Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Probabilidade e Esperança Matemática em jogos de loteria: mobilizando conhecimentos e criatividade dos estudantes

Antonio Fábio do Nascimento Torres

Natal – RN, agosto de 2023.

Antonio Fábio do Nascimento Torres

Probabilidade e Esperança Matemática em jogos de loteria: mobilizando conhecimentos e criatividade dos estudantes

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Drª Débora Borges Ferreira.

Natal, agosto de 2023.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Torres, Antonio Fábio do Nascimento.
Probabilidade e esperança matemática em jogos de loteria: mobilizando conhecimentos e criatividade dos estudantes / Antonio Fábio do Nascimento Torres. - 2023.
134 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Natal, RN, 2023.
Orientação: Profa. Dra. Débora Borges Ferreira.

1. Probabilidade - Dissertação. 2. Loterias - Dissertação. 3. Esperança matemática - Dissertação. 4. Aprendizagem - Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 519.2(043.3)

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Antonio Fábio do Nascimento Torres

Probabilidade e Esperança Matemática em jogos de loteria: mobilizando conhecimentos e criatividade dos estudantes

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado em 07/08/2023.

Banca examinadora

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Débora Ferreira Borges (UFRN)

Examinador interno: Prof. Dr. Alan de Araujo Guimarães (UFRN)

Examinador externo: Prof. Dr. Otto Augusto de Morais Costa (IFRN)

Natal, agosto de 2023.

Dedico este trabalho a meus avós paternos, Guiomar Pereira da Silva (Dona Mocinha), e Sebastião Pedro da Silva (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Início os agradecimentos direcionando-os a minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Débora Borges Ferreira, cuja paciência e ensinamentos foram fundamentais para que este trabalho pudesse ser concluído.

Agradeço a todos os demais professores do PROFMAT do polo UFRN, que com sabedoria e sensibilidade souberam conduzir suas disciplinas ao longo do curso.

Agradeço a meus colegas de turma, Gabriel, Débora, Francisco, Júnior, Gleiferson, Alexandre, Bráulio, Cláudio e Marcos, por todo o apoio dado em momentos difíceis de estudos e de motivação para a escrita desse trabalho.

Agradeço aos estudantes que participaram dessa pesquisa, Letícia, Beatriz, Gino, Rita, Marcos, Layza, Sol, Paloma, Ruan, Thaisy, Iara e Carlos, pois sem eles este trabalho seria impossível.

Agradeço a UFRN, por ter me concedido a honra de ser estudante de uma das mais importantes instituições de ensino superior do país.

Agradeço a meus colegas de trabalho do IFRN/SPP, Gabriel, Vagner, Eduardo, Janilson, Ana Paula, Juliana, Anaxsuel, Djhanatan, pelo grandioso apoio durante os momentos em que revezei entre trabalho e mestrado.

Ao meu amigo de longa data, Antenor, por ter me dado apoio desde a graduação, fazendo esforços para além do que lhe cabia.

Aos meus gatos, Chico e Prince, que sempre me traziam paz em momentos em que as forças estavam se esvaindo.

Aos meus avós paternos, Dona Mocinha e se Sebastião Pedro, pois não fosse a criação dada desde os 8 anos, nada seria, nada teria.

Por último, e mais importante, a Deus, pela inexplicável concessão de vida até aqui.

RESUMO

A presente pesquisa tem como tema a utilização de jogos de azar, em especial de loteria, como auxiliares na aprendizagem de probabilidade, tendo em vista a notória dificuldade dos estudantes do ensino básico neste conteúdo. A pesquisa teve como participantes alunos do ensino médio integrado do IFRN, campus São Paulo do Potengi, e teve como objetivo geral estimular a aprendizagem em probabilidade a partir da criação de jogos de loteria. O percurso metodológico utilizado foi dividido em duas etapas. Na primeira etapa os estudantes responderam um questionário aberto contendo problemas envolvendo as loterias Dia de Sorte e + Milionária, ambas administradas pela Caixa Econômica Federal; SPP da Sorte, jogo de azar bastante popular na região do Potengi; e a Lotoemoji, criada pelos pesquisadores. A análise das respostas foi feita a partir de análise de erros na perspectiva de Cury (2009), onde se pôde constatar as dificuldades que os participantes apresentavam. Nessa primeira etapa foi possível discutir também o conceito e a interpretação da esperança matemática do lucro aplicada a jogos de aposta. A segunda etapa da pesquisa se constituiu em um momento em que os estudantes deveriam criar seus próprios jogos, com a mediação dos pesquisadores, tendo como requisitos as definições das variáveis preço, faixas de premiação, regras do jogo e as probabilidades de ganhar. Da análise das criações foi possível perceber que para alguns deles houve um aparente avanço na superação das dificuldades no conteúdo. Nas falas dos próprios estudantes, a criação dos jogos foi um momento prático que possibilitou a eles um melhor entendimento de probabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade; loterias; esperança matemática; aprendizagem.

ABSTRACT

This research has as its theme the use of games of chance, in particular the lottery, as aids in the learning of probability, in view of the notorious difficulty of basic education students in this content. The research had as participants students of the integrated high school of the IFRN, campus São Paulo do Potengi, and had as general objective to stimulate the learning in probability from the creation of lottery games. The methodological path used was divided into two stages. In the first stage, students answered an open questionnaire containing problems involving the Dia de Sorte and + Milionária lotteries, both administered by Caixa Econômica Federal; SPP da Sorte a game of chance that is very popular in the Potengi region; and Lotoemoji, created by the researchers. The analysis of the responses was based on the analysis of errors from the perspective of Cury (2009), where it was possible to verify the difficulties that the participants had. In this first stage, it was also possible to discuss the concept and interpretation of the mathematical expectation of profit applied to gambling. The second stage of the researchers was constituted in a moment in which the students had to create their own games, with the mediation of the researcher, having as requirements the definitions of the price variables, prize ranges, game rules and the probabilities of winning. From the analysis of the creations, it was possible to perceive that for some of them there was an apparent advance in overcoming the difficulties in the content. In the speeches of the students themselves, the creation of the games was a practical moment that allowed them a better understanding of probability.

Keywords: Probability; lotteries; mathematical hope; learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A probabilidade está presente no cotidiano das pessoas de diversas formas, que vão desde situações corriqueiras até tomadas de decisões que podem ter consequências por um longo tempo.

Por exemplo, ao nos programarmos para o dia seguinte de trabalho é provável que nos interessemos pela informação que o serviço de meteorologia ofereça. Caso seja um dia com muita chance de chover, é possível que optemos por roupas mais longas, sapatos fechados e, até mesmo, pensemos na ideia de sair mais cedo de casa para não correr o risco de chegarmos atrasados para o trabalho.

Pensemos agora na situação hipotética de um cidadão, que com muitos esforços consegue comprar um carro novo e é convidado a conhecer ofertas do serviço de seguro para este bem. Analisando as condições, percebe-se que o cidadão tem um histórico como motorista sem infrações de trânsito, mora e trabalha em uma região com baixos índices de criminalidade e o modelo de carro adquirido aparentemente não é o preferido dos assaltantes. Vale a pena essa pessoa adquirir o seguro?

A resposta para a pergunta acima, que não é tão simples, depende também de outras variáveis e certamente das probabilidades associadas a elas. Quão provável é esse carro se envolver em um acidente causado por terceiros? Quão provável é que o carro seja danificado por conta da ação da natureza, como em chuvas abundantes e queda de árvores? Esses questionamentos certamente são respondidos pelas seguradoras para fazer o cálculo do valor do seguro a ser cobrado.

Há várias outras situações em que a probabilidade se faz presente, como na expectativa de ganhar o prêmio máximo jogando-se na loteria federal, ou na tentativa de acertar o tamanho do calçado de uma pessoa com quem possuímos pouca intimidade.

Diante das constatações acima, fica evidente a importância da probabilidade e de sua presença em nosso cotidiano, o que desponta este conteúdo como um dos imprescindíveis no currículo de Matemática.

Tal importância dada à probabilidade é constatada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, a qual insere o tema como uma das cinco unidades temáticas da Matemática para o ensino fundamental, chamada de “Probabilidade e Estatística”, que tem como objetos de estudos a incerteza e o tratamento de dados (BRASIL, 2018).

Lima et al (2022) destacam que a BNCC traz uma mudança em relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, que é a antecipação do estudo de probabilidade para os anos iniciais do ensino fundamental, quando, nesse momento, são indicados estudos sobre aleatoriedade e fenômenos determinísticos e não determinísticos.

Para o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, na matriz de referência de Matemática e suas tecnologias, a probabilidade está inserida na competência de área 7, onde é encontrada em sua descrição, dentre outras, “cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística” (BRASIL, 2023, p. 7).

O Pisa, Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, realizado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE, obtém dados sobre desempenho de estudantes de diversos países em Leitura, Matemática e Ciências.

Em se tratando de Matemática, os conteúdos explorados no Pisa 2018 foram: variações e relações, espaço e forma, quantidade, incerteza e dados. Este último no qual a probabilidade e a estatística são nominalmente citadas.

Diante do exposto até aqui, percebemos que a probabilidade e a estatística estão inseridas em diversos contextos educacionais, sejam eles de orientação curricular, como a BNCC, sejam de exame de seleção, como o ENEM, ou como parte integrante de conteúdos cobrados em avaliações externas de larga escala, como o Pisa, o que revela a importância assumida pela probabilidade, e a estatística, nos contextos citados.

Em meio a esse protagonismo, e de sua presença na vida cotidiana das pessoas, há, naturalmente, um interesse de pesquisadores em educação sobre o tema probabilidade.

A última afirmação pode ser confirmada ao pesquisarmos no diretório de dissertações do PROFMAT, no dia 24/06/2023, o termo “probabilidade”, que acabou nos retornando 184 dissertações que discutiram esse tema, um número bastante considerável.

Dentre as dissertações citadas acima, quase a sua totalidade, 176, versaram sobre trabalhos executados, ou propostos, para o ensino de probabilidade no nível básico de ensino (fundamental ou médio), o que sugere que há uma demanda por melhoria do ensino e aprendizagem de probabilidade neste nível.

Diversas pesquisas já investigaram as dificuldades que os estudantes têm em relação a aprendizagem de probabilidade e estatística, como Pontes e Nuñez (2019), Ferreira (2017) e Fonseca (2017).

Nos trabalhos acima citados, há apontamentos de dificuldades das mais variadas, tais como dificuldade em interpretação do enunciado, equívocos na utilização dos princípios aditivo e multiplicativo e dificuldade de distinguir entre arranjo e combinação.

Nesse contexto de dificuldade dos estudantes em probabilidade, este trabalho surgiu como uma proposta para mitigar essas dificuldades, tendo como elo motivador a utilização de jogos de azar, em especial os jogos de loteria.

Os jogos de loteria são bastante atrativos para as pessoas pois, conforme afirma Silva (2018), há nelas o desejo de ascensão social, de pagar suas dívidas ou de comprar sua casa própria.

Dessa forma, o objetivo central deste trabalho é estimular o aprendizado de probabilidade por parte dos estudantes a partir da criação de jogos de loteria.

Como objetivos específicos tivemos: fazer uma análise dos erros dos estudantes nos problemas propostos; incentivar os estudantes a identificarem jogos justos a partir da determinação da esperança matemática; analisar as criações dos jogos dos estudantes a partir dos aspectos de probabilidade, premiações e preços.

Os objetivos foram sendo alcançados e explicitados ao longo deste trabalho, que está organizado conforme descrito nos parágrafos a seguir.

O Capítulo 1 versa sobre os princípios de Análise Combinatória e métodos de contagens, como permutações, arranjos e combinações.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo de probabilidade, onde é possível encontrar uma discussão sobre o que é probabilidade a partir das óticas laplaciana, frequentista e subjetiva. No mesmo capítulo, encontram-se definições de espaço amostral, eventos, axiomas de Kolgomorov e probabilidade condicional. Exemplos e questões foram utilizados para ilustrar as definições apresentadas.

No Capítulo 3 encontra-se um estudo breve sobre variáveis aleatórias discretas e o cálculo de sua esperança matemática, cuja interpretação foi trazida para um contexto de jogos de aposta, dentre eles a Mega-Sena.

O Capítulo 4 é dedicado a uma breve contextualização histórica e legislativa sobre jogos de azar e loterias no Brasil, seguida de um tópico mais extenso sobre como os jogos são empregados para o ensino e aprendizagem de probabilidade.

Na sequência, o Capítulo 5, o mais denso de todos, temos os resultados e discussões, onde são apresentados a metodologia, a análise dos erros dos estudantes para os problemas propostos envolvendo as loterias Dia de Sorte e + Milionária, que até a data de 24/06/2023 não consta no diretório de dissertações do PROFMAT nenhum trabalho sobre elas, o que constitui uma novidade deste trabalho, e as loterias criadas pelos estudantes, que foram discutidas de maneira crítica, levando em consideração as probabilidades e a esperança matemática envolvidas.

O Capítulo 6 é dedicado às conclusões, onde é possível encontrar considerações finais sobre o trabalho, tendo como base os objetivos e sugestões de continuidade dele.

1 Análise Combinatória

Este capítulo é dedicado ao estudo de técnicas de contagem que servirão, como o próprio nome sugere, para a contagem de elementos, objetos ou de situações possíveis de ocorrer em determinadas decisões a serem tomadas.

Fala-se em técnicas pois elas servem para respondermos com mais facilidade e rapidez a pergunta sobre quantos elementos um conjunto possui, sem a necessidade de se fazer uma contagem de todos eles.

1.1 PRINCÍPIOS ADITIVO E MULTIPLICATIVO

Os princípios aditivo e multiplicativo permeiam toda a Análise Combinatória e estão relacionados à tomada de decisões necessárias para a contagem de elementos. As definições a seguir baseiam-se em Oliveira (2021, p. 127 – 128).

Definição 1 (Princípio multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem – PFC): *Caso uma decisão A possa ser tomada de n maneiras distintas e, após essa decisão ser tomada tivermos de tomar outra decisão B, que ocorre de m maneiras distintas, o número de maneiras distintas de ocorrer A e B é igual a* $n \times m$.

Definição 2 (Princípio aditivo): *Caso uma decisão A possa ser tomada de n maneiras distintas, e a decisão B possa ser tomada de m maneiras distintas, contanto que A e B sejam disjuntas, ou seja, não podem acontecer simultaneamente, o número de maneiras diferentes de acontecer A ou B é igual a* $n + m$.

Deve-se destacar que o princípio multiplicativo, bem como o aditivo, serve também para situações com mais de duas decisões a serem tomadas.

Exemplo 1: Em uma escola há 5 professores de Matemática, 4 Física e 3 de Química. De quantos modos diferentes podemos escolher:

a) Um professor de cada disciplina?

b) Um professor apenas, não importando a disciplina?

c) Dois professores, sendo cada um de disciplinas diferentes?

Respostas comentadas:

Letra a: Temos três decisões a serem tomadas, que são escolher o professor de Matemática, o que pode ser feito de 5 maneiras diferentes, depois devemos escolher o professor de Física, o que resulta em 4 possibilidades e, por fim, escolher o professor de Química, que são outras 3 possibilidades. Evocando o princípio multiplicativo, concluímos que há 5 x 4 x 3 = 60 maneiras distintas de escolher um professor de cada disciplina.

Letra b: Como queremos escolher apenas um professor, não importando a disciplina que leciona, estamos diante de três decisões disjuntas que são escolher 1 professor de Matemática, ou 1 professor de Física ou 1 professor de Química. Pelo princípio aditivo, podemos escolher um desses professores de 5 + 4 + 3 = 12 maneiras distintas.

Letra c: Neste item observaremos a utilização dos dois princípios. Para tanto, discutiremos as três situações possíveis de acontecer: I) Um professor de Matemática e um de Física; II) Um professor de Matemática e um de Química; III) Um professor de Física e um de Química. Para a situação I temos 5 x 4 = 20 maneiras. Já na situação II temos 5 x 3 = 15 maneiras. Na situação III temos 4 x 3 = 12 possibilidades. Agora, como apenas uma das três situações pode ocorrer, utilizamos o princípio aditivo para chegarmos a conclusão de que há 20 + 15 + 12 = 47 maneiras distintas de escolher 2 professores, sendo cada um de disciplinas diferentes.

1.2 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Dadas n pessoas, se quisermos ordená-las em uma fila convencional isso poderá ser feito de $n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .2.1$, já que para a primeira posição na fila teremos n possibilidades, para a segunda posição teremos $(n-1)$ possibilidades de escolha, e para a terceira posição teremos outras $(n-2)$ possibilidades, e assim por diante até chegarmos na última posição onde há apenas 1 possibilidade de escolha.

O que caracteriza esse problema é o que chamamos de permutações simples.

Definição 3 (Permutação simples): Dados *n* elementos, todos distintos, cada maneira diferente de ordenar esses elementos é chamada de *permutação simples*, e o total de permutações simples distintas, simbolizado por P_n,é dado por:

$$P_n = n.(n-1).(n-2).\ldots.2.1. \tag{1}$$

É bastante comum que o segundo membro da igualdade acima seja apresentado na forma de uma operação matemática chamada de fatorial, de modo que teremos

$$n! = n.(n-1).(n-2). \dots .2.1\ , \qquad (2)$$

onde $n!$ lê-se “n fatorial”.

Assim, por exemplo, o fatorial do número 5 é 5! = 5.4.3.2.1 = 120.

De (1) e (2) concluímos que $P_n = n!$, admitindo que 0! = 1! = 1.

Exemplo 2: De quantos modos 5 rapazes e 4 moças podem se colocar em uma fila de cinema com 9 poltronas vazias de modo que as moças fiquem juntas?

Resposta comentada:

Como queremos que as moças se sentem juntas em qualquer ordem, isso pode ser feito de $P_4 = 4! = 24$ maneiras distintas. Agora, resta apenas permutarmos os rapazes com o bloco de moças, o que pode ser feito de $P_6 = 6! = 720$ maneiras. Assim, usando o princípio multiplicativo, concluímos que a quantidade de maneiras distintas de rapazes e moças se posicionarem nessa fila, com as moças juntas e em qualquer ordem, é em número de 24×720 = 17280.

O exemplo acima pode ser generalizado para o caso de termos x rapazes e y moças, onde as moças podem se sentar juntas de $y!$ maneiras, e os rapazes e o bloco de moças podem se sentar de $(x+1)!$ modos, obtendo assim que há $y!\,(x+1)!$ maneiras de rapazes e moças sentarem-se juntos nas condições do problema em questão.

1.3 ARRANJOS E COMBINAÇÕES SIMPLES

Nos problemas anteriores estivemos interessados em descobrir de quantas maneiras podemos ordenar elementos distintos utilizando todos eles na ordenação. Agora, o nosso interesse será investigar de quantos modos possíveis podemos formar subconjuntos com k elementos de um conjunto com n elementos, sendo $k \leqslant n$, com $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

De maneira geral, se a ordem dos elementos nos subconjuntos for levada em consideração estaremos diante de um problema de Arranjo. Caso a ordem dos elementos nos subconjuntos seja irrelevante, estaremos diante de um problema de Combinação.

1.3.1 Arranjos Simples

Considere a situação: de um conjunto com *n* elementos distintos, de quantos modos podemos formar agrupamentos com *k* desses elementos, de modo que a ordenação desses *k* elementos seja considerada relevante?

Para responder a esse questionamento imaginemos que temos *n* pessoas interessadas em sentar-se em uma fila que dispõe de *k* poltronas, sendo $k \leqslant n$. A ilustração abaixo nos permite compreender melhor o problema.

$$\underset{1^a\ polt.}{\_\_\_\_\_\_}\quad \underset{2^a\ polt.}{\_\_\_\_\_\_}\quad \underset{3^a\ polt.}{\_\_\_\_\_\_}\quad \underset{4^a\ polt.}{\_\_\_\_\_\_}\quad \ldots\quad \underset{k^a\ polt.}{\_\_\_\_\_\_}$$

Para a 1ª poltrona temos *n* maneiras de ocupá-la. Para a 2ª poltrona temos $(n - 1)$, já que uma das pessoas se encontra na poltrona anterior. Para a 3ª poltrona temos $(n - 2)$ modos de ocupação, pois há 2 pessoas ocupando as poltronas anteriores. Continuando no mesmo raciocínio chegaremos à k^a poltrona, esta que pode ser ocupada por alguma das $(n - k + 1)$ pessoas restantes. Utilizando o princípio multiplicativo, podemos concluir que há $n.(n - 1).(n - 2). \ldots . (n - k + 1)$ maneiras diferentes de *n* pessoas sentarem-se em uma fila com *k* poltronas, considerando a ordenação importante.

O resultado obtido acima é o que chamamos de número de Arranjos Simples de *n* elementos tomados *k* a *k*.

Definição 4 (Arranjos Simples): A partir de *n* elementos distintos, a cada agrupamento de *k* dos *n* elementos, onde $k \leq n$, cuja ordenação dos *k* elementos é levada em consideração, chamamos de arranjo simples. O número total de arranjos simples formados, simbolizado por $A_{n,k}$, é dado por:

$$A_{n,k} = n.(n-1).(n-2). \ldots .(n-k+1). \qquad (3)$$

Assim, pela Equação (3) temos, por exemplo, que $A_{8,3} = 8.7.6 = 336$.

É muito comum que a equação citada seja apresentada de uma outra maneira, multiplicando o seu segundo membro por $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, resultando no que segue.

$$A_{n,k} = n.(n-1).(n-2). \ldots .(n-k+1).\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$\Rightarrow A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{4}$$

1.3.2 Combinações simples

Agora, vamos considerar a mesma situação introduzida no início do tópico anterior, com a diferença que a ordem com que as k pessoas escolhidas para sentarem-se na fila é irrelevante. Ou seja, estamos interessados na seguinte contagem: de um conjunto com n pessoas, de quantos modos podemos escolher k delas para sentarem-se em uma fila com k poltronas, mas de modo que a ordem com a qual elas se posicionem na fila não constitua situações diferentes?

De uma maneira exemplificada, suponhamos que Ana, Beatriz, Carla, Danilo e Emanoel queiram se sentar em uma fila com 3 poltronas, não importando a ordem em que se posicionem. As triplas de possibilidades (Ana, Beatriz, Carla) e (Ana, Carla, Beatriz), por exemplo, são rigorosamente iguais para efeitos de contagem, sendo contadas apenas uma única vez, devido a ordem com que se posicionam na fila não ser levada em consideração.

Para chegarmos na fórmula da Combinação Simples de n elementos tomados k a k, devemos partir da equação obtida em (3) e dividi-la por $k!$, já que foram feitas $k!$ contagens considerando que a ordem dos elementos nos agrupamentos era importante.

Definição 5 (Combinações Simples): A partir de n elementos distintos, a cada agrupamento de k dos n elementos, onde $k \leq n$, cuja ordenação dos k elementos não é levada em consideração, chamamos de combinação simples. O número total de combinações simples distintas, simbolizado por $C_{n,k}$, é dada por:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{n.(n-1).(n-2). \ldots \ .(n-k+1)}{k!}, \tag{5}$$

ou ainda, considerando a equação do arranjo obtida em (4), podemos também concluir que:

$$C_{n,k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} \ \Rightarrow \ C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ . \tag{6}$$

Exemplo 3: Na loteria Lotoemoji, criada pelos pesquisadores, são disponibilizados 9 emojis e o apostador deve escolher três deles. O sorteio é honesto de modo que cada emoji tem igual chance de ser selecionado. Durante o sorteio são sorteados 3 emojis, sem reposição, não importando a ordem em que são selecionados. Abaixo estão os emojis disponíveis na cartela.

Quadro 1 - Emojis disponíveis na cartela do Lotoemoji.

😀	🙃	🙏	😍	🤡	🤞	😡	😭	🤤
1 ( )	**2 ( )**	**3 ( )**	**4 ( )**	**5 ( )**	**6 ( )**	**7 ( )**	**8 ( )**	**9 ( )**

Fonte: Autoria própria.

De quantos modos uma pessoa pode escolher 3 desses *emojis*?

Resposta comentada:

Na prática, um apostador dessa loteria deve escolher três desses *emojis* dos nove disponíveis, não importando a ordem de escolha, o que caracteriza uma combinação simples de 9 elementos tomados 3 a 3, ou seja,

$$C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = 84.$$

Assim, há 84 maneiras diferentes de um apostador escolher 3 *emojis* de um total de nove. Na prática, o jogador só poderá fazer 84 apostas diferentes.

Esse exemplo será retomado mais adiante, no capítulo de resultados e discussões, pois ele é parte de um dos problemas propostos aos estudantes voluntários que participaram da pesquisa.

2 Probabilidade

Este capítulo é dedicado ao estudo teórico de probabilidade, onde será possível estabelecer uma discussão entre probabilidade subjetiva, teórica e frequentista, discussão essa embasada por teoremas e axiomas, mas sem deixar de lado as aplicações contextualizadas, que são fundamentais para um melhor entendimento do tema.

2.1 O QUE É PROBABILIDADE?

A origem dos estudos de probabilidade está relacionada aos jogos de azar, conforme afirmam Carvalho (2019) e Oliveira (2021). Não é difícil imaginar que os jogadores estivessem interessados em descobrir maneiras que tornassem mais prováveis suas vitórias, recorrendo a célebres estudiosos ao longo dos tempos em busca de respostas.

É de reconhecimento público que a primeira obra a tratar sobre probabilidade foi *Liber de Ludo Aleae,* de Gerolamo Cardano (1501 – 1576). No livro havia, além de instruções para jogos de azar da época, uma definição formal de probabilidade como uma razão (REZENDE, 2020), conforme veremos mais adiante.

Correspondências trocadas por Blase Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) também contribuíram para o que viria a se chamar de Teoria da Probabilidade. Dentre essas correspondências há o famoso “Problema dos Pontos”, que trata sobre uma aposta entre dois jogadores que decidem encerrar a partida antes que algum dos jogadores tenha atingido a pontuação mínima para se sagrar vencedor. A discussão gira em torno da melhor forma de dividir o dinheiro da aposta, tendo como base a probabilidade de vitória de cada jogador.

Evidentemente a probabilidade não está associada apenas aos jogos de azar, mas a diversas outras áreas como a economia, a meteorologia, a previdência social e o ramo das concessionárias de seguros, apenas para exemplificar. Mas, o que realmente é probabilidade?

Na busca pela palavra probabilidade no dicionário *online* Dicio encontraremos “Qualidade do que é provável, do que tem possibilidade de acontecer, do que pode ocorrer. Razão que faz supor a verdade ou possibilidade de um fato ...” (PROBABILIDADE, 2023). Destaca-se dessa definição o fato de a probabilidade estar associada a situações factíveis, ou seja, cuja existência é possível.

De um modo geral, a probabilidade é uma medida do grau de certeza (ou incerteza) sobre algo. Essa medida, expressa em número, revela o quão podemos acreditar, ou não, nas situações em que estejamos interessados.

Por exemplo, ao perguntarmos a um torcedor da seleção brasileira de futebol masculino qual a probabilidade de ganharmos a Copa do Mundo em 2026 e tivermos como resposta o percentual de 70%, estaremos diante de uma pessoa confiante de que a seleção se sagrará campeã do mundo, porém, com certa desconfiança, pois há na resposta um grau de incerteza presente correspondente aos 30% que faltaram para uma certeza (que corresponde aos 100%).

Denota-se do último exemplo que em determinadas situações a probabilidade é concebida através do subjetivo, das crenças pessoais, dos desejos, cuja representação se materializa em números.

Muitas vezes, esse tipo de probabilidade recebe o nome de *probabilidade subjetiva*, e está mais presente do que imaginamos, pois quase sempre estamos fazendo julgamentos sobre os mais variados aspectos de nossa vida.

Um casal que se conhece apenas por aplicativos de relacionamento se questiona quais as chances de o(a) pretendente continuar interessado(a) após um encontro real. Uma escolha de presente para o aniversariante sempre é precedida de julgamentos sobre o quão o presenteado gostará da regalia.

Já a chamada probabilidade teórica tem concepções que não estão alicerçadas no subjetivo pessoal, ou seja, independe de sentimentos, desejos ou achismos de cada um. Por exemplo, no lançamento de uma moeda honesta, a probabilidade teórica nos diz que há 50% de chance de dar cara, pois não há favoritismo entre as faces. Porém, uma pessoa pode achar que a probabilidade de dar cara é de 80% (subjetiva), porque ela, por algum motivo, simpatizou com a face cara naquele momento.

A probabilidade teórica, casos para os quais esse texto foi dedicado, está fortemente associada à Análise Combinatória, pois, como veremos em breve, em muitas situações em que desejamos medir a probabilidade, necessitaremos fazer contagens de elementos.

Nota-se que a probabilidade teórica não necessita, a priori, de nenhuma experimentação prévia, ou seja, não há a necessidade de se repetir um experimento por diversas vezes para se chegar a uma medição, pois ela está alicerçada em axiomas e teoremas que conduzem ao resultado. O que não significa que a probabilidade teórica exprima sempre a realidade, pois para um mesmo experimento aleatório é possível definir várias funções de probabilidade, mas nem todas estarão comprometidas com a realidade do que se investiga.

Nos casos em que se deseje trabalhar com o empírico, estamos diante da chamada probabilidade experimental ou, como adotamos neste trabalho, probabilidade frequentista, em que a medição de probabilidade obtida através de experimentos que são realizados e repetidos em um número suficiente para se chegar a uma convergência de valor.

Caso desejemos investigar a probabilidade de obter uma face cara no lançamento de uma moeda, basta repetirmos o experimento de lançá-la e observar sua face por 10.000 vezes, por exemplo, e então contar quantas vezes a face cara saiu em relação ao total de lançamentos. Caso seja uma moeda honesta, é esperado que o número de vezes em que foi observada a face cara seja algo em torno de 5.000.

De todo modo, deve-se destacar que a Teoria da Probabilidade, assim como outros ramos da matemática, obedece a alguns axiomas iniciais, que nada mais são do que enunciações feitas e aceitas como verdadeiras, sem a necessidade de uma prova, que formam a base de toda uma construção maior.

Na Teoria da Probabilidade esses axiomas são conhecidos como *Axiomas de Kolmogorov*, que serão detalhados mais adiante. O que se quer dizer com isso é que, mesmo em situações subjetivas, a probabilidade deve respeitar todo o arcabouço axiomático e teórico que a constitui, ou estaríamos diante de inverdades.

2.2 CONCEITOS INICIAIS

No estudo de probabilidade devemos compreender alguns conceitos, que nesta sessão recebem o adjetivo de iniciais em virtude de serem os primeiros a que todos que estudam probabilidade devem compreender.

2.2.1 Experimentos Aleatórios

Definição 6 (Experimentos Aleatórios): Um *experimento aleatório* “é aquele no qual o resultado não é conhecido com certeza”.

Destaquemos na definição acima, extraída de Rifo (2020, p. 19), a palavra certeza e sua antagônica incerteza, pois probabilidade é, em si, uma medida da incerteza de um dado experimento ou fenômeno, como discutimos mais adiante. Para exemplificar, podemos considerar como experimentos aleatórios o lançamento de dado convencional ou de uma moeda honesta. Não é possível saber com certeza qual resultado será obtido.

