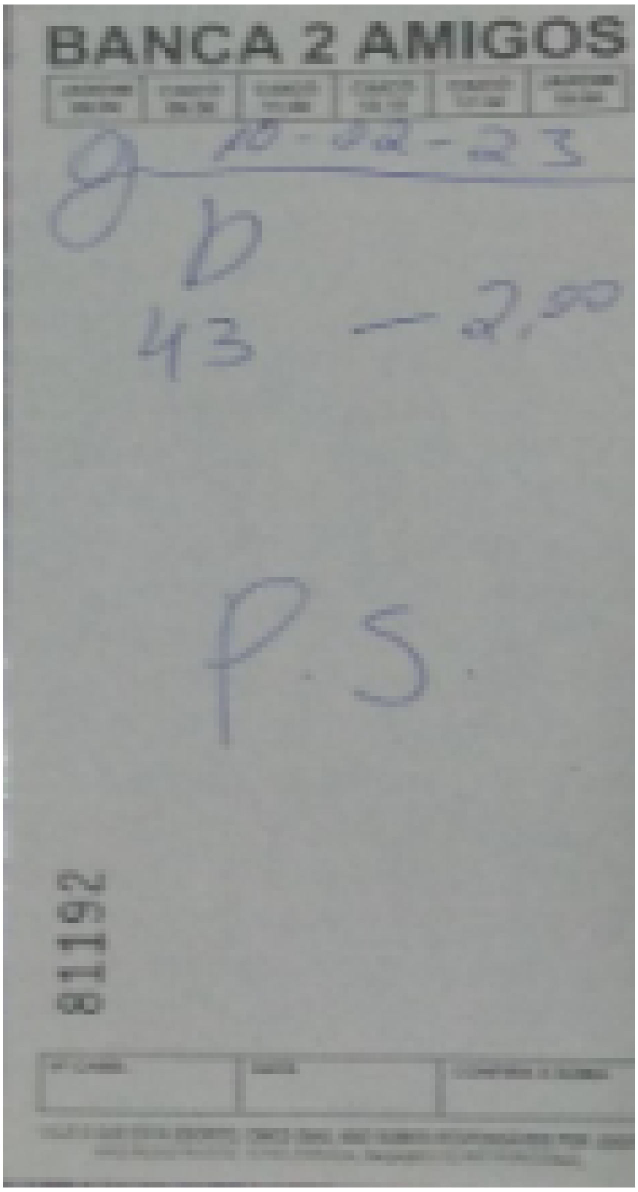


Fonte: Elaborada pelo autor

3.3.2 Dezena

A dezena é formada pelos dois últimos dígitos de cada prêmio, como mostrado antes, cada bicho tem quatro dezenas e são essas que indicam qual o animal escolhido. A premiação da dezena corresponde a sessenta vezes o valor apostado. Como nos outros jogos, na dezena também há a possibilidade de se apostar do 1° ao 5° e aumentar assim as chances de sucesso. A forma de se representar a dezena no canhoto é um “D”. A forma mais fácil de determinar o animal correspondente a uma dezena dada é dividi-la por quatro e analisar o próximo número inteiro, no caso da divisão resultar um número decimal, ou o próprio número da divisão, se inteiro for. Esse número analisado é um dos 25 animais do grupo. Por exemplo, a dezena 26 quando dividida por 4 resulta no número 6,5. Nesse caso, o animal correspondente a essa dezena é o 7(carneiro) o próximo número inteiro.

Figura 3.5: Dezena



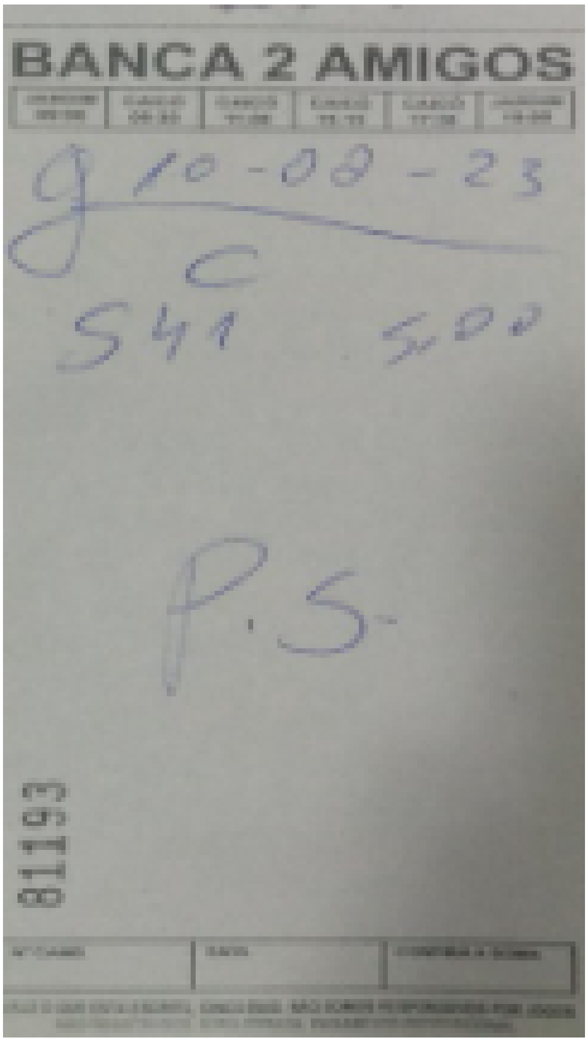
Fonte: Elaborada pelo autor

No canhoto acima, a dezena 43 corresponde ao grupo do cavalo.

3.3.3 Centena

A centena é constituída pela formação dos três últimos dígitos de cada prêmio. Existem 1000 centenas e em caso de acerto o banqueiro paga quinhentas vezes o valor apostado. Logo, nesse caso, a expectativa de se ter um resultado favorável é de 1 para 1000 e o símbolo da centena é um “C”. A centena, como todos os jogos, podem ser do 1° ao 5°.

Figura 3.6: Centena



Fonte: Elaborada pelo autor

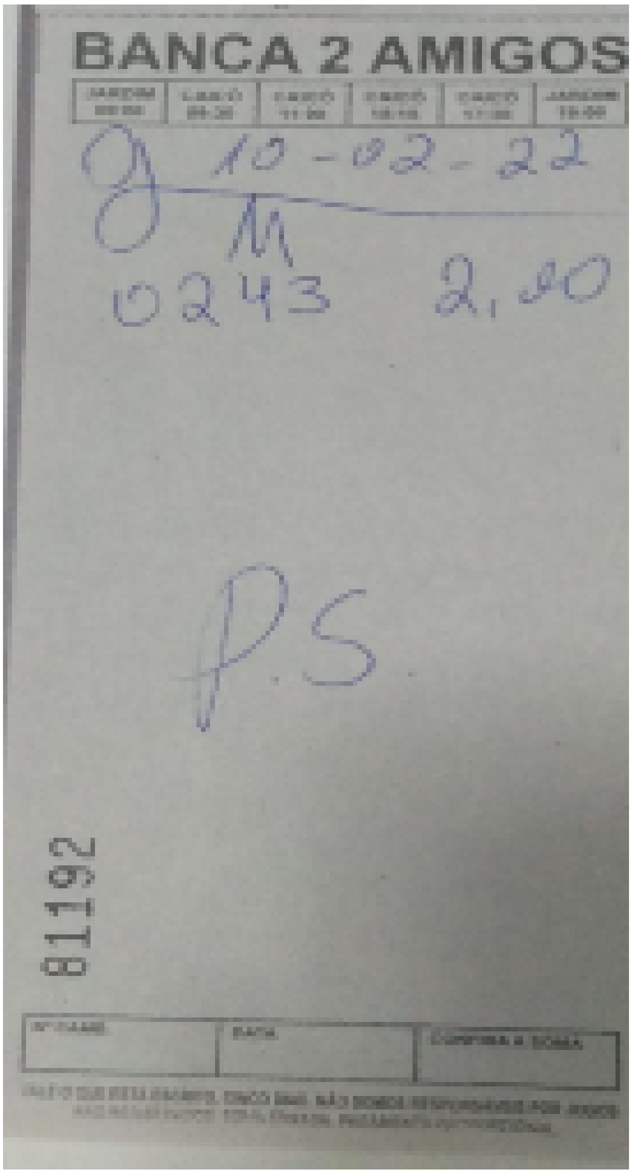
Acima temos um canhoto, que representa uma centena do jogo.

3.3.4 Milhar

O milhar é formado pelos quatro números sorteados em cada prêmio de cada extração do Jogo do Bicho, nesse caso, existem 10.000 milhares e o banqueiro paga quatro mil vezes o valor apostado, em caso de resultado positivo. Pode-se apostar também o milhar com centena, deste modo, o valor do aporte é dividido de forma igual para os dois jogos. No caso de dar somente a centena o ganhador recebe 500 vezes o valor da metade da aposta inicial. Em caso de vitória no milhar o ganhador recebe 4500 vezes o valor da metade do aporte inicial. A abreviatura do milhar é um “M” e do milhar com centena é ”MC”.

Existe também uma forma de jogar o milhar com permutação (pontilhada), ou seja, escolhemos quatro números e estes podem sair de qualquer ordem que vencemos. Contudo, temos que achar a quantidade de permutações possíveis para esses números e o prêmio será dividido por essas permutações. Esse jogo é bem interessante, pois força os organizadores e apostadores do jogo a terem uma noção de permutações simples.

Figura 3.7: Milhar



Fonte: Elaborada pelo autor

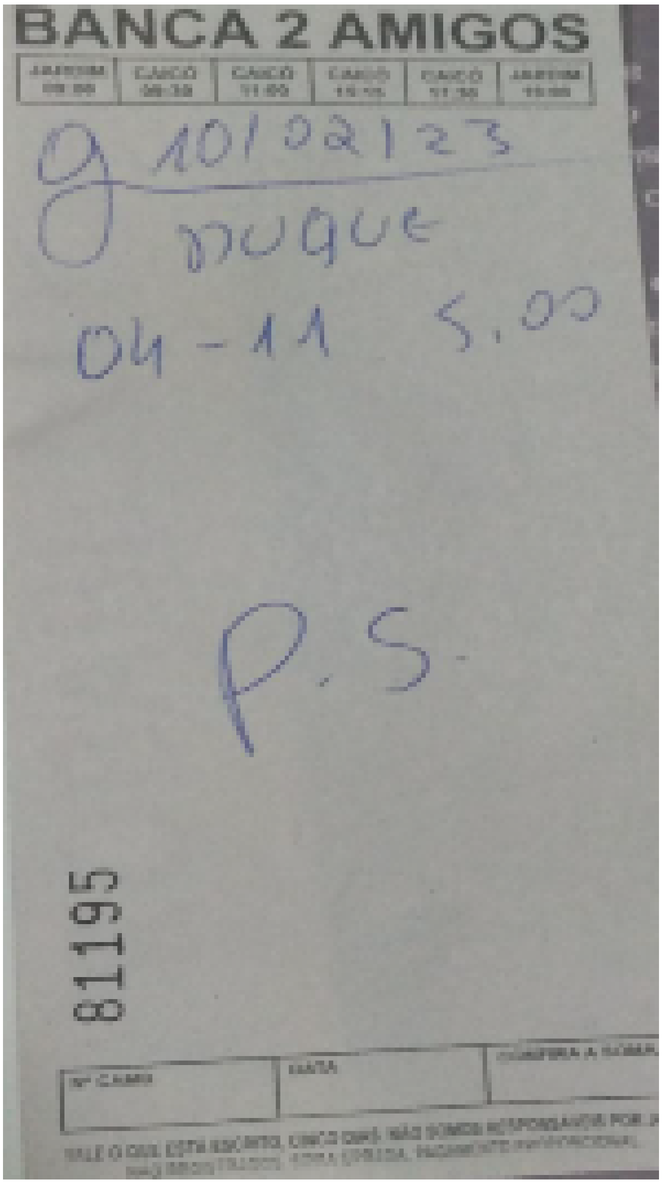
Acima temos um canhoto, que representa um milhar do jogo.

Exemplo 3.3.1. *Suponha que uma aposta de 10 u.m. (unidades monetárias) foi feita no milhar pontilhado 1123 e que o resultado da extração foi 3121. Nesse caso, a premiação será de* 40000 *unidades monetárias, que é* $4000 \cdot 10$*, dividido pela quantidade de permutações do milhar* 1123*, que são* 12 *o que resulta* $\frac{40000}{12} = 3333,33$.

3.3.5 Duque

O duque é feito com uma aposta em dois bichos tendo que sair os dois dentre os cinco prêmios. Aqui o banqueiro paga vinte vezes o valor da aposta em caso de resultado positivo e seu símbolo é o “DD” ou o nome por extenso.

Figura 3.8: Duque



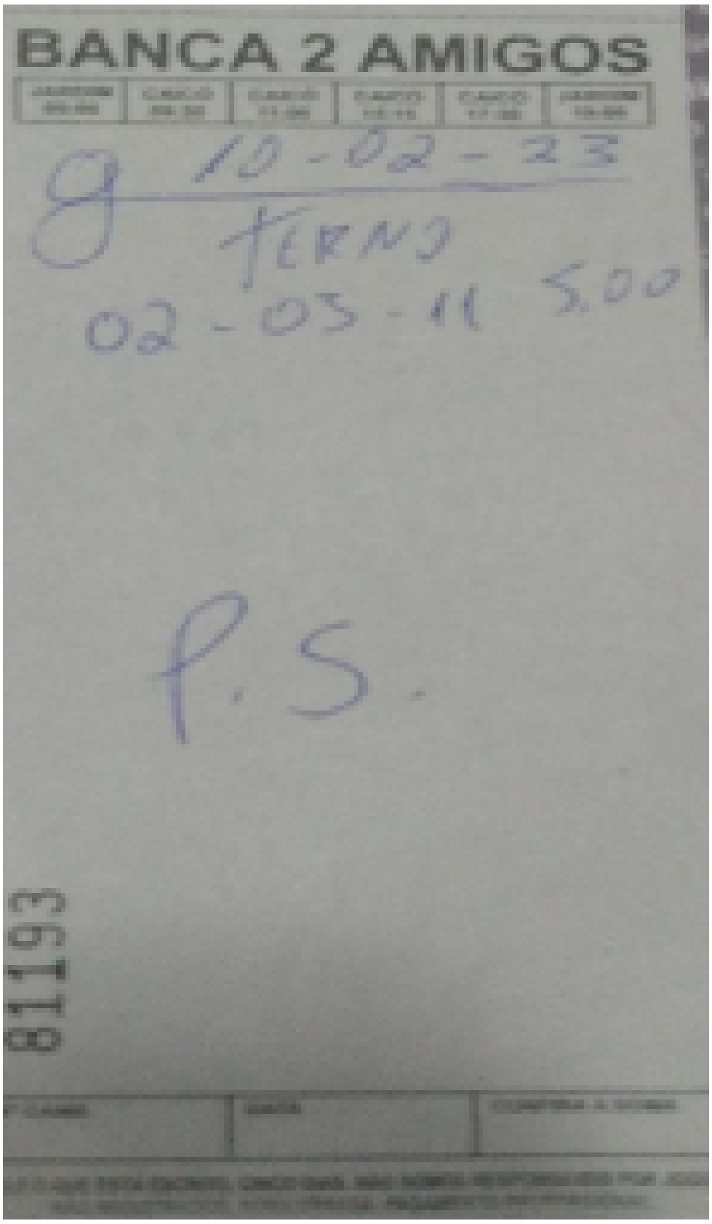
Fonte: Elaborada pelo autor

O canhoto representa o duque borboleta (04) e cavalo (11).

3.3.6 Terno

No terno apostador joga em três bichos e estes têm que aparecer dentre os cinco prêmios. Nesse jogo o banqueiro paga 100 vezes o valor da aposta inicial. Costuma-se colocar o nome do jogo por extenso no bilhete ou a abreviação de T.

Figura 3.9: Terno



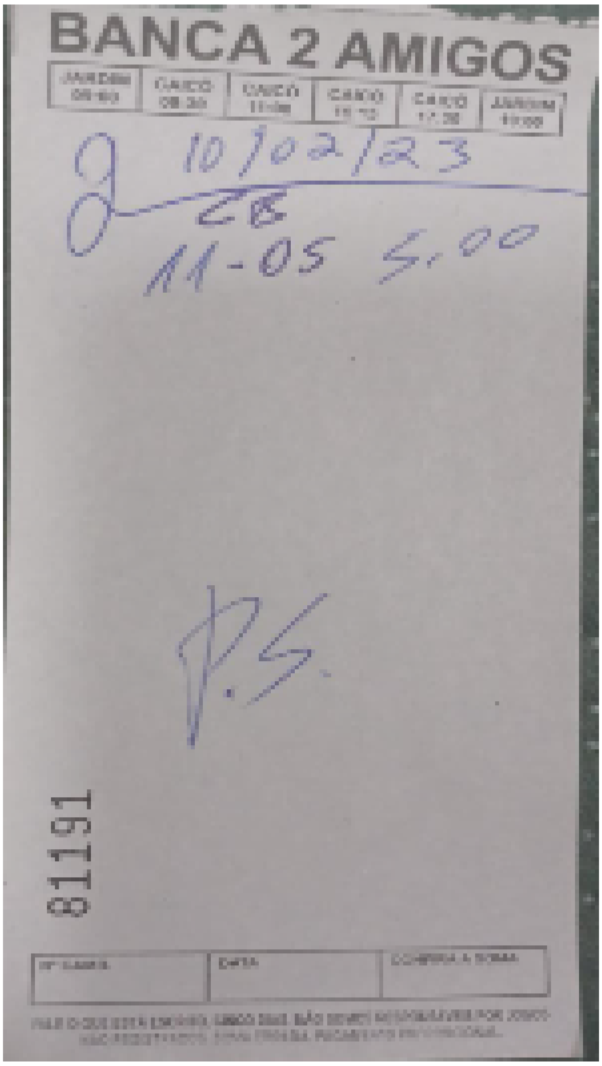
Fonte: Elaborada pelo autor

O canhoto representa o terno águia (02), burro (03) e cavalo (11).