Em sentido contrário temos os *experimentos determinísticos*, que são aqueles em que não há nenhum grau de incerteza associado a eles, já que é possível saber de certeza o que ocorrerá. Como exemplo temos um experimento de determinar a temperatura de ebulição da água em iguais condições ambientes. Eles sempre retornarão o mesmo resultado, não podendo serem encontrados outros resultados que caracterizem o experimento como aleatório.

2.2.2 Espaço Amostral

Definição 7 (Espaço Amostral): O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é o que chamamos de *espaço amostral*.

A definição acima foi obtida de Rifo (2020, p. 19). Indicamos o conjunto espaço amostral pela letra Ω (ômega). Então, para um lançamento de um dado honesto numerado de 1 a 6, temos que o espaço amostral associado ao experimento será $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Já para uma moeda honesta lançada uma única vez terá $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$.

Em relação ao espaço amostral é oportuno destacarmos que estaremos sempre lidando com Ω sendo um conjunto finito ou infinito enumerável.

2.2.3 Eventos

Definição 8 (Evento): É qualquer subconjunto do espaço amostral, sendo ele simbolizado por uma letra maiúscula de nosso alfabeto.

A definição acima foi obtida de Oliveira (2021, p. 301). É possível pensar o evento como o conjunto dos casos favoráveis a uma dada afirmação ou propriedade do espaço amostral Ω.

Assim, dado o experimento aleatório do lançamento de um dado honesto numerado de 1 a 6, o evento "obter um número par" é representado por E = $\{2,4,6\}$, que são os casos favoráveis de acontecer que resultam em uma face par. Para o evento "obter um número par e primo", temos que E = $\{2\}$, já que 2 é o único número par e primo ao mesmo tempo. Eventos com apenas um elemento são chamados de *elementares*.

O evento "obter o número 0" na face superior resulta em E = $\varnothing$, já que é impossível obter uma face numerada com 0. Eventos vazios, como estes, recebem o nome de *evento impossível*. Já o evento "obter um número menor do que 7" corresponde ao próprio espaço amostral, já que $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pois sempre obteremos um número menor do que 7 em um dado honesto. Casos em que o evento se confunde com Ω recebem o nome de *eventos certos*.

Observemos que os eventos impossíveis e os eventos certos não exibem nenhum grau de incerteza, pois nunca ocorrem ou sempre ocorrem, respectivamente, de modo que há pouco interesse no estudo desses casos.

Outro evento que merece destaque é o *evento complementar*. Seja E um evento qualquer do espaço amostral Ω, definimos o seu complementar, simbolizado por $\bar{E}$, como o conjunto formado por todos os elementos do espaço amostral que não pertencem a E. O conjunto dos números inteiros, por exemplo, tem como um de seus eventos os "números pares". Este evento tem um complementar "número ímpares".

2.3 DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE COMO UMA RAZÃO

Definição 9 (Probabilidade como uma razão): Dado um espaço amostral Ω, não vazio, onde todos os seus eventos elementares são equiprováveis, isto é, têm a mesma chance de ocorrer, e seja E um evento contido em Ω, definimos a probabilidade de ocorrência de E, simbolizada por $p(E)$, como a seguinte razão:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \ . \tag{7}$$

Onde $n(E)$ e $n(\Omega)$ representam, respectivamente, a quantidade de elementos dos conjuntos E e Ω.

A equação acima pode ser encontrada também sob a forma da Equação (8), a seguir, utilizada por Cardano, Pascal e Laplace, segundo Lima (2016, p. 109), conhecida em livros didáticos como a definição de probabilidade.

$$p(E) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}\ . \tag{8}$$

A designação "casos favoráveis" se refere à contagem dos elementos do evento investigado, e "casos possíveis" alude à quantidade de elementos do espaço amostral.

Para exemplificar a utilização das razões acima apresentadas, vamos apresentar um problema envolvendo o jogo da Mega-Sena.

Exemplo 4*:* A Mega-Sena é uma loteria na qual o jogador dispõe de um volante com 60 números, chamados de dezenas, e deve escolher pelo menos 6 deles. Ganha o prêmio máximo aquele que consegue acertar os 6 números sorteados. Qual a probabilidade de que o número 20 seja sorteado em uma rodada qualquer?

Resposta comentada:

Assumindo que todas as bolas que representam os números sejam igualmente prováveis de serem sorteadas, não importando a ordem com que as dezenas sejam sorteadas, devemos ter $n(E) = C_{59,5}$, pois já entendemos que o número 20 foi sorteado, restando que outros 5 números sejam escolhidos em um total de 60 - 1 = 59 restantes. Para os casos possíveis, $n(\Omega) = C_{60,6}$, pois queremos determinar todas as possibilidades de escolhermos 6 dezenas de um total de 60 sem que a ordem de escolha seja preponderante.

Assim, a probabilidade procurada, que simbolizaremos por $p(20)$, será dada por:

$$p(20) = \frac{C_{59\,,5}}{C_{60\,,20}}$$

$$p(20) = \frac{5.006.386}{50.063.860}$$

$$p(20) = \frac{1}{10}.$$

Ou seja, a probabilidade de que a dezena 20 seja sorteada em qualquer sorteio da Mega-Sena é de 1 em cada 10, ou 10%, o que significa que, provavelmente, em dez sorteios feitos em um deles a dezena 20 estará presente.

A probabilidade calculada acima pode causar estranheza em pessoas pouco familiarizadas com os cálculos probabilísticos, já que para elas muitas vezes seria mais crível que a dezena 20 fosse sorteada com uma chance de 1 em cada 60, pois "20" representa a bola de interesse de um total de 60 disponíveis.

Porém, esse raciocínio é claramente uma interpretação equivocada dos casos favoráveis, que são agrupamentos de 6 dezenas no qual a dezena 20 está presente, e também há um equívoco nos casos possíveis, já que devem incluir todos os agrupamentos de seis números a partir de 60 disponíveis (de 1 a 60).

Note que, independentemente da dezena, a probabilidade de que ela seja sorteada é de 1/10, pois consideramos que qualquer delas é igualmente provável de ser sorteada. Então a "dezena" 1 tem 10% de chances de ser sorteada, ou a dezena 60 tem 10% de chances, ou a dezena 39 de igual forma.

A probabilidade como uma razão, como se apresenta nas Equações (7) e (8), deve ser recebida com certas ressalvas. Note que se trata de razões entre contagens, e, sendo assim, estão apropriadas para investigação de probabilidades de eventos e espaços amostrais finitos. Para eventos e espaços amostrais infinitos enumeráveis, usamos limites para determinar as razões citadas. Ademais, reforçamos que a probabilidade como uma razão está restrita também aos casos em que temos eventos elementares equiprováveis.

Neste trabalho, será suficiente nos atermos a problemas envolvendo probabilidades de eventos finitos e equiprováveis, embora tenhamos resolvido um problema com eventos não equiprováveis mais adiante. De todo modo, importa conhecermos a definição de probabilidade rigorosa, proposta por Kolgomorov por volta de 1930. Com essa definição, podemos obter o cálculo da probabilidade para todos os casos possíveis. Para simplificar, apresentamos aqui uma versão para o espaço amostral enumerável.

Quando associamos um número a uma probabilidade, devemos fazê-lo de forma que os *Axiomas de Kolgomorov* sejam satisfeitos. A seguir, eles são enunciados a partir dos eventos elementares $E_1, E_2, E_3, E_4, \dots , E_n$ de um espaço amostral Ω, não vazio, indicando por $p(E_i)$ e $p(\Omega)$ as probabilidades associadas aos eventos E_i e ao espaço amostral, respectivamente.

Axioma I: $0 \leq p(E_i) \leq 1$;

Axioma II: $p(\Omega) = 1$;

Axioma III: $p(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} p(E_i)$, desde que $E_i \cap E_j = \emptyset$, com $i \neq j$.

O *Axioma I* limita a probabilidade de qualquer evento ao valor 1.

O *Axioma II* sugere que a probabilidade de ocorrência do espaço amostral como um evento, tomando **Ω** como um conjunto universo, é sempre certo, ou seja, será sempre observado com certeza.

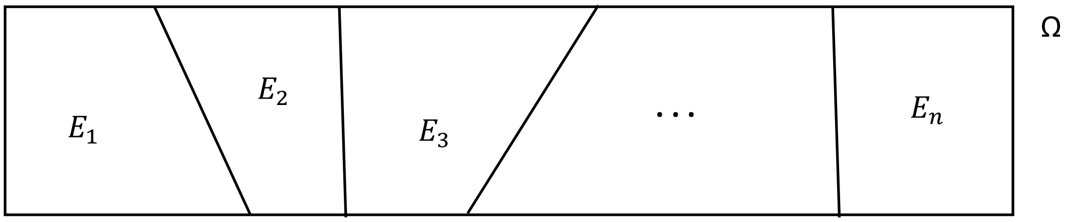
O *Axioma III* implica que a probabilidade da união de eventos elementares e dois a dois disjuntos de um espaço amostral é simplesmente a soma de todas as probabilidades individuais desses eventos.

A título de ilustração, caso tenhamos apenas dois eventos elementares distintos, E_1 e E_2, pelo *Axioma III* a probabilidade da união resulta em:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) .$$

Uma outra observação importante sobre o *Axioma III* é que os eventos não necessitam ser equiprováveis, ou seja, não há a restrição de que tenham as mesmas chances de ocorrer.

Para obtermos uma importante igualdade, a partir dos *Axiomas II e III* vamos utilizar uma representação gráfica. Seja **Ω** um espaço amostral não vazio, representado abaixo por um retângulo, e $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ eventos de **Ω**, com as regiões delimitadas a seguir.



A partir da representação podemos notar que

I) $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = \Omega$;

II) $E_i \cap E_j = \emptyset$, desde que $i \neq j$.

Ao investigarmos a probabilidade de ocorrência de algum dos eventos descritos acima, ou seja, $p\ (E_1 \cup\ E_2\ \cup\ E_3 \cup\ ... \cup\ E_n)$, devemos obter, a partir do *Axioma III* de Kolgomorov, o seguinte resultado.

$$p\ (E_1 \cup\ E_2\ \cup\ E_3 \cup ... \cup\ E_n)\ =\ p\ (E_1) + p\ (E_2) + p\ (E_3)\ + ... + p\ (E_n). \tag{9}$$

Porém, como $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup\ E_n =\ \Omega$, e p (Ω) = 1 do *Axioma II* de Kolgomorov, podemos reescrever a Equação (9) como:

$$1 =\ p(E_1)\ +\ p(E_2)\ +\ p(E_3)\ +\ p(E_4) + \ldots + p(E_n)\ . \tag{10}$$

Apenas permutando os membros da última igualdade obtemos:

$$p\ (E_1) + p\ (E_2) + p\ (E_3) + p\ (E_4) + ... + p\ (E_n) = 1\ . \tag{11}$$

O que a Equação (11) nos comunica é que se temos *n* eventos dois a dois mutuamente exclusivos e cuja união resulta o espaço amostral, a soma das probabilidades desses eventos é unitária.

Propriedades importantes que decorrem da Equação (11) são as apresentadas a seguir.

Propriedade 1: p (∅) = 0

Propriedade 2: $p(E)$ = 1 – p ($\bar{E}$), onde $\bar{E}$ é o evento complementar do evento E, pois como esses dois conjuntos são mutuamente exclusivos e $E\ \cup\ \bar{E}$ = Ω, podemos usar (11) com esses dois eventos, resultando em $p(E) + p(\bar{E}) = 1$, ou ainda, $p(E) = 1 - p(\bar{E})$.

Na prática, a *Propriedade 2* é utilizada quando for mais fácil calcular a probabilidade do complementar do evento E do que do próprio evento E. Digamos, por exemplo, que de uma urna contendo 5 bolas numeradas de 1 a 5, quiséssemos sortear aleatoriamente duas delas, uma de cada vez, com reposição. Qual a probabilidade de escolhermos bolas diferentes?

Supondo que as bolas sejam igualmente prováveis de serem sorteadas, podemos responder ao questionamento pensando no evento complementar ($\bar{E}$), que seria os casos em que sorteamos a mesma bola. Esses casos, descritos como pares ordenados, são um total de cinco: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5). Os casos possíveis são 5 x 5 = 25 (não precisamos descrevê-los), pois temos 5 resultados possíveis para o primeiro sorteio, e outros cinco para o segundo sorteio. Assim, $p(\bar{E})$ = 5/25. Logo, $p(E)$ = 1 – 5/25 = 20/25 ou 4/5.

Como forma de demonstrar outra aplicação de (11), agora envolvendo eventos não equiprováveis, que até aqui não foram contemplados, segue o exemplo abaixo.

Exemplo 5: Um time de futebol feminino quando joga tem probabilidade de ganhar que é igual ao dobro da probabilidade de perder. Sabe-se ainda que o empate ocorre com uma probabilidade de 1/6. Sendo assim, na próxima partida, qual a probabilidade desse time não vencer?

Resposta comentada:

Vamos nomear os três eventos possíveis para o problema, conforme abaixo.

E_1: O time ganha.

E_2: O time perde.

E_3: O time empata.

Pelos dados do problema temos que $p\ (E_1) = 2.\ p\ (E_2)$ e $p\ (E_3) = 1/6$.

Podemos usar (11) para resolver este problema, já que temos os eventos dois a dois mutuamente exclusivos, pois o time não pode ganhar e perder, por exemplo, e a união desses eventos constitui o espaço amostral **Ω**, que são todos os resultados possíveis de ocorrer.

Assim, a Equação (11) para o problema em questão torna-se:

$$p\ (E_1) + p\ (E_2) + p\ (E_3) = 1.$$

Substituindo os dados da questão obtemos:

$$2\ p\ (E_2) + p\ (E_2) + 1/6 = 1 \ \Rightarrow\ 3\ p\ (E_2) = 5/6 \ \Rightarrow\ p\ (E_2) = 5/18.$$

Descobrimos que a probabilidade de perder é de 5/18. Logo, como a probabilidade de ganhar é o dobro de $p\ (E_2)$, temos que $p\ (E_1) = 2.5/18 = 10/18$.

Como a questão pede a probabilidade de o time feminino não ganhar, devemos investigar $p\ (E_2\ \cup\ E_3)$. Como esses eventos são mutuamente exclusivos, a probabilidade em questão é igual a soma das probabilidades individuais, ou seja:

$$p\ (E_2\ \cup\ E_3) = p\ (E_2) + p(E_3)$$

$$\Rightarrow p\ (E_2\ \cup\ E_3) = 5/18 + 1/6$$

$$\Rightarrow p\ (E_2\ \cup\ E_3) = 8/18$$

$$\Rightarrow p\ (E_2 \cup E_3) = 4/9.$$

Ou seja, a probabilidade que o time não ganhe é de 4/9, o que pode ser interpretado como a cada nove partidas é provável que em quatro delas o time não ganhe.

Uma observação importante sobre esse problema é que poderíamos ter usado a probabilidade complementar do evento ganhar, ou seja, $p\ (\overline{E_1})$, que significa probabilidade de não ganhar, pois já que descobrimos que $p\ (E_1)$ = 10/18, basta fazer:

$$p\ (\overline{E_1}) = 1 - p\ (E_1) \Rightarrow p\ (\overline{E_1}) = 1 - 10/18 \Rightarrow p\ (\overline{E_1}) = 4/9\ .$$

2.4 PROBABILIDADE FREQUENTISTA COMO VIÉS DE INVESTIGAÇÃO

As probabilidades até então discutidas neste trabalho são as subjetivas, onde os números são utilizados para descrever um grau de crença, incerteza ou desejo, e as probabilidades teóricas, aquelas concebidas por fórmulas, cálculos matemáticos e propriedades que nos trazem uma resposta a um dado problema proposto.

Ocorre que, em algumas situações, o nosso subjetivo pode falhar, como também todo nosso conhecimento de fórmulas e propriedades podem não ser suficientes para responder a um dado problema. Nessas situações, podemos nos valer da probabilidade frequentista, que consiste numa repetição suficientemente grande do experimento aleatório, sob as mesmas condições, para que tenhamos indícios da probabilidade procurada.

Exemplificando o que seria a probabilidade frequentista, retornemos ao *Exemplo 4*, onde estávamos interessados em saber qual a probabilidade de sair a bola nº 20 em um sorteio qualquer da Mega-Sena. Com os cálculos feitos, chegamos à resposta de que a dezena tem probabilidade de 10% de ser sorteada (probabilidade teórica). Mas, digamos que por alguma casualidade não tivéssemos chegado a esse número, de que forma poderíamos, pelo menos, conjecturar essa probabilidade?

A Tabela a seguir informa as cinco dezenas mais sorteadas e menos sorteadas, bem como a sua frequência relativa, nos 2.568 sorteios realizados até o dia 26/02/2023.

Tabela 1 – Quantidade de vezes que algumas dezenas foram sorteadas na Mega-Sena.

Posição	**Dezena Sorteada**	**Quantidade de vezes sorteada**	**Frequência relativa**
1ª	53	297	11,6 %
2ª	10	296	11,5 %
3ª	05	285	11,1 %
4ª	33	279	10,9 %
4ª	37	279	10,9 %
56ª	22	230	9,0 %
57ª	15	225	8,8 %
58ª	55	219	8,5 %
59ª	21	218	8,5 %
60ª	26	211	8,2 %

Fonte: Autoria própria, a partir de informações do site SÓ MATEMÁTICA.

Notemos que, caso uma pessoa não saiba quais as chances de uma dezena ser sorteada na Mega-Sena, a partir dos cálculos feitos na resolução do Exemplo 4, de posse da Tabela 1 ela poderia fazer boas inferências, visto que as dezenas mais sorteadas se situam em torno de 11% de frequência relativa, enquanto as menos sorteadas variam em torno de 8%. Um intervalo entre 8 e 11% está de acordo com o resultado teórico de probabilidade calculada, que foi de 10%.

É de se esperar que a partir de um grande número de observações, a probabilidade frequentista se aproxime da probabilidade teórica, como parece ocorrer com as dezenas da Mega-Sena, já que tivemos um número de sorteios considerável (2.568 sorteios).

Definição 10 (Probabilidade Frequentista): A probabilidade frequentista é a razão entre a quantidade de vezes que um certo evento E ocorreu a partir de N repetições de um experimento aleatório, sob as mesmas condições, com eventos elementares equiprováveis, ou seja:

$$p(E) = \frac{nº\ de\ vezes\ que\ o\ evento\ foi\ observado}{N} \ . \qquad (12)$$

Assim, por exemplo, a bola de nº 10 foi observada 296 vezes nos 2.568 primeiros sorteios realizados na loteria da Mega-Sena, o que nos faz calcular sua probabilidade frequentista abaixo.

$$p(bola\ nº\ 10) = \frac{296}{2.568} \approx 0{,}115\ ou\ 11{,}5\% \ .$$

O resultado acima é o mesmo que aparece na Tabela 1, indicando, inclusive, a forma como foram determinados todos os outros valores percentuais constantes na referida tabela.

Para finalizar a discussão sobre esse tópico, vamos falar sobre o lançamento de uma moeda honesta, ou seja, com faces equiprováveis. Mlodinow (2018) nos revela que o cientista Jhon Kerrich decidiu fazer um teste com uma moeda desse tipo, repetindo o experimento de lançamento do objeto por 10 mil vezes, obtendo a face cara em 50,67%. Obviamente a face coroa foi observada em 49,33% dos lançamentos.

Os resultados acima caminham em direção à probabilidade inicial que atribuiríamos a esse experimento, que é de 50% para ambas as faces, já que não há elementos nesse experimento que possam indicar uma preferência maior por uma das faces.

O fato de o experimento ter sido realizado 10 mil vezes, um número que podemos considerar alto, fez com que a proporção de caras caminhasse para o que se esperava. Porém, deve-se ter cuidado em se tratando da quantidade de repetições de um experimento para que possamos fazer inferências coerentes.

Retornemos ao experimento do lançamento da moeda honesta. Digamos que em dez repetições tenhamos obtido oito faces cara. Com esses resultados seria correto afirmar que a probabilidade de obter cara seja 4 vezes maior do que obter uma face coroa (8/10 e 2/10, respectivamente)? Não nos parece sensata esta conclusão, pois estamos repetindo o experimento uma quantidade pequena de vezes e, por isso, há margem para interpretações distorcidas da realidade.

2.5 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Consideremos a experiência de lançar uma moeda honesta duas vezes e observar a face virada para cima. Caso estejamos interessados em investigar o evento E “obter duas caras”, antes do experimento acontecer podemos conjecturar que $p(E) = 1/4$, já que existem quatro resultados possíveis, que são Ω = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}, e apenas um deles é o caso favorável.

Mas, digamos que o resultado do primeiro lançamento foi conhecido e resultou no evento S “cara”. Desse modo, a probabilidade de obtermos duas caras não é mais 1/4, já que não temos mais quatro casos possíveis, mas sim apenas dois, que são (cara, cara) e (cara, coroa), resultando em um novo valor de probabilidade, $p(E) = 1/2$.

Notemos que o que mudou de uma situação para outra foi a informação recebida de que deu cara no primeiro lançamento. Essa informação acaba por condicionar nosso evento de interesse, fazendo com que o espaço amostral ao qual ele fazia parte fosse reduzido. As probabilidades de eventos que mudam conforme tenhamos mais informações do experimento ou que suponhamos ter acontecido são conhecidas como probabilidades condicionadas.

De modo geral, se estamos interessados em investigar a probabilidade de ocorrência de um evento E, dado que aconteceu S, ou que suponhamos ter acontecido, simbolizada por $p(E|S)$, é dada por:

$$p(E|S) = \frac{p(E \cap S)}{p(S)} \quad \text{desde que} \quad p(S) \neq 0. \tag{13}$$

A Equação (13) pode ser reescrita levando-se em consideração que $p(E \cap S) = \frac{n(E \cap S)}{n(\Omega)}$ e $p(S) = \frac{n(S)}{n(\Omega)}$, onde Ω é o espaço amostral original.

Definição 10 (Probabilidade condicional): Dados dois eventos E e S, com $p(S) \neq 0$, a probabilidade de ocorrer E dado que S ocorreu é dada por:

$$p(E|S) = \frac{p(E \cap S)}{p(S)} = \frac{\frac{n(E \cap S)}{n(\Omega)}}{\frac{n(S)}{n(\Omega)}} \Rightarrow p(E|S) = \frac{n(E \cap S)}{n(S)}. \tag{14}$$

O que a última igualdade quer dizer é que dado que temos uma informação S, a probabilidade de ocorrência de E é uma razão entre o número de elementos comuns de E e S pelo número de elementos de S. Na prática, é como se o espaço amostral original Ω fosse reduzido a um novo espaço amostral S.

A seguir resolvemos um problema proposto, onde ficará mais evidente a aplicação da probabilidade condicional.

Exemplo 6: (ENEM/2020) Para um docente estrangeiro trabalhar no Brasil, ele necessita validar o seu diploma junto ao Ministério da Educação. Num determinado ano, somente para estrangeiros que trabalharão em universidades dos estados de São Paulo e Rio de Janeiro, foram validados os diplomas de 402 docentes estrangeiros. Na tabela, está representada a distribuição desses docentes estrangeiros, por países de origem, para cada um dos dois estados.

	Argentina	**Espanha**	**Cuba**	**Portugal**	**Venezuela**	**Total de docentes**
São Paulo	112	60	28	9	30	**239**
Rio de Janeiro	29	40	46	36	12	**163**
Total	**141**	**100**	**74**	**45**	**42**	**402**

A probabilidade de se escolher, aleatoriamente, um docente espanhol, sabendo-se que ele trabalha em uma universidade do estado de São Paulo é

A) 60/402 B) 60/239 C) 60/100 D) 100/239 E) 279/402

Resposta comentada:

Vamos nomear os eventos do problema.

E: Ser docente espanhol

S: Trabalhar na universidade de São Paulo

Observem que se quiséssemos somente a probabilidade do docente ser espanhol, ela seria dada por $p(E) = 100/402$, já que temos 100 maneiras de escolher 1 docente espanhol em um universo de 402 docentes. Porém, a questão traz um condicionante, que é justamente o evento S, que é a informação nova, o que já se sabe. Assim, a questão quer saber o valor de $p(E|S)$.

Pela Equação (13), sabemos que $p(E|S) = p(E \cap S)/p(S)$, mas $p(E \cap S)$ = 60/402, pois há 60 espanhóis trabalhando em São Paulo, no universo de 402 docentes, e $p(S) =$ 239/402, pois temos 239 docentes atuando no estado paulista de um total de 402.

Assim, temos que $p(E|S) = \frac{\frac{60}{402}}{\frac{239}{402}} = \frac{60}{239}$. (Letra B)

Uma outra solução consiste em reduzir o espaço amostral, já que a questão nos traz um dado de que o docente atua no estado de São Paulo. Assim, há 239 docentes atuando nesse estado, sendo que desses 60 são espanhóis, de modo que as chances de escolher um docente espanhol são de 60 para cada 239, ou seja, $p(E|S) = \frac{60}{239}$.

No próximo tópico discutimos eventos cuja probabilidade não é alterada, mesmo quando colocamos eventos condicionantes.

2.6 EVENTOS INDEPENDENTES

Do tópico anterior, sabemos que se dois eventos de um espaço amostral são condicionados um ao outro, a Equação (13) pode ser empregada. Vamos reescrevê-la abaixo de uma forma conveniente para o que queremos discutir nesse momento.

$$p(E|S) = \frac{p(E \cap S)}{p(S)} \Rightarrow p(E \cap S) = p(E|S).p(S)\,. \tag{15}$$

Vamos considerar agora que estamos com o experimento aleatório lançamento de um dado honesto. Cada lançamento representa uma tentativa. Seja E o evento “sair o número 6 na primeira tentativa” e S o evento “sair o número 2 na segunda tentativa”. Não colocando nenhuma condição inicial ao problema, teremos que $p(E) = p(S) = 1/6$. Mas, caso quiséssemos investigar $p(S|E)$, ou seja, dado que na primeira tentativa saiu a face “seis”, qual a probabilidade de sair face “dois” no segundo lançamento?

A resposta para a indagação acima é considerar que $p(E) = 1/6$, mesmo com a informação privilegiada do primeiro lançamento, pois não há nada de relevante na informação que faça com que a probabilidade de obter face “dois” seja maior ou menor do que 1/6. Nos casos em que a informação sobre S não altera a probabilidade de E, bem como informações de E não alteram a probabilidade de S, classificamos esses eventos como independentes.

De (15) obtemos uma importante relação. Sejam E e S eventos independentes entre si, escrevemos:

$$p(E \cap S) = p(E|S).p(S) \quad \Rightarrow \quad p(E \cap S) = p(E).p(S), \tag{16}$$

Ou seja, se quisermos investigar a probabilidade de ocorrência dos eventos E e S ao mesmo tempo, desde que sejam independentes, basta obter o produto entre as probabilidades individuais desses dois eventos.

A ideia pode ser expandida para mais de dois eventos. Sejam $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ eventos independentes entre si, a probabilidade de ocorrência da interseção entre esses eventos é dada por:

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_n) = p(E_1).p(E_2).p(E_3) \ldots .p(E_n)\,. \tag{17}$$

Exemplo 7: (BUSSAB, MORETTIN, 2013, p.118) A probabilidade de que A resolva um problema é de 2/3, e a probabilidade de que B o resolva é de 3/4. Se ambos tentarem independentemente, qual a probabilidade de o problema ser resolvido?

Resolução: Vamos nomear os eventos envolvidos no problema.

A: A pessoa A resolve o problema, com $p(A) = 2/3$.

$\bar{A}$: A pessoa A não resolve o problema, com $p(\bar{A}) = 1/3$.

B: A pessoa B resolve o problema, com $p(B) = 3/4$.

$\bar{B}$: A pessoa B não resolve o problema, com $p(\bar{B})$ = 1/4.

A probabilidade procurada é $p(A \cup B)$, pois o problema estará resolvido se A resolver ou B resolver (ou ambos). Porém, para este problema vamos investigar $p(\bar{A} \cap \bar{B})$, que é a probabilidade de que o problema não seja resolvido por nenhuma das duas pessoas. Como A e

B são eventos independentes, seus complementares também o são, fazendo com que possamos aplicar a Equação (16) ao problema, como segue.

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}).p(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Assim, a probabilidade de o problema não ser resolvido é 1/12, o que mostra que a probabilidade de ser resolvido é de $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Uma outra maneira para resolver esse problema é pensar que para ele ser resolvido temos três situações possíveis:

I) A resolve e B não resolve, com $p(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$.

II) A não resolve e B resolve, com $p(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$.

III) A resolve e B também resolve, com $p(A \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$.

A soma das probabilidades das situações acima resulta em $\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} = \frac{11}{12}$.

3 Variáveis Aleatórias e Esperança Matemática

Nos jogos envolvendo apostas, prêmios ou algum outro tipo de recompensa, os jogadores observam, além das estratégias que podem ampliar suas chances de vitória em cada partida, o quanto pode chegar o quantitativo de premiações ou de perdas, ou seja, qual sua expectativa de ganho (ou perda).

Neste capítulo discutimos esse aspecto conhecido como esperança matemática, valor esperado, valor médio ou, simplesmente, média, que foi pensado para responder aos jogadores sobre seus possíveis ganhos em jogos de azar (FILHO, 2016).

3.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Para introduzir o conceito de variável aleatória, vamos trabalhar com um exemplo prático. Suponhamos que em uma urna existam 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, distinguíveis apenas pela cor. Desejamos retirar 2 bolas, sucessivamente e sem reposição. O objetivo desse experimento aleatório é observar a quantidade de bolas pretas retiradas. Usando a letra B para bolas brancas e P para bolas pretas, temos que o espaço amostral é Ω = {PP, PB, BP, BB}.

Note que o objetivo é quantificar as bolas pretas que saíram. Do espaço amostral percebemos que essa quantidade pode ser 0, 1 ou 2. Para cada valor desses associamos as seguintes probabilidades.

$$p(0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}.$$

$$p(1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{20}.$$

$$p(2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}.$$

Ou seja, as chances de não sair bola preta são de 6/20, de sair apenas 1 bola preta são de 12/20, e de saírem as duas bolas pretas são de 2/20. Notemos que foi criada uma variável a partir de um desejo de observar as bolas pretas, que se traduziu através das contagens possíveis de bolas pretas, e para cada resultado associamos a sua probabilidade. Essa variável recebe o nome de *variável aleatória*, cuja definição a seguir foi obtida de Magalhães (2011, p. 64).

Definição 11 (Variável Aleatória): Uma variável aleatória é uma função de um espaço amostral nos números reais para a qual é possível calcular a probabilidade de ocorrência de seus valores.

Observemos que a partir da definição acima nosso problema introdutório dessa seção ganha sentido, pois quando definimos quem é a variável aleatória, o espaço amostral se modifica, não sendo mais Ω = {PP, PB, BP, BB}, mas sim {0, 1, 2}, que será o conjunto domínio (D_f), e cujo contradomínio (CD_f) é real. A imagem, que são as probabilidades encontradas, é $Im_f = \{2/20, 6/20, 12/20\}$. Assim, temos uma função $f\colon\{0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(0) = \frac{6}{20}, f(1) = \frac{12}{20}$ e $f(2) = \frac{2}{20}$.

Uma variável aleatória pode ser classificada em dois tipos: discreta e contínua. Conforme Oliveira (2014), as *variáveis aleatórias discretas* são aquelas que assumem valores finitos ou infinitos enumeráveis, ao passo que as *variáveis aleatórias contínuas* são aquelas cujos valores estão em um intervalo real, ou seja, infinitos não enumeráveis.

A variável do exemplo proposto é do tipo discreta, como também são as que querem contar a quantidade de caras em lançamentos consecutivos de uma moeda, ou quantidade de gols que um time de futebol da série A do campeonato brasileiro marca em cada uma das 38 rodadas. O tempo que uma lâmpada leva para queimar, o tamanho de uma planta ao longo de sua vida são exemplos de variáveis contínuas.

Em nosso trabalho, nos dedicamos ao estudo de variáveis aleatórias discretas, pela própria natureza dos problemas propostos e discutidos.

A partir de agora, uma variável aleatória será representada por uma letra maiúscula, geralmente X, e seu valor será representado por uma letra minúscula, x_i, com $i \in \mathbb{N}$, e a probabilidade associada a cada valor da variável por $p(X = x_i)$.

3.2 ESPERANÇA MATEMÁTICA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Definição 12 (Esperança Matemática de uma Variável Aleatória Discreta): Dada uma variável aleatória X discreta, assumindo os valores x_i, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, chamamos de Esperança Matemática de X, simbolizada por $E(X)$, ao valor obtido a partir da soma abaixo:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(X = x_i) \, . \qquad (18)$$

A Definição 12 foi obtida de Freitas (2019). De (18) é possível interpretar a esperança matemática como uma média ponderada dos valores que a variável assume, onde os pesos correspondem às probabilidades associadas a cada valor x_i.

Dada as variáveis aleatórias X e Y, e uma constante c, Rifo (2020) aponta as seguintes propriedades para a esperança:

Propriedade 1: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Propriedade 2: $E(cX) = c.E(X)$

Propriedade 3: $E(c) = c$

A primeira propriedade nos afirma que a esperança da soma de duas variáveis é igual à soma das esperanças individuas de X e Y.

A segunda propriedade afirma que a esperança de um produto da variável por uma constante é igual ao produto dessa constante pela esperança da variável.

A terceira propriedade afirma que uma variável que assume o mesmo valor c só poderá ter sua esperança igual a c.

Exemplo 8: Para uma fábrica produzir um determinado produto ela tem um gasto unitário de R$ 8,00. Caso a peça produzida saia com defeito, ela é descartada, mas se a peça é perfeita ela pode ser vendida ao preço de R$ 12,00. Qual o lucro médio unitário dessa empresa, considerando que 90 % dos produtos produzidos são perfeitos?

Resposta comentada:

A nossa variável aleatória X será o lucro unitário. Essa variável pode assumir apenas dois valores, $x_1 = -8$ reais (que corresponde ao lucro das peças defeituosas), e $x_2 = 4$ reais (obtida pela diferença R$ 12,00 – R$ 8,00, pois a peça perfeita é vendida). As probabilidades associadas aos valores da variável são $p(x_1) = 0{,}10\ e\ p(x_2) = 0{,}90$, pois são as probabilidades associadas à peça ser defeituosa e ser perfeita, respectivamente. Assim, para sabermos o lucro médio unitário, basta calcularmos $E(X)$ usando a Equação (18), para $i = 1, 2$, conforme segue.

$$E(X) = x_1 . p(X = x_1) + x_2 . p(X = x_2) \tag{19}$$
$$E(X) = -8.(0{,}10) + 4.(0{,}90)$$

$$E(X) = 2{,}80 \text{ reais.}$$

Do resultado logo acima concluímos que, em média, a empresa está lucrando R$ 2,80 por cada peça produzida.

No próximo tópico vemos outros exemplos aplicados da Esperança Matemática, mas agora no contexto de jogos.

3.3 INTERPRETANDO A ESPERANÇA MATEMÁTICA PARA JOGOS

Este tópico é dedicado ao uso da esperança matemática para determinar a expectativa de lucro em jogos envolvendo apostas entre dois oponentes, e no contexto para julgar quando um jogo é justo ou não para quem joga e para o dono do jogo.

Exemplo 9: João e Pedro vão disputar uma partida de dominó. Sabe-se que João é melhor jogador e, por observação de jogos anteriores, vence Pedro em 70% das partidas que disputam. Sabendo disso, Pedro propõe um sistema de apostas que para cada derrota sua, ele paga R$ 3,00 para João. Caso João perca, ele paga R$ 6,00 para Pedro. Considerando que nunca haverá empate, a proposta de Pedro é vantajosa para João?

Resposta comentada:

Para sabermos se a proposta de Pedro é vantajosa para João vamos calcular a esperança matemática associada aos dados de João, que vamos simbolizar por $E_{JOÃO}(X)$, onde X é a variável aleatória lucro em cada partida.

A variável X assume os seguintes valores, com suas respectivas probabilidades.

$x_1 = 3$ reais (Pedro paga a João), com probabilidade $p(X = 3) = 0{,}70$;

$x_2 = -6$ reais (João paga a Pedro), com probabilidade $p(X = -6) = 0{,}30$;

Assim, o cálculo de $E_{JOÃO}(X)$, fica:

$$E_{JOÃO}(X) = x_1 . p(X = x_1) + x_2 . p(X = x_2)$$

$$\Rightarrow E_{JOÃO}(X) = 3 . 0{,}70 + (-6) . 0{,}30$$

$$\Rightarrow E_{JOÃO}(X) = 0{,}30 \text{ reais.}$$

O resultado acima mostra que João ganha, em média, R$ 0,30 a cada partida que disputa com Pedro, tornando a proposta vantajosa para João.

Notemos que, a princípio, o valor de R$ 0,30 pode parecer fazer pouco sentido, já que as premiações são R$ 3,00 e R$ 6,00. Com um número muito pequeno de partidas disputadas, o lucro de João pode destoar bastante do valor calculado, podendo, inclusive, ser negativo. Porém, quando se considera um número suficientemente grande de partidas, as ponderações entre perdas e ganhos e suas probabilidades se aproximarão do valor de um lucro médio, por partida, de R$ 0,30.

Uma outra interpretação plausível para o problema é afirmar que ele se trata de um jogo injusto, pois há um jogador com uma esperança de lucro positiva (João), ao passo que Pedro tem uma esperança de lucro negativa de R$ 0,30. Vejamos como calcular $E_{PEDRO}\ (X)$.

A variável X assume os seguintes valores, com suas respectivas probabilidades.

$x_1 = -$ 3 reais (Pedro paga a João), com probabilidade $p(X = -\ 3) = 0{,}70$;

$x_2 =$ 6 reais (João paga a Pedro), com probabilidade $p(X = 6) = 0{,}30$;

Assim, o cálculo de $E_{PEDRO}(X)$, fica:

$$E_{PEDRO}(X) = x_1 . p(X = x_1) + x_2 . p(X = x_2)$$

$$\Rightarrow E_{JOÃO}(X) = -\ 3 . 0{,}70 + 6 . 0{,}30$$

$$\Rightarrow E_{PEDRO}(X) = -\ 0{,}30 \text{ reais.}$$

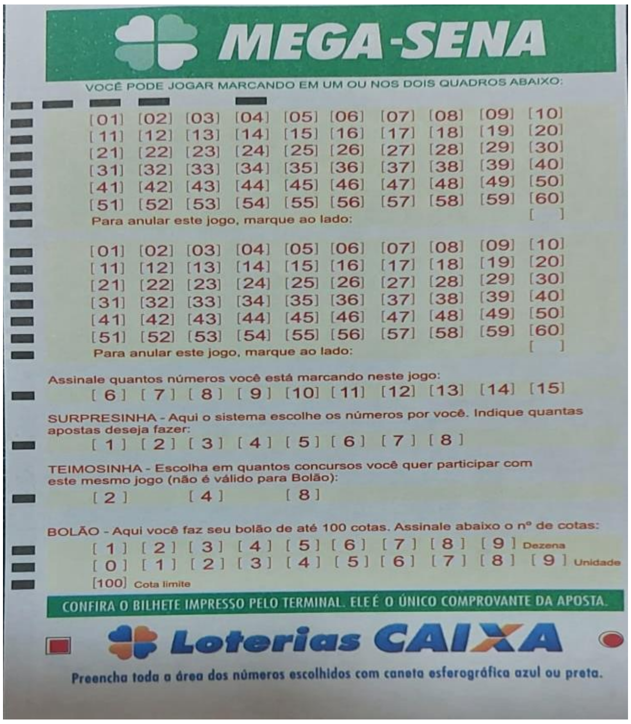
Notemos que, enquanto João ganha, em média R$ 0,30, Pedro perde R$ 0,30, o que mostra que a proposta de Pedro para João não é justa, pois acaba por favorecer um dos jogadores em detrimento do outro.

O conceito de jogo justo, expresso aqui apenas em termos matemáticos, não considerando discussões filosóficas ou éticas do que é ser justo, impõe, como acabamos de ver no último exemplo, que a esperança matemática calculada não beneficie nenhum dos jogadores, ou, em palavras mais apropriadas, impõe que $E(X) = 0$ para qualquer dos jogadores.

O próximo exemplo vai tratar sobre o famoso jogo da Mega-Sena, onde discutiremos se é um jogo justo para quem joga e, caso negativo, qual deveria ser o prêmio que tornasse um jogo equilibrado para a banca e para quem joga.

Exemplo 10: A Mega-Sena é um jogo de loteria muito popular no Brasil. Para ganhar, o jogador escolhe pelo menos 6 números de 1 a 60, conhecidos como dezenas, presentes no bilhete da figura abaixo, ao custo mínimo de R$ 4,50.

Figura 1 - Bilhete da Mega-Sena



Fonte: Loterias Caixa.

A cada jogo são sorteadas 6 dezenas, sem reposição. Os prêmios são distribuídos para quem acertar quatro, cinco ou os seis números sorteados, conhecidos como Quadra, Quina e Sena.

a) Considerando que o prêmio da Sena seja fixado em R$ 40.000.000,00, um jogador que faz sempre uma aposta simples, ou seja, escolhe 6 dezenas ao preço de R$ 4,50, qual o valor médio que esse jogador receberá por sorteio? O que isso significa?

b) Qual deve ser o valor do prêmio máximo (da Sena) para que o jogo da Mega-Sena seja justo para um jogador que faz uma aposta simples, desconsiderando os demais prêmios?

Resposta comentada:

Letra a)

Antes de resolvermos o problema acima, vamos reescrever a Equação (19) de maneira a esta ficar mais adequada para esse e os demais problemas que virão sobre esperança matemática.

Da Equação (19) temos que $E(X) = x_1.p(X = x_1) + x_2.p(X = x_2)$, mas agora reescrevemos da seguinte forma:

$$E(X) = x_{GANHO}.p(X = x_{GANHO}) + x_{PERDA}.p(X = x_{PERDA}) \tag{20}$$

Onde:

x_{GANHO} é a diferença entre o prêmio e o valor pago no bilhete (em outras palavras, é o lucro que o jogador obtém).

x_{PERDA} é o valor pago para jogar na loteria.

$p(X = x_{GANHO})$ é a probabilidade de o jogador ganhar o prêmio;

$p(X = x_{PERDA})$ é a probabilidade de o jogador perder o jogo.

Para o Exemplo 10, temos que x_{GANHO} = R$ 40.000.000,00 – R$ 4,50 = R$ 39.999.9995, 50, x_{PERDA} = - R$ 4,50. Vamos calcular agora a probabilidade desse jogador ganhar na Mega-Sena com uma aposta simples.

Inicialmente, devemos calcular de quantas maneiras seis números podem ser escolhidos, sem reposição, não importando a ordem, de 60 números disponíveis. Claramente trata-se de uma combinação $C_{60,6}$, que resulta em 50.063.860. Assim, como a pessoa só escolheu 6 números, ela só tem 1 chance em 50.063.860 de ser premiada. Já a probabilidade do jogador perder é igual à probabilidade complementar de ganhar. Logo, temos que:

$$p(X = x_{GANHO}) = \frac{1}{50.063.860} \;\; e \;\; p(X = x_{PERDA}) = \frac{50.063.859}{50.063.860}$$

Dessa forma, aplicando os valores discutidos acima encontremos a esperança matemática, ou valor esperado para um jogador da Mega-Sena que faz uma aposta simples.

$$E(X) = x_{GANHO}.p(X = x_{GANHO}) + x_{PERDA}.p(X = x_{PERDA})$$

$$\Rightarrow E(X) = 39.999.995{,}50 \times \frac{1}{50.063.860} + (-4{,}50) \times \frac{50.063.859}{50.063.860}$$

$$\Rightarrow E(X) \approx -3,70 \text{ reais.}$$

O resultado acima demonstra que, em média, o jogador perde R$ 3,70 por partida, estando esse número próximo da realidade quando forem feitos um número suficiente de sorteios. O valor de $E(X)$ revela também o quão é desfavorável para o jogador apostar na Mega-Sena, pois o valor da esperança se distancia do equilíbrio ($E(X) = 0$).

Letra b)

Vamos chamar de Y o valor do prêmio que torna justo para ambos, jogador e banca, o jogo da Mega-Sena. Como já temos os valores das probabilidades determinadas acima, bem como o preço do bilhete, basta recorrermos novamente à eq. (18), mas agora com $E(X) = 0$.

$$E(X) = x_{GANHO}.p(X = x_{GANHO}) + x_{PERDA}.p(X = x_{PERDA})$$

$$\Rightarrow 0 = (Y - 4{,}50) \times \frac{1}{50.063.860} + (-4{,}50) \times \frac{50.063.859}{50.063.860}$$

$$\Rightarrow Y = 225.287.370 \text{ reais}$$

Assim, para que a Mega-Sena seja um jogo justo, o prêmio para quem acertar a sena fazendo uma aposta simples deve ser de R$ 225.287.370,00.

Para se ter uma ideia do quão difícil é chegar nessa cifra de 225 milhões de prêmio, uma consulta a partir do site LOTERIAS CAIXA mostra que no ano de 2022 houve 110 sorteios, desses, em 22 a Sena foi premiada, mas, dos 22, apenas 2 deles com prêmios maiores do que R$ 225.287.370,00.

4 Jogos de Azar e Loterias

Neste capítulo tratamos sobre os jogos de azar, em especial os lotéricos, inicialmente fazendo um breve recorte histórico, enfocando sob um prisma das regulamentações desses jogos no decurso do tempo. Em seguida, citamos alguns trabalhos que se dedicaram ao ensino e aprendizagem de probabilidade utilizando jogos.

4.1 JOGOS DE AZAR E LOTERIAS A PARTIR DE UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-LEGISLATIVA

Correa (2016) afirma que a primeira loteria brasileira que se tem notícia foi criada em 1784, na cidade conhecida hoje como Ouro Preto (MG). O dinheiro arrecadado serviu para construção de prédios públicos.

Correa (2016) afirma ainda que a prática de jogos lotéricos se espalhou pelo território, e o governo acabou por fazer concessões de exploração desse jogo, preferencialmente às Santas Casas, orfanatos e hospitais, mas que particulares também foram contemplados.

Destaca-se o papel seguridade social que as loterias assumiram desde o início em nosso país, pois foram catalisadoras de recursos para construção de prédios públicos e manutenção de serviços de saúde.

O jogo de loteria se tornou bastante popular, e as crescentes concessões de exploração desse serviço fizeram com que houvesse uma não padronização desses jogos pelo país, sendo o imperador obrigado a criar o DECRETO nº 357, de 27 de abril de 1844.

> “Attendendo aos inconvenientes, e queixas, que se tem manifestado contra a maneira, por que em alguns pontos do Imperio se extrahem as Loterias concedidas pelas Leis Geraes, e Provinciaes; e á necessidade de regular por hum maneira uniforme a extracção das mesmas Loterias em todo o Imperio, a fim de não se desacreditar esse meio de favorecer os estabelecimentos uteis com augmento da Renda Publica: Hei por bem, depois de ter Ouvido o Conselho d'Estado, Mandar que se execute o seguinte Regulamento...”. (BRASIL, 1844)

No Decreto supracitado, é possível encontrar regulamentações sobre autoridades fiscalizadoras, sobre a venda dos bilhetes, da extração e premiações.

Em 1892 foi criado um dos mais populares jogos de azar do Brasil, o jogo do bicho. De autoria de João Batista Drummond, proprietário de um zoológico à época, onde ocorriam os sorteios, a facilidade de suas regras foi um facilitador para a sua popularização.

Carvalho (2019) assim descreve suas regras: “É como se fosse uma espécie de loteria, onde existe uma lista com vinte e cinco números, cada um representado por um animal diferente. A partir daí, existem diversas formas para o jogador apostar”.

No Decreto Lei nº 3.688 de 1941, conhecido como Lei das contravenções penais, temos conceituados o que são jogos de azar e loterias.

Para o primeiro, a lei afirma no art. 50, § 3º, que são considerados jogos de azar “o jogo em que o ganho e a perda dependem exclusiva ou principalmente da sorte; b) as apostas sobre corrida de cavalos fora de hipódromo ou de local onde sejam autorizadas; c) as apostas sobre qualquer outra competição esportiva” (BRASIL, 1941).

Destaca-se, a partir do parágrafo anterior, que o elemento caracterizador de jogos de azar está no grau de sorte envolvido. Por exemplo, jogos como bingo, rifas e loterias públicas, em princípio, têm sorteios com resultados equiprováveis, diferenciando um jogador de outro apenas pela quantidade de bilhetes comprados ou da quantidade de números escolhidos.

Por outro lado, jogos como poker e xadrez podem ser considerados jogos cujo elemento principal para um jogador não é a sorte, mas a sua habilidade, não podendo ser enquadrados como “jogos de azar”.

A Lei de contravenções penais, em seu art. 51, § 2º, considera loterias como sendo “toda operação que, mediante a distribuição de bilhete, listas, cupões, vales, sinais, símbolos ou meios análogos, faz depender de sorteio a obtenção de prêmio em dinheiro ou bens de outra natureza” (BRASIL, 1941).

Como podemos notar, as loterias têm como seu elemento motivador a sorte, podendo ser consideradas jogos de azar. Porém, a lei discutida aqui diferencia loteria pelo seu aspecto operacional e pela existência de um prêmio, em dinheiro ou de outra natureza.

Neste trabalho, preferimos manter uma distinção entre jogos de azar e loterias, tomando como argumento que jogos de azar serão ditos aqueles que dependem da sorte e não são autorizados por lei, ao passo que as loterias, de natureza pública ou com parceria com o setor privado, são amparadas pelo nosso arcabouço legislativo. Evidentemente, jogos como xadrez e poker são ainda classificados como um terceiro caso, o de jogos de habilidade, mas eles não serão objeto de estudo deste trabalho.

Destaca-se que o Decreto nº 3.688 de 1941 proibiu qualquer ente, público ou privado, de promover loterias, sem autorização legal. O que existiu entre 1941 e 1961 foi que o Estado passou a dar concessões a particulares para a exploração de jogos de loteria.

Em 1961, o então presidente Jânio Quadros editou Decreto nº 50.954, de 14 de julho daquele ano, onde determinou que a Caixa Econômica Federal explorasse, com exclusividade, a loteria federal. Na prática, a Caixa só conseguiu realizar o primeiro sorteio apenas em 15 de setembro de 1962.

Atualmente, as Loterias Caixa contam com os seguintes jogos: Mega-Sena, Lotofácil, Quina, Lotomania, Timemania, Dupla Sena, Federal, Loteca, Super Sete, + Milionária e Dia de Sorte. As duas últimas abordamos neste trabalho.

4.2 JOGOS DE AZAR E LOTERIAS APLICADAS AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

As loterias e jogos de azar são boas fontes de estudo sobre probabilidade. Quando compramos um bilhete de loteria, recebemos a informação, geralmente no verso, sobre as chances de ganharmos o prêmio.

Às vezes, a probabilidade pode ser ferozmente desalentadora, como na Mega-Sena, pois de uma aposta simples temos apenas 1 chance em pouco mais de 52 milhões de sermos o mais novo milionário.

Porém, em qualquer probabilidade informada, seja ela desalentadora ou não, pode nos restar um questionamento de como essas medidas de probabilidade foram determinadas.

E, para além das probabilidades, podemos fazer vários outros questionamentos, tais como: Qual a lógica dos preços cobrados? Qual o retorno financeiro a longo prazo para um jogador? O jogo é justo?

Os questionamentos acima tendem a mobilizar conhecimentos matemáticos tratados no ensino básico, tais como análise combinatória, média ponderada, probabilidade e proporção. Ou seja, os jogos de azar e loterias são uma fonte riquíssima de exploração para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Para efeito de confirmação da afirmação acima, ao acessarmos o diretório do PROFMAT na busca pelas dissertações do programa, ao digitarmos os termos "loteria" e "jogos de azar", aparecem dez trabalhos, que são listados a seguir.

Quadro 2 – Dissertações do PROFMAT com os termos "loteria" e "jogos de azar".

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO	AUTOR(A)	INSTITUIÇÃO
A probabilidade aplicada aos jogos de azar	Andrade (2017)	UFPB
Noções de probabilidade por meio de jogos de azar	Prado (2015)	UEFS
Um estudo sobre jogos de azar	Alves (2015)	IMPA
Jogos de loteria: uma aplicação de probabilidade	Silva (2018)	UNIRIO
Loteria Federal: sorte, azar ou matemática?	Sousa (2017)	UFT
Ensino – aprendizagem de probabilidade no ensino médio: uma experiencia usando jogos de loterias.	Correa (2016)	UFMA
Probabilidade e loterias	Ferreira (2015)	UERJ
Modelos de urnas e loterias	Oliveira (2014)	UFG
Aspectos históricos e teóricos das loterias	Freitas (2013)	UFG
O ensino das loterias: uma abordagem motivadora e facilitadora	Fraga (2013)	IMPA

para aprendizagem de probabilidade no ensino médio		

Fonte: Banco de dissertações do PROFMAT. Acessado em 14 de jul. 2023.

Assim, a partir do Quadro 2 percebemos que há um interesse dos egressos do PROFMAT em estudar jogos de azar e loterias, especialmente enfocando as probabilidades relacionadas a esses jogos.

Neste sentido, vamos discutir brevemente dois destes trabalhos, dando ênfase aos que fazem proposições de aulas sobre o conteúdo de probabilidade.

Fraga (2013) propôs em seu trabalho uma discussão sobre “aspectos básicos do cálculo de probabilidades, em espaços amostrais equiprováveis, aplicados aos jogos de loterias no Brasil” (FRAGA, 2013, p. 6).

O autor propõe uma metodologia de ensino voltada para resolução de problemas como alternativa ao modelo tradicional, destacando que seu público-alvo são tanto estudantes como professores do ensino médio. Fraga (2013) propõe uma série de quatro atividades relacionando loterias ao conteúdo de probabilidade.

Na Atividade 1, individual, é proposta uma loteria fictícia de 10 números, onde pode-se assinalar de 3 a 8 deles, ganhando o prêmio quem acertar os três números sorteados.

O autor, após descrever as regras, apresenta uma tabela relacionando a quantidade de números escolhidos pelo apostador e o preço respectivamente cobrado, fazendo questionamento aos estudantes se os preços são razoáveis, tomando como base aspectos probabilísticos.

Para Fraga (2013), a atividade tem como objetivo “fazer os alunos compararem o valor de cada aposta com a probabilidade de ganhar em cada caso e com isso perceber que os valores deveriam ser proporcionais ao número de combinações apostadas”. (FRAGA, 2013, p. 44).

Na Atividade 2, o autor propõe uma loteria com 20 números, dos quais 3 são sorteados. Para a resolução dos problemas, foi proposta a divisão da turma em 6 grupos, onde cada um tinha objetivos iniciais distintos. Por exemplo, o grupo 1 teria de apostar 6 cartões, todos com 3 números escolhidos, não podendo haver repetições de números.

É feito um sorteio e depois o autor passa a questionar os grupos sobre quem deles tinha mais probabilidade de vencer. Fraga (2013) não apresenta objetivos para essa atividade, mas inferimos que seja fazer com que os estudantes apliquem a definição de probabilidade como uma razão.

Na Atividade 3, individual, o autor volta às regras da loteria da atividade 1, agora fazendo questionamentos sobre a probabilidade de serem sorteados números consecutivos. O objetivo é introduzir os *Lemas de Kaplansky* aos estudantes.

Na Atividade 4, individual, o autor sugere que os estudantes estejam de posse de calculadora científica ou que seja feita em um laboratório de informática. A loteria proposta é, na realidade, uma rifa de 100 números, onde ganha quem tem o bilhete com o número sorteado.

O autor questiona se é melhor para o apostador comprar 10 bilhetes para um único sorteio, ou comprar 1 bilhete para cada sorteio, durante 10 sorteios. Em seguida, Fraga (2013) pede aos estudantes que façam uma generalização dos resultados encontrados.

O objetivo dessa atividade, como o autor pontua, é “mostrar aos alunos que, em determinadas questões, o cálculo da probabilidade da ocorrência do complementar do evento é mais fácil do que o próprio evento” (FRAGA, 2013, p. 47).

Dentre as suas conclusões do trabalho, destacamos um trecho onde o autor evidencia as qualidades de se trabalhar com jogos de loteria no ensino-aprendizagem de probabilidade.

> “A utilização dos jogos de loteria, como prática pedagógica, permite que o aluno vivencie uma aplicação cotidiana do tema e ao mesmo tempo exige que o discente siga um processo sequencial extremamente importante na construção do conhecimento, que se inicia com o tratamento das informações, passa pela organização dos dados e culmina com o cálculo de probabilidades” (FRAGA, 2013, p. 57).

Outro trabalho que destacamos é de Silva (2018), intitulado de “JOGOS DE LOTERIA: Uma aplicação de probabilidade”, que se constituiu de uma dissertação de Mestrado do PROFMAT, polo UNIRIO, do Rio de Janeiro – RJ.

A pesquisa teve por objetivo geral “destacar a importância da probabilidade e aplicação desta a 4 jogos de loteria famosos no Brasil” (SILVA, 2018, p. 11).

Os quatro jogos de loteria trabalhados foram: Mega-Sena, Quina, Lotofácil e Lotomania.

Para atingir os objetivos, o trabalho foi dividido em três capítulos, onde passamos a descrevê-los brevemente.

No Capítulo 1, a autora traz uma reflexão sobre o ensino de probabilidade e também uma análise de três livros didáticos.

Na oportunidade, amparada por documentos oficiais como o PCN (2000), PCN + (2006) e PNLD (2018), Silva (2018) destaca que o "Ensino da Probabilidade no Ensino Médio deve ter como foco um trabalho voltado para resolução de problemas contextualizados envolvendo situações reais" (SILVA, 2018, p. 17) e justifica essa opção afirmando que assim há a possibilidade de articulação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Em relação aos livros didáticos analisados, a escolha das três obras analisadas se deu pelo fato de eles serem adotados em escolas do estado do Rio de Janeiro. Para a análise dos livros, Silva (2018) estabeleceu características a serem observadas, tais como número de páginas dedicadas ao tema de Análise Combinatória e Probabilidade, tópicos dos assuntos estudados, ordem de apresentação dos temas, presença de contexto histórico, atividades contextualizadas e em número suficiente, inclusão de questões do ENEM e se há a indicação do uso de tecnologias.

Os livros analisados foram: #contato Matemática 2, Matemática Contexto e Aplicações 2 e Matemática Ciência e Aplicações 2. Na oportunidade, a autora destacou pontos positivos, mas também negativos em alguns, tais como a falta de questões do ENEM, poucos exercícios propostos e limitados exercícios com uso de tecnologia, especialmente a calculadora.

O Capítulo 2 inicia-se com uma breve introdução histórica sobre probabilidade, onde se destaca sua origem a partir de questionamentos sobre jogos de azar, e traz uma cronologia indo de Cardano (1501 – 1576) até Pierre Simon Laplace (1749 – 1827).

Na sequência é apresentado um arcabouço teórico de Análise Combinatória e probabilidade, que se encerra com a discussão de algumas questões do ENEM envolvendo esses temas.

No Capítulo 3, são apresentadas as quatro loterias trabalhadas, sempre seguindo o mesmo roteiro de falar um pouco sobre a loteria em questão, depois regras do jogo, premiações e, por fim, apresentar e discutir atividades.

Para os jogos da Mega-Sena, Quina e Lotofácil foram propostas 5 atividades. Já para a Lotomania foram apresentadas outras três atividades. Essas atividades giraram em torno das probabilidades associadas a cada jogo, os preços cobrados e situações de tomada de decisão.

Silva (2018, p. 120) espera que as atividades propostas possam ser realizadas em sala de aula “...como uma forma lúdica e prática de apresentar os conceitos de matemática, estimulando as análises, as reflexões e mostrando a aplicabilidade do assunto estudado no cotidiano”.

5 Resultados e Discussões

Neste capítulo apresentamos os resultados e discussões a partir dos dados coletados em questionários estruturados e semiestruturados, encontros presenciais e por meio de conversas em aplicativos de mensagens. A metodologia utilizada para obter os dados é descrita no próximo tópico.

5.1 METODOLOGIA

Esta pesquisa foi desenvolvida com a participação voluntária de estudantes regularmente matriculados no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte – IFRN, campus São Paulo do Potengi, que estavam cursando o 3º ano do ensino médio integrado e que já tivessem estudado ou estudando em sala de aula o conteúdo de probabilidade.

Para mobilizar a participação dos estudantes, nas condições descritas acima, foi divulgado um formulário eletrônico, por meio de mensagens de texto no aplicativo *whatsapp* das turmas do público-alvo. O formulário pode ser acessado no link: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfbwb8wW79nCz05r8UJOu3TT1UQnk3QnPz1iPJJ9B4Yv3RNHg/viewform.

Ao todo, 12 estudantes participaram da pesquisa, sendo 9 oriundos da turma de INFO 3M, 2 da turma de MAMB 3M e 1 estudante da turma de EDIF 4M.

Para a obtenção e análise dos dados, esta pesquisa foi dividida em duas etapas, cujas atividades desempenhadas e períodos são descritos resumidamente no quadro a seguir.

Quadro 3 - Etapas da pesquisa.