3.3.7 Combinado

No combinado, leva-se em consideração a primeira e a segunda dezenas em relação a cada prêmio. No caso do milhar 2515, por exemplo, temos o combinado de carneiro com borboleta visto que 25 é dezena de carneiro e 15 de borboleta. Essa aposta premia com 300 vezes o valor do bilhete. Há ainda o combinado invertido ou virado em que a ordem dos dois bichos não tem importância, porém, o valor da premiação reduz-se à metade. Tomando o milhar acima, tanto faz apostar no combinado carneiro com borboleta como borboleta com carneiro, em caso de combinado invertido. A sigla utilizada para o combinado é CB e se o mesmo for invertido, CBV.

Figura 3.10: Combinado



Fonte: Elaborada pelo autor

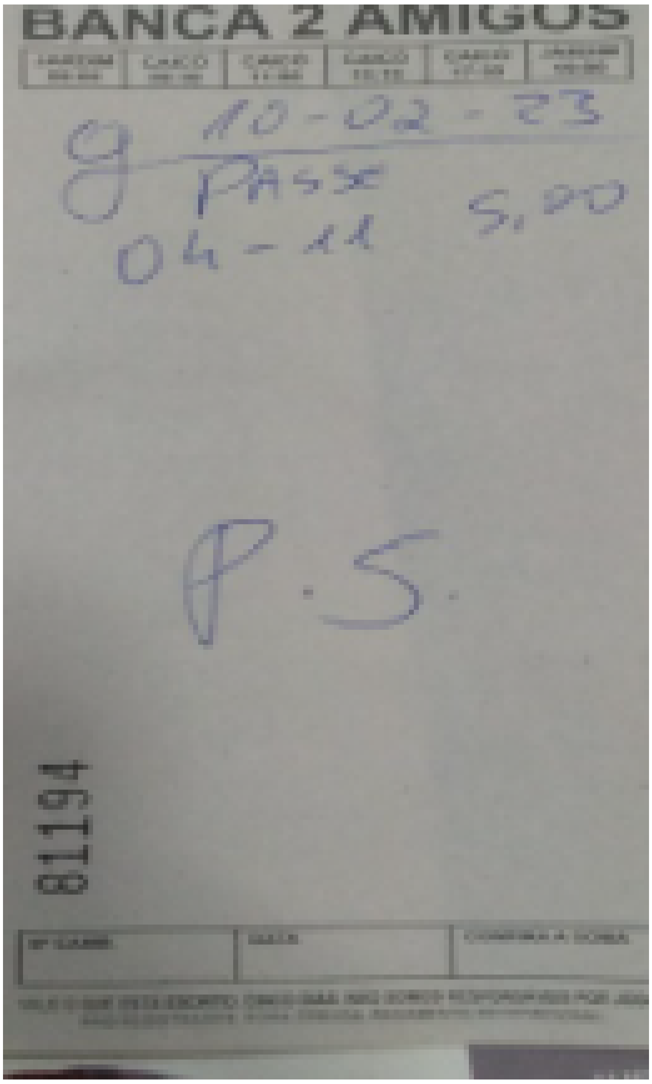
A figura acima representa um canhoto de um combinado de cavalo (11) e cachorro (05).

No combinado, assim como nos demais jogos, existe a possibilidade de apostar do 1° ao 5° prêmios, nesse caso os valores das premiações são proporcionais às chances de vitória.

3.3.8 Passe

No passe, a aposta é em um bicho no primeiro prêmio e outro do segundo ao quinto prêmios, nessa ordem, ou seja, é necessário a escolha de um bicho que sairá no primeiro prêmio e outro que pode aparecer do segundo ao quinto prêmios. Contudo, há a possibilidade de inversão, ou seja, a pessoa pode jogar dois bichos e estes têm que dar um na cabeça e outro "nos quintos" (como é dito de forma coloquial a hipótese do segundo ao quinto). Esse tipo de jogo é conhecido como passe virado, sua abreviatura nos canhotos é PV e o valor da premiação é a metade do passe seco. A premiação do passe seco, ou seja, o passe escolhendo o da cabeça e o que sairá entre o segundo e o quinto prêmios, é de 80 vezes o valor apostado.

Figura 3.11: Passe



Fonte: Elaborada pelo autor

A figura acima representa um canhoto de um passe de borboleta (04) e cavalo (11).

Capítulo 4

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nesse capítulo apresentamos as noções de contagem necessárias para desenvolver o estudo proposto. Começamos apresentando um breve resumo da história das noções de contagem, depois mostramos as definições e exemplos sobre o princípio multiplicativo, arranjos, combinações e permutações. As principais referências usadas na construção desse capítulo foram (FRANCO, 2020), (MORGADO, 1991) e (SILVA, CAMPOS E PEREIRA, 2015), além de textos encontrados em outros trabalhos e dissertações do PROFMAT.

4.1 História das noções de contagem

As noções de contagem nasceram naturalmente a partir da necessidade humana de quantificar e organizar objetos. Desde a antiguidade, o homem tem utilizado métodos de contagem para identificar e separar determinados utensílios em grupos distintos. A contagem é uma habilidade básica que permite aos indivíduos realizarem tarefas diária simples como contar o número de animais em um curral ou o valor de dinheiro que se tem no bolso.

A evolução da matemática e da teoria da contagem foi influenciada por diferentes culturas e civilizações, cada uma com seu próprio sistema numérico e técnicas de contagem. Na antiguidade, os egípcios e os babilônios desenvolveram sistemas de escrita numérica e conceitos matemáticos básicos, incluindo a ideia de que a contagem deve ser realizada de maneira ordenada e sequencial.

Na idade média, a teoria da contagem foi aprimorada pelos matemáticos árabes, que introduziram conceitos como o zero e o uso de algarismos para representar números. Na Europa Renascentista, a contagem e a Teoria dos Números foram amplamente estudadas por matemáticos como Leonardo de Pisa, John Napier e Blaise Pascal, que desenvolveram métodos para a solução de problemas matemáticos complexos. Em resumo, as noções de contagem evoluíram junto com a humanidade pela busca de encontrar mecanismos capazes de reduzir o tempo necessário para realizar determinada tarefa.

4.2 Definição da Análise Combinatória

Hoje, as noções de contagem e Teoria dos Números são fundamentais para a Matemática e estão presentes em muitas áreas, como a Teoria da Probabilidade, a Estatística e a Ciência da Computação, Teoria dos Grafos, etc. A Teoria da Análise Combinatória permite que os matemáticos estudem conceitos como permutações, combinações e funções de contagem, que são importantes para a resolução de problemas em vários campos da ciência e da tecnologia.

Na nossa pesquisa, dentro da Análise Combinatória, analisamos os conceitos mais simples do conteúdo: permutações, arranjos, combinações, combinações com repetição e outros. Esses assuntos serão suficientes para resolvermos problemas envolvendo o Jogo do Bicho e a Mega-Sena. Deixamos temas importantes como o Princípio da Inclusão-Exclusão, Princípio das Gavetas de Dirichlet, Teoria de Ramsey e Funções Geradoras de fora do nosso texto, por razões que, muito embora faça parte do curso de Análise Combinatória e que tenham grande valia para a resolução de problemas mais avançados, não encontram maiores aplicabilidades para a resolução de questões neste trabalho.

Segundo Morgado (1991), em seu livro sobre Análise Combinatória e Probabilidade da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), "de maneira geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. (1991, p1)". Ainda nesta Coleção do Professor de Matemática da SBM, os autores falam que existem dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente na Análise Combinatória, que são:

1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.

2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

A Análise Combinatória visa definir maneiras que reduzam a necessidade analítica de contar todos os elementos de forma direta de maneira exaustiva. O método se utiliza de um procedimento geral que busca agrupar elementos em conjuntos que, sob certos aspectos, têm mesmas características, ajudando no caso em situações que temos uma quantidade maior de elementos para contar.

Muito embora essas técnicas gerais sejam eficientes e relativamente fáceis de compreender, bastante são os casos em que será necessária uma certa dose de criatividade para se posicionar no problema de forma arteira, afim de solucioná-lo.

Além dos mecanismos já citados, usamos o conceito de fatorial de um número natural e do Princípio Fundamental da Contagem para auxiliar neste trajeto de busca por maneiras eficazes de contagem.

4.3 Fatorial de um número natural

O fatorial de um número natural é definido como o produto desse número pelos seus antecessores até o um. A notação do fatorial é dada pelo uso do ponto de exclamação depois do número natural. Em outros termos, definimos indutivamente

$$n! = \begin{cases} 1 & se \quad n = 1 \\ n \cdot (n-1)! & se \quad n > 1 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Existe uma convenção que atribui o valor 1 a $0!$. A seguir, veremos alguns exemplos que mostram como podemos manipular expressões que envolvem os números no formato de fatorial.

Exemplo 4.3.1. *Temos:*

i) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$*;*

i) $\frac{10!-6!}{5!} = \frac{5!(10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6-6)}{5!} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 30234$

ii) $\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p)!}{p!(n-p)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)}{p!}$

iii) $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1 = n\cdot(n-1)! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!$

4.4 Princípio Fundamental da Contagem

Definição 4.4.1. *PFC (Princípio Fundamental da Contagem) Se há $T1$ maneiras de tomar uma decisão $D1$ e depois de tomada a primeira decisão existem $T2$ maneiras de tomar $D2$, então o número de possibilidades de tomar as decisões $D1$ e $D2$ sucessivamente é $T1\cdot T2$.*

Vale dizer que embora a definição dada para o Princípio Fundamental da Contagem leve em consideração apenas duas decisões, por indução no número de decisões, mostramos que se existem $D_1, D_2, ...D_n$ decisões sucessivas a serem tomadas e se T_i é a quantidade de maneiras de tomar a decisão D_i, para $i \in \{1, 2, ...n\}$, então o número de maneiras de tomar as decisões $D_1, D_2, ..., D_n$ sucessivamente é $T_1\cdot T_2\cdot\ldots\cdot T_n$.

Há inúmeros exemplos da utilização deste princípio, apresentaremos alguns aqui para melhorar o entendimento.

Exemplo 4.4.1. *Luzia sairá para jantar com seu esposo e está com dúvidas sobre qual vestimenta deve escolher. Ela tem três blusas, duas saias e duas sandálias parecidas. De quantos modos distintos Luzia pode escolher seu "look"?*
Solução.

Nesse caso, pelo Princípio Fundamental da Contagem, Luzia poderá escolher a blusa de três maneiras, a saia de duas e a sandália de outras duas maneiras. Ou seja, $3\cdot2\cdot2 = 12$ *maneiras distintas de escolher a roupa.*

Exemplo 4.4.2. *Se existem* 10 *cambistas e três corridas diárias do Jogo do Bicho, de quantos modos distintos pode-se escolher um cambista e um horário para apostar?*
Solução.

Mais uma vez aqui iremos usar o Princípio Fundamental da Contagem. O total de escolhas possíveis é igual a multiplicação do número de cambistas pela quantidade de corridas durante o dia, ou seja, $10\cdot3 = 30$ *formas distintas.*

Exemplo 4.4.3. *De quantas maneiras podemos escolher cinco bichos distintos do* 1° *ao* 5° *prêmios do Jogo do Bicho, nessa ordem?*
Solução.

Existem 25 *maneiras de escolher o primeiro,* 24 *de escolher o segundo,* 23 *maneiras de escolher o terceiro,* 22 *formas de escolher o quarto e, finalmente,* 21 *formas de escolher o quinto prêmio. Portanto há* $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 6375600$ *maneiras distintas de escolher cinco bichos diferentes obedecendo a ordem do primeiro ao quinto prêmios.*

Exemplo 4.4.4. *Quantos são os possíveis passes que podemos formar no Jogo do Bicho?*
Solução.

Como no passe escolhemos um bicho na cabeça e outro do segundo ao quinto, então temos 25 *modos de escolher o bicho da cabeça e* 25 *modos de escolher o bicho que sai do segundo ao quinto prêmios:* $25 \cdot 25 = 625$ *possibilidades.*

Exemplo 4.4.5. *Em uma aposta da Mega-Sena podemos escolher de 6 a 20 dezenas. A quantidade de dezenas define o tipo e o valor da aposta. Suponha que queremos fazer uma aposta na segunda-feira e outra na terça-feira. De quantas formas podemos fazer essas apostas?*
Solução. *Sabemos que podemos marcar de 6 a 20 dezenas em cada aposta. Portanto temos* 15 *formas distintas de escolher o tipo de jogo realizado. Então o total de formas de se escolher duas apostas, pelo PFC,*

$$15.15 = 225$$

4.5 Permutação Simples

Definição 4.5.1. *Sejam* n *elementos distintos* $a_1, a_2, ..., a_n$*. Cada ordenação desses* n *elementos é chamada de permutação simples.*

As permutações simples referem-se ao fato de podermos mudar a ordem de uma sequência com n objetos e contarmos de forma distinta cada uma delas.

Tomemos n objetos distintos e queremos saber de quantos modos podemos arrumá-los em fila. Cada fila representa uma permutação simples. Perceba que temos n maneiras distintas de escolher o elemento que ocupará a primeira posição na fila, $n-1$ maneiras distintas de escolher o elemento que ocupará a segunda posição, e assim por diante. Para a $k-$ésima posição da fila, teremos $n-k+1$ escolhas possíveis. Na última decisão teremos apenas 1 maneira de escolher o elemento que ocupará a última posição. Pelo PFC, o número de permutações simples desses n objetos distintos é dado por $n!$. Representamos por $P_n = n!$ o número de permutações simples de n elementos distintos.

Exemplo 4.5.1. *Quantos são os anagramas da palavra bicho?*
Solução.

Nesse caso, usando a definição de permutações simples, temos cinco letras distintas, logo teremos $5! = 120$ *anagramas.*

Exemplo 4.5.2. *Quantas são as permutações possíveis do milhar* 1254*?*
Solução.

Nesse caso, como trata-se de mudar a ordem de quatro números distintos podemos fazer $4! = 24$ *permutações.*

Exemplo 4.5.3. *De quantas maneiras distintas podemos escolher a ordem do* 1 *ao* 5 *prêmios dos bichos: Avestruz, Águia, Porco, Tigre e Vaca?*
Solução.

Mais uma vez podemos utilizar as permutações simples para resolver esse problema. Aqui fica $5! = 120$*, já que temos* 5 *bichos distintos.*

Exemplo 4.5.4. *Em um sorteio da Mega-Sena as dezenas 01,06,15,33,48,51 foram sorteadas não necessariamente nessa ordem. De quantos modos podemos arrumar essas seis dezenas de modo que uma delas será a ordem de sorteio correta?*
Solução.

São 6 *dezenas distintas. Portanto, a quantidade de maneiras de arrumá-las é*

$$6! = 720$$

4.6 Combinação Simples

Nas combinações simples, temos o interesse em saber o número de subconjuntos com k elementos tomados de um conjunto com n elementos, com $k \leq n$.

Definição 4.6.1. *Considere um conjunto com n elementos e $k \leq n$. Cada subconjunto de k elementos é chamado de combinação de n elementos tomados k a k ou combinação simples de classe k dos n objetos distintos.*

Denotamos a quantidade de combinações de ordem k de um conjunto com n elementos por C_n^k. A seguir, vamos encontrar uma expressão para C_n^k em função de n e k.

Exemplo 4.6.1. *Considere um conjunto com 6 elementos $A = \{a_1, a_2, , a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Vamos determinar a quantidade de combinações de classe 3 desse conjunto. Primeiro, vamos determinar de quantas maneiras podemos escolher três elementos, em sequência, do conjunto A. A primmeira escolha pode ser feita de 6 maneiras distintas, a escolha do segundo elemento pode ser feita de 5 modos diferentes e a escolha do terceiro elemento pode ser feita de 4 modos distintos. Pelo princípio multiplicativo temos $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneiras distintas de escolhermos 3 elementos do conjunto A, em sequência. Porém, perceba que as escolhas (a_1, a_4, a_5); (a_1, a_5, a_4); (a_4, a_5, a_1); (a_4, a_1, a_5); (a_5, a_4, a_1) e (a_5, a_1, a_4) determinam a mesma combinação $\{a_1, a_4, a_5\}$. Como cada combinação de 3 elementos está associada a $P_3 = 3! = 6$ sequências de três elementos do conjunto A, temos:*

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20.$$

Um raciocínio análogo pode ser feito para determinar a quantidade de combinações de ordem k, $1 \leq k \leq n$, de um conjunto com n elementos. No caso geral

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemplo 4.6.2. *Severino sempre escolhe quatro bichos para jogar no grupo, de quantos modos distintos Severino pode fazer seu jogo?*
Solução.