1ª Etapa	2ª Etapa
Encontro presencial com os estudantes voluntários. *Atividades desenvolvidas:*	Encontros presenciais e à distância, por meio de aplicativo de mensagens. *Atividades desenvolvidas:*

- Revisão de combinações e probabilidade; - Discussão sobre o espaço social ocupado pelos jogos de azar e importância das loterias públicas no cenário nacional; - Aplicação de questionário aberto sobre probabilidade e esperança matemática em jogos de azar. Data: 27/10/2022, de 13 às 18 h.	- Criação por parte dos estudantes de jogos de azar e/ou loterias com a orientação do pesquisador. Período: novembro/2022 a janeiro/2023.

Fonte: Autoria própria.

Cada etapa acima será detalhada em seu tópico específico, com a metodologia empregada, a coleta de dados e análises feitas, pois cada uma tem suas especificidades.

5.2 ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS DA ETAPA 1

A Etapa 1 teve início com uma revisão de conteúdos de combinações e probabilidade, pois os participantes tinham visto esses assuntos nos meses de junho/julho de 2022, ou seja, três meses antes do 1º encontro da pesquisa.

Logo depois seguiu-se uma breve discussão sobre jogos de azar e loterias e seu papel social, dando ênfase para as loterias públicas nas quais parte da arrecadação tem uma destinação social em diferentes áreas. Os estudantes relataram que nunca tinham jogado nenhum tipo de jogo lotérico, mas que seus pais e pessoas próximas sim.

O site LOTERIAS CAIXA (https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/default.aspx) foi utilizado para apresentar aos participantes os percentuais de destinação social da arrecadação, o que causou surpresa a alguns que não sabiam desse viés social dos jogos lotéricos.

Por fim, foi aplicado um questionário presente no Anexo A.1, cujas questões foram do tipo abertas, onde foi possível observar a produção textual dos estudantes.

As respostas dos participantes foram analisadas a partir de uma metodologia de análise de erros inspirada em CURY (2009), que se dividiu em três partes sequenciais.

A primeira parte foi destinada a uma leitura “flutuante” de todo o material, que serviu para fazer uma análise inicial do material e observar quais partes não seriam estudadas (especialmente questões sem resposta ou com respostas sem nenhum nexo aparente com o que está sendo proposto).

Em seguida, fizemos uma análise propriamente dita das respostas. Após leituras e releituras do material, levantamos os equívocos cometidos pelos estudantes, colocando etiquetas indicadoras dos erros nos formulários de resposta para melhor sistematização da análise.

Com a observação de algumas similaridades dos equívocos, categorizamos os tipos de erros observados, obtendo uma representação simplificada das produções textuais.

Por fim, na terceira etapa da metodologia de Cury (2019), a partir das categorias levantadas elaboramos uma tabela de frequência com os tipos de erros observados.

A figura a seguir registra o momento do encontro presencial do dia 27/10/2022, ocorrido no IFRN/campus São Paulo do Potengi, na sala A217.

Figura 2 - Registro do encontro da Etapa 1 da pesquisa.

Fonte: Autoria própria.

A análise das respostas ao questionário se deu por um viés qualitativo, pois não estamos interessados em quantificar acertos e erros, nem em fazer comparações entre estudantes, mas sim investigar através de suas produções textuais quais caminhos de raciocínio o estudante trilhou até chegar a sua resposta, dotando-os de significado.

Para Borba e Araújo (2013, p. 25) as pesquisas de abordagem qualitativa “fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações”.

Em relação ao questionário aplicado na 1ª etapa da pesquisa, ele foi subdividido em quatro partes, onde cada uma correspondia aos jogos Lotoemoji, SPP da Sorte, Dia de Sorte e + Milionária, que serão detalhados nas Seções de 5.2.1 a 5.2.4.

Para cada jogo foram feitas simulações de sorteios antes que os estudantes respondessem às questões. O intuito era que eles se familiarizassem com o jogo e compreendessem melhor suas regras.

Após os estudantes responderem às perguntas sobre cada jogo específico, nós fizemos uma breve discussão e resolução dos problemas propostos no quadro branco. Os prêmios usados para estimulá-los foram balinhas e objetos de baixo valor, como mostrado na figura a seguir.

Figura 3 - Prêmios disponíveis para os estudantes.

Fonte: Autoria própria.

Como veremos mais adiante, para alguns jogos as probabilidades de ganhar são muito baixas, de modo que foi acordado entre os estudantes de que quem ficasse mais próximo de ganhar o jogo é que teria direito a escolher um dos prêmios. Na figura 4 há registros de alguns dos premiados.

Figura 4 - Estudantes premiados durante os sorteios.

Fonte: Autoria própria.

A partir de agora focamos nossa atenção aos jogos que foram utilizados, fazendo um breve comentário sobre cada um, apresentando suas regras e faixas de premiação, bem como as perguntas feitas no questionário a respeito deles.

As respostas dos estudantes foram selecionadas para compor as discussões tomando como base seus acertos e erros e possíveis raciocínios empregados na resolução.

Cumpre informar que os estudantes que aparecem nas discussões estarão nomeados por letras maiúsculas, a fim de que suas identidades sejam preservadas.

5.2.1 Lotoemoji: Resultados e discussões

A Lotoemoji foi uma loteria fictícia criada pelos pesquisadores para contribuir com a revisão dos conteúdos e dar subsídios aos estudantes sobre os tipos de cálculos que eles encontrariam nas atividades que se seguiram.

Regras do jogo: Na loteria Lotoemoji são disponibilizados 9 emojis e o apostador deve escolher três deles. O sorteio é honesto, de modo que cada emoji tem igual chance de ser selecionado. Durante o sorteio são sorteados 3 emojis, sem reposição, sem importar a ordem em que são selecionados.

Quadro 4 – Emojis disponíveis na cartela da Lotoemoji.

😀	🙃	🙏	😍	🤡	🤞	😡	😭	😋
1 ( )	**2 ( )**	**3 ( )**	**4 ( )**	**5 ( )**	**6 ( )**	**7 ( )**	**8 ( )**	**9 ( )**

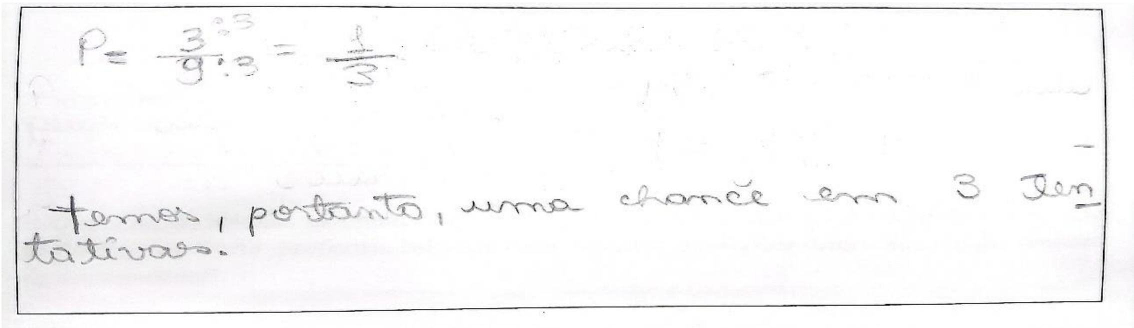
Fonte: Autoria própria.

Faixas de premiação: Ganha o 1º prêmio quem acertar 3 emojis; o 2º prêmio para quem acertar 2 emojis; 3º prêmio para quem acertar apenas 1 emoji.

Pergunta 1: Qual é a probabilidade de um apostador acertar os 3 emojis?

Respostas dos estudantes:

Figura 5 - Resposta do estudante A para a Pergunta 1.



Fonte: Estudante A.

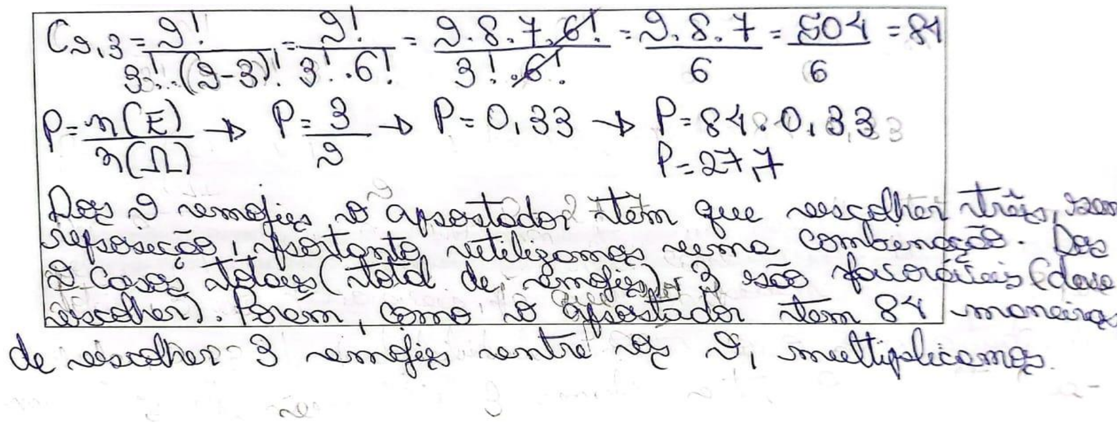
A resposta do estudante A evidencia que ele teve dificuldade em compreender corretamente o evento ao qual desejamos saber a probabilidade, pois ao se sortear 3 emojis, só há 1 maneira possível de acertarmos todos eles, pois a ordem em que foram sorteados não é relevante.

Há também um equívoco quando o estudante afirma que o espaço amostral tem 9 elementos, possivelmente ancorado no fato de termos 9 emojis disponíveis, mas deve-se levar em conta que 3 desses emojis serão sorteados, sucessivamente, sem reposição, não importando a ordem, o que torna $n(\Omega) = C_{9,3} = 84$.

Destaca-se a dificuldade do estudante em compreender que o resultado do sorteio dos emojis é uma sequência de três ações, sendo cada uma delas um sorteio de um número correspondente ao emoji. Pela resposta do estudante A, vê-se que o discente reduziu essas sequências a uma única etapa, onde há 3 possibilidades de acerto, pois são os números que o apostador escolheu, de um total de 9 possibilidades.

Apesar de não ter conseguido responder corretamente ao cálculo, o estudante ao fim de sua resposta parece compreender o que significa o resultado do cálculo, onde afirma “... uma chance em três tentativas”.

Figura 6 - Resposta do estudante B para a Pergunta 1.

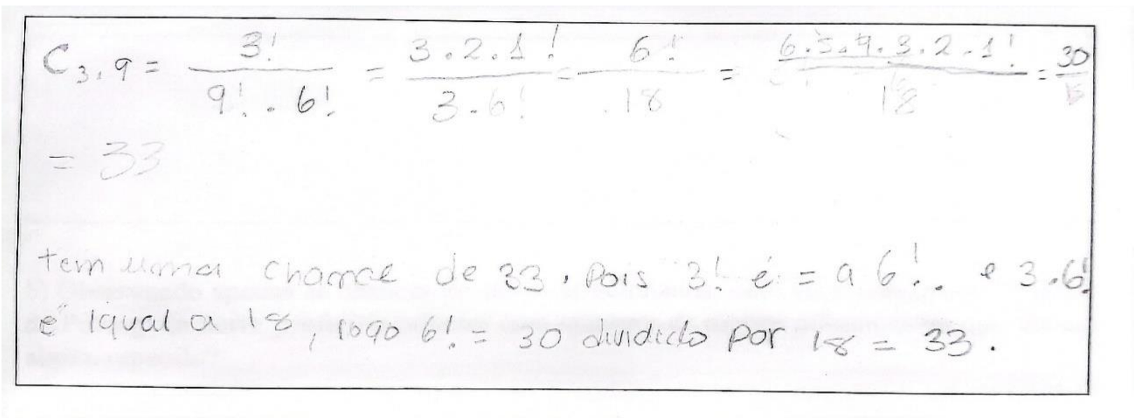


Fonte: Estudante B.

O estudante B encontra, corretamente, o número de casos possíveis, que são 84, mas faz um cálculo paralelo de probabilidade bastante semelhante ao que fez o estudante A, e depois multiplica esse valor de probabilidade pelo número de casos totais.

O resultado encontrado de 27,7 acaba por ferir o *Axioma I* de Kolgomorov, pois nenhuma probabilidade pode ser maior do que 1.

Figura 7 - Resposta do estudante C para a Pergunta 1.

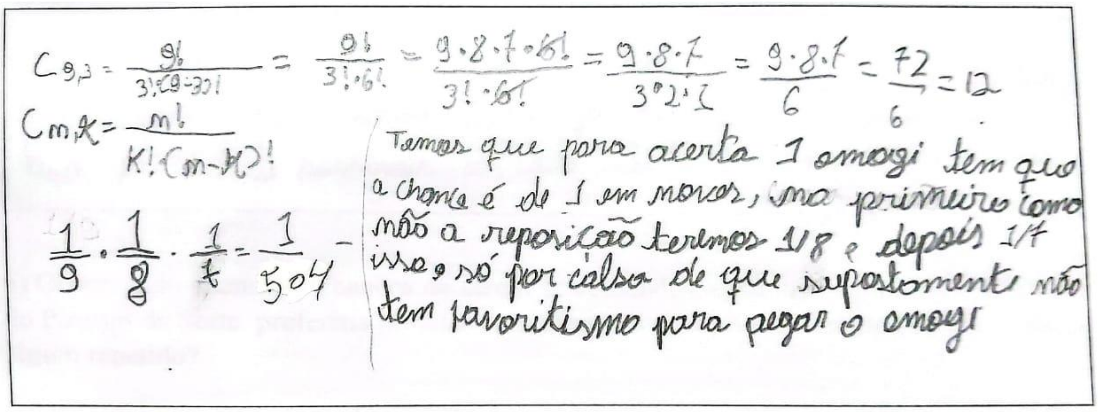


Fonte: Estudante C.

O estudante C incorre em alguns equívocos, que vão desde a aplicação incorreta da fórmula de combinação, passando por dificuldades em operar com fatorial, pois afirma erroneamente que 3! = 6!, 3.6! = 18 e 6! = 30, além de concluir que 30 ÷ 18 = 33.

Partindo do equívoco do estudante C, que afirmou que $C_{3\,,9} = \frac{3!}{9!\,.6!}$, caso ele estivesse certo, o resultado da combinação seria $C_{3\,,9} = \frac{1}{43.545.600}$, o que contraria o fato de que toda combinação de *n* elementos tomados *k* a *k* resulta em um número inteiro.

Figura 8 - Resposta do estudante D para a Pergunta 1.



$C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{9\cdot 8\cdot 1}{6} = \frac{72}{6} = 12$

$C_{m,k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$

$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{504}$

Temos que para acerta 1 emogi tem que a chance é de 1 em nove, na primeiro como não a reposição teremos 1/8 e depois 1/7 isso, só por calsa de que supostament não tem favoritismo para pegar o emogi

Fonte: Estudante D.

Do exposto na Figura 8 percebemos que o estudante D inicialmente tenta encontrar o número de casos possíveis, mas acaba se equivocando e concluindo que $C_{9\,,3} = 12$, quando já sabemos que o resultado correto é 84.

Porém, depois o estudante D parece abandonar a ideia de calcular usando a definição de probabilidade como uma razão, e exibe o produto $\frac{1}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{504}$, justificando que para o 1º emoji sorteado as chances de acerto são 1 em 9, para o 2º emoji as chances são 1 em 8 e o 3º emoji com probabilidade de 1 em 7.

O que o estudante fez acima foi acreditar que os eventos são independentes entre si e, por tanto, poderia multiplicar as probabilidades.

Parcialmente, a resposta dada está correta, pois os eventos podem sim ser considerados independentes. Porém, faltou ao estudante D multiplicar a fração $\frac{1}{504}$ por 6, pois temos 3! = 6 maneiras diferentes de três emojis serem sorteados.

Por exemplo, digamos que um ganhador do maior prêmio da Lotoemoji tenha escolhido os seguintes emojis: 😃, 🙃, 🙏. Esses emojis podem ter sido sorteados de 6 maneiras diferentes, conforme quadro abaixo.

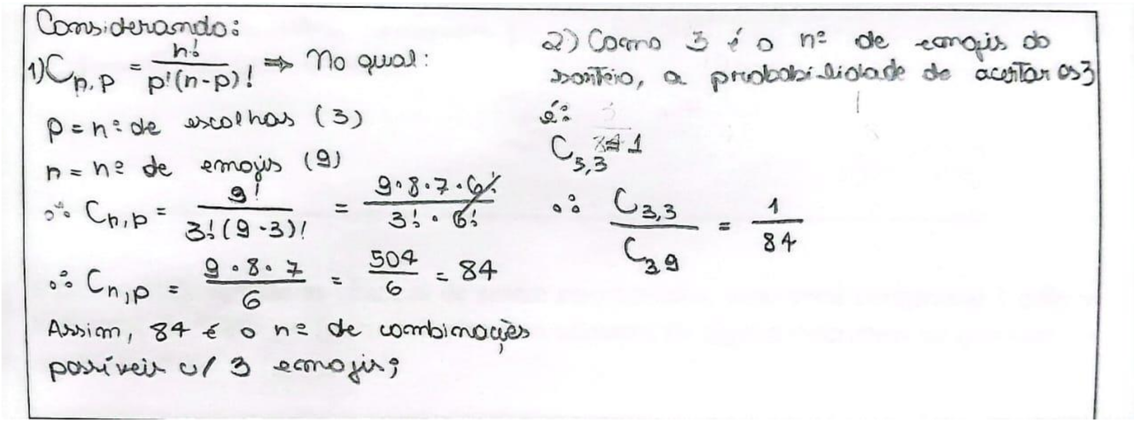
Quadro 5 – Maneiras diferentes de 3 emojis serem sorteados na Lotoemoji.

😃 🙃 🙏	😃 🙏 🙃	🙃 😃 🙏	🙃 🙏 😃	🙏 😃 🙃	🙏 🙃 😃

Fonte: Autoria própria.

Por termos 6 diferentes disposições dos 3 emojis, seria necessário que o estudante D multiplicasse seu resultado por 6.

Figura 9 - Resposta do estudante E para a Pergunta 1.


Considerando:
1) $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ⇒ No qual:
p = nº de escolhas (3)
n = nº de emojis (9)
∴ $C_{n,p} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot\cancel{6!}}{3!\cdot\cancel{6!}}$
∴ $C_{n,p} = \frac{9\cdot8\cdot7}{6} = \frac{504}{6} = 84$
Assim, 84 é o nº de combinações possíveis c/ 3 emojis;
2) Como 3 é o nº de emojis do sorteio, a probabilidade de acertar os 3 é:
$C_{3,3}$ ~~84~~ 1
∴ $\frac{C_{3,3}}{C_{3,9}} = \frac{1}{84}$

Fonte: Estudante E.

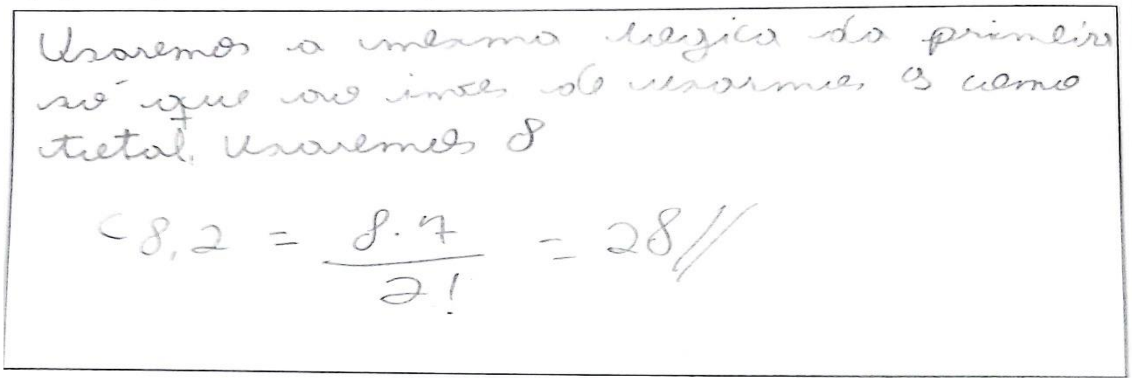
Na Figura 9 acima, notamos uma resposta correta produzida pelo estudante E, embora não tenha feito uma interpretação do resultado. Há apenas um pequeno equívoco na simbologia de combinação, quando se escreve $C_{3,9}$ ao invés de $C_{9,3}$.

A discussão e resolução para essa primeira pergunta já foi feita e pode ser encontrada na página 23 deste trabalho.

Pergunta 2: Qual é a probabilidade de um apostador acertar somente 2 emojis?

Respostas dos estudantes:

Figura 10 - Resposta do estudante F para a Pergunta 2.



Usaremos a mesma lógica do primeiro só que ao invés de usarmos 9 como total, usaremos 8

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$$

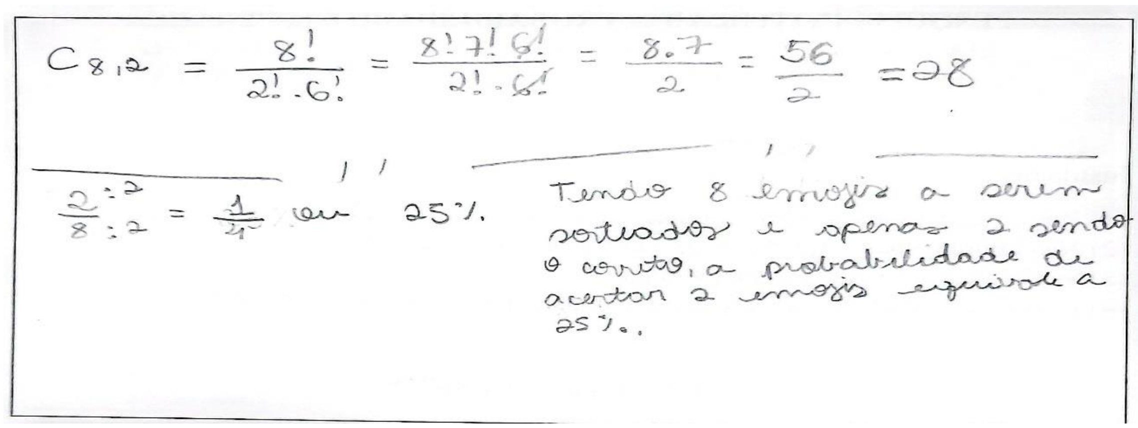
Fonte: Estudante F.

O estudante F afirma que empregou a mesma lógica da Pergunta 1, onde calculou $C_{9,3} = 84$, pois justificou que tinha 9 opções (emojis) e deveria escolher 3 deles, e concluiu, corretamente, que a probabilidade desejada na Pergunta 1 era de $\frac{1}{84}$.

Mas, como podemos inferir da resposta mostrada na Figura 10, o estudante na Pergunta 2 usou a combinação $C_{8,2}$, pois pode ter acreditado que retirando o emoji que o apostador erra restaram 8 e, desse total, 2 seriam os emojis que certos.

O estudante F, apesar de não ter escrito na resposta, possivelmente acredita que a probabilidade procurada é de $\frac{1}{28}$, pois afirmou seguir a mesma lógica da Pergunta 1.

Figura 11 - Resposta do estudante G para a Pergunta 2.



$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8!7!6!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

$$\frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4} \text{ ou } 25\%.$$

Tendo 8 emojis a serem sorteados e apenas 2 sendo o correto, a probabilidade de acertar 2 emojis equivale a 25%.

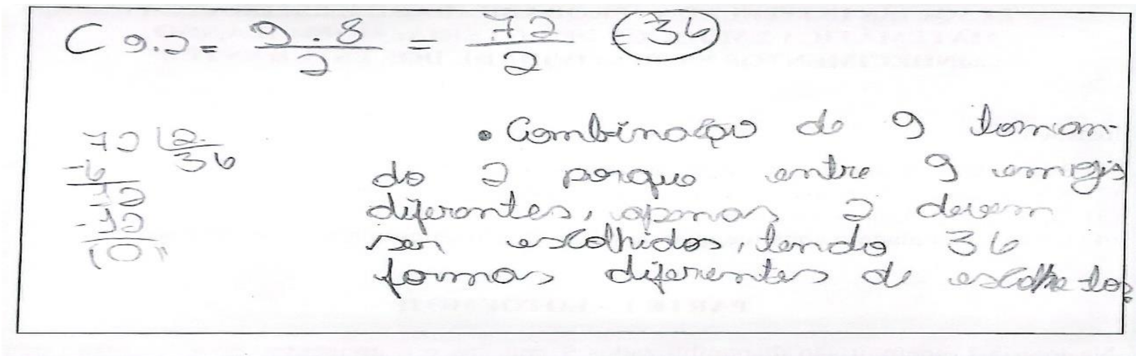
Fonte: Estudante G.

Nota-se a partir da resposta acima que o estudante G teve um raciocínio parecido com o do estudante F, calculando $C_{8\,,2}$.

Porém, parece abandonar esse raciocínio, partindo para uma razão que não envolve combinação, com a justificativa de que se há 8 emojis disponíveis "e apenas 2 sendo o correto", acaba por concluir que $\frac{1}{4}$ ou 25% é o valor para a probabilidade solicitada.

Na resposta do estudante G é possível perceber que há uma dificuldade em reconhecer se o problema envolve combinações ou não, pois inicia calculando uma combinação, mas depois o resultado não é aproveitado, e parte-se para um cálculo bastante simplista, com uma justificativa que não encontra amparo na realidade da questão, o que pode sugerir que o estudante encontrou dificuldades na correta interpretação do problema.

Figura 12 - Resposta do estudante H para a Pergunta 2.

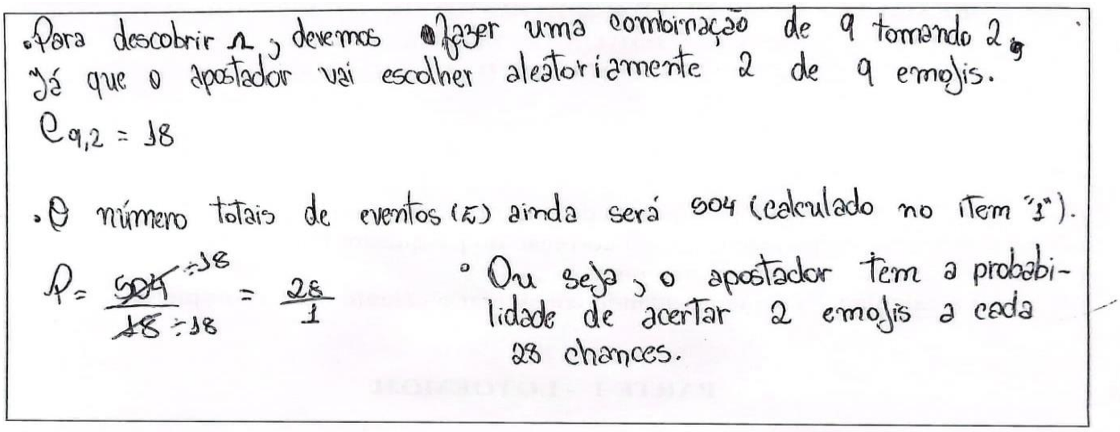

$C_{9,2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = \frac{72}{2} = 36$

72 | 2
-6 | 36
12
-12
0

• Combinação de 9 tomando 2 porque entre 9 emojis diferentes, apenas 2 devem ser escolhidos, tendo 36 formas diferentes de escolhe-los

Fonte: Estudante H.

Figura 13 - Resposta do estudante I para a Pergunta 2.


• Para descobrir Ω, devemos fazer uma combinação de 9 tomando 2, já que o apostador vai escolher aleatoriamente 2 de 9 emojis.

$C_{9,2} = 18$

• O número totais de eventos (E) ainda será 504 (calculado no item "1").

$P = \frac{504 \div 18}{18 \div 18} = \frac{28}{1}$

• Ou seja, o apostador tem a probabilidade de acertar 2 emojis a cada 28 chances.

Fonte: Estudante I.

Nas Figuras 12 e 13 acima percebemos que os estudantes usam a combinação $C_{9,2}$, pois acreditam, de maneira equivocada, que dos 9 emojis disponíveis o apostador deverá escolher 2 deles.

Na verdade, o que se tem é que o apostador sempre escolherá 3 emojis, mas a pergunta que é feita nos questiona qual a probabilidade de que o apostador acerte 2 emojis. Na prática, o que se está pedindo é a probabilidade de que o apostador acerte 2 emojis e erre 1 deles.

O fato de que o apostador deve errar 1 de seus emojis apostados não foi percebido por nenhum dos estudantes, que se ativeram mais em propor resoluções focadas apenas nos 2 acertos que o apostador deveria ter.

Com relação ao estudante I, percebemos que há uma inversão na fórmula da probabilidade, pois foram colocados os casos possíveis no numerador e os casos favoráveis no denominador, ocasionando uma probabilidade maior do que 1, o que não é possível.

Além do mais, o estudante erra no cálculo da combinação, ao afirmar que $C_{9,2} = 18$, quando na verdade sabemos que $C_{9,2} = 36$.

Resolução comentada:

Como os emojis são igualmente prováveis de serem sorteados, vamos usar a definição clássica de probabilidade, ou seja, p = número de caso favoráveis/ número de casos possíveis ou $p = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$.

O número de casos possíveis, $n(\Omega)$, já é sabido, pois foi calculado na página 23 e são em total de 84.

O número de casos favoráveis, $n(E)$, deve ser contado usando o princípio multiplicativo, já que temos a situação do jogador acertar 2 emojis e errar 1.

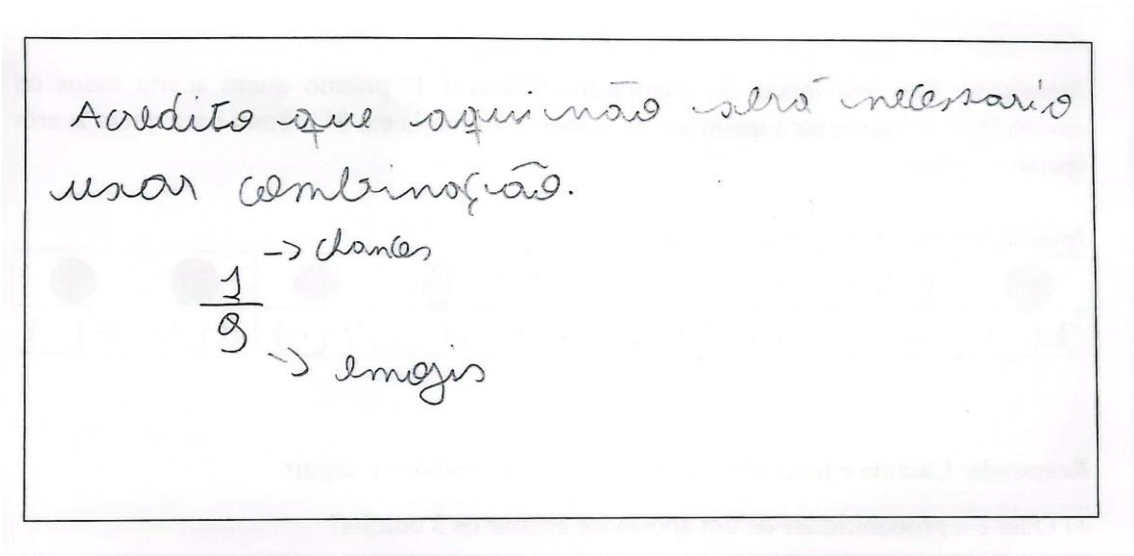
De 3 emojis escolhidos, o apostador pode acertar 2 deles de $C_{3,2} = 3$ maneiras diferentes. Já para errar 1 dos emojis, ele deve escolher um dos 6 números que não foram sorteados, o que pode ocorrer de $C_{6,1} = 6$ maneiras. Usando o princípio multiplicativo temos que $n(E) = 3 \times 6 = 18$.