Nesse exemplo, queremos saber quantas combinações simples dos vinte e cinco bichos tomados quatro a quatro podemos fazer.

$$C_{25}^{4} = \frac{25!}{(25-4)!4!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21!}{21!4!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{303600}{24} = 12650.$$

Portanto há 12650 *formas distintas de se escolher quatro animais do Jogo do Bicho.*

Exemplo 4.6.3. *João apontou no bilhete um jogo da Mega-Sena com oito dezenas, para o seu descontentamento, a lotérica só estava fazendo jogos simples com 6 dezenas. Quantos são os jogos simples que João terá que realizar a fim de contemplar equivalentemente o jogo com oito dezenas?*

Solução.

Para descobrir a quantidade de jogos simples basta fazer a combinação das oito dezenas tomadas 6 a 6. Então,

$$C_{8}^{6} = \frac{8!}{(8-6)!6!} = 28.$$

São necessários 28 *jogos simples para contemplar um jogo com oito dezenas.*

4.7 Permutações com Repetições

Existem também as permutações com repetições. Estas consistem em analisar as permutações de n elementos, considerando que podem haver elementos repetidos.

Por exemplo, vamos supor que queremos contar quantos anagramas possui a palavra "URUGUAI". Queremos obter o número permutações de 7 letras das quais 3 são iguais a U, 1 é igual a R, 1 é igual a G, 1 é igual a A e 1 é igual a I. Para determinar uma permutação dessas letras, vamos arrumá-las em 7 posições $(\_, \_, \_, \_, \_, \_, \_)$. O número de modos de escolher as posições que ficarão as letras iguais a U é C_7^3. Uma vez escolhida as posições das letras iguais a U, temos 4 possibilidades para posicionar a letra R. Depois disso, temos 3 modos de escollher o lugar do G. Seguindo, temos 2 modos de escollher o lugar do A. Após as escolhas feitas, temos apenas 1 lugar para posicionar o I. Pelo PFC, a quantidade de anagramas é dada por

$$C_7^3 \cdot 4! = \frac{7!}{3!} = 840.$$

Para o caso geral, considere n objetos, dos quais α_1 são iguais a x_1, α_2 são iguais a x_2,..., α_k são iguais a x_k e $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$. Para determinar uma permutação desses objetos, isto é, uma forma de ordená-los, devemos arrumar esses objetos em n posições. O número de modos de escolher os lugares que ficarão os elementos iguais a x_1 é $C_n^{\alpha_1}$. Uma vez escolhida as posições dos elementos iguais a x_1 temos $C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2}$ modos de escolher os lugares que ficarão os elementos iguais a x_2. Seguindo dessa forma, para posicionar os elementos iguais a x_j, com $j \in \{1, 2, ..., k\}$, considerando que já foram escolhidas as posições dos elementos iguais a $x_1, x_2, ..., x_{j-1}$ é $C_{n-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}$. No fim desse processo, teremos $C_{n-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} = C_{\alpha_k}^{\alpha_k} = 1$ maneira apenas de posicionar os elementos iguais a x_k. Pelo PFC,

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k} = C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \cdot ... \cdot C_{n-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_{k-1}}^{\alpha_k}$$

$$= \frac{n!}{(n-\alpha_1)!\alpha_1!} \cdot \frac{(n-\alpha_1)!}{(n-\alpha_1-\alpha_2)!\alpha_2!} \cdot \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}{(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!\alpha_3!}$$

$$\cdot ... \cdot \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_{k-1})!}{0!\alpha_k!}$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_k!}.$$

Portanto, a quantidade de permutações dos n objetos, dos quais α_1 são iguais a x_1, α_2 são iguais a x_2,..., α_k são iguais a x_k e $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$ é

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_k!}.$$

Exemplo 4.7.1. *Quantas são as permutações possíveis para os milhares 1234, 1123, 1122? E para 1333?*
Solução.

- *Para 1234,* $P_4 = 4! = 24$ *possibilidades;*
- *Para 1123,* $P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ *possibilidades*
- *Para 1122,* $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ *possibilidades*
- *Para 1333,* $P_4^{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ *possibilidades.*

Exemplo 4.7.2. *Com base neste resultado é que podemos encontrar o valor do prêmio de um milhar pontilhado. Quando a aposta vencedora no milhar pontilhado possui os quatro números distintos, devemos dividir o valor do prêmio por* $4! = 24$*, quando temos três números distintos, devemos dividir o valor do prêmio por* $\frac{4!}{2!} = 12$*, no caso de dois pares de números repetidos, temos que dividir por* 6 *e finalmente com três números repetidos, dividimos por* 4.

Exemplo 4.7.3. *Quantos são os anagramas da palavra Mega-Sena que têm o M e o S em suas posições originais?*
Solução.

Como o M e o S permanecem nas suas posições originais, resta fazer os anagramas das outras 6 letras e observe que as letras e a estão repetidas então, nesse caso, o número de permutações é dado por

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180.$$

4.8 Arranjos

Definição 4.8.1. *Considere um conjunto* A *formado por* n *objetos. Um arranjo de classe* p*,* $1 \leq p \leq n$*, desses* n *objetos é uma seleção ordenada de* p *elementos do conjunto* A*, não sendo permitidas repetições.*

Por exemplo, como escolher dois dias da semana, sendo o primeiro dia para viajar outro para estudar, dentre os sete? Essa pergunta é caraterística de arranjos. Usaremos A_n^p para representar a quantidade de arranjos de classe p de n objetos distintos.

Considere um conjunto A com n elementos. Vamos determinar quantos arranjos simples de classe p podemos formar com os elementos de A. Para construir uma sequências de p elementos de A temos p decisões a tomar. Existem n modos para escolha do primeiro elemento da sequência. Escolhido o primeiro elemento, existem $n-1$ maneiras de escolher o segundo elemento. Seguindo com as decisões, para a p-ésima posição existem $n-p+1$ possibilidades de escolha. Assim, pelo PFC

$$A_n^p = n \cdot ... \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemplo 4.8.1. *Como posso escolher três bichos para o primeiro, segundo e terceiro prêmios dentre os 25 animais dados?*
Solução.

Usando a fórmula para encontrar a quantidade de arranjos, temos:

$$A^3_{25} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

Exemplo 4.8.2. *De quantos modos podemos escolher um milhar de modo que seus algarismos sejam distintos?*
Solução.

Trata-se mais uma vez de um caso clássico de arranjo. Usando a regra acima,

$$A^4_{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

4.9 Combinações com Repetição

Considere um conjunto A com n elementos. Uma combinação completa de classe p desses elementos, $1 \leq p \leq n$, é uma escolha de p elementos, distintos ou não, do conjunto A.

A combinação com repetição sugere que se possa ter nos conjuntos das combinações elementos repetidos, ou seja, podemos formar combinações com caracteres repetidos.

Por exemplo, suponha que em uma loja existam 3 tipos de frutas, S_1, S_2 e S_3. De quantos modos podemos comprar duas frutas nessa loja? A resposta para essa pergunta não é C^2_3, porque uma combinação simples não admite elementos repetidos. Devemos determinar os modos de escolher duas frutas, distintas ou não, dentre os 3 tipos disponíveis. Nesse caso, as escolhas possíveis são:

$$\begin{array}{ll} S_1, S_1 & \quad S_1, S_2 \\ S_2, S_2 & \quad S_1, S_3 \\ S_3, S_3 & \quad S_2, S_3 \end{array}$$

CR^p_n denotará o número de combinações completas de classe p de n elementos distintos, ou seja, CR^p_n é o número de modos de escolher p elementos distintos ou não entre n elementos dados.

Vamos determinar CR_n^p em função de n e p. Considere n objetos distintos, $a_1, a_2, ..., a_n$. Seja $\mathcal{P}$ uma combinação completa de ordem p desses elementos. Denotaremos por $x_j(\mathcal{P})$ a quantidade de elementos iguais a a_j em $\mathcal{P}$, para $j = 1, 2, .., n$. Note que

$$x_1(\mathcal{P}) + x_2(\mathcal{P}) + ... + x_n(\mathcal{P}) = p.$$

Seja $S_p = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_1 + x_2 + ... + x_n = p\}$ o conjunto das soluções não-negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$. É fácil ver que a correspondência sugerida acima $f : CR_n^p \to S_p$, dada por $f(\mathcal{P}) = (x_1(\mathcal{P}), x_2(\mathcal{P}), ..., x_n(\mathcal{P}))$ é biunívoca. Portanto, CR_n^p é igual a quantidade de elementos de S_p.

Para determinar o número de soluções de S_p usaremos as técnicas de contagem apresentadas. Usaremos o método conhecido como bola traço: cada bola representa uma unidade no valor da incógnita e cada traço é usado para separar duas incógnitas. As soluções da equação são dadas pelas arrumações em fila desses objetos. Por exemplo, no caso de $n = 5$ e $p = 3$ ($x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$) deveremos ter 4 traços e 3 bolas. A arrumação em fila

Figura 4.1: Sistema bola-traço

Fonte: elaborado pelo autor

representa a solução $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0$.

No caso geral, ($x_1 + x_2 + ... + x_n = p$), as soluções são determinadas pelas arrumações em fila de $n - 1$ traços e p bolas. Assim,

$$CR_n^p = P_{n+p-1}^{n-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!} = \begin{pmatrix} p \\ n+p-1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.9.1. *De quantas maneiras podemos escolher os cinco bichos que podem sair em uma extração do Jogo do Bicho?*

Solução.

A solução desse problema é conseguida usando combinações com repetição, visto que podemos obter resultados com animais repetidos. Nesse caso, temos 25 animais que serão postos em 5 posições.

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 25+5-1 \end{pmatrix} = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24!}{24!5!} = \frac{29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5 = 118755.$$

Exemplo 4.9.2. *Um apostador precisa realizar três apostas em uma semana na Mega-Sena, de quantas maneiras ele pode escolher os dias para apostar?*

Solução.

Podemos usar combinações com repetição para encontrar o resultado esperado. Nesse caso são sete dias e três jogos:

$$CR_7^3 = C_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!3!} = 84$$

maneiras.

Capítulo 5

PROBABILIDADE

Neste capítulo apresentamos as noções de probabilidade, um pouco de sua história, conceitos e exercícios envolvento probabilidade e esperança matemática. As principais referências usadas na construção desse capítulo foram mais uma vez os livros e trabalhos de Morgado(1991), Franco(2020) e Silva(2015), além de textos encontrados em outros trabalhos e dissertações do PROFMAT já citatas anteriormente como também e referenciadas ao final desse trabalho.

5.1 Um pouco de história da Probabilidade

A história da probabilidade começa com jogos de azar na antiguidade, onde matemáticos, como o grego Antíoco de Caryste, desenvolveram teoremas sobre probabilidade de resultados em jogos como dados. No Renascimento, matemáticos como Gerolamo Cardano e Blaise Pascal estudaram e desenvolveram a Teoria da Probabilidade ao pesquisar questões relacionadas a apostas.

Gerolamo Cardano era italiano, médico, matemático e astrólogo. Sua contribuição no campo das probabilidades se impôs através dos estudos sobre jogos de azar. Detalhou em seu livro Liber de Ludo Aleae(Livro dos jogos de azar) problemas de enumeração e resultados sobre jogos de dados.

Blaise Pascal nasceu na França, foi um filósofo, matemático, físico, inventor e teólogo. No campo das probabilidades e Análise Combinatória, influenciou com o desenvolvimento do triângulo aritmético(Triângulo de Pascal) e também estudos relacionados aos jogos de azar.

No século XVII, o matemático francês Pierre de Fermat e o filósofo inglês John Locke foram importantes contribuidores para a compreensão da probabilidade como uma disciplina matemática. No século XVIII o matemático suíço Jakob Bernoulli escreveu um importante trabalho sobre a probabilidade, que foi continuado por seu irmão Nicolau Bernoulli.

No século XIX, o matemático francês Pierre-Simon Laplace consolidou a Teoria da Probabilidade com sua obra 'A teoria analítica das probabilidades". A probabilidade tornou-se uma ferramenta valiosa em várias áreas, incluindo estatística, economia e ciências da computação. Desde então, a probabilidade tem sido objeto de estudo constante e continua a ser uma área de pesquisa ativa na matemática.

Jakob Bernoulli assim como Nicholas Bernoulli nasceram na Suíça e se destacaram na matemática, principalmente no estudo da probabilidade, pelas suas contribuições com a ligação entre probabilidade e a qualidade das informações que formam a base das estimativas probabilísticas. A principal obra de Jakob Bernoulli é Ars Conjectandi que reúne conhecimentos sobre a história da probabilidade.

Fermat, nascido na França, era magistrado e se dedicou à matemática, física e a poesia de forma não formal, tratava a matemática como atividade não principal em sua vida, mas foi um dos maiores, se não o maior, matemáticos de sua época. Tendo contribuído em vários campos da matemática, na probabilidade, ele se relacionou com Pascal através de cartas e tratavam soluções sobre resultados de jogos de azar e dados.

5.2 Experimento aleatório e experimento determinístico

Podemos dividir os experimentos observados em nosso cotidiano em dois tipos: experimentos aleatórios e determinísticos. Estes se baseiam na hipótese de se realizados sob as mesmas condições produzem resultados iguais, àqueles, ditos aleatórios, se realizados sob as mesmas condições não conduzem, necessariamente, a resultados iguais.

Exemplo 5.2.1. *O lançamento de uma moeda honesta é um exemplo de experimento aleatório. Nesse caso, por mais que façamos o lançamento da moeda de maneira* *igual, jamais teremos a certeza de obter o mesmo resultado.*

Exemplo 5.2.2. *A velocidade média de um automóvel e as leis da física são exemplos de experimentos determinísticos. Se lançarmos sob as mesmas circunstâncias determinado objeto ele cairá sempre no mesmo local.*

No nosso estudo, vamos trabalhar com os experimentos aleatórios. Apesar de não conhecermos o resultado desses experimentos, temos que ter uma noção dos possíveis resultados, para que tenhamos como calcular as chances de ocorrência desses experimentos.

5.3 Espaço amostral e eventos

Definição 5.3.1. *O conjunto de todos os resultados possíveis de um determinado experimento aleatório é dito espaço amostral e será representado pela letra grega ômega* (Ω)*. Seja* E *um subconjunto do espaço amostral* Ω*, diremos que* E *é um evento. Se o subconjunto* E *for unitário diremos que o evento é elementar.*

Exemplo 5.3.1. *Os subconjuntos* Ω *(evento certo), ou* $\emptyset$ *(evento impossível) são exemplos triviais de eventos aleatórios. Considere o experimento aleatório de jogar um dado e observar o número da face virada para cima. Nesse experimento, o espaço amostral é* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. O evento* $\{1, 3, 5\}$ *acontece se o número mostrado na face é ímpar. São exemplos de eventos elementares* $\{1\}$ *e* $\{5\}$*.*

Seja E um evento de um espaço amostral, o evento complementar de E é dado por $E^c = \Omega - E$.

5.4 Definição de probabilidade

A probabilidade estudada neste trabalho é dita probabilidade de Laplace, em homenagem ao grande matemático francês, Pierre Simon Laplace, que publicou em seu livro ensaios filosóficos sobre as probabilidades, reproduzido na Coleção do Professor de Matemática da SBM:

> *A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.(apud MORGADO, 1991, p. 118)*

Na definição de probabilidade que damos a seguir, admitimos que os espaços amostrais possuem as seguintes propriedades:

1) Ω é finito.

2) Ω é equiprovável, ou seja, os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrência.

A definição de probabilidade (de Laplace) consiste no quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Como notação, temos que dado um evento E, com m elementos, em um espaço amostral Ω, que possui n elementos

$$\text{Probabilidade de } E = P(E) = \frac{\#(E)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{m}{n}.$$

Exemplo 5.4.1. *Como consequência da definição temos algumas propriedades:*

a) Para todo evento E, $0 \leq P(E) \leq 1$;

b) $P(\Omega) = 1$

c) $P(\emptyset) = 0$

d) Se E e F são eventos tais que $E \cap F = \emptyset$, então $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

Trabalhamos com alguns exemplos comuns e posteriormente iremos colocar exercícios sobre o Jogo do Bicho:

Exemplo 5.4.2. *No experimento de lançar um dado e observar a face virada para cima, o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O evento $E = \{2, 4, 6\}$ representa a probabilidade de dar um número par. Logo*

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

onde $P(E)$ é a probabilidade de dar um número par do evento.

Exemplo 5.4.3. *Qual a Probabilidade de não acertar nenhuma dezena em um sorteio da Mega-Sena em que o apostador fez uma aposta simples, ou seja, com apenas 6 números?*

Solução.

O espaço amostral nesse exemplo é dado por todos os resultados possíveis, ou seja, por todas as combinações possíveis para uma aposta simples. O número de elementos do espaço amostral é dado por

$$C_60^6 = \frac{60!}{(60-6)!6!}.$$

O número de possibilidades de não sair nenhuma das seis dezenas apostadas é dado por todas as combinações das outras 54 dezenas tomadas 6 a 6, ou seja,

$$C_54^6 = \frac{54!}{(54-6)!6!}.$$

Logo, a Probabilidade procurada é

$$P = \frac{C_54^6}{C_60^6} = \frac{54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55} = 0,5158 = 51,58\%$$

Observe que a probabilidade de se acertar pelo menos uma dezena, numa aposta simples da Mega-Sena é aproximada às chances de não se acertar nenhuma dezena.

Observação 5.4.1. *Existe uma definição mais geral de probabilidade. Mostramos essa definição à seguir. Seja Ω um conjunto, dizemos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, onde $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos de Ω, é uma sigma-álgebra se satisfaz:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- *Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$*
- *Se $A_i \in \mathcal{F}$, para $i \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$*

Os conjuntos $\{\emptyset, \Omega\}$ e $P(\Omega)$ são exemplos triviais de sigma-álgebra. Dizemos que uma função $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ é uma probabilidade se

1- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$;

2- *Para toda sequência* $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ *de elementos disjuntos, dois a dois,* $\mathcal{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) =_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)$.

Para mais detalhes sobre essa definição mais geral de probabilidade, indicamos a referência [9]. A terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *é chamada de espaço de probabilidade. Quando* Ω *é finito e equiprovável, a probabilidade de Laplace satisfaz trivialmente as condições* (1) *e* (2) *dessa definição, com* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. *Para analisar os jogos de azar, vamos considerar sempre a probabilidade de Laplace, definida anteriormente.*

Observação 5.4.2. *Seja* E *um evento do espaço amostral* Ω. *Indicamos por* E^c *o evento complementar de* E*, ou seja* $E^c = \Omega \setminus E$. *Do exemplo 4.4.1, temos* $1 = P(\Omega) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$. *Consequentemente* $P(E^c) = 1 - P(E)$.

Definição 5.4.1. *Dados dois eventos* A *e* B*, com* $P(A) > 0$*, a probabilidade condicional de* B *dado* A *é o número* $P(B/A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exemplo 5.4.4. *Em um sorteio do Jogo do Bicho, comumente o apostador pergunta ao cambista o seu palpite (qual o bicho que o cambista acha que dará). Em um certo dia, Joana foi apostar e pediu o palpite do cambista que lhe informou acreditar que daria um dos cinco primeiros bichos, pois já havia alguns dias que esses animais não apareciam nas premiações. Joana jogou em um desses 5 bichos. Sabendo que foi sorteado um dos 5 bichos no grupo, qual a probabilidade de Joana ter ganhado?*

Solução.

Poderemos aqui trabalhar com o conceito de probabilidade condicional. O espaço amostral tem 25 *bichos no total. Considere o evento* B*, formado pelo único bicho escolhido por Joana e o evento* A *formado pelos cinco primeiros bichos. A probabilidade de ocorrer o evento* $A \cap B$ *é* $\frac{1}{25}$. *A probabilidadde de ocorrer o evento* A *é de* $\frac{5}{25}$. *Então a probabilidade de Joana ganhar no grupo, considerando que um dos cinco primeiros bichos foi sorteado:*

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5}.$$

A definição acima motiva-nos a definir a noção de eventos independentes. Quando a ocorrência do evento A não influencia na ocorrência do evento B, com $P(A) > 0$, temos

$$P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Definição 5.4.2. *Dois eventos A e B são ditos independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.*

Eventos independentes são aqueles em que um evento para acontecer independe o outro.

Exemplo 5.4.5. *Ao lançarmos um dado e uma moeda honesta, qual a probabilidade de sair um seis e cara?*

Solução.

Sejam A = evento sair seis no dado e B = sair cara na moeda A probabilidade de sair o número seis no dado é $P(A) = \frac{1}{6}$ e dar cara na moeda é $P(B) = \frac{1}{2}$, como são eventos independentes, usamos nesse caso a probabilidade de eventos independentes:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Exemplo 5.4.6. *Qual a probabilidade de dar gato na cabeça (primeiro prêmio) e pelo menos um veado do segundo ao quinto prêmio em uma corrida (extração ou sorteio) do Jogo do Bicho?*

Solução.

Aqui, temos dois eventos independentes, quais sejam: evento A – dar gato na cabeça, evento B- dar pelo menos um veado do segundo ao quinto. A probabilidade de dar gato na cabeça é

$$P(A) = \frac{1}{25}.$$

A probabilidade de dar pelo menos um veado do segundo ao quinto é calculada assim:

$$P(B) = \frac{25^4 - 24^4}{25^4} = \frac{58849}{390625}.$$

Então, a probabilidade de dar o gato na cabeça e o veado do segundo ao quinto é, segundo da definição de eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{25} \cdot \frac{58849}{390625} = \frac{58849}{9765625} = 0,6026\%.$$

aproximadamente.

5.5 Esperança ou valor esperado

A esperança matemática pode ser interpretada de várias formas, pode ser encarada como uma média, valor esperado, previsão, preço justo, etc. Pensando nessas várias abordagens e interpretações acerca da esperança matemática, trouxemos um estudo que envolve variáveis aleatórias discretas em experimentos aleatórios e mostramos esse modelo probabilístico com enfase nos jogos de azar.

Definição 5.5.1. *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $X^{-1}(-\infty, x] = \{y \in \Omega \colon X(y) \leq x\} \in \mathcal{F}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Segue diretamente da definição acima que no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, toda função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória. Se a imagem de X é um conjunto discreto, diremos que X é uma variável aletória discreta.

Exemplo 5.5.1. *Seja A um conjunto finito e não-vazio. Considere o jogo de azar do tipo loteria, que consiste em sortear um elemento do conjunto A. Suponha que o experimento é equiprovável. O espaço amostral é o próprio conjunto A. Sejam v o valor pago por um jogador para participar do sorteio e p a premiação em caso de acerto. Nesse contexto, podemos definir a variável aleatória discreta X que associa a cada $b \in A$ o valor ganho ou perdido pelo jogador, caso o elemento sorteado seja b. Então $X(b) = p - a$, se b foi o elemento apostado pelo jogador e $X(b) = -a$ caso contrário.*

Definição 5.5.2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória discreta. A função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores x_i assumidos pela variável aleatória X, isto é,*

$$p(x_i) = P(x \in \Omega : X(x) = x_i)$$

é chamada de função de probabilidade.

Observação 5.5.1. *Veja que*

$$\{x \in \Omega \colon X(x) = x_i\} = \{x \in \Omega \colon X(x) \leq x_i\} \cap \{x \in \Omega \colon X(x) \geq x_i\},$$

$$\{x \in \Omega \colon X(x) \geq x_i\} = \{x \in \Omega \colon X(x) < x_i\}^c$$

e

$$\{x \in \Omega \colon X(x) < x_i\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \Omega \colon X(x) \leq x_i - \frac{1}{n}\right\}$$

Pela Observação 5.4.1 e definição de variável aleatória, temos

$$\{x \in \Omega \colon X(x) = x_i\} \in \mathcal{F}.$$

Isto garante a boa definição da função de probabilidade.

A esperança de uma variável discreta é o somatório das multiplicações de todas os valores $x_i's$ de uma variável X pela sua probabilidade $P(X = x_i)$ associada. A esperança é denotada por $E(X)$ e trataremos com essa importante ferramenta no intuito de encontrar o valor esperado de ganho nos resultados dos jogos de azar. Formalmente,

Definição 5.5.3. *Seja X uma variável aleatória discreta em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suponha que X assume seus valores em $= \{x_1, x_2, ..., x_n ...\}$. Seja p a função de probabilidade. O valor esperado, esperança matemática ou média de X, denotado por $E(X)$ é definido como*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i),$$

desde que a série seja absolutamente convergente. Caso contrário, dizemos que o valor esperado não existe.

Algumas propriedades:

I- A esperança da soma de variáveis aleatórias é igual a soma das esperanças dessas variáveis: $E(A + B) = E(A) + E(B)$

II- A esperança da multiplicação de uma constate "c" por uma variável aleatória "A" é igual à constante multiplicada pela esperança: $E(cA) = cE(A)$.

IIII- A esperança de uma constante é igual à constante: $E(c) = c$.

Observação 5.5.2. *Nas análises feitas à seguir sobre os jogos de azar que estamos estudando, sempre consideramos a esperança calculada sobre a variável aleatória* X *que associa a cada elemento do espaço amostral o valor ganho ou perdido pelo jogador, caso o elemento seja o resultado do sorteio. Por exemplo, suponha que um jogador apostou* 10 *u.m. na vaca, na modalidade de subjogo "grupo". A premiação, em caso de acerto é de* 200 *vezes o valor apostado. O espaço amostral é formado pelos* 25 *bichos. Então* $X(B) = 200 - 10 = 190$ *se* $B = vaca$ *e* $X(B) = -10$*, caso contrário.*

Exemplo 5.5.2. *Como calcular o valor esperado de ganho apostando* 10 *u.m. na vaca?*

Solução.

Esse tipo de aposta, no grupo, remunera em caso de vitória em vinte vezes o valor apostado. Como existem 25 *resultados possíveis, a probabilidade de sair a vaca é* $\frac{1}{25}$*, e portanto a probabilidade de perdermos é* $\frac{24}{25}$*. Calculando a esperança ou, nesse caso, o valor esperado temos: aqui vamos considerar o valor de* 190 *u.m., que é o valor recebido em caso de vitória, multiplicado pela probabilidade de dar a vaca* $\frac{1}{25}$*. Depois somamos com a multiplicação de* -10*, que é o valor que o apostador perde em caso de derrota, com a probabilidade de derrota que é* $\frac{24}{25}$*.*

$$E(X) = 190 \cdot \frac{1}{25} – 10 \cdot \frac{24}{25} = 8 – 9,6 = -2 \text{ u.m.}$$

Note que a expectativa de ganho é negativa em 2 *u.m. Isso significa que apostando* 10 *u.m. várias vezes, temos que a média de prejuízo é de* 2 *u.m. multiplicada pela quantidade de vezes apostadas.Tratamos esses valores esperados e a questão do preço justo detalhadamente no próximo tópico.*

Outra aplicação importante para a esperança é a questão do preço justo. Usando o exemplo anterior, podemos analisar qual seria o preço justo, x, que o banqueiro deveria pagar para tornar a aposta equilibrada. Ou seja, para que o apostador e o banqueiro tenham expectativas de ganho zero. Fazendo $E(X) = 0$,

$$0 = (x - 10) \cdot \frac{1}{25} – 10 \cdot \frac{24}{25} \to x = 250.$$

Então, o valor justo para recompensar uma aposta de 10 u.m. jogando no grupo, seria 250 u.m.

Exemplo 5.5.3. *Nesse exemplo, vamos considerar o jogo de azar formado por três dados. O jogador escolhe um número de 1 a 6 e lança os três dados. Observa-se então as faces dos três dados. Se o número escolhido pelo jogador aparece nos três dados, então o jogador ganha 3 u.m. Se o número escolhido pelo jogador aparece exatamente em dois dados, então o jogador ganha 2 u.m. Se o número escolhido pelo jogador aparece somente em um dado, então o jogador ganha 1 u.m. Caso o número do jogador não apareça em nenhum dado, então ele perde 1 u.m. Qual o valor esperado pelo jogador?*

Solução.

Considerando que os dados são idênticos, podemos representar o nosso espaço amostral como o conjunto das ternas (a, b, c), tais que $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para encontrar a quantidade de elementos do espaço amostral, pelo princípio multiplicativo, basta multiplicar os resultados possíveis para cada dado. Nesse caso, $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ possibilidades. Escolhendo um número, ele aparece nos três dados em somente um resultado, logo a probabilidade de se ganhar o prêmio triplicado é de $\frac{1}{216}$. Na opção em que se ganha somente 1 u.m., temos que a possibilidade de aparecer o número escolhido uma única vez é de $C_3^1 \cdot 5^2 = 75$, pois temos 3 maneiras distintas de posicionar o número escolhido na trinca de dados e 5^2 possibilidades para os outros dois dados. Sua probabilidade portanto é $\frac{75}{216}$. As possibilidades do número escolhido sair em exatamente dois dados é $C_3^2 \cdot 5$. Logo a probabilidade de se ter a premiação dobrada é de $\frac{15}{216}$. A probabilidade do jogador perder 1 u.m. é $\frac{216-75-15-1}{216}$ Agora para encontrar o valor esperado devemos multiplicar cada probabilidade pelo seu respectivo valor de ganho:

$$\textit{Valor esperado } = 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} - 1 \cdot \frac{125}{216} = \frac{108 - 125}{216} = -0,08 \textit{ u.m.}$$

Exemplo 5.5.4. *Como podemos calcular o valor esperado de ganho para uma aposta da Mega-Sena da Virada, com premiação estimada em 300 milhões de u.m. onde o apostador faz uma aposta de 20 dezenas?*

Solução.

O valor de uma aposta com 20 dezenas é 193800 *u.m. A Probabilidade de acertar as seis dezenas dentre as* 20 *escolhidas é*

$$\frac{C_2 0^6}{C_6 0^6} = \frac{1}{1292}.$$

Logo

$$E = (3 \cdot 10^8 - 193800) \cdot \frac{1}{1292} - 193800 \cdot \frac{1291}{1292} = 38398,14 u.m.$$

aproximadamente.

Capítulo 6

ANÁLISE DOS JOGOS SOBRE A ÓTICA DA PROBABILIDADE E ESPERANÇA

Neste capítulo, trabalhamos as aplicações dos conceitos matemáticos vistos até aqui utilizando o Jogo do Bicho. Descriminamos, em cada subjogo, sua probabilidade de ocorrência e seu valor esperado e para isso usamos as ferramentas da Análise Combinatória e Probabilidade já mencionadas no texto. Notamos que praticamente todo o conteúdo do ensino médio que relaciona os problemas de contagem e probabilidade podem ser apresentados utilizando o Jogo do Bicho ou outro jogo de azar.

6.1 Grupo

A probabilidade de acerto jogando um bicho do grupo é

$$P(G) = \frac{1}{25};$$

temos uma chance de vitória em vinte e cinco possíveis. Note que não tivemos maiores dificuldades para determinar o espaço amostral e o evento.

Exemplo 6.1.1. *Uma aposta de 15 u.m. foi feita no macaco. Calcule a probabilidade de dar macaco no primeiro prêmio. Calcule também a sua esperança, ou seja, sua expectativa de ganho.*

Solução.

Observe que aqui é fácil encontrar, com tudo que já foi dito, a probabilidade de dar macaco. O evento (dar macaco no primeiro prêmio) se verifica em apenas uma *possibilidade, enquanto no espaço amostral são vinte e cinco possibilidades, logo:*

$$P(macaco) = \frac{1}{25}.$$

Para encontrar o valor esperado, temos que fazer o valor que obteremos em caso de acerto, $300 - 15 = 285$ *u.m., multiplicado pela probabilidade de acerto e descontar o valor que perderemos em caso de derrota,* 15 *u.m., também multiplicado pelo valor respectivo de sua probabilidade, que será o complementar de* $P(macaco)$*,* $P^c(macaco) = \frac{24}{25}$*.*

$$E(macaco) = 285 \cdot \frac{1}{25} - 15 \cdot \frac{24}{25} = -3 \ \ \textit{u.m.}$$

Aqui, apostando 15 *u.m. no grupo, na cabeça, temos uma expectativa de perder* 3 *u.m. por aposta no valor de u.m.*

Exemplo 6.1.2. *Considerando uma aposta de* x *u.m. na cabeça, o valor esperado é de*

$$E(x) := (20 \cdot x - x) \cdot \frac{1}{25} - x\frac{24}{25} = -\frac{x}{5}.$$

$E(x)$ *é uma função linear e negativa para todo valor* x*. Veja, quanto maior o valor de* x *menor será o valor esperado. Suponha agora que seja* $y \cdot x$ *o prêmio recebido, por uma aposta* x*. Seja* $E(x,y)$ *o valor esperado para uma aposta de* x*, considerando que o prêmio da aposta vencedora seja* yx*. Temos*

$$E(x,y) = \frac{yx - x}{25} - x\frac{24}{25} = x\left(\frac{y-1}{25} - \frac{24}{25}\right).$$

Por um cálculo simples, concluímos que $y = 25$ *é o valor para o qual* $E(x,y) = 0$ *para toda aposta* x*. Ou seja, o banqueiro deveria oferecer* 25 *vezes o valor da aposta para ser considerado justo do ponto de vista matemático.*

Exemplo 6.1.3. *Imagine agora que a mesma aposta do item anterior foi realizada do primeiro ao quinto prêmios. Vamos calcular a probabilidade de acerto e também sua esperança.*

Solução.