Assim, a probabilidade procurada é $p(acertar\ 2\ emojis) = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$.

Pergunta 3: Qual é a probabilidade de um apostador acertar somente 1 emoji?

Respostas dos estudantes:

Figura 14 - Resposta do estudante F para a Pergunta 3.



Acredito que aqui não será necessário usar combinação.

$\frac{1}{9}$ -> chances

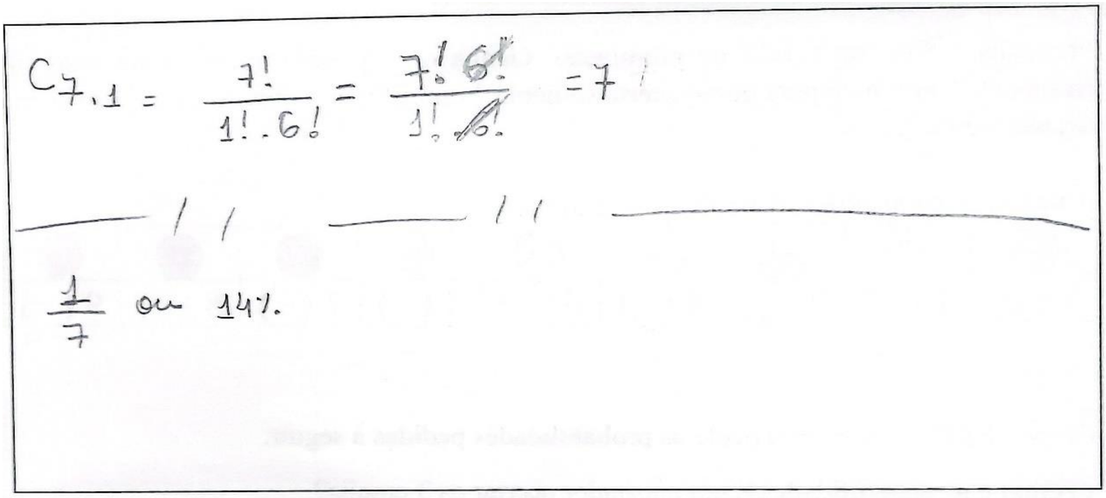
-> emojis

Fonte: Estudante F.

O estudante F responde à Pergunta 3 dispensando combinações, pois acredita que o apostador tem apenas uma chance em nove de acertar um emoji. O cálculo, provavelmente, se baseou no fato de termos 9 emojis e estamos investigando a probabilidade de acetar apenas 1 deles.

Porém, devemos observar que o apostador sempre escolhe 3 emojis, e, para o Problema 3, desses escolhidos deve acertar 1 e errar os outros dois, sendo o cálculo de probabilidade baseado nessa observação.

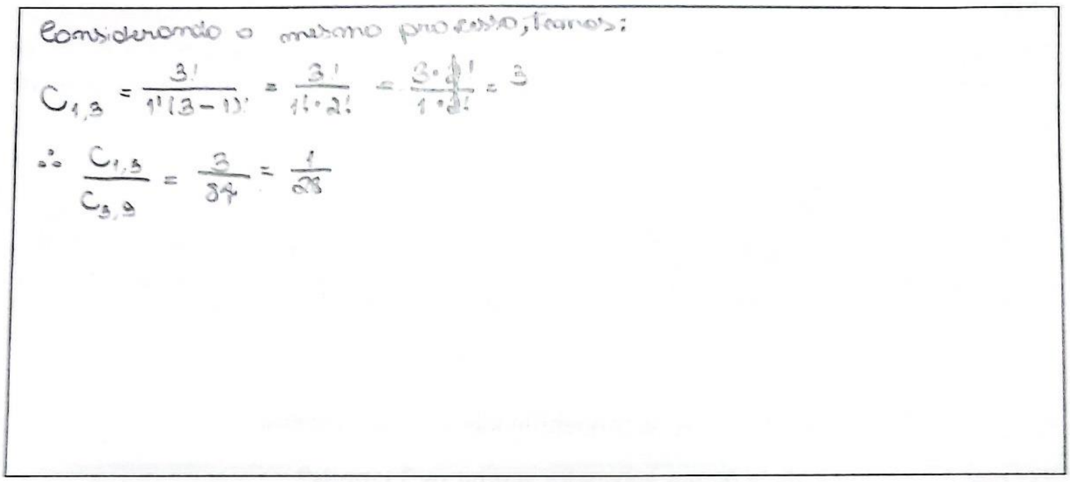
Figura 15 - Resposta do estudante G para a Pergunta 3.



Fonte: Estudante G.

A resposta apresentada na Figura 15 traz a combinação $C_{7,1}$ como valor para a contagem dos casos favoráveis. Podemos inferir que o estudante G tentou uma redução do espaço amostral, considerando haver 7 emojis (9 ao todo menos os 2 que o apostador erra) para se escolher 1 certo.

Figura 16 - Resposta do estudante E para a Pergunta 3.



Fonte: Estudante E.

Do exposto na Figura 16, percebemos que o estudante apresenta a combinação $C_{3,1} = 3$ como o número de casos favoráveis. Essa combinação representa a quantidade de maneiras que o apostador tem de acertar 1 emoji dos 3 que ele escolheu.

Porém, novamente, é esquecido o cálculo de quantas formas o apostador pode errar 2 emojis escolhidos, tornando o cálculo dos casos favoráveis equivocado.

Resolução comentada:

O número de casos possíveis permanece o mesmo, ou seja, $\mathrm{n}(\Omega) = 84$.

O número de casos favoráveis, $\mathrm{n}(\mathrm{E})$, deve ser contado usando o princípio multiplicativo, já que temos a situação do jogador acertar 1 emoji e errar os outros 2.

De 3 emojis escolhidos, o apostador pode acertar 1 deles de $C_{3,1} = 3$ maneiras diferentes. Já para errar 2 emojis, ele deve escolher dois dos 6 números que não foram sorteados, o que pode ocorrer de $C_{6,2} = 15$ maneiras. Usando o princípio multiplicativo temos que $n(E) = 3 \times 15 = 45$.

Assim, a probabilidade procurada é $p(acertar\ somente\ 1\ \ emoji) = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$.

5.2.2 SPP da Sorte: Resultados e Discussões

O SPP da Sorte, nome fictício de uma banca que atua na cidade de São Paulo do Potengi/RN, foi inserido neste trabalho por ser muito conhecido na região, contar com regras de fácil entendimento e por ter cálculos de probabilidade que não usam combinações, como é o caso dos demais jogos de azar que utilizamos nessa pesquisa.

Para a obtenção de informações mais aprofundadas sobre o jogo, entrevistamos um dos sócios do SPP da Sorte, cujo roteiro de entrevista semiestruturado se encontra no Anexo A.3.

Regras do jogo:

O SPP da Sorte consiste em vender bilhetes que contém, cada um, quatro números, conhecidos por “milhar”, que vão de 0000 a 9999.

Os bilhetes vendidos são todos diferentes, de modo que ninguém que comprar um bilhete terá algum milhar igual a qualquer outro bilhete. Ganha quem tem o bilhete com o número sorteado.

O sorteio ocorre diariamente, exceto domingos e feriados, e consiste em sortear primeiro o dígito da unidade de milhar, depois sorteia-se o dígito da centena, em seguida o dígito da dezena e, por fim, o dígito da unidade, todos os sorteios com dígitos que vão de 0 a 9 com igual chance de serem sorteados.

Cada bilhete custa R$ 2,00 e é vendido presencialmente, por meio de “cambistas”, e por aplicativos de mensagens de texto (*Whatsapp*). O apostador pode comprar quantos bilhetes quiser.

Faixa de premiação: Inicialmente começa por um prêmio de R$ 500,00, mas não havendo ganhadores a premiação acumula para o sorteio seguinte, e assim sucessivamente.

Na figura abaixo temos um exemplar de um bilhete da SPP da sorte do dia 08/10/2022. Informações como o nome real e o perfil do *Instagram* foram omitidos, por ser uma atividade privada e não regulamentada.

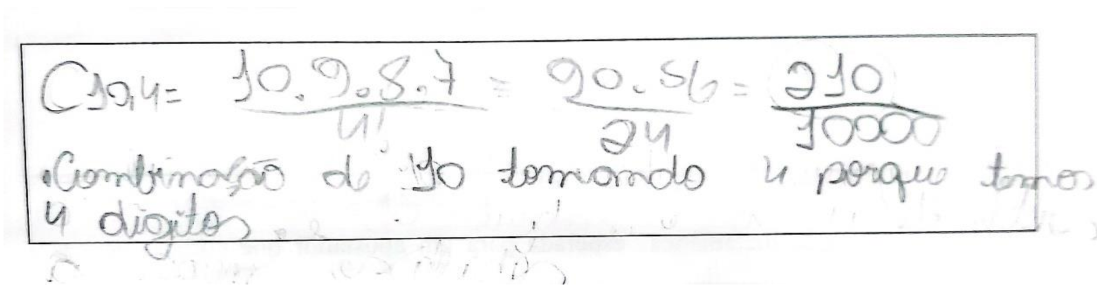
Figura 17 - Bilhete do SPP da Sorte.

Fonte: SPP da sorte.

Pergunta 4: Quantos números podem ser sorteados no SPP da sorte?

Respostas dos estudantes

Figura 18 - Resposta do estudante H para a Pergunta 4.



Fonte: Estudante H.

O estudante H usa combinação para responder à Pergunta 4, inclusive usando a Equação (5) da Página 5, que é pouco habitual no ensino médio. Ele acaba por concluir que $C_{10,4} = \frac{210}{10000}$, o que não é verdade, pois teríamos como resultado um valor não inteiro.

Este problema não se resolve utilizando combinação simples, pois não temos a intenção de sortear 4 dígitos de um total de 10, sem reposição, mas sim compor um número chamado de "milhar", onde temos 10 dígitos possíveis para cada unidade de milhar, centena, dezena e unidade.

Dos 12 estudantes, tivemos 11 acertos para essa questão, de modo que a Figura 19 representa o pensamento da maioria dos respondentes para a Pergunta 4.

Figura 19 - Resposta do estudante I para a Pergunta 4.

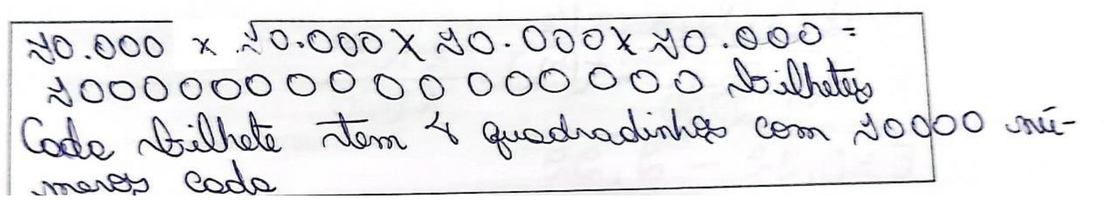
Fonte: Estudante I.

Outra forma de responder à Pergunta 4 é observar que de 0 até 9.999 temos 10.000 números possíveis, fato este que não foi observado por nenhum dos estudantes.

Pergunta 5: Quantos bilhetes podem ser vendidos, no máximo, por dia?

Resposta dos estudantes:

Figura 20 - Resposta do estudante B para a Pergunta 5.



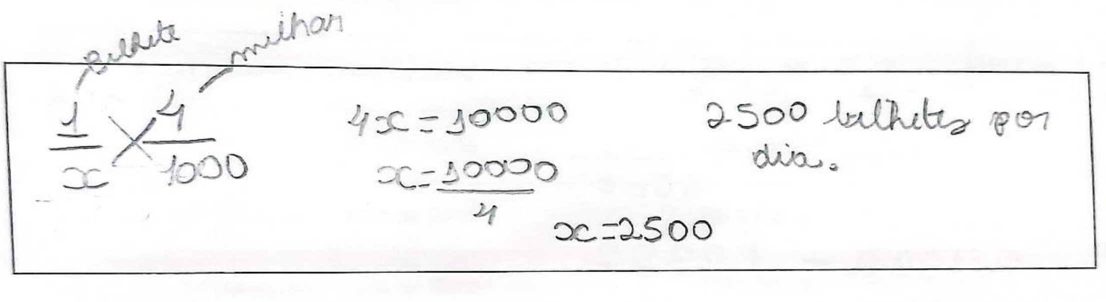
Fonte: Estudante B.

O estudante B usa o raciocínio de que é possível vender, no máximo, 10 quatrilhões de bilhetes por dia, resultado este encontrado a partir da ideia de que em cada um dos 4 retângulos do bilhete há 10.000 números possíveis.

Na realidade, pelas próprias regras do jogo, não é possível que haja repetições de números, nem entre bilhetes diferentes, nem em um mesmo bilhete, o que demonstra que o estudante B teve uma interpretação equivocada do problema.

Nas Figuras 21 e 22, apresentadas a seguir, há respostas corretas obtidas de maneira semelhante por 9 dos 12 estudantes.

Figura 21 - Resposta do estudante G para a Pergunta 5.


bilhete milhar

$\frac{1}{x} \times \frac{4}{1000}$

$4x = 10000$

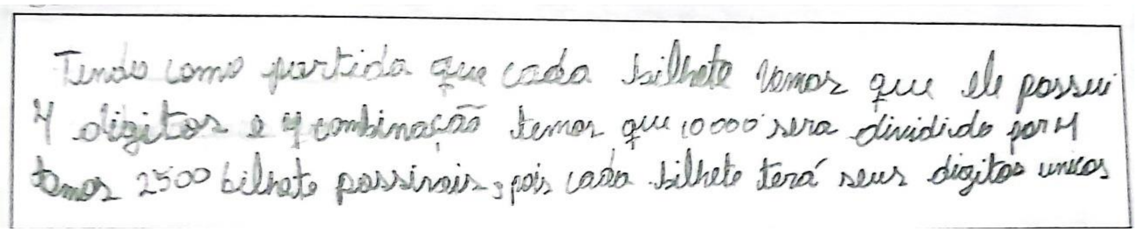
$x = \frac{10000}{4}$

$x = 2500$

2500 bilhetes por dia.

Fonte: Estudante G.

Figura 22 - Resposta do estudante D para a pergunta 5.


Tendo como partida que cada bilhete temos que ele possui 4 digitos e 4 combinação temos que 10 000 sera dividido por 4 temos 2500 bilhete possiveis, pois cada bilhete terá seus digitos unicos

Fonte: Estudante D.

O estudante G opta por utilizar uma proporção do tipo “4 está para 10.000 assim como 1 está para x”, encontrando o valor da incógnita.

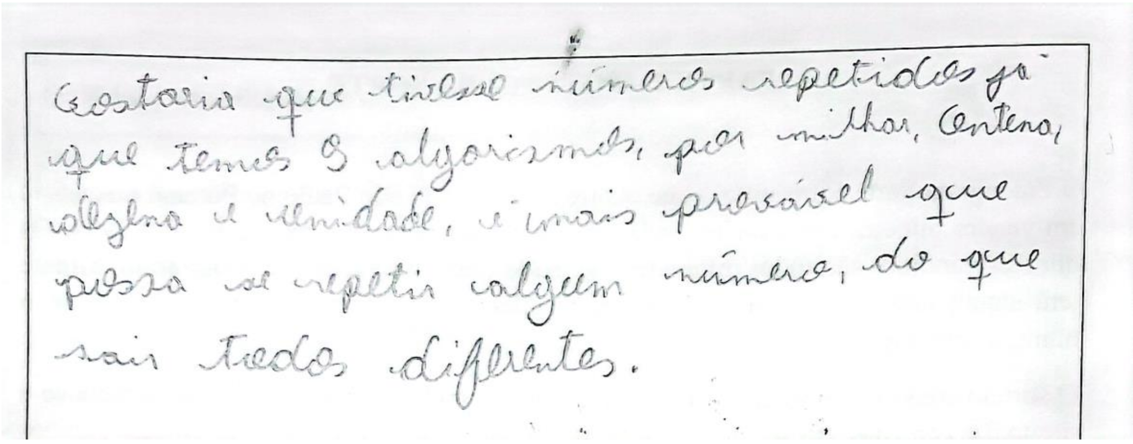
Já o estudante D opta por um raciocínio lógico de dividir 10.000 por 4, já que cada bilhete tem 4 milhares diferentes dos 10.000 possíveis.

Há um equívoco na justificativa da Figura 22, confundindo dígito com número, embora isso não o tenha feito incorrer em erro no resultado.

Pergunta 6: Observando apenas as chances de serem selecionados, caso você comprasse 1 bilhete do SPP da Sorte preferiria bilhetes com números de dígitos diferentes ou que tenham algum repetido?

Respostas dos estudantes:

Figura 23 - Resposta do estudante F para a Pergunta 6.



Gostaria que tivesse números repetidos já que temos 9 algarismos, por milhar, centena, dezena e unidade, é mais provável que possa se repetir algum número, do que sair todos diferentes.

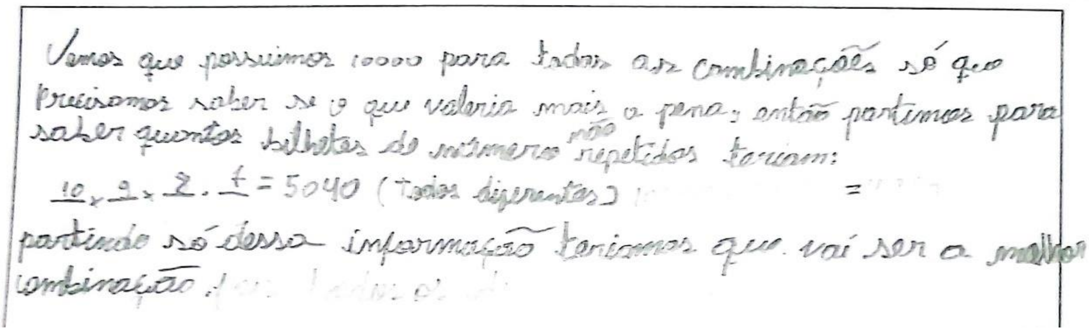
Fonte: Estudante F.

A intenção da Pergunta 6 é fazer com que os estudantes usem seus conhecimentos de probabilidade para a tomada de decisão.

O estudante F acredita que é mais provável sair um número com algarismo repetido, porém não apresenta cálculos que possam embasar o seu argumento.

A postura narrada acima foi acompanhada por outros dois estudantes, que mesmo não fazendo cálculos, acreditaram ser mais provável serem sorteados números com algarismos repetidos.

Figura 24 - Resposta do estudante D para a Pergunta 6.



Vemos que possuímos 10000 para todas as combinações só que precisamos saber se o que valeria mais a pena, então partimos para saber quantos bilhetes de número não repetidos teriam:
10 x 9 x 8 . 7 = 5040 (todos diferentes) =
partindo só dessa informação teríamos que vai ser a melhor combinação.

Fonte: Estudante D.

Na resposta acima, o estudante optou por determinar a quantidade de números sem algarismos repetidos, o que é bem mais simples do que determinar todos os números com pelo menos um algarismo repetido.

A tática utilizada para responder corretamente a questão foi usar os tracinhos, onde em cada um dos quatro tracinhos foi colocada a quantidade de possibilidades, e em seguida usado o princípio multiplicativo para obter o total de 5.040 números com algarismos distintos.

Como temos 10.000 números possíveis, o total de milhares com algum dígito repetido é obtido pela diferença 10.000 – 5.040 = 4.960. Sendo assim, há mais números com algarismos distintos do que com repetidos, fazendo com que seja mais provável serem sorteadas milhares do primeiro tipo.

Em termos de probabilidade, podemos concluir que:

$$p(milhar\ sem\ algarismos\ repetidos) = \frac{5.040}{10.000} = 0{,}504\ ou\ 50{,}4\ \%\ .$$

$$p(milhar\ com\ algum\ algarismo\ repetido) = \frac{4.960}{10.000} = 0{,}496\ ou\ 49{,}6\ \%.$$

Embora as probabilidades mostradas acima sejam bem próximas, é razoável que um jogador prefira escolher bilhetes com mais milhares sem algarismos repetidos.

Porém, levantamento feito pelo pesquisador a partir do perfil do instagram do SPP da Sorte, onde são transmitidos e publicados os sorteios, revela que de 11/04/2022 quando ocorreu o primeiro sorteio, até 08/03/2023, saíram mais milhares com dígitos repetidos, conforme dados apresentados no quadro abaixo.

Tabela 2 – Levantamento da frequência do tipo de milhar sorteado no SPP da Sorte.

Tipo de Milhares	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
Com algarismo repetido	255	53,6 %
Sem algarismo repetido	221	46,4 %

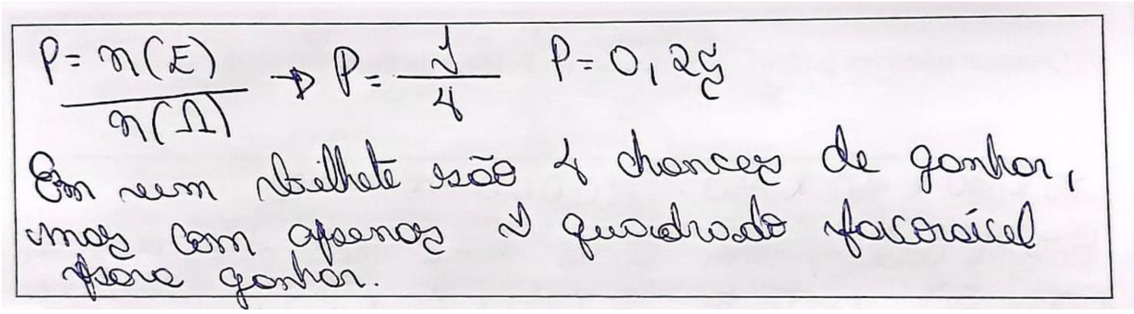
Fonte: Resultados publicados no perfil do instagram do SPP da sorte.

A planilha com todos os resultados da SPP da Sorte até o dia 8 de março de 2023 pode ser obtida através do link: encurtador.com.br/hjS02.

Pergunta 7: Comprando apenas 1 bilhete qual a probabilidade de o apostador ganhar o prêmio?

Respostas dos estudantes:

Figura 25 - Resposta do estudante B para a Pergunta 7.



$P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \rightarrow P = \frac{1}{4} \quad P = 0,25$

Em um bilhete são 4 chances de ganhar, mas com apenas 1 quadrado favorável para ganhar.

Fonte: Estudante B.

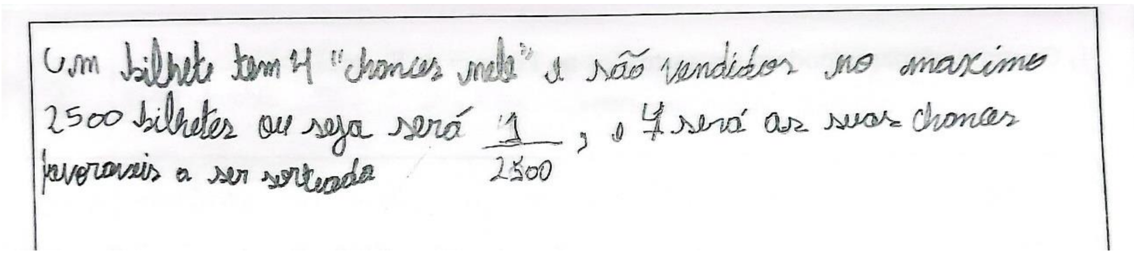
Na resposta acima, há um claro equívoco do estudante, pois faz uma redução do espaço amostral de maneira indevida, já que considera como resultados possíveis apenas os quatro milhares presentes no bilhete do jogador, quando na verdade temos 10.000 resultados possíveis.

Segundo Bryan e Nunes (2012), o espaço amostral não faz apenas parte do cálculo da probabilidade, mas é componente que também ajuda a entender a natureza da probabilidade.

Dessa forma, a resposta do estudante B faria sentido se estivéssemos tratando de uma probabilidade condicional, ou seja, caso a pergunta fosse “Dado que o número sorteado está no seu bilhete, qual a probabilidade de ser o que aparece no canto superior esquerdo do quadro de milhares?”.

Na situação acima, temos quatro milhares igualmente prováveis de serem sorteadas, de modo que a probabilidade de ser a presente no canto superior esquerdo é de 1/4, como na resposta apresentada pelo estudante B.

Figura 26 - Resposta do estudante D para a Pergunta 7.



Um bilhete tem 4 "chances reais" e são vendidos no maximo 2500 bilhetes ou seja será $\frac{1}{2500}$, e 4 será as suas chances faveraveis a ser sorteada

Fonte: Estudante D.

Na Figura 26 há uma aparente confusão do estudante entre o que considera como chances favoráveis e possíveis, são os bilhetes ou os milhares presentes nos bilhetes? Pois se estivermos centrando nossa atenção apenas nos bilhetes, quem compra apenas 1 bilhete terá probabilidade de 1/2.500 de ser premiado, já que são no máximo 2.500 bilhetes vendidos por dia.

Porém, caso foquemos nos milhares presentes no bilhete comprado, o jogador terá 4 chances de ganhar o prêmio em um total de 10.000 milhares possíveis, onde chegamos ao resultado da probabilidade de 4/10.000 de prêmio, que simplificando chega ao mesmo resultado de 1/2.500.

Pergunta 8: Qual a esperança matemática do lucro para um apostador que compra apenas 1 bilhete? Interprete o resultado.

Antes dos estudantes responderem a essa pergunta foi feita uma revisão sobre o que é Esperança Matemática.

Esse tema foi trabalhado no 3º ano integrado, nas turmas de INFO 3M e MAMB 3M, na forma de um seminário intitulado "Como saber se um jogo é justo?"

Para a revisão utilizou-se o Exemplo 8 da Página 44, onde na oportunidade refletimos sobre para quem era mais vantajoso o jogo, o que significa um jogo ser justo num contexto de esperança matemática e que interpretações cabem aos valores das médias encontradas.

Respostas dos estudantes:

Figura 27 - Resposta do estudante I para a Pergunta 8.

$$E = 498 \cdot \frac{1}{2500} + (-2) \cdot \frac{2499}{2500}$$

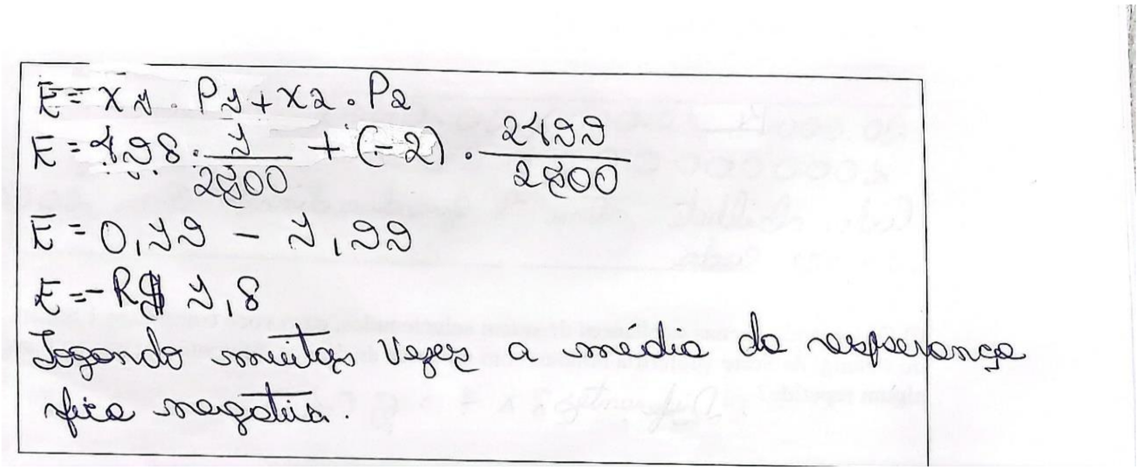
$$E = 0{,}19 - 1{,}99$$

$$E = -R\$\ 1{,}8$$

Assim, se o jogador apostar continuamente, terá uma perca, de R$ 1,80

Fonte: Estudante I.

Figura 28 - Resposta do estudante B para a Pergunta 8.



$E = x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2$

$E = 498 \cdot \frac{1}{2500} + (-2) \cdot \frac{2499}{2500}$

$E = 0{,}19 - 1{,}99$

$E = -R\$\ 1{,}8$

Jogando muitas vezes a média da esperança fica negativa.

Fonte: Estudante B.

Todos os seis estudantes que exibiram respostas para essa questão encontraram o mesmo valor da esperança exibidos nas Figuras 27 e 28.

Porém, como podemos ver acima, houve equívocos quanto à interpretação do resultado.

Para o estudante I caso o jogo seja jogado continuamente (no sentido de um número suficiente de vezes), o jogador perde R$ 1,80, quando na verdade essa perda é uma média, que afirma que o jogador perde R$ 1,80 em cada partida que jogar.

Para sermos mais precisos, é como se o jogador investisse a cada jogo R$ 2,00 (que é o preço do bilhete) e lhe devolvessem ao final de cada sorteio apenas R$ 0,20 (que corresponde a diferença R$ 2,00 – R$ 1,80). Isso, claro, considerando um número suficiente grande de apostas diárias jogadas.

Em relação ao estudante B, além de não apresentar uma interpretação para o resultado, ainda utiliza uma frase redundante “a média da esperança”, que afirma ser negativa, quando na verdade temos o lucro médio diário negativo.

5.2.3 Dia de Sorte: Resultados e Discussões

O jogo de loteria Dia de Sorte foi criado a partir da Portaria nº 03 do MINISTÉRIO DA FAZENDA, publicada em 14 de maio de 2018, onde podemos encontrar suas regras para apostas, faixas de premiação, regras de sorteio e preços.

A competência para administrar essa modalidade de prognósticos numéricos é da Caixa Econômica Federal, que realiza os sorteios três vezes durante a semana.

Regras do jogo:

O Dia de Sorte é a loteria onde você aposta seus números da sorte. Escolha de 7 a 15 números dentre os 31 disponíveis e mais 1 “Mês de Sorte”. São sorteados sete números e um “Mês de Sorte” por concurso (LOTERIAS CAIXA, 2023).

Faixas de premiação:

Do valor total arrecadado, 43,35% são destinados às premiações, que podem ser fixas ou variáveis, conforme segue.

Faixa 1: Acerto do mês de sorte (Prêmio fixo de R$ 2,00)

Faixa 2: Acerto de 4 números (Prêmio fixo de R$ 4,00)

Faixa 3: Acerto de 5 números (Prêmio fixo de R$ 20,00)

Faixa 4: Acerto de 6 números (Prêmio de 30% do valor destinado a premiações, descontando os valores pagos para as premiações fixas)

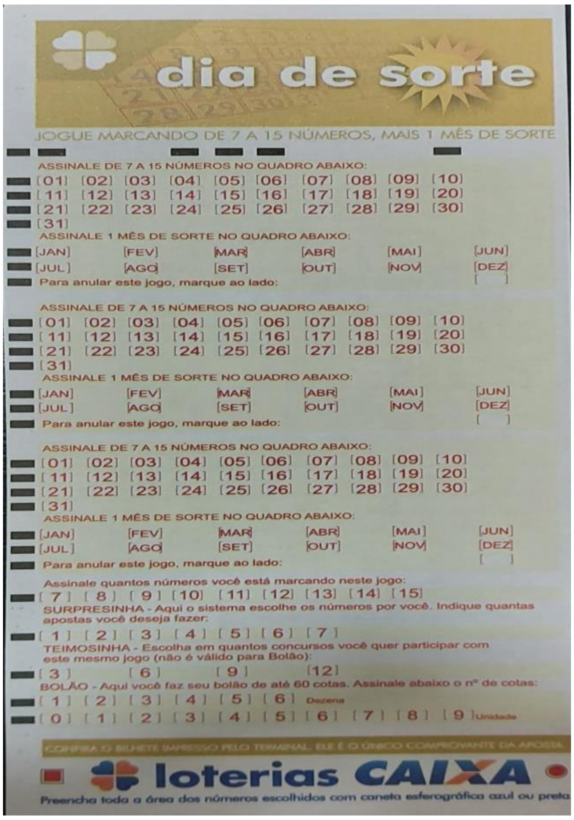
Faixa 5: Acerto de 7 números (Prêmio de 70% do valor destinado a premiações, descontando os valores pagos para as premiações fixas)

O prêmio de acerto do mês de sorte é independente e cumulativo com os demais.

Um apostador que escolhe 7 números e 1 dia de sorte, dito aposta simples, paga o preço de R$ 2,00. Para mais escolhas de números o preço é diretamente proporcional à quantidade de chances de vencer a faixa 5, como veremos mais adiante.

A seguir, são exibidas imagens de um volante do Dia de Sorte, frente e verso.

Figura 29 - Volante do jogo Dia de Sorte.



dia de sorte

JOGUE MARCANDO DE 7 A 15 NÚMEROS, MAIS 1 MÊS DE SORTE

ASSINALE DE 7 A 15 NÚMEROS NO QUADRO ABAIXO:
[01] [02] [03] [04] [05] [06] [07] [08] [09] [10]
[11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20]
[21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30]
[31]
ASSINALE 1 MÊS DE SORTE NO QUADRO ABAIXO:
[JAN] [FEV] [MAR] [ABR] [MAI] [JUN]
[JUL] [AGO] [SET] [OUT] [NOV] [DEZ]
Para anular este jogo, marque ao lado: [ ]

ASSINALE DE 7 A 15 NÚMEROS NO QUADRO ABAIXO:
[01] [02] [03] [04] [05] [06] [07] [08] [09] [10]
[11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20]
[21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30]
[31]
ASSINALE 1 MÊS DE SORTE NO QUADRO ABAIXO:
[JAN] [FEV] [MAR] [ABR] [MAI] [JUN]
[JUL] [AGO] [SET] [OUT] [NOV] [DEZ]
Para anular este jogo, marque ao lado: [ ]

ASSINALE DE 7 A 15 NÚMEROS NO QUADRO ABAIXO:
[01] [02] [03] [04] [05] [06] [07] [08] [09] [10]
[11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20]
[21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30]
[31]
ASSINALE 1 MÊS DE SORTE NO QUADRO ABAIXO:
[JAN] [FEV] [MAR] [ABR] [MAI] [JUN]
[JUL] [AGO] [SET] [OUT] [NOV] [DEZ]
Para anular este jogo, marque ao lado: [ ]

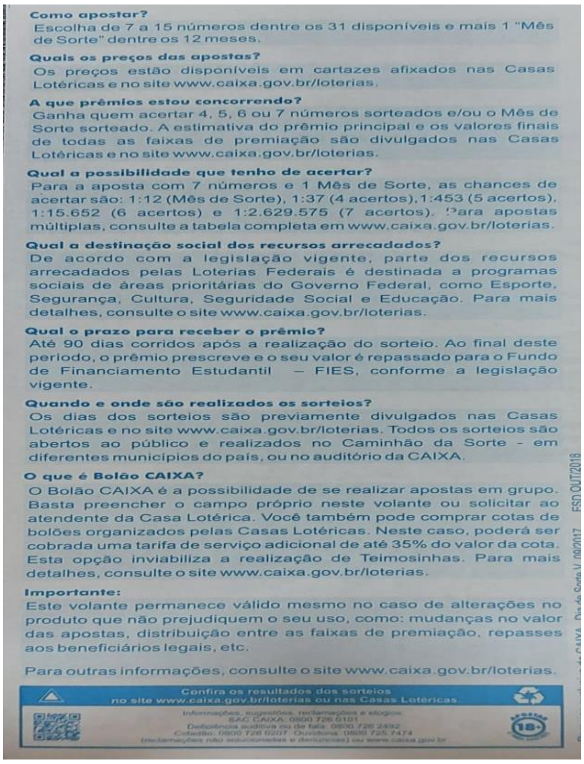
Assinale quantos números você está marcando neste jogo:
[7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15]
SURPRESINHA - Aqui o sistema escolhe os números por você. Indique quantas apostas você deseja fazer:
[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7]
TEIMOSINHA - Escolha em quantos concursos você quer participar com este mesmo jogo (não é válido para Bolão):
[3] [6] [9] [12]
BOLÃO - Aqui você faz seu bolão de até 60 cotas. Assinale abaixo o nº de cotas:
[1] [2] [3] [4] [5] [6] Dezena
[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] Unidade

loterias CAIXA

Preencha toda a área dos números escolhidos com caneta esferográfica azul ou preta

Fonte: Loterias Caixa.

Figura 30 - Volante do jogo Dia de Sorte (Verso).



Como apostar?
Escolha de 7 a 15 números dentre os 31 disponíveis e mais 1 "Mês de Sorte" dentre os 12 meses.

Quais os preços das apostas?
Os preços estão disponíveis em cartazes afixados nas Casas Lotéricas e no site www.caixa.gov.br/loterias.

A que prêmios estou concorrendo?
Ganha quem acertar 4, 5, 6 ou 7 números sorteados e/ou o Mês de Sorte sorteado. A estimativa do prêmio principal e os valores finais de todas as faixas de premiação são divulgados nas Casas Lotéricas e no site www.caixa.gov.br/loterias.

Qual a possibilidade que tenho de acertar?
Para a aposta com 7 números e 1 Mês de Sorte, as chances de acertar são: 1:12 (Mês de Sorte), 1:37 (4 acertos), 1:453 (5 acertos), 1:15.652 (6 acertos) e 1:2.629.575 (7 acertos). Para apostas múltiplas, consulte a tabela completa em www.caixa.gov.br/loterias.

Qual a destinação social dos recursos arrecadados?
De acordo com a legislação vigente, parte dos recursos arrecadados pelas Loterias Federais é destinada a programas sociais de áreas prioritárias do Governo Federal, como Esporte, Segurança, Cultura, Seguridade Social e Educação. Para mais detalhes, consulte o site www.caixa.gov.br/loterias.

Qual o prazo para receber o prêmio?
Até 90 dias corridos após a realização do sorteio. Ao final deste período, o prêmio prescreve e o seu valor é repassado para o Fundo de Financiamento Estudantil – FIES, conforme a legislação vigente.

Quando e onde são realizados os sorteios?
Os dias dos sorteios são previamente divulgados nas Casas Lotéricas e no site www.caixa.gov.br/loterias. Todos os sorteios são abertos ao público e realizados no Caminhão da Sorte - em diferentes municípios do país, ou no auditório da CAIXA.

O que é Bolão CAIXA?
O Bolão CAIXA é a possibilidade de se realizar apostas em grupo. Basta preencher o campo próprio neste volante ou solicitar ao atendente da Casa Lotérica. Você também pode comprar cotas de bolões organizados pelas Casas Lotéricas. Neste caso, poderá ser cobrada uma tarifa de serviço adicional de até 35% do valor da cota. Esta opção inviabiliza a realização de Teimosinhas. Para mais detalhes, consulte o site www.caixa.gov.br/loterias.

Importante:
Este volante permanece válido mesmo no caso de alterações no produto que não prejudiquem o seu uso, como: mudanças no valor das apostas, distribuição entre as faixas de premiação, repasses aos beneficiários legais, etc.

Para outras informações, consulte o site www.caixa.gov.br/loterias.

Confira os resultados dos sorteios no site www.caixa.gov.br/loterias ou nas Casas Lotéricas

FSD OUT/2018

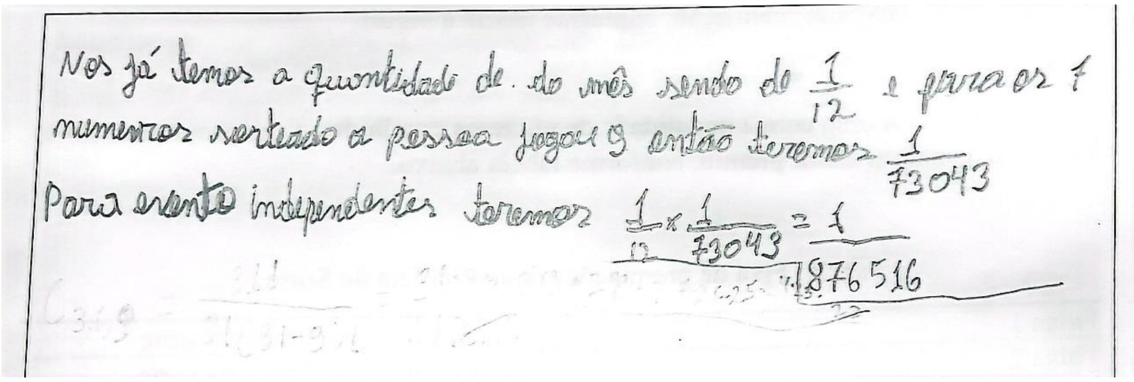
Fonte: Loterias Caixa.

Pergunta 9: Qual a probabilidade de um jogador ganhar o maior prêmio possível escolhendo 9 números e um mês da sorte? Tente expressar a resposta na forma como aparece no bilhete da loteria.

Para esta pergunta, vale salientar que durante o encontro o pesquisador enfatizou que o maior prêmio possível de ganhar nesse jogo é quando o apostador acerta os 7 números e o mês de sorte, pois acaba abarcando a faixa 1 e a faixa 5 de premiações, cumulativamente.

Respostas dos estudantes:

Figura 31 - Resposta do estudante D para a Pergunta 9.


Nos já temos a quantidade de. do mês sendo de $\frac{1}{12}$ e para os 7 numeros sorteado a pessoa jogou 9 então teremos $\frac{1}{73043}$
Para evento independentes teremos $\frac{1}{12} \times \frac{1}{73043} = \frac{1}{876516}$

Fonte: Estudante D.

O estudante D se utilizou do conteúdo de eventos independentes para resolver o problema. De fato, o sorteio do Dia de Sorte é composto de dois momentos distintos, um referente ao sorteio de 7 dias da semana, e o outro da escolha do mês da sorte. Esses momentos são independentes entre si, ou seja, o fato de terem sido sorteados os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, por exemplo, não influencia em nada o sorteio do mês da sorte.

Chamando de evento A “Acertar 7 números de 9 escolhidos”, e de evento B “Acertar o mês de sorte”, temos que a probabilidade de acertar 7 números e o mês da sorte, ou seja, $p(A \cap B)$, será dado pelo produto das probabilidades individuais de A e B, conforme Equação (16) da Página 40.

Para determinarmos $p(A)$, devemos calcular $C_{9,7}$, que corresponde aos casos favoráveis, já que de 9 números queremos que 7 deles sejam os sorteados, não importando a ordem. Os casos possíveis são em um total de $C_{31,7}$, pois dos 31 números disponíveis apenas 7 deles serão sorteados. Assim, temos que:

$$p(A) = \frac{C_{9,7}}{C_{31,7}} = \frac{36}{2.629.575}.$$

Para determinarmos $p(B)$, basta observar que existe 1 chance em 12 de o apostador acertar o mês de sorte, já que só pode escolher 1 deles de um total de 12.

Assim, temos que:

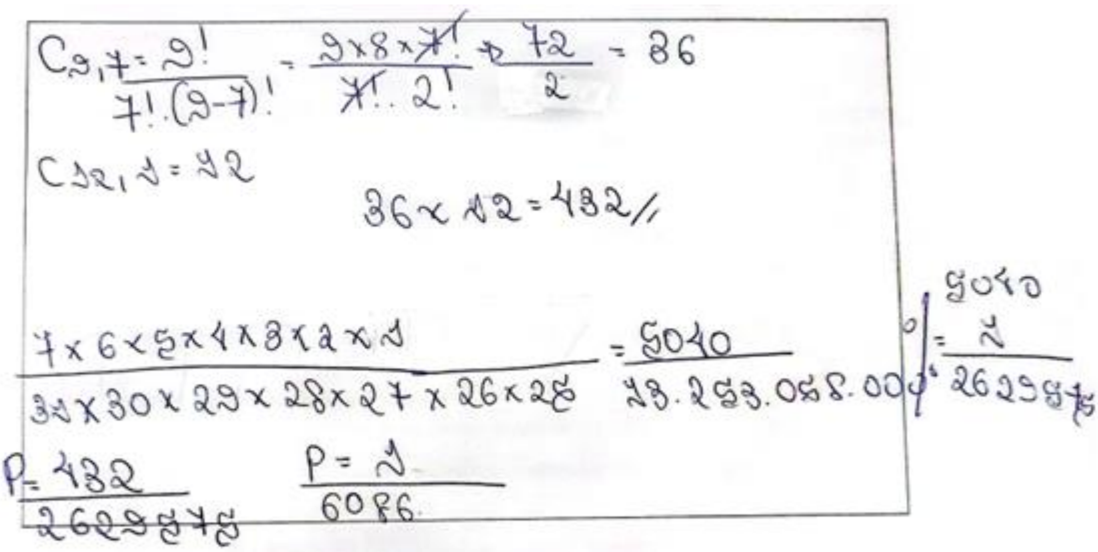
$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{36}{2.629.575} \times \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{36}{31.554.900} \ \ ou\ ainda\ p(A \cap B) = \frac{1}{876.525}.$$

Notemos que o resultado acima é bem próximo daquele exibido pelo estudante D. Na prática, o resultado encontrado diz que a probabilidade de o jogador ganhar o maior prêmio escolhendo 9 números e 1 mês de sorte é de 1 em 876.525.

Figura 32 - Resposta do estudante B para a Pergunta 9.



Fonte: Estudante B.

O estudante B comete um equívoco logo no início da sua reposta, quando obtém o produto 432, pois acaba usando o princípio multiplicativo para obter o produto da combinação $C_{9,7} = 36$, que corresponde ao número de chances de o apostador acertar 7 números escolhendo

9, com a quantidade de meses, que são 12, quando na verdade deveria multiplicar apenas por 1, que corresponde à chance de o apostador acertar o mês de sorte.

Pergunta 10: Considerando o preço do bilhete proporcional à quantidade de chances de ganhar o maior prêmio, como a Caixa chegou à conclusão de que deveria cobrar R$ 72,00 para quem escolhesse 9 números?

A Tabela 3 a seguir apresenta os preços cobrados de acordo com a quantidade de números escolhidos pelo apostador, que vão de 7 a 15 números.

Tabela 3 – Preços do jogo lotérico Dia de Sorte.

Quantidade de números escolhidos	Preço
7	R$ 2,00
8	R$ 16,00
9	R$ 72,00
10	R$ 240,00
11	R$ 660,00
12	R$ 1.584,00
13	R$ 3.432,00
14	R$ 6.864,00
15	R$ 12.870,00

Fonte: Site LOTERIAS CAIXA.

Para esta pergunta não houve nenhuma resposta dos estudantes, ao que passamos a solucionar abaixo.

Resolução comentada

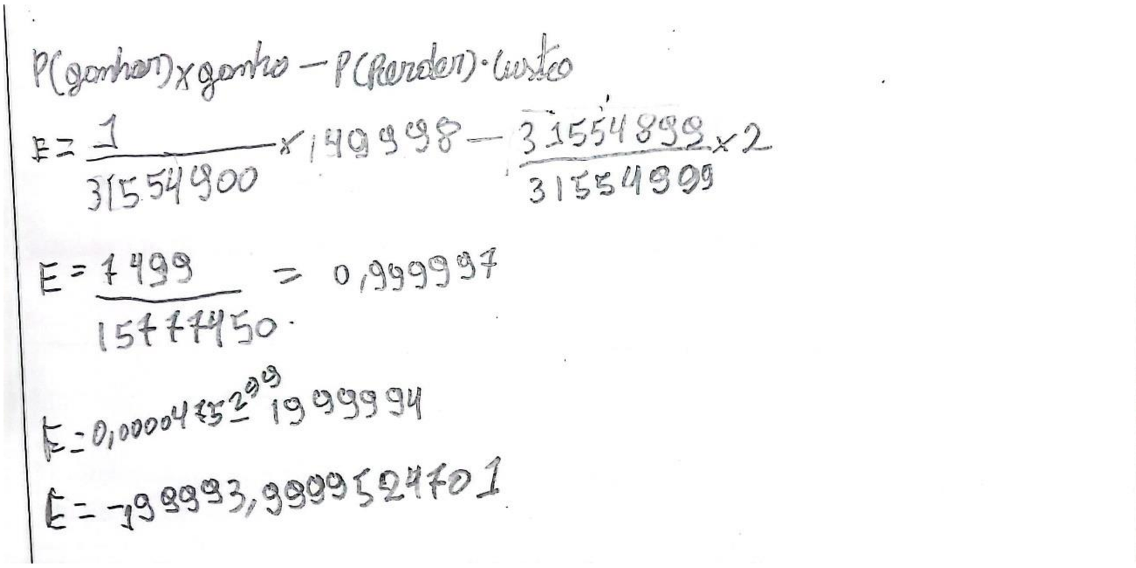
Quando o apostador faz uma aposta simples, ou seja, escolhe 7 números e 1 mês de sorte, ele tem apenas 1 chance de ganhar o maior prêmio, isso ao custo de R$ 2,00.

Porém, quando escolhe 9 números, suas chances de ganhar vão para $C_{9,7} = 36$, e como a questão afima que o preço é proporcional (diretamente) às chances, temos que o preço que a Caixa deve cobrar é de $36 \times R\$\ 2{,}00 = R\$\ 72{,}00$, conforme observamos na Tabela 3.

Pergunta 11: Usando os valores das probabilidades informadas no bilhete determine a esperança de lucro E para um apostador que faz uma aposta simples, considerando somente o maior prêmio, que vamos estimar em R$ 150.000,00 (estimativa para o prêmio do dia 27/10/2022).

Respostas dos estudantes:

Figura 33 - Resposta do estudante D para a Pergunta 11.


P(ganhar) x ganho − P(Perder) · Custo

$E = \frac{1}{31554900} \times 149998 - \frac{31554899}{31554900} \times 2$

$E = \frac{7499}{15777450} = 0{,}999997$

$E = 0{,}0000475299 - 199994$

$E = -199993{,}9999524701$

Fonte: Estudante D.

Na Figura 30 da Página 83, há o verso do volante onde encontramos algumas probabilidades associadas para a aposta simples. Nela é possível encontrar a informação de que a probabilidade de ganhar o maior prêmio, $p(7\ acertos)$, é de 1 em 2.629.575 ou $\frac{1}{2.629.575}$.

Porém, o estudante D acaba utilizando o valor de $\frac{1}{31.554.900}$, obtendo um valor de esperança que não corresponde à realidade do problema proposto.

Resolução comentada

Para resolver a Pergunta 11 vamos utilizar novamente a igualdade:

$$E(X) = x_{GANHO}.p(X = x_{GANHO}) + x_{PERDA}.p(X = x_{PERDA}),$$

Onde para o problema temos $p(X = x_{GANHO}) = p(7\ acertos) = \frac{1}{2.629.575}$, $x_{GANHO} = R\$\ 149.998{,}00$ (pois é o lucro que se obtém caso acerte 7 dias), $x_{PERDA} = -R\$\ 2{,}00$, $p(X = x_{PERDA}) = p\ (não\ acertar\ os\ 7\ números) = 1 - \frac{1}{2.629.575} = \frac{2.629.574}{2.629.575}$. Aplicando esses dados, obtemos:

$$E(X) = x_{GANHO}.p(X = x_{GANHO}) + x_{PERDA}.p(X = x_{PERDA})$$

$$\Rightarrow E(X) = 149.998 \times \frac{1}{2.629.575} + (-2) \times \frac{2.629.574}{2.629.575}$$

$$\Rightarrow E(X) \approx -1{,}94\ reais\,.$$

Do resultado logo acima, em média, o lucro obtido pelo apostador fazendo um jogo simples é de menos R$ 1,94, aproximadamente, o que significa que em cada partida o apostador paga R$ 2,00 para jogar, mas ao final retorna com apenas R$ 0,06, pois há um prejuízo de R$ 1,94.

Pelo resultado obtido, nas condições impostas pelo problema, também podemos interpretar que o jogo lotérico Dia de Sorte é um jogo injusto para o apostador, como são quase sempre os jogos de loteria.

5.2.4 + Milionária: Resultados e discussões

A loteria + Milionária, de prognósticos numéricos, é mais uma das modalidades de jogos administrados pela Caixa Econômica Federal, e teve sua autorização a partir da PORTARIA SECAP – SUPES/ME, nº 3.346, de 13 de abril de 2022.

O primeiro sorteio aconteceu no dia 28 de maio de 2022, com um prêmio total estimado em 10 milhões, mas não houve ganhador na faixa principal.

Regras do jogo: A partir das informações contidas no bilhete, percebemos que o apostador pode escolher de 6 a 12 números na matriz numérica formada por 50 números de 1 a 50, e de 2 a 6 trevos, de um total de 6 trevos.

A aposta simples ocorre quando o apostador escolhe 6 números e 2 trevos, pagando um valor de R$ 6,00.

Faixas de premiação: Dos valores arrecadados, 43,35 % são destinados ao pagamento das premiações. A + milionária possui 10 faixas de premiação, sendo 4 delas com valores fixos e as demais de acordo com percentuais estabelecidos, após o pagamento dos prêmios fixos.

Faixa 10: Acertos de 2 números e 1 trevo, com premiação fixa de R$ 6,00;

Faixa 9: Acertos de 2 números e 2 trevos, com premiação fixa de R$ 12,00;

Faixa 8: Acertos de 3 números e 1 trevo, com premiação fixa de R$ 24,00;

Faixa 7: Acertos de 3 números e 2 trevos, com premiação fixa de R$ 50,00;

Faixa 6: Acertos de 4 números e 1 ou nenhum trevo, com premiação de 6 % do valor restante para premiações;

Faixa 5: Acertos de 4 números e 2 trevos, com premiação de 6% do valor restante para premiações;

Faixa 4: Acertos de 5 números e 1 ou nenhum trevo, com premiação de 8 % do valor restante para premiações;

Faixa 3: Acertos de 5 números e 2 trevos, com premiação de 8 % do valor restante para premiações;

Faixa 2: Acertos de 6 números e 1 ou nenhum trevo, com premiação de 10 % do valor restante para premiações;

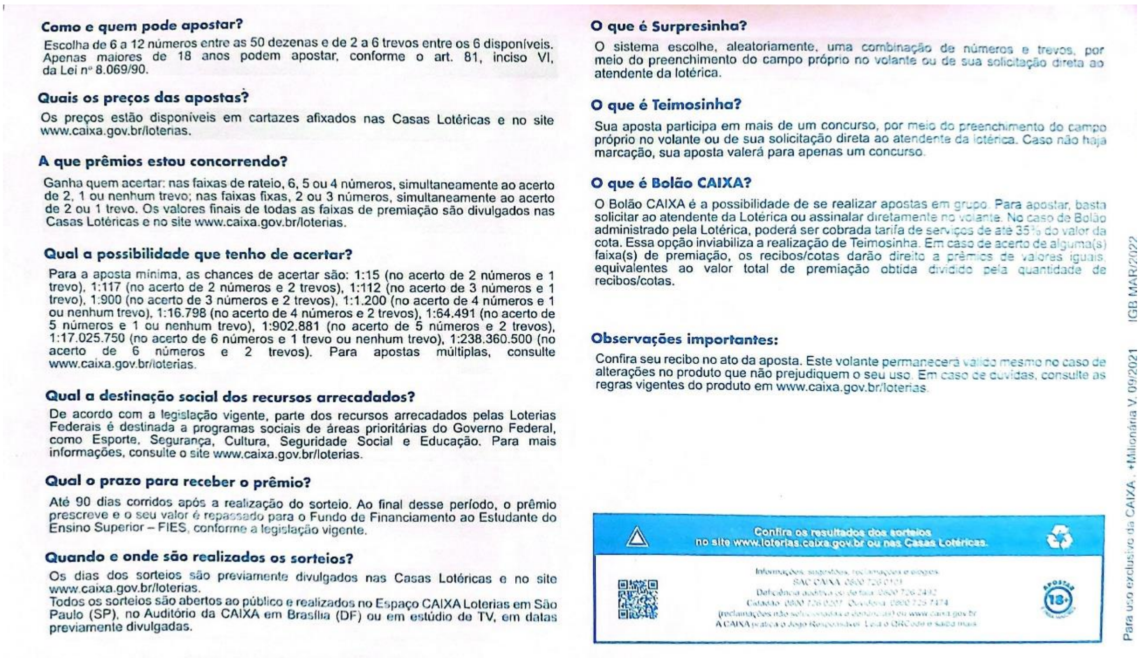
Faixa 1: Acertos de 6 números e 2 trevos, com premiação de 62 % do valor restante para premiações;

A seguir, apresentamos o bilhete da + Milionária, frente e verso, conforme se encontra em loterias físicas da Caixa.

Figura 34 - Frente do bilhete da + Milionária.

Fonte: Loterias Caixa.

Figura 35 - Verso do bilhete da + Milionária.



Como e quem pode apostar?

Escolha de 6 a 12 números entre as 50 dezenas e de 2 a 6 trevos entre os 6 disponíveis. Apenas maiores de 18 anos podem apostar, conforme o art. 81, inciso VI, da Lei nº 8.069/90.

Quais os preços das apostas?

Os preços estão disponíveis em cartazes afixados nas Casas Lotéricas e no site www.caixa.gov.br/loterias.

A que prêmios estou concorrendo?

Ganha quem acertar: nas faixas de rateio, 6, 5 ou 4 números, simultaneamente ao acerto de 2, 1 ou nenhum trevo; nas faixas fixas, 2 ou 3 números, simultaneamente ao acerto de 2 ou 1 trevo. Os valores finais de todas as faixas de premiação são divulgados nas Casas Lotéricas e no site www.caixa.gov.br/loterias.

Qual a possibilidade que tenho de acertar?

Para a aposta mínima, as chances de acertar são: 1:15 (no acerto de 2 números e 1 trevo), 1:117 (no acerto de 2 números e 2 trevos), 1:112 (no acerto de 3 números e 1 trevo), 1:900 (no acerto de 3 números e 2 trevos), 1:1.200 (no acerto de 4 números e 1 ou nenhum trevo), 1:16.798 (no acerto de 4 números e 2 trevos), 1:64.491 (no acerto de 5 números e 1 ou nenhum trevo), 1:902.881 (no acerto de 5 números e 2 trevos), 1:17.025.750 (no acerto de 6 números e 1 trevo ou nenhum trevo), 1:238.360.500 (no acerto de 6 números e 2 trevos). Para apostas múltiplas, consulte www.caixa.gov.br/loterias.

Qual a destinação social dos recursos arrecadados?

De acordo com a legislação vigente, parte dos recursos arrecadados pelas Loterias Federais é destinada a programas sociais de áreas prioritárias do Governo Federal, como Esporte, Segurança, Cultura, Seguridade Social e Educação. Para mais informações, consulte o site www.caixa.gov.br/loterias.

Qual o prazo para receber o prêmio?

Até 90 dias corridos após a realização do sorteio. Ao final desse período, o prêmio prescreve e o seu valor é repassado para o Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior – FIES, conforme a legislação vigente.

Quando e onde são realizados os sorteios?

Os dias dos sorteios são previamente divulgados nas Casas Lotéricas e no site www.caixa.gov.br/loterias.
Todos os sorteios são abertos ao público e realizados no Espaço CAIXA Loterias em São Paulo (SP), no Auditório da CAIXA em Brasília (DF) ou em estúdio de TV, em datas previamente divulgadas.

O que é Surpresinha?

O sistema escolhe, aleatoriamente, uma combinação de números e trevos, por meio do preenchimento do campo próprio no volante ou de sua solicitação direta ao atendente da lotérica.

O que é Teimosinha?

Sua aposta participa em mais de um concurso, por meio do preenchimento do campo próprio no volante ou de sua solicitação direta ao atendente da lotérica. Caso não haja marcação, sua aposta valerá para apenas um concurso.

O que é Bolão CAIXA?

O Bolão CAIXA é a possibilidade de se realizar apostas em grupo. Para apostar, basta solicitar ao atendente da Lotérica ou assinalar diretamente no volante. No caso de Bolão administrado pela Lotérica, poderá ser cobrada tarifa de serviços de até 35% do valor da cota. Essa opção inviabiliza a realização de Teimosinha. Em caso de acerto de alguma(s) faixa(s) de premiação, os recibos/cotas darão direito a prêmios de valores iguais, equivalentes ao valor total de premiação obtida dividido pela quantidade de recibos/cotas.

Observações importantes:

Confira seu recibo no ato da aposta. Este volante permanecerá válido mesmo no caso de alterações no produto que não prejudiquem o seu uso. Em caso de dúvidas, consulte as regras vigentes do produto em www.caixa.gov.br/loterias.

Confira os resultados dos sorteios no site www.loterias.caixa.gov.br ou nas Casas Lotéricas.

Para uso exclusivo da CAIXA . +Milionária V. 09/2021 IGB MAR/2022

Fonte: Loterias Caixa.

As respostas sobre as perguntas feitas sobre essa loteria foram poucas e as produções textuais acabaram não sendo significativas para uma análise dos erros, pois só continham rabiscos. Dessa forma, as perguntas serão apresentadas a seguir, com suas respectivas resoluções.

Pergunta 12: Para uma aposta simples, qual a probabilidade de o apostador ganhar o maior prêmio?