Como a aposta foi de 15 *u.m. do primeiro ao quinto, cada vez que o macaco aparecer dentre os cinco prêmios o apostador ganhará* 60 *u.m., que é o valor dos* 15 *u.m. dividido pelos cinco prêmios e multiplicado por* 20*, menos o valor da aposta.*

Para cada sorteio (do primeiro ao quinto prêmio), temos 25 *possibilidades de bichos. Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de elementos do espaço amostral é dada por:*

$$\#\Omega = 25^5 = 9765625.$$

Agora, devemos encontrar o número de elementos do evento formado por todas as extrações dos cinco prêmios em que aparece pelo menos um macaco. Para encontrar a quantidade de elementos desse evento devemos dividir nosso problema nos casos: contar a quantidade de extrações em que o macaco aparece exatamente uma vez, exatamente duas, exatamente três, exatamente quatro e exatamente cinco vezes e depois somar essas quantidades. Com efeito

- *Uma vez: Vamos determinar o número de extrações em que o macaco aparece exatamente uma vez. Note que o único macaco tem 5 possibildades de sorteio. Uma vez escolhido o sorteio em que aparece o macaco, os outros* 4 *sorteios possuem 24 possibilidades de bichos cada. Pelo princício multiplicativo temos:*

  $$C_5^1 \cdot 24^4 = 1658880.$$

  A probabilidade de sair exatamente um macaco entre os cinco prêmios é de

  $$\frac{1658880}{9765625} = 16,99\%$$

  aproximadamente, e o valor pago por esse jogo será $3 \cdot 20 = 60$ *u.m.*

- *Duas vezes: Seguindo a mesma ideia do primeiro caso, vamos primeiro escolher os sorteios que estarão os* 2 *macacos. Essa escolha pode ser feita de* C_5^2 *maneiras. Os* 3 *outros sorteios existem* 24^3 *possibilidades. Assim, a quantidade de extrações em que aparecem exatamente* $dois$ *macacos é*

  $$C_5^2 \cdot 24^3 = 10 \cdot 24^3 = 138240$$

  A probabilidade de aparecer o macaco exatamente duas vezes é de

  $$\frac{138240}{9765625} = 1,42\%$$

  aproximadamente e o valor recebido caso apareça dois macacos é de 120 *u.m.*

- *Três vezes:*

$$C_5^3 \cdot 24^2 = 10 \cdot 24^2 = 5760$$

A probabilidade de aparecer o macaco três vezes é de

$$\frac{5760}{9765625} = 0,05898\%$$

e aqui o valor pago é de 180 *u.m.*

- *Quatro vezes:*

$$C_5^4 \cdot 24 = 5 \cdot 24 = 120$$

A probabilidade é de

$$\frac{120}{9765625} = 0,00123\%.$$

aproximadamente. O valor do prêmio é de 240 *u.m.*

- *Cinco vezes:*

$$C_5^5 = 1$$

A probabilidade de ocorrer os cinco macacos é

$$\frac{1}{9765625}$$

O valor do prêmio são 300 *u.m.*

Logo, o evento "sair pelo menos um macaco"tem $1 + 120 + 5760 + 138240 + 1658880 = 1803001$ *elementos. Agora a probabilidade de acertarmos no macaco é:*

$$P(macaco) = \frac{1803001}{9765625} = 18,46\%.$$

aproximadamente. Este resultado mostra, por exempo, que é mais fácil ganhar jogando cinco bichos na cabeça do que apenas um do primeiro ao quinto prêmio. Para encontrar o valor esperado, é necessário somar os resultados dos produtos dos valores dos prêmios, descontados do valor da aposta, por suas respectivas probabilidades. Assim, vamos fazer a esperança dos casos em que o macaco aparece de uma a cinco vezes:

$$E(macaco) = 45 \cdot \frac{1658880}{9765625} + 105 \cdot \frac{138240}{9765625} + 165 \cdot \frac{5760}{9765625} + 225 \cdot \frac{120}{9765625}$$
$$+285 \cdot \frac{1}{9765625} - 15 \cdot \frac{(9765625 - 1803001)}{9765625} = -3.$$

6.2 Dezena

Para calcular o espaço amostral na dezena temos que nos ater ao fato de que o algarismo das unidades pode ser escolhido de 10 modos e o das dezenas de outros 10 modos. Logo, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de dezenas possíveis é $10 \cdot 10 = 100$.

A probabilidade de acertar uma dezena (no primeiro prêmio) é $P(D) = \frac{1}{100}$ e o valor da premiação é de 60 vezes o valor apostado.

Exemplo 6.2.1. *Vamos calcular o valor esperado de ganho apostando* 10 *u.m. por* 30 *dias em cada corrida do Jogo do Bicho.*

Solução.

Sabendo que são três corridas diárias, no total serão 90 *apostas de* 10 *u.m. Então iremos calcular o valor esperado para uma aposta e multiplicar o resultado por* 90. *Apostando* 10 *u.m. na dezena, em caso de acertar, o prêmio é de* 600 *u.m., então:*

$$E(D) = (600 - 10) \cdot \frac{1}{100} - 10 \cdot \frac{99}{100} = -4 \quad \textit{u.m.}.$$

Logo o valor esperado que o apostador perca ao longo de trinta dias é de $90 \cdot 4 = 360$ *u.m.*

Exemplo 6.2.2. *De maneira geral, para um valor apostado* x*, tendo como premiação* xy*, a nossa função do valor esperado* $E(x, y)$ *é dada por:*

$$E(x, y) = \frac{xy - x}{100} - \frac{99x}{100} = x\left(\frac{y - 100}{100}\right).$$

Para que o jogo da dezena seja considerado justo, o $y = 100$*, ou seja, para* $E(x, y) = 0$ *deveremos ter* $x = 0$ *ou* $y = 100$*. Nesse caso, ou não se aposta ou o valor da premiação tem que ser multiplicado por* 100.

6.3 Centena

Como no caso das dezenas, usaremos o princípio multiplicativo para encontrar o número de elementos do espaço amostral que também é o número de centenas possíveis: para o algarismo das unidades temos 10 modos, para o das dezenas temos 10 e para o das centenas temos 10 modos. Logo, o resultado é: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ casos possíveis. A probabilidade de acertar uma centena (no primeiro prêmio) é de

$$P(C) = \frac{1}{1000}$$

e o valor da premiação é de 500 vezes o valor apostado.

Exemplo 6.3.1. *Vamos determinar o valor esperado de ganho em uma centena cujo o valor da aposta é de* 10 *u.m. e essa aposta foi repetida por um ano em todas as corridas.*

Solução.

Como a aposta foi feita por um ano e em todas as corridas, temos que encontrar o valor da esperança e multiplicar por 1095*, que é o número de apostas feitas em um ano (de 365 dias).*

$$E(C) = (5000 - 10) \cdot \frac{1}{1000} - 10 \cdot \frac{999}{1000} = -5.$$

Nesse caso, o valor esperado depois de um ano é que o apostador tenha perdido $1095 \cdot (-5) = -5475$ *u.m.*

Exemplo 6.3.2. *Aqui de forma geral, para um valor* x *apostado e* xy *como premiação, temos que o valor esperado buscado como resultado da média, temos:*

$$E(x, y) = \frac{x(y-1)}{1000} - \frac{999x}{1000} = x\left(\frac{y - 1000}{1000}\right) = x\left(\frac{y}{1000} - 1\right),$$

com $y = 1000$ *como fator multiplicativo para o caso do jogo ser considerado justo.*

6.4 Milhar

No milhar, a quantidade de elementos do espaço amostral também é encontrado usando o princípio multiplicativo, ou seja, para o algarismo das unidades, temos 10 possibilidades, para as dezenas mais 10, as centenas 10 e para o algarismo dos milhares temos mais 10 modos de se escolher. Portanto, o número de milhares é $10^4 = 10000$.

A probabilidade de acertar o milhar no primeiro prêmio é de

$$P(M) = \frac{1}{10000} = 10^{-4},$$

e o valor da premiação é de 4000 vezes o valor apostado.

Exemplo 6.4.1. *Vamos calcular a esperança matemática para uma aposta de* 12 *u.m. feita por um tempo indeterminado no milhar* 1224*, essa aposta é pontilhada, ou seja, na ordem que der os números* 1224 *ocorre o prêmio.*
Solução.

Como o milhar é pontilhado, vamos dividir o valor da aposta pelo número de permutações do milhar. Sendo assim, o número de permutações é $P_4^2 = 4!/2! = 12.$

$$E(M) = (\frac{48000}{12} - 12) \cdot \frac{12}{10000} - 12 \cdot \frac{9988}{10000} = -7,2 \ \ \textit{u.m.}.$$

Isso significa que o apostador tende a perder, em média $7,2$ *u.m. por corrida (sorteio), numa situação em que o apostador sempre jogue* 12 *u.m.*

Exemplo 6.4.2. *Continuando a nossa análise da forma geral e fazendo analogamente aos exemplos anteriores para os demais jogos, em uma aposta de* x *com premiação* yx *no milhar simples, temos*

$$E(x, y) = \frac{x(y-1)}{10000} - \frac{9999x}{10000} = x\left(\frac{y}{10000} - 1\right),$$

temos aqui que $y = 10000$ *seria o valor do fator multiplicativo para o qual o jogo seria considerado justo.*

6.5 Duque

Para achar a quantidade de extrações possíveis em que um certo duque aparece, temos que dividir nosso problema em duas partes: primeiro encontrar a quantidade de extrações em que o duque escolhido aparece exatamente uma única vez e depois encontrar a quantidade de extrações em que aparece duas vezes o mesmo duque. Calculando dessa forma, teremos maior facilidade quando formos encontrar o valor esperado, sendo que o duque aparecendo duas vezes no mesmo sorteio, o valor do prêmio é dobrado. Já sabemos a quantidade de elementos de nosso espaço amostral, ele aparece no exemplo 6.1.3. O valor é 9765625, esse número são as possibilidades de aparecerem cinco bichos podendo ser repetidos ou não do primeiro ao quinto prêmio. Então, basta para nós, encontrarmos o número de vezes em que um determinado duque aparece, nosso evento.

Suponha que o duque escolhido seja formado pelos bichos distintos B_1 e B_2. Vamos contar quantas são as possibilidades de sorteios nos quais o par de bichos B_1 e B_2 aparecem exatamente uma única vez.

Para melhor entendimento do argumento usado, vamos representar o espaço amostral Ω associado a esse problema como o conjunto das listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tais que x_i representa o bicho do prêmio i. Seja W o evento formado por todos os elementos de Ω nos quais o par B_1 e B_2 aparece somente uma única vez. Seja

$$W_{i,j} = \{x \in \Omega \colon n_1(x) = i \text{ e } n_2(x) = j\},$$

onde $n_k(x)$ é a quantidade de vezes em que o bicho B_k aparece na extração x. Note que

$$W = W_{1,1} \cup W_{1,2} \cup W_{1,3} \cup W_{1,4} \cup W_{2,1} \cup W_{3,1} \cup W_{4,1}$$

e essa união é disjunta. Vamos encontrar a quantidade de elementos do evento $W_{1,2}$. Nesse caso, $n_1 = 1$ e $n_2 = 2$. Podemos escolher C_5^3 maneiras distintas três posições uma extração. Segundo as regras do sorteio, a ordem em que aparecem os bichos em cada extração é importante na definição da extração. Por exemplo, as extrações $(\_, B_1, B_2, \_, B_2, \_)$ e $(\_, B_2, B_1, \_, B_2, \_)$ são consideradas distintas. Assim, concluímos que a quantidade de formas que B_1, B_2 e B_2 podem aparecer em uma extração é

$$P_3^2 \cdot C_5^3 = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 30.$$

Uma vez escolhidas as posições de B_1, B_2 e B_2, existem $23 \cdot 23$ maneiras de escolher os bichos das duas posições restantes. Assim, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de elementos do conjunto $W_{1,2}$ é

$$\#W_{1,2} = P_3^2 \cdot C_5^3 \cdot 23 \cdot 23 = 30 \cdot 23 \cdot 23 = 15870.$$

Analogamente,

$$\#W_{1,3} = P_4^3 \cdot C_5^4 \cdot 23 = \frac{4!}{3!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 23 = 460,$$

$$\#W_{1,4} = P_5^4 \cdot C_5^5 = 5,$$

$$\#W_{1,1} = P_2 \cdot C_5^2 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23 = 2! \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 23^3 = 243340,$$

$$\#W_{2,1} = \#W_{1,2},\ \#W_{1,3} = \#W_{3,1}\ e\ \#W_{1,4} = W_{4,1}.$$

Portanto,

$$\#W = \#W_{1,1}+2\#W_{1,2}+2\#W_{1,3}+2\#W_{1,4} = 243340+2(15870+460+5) = 276010.$$

Seja F o evento formado por todos os elementos de Ω nos quais o par B_1 e B_2 aparece duas vezes. Seguindo as mesmas ideias do caso anterior, podemos contar quantos elementos possui o evento F. Primeiro, note que podemos escrever o F como a união disjunta

$$F = W_{2,2} \cup W_{3,2} \cup W_{2,3}.$$

Para determinar a quantidade de elementos de $W_{2,2}$, vamos escolher as quatro posições nas quais ficarão B_1, B_1, B_2, B_2. Podemos escolher de $C_5^4 = 5$ maneiras distintas as quatro posições de uma extração. Observando novamente que a ordem em que aparecem os bichos em cada extração é importante na definição da extração, concluímos que a quantidade de formas que B_1, B_1, B_2, B_2 podem aparecer em uma extração é

$$P_4^{2,2} \cdot C_5^4.$$

Para a escolha do bicho que ocupará a posição restante na extração de F, pertencente a $E_{2,2}$ temos 23 possibilidades. Assim, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de elementos de F é

$$\#W_{2,2} = P_4^{2,2} \cdot C_5^4 \cdot 23 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot 23 = 690.$$

Note que as posições dos elementos de $E_{3,2}$ são ocupadas por B_1, B_1, B_1, B_2, B_2. Assim

$$\#W_{3,2} = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Analgamente

$$\#W_{2,3} = P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Logo

$$\#F = \#W_{2,2} + \#W_{3,2} + 2\#W_{2,3} = 690 + 10 + 10 = 710.$$

Portanto,

- A probabilidade de obter pelo menos um duque em uma extração do Jogo do Bicho é

$$P(W \cup F) = \frac{\#(W \cup F)}{\#\Omega} = \frac{\#W + \#F}{\#\Omega} = \frac{276720}{9765625} = 2,8336\%$$

  aproximadamente. Observe também que os eventos E e F são disjuntos.

- Para obter o valor máximo do prêmio em uma extração, o duque apostado deve aparecer duas vezes na extração. Assim, a probabilidade para que isso ocorra é

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega} = \frac{710}{9765625} = 0,0073\%$$

  aproximadamente.

- A probabilidade de se obter exatamente um duque na extração é

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega} = \frac{276010}{9765625} = 2,8263\%.$$

Exemplo 6.5.1. *Encontre o valor da esperança matemática para o caso do duque, sendo que o valor da aposta é de* 10 *u.m.*
Solução.

$$\begin{aligned} E(duque) &= 190 \cdot \frac{276010}{9765625} + 390 \cdot \frac{710}{9765625} - 10 \cdot \frac{(9765625 - 276720)}{9765625} \\ &= -4,32 \ u.m. \end{aligned}$$

Exemplo 6.5.2. *Para se ter a forma geral de encontrar o fator multiplicativo no duque, devemos trabalhar de forma análoga dos exemplos anteriores, mas atentar* *para ao fato de que quando se tem dois duques o prêmio será dobrado, então devemos proceder da seguinte forma:*

$$E(x,y) = x(y-1)\frac{276010}{9765625} + x(2y-1)\frac{710}{9765625} - x\frac{9765625 - 276720}{9765625},$$
$$= x\frac{277430y - 9765625}{9765625}$$

onde x é o valor apostado e yx será a premiação obtida ao sair um duque na extração. O valor esperado para y, afim de que o duque seja considerado justo é de aproximadamente $y = 35,20$.

6.6 Terno

Para acharmos a probabilidade desejada, assim como no caso anterior, vamos representar o espaço amostral Ω associado a esse problema como o conjunto das listas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tais que x_i representa o bicho do prêmio i. Sejam B_1, B_2 e B_3 bichos distintos. Vamos determinar a probabilidade de sair esse terno em uma extração do Jogo do Bicho. Seja W o evento formado por todos os elementos de Ω nos quais o par B_1, B_2 e B_3 aparece. Seja

$$W_{i,j,k} = \{x \in \Omega \colon n_1(x) = i, n_2(x) = j \text{ e } n_3(x) = k\}$$

onde $n_k(x)$ é a quantidade de vezes em que o bicho B_k aparece na extração x. Temos $i + j + k \leq 5$. Note que

$$W = W_{1,1,1} \cup W_{1,2,1} \cup W_{1,1,2} \cup W_{2,1,1} \cup W_{2,2,1} \cup W_{2,1,2} \cup W_{1,2,2}.$$

O número de elementos Ω é $25^5 = 9765625$. Para calcular o número de elemtos de cada conjunto $W_{i,j,k}$ vamos proceder como na seção anterior. Para o conjunto $W_{1,2,1}$ temos $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ e $n_3 = 1$. Podemos escolher de $C_5^4 = 5$ maneiras distintas as quatro posições de uma extração. Notando que a ordem em que aparecem os bichos em cada extração é importante na definição da extração, concluímos assim que a quantidade de formas que B_1, B_2, B_2 e B_3 podem aparecer em uma extração é

$$P_4^{1,2,1} \cdot C_5^4 = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{5!}{4!} = 60.$$

Para a escolha do bicho que ocupará a posição restante na extração de W, pertencente a $W_{1,2,1}$ temos 22 possibilidades. Assim, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de elementos de $W_{1,2,1}$ é

$$\#W_{1,2,1} = P_4^{2,2} \cdot 60 \cdot 22 = 1320.$$

Usando as mesmas ideias concluímos que

$$\#W_{1,2,1} = \#W_{1,1,2} = \#W_{2,1,1} = 1320,$$

$$\#W_{1,1,1} = P_3 \cdot C_5^3 \cdot 22 \cdot 22 = 4840$$

e

$$\#W_{2,2,1} = \#W_{1,2,2} = \#W_{2,1,2} = P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30.$$

Assim

$$\#W = \#W_{1,1,1} + 3 \cdot \#W_{1,2,1} + 3 \cdot \#W_{2,2,1} = 4840 + 3 \cdot (1320 + 30) = 8890.$$

Então, a probabilidadde de sair o terno B_1, B_2, B_3 em uma extração do jogo é:

$$P(W) = \frac{\#W}{\#\Omega} = \frac{8890}{9765625} = 0,091\%,$$

aproximadamente. No terno o valor da premiação é 100 vezes o valor apostado.

Exemplo 6.6.1. *Ache a expectativa de ganho por aposta arriscando* 1 *u.m. em um terno por um várias corridas.*

Solução.

$$\begin{aligned} E(Terno) = 99 \cdot P(Terno) – 1.P^c(terno) &= 99 \cdot \frac{8890}{9765625} – \frac{9765625 - 8890}{9765625} \\ &= -0,909 \ \textit{u.m.} \end{aligned}$$

aproximadamente.

Exemplo 6.6.2. *Tratando de forma análoga aos outros exemplos, para um certo valor apostado* x *e uma premiação* $x \cdot y$*, teremos como valor esperado:*

$$E(x,y) = x(y-1)\frac{8890}{9765625} - x\frac{9765625 - 8890}{9765625} = x\frac{8890y - 9765625}{9765625}.$$

Nesse caso para que o jogo do terno seja considerado justo, a banca teria que pagar $1098,50$ *vezes o valor apostado, ao invés das* 300 *vezes atuais. Isso mostra o caráter desleal que o jogo pratica e ainda a maneira desorganizada em que se foi criando e atribuindo valores às premiações sem que houvessem qualquer padronização entre as chances de vitória e os valores das premiações.*

6.7 Combinado

Para encontrarmos o espaço amostral devemos proceder usando mais uma vez o Princípio Fundamental da Contagem, sabendo que existem 25 formas de escolher o bicho dos dois primeiros números do milhar e mais 25 maneiras de escolher o bicho da segunda dezena, então o número de possibilidades de ter um combinado é 625. Como a ordem importa para o caso do combinado, não podemos dividir o resultado. O valor da premiação é de 300 vezes o valor apostado. A probabilidade de acertar o combinado do primeiro prêmio de uma extração é:

$$P(C) = \frac{1}{625}.$$

Exemplo 6.7.1. *Vamos achar aqui a expectativa média de ganho em uma aposta de combinado virado, considerando que a aposta foi feita em bichos distintos e valor apostado é de* 10 *u.m.*

Solução.

Lembre-se que no combinado virado o valor da premiação é 150 *vezes o valor apostado. Com isso*

$$E(CV) = 1490 \cdot \frac{2}{625} - 10 \cdot \frac{623}{625} = -5,2 \ \ \textit{u.m.}.$$

Para se ter, nesse exemplo, a maneira geral que calcula a função $E(x, y)$*, com* x *representando o valor apostado e* xy *a premiação vinculada a aposta* x*, temos:*

$$E(x, y) = (xy - x)\frac{2}{625} - x\frac{623}{625} = x\frac{2y - 625}{625}.$$

Para se ter um jogo justo, o valor de $E(x, y) = 0$*, logo* $y = 312,5$.

6.8 Passe

Para encontrarmos a probabilidade no passe, usaremos o conceito de probabilidades independentes. Seja (B_1, B_2) um passe, sendo B_1 o bicho do primeiro prêmio e B_2 o bicho escolhido para aposta do segundo ao quinto prêmio. Vamos calcular a probabilidade do passe aparecer em uma extração do jogo. Para o bicho da cabeça, temos que a probabilidade é $\frac{1}{25}$, já que temos 25 bichos disponíveis, para escolher um deles. Considere o espaço amostral Ω' formado pelos resultados possíveis do segundo, terceiro, quarto e quinto prêmio. Esse conjunto possui 25^4 elementos. Seja $W \subset \Omega'$ o evento: aparecer o bicho B_2. Observe que

$$\#W = \#\Omega - \#W^c = 25^4 - 24^4 = 58849,$$

onde W^c é formado por todos os elementos de Ω' que não possuem o bicho B_2 como sendo um dos prêmios. A quantidade Portanto, a probabilidade de sair o B_2 do segundo ao quinto é $\frac{58849}{390625}$.

E agora nossa probabilidade de acontecer o passe (B_1, B_2)é a multiplicação das duas probabilidades:

$$P(passe) = \frac{1}{25} \cdot \frac{58849}{390625} = \frac{58849}{9765625} = 0,6026\%$$

aproximadamente. O valor da premiação no passe é de 80 vezes o valor apostado.

Exemplo 6.8.1. *A probabilidade de ocorrer o passe virado é calculada da seguinte forma. Tome dois bichos B_1, B_2 de forma que eles sejam os bichos da aposta de um passe virado. Como são cinco prêmios e no passe virado um dos bichos tem que aparecer na cabeça e o outro do segundo ao quinto prêmios, então vamos separar os casos em que B_1 sai no primeiro prêmio e B_2 do segundo ao quinto e depois inverter as posições ou multiplicar por 2, já que as chances são as mesmas, de B_2 aparecer no primeiro prêmio e B_1 do segundo ao quinto. Como B_1 tem que sair na cabeça, só existe uma possibilidade para o primeiro prêmio. Para achar as possibilidades de sair B_2 nos demais prêmios, devemos tomar todas as possibilidades que são 25^4 e subtrair as vezes em que não ocorre B_2 que são 24^4. Portanto, a probabilidade de sair um passe virado é:*

$$P(PV) = \frac{2.(25^4 - 24^4)}{25^5} = 0,012$$

Exemplo 6.8.2. *Calcule o valor do ganho esperado médio para uma aposta de* 10 *u.m., em um passe virado, cuja aposta seja repetida por várias vezes.*
Solução.

$$E(P) = (\frac{800}{2} - 10) \cdot \frac{117698}{9765625} - 10 \cdot \frac{9765625 - 117698}{9765625} = 5,17 \quad \textit{u.m.}.$$

aproximadamente. Fazendo o cálculo geral para um certo valor de x apostado e um valor de premiação $\frac{xy}{2}$*, temos como resultado esperado:*

$$E(x,y) = (\frac{xy}{2} - x)\frac{117698}{9765625} - x\frac{9647927}{9765625} = x\frac{58849y - 9647927}{9765625}$$

O valor de y para que o passe virado seja considerado justo é aproximadamente 163,94 ou seja, para ser justo o passe virado tem que pagar oitenta e duas vezes o valor apostado.

Capítulo 7

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE USANDO UM JOGO DE AZAR

Neste capítulo apresentamos duas propostas de sequências didáticas usando jogos de azar conhecidos e de ampla aplicação dos conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. Essas Sequências servem como produto educacional capaz de potencializar o processo de aprendizagem e dinamizam as aulas de modo que alunos tenham maior interesse e participem ativamente desse processo.

7.1 Proposta de sequência didática para o ensino Básico usando um jogo do azar

- **Tema:** A Mega-Sena no ensino da probabilidade.
- **Público:** Alunos da segunda série do ensino médio.
- **Tempo de duração:** 10 horas-aula de 50 minutos cada aula.
- **Habilidades BNCC:** (EM13MAT310); (EM13MAT311); (EM13MAT312) que fazem parte da competência específica 3.
  - (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios

multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

- (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

- **Conteúdos matemáticos explorados:** Análise Combinatória e probabilidade.
- **Objetivos:**
  - Entender o funcionamento do jogo.
  - Desenvolver habilidades em resolução de problemas de contagem e probabilidade.
  - Desenvolver capacidade de raciocinar de forma lógica e organizada.
  - Praticar a interação e um comportamento dedutivo.
  - Saber aplicar os conhecimentos de probabilidade em situações do cotidiano.
- **Material utilizado:**
  - Material ilustrativos e volantes do jogo.
  - Um globo de brinquedo para realizar os sorteios com bolas numeradas do 01 ao 60.
  - Um datashow para apresentação dos slides.
  - Materiais escolares como: lápis, papel, régua, etc.
- **Organização da turma:** A turma será posta de forma que cada aluno possa fazer 20 apostas de 20 dezenas.
- **Dificuldades esperadas:**
  - No entendimento do funcionamento do jogo.
  - No preenchimento dos cem jogos de maneira distinta.

– Terão uma certa dificuldade para encontrar a probabilidade de acertar jogando nas diversas opções de aposta.

7.1.1 Desenvolvimento

Primeira etapa

Duração: 2 horas-aula.
Metodologia: Apresentar, através de vídeos e pesquisas na internet, da história dos jogos de azar e especificamente, do jogo da Mega-Sena, mostrando a importância dos jogos para a construção dos conceitos de probabilidade e Análise Combinatória. Essa introdução tratará do surgimento da probabilidade desde as cartas trocadas entre Pascal e Fermat até situações mais atuais como do uso na computação e estatística. Fazer também uma abordagem sobre os conteúdos já estudados de Análise Combinatória e probabilidade, para que possamos ter um ponto de partida com relação a conhecimentos prévios.

Segunda etapa

Duração: 3 horas-aula.
Metodologia: Nessa etapa, apresentamos de forma específica a Mega-Sena, sua evolução ao longo do tempo, seus aspectos econômicos, vamos mostrar todas as formas de apostas que podemos fazer e construir uma tabela de dados dos números mais sorteados e discutir seus aspectos mais populares como o jogo de azar mais conhecido do Brasil. Tratamos dos valores das apostas e de suas possibilidades de apostas e da forma de vencer o jogo acertando quatro, cinco ou seis números. Aqui, usamos apresentações de slides com o formato do jogo e disponibilizamos volantes dos jogos onde podemos encontrar várias informações sobre o jogo.

A Mega-Sena é o jogo de azar mais conhecido e popular do país. Esse jogo paga milhões aos seus ganhadores e alimenta o sonho de grande parte da população em se tornar milionária. O jogo é administrado pela Caixa Econômica FederalFederal e seus sorteios acontecem duas vezes por semana.

O jogo consiste em acertar 6 dezenas das 60 possíveis no volante. Quem consegue acertar cinco ou quatro dezenas também obtém premiação. No volante, é possível apostar entre 6 e 20 dezenas, modificando o valor da aposta na proporção em que aumenta suas chances de êxito no concurso da Mega-Sena. Outra opção que é posta no volante é o fato de poder apostar de forma aleatória (Surpresinha), ou seja, o próprio computador faz os jogos de forma independente e diversa e ainda existe a possibilidade da Teimosinha, que consiste em fazer o mesmo jogo por mais de um concurso consecutivo, no caso, dois, quatro ou oito.

Normalmente são realizados dois sorteios semanais às quartas e sábados, mas em alguns casos pré-estabelecidos são efetuados três. Os sorteios são feitos utilizando um globo com bolas numeradas do 1 ao 60 e as seis dezenas são retiradas em sequência, sem reposição. Os locais dos sorteios são determinados pela Caixa Econômica Federal e comumente só são aceitas apostas até às 19 horas do dia do sorteio.

Outro ponto que merece destacar é a composição ou a partilha das apostas. O valor destinado para a premiação corresponde a apenas $43,35\%$ do valor total arrecadado com as apostas, destes 35% é destinado aos ganhadores das seis dezenas, 19% para quem acerta as cinco dezenas, 19% para dividir para quem acerta quatro, 22% acumula para os ganhadores das seis dezenas dos concursos que terminam em 0 ou 5 e 5% é juntado o ano inteiro para realização do grande concurso da Mega da Virada, um sorteio que é feito todo ano no último dia do ano e que normalmente tem a maior premiação do ano. Os outros $56,65\%$ da arrecadação bruta vão para a receita federal, programas sociais e para a caixa custear o jogo. Os ganhadores têm até 90 dias para solicitar o valor da premiação, caso não apareçam no prazo, o valor é destinado ao crédito estudantil do governo federal (Fies).

Esse concurso, Mega da Virada, além de ter um período maior para se apostar, normalmente começam em novembro suas apostas e ainda termina em 0 ou 5, juntando a isso o acúmulo do valor de 5% de toda premiação durante o ano para esse concurso. Especificamente, nesse sorteio, o valor não acumula, ou seja, se não tiver ganhador nas seis dezenas o prêmio será dividido para os apostadores que acertaram cinco e se ainda não tiver, divide para os que acertaram quatro dezenas. Normalmente, na Mega da Virada, o prêmio passa com facilidade dos 200 milhões de u.m.

Outra modalidade possível na Mega-Sena é a opção de comprar um bolão, que é uma cota de um jogo onde normalmente se faz uma aposta em várias dezenas, aumentando assim as chances de vitória. Essa opção rateia o valor da aposta entre os apostadores e cada um fica com um bilhete para sacar sua parte da premiação em caso de sucesso. Nessa modalidade, não existe necessariamente a familiaridade ou ligação entre os apostadores, visto que o bolão é organizado pelo estabelecimento comercial, a lotérica.

Nossa primeira tabela trás o percentual de distribuição do valor das apostas para todos os seguimentos beneficiados com partilha do faturamento da Mega-Sena.

Tabela 7.1: Distribuição dos valores das apostas

Prognósticos Numéricos	**Percentual**
Prêmio Bruto	43,35%
Seguridade Social	17,32%
Fundo Nacional da Cultura – FNC	2,92%
Fundo Penitenciário Nacional – FUNPEN	1%
Fundo Nacional de Segurança Pública – FNSP	9,26%
Ministério do Esporte (Ministério da Cidadania)	2,46%
Fenaclubes	0,01%
Secretarias de esporte, ou órgãos equivalentes, dos Estados e do Distrito Federal	1%
Comitê Brasileiro de Clubes – CBC	0,46%
Comitê Brasileiro de Clubes Paralímpicos – CBCP	0,07%
Confederação Brasileira do Desporto Escolar – CBDE	0,22%
Confederação Brasileira do Desporto Universitário – CBDU	0,11%
Comitê Olímpico do Brasil – COB	1,73%
Comitê Paralímpico Brasileiro – CPB	0,96%
Despesas de custeio e manutenção: Comissão dos lotéricos* - 8,61% Custeio de despesas operacionais - 9,57% Fundo de Desenvolvimento de Loterias - FDL - 0,95%	19,13%
Total – CPB	100%
Comissão dos lotéricos referente às vendas nos Canais Eletrônicos	4,00%

Fonte: caixa.gov.br

Essa tabela é importante para demonstrar que muitas entidades desportivas e até do governo faturam muito com as apostas. Para o emprego em sala de aula, é bastante proveitoso para entender bem situações hipotéticas em que tenhamos condições de fazer todos os jogos da Mega-Sena e quanto desse valor apostado incrementa o novo valor do prêmio.

A nossa próxima figura mostra um volante do jogo da Mega-Sena, o jogo é feito marcando de 6 a 20 posições dentre as 60 disponíveis. Esse número mudou recentemente, antes só se podia jogar no máximo em 15 números e o valor das apostas foram atualizadas há pouco tempo também. A outra figura representa o comprovante de aposta dado pela lotérica no momento da aposta. Nesse comprovante há os números da aposta e a opção de torná-lo ao portador, colocando o nome e CPF do apostador no verso do comprovante. Assim, só quem estiver descrito no canhoto, poderá receber a premiação em caso de vitória.

Figura 7.1: Comprovante de aposta

Fonte: loterianacional.com.br

Esse próximo quadro, traz a quantidade de dezenas possíveis de apostar, os valores correspondentes de cada aposta e o número de apostas distintas possíveis em cada jogo, além da probabilidade de acerto.