Resposta comentada:

A aposta simples consiste em escolher 6 números e 2 trevos. O apostador ganhará o maior prêmio se acertar todas as suas escolhas, o que só tem 1 chance de ocorrer. Portanto, $n(E) = 1$. O número de resultados possíveis é dado por $n(\Omega) = C_{50,6} \times C_{6,2} = 238.360.500$. Desse modo, a probabilidade de o apostador ser contemplado com o maior prêmio fazendo uma aposta simples é de 1 em 238.360.500.

Destaca-se do valor acima, que comparada com a Mega-Sena, a + Milionária é cerca de 4,7 vezes mais difícil de ganhar o maior prêmio, pois na Mega-Sena as chances são de 1 em 50.063.860.

Pergunta 13: Escolhendo-se 8 números e 4 trevos, qual a probabilidade de o jogador ser premiado na faixa 3?

Resposta comentada:

A faixa 3 consiste no acerto de 5 números e 2 trevos. O número de resultados possíveis continua sendo $n(\Omega) = 238.360.500$. Os casos favoráveis são em número de $n(E) = C_{8,5} \times C_{42,1} \times C_{4,2} = 14.112$. Assim, a probabilidade de um apostador acertar a faixa 3, escolhendo 8 números e 4 trevos é de

$$p(E) = \frac{14.112}{238.360.500} \; ou \; p(E) \approx \frac{1}{16.891}.$$

Pergunta 14: Observando as probabilidades associadas a uma aposta simples na tabela presente no site da caixa, determine a esperança E para a faixa 1 de premiação, supondo um prêmio estimado de R$ 17.000.000,00 como maior premiação. (estimativa para o dia 01/10/2022).

Resposta comentada:

A tabela a que se refere à questão pode ser encontrada em LOTERIAS CAIXA MAIS MILIONÁRIA (2023). Consultando a tabela é possível encontrar uma probabilidade de 1/238.360.500 para uma aposta simples, observando a faixa 1 de premiação.

Desse modo, teremos $x_{GANHO} = (17.000.000{,}00 - 6{,}00) = 16.999.994{,}00$; $p_{GANHAR} = \frac{1}{238.360.500}$; $x_{PERDA} = -6{,}00$ e $p_{PERDER} = \frac{238.360.499}{238.360.500}$.

Assim, a esperança matemática de lucro médio para este jogador será de:

$$E_{JOGADOR} = x_{GANHO} \times p_{GANHAR} + x_{PERDA} \times p_{PERDER}$$

$$\Rightarrow E_{JOGADOR} = 16.999.994{,}00 \times \frac{1}{238.360.500} + (-6{,}00) \times \frac{238.360.499}{238.360.500}$$

$$\Rightarrow E_{JOGADOR} \approx -5{,}93\ reais.$$

5.3 LEVANTAMENTO DOS ERROS DOS ESTUDANTES

A partir das produções textuais dos estudantes fizemos um levantamento dos erros observados, os quais estão exibidos no quadro a seguir.

Quadro 6 – Levantamento de erros observados dos estudantes.

Tipo de erro observado	Frequência absoluta do erro	Exemplos Ilustrativos dos erros
E1: Erro de interpretação do problema.	19	Fig. 5, Fig. 14 e Fig. 20.
E2: Erro na contagem dos elementos dos conjuntos Evento e/ou do espaço amostral.	15	Fig. 16 e Fig. 32.
E3: Erro de dificuldade de relacionar probabilidade com análise combinatória	11	Fig. 11 e Fig. 12
E4: Erro de interpretação da Esperança Matemática (ou falta de interpretação)	6	Fig.28 e Fig. 33.
E5: Exibir uma medida de probabilidade $p > 1$.	4	Fig. 6, Fig. 13.
E6: Erros de notação	3	Fig. 7, Fig. 9 e Fig. 16.
E7: Erros na falta de unidade da esperança matemática	1	Fig. 33.

E8: Erro na redução indevida do espaço amostral	1	Fig. 25.
E9: Erro ao interpretar o agrupamento como combinação, quando era um arranjo.	1	Fig. 18

Fonte: Autoria própria.

De acordo com o Quadro 6, percebe-se que o erro mais frequente está relacionado com a interpretação do problema.

O erro do tipo de interpretação do problema ocorre quando o aluno faz inferências, conclusões e julgamentos com base no que está escrito, mas de maneira equivocada.

Por exemplo, na Figura 20, o estudante afirma que é possível vender 10 quatrilhões de bilhetes diferentes do SPP da Sorte em um único dia, chegando a esse resultado após considerar que pode haver repetição do milhar, sendo que o enunciado é claro ao afirmar que "os bilhetes vendidos são todos diferentes, de modo que ninguém que comprar um bilhete terá algum número igual a qualquer outro bilhete".

Nos chamou bastante atenção o erro do tipo E3, que se caracterizou por o estudante fazer os cálculos combinatórios para os casos favoráveis e possíveis, às vezes correto, mas não utilizar os resultados para medir a probabilidade, sendo esta expressa por um raciocínio que não se comunicou com os cálculos anteriormente feitos.

Depreende-se do erro do tipo E3 que os estudantes não visualizavam, até aquele momento, uma relação entre probabilidade e as técnicas de contagem de análise combinatória, o que pode se constituir em um fator limitante para a aprendizagem de probabilidade.

Os demais erros podem ser revisitados a partir da indicação das figuras que os ilustram no Quadro 6, onde se encontram comentários pertinentes a cada um deles.

5.4 PROPOSTAS DE JOGOS CRIADOS PELOS ESTUDANTES NA ETAPA 2

Após as atividades desenvolvidas na Etapa 1, os estudantes foram orientados a formarem grupos, de dois a três integrantes, para criarem seus próprios jogos de azar, o que se constituiu como Etapa 2 deste trabalho.

As regras para a criação dos jogos são descritas a seguir.

Quadro 7 – Regras para a criação das loterias.

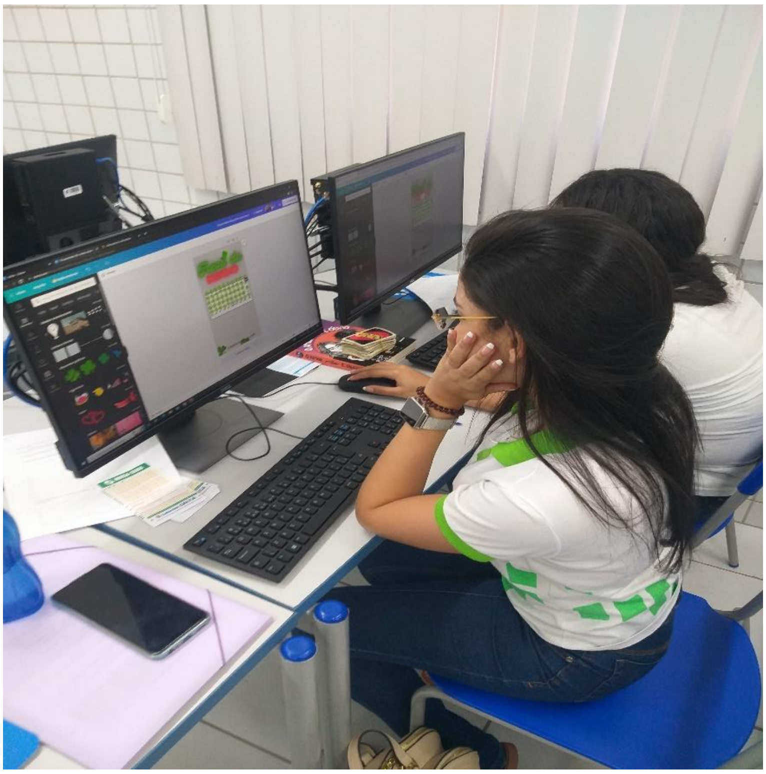
REGRAS PARA CRIAÇÃO DAS LOTERIAS	
PARTE DA FRENTE DO BILHETE	PARTE DO VERSO DO BILHETE
1) Criar um nome; 2) Criar um slogan (frase chamativa); 3) Colocar a cartela de números para o apostador escolher.	1) Regras do jogo; 2) Tabela de preços da loteria, que deve ser proporcional à quantidade de chances de ganhar o maior prêmio; 3) Prêmios da loteria (pensem em coisas próximas ao cotidiano de vocês. Nada de ganhar 1 carro, 1 casa, etc.); 4) Quais as probabilidades associadas a cada prêmio? 5) Qual a destinação social da arrecadação? (Exemplo: doar parte da arrecadação para a educação, para um hospital de câncer, etc).

Fonte: Autoria própria.

Os estudantes foram estimulados a criar os bilhetes no *Canva*, que é uma ferramenta tecnológica *online* para a criação de design, e pode ser acessada a partir do link https://www.canva.com/.

O processo de criação contou com a supervisão do pesquisador, que optou por mediações presenciais e *online*, através de aplicativo de mensagem de texto, conforme atestam as figuras a seguir.

Figura 36 - Registro do processo de criação da loteria Trevo do Destino.



Fonte: Autoria própria.

Figura 37 - Registro das orientações iniciais via aplicativo de mensagem de texto.

Fonte: Autoria própria.

O que nos motivou a propor que os estudantes criassem seus próprios jogos foi a oportunidade de torná-los mais ativos e protagonistas de seus processos de aprendizagem. Nesse sentido, na Etapa 2 o trabalho se aproximou do que se chama de metodologias ativas na Educação.

Bacich e Moran (2018, p. 4) explicam que as metodologias ativas “dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor”.

Nos próximos tópicos abordamos cada uma das loterias criadas pelos estudantes, fazendo uma análise das produções, a partir da observação do cumprimento das orientações exibidas no Quadro 7.

Para um entendimento melhor das criações feitas, elaboramos um pequeno questionário com 4 perguntas que os estudantes deveriam responder, foram elas:

1) Qual a inspiração para a criação do jogo?
2) Como escolheram as premiações?
3) Tiveram dificuldades em calcular as probabilidades e os preços?
4) Acredita que a pesquisa tenha contribuído para melhorar o seu entendimento sobre o conteúdo de probabilidade?

5.4.1 Jaca Sorte

A seguir é apresentado o bilhete do “Jaca Sorte”, frente e verso, criado pelos estudantes E e L, das turmas de EDIF 4M e INFO 3M, respectivamente.

Figura 38 - Bilhete do Jaca Sorte (Frente).

Fonte: Autoria dos estudantes E e L.

Figura 39 – Bilhete do Jaca Sorte (Verso).

Fonte: Autoria dos estudantes E e L.

Os estudantes alegam que a inspiração para a criação da loteria veio do animal jacaré, conforme relatado a seguir.

> "A identidade visual da loteria foi inspirada no animal Jacaré do papo amarelo, animal nativo da Amazônia que contém as cores da bandeira do país. Contudo o animal simboliza a capacidade de estar sobre uma situação e ver acima do olhar comum. E tendo essa representação de superioridade a nossa loteria atrai o público ao se sobressair sobre as demais" (Estudantes E e L).

Da observação do bilhete, percebemos que o Jaca Sorte tem prêmio único, que é um bombom do Jacaré, dado a quem acertar 2 números e 1 letra da palavra "JACA", destacando que os autores preferiram distinguir os A's em A1 e A2, fazendo referência ao primeiro A e ao segundo A, respectivamente, da palavra JACA.

O apostador pode escolher de 2 a 5 números, sendo o preço pago diretamente proporcional às chances de ganhar o prêmio. Para uma aposta simples, onde se escolhem 2 números e 1 letra, o preço é de R$ 1,00, mas pode chegar até a R$ 10,00, quando se escolhem

5 números. O quadro a seguir exemplifica o raciocínio utilizado pelos estudantes sobre o preço cobrado no bilhete do Jaca Sorte.

Quadro 8 – Preço do bilhete Jaca Sorte em função das chances de ganhar o maior prêmio.

Quantidade de n.º escolhidos	**Chances de ganhar**	**Preço**
2	1, pois é uma aposta simples	$R\$ \ 1,00$
3	3, pois temos $C_{3,2} = 3$ maneiras de acertar 2 números de três escolhidos.	$3 \times R\$ \ 1,00 = R\$ \ 3,00$
4	6, pois temos $C_{4,2} = 6$ maneiras de acertar 2 números de quatro escolhidos.	$6 \times R\$ \ 1,00 = R\$ \ 6,00$
5	10, pois temos $C_{5,2} = 10$ maneiras de acertar 2 números de cinco escolhidos.	$10 \times R\$ \ 1,00 = R\$ \ 10,00$

Fonte: Autoria própria.

Notemos que para o computo das chances de ganhar não fizemos referência à escolha da letra, já que o apostador só pode escolher apenas 1 letra por bilhete.

Em relação à probabilidade apresentada, 1:760, pode ser obtida a partir do cálculo de $n(\Omega) = C_{20,2} \times C_{4,1} = 190 \times 4 = 760$, pois de 20 números disponíveis 2 serão sorteados, e de 4 letras uma delas será sorteada, apontando assim, que há 760 resultados possíveis para um sorteio do Jaca Sorte, de modo que uma aposta simples tem 1 chance em 760 de ser premiada.

Na Tabela 4, a seguir, são apresentadas as probabilidades associadas ao jogo Jaca Sorte, em função da quantidade de números escolhidos, obtidos com o auxílio das informações contidas no Quadro 8.

Tabela 4 – Probabilidade de ganhar o prêmio no Jaca Sorte em função da quantidade de números escolhidos.

Quantidade de n.º escolhidos	**Probabilidade de ganhar o prêmio**
2	$\frac{1}{760}$ ou $\approx 0,13$ %
3	$\frac{3}{760}$ ou $\approx 0,39$ %

4	$\frac{6}{760}$ ou $\approx 0{,}79\ \%$
5	$\frac{10}{760}$ ou $\approx 1{,}32\ \%$

Fonte: Autoria própria.

Agora, supondo que a loteria em questão não faça distinção entre os dois A's da palavra JACA, e acreditando que durante o sorteio as quatro letras se façam presentes, um apostador que escolher a letra A terá o dobro de probabilidade de ganhar em relação aos valores apresentados na Tabela 4, pois de quatro letras, duas delas são "A".

Para sabermos se o jogo Jaca Sorte é justo ou injusto para quem joga, vamos calcular a esperança matemática do lucro de um apostador que faz uma aposta simples, usando os dados contidos no bilhete e tomando o preço de R$ 5,00 para cada "bombom do jacaré".

$$E_{Jaca\ Sorte} = (5{,}00 - 1{,}00) \times \frac{1}{760} + (-1{,}00) \times \frac{759}{760}$$
$$\Rightarrow E_{Jaca\ Sorte} \approx\ -0{,}99\ reais.$$

Como $E_{Jaca\ Sorte} < 0$, concluímos que o jogo é injusto para o apostador, como é de se esperar em jogos de azar e loterias.

5.4.2 Trevo do Destino

Essa loteria foi criada pelas estudantes B e I, ambas da turma de MAMB 3M, que justificaram a inspiração para a criação da seguinte forma:

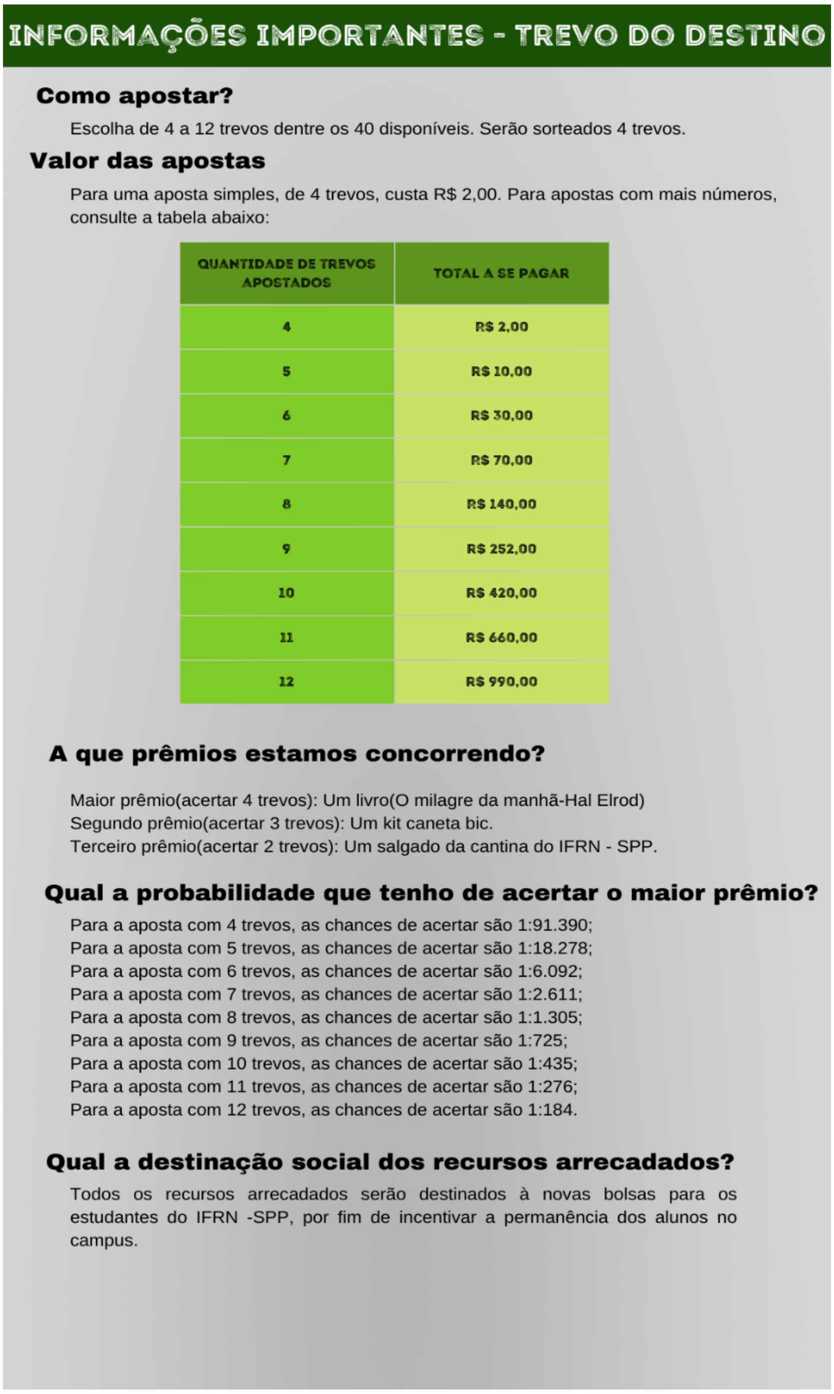
> "As loterias remetem a jogos de sorte e quando falamos "sorte" automaticamente pensamos no trevo de quatro folhas, portanto, a maior inspiração é o próprio trevo de quatro folhas. O trevo é do destino pois a partir dele (ou da sua sorte) o destino pode ser de prêmios ou não." (Estudantes B e I).

Nas Figuras 40 e 41 temos o bilhete do Trevo do Destino, frente e verso.

Figura 40 - Bilhete do Trevo do Destino (Frente).

Fonte: Autoria das estudantes B e I.

Figura 41 - Bilhete do Trevo do Destino (Verso).



INFORMAÇÕES IMPORTANTES - TREVO DO DESTINO

Como apostar?

Escolha de 4 a 12 trevos dentre os 40 disponíveis. Serão sorteados 4 trevos.

Valor das apostas

Para uma aposta simples, de 4 trevos, custa R$ 2,00. Para apostas com mais números, consulte a tabela abaixo:

QUANTIDADE DE TREVOS APOSTADOS	TOTAL A SE PAGAR
4	R$ 2,00
5	R$ 10,00
6	R$ 30,00
7	R$ 70,00
8	R$ 140,00
9	R$ 252,00
10	R$ 420,00
11	R$ 660,00
12	R$ 990,00

A que prêmios estamos concorrendo?

Maior prêmio(acertar 4 trevos): Um livro(O milagre da manhã-Hal Elrod)
Segundo prêmio(acertar 3 trevos): Um kit caneta bic.
Terceiro prêmio(acertar 2 trevos): Um salgado da cantina do IFRN - SPP.

Qual a probabilidade que tenho de acertar o maior prêmio?

Para a aposta com 4 trevos, as chances de acertar são 1:91.390;
Para a aposta com 5 trevos, as chances de acertar são 1:18.278;
Para a aposta com 6 trevos, as chances de acertar são 1:6.092;
Para a aposta com 7 trevos, as chances de acertar são 1:2.611;
Para a aposta com 8 trevos, as chances de acertar são 1:1.305;
Para a aposta com 9 trevos, as chances de acertar são 1:725;
Para a aposta com 10 trevos, as chances de acertar são 1:435;
Para a aposta com 11 trevos, as chances de acertar são 1:276;
Para a aposta com 12 trevos, as chances de acertar são 1:184.

Qual a destinação social dos recursos arrecadados?

Todos os recursos arrecadados serão destinados à novas bolsas para os estudantes do IFRN -SPP, por fim de incentivar a permanência dos alunos no campus.

Fonte: Autoria das estudantes B e I.

Pelo bilhete notamos que as regras para essa loteria consistem em escolher de 4 a 12 números de 40 disponíveis, onde em cada sorteio são sorteados 4 números. O maior prêmio é pago a quem acertar os 4 números escolhidos, o segundo prêmio para quem acertar somente 3 e o último prêmio para quem acertar apenas 2 números.

De acordo com o bilhete, os preços cobrados na aposta variam de R$ 2,00, que corresponde a uma aposta simples com probabilidade de 1:91390 de ganhar o maior prêmio, até R$ 990,00, que corresponde a uma aposta de 12 números, com probabilidade de 1: 184 de o apostador levar o primeiro prêmio.

As probabilidades apresentadas fazem referência somente às chances de ganhar o maior prêmio, que é o livro. No quadro a seguir, apresentamos outras probabilidades em relação a uma aposta simples.

Tabela 5 – Probabilidade de ganhar os prêmios da Trevo do Destino a partir de uma aposta simples.

Quantidade de acertos	**Probabilidade associada**
4	$\frac{C_{4,4}}{C_{40,4}} = \frac{1}{91.390}$
3	$\frac{C_{4,3} \times C_{36,1}}{C_{40,4}} = \frac{144}{91.390}$
2	$\frac{C_{4,2} \times C_{36,2}}{C_{40,4}} = \frac{3.780}{91.390}$

Fonte: Autoria própria, a partir do bilhete da “Trevo do Destino”.

O total de resultados possíveis para o sorteio do Trevo do Destino é $n(\Omega) = C_{40,4} =$ 91.390, pois de 40 números disponíveis, serão sorteados 4 deles, não importando a ordem. Para o caso de o apostador acertar os 4 números marcados, isso pode ocorrer de $C_{4,4}$= 1 maneira. Para acertar 3 dos 4 números a serem sorteados, o apostador deve ter escolhido 3 números dos 4 sorteados e ter escolhido um outro número que não foi sorteado, dentre os 36 restantes, o que pode se dar de $C_{4,3} \times C_{36,1}$ maneiras. Já para acertar somente 2 números dos 4 sorteados, o apostador deve escolher 2 números dos 4 sorteados, e escolher outros 2 números que não foram sorteados, o que pode acontecer de $C_{4,2} \times C_{36,2}$ maneiras distintas.

A partir dos dados da Tabela 5 podemos calcular o lucro médio esperado para este jogo, considerando uma aposta simples e os três prêmios.

Os valores dos prêmios foram estimados a partir de uma consulta feita em um site, o que revelou que o livro “O milagre da Manhã” custa R$ 29,90, o kit caneta bic com três unidades custa R$ 5,88 e a coxinha nas dependências do IFRN/SPP custa R$ 2,50.

Do exposto na Tabela 5, percebemos que o apostador tem 1 + 144 + 3.780 = 3.925 chances de sair com algum prêmio, ao passo que as chances de não ganhar prêmio algum são em número de 91.390 – 3.925 = 87.465.

Usando a fórmula da Equação 18, com os mesmos critérios de ganhos e perdas, um jogador terá um lucro médio por jogo de:

$$E = (29{,}90 - 2{,}00) \times \frac{1}{91.390} + (5{,}88 - 2{,}00) \times \frac{144}{91.390} + (2{,}50 - 2{,}00) \times \frac{3.780}{91.390} + (\,-2{,}00) \times \frac{87.465}{91.390}$$

$$\Rightarrow E \approx\ -1{,}88 \text{ reais.}$$

O resultado acima afirma que o apostador da Trevo do Destino paga R$ 2,00 para fazer uma aposta simples, mas ao final de cada jogo, em média, retorna com apenas R$ 2,00 – R$1,88 = R$ 0,12 do que havia apostado inicialmente.

Agora, suponhamos que um apostador da Trevo do Destino tenha disponível a quantia de R$ 10,00 para investir nesse jogo. O que seria mais vantajoso para esse apostador: fazer uma única aposta escolhendo 5 números, que chamaremos de situação A, ou fazer apostas simples em 5 sorteios distintos, que chamaremos de situação B?

Percebemos que a quantia a ser investida pelo apostador é a mesma nas duas situações, ou seja, R$ 10,00, pois uma única aposta de 5 números custa esse valor, e 5 apostas simples custam 5 x R$ 2,00 = R$ 10,00. Então, o que definirá qual das duas situações será mais vantajosa para o apostador será o valor esperado do lucro de cada uma.

Para a situação de apostas simples, esse cálculo já foi feito, tendo resultado em uma perda para o jogador de R$ 1,88 por sorteio, em média. Como estamos diante de 5 sorteios, o jogador perderá na situação B o equivalente a 5 x R$ 1,88 = R$ 9,40.

Já para analisarmos a situação A, devemos calcular seu lucro médio, E_A. Para tanto, devemos determinar as probabilidades associadas aos prêmios quando o jogador escolhe 5 números. Essas informações estão contidas no quadro a seguir.

Quadro 9 – Probabilidades de ganhar os prêmios da “Trevo do Destino” a partir de uma aposta com 5 números.

Quantidade de acertos	$\boldsymbol{n(E)}$**, onde** $\boldsymbol{E}$ **é o evento acertar 4, 3 ou 2 números, respectivamente.**	**Probabilidade associada**
4	Com 5 números escolhidos, o apostador terá $C_{5,4}$ = 5 possibilidades de acertar os 4 números.	$\frac{C_{5,4}}{C_{40,4}} = \frac{5}{91.390}$
3	Dos 5 números escolhidos, 3 deles estarão entre os sorteados, o quarto número sorteado será 1 dos 35 números não escolhidos pelo apostador. Assim, $n(E) = C_{5,3} \times C_{35,1}$	$\frac{C_{5,3} \times C_{35,1}}{C_{40,4}} = \frac{350}{91.390}$
2	Dos 5 números escolhidos, 2 deles estarão entre os sorteados, e os outros 2 números sorteados sairão dos 35 números não escolhidos pelo apostador. Assim, $n(E) = C_{5,2} \times C_{35,2}$	$\frac{C_{5,2} \times C_{35,2}}{C_{40,4}} = \frac{5.950}{91.390}$

Fonte: Autoria própria, a partir do bilhete da “Trevo do Destino”.

Com os dados apresentados acima e os preços dos prêmios já citados nesse trabalho, podemos calcular o lucro médio da situação A (E_A).

$$E_A = (29{,}90 - 10{,}00) \times \frac{5}{91.390} + (5{,}88 - 10{,}00) \times \frac{350}{91.390} + (2{,}50 - 10{,}00) \times \frac{5.950}{91.390} + (-10{,}00) \times \frac{85.085}{91.390}$$

$$\Rightarrow \; E_A \approx \; -9{,}81 \text{ reais.}$$

Assim, se o jogador decidir fazer uma única aposta com 5 números, o seu lucro médio será negativo em R$ 9,81, que é um prejuízo maior do que se ele optar por fazer 5 apostas simples, que ficou em R$ 9,40 negativo.

Dessa forma, diante do contexto do Trevo do Destino, é melhor o jogador optar por fazer 5 apostas simples ao longo de sorteios distintos, do que apostar todo o dinheiro em um único sorteio, escolhendo 5 números.

Claramente, há um equívoco na proposta do Trevo do Destino, pois parece penalizar o apostador disposto a gastar quantias maiores do que a mínima. Além do que, à medida que o apostador escolhe mais números os preços vão aumentando até chegarmos ao absurdo de termos preços mais altos do que os próprios prêmios oferecidos, como é o que acontece quando o apostador opta por jogar com 7 números, pagando R$ 70,00, embora os prêmios, somados, sejam de R$ 38,28.

5.4.3 Raspa Passa

Este jogo foi criado pelos estudantes A, F e K, todos da turma de INFOR 3M do IFRN/SPP.

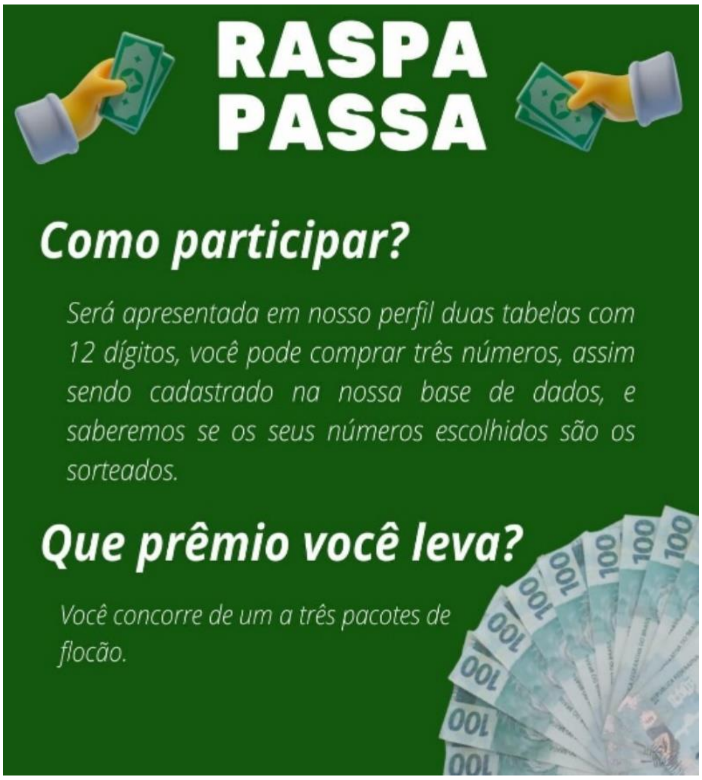
A inspiração para o nome veio “de um desafio que existe no jiu-jitsu, que se chama raspa passa, e a raspadinha foi inspirada na que era feita nos intervalos comerciais do SBT”.

Nas figuras a seguir temos o bilhete do “Raspa Passa”, com suas regras e premiações.

Figura 42 – Bilhete do Raspa Passa (Frente) e sua matriz numérica.

Fonte: Autoria dos estudantes A, F e K.

Figura 43 – Prêmios do Raspa Passa.



Fonte: Autoria dos estudantes A, F e K.

Figura 44 – Regras do jogo e probabilidades no Raspa Passa.