Tabela 7.2: Probabilidade de acerto na Mega-Sena

Quantidade de nº jogados	Valor de aposta	Probabilidade de acerto (1 em)		
		Sena	Quina	Quadra
6	5,00	50.063.860	154.518	2.332
7	35,00	7.151.980	44.981	1.038
8	140,00	1.787.995	17.192	539
9	420,00	595.998	7.791	312
10	1.050,00	238.399	3.973	195
11	2.310,00	108.363	2.211	129
12	4.620,00	54.182	1.317	90
13	8.580,00	29.175	828	65
14	15.015,00	16.671	544	48
15	25.025,00	10.003	370	37
16	40.040,00	6.252	260	29
17	61.880,00	4.045	188	23
18	92.820,00	2.697	139	19
19	135.660,00	1.845	105	16
20	193.800,00	1.292	81	13

Fonte: caixa.gov.br

Nesse próximo quadro teremos a quantidade de quinas e quadras que consequentemente ganhamos em caso de vitória acertando os seis números em cada diferente valor apostado.

Tabela 7.3: Quinas e quadras ganhas acertando 6 dezenas

Apostas	6 números			5 números		4 números
Quantidade de nº jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	1	0	0	1	0	1
7	1	6	0	2	5	3
8	1	12	15	3	15	6
9	1	18	45	4	30	10
10	1	24	90	5	50	15
11	1	30	150	6	75	21
12	1	36	225	7	105	28
13	1	42	315	8	140	36
14	1	48	420	9	180	45
15	1	54	540	10	225	55
16	1	60	675	11	275	66
17	1	66	825	12	330	78
18	1	72	990	13	390	91
19	1	78	1.170	14	455	105
20	1	84	1.365	15	525	120

Fonte: caixa.gov.br

Essa tabela traz importantes resultados a respeito dos jogos. A primeira coluna mostra a quantidade de dezenas apostadas, a segunda corresponde aos resultados de quando se acerta seis dezenas, a terceira quando se acerta cinco dezenas e a quarta quando se acerta quatro. Ela mostra que numa aposta simples, quando se faz somente seis dezenas, o ganhador da sena não recebe como premiação a quina e quadra correspondentes, como também, acertando a quina, não se tem como prêmio a quadra correspondente de uma aposta simples. Porém, a partir de uma aposta com sete dezenas faz-se a conversão em jogos simples e calcula-se o número de combinações de resultados para cada jogo. Vamos dar, como exemplo, a linha 5 da tabela, ou seja, quando se faz uma aposta em 8 dezenas. Acertando nesse exemplo as seis dezenas obtemos o prêmio de uma sena, 12 quinas e 15 quadras. O número de apostas simples que correspondem a uma aposta de 8 dezenas é $C_8^6 = 28$. Portando, apostar em oito dezenas é o mesmo que fazer 28 jogos simples. Como nessa parte da tabela estamos considerando que o apostador fez a sena, devemos descontar desse total o jogo simples em que ele acertou todos os seis possíveis resultados. Restando assim 27 jogos simples, agora para se achar o número de quinas, deveremos descontar desses 27 jogos simples as vezes em que os dois números que não foram sorteados aparecem juntos nessas 27 possibilidades. A quantidade de apostas simples em que aparecem os dois números não sorteados é $C_6^4 = 15$. Então, o número de quinas vitoriosas, descontado a sena vitoriosa, é de $27 - 15 = 12$. Para se achar a quantidade de quadras, devemos descontar dos 28 jogos possíveis a aposta que acertou os seis jogos e as 12 apostas que acertaram a quina, logo restam as 15 possibilidades.

Concluindo essa segunda etapa, fazemos uma análise e resumimos os principais conceitos e entendimentos adquiridos sobre o jogo e suas principais ideias. Vamos buscar avaliar se a turma desenvolveu o conhecimento necessário para que possamos elaborar questões voltadas ao jogo. Faremos um questionário com as principais temas sobre o jogo e resolveremos em sala de forma a sanar quaisquer eventuais dúvidas existentes.

Terceira etapa

Duração: 4 horas-aula.
Metodologia: Nessa etapa, introduzimos problemas e exercícios que tratam do tema da Mega-Sena e procuramos encontrar e discutir diferentes resoluções para o mesmo problema de forma a trabalhar o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade de maneira abrangente para que os alunos possam raciocinar de modo mais livre, sem amarrações mecânicas, com emprego de modos distintos de se pensar a questão.

Exemplo 7.1.1. *Começamos com a pergunta natural de quem joga na Mega-Sena de forma inicial. Qual a chance de tirar o prêmio principal jogando a aposta mais simples, a aposta em seis dezenas?*
Solução 1. *Em uma aposta simples jogamos seis dezenas e obtemos resultado positivo se exatamente essas seis dezenas saírem. Como o resultado não considera a ordem com a qual as dezenas saem, podemos naturalmente imaginar o espaço amostral formado por todos os conjuntos que possuem 6 dezenas dentre as possíveis de serem sorteadas. A quantidade de elementos desse espaço amostral é dada por*

uma combinação simples onde temos 60 dezenas possíveis para escolha de 6 delas. Desse modo,

$$C_{60}^{6} = \frac{60!}{(60-6)!6!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{54!6!} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 50063860.$$

Portanto, temos uma chance em $50.063.860$ *casos possíveis.*

Solução 2. *Podemos resolver também utilizando probabilidades independentes: a probabilidade de acertarmos a primeira bola é* $P_1 = \frac{6}{60}$. *A probabilidade de acertarmos a segunda bola que sairá no globo é* $P_2 = \frac{5}{59}$. *A probabilidade de acertarmos a terceira bola que sairá é* $P_3 = \frac{4}{58}$. *A probabilidade de acertarmos a quarta bola é* $P_4 = \frac{3}{57}$. *A probabilidade de acertarmos a quinta é* $P_5 = \frac{2}{56}$. *A probabilidade de acertarmos a sexta bola, depois de já ter saído outras cinco bolas, é* $P_6 = \frac{1}{55}$ *Logo, como os eventos são independentes:*

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 = \frac{6}{60} \cdot \frac{5}{59} \cdot \frac{4}{58} \cdot \frac{3}{57} \cdot \frac{2}{56} \cdot \frac{1}{55} = \frac{1}{50063860}.$$

Portanto, essa possibilidade nos dá outra forma de chegar ao mesmo resultado.

Podemos utilizar esse exemplo para fazer uma reflexão com os alunos sobre o entendimento do conceito de combinação simples. Podemos discutir, por exemplo, a diferença entre arranjos simples e combinação simples.

Exemplo 7.1.2. *Vamos procurar agora a probabilidade de acertarmos na Mega-Sena jogando todas as vinte dezenas possíveis.*

Solução 1. *Mais uma vez podemos trabalhar com a combinação simples ou fazer através do uso dos eventos independentes. Com efeito, usando a combinação devemos encontrar a quantidade de jogos com seis dezenas distintas em possíveis 20 dezenas, ou seja, precisamos encontrar o número de combinações* C_{20}^{6}.

$$C_{20}^{6} = \frac{20!}{(20-6)!6!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 38760.$$

Logo, desse modo, temos 38760 *chances de acertar as seis dezenas sorteadas de um total de* 50063860. *Nossa probabilidade buscada para o evento jogar* 20 *dezenas* $P(20)$*:*

$$P(20) = \frac{38760}{50063860} = 0,00077 = 0,077\%,$$

aproximadamente.

Solução 2. *Agora podemos usar mais uma vez a noção de eventos independentes: sabemos que para o evento sair a bola 1, a probabilidade é dada por:* $P(1) = \frac{20}{60}$. *Para o evento sair a bola 2, a probabilidade é dada por:* $P(2) = \frac{19}{59}$ *, por já haver saído uma das bolas. Para o evento sair a bola 3, a probabilidade é dada por:* $P(3) = \frac{18}{58}$*, por já haver saído duas outras bolas anteriormente. Para o evento sair bola 4, temos a probabilidade* $P(4) = \frac{17}{57}$ *. Para o evento sair bola 5, ou sair a quinta bola, a probabilidade é:* $P(5) = \frac{16}{56}$*. Para o evento sair a sexta bola, o resultado é dado por:* $P(6) = \frac{15}{55}$*. Logo a probabilidade buscada é a interseção de todos os seis eventos que é justamente sair as seis bolas que darão a premiação esperada.*

$$
\begin{aligned}
P &= P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \cdot P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) = \frac{20}{60} \cdot \frac{19}{59} \cdot \frac{18}{58} \cdot \frac{17}{57} \cdot \frac{16}{56} \cdot \frac{15}{55} \\
&= 0,00077 = 0,077\%,
\end{aligned}
$$

aproximadamente.

Exemplo 7.1.3. *Neste exemplo, tratamos da Mega da Virada, pois é um concurso que não acumula e sempre termina em zero ou em cinco, o que permite todo o valor destinado à premiação ficar para o próprio concurso. Supomos também que o apostador seja um indivíduo com muitos recursos disponíveis. Procuramos o valor mínimo de premiação para o qual a partir desse valor o jogo fica lucrativo para quem acertar as seis dezenas. Essa questão será um pouco longa, no entanto, trará bastante conteúdo e riqueza de conhecimentos em vários temas da matemática e do jogo em si.*

Primeiro, levantamos o valor gasto para se apostar em todas as possíveis combinações de resultado: o valor do jogo simples é de 5 *reais. Já sabemos que tanto faz jogar em* 50063760 *possíveis combinações simples de seis dezenas, como jogar em* 20 *dezenas por jogo, já que os valores das apostas são proporcionais ao número de chances de vitória. Para encontrar o valor da premiação para o qual a partir dele obteremos lucro em caso de vitória única na Mega-Sena, basta multiplicar o valor de* 5 *reais pelo total de jogos.*

$$\textit{Valor premiação } = 5 \cdot 50063860 = 250.319.300 \textit{ reais}$$

Sabemos que do valor bruto apostado apenas $43,35\%$ *fica para premiação do concurso, ou seja, apostando em todos os resultados possíveis, teremos o valor de* $0,4335 \cdot 250319300 = 10851341655$ *revertidos para a premiação. Então, se o prêmio anunciado estiver superior a* $250319300 - 108513416,55 = 141805883,45$ *vale a pena apostar, esperando, é claro, que só tenha um ganhador, pois se houver mais de um, provavelmente estaremos com um grande prejuízo financeiro. Ou seja, se a premiação passar desse valor, vale a pena apostar na Mega-Sena, em todas as combinações possíveis.*

Esse valor pode ser encontrado também na utilização do conceito de esperança matemática ou valor esperado de ganho. Vamos calcular o valor esperado para uma aposta simples de 6 *dezenas. Sabemos que para um jogo ser considerado justo, o valor esperado de ganho tem que ser igual a zero, ou ainda, os dois lados apostador e banca têm que ter as mesmas chances de vitória. Nesse caso:*

Dado $E(X) = 0$, *a esperança associada a variável* X *correspondente ao valor ganho ou perdido pelo apostador. Pela fórmula da esperança, temos:*

$$E(X) = (V - A).P(V) - A \cdot P^C(V),$$

onde,

- V *- valor da premiação obtida*
- A *- valor da aposta*
- $P(V)$ *- probabilidade de ganhar a premiação*
- $P^C(V)$ *- probabilidade de perder a premiação*

Logo,

$$0 = \frac{(V-5)\cdot 1}{50063860} - 5 \cdot \frac{50063859}{50063860}$$

$$\Rightarrow V - 5 = 5 \cdot 50063859 \Rightarrow V = 5 \cdot 50063860 = 250319300 \text{ reais}.$$

Considerando a aposta simples em 6 *dezenas, se a premiação for maior que* 250319300, *o jogo será mais vantajoso para o apostador, se for menor será mais desvantajoso para o apostador e se for igual, o jogo será considerado justo.*

Exemplo 7.1.4. *Queremos nesse exemplo, determinar as chances de acertar exatamente uma quadra, fazendo um jogo com oito dezenas.*

Solução: *Como já temos o número de elementos do espaço amostral das seis dezenas da Mega-Sena que é* $50.063.860$*, vamos calcular o número de quadras que um jogo com oito dezenas tem:*

Para calcular o número de quadras possíveis em um jogo com oito números, faremos a combinação de oito escolhe quatro:

$$C_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!4!} = 70$$

basta agora verificar as possibilidades de não acertarmos os outros dois números do sorteio, para que tenhamos exatamente uma quadra. Nesse caso, devemos fazer a combinação das 52 *dezenas restantes, escolhidas* 2 *a* 2*:*

$$C_{52}^2 = \frac{52!}{(52-2)!2!} = 1326.$$

Logo, a probabilidade de se acertar uma quadra jogando oito dezenas é de:

$$P(quadra) = \frac{70 \cdot 1326}{50063860} = \frac{1}{539,36}.$$

Exemplo 7.1.5. *Nesse exemplo, iremos encontrar as chances de se jogar um determinado número de dezenas e não acertar nenhuma delas, ou melhor, queremos a probabilidade de não marcarmos nenhuma das seis dezenas sorteadas.*

Solução.

Nesse caso, iremos iniciar com o jogo simples, aquele que se aposta em seis dezenas. Suponha que um apostador fez uma aposta em 6 *dezenas. Como já sabemos, o espaço amostral, formado por todas as possibilidades de sorteio da Mega-Sena, tem* 50063860 *elementos, ou melhor,* C_{60}^6 *. Nosso evento é exatamente as chances de não aparecer nenhuma das seis dezenas jogadas. O número de elementos desse evento é* C_{54}^6*, ou seja, a quantidade de sorteios de seis dezenas das* 54 *possíveis (observe que excluímos todas aquelas escolhidas pelo apostador).*

Logo, a probabilidade do apostador não acertar nenhuma dezena, jogando seis é de:

$$P(6) = \frac{C_{54}^6}{C_{60}^6} = \frac{25827165}{50063860} = 0,5158,$$

aproximadamente. Portanto, temos $51,58\%$*, aproximadamente, de chances de errar todos os números. Vamos ver agora de forma mais direta todas as probabilidades (aproximadas) para todos os valores de apostas:*

- $P(7) = \dfrac{C_{53}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{22957480}{50063860} = 0,4585 = 45,85\%$
- $P(8) = \dfrac{C_{52}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{20358520}{50063860} = 0,4066 = 40,66\%$
- $P(9) = \dfrac{C_{51}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{18009460}{50063860} = 0,3597 = 35,97\%$
- $P(10) = \dfrac{C_{50}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{15890700}{50063860} = 0,3174 = 31,74\%$
- $P(11) = \dfrac{C_{49}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{13983816}{50063860} = 0,2793 = 27,93\%$
- $P(12) = \dfrac{C_{48}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{12271512}{50063860} = 0,2451 = 24,51\%$
- $P(13) = \dfrac{C_{47}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{10737573}{50063860} = 0,2144 = 21,44\%$
- $P(14) = \dfrac{C_{46}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{9366819}{50063860} = 0,1870 = 18,70\%$
- $P(15) = \dfrac{C_{45}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{8145060}{50063860} = 0,1626 = 16,26\%$
- $P(16) = \dfrac{C_{44}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{7059052}{50063860} = 0,1410 = 14,10\%$
- $P(17) = \dfrac{C_{43}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{6096454}{50063860} = 0,1217 = 12,17\%$
- $P(18) = \dfrac{C_{42}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{5245786}{50063860} = 0,1047 = 10,47\%$
- $P(19) = \dfrac{C_{41}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{4496388}{50063860} = 0,0898 = 8,98\%$

- $P(20) = \dfrac{C_{40}^{6}}{C_{60}^{6}} = \dfrac{3838380}{50063860} = 0,0766 = 7,66\%.$

Esse exemplo é interessante pelo fato de mostrar que a partir de sete dezenas, a probabilidade de se acertar pelo menos uma dezena é maior que a probabilidade de errar todas. Outro fato curioso desse exercício é que jogando 20 *dezenas, temos* $92,34\%$ *de chances de acertar pelo menos uma dezena. Isso é impressionante, visto que são* 60 *dezenas e com um olhar menos apurado sobre o assunto, seria difícil imaginar tal resultado.*

Podemos ainda ampliar esses resultados e os exemplos para os casos de acertar duas ou três dezenas, visto que o valores de quatro, cinco e seis dezenas já estão em um dos quadros do material usado em sala.

Quarta etapa

Duração: 2 horas-aula.
Metodologia: Nesta etapa fazemos uma simulação de um sorteio da Mega-Sena. Cada aluno poderá fazer uma aposta de 20 dezenas. Garantimos que as apostas sejam distintas para que a tarefa seja mais interessante. A dinâmica aqui é comprovar nossa análise dos jogos e poder entender in loco as possibilidades de resultados. Queremos, em cada rodada de sorteio, analisar a probabilidade de acertar uma quadra, uma quina, uma sena e a probabilidade de ninguém acertar ou, até mesmo, a probabilidade de duas ou mais pessoas acertarem os resultados.

Como podemos ver, são inúmeras as possibilidades de trabalhar com a probabilidade em um só conjunto de resultados. Essa dinâmica ajuda o aluno a fixar melhor os ensinamentos e mostra uma aplicabilidade da matemática no cotidiano deles. Esse projeto também auxilia na observação da deslealdade dos jogos de azar para os apostadores, desestimulando assim, sua prática e permite que os alunos criem suas próprias provas dessa injustiça.

7.2 Proposta de sequência didática usando o Jogo do Bicho

Na continuação do trabalho, mostramos outra sugestão de sequência didática voltada para um público mais adulto, podendo ser trabalhada no ensino de jovens e adultos ou até em um curso de extensão universitário. Nosso intuito, mais uma vez, é mostrar o quão desleal são os jogos de azar com relação às chances de vitória por parte do apostador. Então, a todo momento, por razões morais e legais, estamos desestimulando tal prática na vida real, ficando unicamente o ganho com o aprendizado didático em probabilidade e Análise Combinatória como verdadeiro propósito.

Usando tudo que já foi dito sobre os jogos, nesta secção, tratamos de uma proposta de sequência didática que utiliza o Jogo do Bicho como ferramenta de ensino de probabilidade para turmas do curso de extensão do ensino médio, voltados para jovens e adultos. Dispomos de 12 horas-aula, com 50 minutos cada, para trabalhar os conteúdos apresentados aqui. Definimos uma ordem de apresentação das matérias que abordem todos os subjogos do Jogo do Bicho, analisando suas probabilidades e suas expectativas de ganho, de modo lúdico e prático em uma dinâmica divertida e atraente para os alunos.

Nosso intuito com essa sequência didática é fazer um resumo de todo conteúdo visto nas matérias de Análise Combinatória e probabilidade. Queremos que o aluno possa identificar onde usar arranjos, permutações, combinações, etc. De modo que ele fique livre para criar soluções e desenvolver o raciocínio lógico matemático, com isso possa compreender e relacionar as situações postas no jogo, com conhecimentos vistos anteriormente, ajudando assim, na habilidade de entender e aplicar conteúdos da matemática na vida cotidiana.

- **Tema**: O Jogo do Bicho e o ensino de Análise Combinatória e probabilidade.
- **Público**: Alunos maiores de idade no ensino de jovens e adultos.
- **Tempo de duração**: 12 horas-aula de 50 minutos cada aula.
- **Habilidades(BNCC)**: (EM13MAT310);(EM13MAT311); (EM13MAT312) que fazem parte da competência específica 3.

  - (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
  - (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
  - (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

- **Conteúdos matemáticos explorados**: Análise Combinatória e probabilidade.
- **Objetivos**:
  - Alcançar o aprendizado sobre o jogo e suas regras.
  - Desenvolver habilidades em resolução de problemas de contagem e probabilidade.
  - Desenvolver capacidade de raciocinar de forma lógica e organizada.
  - Praticar a interação e um comportamento dedutivo.
- **Material utilizado**:
  - Material ilustrativo com as fotos dos animais.
  - Um globo de brinquedo para realizar os sorteios.
  - Um Datashow para apresentação dos slides.
  - Materiais escolares como: lápis, papel, régua, etc.
- **Organização da turma**: a turma será distribuída em grupos com três alunos de forma que todos possam apostar de forma fictícia em vários tipos de jogos; iremos calcular as chances de sucesso em cada aposta; faremos uma análise sobre o ganho esperado em cada tipo de subjogo do Jogo do Bicho.
- **Dificuldades esperadas**: possivelmente terão dificuldade no emprego das noções de contagem em diferentes análises e em algumas questões que se refiram a

combinações com repetição, principalmente por ser um assunto com menor abordagem no decorrer da vida estudantil.

7.2.1 Desenvolvimento

Primeira etapa

Duração: 2 horas-aula.
Metodologia: Apresentação, através de vídeos e pesquisas na internet, da história dos jogos de azar e especificamente, do Jogo do Bicho, mostrando a importância dos jogos para a construção dos conceitos de probabilidade e Análise Combinatória. Essa introdução tratará do surgimento da probabilidade desde as cartas trocadas entre Pascal e Fermat até situações mais atuais como do uso na computação e estatística. Fazemos também uma abordagem sobre os conteúdos já estudados de Análise Combinatória e probabilidade, para que possamos ter um ponto de partida com relação a conhecimentos prévios.

Segunda etapa

Duração: 2 horas-aula.
Metodologia: Nessa etapa, mostramos todos os subtipos de jogos do Jogo do Bicho e apresentamos suas regras e valores aplicados em caso de vitória. Aqui, usaremos apresentações de slides com o formato do jogo e disponibilizamos encartes e tabelas com as figuras dos animais. Preparamos uma dinâmica para ajudar a decorar a ordem dos animais usando o alfabeto, já que existe uma certa relação de ordem entre as letras do alfabeto e os números dos animais do Jogo do Bicho. Se os alunos acharem melhor, podemos até desprezar os nomes dos animais e passar a tratar apenas pela numeração correspondente do animal. Dessa forma, estamos nos distanciando dos símbolos dos animais e temos um ganho maior relacionado ao tema da probabilidade e Análise Combinatória, visto que seria uma necessidade a menos e não representaria nenhum prejuízo do ponto de vista do aprendizado e da capacidade de entendimento sobre as regras e discussões analisadas em sala de aula.

Iniciamos a demonstração com a apresentação da tabela de bichos abaixo, fazemos uma explicação do que são as dezenas, centenas, milhares e os jogos do grupo do Jogo do Bicho.

Figura 7.2: Bichos e suas dezenas

Fonte: feitocurioso.temmais.com

Depois dessa apresentação inicial, trabalhamos com nossa segunda tabela onde serão mostrados todos os jogos e valores recebidos em caso de vitória no jogo. Para facilitar o entendimento, criamos um resultado fictício de uma extração do jogo e usamos esse resultado para expor, de maneira mais clara, os conceitos e regras do jogo.

Exemplo 7.2.1. *Exemplo de resultado:*

Prêmios	*Milhares*	*Animais*
1°prêmio	*4516*	*Borboleta*
2°prêmio	*2487*	*Tigre*
3°prêmio	*5868*	*Macaco*
4°prêmio	*1122*	*Cabra*
5°prêmio	*5688*	*Tigre*

Tabela 7.4: Um resumo dos subjogos do Jogo do Bicho

Subjogo	Resumo do jogo	Premiação
GRUPO	No grupo, devemos analisar apenas o animal que aparece no primeiro prêmio. No nosso exemplo foi a borboleta.	20 vezes o valor da aposta
DEZENA	Na dezena, verificamos os dois últimos números de cada prêmio, no nosso exemplo a dezena que saiu na cabeça (1°prêmio) foi 16.	60 vezes o valor da aposta
CENTENA	Na centena, vemos os três últimos números de cada prêmio, nesse caso, no exemplo temos a centena 516 no 1° prêmio.	500 vezes
MILHAR	No milhar, levamos em consideração os quatro números que saíram em cada premiação. No exemplo o milhar do 1° prêmio foi 4516.	4000 vezes

DUQUE	O duque considera dois bichos dentre os cinco prêmios. No nosso exemplo, se estivéssemos jogado no duque tigre com macaco ou macaco com borboleta ou qualquer outra combinação de dois bichos que saíram, teríamos ganhado.	20 vezes
TERNO	O terno considera três bichos dentre os cinco resultado dos prêmios. No nosso exemplo, podemos citar o terno: tigre-macaco-borboleta ou qualquer outro que tenha três bichos dos cincodados.	100 vezes
COMBINADO	No combinado, consideramos os dois primeiros números do milhar como uma dezena e os dois últimos como outra dezena. Assim unimos o bicho que saiu na primeira dezena com o bicho da segunda e temos então o combinado.	300 vezes
PASSE	No passe, temos que acertar o animal que sai na cabeça (1° prêmio) e um que aparece nos outros quatro prêmios. No nosso exemplo teríamos que jogos um passe de borboleta com cabra, macaco ou tigre.	80 vezes.

Fonte: Elaborada pelo autor

Concluindo essa segunda etapa, incitamos os alunos a procurar interpretar os subjogos e diferenciar as chances de ocorrência, ou seja, procurar de forma intuitiva, sem uso de cálculos matemáticos, os espaços amostrais de cada jogo e analisar se os valores pagos estão de acordo com a probabilidade de vitória no jogo.

Terceira etapa

Duração: 6 horas-aula.
Metodologia: Nessa etapa, o professor trabalha os assuntos necessários para encontrar os espaços amostrais e eventos em cada subjogo do Jogo do Bicho. Analisa as diferentes abordagens com relação aos jogos e simula uma extração do jogo, procu-

rando sempre achar as chances de acerto e consequente vitória. Nessa etapa também, fazemos exercícios de aprimoramento e discutimos cada resposta de acordo com o uso das diferentes formas encontradas para chegar no resultado correto. Sabemos que no uso da Análise Combinatória podemos chegar ao resultado correto de maneiras distintas e é importante mostrar para os discentes as relações entre os arranjos, permutações e combinações. Podemos utilizar os exemplos já demonstrados nesse trabalho para aplicar em sala de aula e acrescentar alguns que julguemos necessários para melhorar o entendimento e aprendizagem.

Outro ponto que merece atenção é o fato de o jogo não ter um padrão no pagamento das premiações, ou melhor, há uma diferença entre as expectativas de ganho entre os jogos e ainda uma exagerada distorção entre as premiações de alguns subjogos. Nesse sentido, poderíamos propor, com base nos resultados alcançados até aqui, uma reorganização do Jogo do Bicho, em que trabalharíamos com os resultados padronizados em uma só expectativa de ganho para todos os jogos, em um percentual adotado. Esse ganho negativo esperado, seria um percentual único da aposta para todos os diferentes jogos, deste modo, igualaria os valores tidos como prejuízos nos diferentes jogos.

Poderíamos dividir, entre os grupos formados em sala de aula, para que cada um trabalhe com um percentual diferentes. O grupo “A” ficaria com o percentual de 10% do valor da aposta como expectativa de ganho negativo. O grupo B”, com 20% de prejuízo e assim sucessivamente até que todos os grupos estivessem com um percentual.

Poderíamos trabalhar também a ideia de progressivamente aumentar o valor de expectativa de ganho de acordo com o valor da premiação, ou seja, jogos com valores de premiações maiores como o milhar, a centena, terem uma porcentagem de ganho para a banca maior, mas dentro de uma proporção, de acordo com os valores dos prêmios, pois deste modo, o valor do prêmio serve de estímulo para o apostador. Já para os jogos que pagam um valor menor, como é o caso do grupo, o percentual de ganho seria o fator preponderante para o apostador. Seria uma forma de equilibrar, deixar o jogo mais justo e coerente entre os subjogos existentes.

Quarta etapa

Duração: 2 horas-aula.
Metodologia: Nesta etapa faremos uma simulação de uma extração do Jogo do Bicho. Cada grupo fará o papel do banqueiro e os demais farão apostas diversas em todos os subjogos. A dinâmica aqui é comprovar nossa análise dos jogos que têm maiores probabilidades de aceto e vencerá o grupo que obtiver uma soma de valores mais expressiva. Para que o jogo não fique desfavorável, faremos com que cada grupo faça o papel do banqueiro uma vez e os demais terão o mesmo valor para apostar nos jogos que quiserem. Esses resultados serão anotados e no final da brincadeira, somaremos os valores e determinaremos os ganhadores.

Aqui mostraremos mais uma vez a deslealdade do Jogo do Bicho e com o auxílio dos conhecimentos em probabilidade, tentaremos desestimular a prática dos jogos de azar. Queremos mostrar maneiras de se defender de certas situações desfavoráveis que há na vida com o auxílio e uso das técnicas em probabilidade e o conhecimento da esperança matemática.

Nos mais diversos campos de nossa vida, há situações e escolhas que poderíamos usar esses conhecimentos. Nos mercados financeiros, por exemplo, em situações de aplicações que tenham como fator a análise de mercado futuro ou a probabilidade de acontecer uma crise em determinado setor da economia, gerando uma procura maior por determinado produto ou aumentando o valor do dólar. Em situações de produção rural em que o fator climático determina se haverá uma superprodução deste ou daquele grão ou uma baixa produção.

Esses dois exemplos rápidos servem para mostrar o uso cotidiano do conhecimento em probabilidade e para compreender a extensão da aplicabilidade do tema. Concluiremos este produto educacional estigando e estimulando o uso da probabilidade no dia-a-dia, em situações cotidianas, para que essa prática seja cada vez mais natural e comum para os alunos.

Capítulo 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, sabemos que existem diversas formas de ministrar os conteúdos de análise combinatória e probabilidade e entendemos que precisamos de todas as ferramentas necessárias que possam prender a atenção dos alunos às aulas dessas matérias. Apresentamos no texto o produto educacional que consiste em duas sequências didáticas para o ensino de Análise Combinatória e probabilidade. Usamos dois jogos de azar, o Jogo do Bicho e a Mega-Sena, como ferramentas potencializadoras do ensino. Esperamos que este texto possa contribuir para o ensino desses conteúdos na educação básica, onde esse tema tem grande relevância.

Referências Bibliográficas

[1] AGUIAR, Antonio Carlos. **A regulação dos jogos de azar e o impacto no mercado de trabalho.** Disponível em: https://www.conjur.com.br/2018-jan-07/antonio-aguiar-jogos-azar-impacto-mercado-trabalho. Acesso em 20/01/2023.

[2] ANDRADE, Rafael Thé Bonifácio de. **A probabilidade aplicada aos jogos de azar**. UFPB - João Pessoa, 2017.

[3] BEZERRA, José Rauryson Alves. **Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos conceitos introdutórios de Análise Combinatória**. UFRN - Natal, 2013.

[4] BRASIL. Ministério da Educação; **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC-EI-EF-110518- versaofinal-site.pdf. Acesso em 19/12/2022.

[5] BRASIL. **Decreto-Lei nº 6.259, de 10 de fevereiro de 1944**. Dispõe sôbre o serviço de loterias, e dá outras providências. Disponível em:

https://www.planalto.gov.br/ccivil/_03/decreto-lei/1937-1946/del6259.htm. Acesso em: 03/11/2022

[6] CAMARGO, Marília Teixeira. **A Legalização dos Jogos de Azar e Cassinos no Brasil**. Goiânia, 2020.

[7] CÉSAR, Rodrigo. **História dos jogos de azar no Brasil: Passado, Presente e Futuro**. 2017. https://www.apostaganhabr.com/destaques/historia-dos-jogos-de-azar-no-brasil-legalizacao/. Acesso em 03/12/2022.

[8] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Conceitos e aplicações no ensino médio**. São Paulo – SP: Ática, 2016.

[9] FRANCO, Tertuliano. **Princípios de Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro – RJ: IMPA, 2020.

[10] GROENWALD, C. L. O.: TIMM, U. T. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**. Disponível em: http://www.somatematica.com.br. Acesso em: 03 maio. 2023.

[11] MACEDO, Lino; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2005. 110 p.

[12] MACHADO, A.R.; CRISTOVÃO, V.L.L. **A construção de modelos didáticos de gêneros: aportes e questionamentos para o ensino de gêneros**. Revista Linguagem em (Dis)curso. v. 6, n. 3. set/dez., 2006

[13] MORGADO, Augusto César de Oliveira. **Análise Combinatória e Probabilidade**. SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[14] NASCIMENTO, Gilberto Fernandes. **Probabilidade no Ensino Médio**. UFRN – Natal, 2013.

[15] OLIVEIRA, M. M. **Metodologia Interativa: um desafio multicultural à produção do conhecimento**. V Colóquio Internacional Paulo Freire – Recife, 19 a 22-setembro 2005.

[16] OXALÁ, Adriana de; **Jogo do Bicho: como jogar, como ganhar!**. Imbituba - SC: Livropostal,2007.

[17] PRADO, José William de Souza; **Noções de probabilidade por meio de jogos de azar**. Feira de Santana, 2015.

[18] RAQUEL, Roberto Fagner. **Princípios de probabilidade**. UFRN - Natal, 2014.

[19] RIFO, Laura. **Probabilidade e estatística: aspectos de tomada de decisões e incertezas para o ensino fundamental e médio**. Rio de Janeiro – RJ, SBM, 2020.

[20] SALDANHA, Gehisa.**O Jogo do Bicho: como jogar e ganha**. Rio de Janeiro – RJ, Tecnoprint, 1986.

[21] SELVA, Kelly Regina; CAMARGO, Mariza. **O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento**. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. Anais... Ijuí: Unijui, 2009, 13 p. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cdQ_egem/fscommand. Acesso em: 10 maio. 2023.

[22] SENADONOTICIAS. **LEGALIZAÇÃO DOS JOGOS DE AZAR ESTÁ PRONTA PARA VOTAÇÃO**. 2018. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2018/08/22/legalizacao-de-jogos-de-azar-esta-pronta-para-votacao. Acesso em: 17/11/2022.

[23] SILVA, Carlos Alexandre Gomes da; CAMPOS, Viviane Simioli Medeiros; PEREIRA, André Gustavo Campos. **Introdução à Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Moderna, 2015.

[24] SILVA, Mônica Soltau da. **Clube de matemática: Jogos educativos**. Série atividades. Campinas: Papirus, 2004

[25] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; PESSOA, Neide; ISHIHARA, Cristiane. **Jogos de Matemática: de 1°ao 3°ano**. Porto Alegre/RS: Artmed, 2008.

[26] ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul Ltda., 2011.