Fonte: Autoria dos estudantes A, F e K.

Figura 45 - Destinação social da arrecadação do Raspa Passa.

Fonte: Autoria dos estudantes A, F e K.

Pelas figuras que apresentam o bilhete do “Raspa passa”, é possível perceber que as regras do jogo consistem, basicamente, em se escolher três números de vinte e quatro disponíveis, ganhando prêmios quem acertar de 1 a 3 números, dos três sorteados.

Destaca-se que para este jogo só existe aposta simples, pois não é possível, em um único jogo, que o apostador aposte mais números do que a quantidade de números sorteados.

As probabilidades associadas a esse jogo, presentes na Figura 44, são apresentadas na forma decimal, o que não é habitual para um jogo de loteria ou azar, pois pode dificultar o entendimento para o apostador.

Dessa forma, o Quadro 10 traz as probabilidades em formatos diferentes, que poderiam ter sido utilizados pelos estudantes que criaram a “Raspa passa”.

Quadro 10 – Probabilidades associadas ao jogo “Raspa Passa”.

Quantidade de números acertados	**Probabilidade associada**
1	$\frac{C_{3,1}.C_{21,2}}{C_{24,3}} = \frac{630}{2.024}$ ou $\approx 31{,}1\ \%$
2	$\frac{C_{3,2}.C_{21,1}}{C_{24,3}} = \frac{63}{2.024}$ ou $\approx 3{,}11\ \%$
3	$\frac{C_{3,3}}{C_{24,3}} = \frac{1}{2.024}$ ou $\approx 0{,}49\%$

Fonte: Autoria própria, com base no volante da “Raspa passa”.

Do exposto acima, percebemos que o apostador tem 630 + 63 + 1 = 694 chances de faturar algum prêmio, em um total de 2.024 chances.

A Esperança Matemática do lucro de um jogador, por aposta, para um sorteio da “Raspa Passa”, é calculada a seguir, tomando como base o preço de R$ 5,00 para o flocão, que é o prêmio do jogo.

$$E_{Raspa\ Passa} = (5{,}00 - 20{,}00) \times \frac{630}{2.024} + (10{,}00 - 20{,}00) \times \frac{63}{2.024} + (15{,}00 - 20{,}00) \times \frac{1}{2.024} + (-20{,}00) \times \frac{2.024 - 694}{2.024}$$

$$\Rightarrow\ E_{Raspa\ Passa} \approx\ -18{,}12 \text{ reais.}$$

Ou seja, o jogador tem, em média, uma expectativa de perder aproximadamente R$ 18,12 em cada sorteio da “Raspa Passa”. Um resultado que revela como esse jogo é bastante desfavorável para o apostador.

5.4.4 Showtime

Este jogo foi desenvolvido pelos estudantes D e J, ambos da turma de INFOR 3M, que afirmam que a inspiração veio de “jogos mais antigos de animes de forma 8-bits e de jogos que ainda mantém a temática de personagens mais pixelados”.

As próximas figuras representam o bilhete do jogo “Showtime”.

Figura 46 - Matriz numérica do Showtime.

Fonte: Autoria dos estudantes D e J.

Figura 47 - Premiação da Showtime.

Fonte: Autoria dos estudantes D e J.

Figura 48 - Bilhete do Showtime com preços e probabilidades.

Fonte: Autoria dos estudantes D e J.

O jogo “Showtime” consiste em uma rifa que é uma modalidade de jogo no qual os apostadores escolhem números distintos e a pessoa contemplada com o número sorteado recebe uma premiação.

Percebe-se que na construção da proposta de jogo, os estudantes não observaram a proporção direta entre quantidade de chances de ganhar o prêmio e o preço cobrado, pois, por exemplo, uma pessoa que escolhe apenas 1 número pagará R$ 3,00 pela aposta, tendo apenas 1 chance de ser contemplada com o prêmio, mas aquele disposto a escolher 10 números, portanto com 10 chances de ganhar o prêmio, pagará um valor de R$ 25,00, ao invés de R$ 30,00, caso houvesse a citada proporcionalidade.

Para uma aposta simples, ou seja, aquela em que o jogador escolhe apenas 1 número, a esperança matemática do lucro desse jogador para a “Showtime” é dada por:

$$E_{Showtime} = (50{,}00 - 3{,}00) \times \frac{1}{100} + (-3{,}00) \times \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \; E_{Showtime} = \; -2{,}50\,.$$

O número obtido acima revela que um jogador paga R$ 3,00 por uma aposta simples na “Showtime”, e, ao final de cada sorteio, perde, em média, R$ 2,50.

A fim de compararmos os quatro jogos criados pelos estudantes, vamos observar os resultados da esperança matemática do lucro para apostas simples de cada um deles, conforme mostra a figura a seguir.

Tabela 6 - Comparação entre as loterias a partir de seus preços e esperanças do lucro.

Jogo	**Preço da aposta simples *(P)***	**Cálculo da Esperança Matemática do lucro do jogador (*E*)**	**Razão *E/P***
Jaca Sorte	R$ 1,00	- R$ 0,99	$= -0{,}99$
Trevo do Destino	R$ 2,00	-R$ 1,88	$= -0{,}94$
Raspa Passa	R$ 20,00	- R$ 18,12	$\approx -0{,}90$
Showtime	R$ 3,00	-R$ 2,50	$\approx -0{,}83$

Fonte: Autoria própria.

Diante dos dados apresentados na Tabela 6, percebemos que o jogo “Jaca Sorte” é o mais injusto para o jogador, considerando uma aposta simples, pois, para cada real investido o apostador perde R$ 0,99.

Já a Showtime apresenta a menor razão *E/P*, em módulo, indicando que para cada 1 real investido, o apostador perde R$ 0,83, sendo o tipo de jogo que podemos considerar menos injusto para o apostador, dentre os quatro analisados.

5.5 EVOLUÇÃO DA APRENDIZAGEM DOS ESTUDANTES A PARTIR DA CRIAÇÃO DOS JOGOS

Este tópico, que finaliza o capítulo, destina-se a fazermos um breve percurso de aprendizagem dos participantes da pesquisa.

Em relação às estudantes B e I, criadoras do "Trevo do Destino", notamos que houve uma significativa melhora na compreensão da relação existente entre Análise Combinatória e Probabilidade, pois em suas produções textuais da Etapa 1, por vezes faziam os cálculos de $n(E)$ e $n(\Omega)$ corretos, mas não usavam os resultados na definição de probabilidade como uma razão, preferindo utilizar raciocínios equivocados para expressar a probabilidade.

Em relação ao cálculo das probabilidades do "Trevo do Destino", as estudantes não apresentaram dificuldades, determinando os valores muito rapidamente.

Já em relação ao cálculo do preço do bilhete, apresentaram dificuldades em interpretar a frase "... preço proporcional às chances de ganhar o maior prêmio", assim como a maioria dos participantes. As estudantes B e I não responderam à pergunta 10 do questionário, o que evidencia que elas continuavam tendo dificuldade em precificar jogo.

O caminho apresentado pelas estudantes era de uma proporção entre a quantidade de trevos e o preço a ser pago. Algo como "Se a pessoa escolhe 4 trevos paga R$ 4,00, se escolhe 8 trevos deve pagar R$ 8,00", não observando que as chances de ganhar o jogo marcando 8 trevos é 70 vezes maior do que quando se marca apenas 4 trevos.

Durante o processo mediativo presencial as estudantes foram confrontadas com os cálculos feitos de probabilidade para demonstrar que ao se dobrar a quantidade de trevos escolhidos as chances de ganhar não dobram também, o que refuta a tese inicial das estudantes. Elas perceberam o equívoco e refizeram seus cálculos dos preços a serem cobrados, agora de maneira correta.

Em relação aos estudantes E e L, criadores do "Jaca Sorte", houve uma evolução para a estudante E com relação ao uso correto da simbologia de combinação. Já com o estudante L não se pôde fazer um comparativo, já que o mesmo só participou da etapa de criação do jogo.

Em relação ao "Jaca Sorte", que é um jogo com 1 matriz numérica (de 1 a 20) e 1 matriz de letras da palavra Jaca, os estudantes apresentaram cálculos de probabilidade inicialmente equivocados, pois a palavra Jaca tem duas letras repetidas, o que faz com que o jogador que escolher essa letra tenha mais probabilidade de ganhar o jogo do que quem escolhe uma letra diferente. Os estudantes haviam feito os cálculos pensando elas como diferentes.

O pesquisador alertou o equívoco, mas sugeriu que os estudantes tentassem exprimir probabilidade considerando a repetição da letra A, mas preferiram distinguir as letras "A"s para evitar fazer outros cálculos.

Em relação à precificação do jogo, os estudantes cometeram os mesmos equívocos de B e I, pois raciocinaram "cada número custa R$ 0,50, então é só multiplicar esse preço pela quantidade de números escolhidos".

Os estudantes A, F e K, autores do jogo "Raspa Passa", apresentaram muitos erros de interpretação na Etapa 1 do trabalho, o que continuou a acontecer durante as mediações iniciais. Em determinados momentos ficou dúbia a proposta deles, pois às vezes pensavam como uma rifa, onde o jogador escolhe seus números preferidos, ora estavam inclinados para um jogo onde os números já estavam indicados no bilhete, sem a chance do jogador poder escolher. Houve momentos também em que para se ganhar o prêmio o jogador deveria acertar mais números do que a quantidade que podia escolher, tornando-se um jogo impossível de ser ganho.

Porém, ao final do processo criativo conseguiram vencer essas dificuldades, salientando a evolução do estudante A, que compreendeu a utilização de cálculos combinatórios nos contextos dos jogos de loteria.

Para os criadores da "Showtime", que foram os estudantes D e J, eles apresentaram uma proposta de jogo simples, que foi uma rifa, de modo que os cálculos de probabilidade foram muito simples e difíceis de observar se realmente se trata de uma evolução de aprendizagem que tiveram, ou é algo pontual, devido à facilidade do estudo probabilístico da rifa que apresentaram. Em relação à precificação do jogo, os estudantes não cumpriram a regra da proporcionalidade com as chances de ganhar, porém, deve-se levar em conta que no contexto de rifas é comum se fazer desconto para quem compra mais de um bilhete.

Antes de prosseguirmos para as conclusões deste trabalho, convém informar que as discussões suscitadas a partir das criações dos estudantes foram todas feitas anteriormente com os discentes, como forma de dar-lhes um retorno de suas produções, pontuando acertos e equívocos, além de encorajá-los a apresentar suas loterias na VI Mostra de Pesquisas Estatísticas, que ocorre anualmente no campus de São Paulo do Potengi, do IFRN.

6 Conclusões

A partir de uma metodologia de análise de erros, constatamos que os estudantes participantes da pesquisa apresentaram, inicialmente, muitas dificuldades, estas que foram das mais variadas possíveis.

Conforme análise, equívocos na decisão de reconhecer a natureza de agrupamento dos problemas, erros na utilização da fórmula de combinação, dificuldades em reconhecer e resolver problemas de probabilidade com eventos independentes, redução indevida do espaço amostral e, especialmente, dificuldades de interpretação do problema foram alguns dos presentes.

Quando confrontados com os cálculos e interpretação da esperança matemática do lucro aplicada em jogos com apostas, os participantes, de maneira geral, mostraram não terem tido dificuldade com o manuseio da fórmula e mesmo na determinação do valor esperado para o lucro. Porém, em relação às interpretações dadas, constatamos que a maioria não soube explicar o que significavam os valores encontrados.

De certo modo, as dificuldades já eram previstas, tendo em vista ser um conteúdo sensível aos estudantes, por demandá-los a fazer interpretações do texto, a tomar decisões que implicam nos cálculos e até mesmo a fazer cálculos que podem ser desafiadores para eles, quando se trata de fatoriais de grandes números. Porém, os erros não devem ser vistos como algo de todo indesejado, e muito menos como algo estático, no sentido de que quem erra não aprendeu o assunto e nem aprenderá.

De fato, percebemos que na segunda fase da metodologia, que foi a criação de loterias, alguns estudantes conseguiram vencer seus obstáculos no conteúdo, determinando as probabilidades corretamente. Sobre essa fase, notamos um engajamento maior dos estudantes, pois observaram na oportunidade um momento para pôr em prática seus conhecimentos.

Nas palavras de um dos participantes, "No encontro desse conteúdo com a prática, tivemos uma nova oportunidade de revisar e fixar melhor esses conteúdos". Já outra participante diz acreditar que melhorou seu entendimento de probabilidade, pois numa proposta dinâmica, consegue "absorver melhor o conteúdo".

Nesse sentido, a proposta de trabalhar com jogos, mais especificamente com jogos de loteria, mostrou-se satisfatória, especialmente quando os participantes foram postos no papel de criadores dos jogos, pois isso acabou por estimulá-los a obter informações corretas de probabilidade para colocar nos bilhetes confeccionados. Sendo assim, o trabalho apresentado conseguiu atingir seus objetivos, estimulando a criatividade e a aprendizagem dos estudantes em probabilidade por meio de jogos numa metodologia ativa na segunda fase.

Como forma de continuidade desse trabalho, sendo uma sugestão própria dos estudantes participantes, as criações podem ser expostas na Mostra de Estatística do campus de São Paulo do Potengi, do IFRN, ou até mesmo em outros momentos e locais, como em congressos e seminários, para que haja uma socialização dos produtos concebidos e compartilhamento de conhecimento.

Por fim, esperamos que professoras e professores que lerem esse trabalho sintam-se inspirados e encorajados a reproduzir em suas salas de aula as atividades aqui desenvolvidas, e logrem êxito na missão tão difícil, mas apaixonante, que é o ensino de probabilidade.

7 Referências Bibliográficas

ALVES, M. M. de O. **Um estudo sobre jogos de azar**. Orientador: Prof. PhD. Paulo Cezar Pinto Carvalho. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro - RJ, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1894&id2=86004 . Acessado em 15 mar. de 2023.

ANDRADE, R. T. B. **A probabilidade aplicada aos jogos de azar**. Orientador: Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3127&id2=150210331 . Acessado em 15 mar. 2023.

BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso Editora, 2018. 238 p.

BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. L. (org.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 144 p.

BRASIL. **Senado Federal. Legislação Informatizada – DECRETO Nº 357, DE 27 DE ABRIL DE 1844 – Publicação Original.** Brasília, DF: 1844. Disponível em: https://legis.senado.leg.br/norma/387220/publicacao/15634046. Acessado em 14 de mar. 2023.

BRASIL. **Câmara dos Deputados. Legislação Informatizada - DECRETO-LEI Nº 3.688, DE 03 DE OUTUBRO DE 1941 - Publicação Original.** Brasília, DF: Presidência da República, 1941. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/del3688.htm .Acesso em: 15 mar. 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologia. Brasília, DF: MEC, 2000.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio (PCN+). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2006.

BRASIL**. Guia de livros didáticos: PNLD 2018** – Matemática. Brasília, DF: MEC/SEB, 2017. 122 p.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. **Matriz de referência ENEM**. Ministério da Educação, 2023.

BRYANT, P.; NUNES, T. **Children's understanding of probability**. A literature review (full report). Londres: Nuffield Foundation, 2012.

BUSSAB, W. de; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013, 548 p.

CARVALHO, P. R. C. **O jogo de azar no Brasil: Uma análise sobre a sua possível legalização**. Orientador: Prof. Dr. Edihermes Marques Coelho. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Faculdade de Direito Prof. Jacy de Assis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/27368/4/JogoAzarBrasil.pdf. Acessado em 15 mar. 2022.

CORREA, V. B. **Ensino – aprendizagem de probabilidade no ensino médio: uma experiência usando jogos de loterias**. Orientador: Prof. Dr. Raimundo Luna Neres. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Matemática - PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2486&id2=92788 >. Acessado em 15 mar. 2023.

CURY, H. N.; VIALI, L. **Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada**. Revista Educação Matemática. n. 2, v. 11, p. 373-391. Out. 2009.

ENEM 2020 – **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD5.pdf .Acesso em: 15 mar. 2023.

FERREIRA, A. L. P. **Probabilidade e Loteria**. Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2535&id2=123 . Acessado em 15 mar. 2023.

FERREIRA, T. A. **Resolução de problemas de probabilidade no ensino médio: uma análise de erros em provas da OBMEP no Maranhão.** Orientador: Profa. Dr.ª Valdiane Sales Araujo. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2017. Disponível em: <0 https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3645&id2=150182338> . Acessado em 23 jun. 2023.

FILHO, H. C. S**. Probabilidade e Valor Esperado Discussão de problemas para o Ensino Médio**. Orientador: Prof. Dr. Nicolau Corça Saldanha. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Matemática - PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2365&id2=94639 >. Acessado em 02 mar 2023.

FONSECA, V. C. N. **Obstáculos epistemológicos da distinguibilidade e indistinguibilidade de objetos em análise combinatória e probabilidade**. Orientador: Prof.

Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3822&id2=95433> . Acessado em 20 jun. de 2023.

FRAGA, R. R. **O ESTUDO DE LOTERIAS: Uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio**. Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=135&id2=39544 . Acessado em 15 mar. 2023.

FREITAS, F. G. **Sequências didáticas inéditas e introdução à esperança matemática aplicadas em cursos pré-vestibulares**. Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4639&id2=160590013>. Acessado em 29 jan. 2023.

FREITAS, M. A. P. **Aspectos Históricos e Teóricos das Loterias**. Orientador: Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística - PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal de Goiás, Goiânia - GO, 2013. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1530&id2=45884 . Acessado em 15 mar. 2023.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGERN, E.; MORGADO, A. C**. A Matemática do Ensino Médio volume 2**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016, 322 p.

LIMA, S. O.; LIMA, R. F.; SILVA, A. W. J.; GIORDANO, C. C. **Ensino de Estatística, Probabilidade e Combinatória na Educação Básica: os novos desafios da BNCC**. Revista Baiana de Educação Matemática, Salvador, v. 03, n. 01, p. 01-20, e202209, jan./dez., 2022. Disponível em: < https://www.revistas.uneb.br/index.php/baeducmatematica/article/view/15640> . Acessado em 20 jan 2023.

LOTERIAS CAIXA. **Resultados da Mega-Sena**. Disponível em: <https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Download-Resultados.aspx>. Acessado em 20 mar. 2023.

LOTERIAS CAIXA. **Dia de sorte**. Disponível em <https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Dia-de-Sorte.aspx> . Acessado em 10 mar. 2023.

LOTERIAS CAIXA. **Mais milionária**. Disponível em < https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Mais-Milionaria.aspx>. Acessado em 03 de junho de 2023.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2011.

MINISTÉRIO DA ECONOMIA (BRASIL). Secretaria Especial do Tesouro e Orçamento. Secretaria da Avaliação, Planejamento, Energia e Loteria. Portaria nº 3.346, de 13 de abril de 2022. Autoriza e institui nova modalidade lotérica de prognósticos numéricos, que especifica, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, ano 2022, n. 73, p. 1, 18 de abril de 2022. Disponível em: https://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=18/04/2022&jornal=515&pagina=144&totalArquivos=298. Acessado em: 10 mar. 2023.

MINISTÉRIO DA FAZENDA (BRASIL). Secretaria de Acompanhamento Econômico. Portaria º 03, de 11 de maio de 2018. Institui nova modalidade lotérica de prognósticos numéricos, que especifica, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, ano 2018, n. 91, p. 24, 14 maio 2018. Disponível em:

https://www.in.gov.br/web/dou/-/portaria-no-3-de-11-de-maio-de-2018-14149678. Acesso em: 10 mar. 2023.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas.** 2. ed. Tradutor: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2018, 322 p.

OLIVEIRA, M. R. **Coleção Elementos da matemática 3: sequências, análise combinatória, matriz**. 3. ed. Fortaleza: VestSeler, 2021, 600 p.

OLIVEIRA, P. R. **Modelos de Urnas e Loterias**. Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1525&id2=1239>. Acesso em 25 ago. 2022.

PONTES, J. C.; NUÑEZ, J. B. **Questões de Estatística e Probabilidade nas provas do ENEM: uma aproximação a erros e dificuldades de aprendizagem**. Revista Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 3, n. 7, p. 87-110, jan./abr. 2019. Disponível em: < https://www.redalyc.org/journal/6001/600166634005/600166634005.pdf>. Acessado em 20 jun 2023.

PRADO, J. W. de S. **Noções de probabilidade por meio de jogos de azar**. Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana - BA, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2096&id2=82844. Acessado em 15 mar. de 2023.

PROFMAT. Dissertações do PROFMAT. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=&titulo=&polo= . Acessado em 15 mar. 2023.

PROBABILIDADE. *In*: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2023. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/probabilidade/>. Acesso em: 20 fev. 2023.

REZENDE, R. L. **Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos**. Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2020. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5764&id2=171052247 Acesso em 18 fev. 2023.

RIFO, L. **Probabilidade e estatística: aspectos de tomada de decisões e incertezas para o Ensino Fundamental e Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2020, 238 p.

SILVA, A. P. **JOGOS DE LOTERIA: Uma aplicação de probabilidade.** Orientador: Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse. Dissertação (Mestrado). PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4524&id2=170480202. Acesso em 15 mar. 2023.

SÓ MATEMÁTICA. Números mais sorteados da Mega-Sena. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/megasenaFrequentes.php>. Acessado em 26 fev. 2023.

SOUZA, F. R. **Loteria Federal: Sorte, azar ou Matemática?.** Orientador: Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita. Dissertação (Mestrado). PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Universidade Federal do Tocantins, Arraias - TO, 2017. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3799&id2=150911143 .Acesso em 15 mar. 2023.

ANEXOS

A.1 Termo de compromisso e livre esclarecido para maiores de idade

TERMO DE COMPROMISSO E LIVRE ESCLARECIDO

Prezado(a)

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, como voluntário, onde serão investigadas as probabilidades envolvidas em jogos de loteria. Esse termo de compromisso e livre esclarecido, que está em duas vias, uma delas é sua e a outra é do pesquisador, garante a não identificação pessoal dos participantes. Para dar mais transparência para os envolvidos na pesquisa, seguem abaixo algumas informações acerca do trabalho.

INFORMAÇÕES DA PESQUISA:

Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, *Campus* Natal – RN.

Título do Projeto: Probabilidade e Esperança Matemática em jogos de loteria: Mobilizando conhecimentos e criatividade dos estudantes.

Pesquisador: Prof. Antonio Fabio do Nascimento Torres.

Email: fabio85nt@gmail.com

Telefone: (83) 99952-2016

Orientadora: Profa. Dra. Débora Borges Ferreira.

Assinatura do pesquisador: ____

CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO

Eu, ____,
concordo em participar da pesquisa intitulada: Probabilidade e Esperança Matemática em jogos de loteria: Mobilizando conhecimentos e criatividade dos estudantes. Declaro que fui devidamente informado e esclarecido pelo pesquisador Antonio Fabio do Nascimento Torres, a respeito da pesquisa, onde foi garantido a mim o sigilo da minha identificação pessoal e que posso retirar meu consentimento a qualquer momento sem que isso leve a alguma penalidade.

Local e data: _____________________________ /_____/_____/_______

Assinatura do(a) participante: ____

A.2 Ficha de atividades aplicadas aos estudantes

FOLHA DE ATIVIDADES DOS PARTICIPANTES VOLUNTÁRIOS DA PESQUISA INTITULADA "PROBABILIDADE E ESPERANÇA MATEMÁTICA EM JOGOS DE LOTERIA: MOBILIZANDO CONHECIMENTOS E CRIATIVIDADE DOS ESTUDANTES"

Instruções:

(1) Respondam as atividades propostas de maneira individual;

(2) Não alterem suas respostas após a correção do pesquisador;

(3) Sempre justifiquem seus raciocínios;

(4) Usem a calculadora somente quando considerar o cálculo muito complexo;

PARTE 1 - LOTOEMOJI

Na loteria Lotoemoji são disponibilizados 9 emojis e o apostador deve escolher três deles. O sorteio é honesto de modo que cada emoji tem igual chance de ser selecionado. Durante o sorteio são sorteados 3 emojis, sem reposição, sem importar a ordem em que são selecionados.

Premiação: São três faixas de premiação. Ganha o 1º prêmio quem acerta todos os emojis.O 2º prêmio é para quem acerta somente 2 emojis e o 3º prêmio para quem acerta apenas 1 emoji. Abaixo estão os emojis disponíveis na cartela.

😀	🙃	🙏	😍	🤡	🤞	😡	😭	🤤
1 ( )	**2 ( )**	**3 ( )**	**4 ( )**	**5 ( )**	**6 ( )**	**7 ( )**	**8 ( )**	**9 ( )**

Calcule e interprete as probabilidades pedidas a seguir.

1) Qual é a probabilidade de um apostador acertar os 3 emojis?

2) Qual é a probabilidade de um apostador acertar somente 2 emojis?

3) Qual é a probabilidade de um apostador acertar somente 1 emoji?

PARTE 2 – SPP DA SORTE

A SPP da Sorte é um sorteio que ocorre na cidade de São Paulo do Potengi e consiste em vender bilhetes que contém, cada um, quatro números que vão de 0000 a 9999. Os bilhetes vendidos são todos diferentes, de modo quem ninguém que comprar um bilhete terá algum número igual a qualquer outro bilhete. Ganha quem tem o bilhete com o número sorteado.

O sorteio consiste em sortear primeiro o dígito da unidade de milhar, depois sorteia-se o dígito das centenas, em seguida o dígito da dezena e, por fim, o dígito da unidade, ambos os sorteios com dígitos que vão de 0 a 9 com igual chance de serem sorteados.

Vamos supor que o prêmio do dia 15/10/2022 tenha sido de R$ 500,00. Cada bilhete custa R$ 2,00.

Neste caso, determine:

4) Quantos números podem ser sorteados no Potengi da Sorte?

5) Quantos bilhetes podem ser vendidos, no máximo, por dia?

6) Observando apenas as chances de serem selecionados, caso você comprasse 1 bilhete da SPP da Sorte preferiria bilhetes com números de dígitos diferentes ou que tenham algum repetido?

7) Comprando apenas 1 bilhete qual a probabilidade de o apostador ganhar o prêmio?

8) Qual a esperança matemática esperada do lucro para um apostador que compra apenas 1 bilhete? Interprete o resultado.

PARTE 3 – LOTERIA DIA DE SORTE

A loteria Dia de Sorte é gerida pela Caixa Econômica Federal e foi criada em 2018. Consiste em escolher de 7 a 15 números de um total de 31 números (de 1 a 31), e escolher também um mês de sorte, que vai de janeiro a dezembro.

Ela conta com 5 faixas de premiação, conforme tabela a seguir.

Tabela: Faixas de premiações da loteria Dia de Sorte.

Faixa 1	Acertar somente o mês da sorte
Faixa 2	Acertar 4 números do mês da sorte
Faixa 3	Acertar 5 números do mês da sorte
Faixa 4	Acertar 6 números do mês da sorte
Faixa 5	Acertar 7 números do mês da sorte

Fonte: Autoria própria com dados coletados a partir do Site das Loterias da Caixa.

Os preços são de acordo com a quantidade de números escolhidos e são proporcionais às chances de ganhar o maior prêmio, conforme tabela abaixo.

Tabela de quantidade de números escolhidos e preço correspondente da aposta.

Quantidade de números	Valor da aposta
7 números + 1 Mês de Sorte	R$ 2,00
8 números + 1 Mês de Sorte	R$ 16,00
9 números + 1 Mês de Sorte	R$ 72,00
10 números + 1 Mês de Sorte	R$ 240,00
11 números + 1 Mês de Sorte	R$ 660,00
12 números + 1 Mês de Sorte	R$ 1.584,00
13 números + 1 Mês de Sorte	R$ 3.432,00
14 números + 1 Mês de Sorte	R$ 6.864,00
15 números + 1 Mês de Sorte	R$ 12.870,00

Fonte: Site das Loterias da Caixa.

A partir das informações sobre essa loteria responda:

9) Qual a probabilidade de um jogador ganhar o maior prêmio possível escolhendo 9 números e um mês da sorte? Tente expressar a resposta na forma como aparece no bilhete da loteria.

10) Considerando o preço do bilhete proporcional a quantidade de chances de ganhar o maior prêmio, como a caixa chegou a conclusão de que deveria cobrar R$ 72,00 para quem escolhesse 9 números?

11) Usando os valores das probabilidades informadas no bilhete determine a esperança de lucro médio *E* para um apostador que faz uma aposta simples, considerando somente o maior prêmio, que vamos estimar em R$ 150.000,00 (estimativa para o prêmio do dia 27/10/2022).

PARTE 4 - +Milionária

A +Milionária é uma loteria criada pela Caixa em 2022 e possui 10 faixas de premiação.

Para termos informações mais completas sobre essa loteria vamos acessar o site https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Mais-Milionaria.aspx .

A partir das informações coletadas, responda:

12) Para uma aposta simples, qual a probabilidade de o apostador ganhar o maior prêmio?

13) Escolhendo-se 8 números e 4 trevos, qual a probabilidade de o jogador ser premiado na faixa 3?

14) Observando as probabilidades associadas a uma aposta simples na tabela presente no site da caixa, determine a esperança E para a faixa 1 de premiação, supondo um prêmio estimado de R$ 17.000.000,00 (estimativa para o dia 01/10/2022)

15) Considerando uma aposta simples, qual seria o valor do prêmio máximo (Faixa 1) esperado para a + milionária que a tornaria um jogo justo?

A.3 Entrevista semiestruturada com o sócio da "SPP da Sorte"

ROTEIRO PARA A ENTREVISTA COM UM DOS SÓCIOS DA SPP DA SORTE

1) LER O TERMO DE COMPROMISSO;

2) PERGUNTAR SE O RESPONDENTE ACEITA PARTICIPAR DA PESQUISA;

PERGUNTAS

1) Como surgiu a ideia de criar o jogo e há quanto tempo ele existe?

2) Quais são as regras?

3) Como são produzidos os bilhetes?

4) Como chegaram no preço cobrado de R$ 2,00 por bilhete?

5) Sobre a premiação, quais são os valores e como chegaram nessas faixas iniciais de valores?

6) Ainda sobre os prêmios, quando não há vencedores a premiação acumula?

7) No bilhete está escrito "2 em 500". O que isso significa?

8) Quando, onde e como ocorrem os sorteios?

9) A banca faz algum levantamento diário para saber quantos bilhetes, no mínimo, devem ser vendidos para não ter prejuízo?

10) A banca trabalha com vendedores, popularmente conhecidos como cambistas. Há quantos cambistas trabalhando e qual o valor que paga para eles a cada bilhete vendido?

11) Como os premiados resgatam o prêmio?

12) Da observação dos hábitos dos jogadores, é possível destacar alguma preferência por milhares, ou dias de jogos, ou algo do tipo?

A.4 Questionário sobre a criação das loterias

1) Qual a inspiração para a criação do jogo?

2) Como escolheram as premiações?

3) Tiveram dificuldades em calcular as probabilidades? E os cálculos dos preços?

4) Acredita que a pesquisa tenha contribuído para melhorar seu entendimento sobre o conteúdo de probabilidade?